## 8. Применение преобразования Лапласа и Z-преобразования при решении задач

Рассмотрим некоторые типовые примеры.

**Пример 1**. Найдите Z-преобразование решетчатой функции $f(n)=e^{3n}\cdot \mathrm{ch}4n$.

Решение

Преобразуем функцию $f(n)$, используя определение функции $\mathrm{ch}n$:

$$f(n)=e^{3n}\cdot \mathrm{ch}4n=e^{3n}\cdot\frac{e^{4n}+e^{-4n}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{7n}+e^{-n}\right),$$

тогда по формуле 3) из таблицы соответствия получим

$$f(n)=\frac{1}{2}\left(e^{7n}+e^{-n}\right)\leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{7}}+\frac{z}{z-e^{-1}}\right).$$

**Ответ:** $F(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{7}}+\frac{z}{z-e^{-1}}\right)$.

**Пример 2.** Найдите Z-преобразование решетчатой функции $f(n)=n\cdot\sin 3n$.

Решение

Для нахождения $F(z)$ используем свойство 5° о дифференцировании Z-преобразования: $n\cdot f(n)\leftrightarrow -z\cdot F'(z)$.

Так как $\sin 3n\leftrightarrow\frac{z\sin 3}{z^2-2z\cos 3+1}$, то

$$f(n)=n\cdot\sin 3n\leftrightarrow -z\cdot\left(\frac{z\sin 3}{z^2-2z\cos 3+1}\right)^{/}=-z\cdot\frac{\sin 3\cdot\left(z^2-2z\cos 3+1\right)-z\sin 3(2z-2\cos 3)}{\left(z^2-2z\cos 3+1\right)^2}=$$

$$=-z\cdot\frac{\sin 3\cdot\left(z^2-2z\cos 3+1\right)-z\sin 3(2z-2\cos 3)}{\left(z^2-2z\cos 3+1\right)^2}=\frac{z\sin 3(z^2-1)}{\left(z^2-2z\cos 3+1\right)^2}$$

**Ответ:** $F(z)=\frac{z\sin 3(z^2-1)}{\left(z^2-2z\cos 3+1\right)^2}$.

**Пример 3.** Найдите решетчатую функцию $f(n)$ по ее $Z$-изображению $F(z)=\frac{z+3}{z^2+3z-10}$.

Решение

Рассмотрим решение данной задачи тремя различными способами.

1 способ.

Представим дробь $F(z)=\dfrac{z+3}{z^2+3z-10}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{z+3}{z^2+3z-10}=\frac{z+3}{(z+5)(z-2)}=\frac{A}{z+5}+\frac{B}{z-2}=\frac{A(z-2)+B(z+5)}{z^2+3z-10}$$

Используя метод частных значений получим: $\begin{array}{l} z=-5: \quad -7A=-2 \quad \Rightarrow \quad A=\dfrac{2}{7} \\ z=2: \quad 7B=5 \quad \Rightarrow \quad B=\dfrac{5}{7} \end{array}.$

Таким образом $\dfrac{z+3}{z^2+3z-10}=\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{1}{z+5}+\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{1}{z-2}$.

Используя таблицу, свойства линейности и запаздывания аргумента получим:

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{z+5}=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{z}{z+5}\leftrightarrow\frac{2}{7}(-5)^{n-1}, \qquad \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{z-2}=\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{z}{z+2}\leftrightarrow\frac{5}{7}\cdot 2^{n-1}$$

А значит $F(z)=\dfrac{z+3}{z^2+3z-10}\leftrightarrow\dfrac{2}{7}\cdot(-5)^{n-1}+\dfrac{5}{7}\cdot 2^{n-1}=f(n)$.

2 способ.

Используем формулу (8.4).

Точки $z_1=-5$ и $z_2=2$ являются простыми корнями знаменателя, а значит простыми полюсами функции $F(z)$, поэтому

$$f(n)=\operatorname*{Res}_{z=-5}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right)+\operatorname*{Res}_{z=2}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right).$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся формулой (8.5), а также тем, что функцию $F(z)$ можно записать в виде $F(z)=\dfrac{z+3}{(z+5)(z-2)}$:

$$\operatorname*{Res}_{z=-5}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right)=\lim_{z\to-5}\left((z+5)\cdot\frac{z+3}{(z+5)(z-2)}\cdot z^{n-1}\right)=\frac{2}{7}\cdot(-5)^{n-1}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right)=\lim_{z\to 2}\left((z-2)\cdot\frac{z+3}{(z+5)(z-2)}\cdot z^{n-1}\right)=\frac{5}{7}\cdot 2^{n-1}$$

С учетом полученных выражений имеем $f(n)=\dfrac{2}{7}\cdot(-5)^{n-1}+\dfrac{5}{7}\cdot 2^{n-1}$.

3 способ.

Используем формулу (8.7).

$$f(n)=\frac{P(z_1)}{Q'(z_1)}\cdot z_1^{n-1}+\frac{P(z_2)}{Q'(z_2)}\cdot z_2^{n-1}=\frac{P(-1)}{Q'(-1)}\cdot(-1)^{n-1}+\frac{P(-2)}{Q'(-2)}\cdot(-2)^{n-1}\langle=\rangle$$

Вычислим $Q'(z)$: $Q'(z)=2z+3$, тогда

$$\langle=\rangle\frac{-5+3}{2\cdot(-5)+3}\cdot(-5)^{n-1}+\frac{2+3}{2\cdot2+3}\cdot2^{n-1}=\frac{2}{7}\cdot(-5)^{n-1}+\frac{5}{7}\cdot2^{n-1}.$$

**Ответ**: $f(n)=\frac{2}{7}\cdot(-5)^{n-1}+\frac{5}{7}\cdot2^{n-1}$.

**Пример 4.** Найдите решетчатую функцию $f(n)$ по ее $Z$-изображению $F(z)=\frac{z-1}{(z+1)(z+2)^2}$.

Решение

Функция $F(z)$ имеет две особые точки: $z_1=-1$ полюс первого порядка; $z_2=-2$ полюс второго порядка.

По формуле (8.4) $f(n)=\operatorname*{Res}_{z=-1}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right)+\operatorname*{Res}_{z=-2}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right)$.

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right)=\lim_{z\to-1}\left((z+1)\cdot\frac{z-1}{(z+1)(z+2)^2}\cdot z^{n-1}\right)=-2\cdot(-1)^{n-1}=2\cdot(-1)^n$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-2}\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right)=\lim_{z\to-2}\left((z+2)^2\cdot\frac{z-1}{(z+1)(z+2)^2}\cdot z^{n-1}\right)'=\lim_{z\to-2}\left(\frac{z-1}{(z+1)}\cdot z^{n-1}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to-2}\frac{\left(z^{n-1}+(n-1)z^{n-2}(z-1)\right)(z+1)-(z-1)z^{n-1}}{(z+1)^2}=\frac{3n-7}{4}\cdot(-2)^n$$

Таким образом $f(n)=2\cdot(-1)^n+\frac{3n-7}{4}\cdot(-2)^n$.

**Ответ**: $f(n)=2\cdot(-1)^n+\frac{3n-7}{4}\cdot(-2)^n$.

**Пример 5.** Решите разностное уравнение второго порядка $y(n+2)-5y(n+1)+6y(n)=1$ при начальных условиях $y(0)=y(1)=0$.

Решение

Пусть $y(n) \leftrightarrow Y(z)$, тогда

$$y(n+2) \leftrightarrow z^2\left[Y(z)-\left(y_0+\frac{y_1}{z}\right)\right]=z^2\left[Y(z)-\left(0+\frac{0}{z}\right)\right]=z^2\cdot Y(z);$$

$$y(n+1) \leftrightarrow z[Y(z)-y_0]=z[Y(z)-0]=z\cdot Y(z)$$

Также по формуле 1) таблицы соответствия имеем $1 \leftrightarrow \dfrac{z}{z-1}$.

Запишем операторное уравнение:

$$z^2\cdot Y(z)-5z\cdot Y(z)+6\cdot Y(z)=\frac{z}{z-1} \quad \Rightarrow \quad (z^2-5z+6)\cdot Y(z)=\frac{z}{z-1}.$$

Выразим функцию $Y(z)$: $\quad Y(z)=\dfrac{z}{(z^2-5z+6)(z-1)}$.

Восстановим решетчатый оригинал $y(n)$ по полученному $Z$-преобразованию.

Так как особые точки $z_1=1, z_2=2, z_3=3$ функции $Y(z)$ являются ее простыми полюсами, то используя формулы (8.4) и (8.5) находим:

$$y(n)=\operatorname*{Res}_{z=1} Y(z)z^{n-1}+\operatorname*{Res}_{z=-1} Y(z)z^{n-1}+\operatorname*{Res}_{z=2} Y(z)z^{n-1}\langle=\rangle$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} Y(z)\cdot z^{n-1}=\lim_{z\to 1}\frac{z}{(z^2-5z+6)(z-1)}\cdot(z-1)\cdot z^{n-1}=\frac{1}{2}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2} Y(z)\cdot z^{n-1}=\lim_{z\to 2}\frac{z}{(z-2)(z-3)(z-1)}\cdot(z-2)\cdot z^{n-1}=-2^n$$

$$\operatorname*{Res}_{z=3} Y(z)\cdot z^{n-1}=\lim_{z\to 3}\frac{z}{(z-2)(z-3)(z-1)}\cdot(z-3)\cdot z^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot 3^n$$

$$\langle=\rangle\frac{1}{2}-2^n+\frac{1}{2}\cdot 3^n.$$

**Ответ:** $y(n)=\dfrac{1}{2}-2^n+\dfrac{1}{2}\cdot 3^n$.

## Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите Z-преобразование решетчатой функции $f(n)=e^{3n}\cdot n$.

$$\left(\text{Ответ}: \quad F(z)=\frac{z\cdot e^3}{(z-e^3)^2}\right)$$

2. Найдите Z-преобразование решетчатой функции $f(n)=n^3$.

$$\left( \text{Ответ}: \quad F(z) = \frac{z\cdot(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} \right)$$

3. Найдите Z-преобразование решетчатой функции $f(n) = e^{n-4}$.

$$\left( \text{Ответ}: \quad F(z) = \frac{1}{z^3(z-e)} \right)$$

4. Найдите решетчатую функцию $f(n)$ по ее $Z$-изображению $F(z) = \frac{2z-1}{z^2-4}$.

$$\left( \text{Ответ}: \quad f(n) = 3\cdot 2^{n-3} - 5\cdot(-2)^{n-3} \right)$$

5. Найдите решетчатую функцию $f(n)$ по ее $Z$-изображению $F(z) = \frac{z^2+1}{z^2+z-12}$.

$$\left( \text{Ответ}: \quad f(n) = \frac{1}{7}\left(10\cdot 3^{n-1} - 17\cdot(-4)^{n-1}\right) \right)$$

6. Найдите решетчатую функцию $f(n)$ по ее $Z$-изображению $F(z) = \frac{z^2+1}{(z-3)^3}$.

$$\left( \text{Ответ}: \quad f(n) = 3^{n-3}(5n^2+3n+1) \right)$$

7. Решите разностное уравнение второго порядка $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 0$ при начальных условиях $y(0) = 2;\ y(1) = 3$.

$$\left( \text{Ответ}: \quad y(n) = 1 + 2^n \right)$$

8. Решите разностное уравнение третьего порядка $y(n+3) - 5y(n+2) + 8y(n+1) - 4y(n) = 0$ при начальных условиях $y(0) = 0;\ y(1) = 2;\ y(2) = 1$.

$$\left( \text{Ответ}: \quad y(n) = -7 + 7\cdot 2^n - \frac{5n}{2}\cdot 2^n \right)$$

9. Решите разностное уравнение второго порядка $y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1;\ y(1) = 2$.

$$\left( \text{Ответ}: \quad y(n) = \frac{1}{5}\left(12\cdot 3^{n-1} + (-2)^n\right) \right)$$

10. Решите разностное уравнение второго порядка $y(n+2) - 3y(n+1) - 10y(n) = 0$ при начальных условиях $y(0) = 3;\ y(1) = -1$.

$$\left( \text{Ответ}: \quad y(n) = \frac{1}{7}\left(5^{n+1} + (-2)^{n+4}\right) \right)$$

11. Решите разностное уравнение третьего порядка $y(n+3)-3y(n+2)+3y(n+1)-y(n)=2^n$ при начальных условиях $y(0)=0;\ y(1)=0;\ y(2)=1$.

$\left(\text{Ответ}:\quad y(n)=2^n-(n+1)\right)$

12. Решите разностное уравнение второго порядка $y(n+2)+y(n+1)-2y(n)=0$ при начальных условиях $y(0)=1;\ y(1)=-1$.

$\left(\text{Ответ}:\quad y(n)=\dfrac{1}{3}\left(1-(-2)^{n+1}\right)\right)$.