中央大学大学院理工学研究科情報工学専攻

修士論文

選挙区割問題に対するヒューリスティクスを用いた ZDD 構築の効率化

Efficient ZDD Construction Using Heuristics for the Electoral Districting Problem

千原 良太
Ryota CHIHARA
学籍番号　21N8100011I

指導教員　今堀 慎治 教授

2023 年 3 月

概　要

衆議院議員選挙小選挙区制における選挙区割問題とは，各都道府県ごとに議席数 (区割数) が定められており，市区町村からなる小地域を組合せて区割を構成し，その中から最も良い区割を見つける離散最適化問題の一種である．実際の選挙区割では，人口の偏りによる「一票の格差」が問題提起されており，人口の格差を最小にした区割の導出が求められている．

この問題の解法として，ゼロサプレス型二分決定グラフ (ZDD) を用いた区割列挙が知られている．区割数や各区割の人口の上限・下限などを制約として与え，その制約から枝刈りを行うことで，解候補を列挙することができる．ただし，区割人口の上下限制約は，平均人口から一律に定められた格差許容定数を用いて計算し，メモリ不足等で解が導出できない場合のみ値を変更する手法が多く取られていた．

本論文では，ヒューリスティクスを用いて人口の上下限制約を定め，それを基に ZDD を構築することで，従来よりも効率的に解候補を得る手法を提案する．また，計算機実験を行い，従来手法よりも ZDD 構築における計算時間とメモリ消費量が削減できることを確認する．

キーワード: 離散最適化，選挙区割問題，ZDD，ヒューリスティクス．

目 次

第1章　はじめに

日本の衆議院議員選挙における小選挙区制の区割は，総定数から各都道府県に何議席を割り当てるかを決める定数配分問題と都道府県内で，割り当てられた議席数分の選挙区を市区町村を組合せて構築する区割画定問題を解くことによって，定めることができる．

定数配分問題は，法学，公共政策学，数理情報学などの様々な観点から取り組まれており，過去200年以上にわたり多くの手法が提案されている．2022年12月28日には，公職選挙法の一部を改正する法律（区割り改定法）が施行され，衆議院小選挙区選出議員の選挙区について「アダムズ方式」を用いた議席の配分が行われた [1]．アダムズ方式はアメリカ6代目大統領ジョン・アダムズが考案したとされており，簡単に説明すると「各都道府県の人口をある自然数で割った商の小数点以下を切り上げた数を，その都道府県の議席数とする」手法である．この手法は，一票の格差の是正には効果的とされているが,「アラバマ・パラドックス」と呼ばれる改訂時に議席総数が増加した際に，ある地区では配分される議席数が改訂前より減る現象が起こる場合がある．また，過去に提案された手法を比較したときに，一票の格差がほぼ等しい場合でも，各都道府県の人口が多い方が有利な手法，少ない方が有利な手法といった差が現れ，どの手法も一長一短であることから，選挙制度の意義等も踏まえつつ議論する必要がある．本稿では，定数配分問題については主に扱わず，2021年に行われた第49回衆議院議員選挙の定数配分をそのまま利用する．

区割画定問題は，都道府県内の選挙区の組合せが市区町村数の指数通り存在し，NP困難であるとして，20世紀末までは最適性の保障のない解の導出の研究が主であった．しかし，2003年に根本・堀田が数理モデルによる定式化を提案 [2] して以降，数理的な観点から多くの研究が取り組まれており，厳密解を導出するための手法がいくつか提案されている．その中の手法の一つとして，ゼロサプレス型二分決定木（ZDD）を用いた区割列挙があり，フロンティア法によってトップダウンにZDDを構築することで，高速に選挙区割を求めることが可能となっている．ただし，いくつかの都道府県においては計算機のメモリ不足により解を導出することが困難である．

本研究では，区割画定問題（以下「選挙区割問題」と称する）におけるZDDを用いた区割列挙について扱い，ヒューリスティクスを用いて効率的に区割列挙を行う手法を提案する．本稿の第2章では選挙区割問題について定義し，数理モデルによる定式化を説明す

る．第 3 章では ZDD とフロンティア法，それを用いた区割列挙アルゴリズムについて詳しく述べる．第 4 章では，第 3 章で説明したアルゴリズムとヒューリスティクスを組合せることで ZDD 構築を効率化する手法を提案する．そして，第 5 章で計算機実験の結果とその考察を示し，第 6 章で結論と今後の課題について述べる．

第2章　選挙区割問題

本章では，選挙区割問題について，国の公表資料から区割作成方針を示し，問題の定義，数理モデルによる定式化について説明する．

2.1　区割作成方針

衆議院議員選挙の選挙区割の改定案は，衆議院議員選挙区画定審議会によって作成される．当審議会では，令和4年2月21日に『区割り改定案の作成方針』を公表しており，作成方針を簡潔に述べると以下の6点となる．

1. 一票の格差は2倍未満とする．
2. 議員1人当たり人口が最も少ない県においては，各選挙区の人口をできるだけ均等にする．
3. 改定案の作成にあたり，選挙区の区域の異動は，区割り基準に適合させるために必要な範囲とする．
4. 選挙区は飛び地にしない．
5. 選挙区を構成する市区町村は原則分割しない．
6. 地勢，交通，人口動向などの自然的，社会的条件を総合的に考慮する．

本研究では，項目1,2,4,5を主に考慮する．ただし，項目2は，人口最小の県だけでなく，全ての都道府県において各選挙区の人口をできるだけ均等にすることを目指す．項目3は，改定前との区割の比較が研究の主旨ではないため考慮しない．項目6は，モデル化するには複雑であるため，今回は飛び地にしないことで，自然的，社会的条件を満たしているとみなす．

2.2 問題定義

区割作成方針をもとに問題を定義する．まず，都道府県ごとに市区町村とその隣接関係，各市区町村の人口を重みつきグラフ $G = (V, E, w)$ で表現する．入力は，市区町村数を n として，市区町村集合 $V = \{v_1, ..., v_n\}$, 市区町村の隣接関係 $E = \{\{v_i, v_j\}|$ 市区町村 v_i と v_j は隣接 $\}$, 市区町村 v_i の人口 w_i, 選挙区数 $d(< n)$ が与えられる．そして出力は，d 個の選挙区の集合 $S = (S_1, ..., S_d)$ であり，S_k は k 番目の選挙区に属する市区町村の集合を表す．ただし，選挙区は以下の制約を満たす必要がある．

制約 1：選挙区に属する市区町村から誘導される部分グラフは連結である．

制約 2：全ての市区町村は唯一つの選挙区に属す．

制約 3：選挙区は空集合ではない．

また，選挙区ごとの人口の和 $P = \{P_1, ..., P_d\}$ $(P_k = \sum_{v_i \in S_k} w_i\ (k = 1, ..., d))$ を計算し，選挙区人口の最小値 $\min(P)$ と最大値 $\max(P)$ を調べる．制約を満たす選挙区割の中で，一票の格差が最小のもの，すなわち $\frac{\max(P)}{\min(P)}$ の値が最小であるものを最適な選挙区割と定める．

2.3 モデル表現

選挙区割を表す数理モデルの代表例として，集合分割型モデル [2] を説明する．まず，制約 1 から連結である市区町村の集合をブロックと名付ける．空集合を除く全てのブロック集合を $\mathscr{B}$ で表し，ブロック集合 $\mathscr{B}$ から選んだ d 個のブロックが制約 2 を満たすと，実行可能な区割となる．その中で一票の格差が最小な区割を見つける．

入力データ:市区町村集合 V，選挙区数 d，ブロック集合 $\mathscr{B}$ を表す行列 $[b_{ij}|i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., |\mathscr{B}|]$：市区町村 v_i がブロック j の構成要素のとき $b_{ij} = 1$；そうでないとき $b_{ij} = 0$, ブロック j の人口 $q_j = \sum_{i \in n} b_{ij} w_i\ (j = 1, ..., |\mathscr{B}|)$.

変数：一つの選挙区の人口上限を示す変数 u，下限を示す変数 l，バイナリ変数 $x_j\ (j = 1, ..., |\mathscr{B}|)$：区割にブロック j を使用するとき $x_j = 1$；しないとき $x_j = 0$.

定式化：

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && u/l && (2.1)\\ &\text{subject to} && q_j x_j \leq u \quad (j=1,...,|\mathscr{B}|) && (2.2)\\ &&& \alpha(1-x_j)+q_j x_j \geq l \quad (j=1,...,|\mathscr{B}|) && (2.3)\\ &&& \sum_{j=1,...,|\mathscr{B}|} b_{ij} x_j = 1 && (2.4)\\ &&& \sum_{j=1,...,|\mathscr{B}|} x_j = d && (2.5)\\ &&& x_j \in \{0,1\} \quad (j=1,...,|\mathscr{B}|) && (2.6) \end{aligned}$$

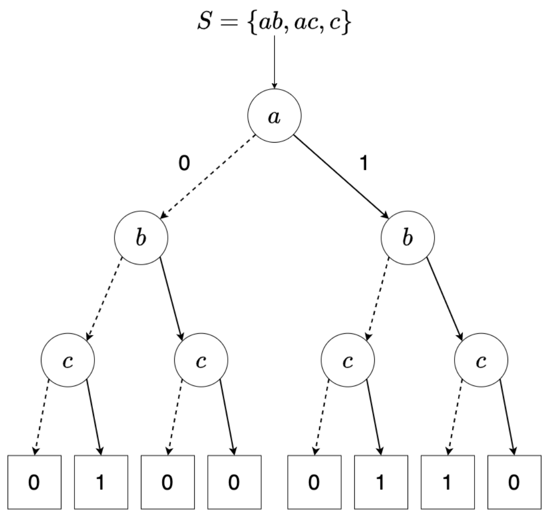
ここで，α は十分大きな定数とする．式 (2.1) は一票の格差を最小化することを目的関数として示している．式 (2.2) と (2.3) は変数 u と l を正しく表すために必要な制約である．式 (2.4),(2.5),(2.6) は制約 2 を表現している．また，制約 1 と 3 についてはブロック集合 $\mathscr{B}$ から選挙区を構成しているため，条件を満たしている．よって，上述の形で選挙区割問題を定式化することができる，

第3章　ZDDを用いた区割列挙手法

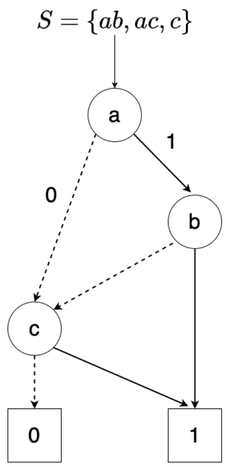
本章では，ZDD と呼ばれるデータ構造について解説し，川原らが提案した頂点重み格差を考慮した部分グラフ列挙アルゴリズム [6] を選挙区割問題に適応する手法について述べる．

3.1　ゼロサプレス型二分決定グラフ

ゼロサプレス型二分決定グラフ (ZDD) は，組合せ集合を表す非巡回有向グラフで，1993 年に湊真一によって考案された [3]．組合せ集合とは「n 個のアイテムから任意個を選ぶ組合せ」を要素とする集合である．n 個のアイテムから任意個を選ぶ組合せは 2^n 通りあるので，その組合せ集合は，2^{2^n} 通り存在する．例えば，a, b, c の 3 つの要素から組合せ集合を作る場合，$\{ab, ac, c\}, \{a\}, \{\lambda, abc\}, \phi$ などが挙げられる（λ は空の組合せ要素，ϕ は空の集合を表す）．



(a) 場合分け二分木



(b) ZDD

図 3.1: 組合せ集合 $S = \{ab, ac, c\}$ のグラフ表現

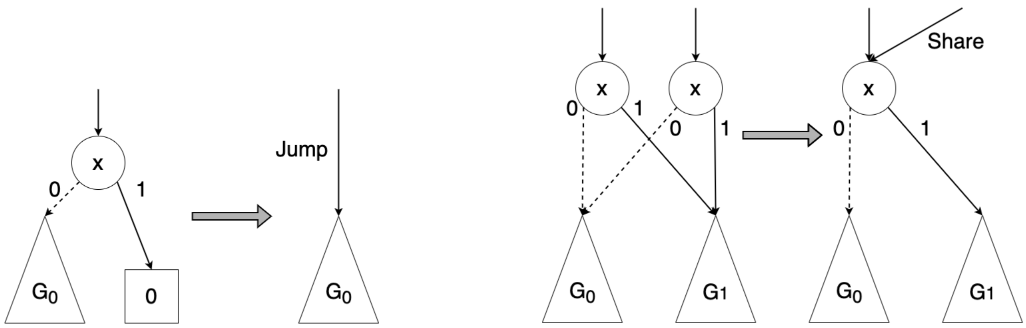
このような指数的な数の集合は，ZDD を用いることで効率的に表現することができる．図 3.1 は，組合せ集合 $S = \{ab, ac, c\}$ を場合分け二分木と ZDD の両方で表した例である．

この二つのグラフは，各節点にアイテム名を表すラベルが割り当てられていて，0 と 1 のラベルが付与された 2 種類の枝が分岐している．そして葉には 0 または 1 の値が記入されている．以降は 0 のラベルをもつ枝を 0-枝 (破線)，1 のラベルをもつ枝を 1-枝 (実線) とし，また，0 の値が記入された葉を 0-終端 (0-terminal)，1 の値が記入された葉を 1-終端 (1-terminal) と呼ぶ．これらのグラフでは，1-枝と 0-枝はその接点の要素を選ぶかどうかの場合分けを表し，葉の値はその葉に対応する組合せが集合に属するかを示している．

場合分け二分木と ZDD を比較すると，ZDD は場合分け二分木で集合の表現に不要な頂点と枝を削除，圧縮していることがわかる．場合分け二分木から ZDD を構築するには，次の 2 つの規則を可能な限り適用する．

冗長頂点の削除 1-枝が 0-終端を指している場合に，この節点を取り除き，0-枝の行き先に直結させる (図 3.2a).

等価節点の共有 等価な節点（ラベルが同じで，0-枝同士，1-枝同士の行き先が同じ）を共有する (図 3.2b).



(a) 冗長節点の削除　　**(b)** 等価節点の共有

図 3.2: ZDD の圧縮規則

また，ZDD は組合せ集合をコンパクトに表現できるだけでなく，ZDD 同士で集合演算が定義されており，共通集合や差集合などを表す ZDD を高速に得ることができる．これを利用することで，愚直に場合分け二分木を作るよりも高速に ZDD を構築するボトムアップな構築手法 [3] が知られている．ただし，アイテム数に対して指数的な個数の組合せを生成するような集合演算を行う場合は注意が必要であり，集合演算の順序によっては圧縮がうまく機能せず，ZDD のサイズが指数的に増大する恐れがある．このような場合は，計算を行う前に圧縮度を推定することは一般的に困難である．

近年の研究では，ボトムアップな構築手法ではなく，根から順に ZDD を作成するトップダウンな構築手法 [4][5] がよく用いられている．アイテム $\{a_1, \ldots, a_m\}$ から特定の組合

Algorithm 1 トップダウンな ZDD 構築アルゴリズム

1: 根ノード n_{root} を作成
2: **for** $i = 1, ..., m$ **do** // m: アイテム数
3: 　**for** 既に作成済みの i 段目の各ノード n について **do**
4: 　　**for all** $x \in \{0, 1\}$ **do** // 0-枝，1-枝の処理
5: 　　　終端条件の判定
6: 　　　新しいノード n' を作成 ($i + 1$ 段目とする)
7: 　　　n' の情報を更新
8: 　　　**if** n' と等価なノード n'' が既に存在 **then**
9: 　　　　$n' \leftarrow n''$
10: 　　　**end if**
11: 　　　n の x-枝の先を n' とする．
12: 　　**end for**
13: 　**end for**
14: **end for**

せ集合を表す ZDD を構築するアルゴリズムについて，疑似コードの形で **Algorithm 1** に記した．

Algorithm 1 の 2 行目が ZDD の格段についての処理，3 行目がその段の各ノードについての処理である．4 行目が x-枝 ($x = 0, 1$) の先のノードを作成する．$x = 1$ はアイテム a_i を採用する場合，$x = 0$ はアイテム a_i を採用しない場合に対応する．5 行目では，終端条件の判定を行う．その時点で組合せ集合の要素に含まれないと判定できる場合には，n の x-枝の先を 0-終端に接続する．終端に接続する場合は，6-11 行目は実行しない．7 行目では，ノードに記憶させる情報を更新する．記憶させる情報は問題によって様々であるため，内容は後述する．8 行目でノードが共有可能であるか判定を行う．

トップダウンな構築手法では，フロンティアというラベル a_i がついた枝を処理した状態における頂点集合 $F_i = (\bigcup_{j=1,...,i} a_j) \cap (\bigcup_{j=i+1,...,m} a_j)$ を用いることから，一般的に「フロンティア法」と呼ばれる．フロンティアは，処理が途中のアイテムのみを保持するため，**Algorithm 1** の 5 行目の処理では，フロンティアに含まれるノードの情報のみ参照すればよい．アイテムの総数に対して，フロンティアのサイズが小さければ効率よく計算を行うことができる．

なお，5-7 行目の内容は，同じフロンティア法でも解く問題の種類によって細かな違いがある．選挙区割問題の実装については後節で説明する．

3.2 ZDD での選挙区割列挙の表現

本節では，選挙区割の列挙を表現する組合せ集合と ZDD について述べる．選挙区割の集合は，選挙区となる部分グラフを構築に利用できる全ての辺の組合せの集合と言い換えることができる．例として，図 3.3 から 2 つの部分グラフを列挙することを考える．

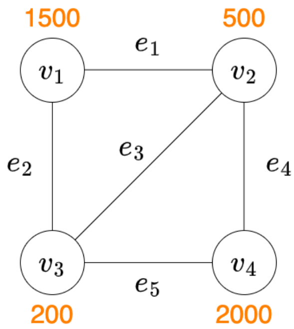


図 3.3: 4 頂点の重み付きグラフ

図 3.3 の橙色で書かれた数字は，頂点の重み，すなわち市区町村の人口である．グラフ分割する際には，各グラフの重みをなるべく均等にしたいため，今回は解となる頂点 (市区町村) の集合を $\{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\}, \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4\}\}$ の 2 つとすると，部分グラフの重みは，それぞれ $\{2000, 2200\}, \{2200, 2000\}$ となる．

ここで部分グラフを構成する辺に注目してみる．頂点集合から部分グラフの構成に利用できる全ての辺の集合は，$\{e_1, e_5\}, \{e_1, e_2, e_3\}$ である．この辺集合から ZDD を構築することで，選挙区割の列挙を行うことができる (図 3.4)．

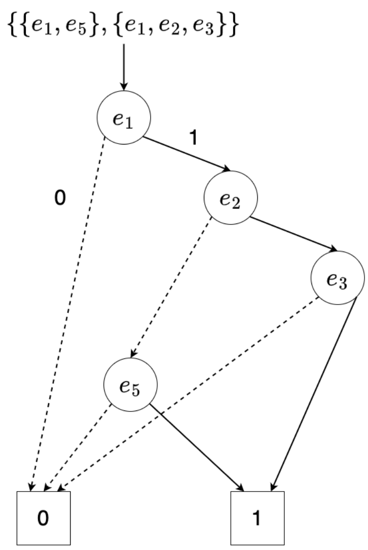


図 3.4: 選挙区割の集合を表す ZDD

図 3.4 では，節点のラベルに辺の名前が記載されている．1-枝は節点のラベルに記されたグラフの辺を採用，0-枝は採用しないことを表している．そして，1-終端に向かうパスを辿ることで，求めたい部分グラフ集合を容易に見つけることができる．

3.3 区割列挙アルゴリズム

本節では，川原らが考案した重み付きグラフ分割列挙アルゴリズム [6] を用いて，選挙区割を列挙する ZDD の構築アルゴリズムを説明する．

アルゴリズムを説明する前準備として，用語・変数について定義する．まず，元のグラフを $G = (V, E, w)$，辺 E の総数を m，列挙したい部分グラフ集合を $\mathcal{G}$，分割数 (区割数) を d とする．なお，辺集合 E の順序付けは，ヒューリスティックアルゴリズムを用いて，フロンティアの大きさが出来るだけ小さくなるように行う．N は ZDD のノードの集合を表し，N_i はグラフ G の辺 $e_i (\in E)$ をラベルにもつノード集合を指す．F_i は，ラベル $e_i = \{u, v\}$ をもつ ZDD ノードを処理している地点での，グラフの頂点集合からなるフロンティアであり，

$$F_i = (\bigcup_{j=1,\dots,i} e_j) \cap (\bigcup_{j=i+1,\dots,m} e_j)$$

から求められる．

ZDD のノード n には，終端を除いて以下の情報を含んでいる．

n.comp

フロンティア上での，部分グラフの頂点の集合を示す．
例えば，$n.\mathrm{comp} = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \dots\}$ とあれば，頂点 v_1, v_2, v_3 が同一部分グラフの頂点であり，連結していることを表す．

n.fps

接続を禁止する頂点のペアセット (forbidden pair set)．
例えば，部分グラフの頂点集合をそれぞれ C_1, C_2 とすると，$n.\mathrm{fps} = \{\{C_1, C_2\}, \dots\}$ は，C_1 に含まれる頂点と C_2 に含まれる頂点を接続させてはいけないことを表す．

n.cc

確定した部分グラフの個数の値が入る．
フロンティアからある部分グラフ内の頂点が全て取り除かれたとき，その部分グラフは他のグラフと連結することがないため，n.cc をインクリメントする．

n.weight

部分グラフごとに頂点重みの和を保存する．

なお，根ノード n_{root} のもつ情報は，n.comp，n.fps, n.weight は空集合 $\emptyset$，$n.\mathrm{cc} = 1$ と定義する．次に，選挙区割の ZDD を構築するフロンティア法を **Algorithm 2** に示す.

Algorithm 2 ConstructZDD

1: $N_1 \leftarrow \{n_{root}\}$
2: $N_i \leftarrow \emptyset$ for $i = 2, \ldots, m+1$
3: **for** $i = 1, \ldots, m$ **do**
4:     **for all** $n \in N_i$ **do**
5:         **for all** $x \in \{0, 1\}$ **do**
6:             $n' \leftarrow \mathrm{MakeNewNode}(n, i, x)$
7:             **if** $N' \neq \mathbf{0}, \mathbf{1}$ **then**
8:                 **if** n' と等価なノード $n'' \in N_{i+1}$ が既に存在 **then**
9:                     $n' \leftarrow n''$
10:                 **else**
11:                     $N_{i+1} \leftarrow N_{i+1} \cup \{n'\}$
12:                 **end if**
13:             **end if**
14:             n の x-枝の先を n' とする．
15:         **end for**
16:     **end for**
17: **end for**

Algorithm 2 の全体の流れは，**Algorithm 1** と大きく異ならないため，詳細な説明は省略する．注目すべき点は，6 行目の MakeNewNode という関数である．これは，終端条件の判定と，$i+1$ 段目に新しいノード n' を作成する処理が含まれていて，新しい節点もしくは，0-終端，1-終端のいずれかを返す．この関数の処理を，人口制約がない場合とある場合のそれぞれで説明する．

3.3.1 人口制約なしの場合

まず，人口制約がない場合，ZDD のノードに含まれる情報は，n.comp，n.fps，n.cc の 3 種であり，n.weight は含まれない．MakeNewNode の擬似コードを **Algorithm 3** に示す.

Algorithm 3 MakeNewNode

Require: n, i, x

Ensure: n' or **0** or **1**

引数 i から $e_i = \{v, w\}$ を取得する.
$n' \leftarrow n$
for all $u \in \{v, w\}$ **do**
  if $u \notin F_{i-1}$ **then**
    $n'.\mathrm{comp} \leftarrow n'.\mathrm{comp} \cup \{\{u\}\}$
  end if
end for
$n'.\mathrm{comp}$ の v と w を含む頂点集合をそれぞれ C_v と C_w とする.
if $x = 1$ **then**
  $n'.\mathrm{comp} \leftarrow (n'.\mathrm{comp} \backslash \{C_v\} \backslash \{C_w\}) \cup \{C_v \cup C_w\}$
  if $C_v \neq C_w$ and $\{C_v, C_w\} \in n'.\mathrm{fps}$ **then**
    return 0
  else
    $n'.\mathrm{fps}$ 内の要素 C_v と C_w を全て $C_v \cup C_w$ に置き換える.
  end if
else
  if $C_v = C_w$ **then**
    return 0
  else
    $n'.\mathrm{fps} \in n'.\mathrm{fps} \cup \{\{C_v, C_w\}\}$
  end if
end if
for all $u \in \{v, w\}$ **do**
  if $u \notin F_i$ **then**
    if $\{u\} \in n'.\mathrm{comp}$ **then**
      $n'.\mathrm{cc} \leftarrow n'.\mathrm{cc} + 1$
      if $n'.\mathrm{cc} > d$ **then**
        return 0
      end if

30: **end if**
31: n'.comp から u を取り除く.
32: n'.fps から $\{\{u\}, X\}$ を取り除く $(\forall X \in n'.\mathrm{comp})$.
33: **end if**
34: **end for**
35: **if** $i = m$ **then**
36: **if** $n'.\mathrm{cc} = d$ **then**
37: **return 1**
38: **else**
39: **return 0**
40: **end if**
41: **end if**
42: **return** n'

Algorithm 3 の関数 MakeNewNode の引数は,

- n：作成するノードの親ノード
- i：作成するノードの深さ（根を 0, 辺 e_i の処理を行う）
- x：親ノードから接続されている枝（0-枝または 1-枝）

となり，戻り値は，n'（新しい節点），**0**（0-終端），**1**（1-終端）のいずれか一つである．3-7 行目では，グラフ頂点 u が初めてフロンティアに入るとき，n'.comp に集合 $\{u\}$ を追加している．9-15 行目は，ノードが 1-枝に接続されている場合の処理である．このとき，v と w は接続されるため，n'.comp の情報を更新し，接続禁止ペアセット n'.fps に $\{C_v, C_w\}$ が含まれている場合は，**0** を返し，処理を終える．含まれていない場合には，n'.fps 内の要素を置き換え，23 行目以降の処理に移る．16-22 行目は，ノードが 0-枝に接続されている場合の処理である．17 行目の条件文が真のとき，C_v と C_w は，同一部分グラフの頂点集合となるので，0-枝では条件を満たせないため，**0** を返す．そうでない場合には，今後一切 C_v と C_w を接続しないように，新たに n'.fps に $\{C_v, C_w\}$ ペアを追加する．23-34 行目は，u がフロンティアから抜けるときの処理である．u がフロンティア内において，他の連結成分がない場合，u を含む部分グラフは完全に分離しているため，n'.cc を 1 増やす．また，このときグラフの分割数が d を超えた場合，**0** を返して処理を終える．35-41 行目は，グラフ辺の探索を最後まで終えたときの処理であり，n'.cc と d が一致しているかの判定をする．一致している場合は **1**，一致していない場合は **0** を返す．まだ，探索が続く場合には，作成した n' を返す．

3.3.2　人口制約ありの場合

人口制約とは，部分グラフ内の頂点重みの和に上限と下限を設けるものであり，この制約を満たす区割を列挙する手法について考える．まず，許容格差定数 r を定め，部分グラフの重み上限を U, 下限を L とおく．各部分グラフの重みの和を昇順に $a_1, \ldots, a_d$ とすると，グラフ G の重みの和を W として，

$$W \geq (d-1)a_1 + a_d \geq \frac{(d-1)a_d}{r} + a_d$$

から，U を定義すると，

$$U \coloneqq \frac{rW}{r+(d-1)} \geq a_d$$

となる．また，

$$W \leq a_1 + (d-1)a_d \leq a_1 + (d-1)a_1$$

から，L を定義すると，

$$L \coloneqq \frac{W}{r(d-1)+1} \leq a_i$$

となる．

人口制約 U, L を ZDD の構築に用いるには，ZDD のノードに n.weight の情報を加え，**Algorithm 3** を一部修正する必要がある．n.weight の要素は，n.comp の集合要素とインデックスが 1 対 1 で対応しており，部分集合の (フロンティアを外れた頂点も含めた) 重みが保存されている．アルゴリズムでは，comp の代入処理の後に，その頂点や集合の重みを weight の対応要素に加算すれば良い．また，1-枝で部分グラフに頂点を結合する際には，上限制約 U を満たしているかの判定を行い，条件を満たさない場合は，その時点で **0** を返す．さらに，部分グラフがフロンティアから外れる場合にも，下限制約 L を満たしているかの判定をすることで，効率的に枝刈りを行い，制約を満たす解のみを計算することができる．

人口制約を含んだ ZDD は，含まないものに比べて解の個数が指数的な数から大きく減るため，列挙後の最適解の計算や解候補の分析などがしやすいメリットがある．しかし，ZDD のノードに weight の情報が存在すると，ZDD の等価節点の共有が行いづらくなり，ノード数が増えることで，一部の都道府県では計算機のメモリ不足に陥る場合がある．これは，後の計算機実験で詳しく検証する．

第4章　ヒューリスティクスを用いた手法

本章では，選挙区割問題を解くヒューリスティクスを作り，その解から得られた選挙区の人口上限と下限を用いて，ZDD 構築を効率化する手法について提案する．

4.1　概要

3 章の人口制約付き ZDD 構築アルゴリズムでは，パラメータとして部分グラフの重み上限 U, 下限 L を用いた．許容格差定数 r では，r の値によって，U, L の範囲が必要以上に広くなることや U, L の範囲に解が一つも存在しないことがあり得る．既存手法では，r の値を都道府県によって手動で調整するものがほとんどである．そこで本研究では，選挙区割問題をヒューリスティクスで解き，解の中で最大人口の選挙区の重みを U, 最小人口の選挙区の重みを L として定義する手法を提案する．U, L が最適解に近くなればなるほど，ZDD の構築時に，最適解でない解候補の枝刈りの回数が多くなる．その結果，従来手法に比べてメモリの使用量の減少及び計算時間の短縮が期待できる．

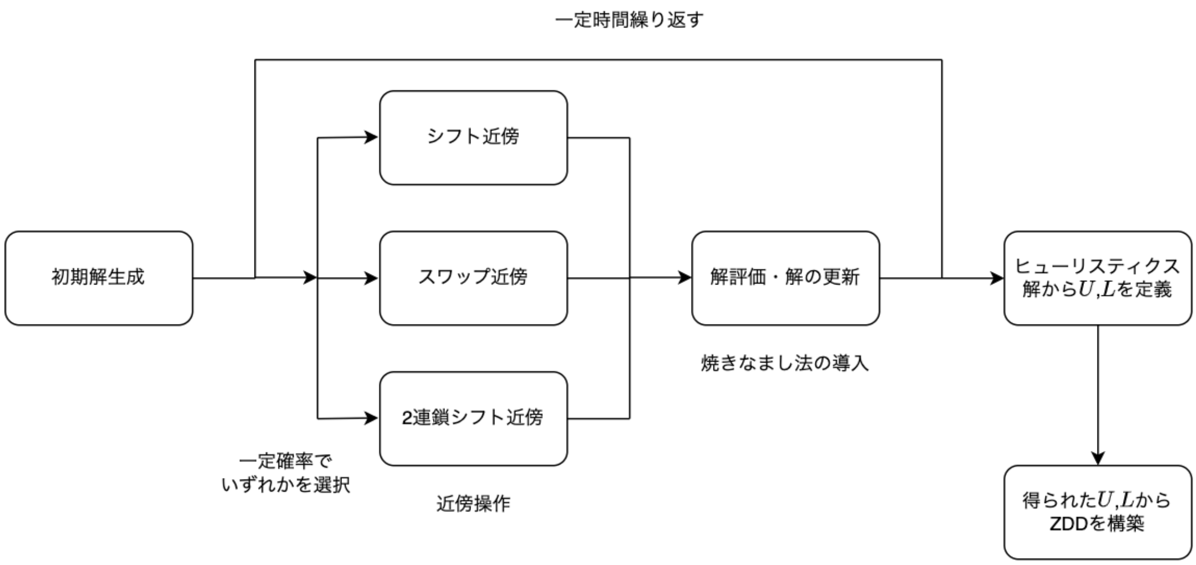


図 4.1: ヒューリスティクスを用いた提案手法

ヒューリスティクスでは，2.2 節で定義した問題から．評価に用いるスコアを一票の格

差 $\frac{\max(P)}{\min(P)}$ として，これを最小化することを目指す．

提案手法の全体像を図 4.1 に示す．始めに選挙区割問題の初期解を生成し，次に一定の確率でシフト近傍，スワップ近傍，2 連鎖シフト近傍のいずれかを選択する．選択した近傍操作を行って近傍解を生成し，近傍解が選挙区割の制約 (選挙区が連結であるか) を満たすか判定をする．制約を満たしている場合には，スコアを計算し，焼きなまし法により解の遷移を行う．これを一定時間繰り返すことで，解を得ることができる．その解から，$U = \max(P), L = \min(P)$ を定義し，それらを用いて ZDD を構築する．次節から，初期解生成や近傍探索のアルゴリズムについて詳細に説明する．

4.2 初期解生成

初期解は，2 章で定義したグラフ G から幅優先探索 (BFS) を利用したアルゴリズムで構築する．初期解生成の擬似コードを **Algorithm 4** で示す．

Algorithm 4 MakeInitialSolution

Require: n, d, ave, adj_list, w

Ensure: $group$

$group \leftarrow [-1] * n$
$P \leftarrow [0] * d$
頂点重みが最も大きいものから順に d 個の頂点番号を配列 $root$ に保存する．
$root$.reverse()
for $i = 1, \ldots, d$ **do**
    $queue \leftarrow \phi$
    $group[root[i]] \leftarrow i$
    $P[i] \leftarrow P[i] + w[nv]$
    $queue$.enqueue($root[i]$)
    while $queue$.size() $\neq 0$ and $P[i] < ave$ **do**
        $v \leftarrow queue$.dequeue()
        for all $nv \in adj\_list[v]$ **do**
            if $P[i] \geq ave$ **then**
                break
            else if $group[nv] = -1$ **then**
                $group[nv] \leftarrow i$
                $P[i] \leftarrow P[i] + w[nv]$

```
                queue.enqueue(nv)
            end if
        end for
    end while
end for
while group の要素に −1 が含まれる do
    for vi = 1, . . . , n do
        if group[vi] = −1 then
            for all nv ∈ adj_list[v] do
                if group[nv] ≠ −1 then
                    group[vi] ← group[nv]
                    break
                end if
            end for
        end if
    end for
end while
return group
```

4.3　近傍操作

4.3.1　シフト近傍

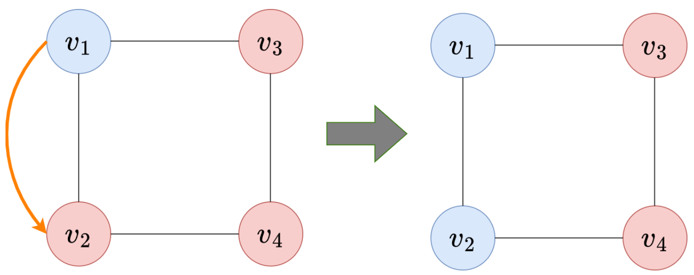


図 4.2: シフト近傍

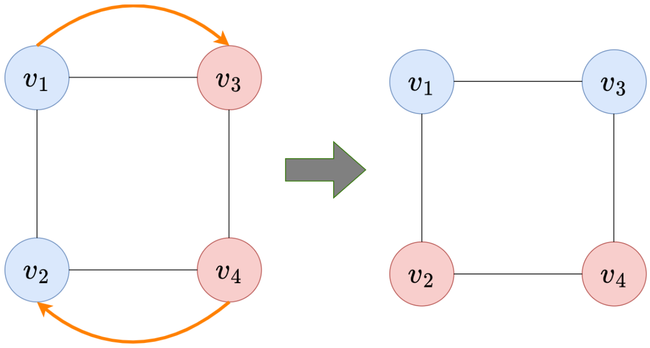


図 4.3: スワップ近傍

4.3.2　スワップ近傍

4.3.3　2 連鎖シフト近傍

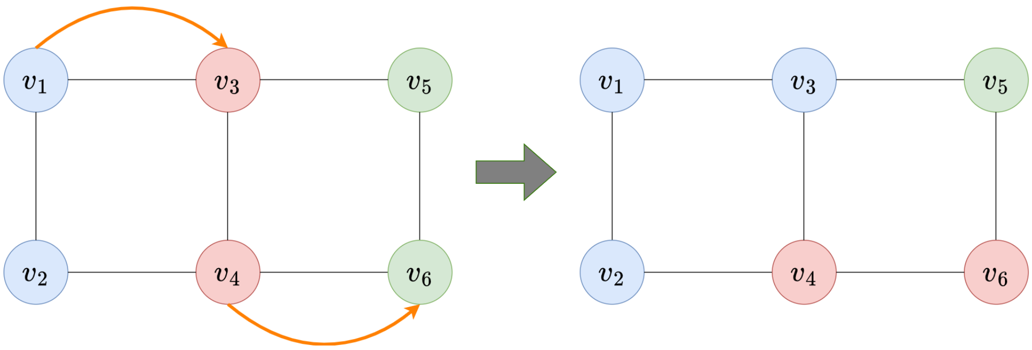


図 4.4: 2 連鎖シフト近傍

4.4　焼きなまし法

第5章　計算機実験

5.1　概要

5.2　実験環境

5.3　入力データ

5.4　実験結果

5.4.1　人口制約なし

5.4.2　人口制約あり：許容格差定数を用いる場合

5.4.3　人口制約あり：ヒューリスティクスの結果を用いる場合

5.5　考察

第6章　おわりに

謝辞

本研究を進めるにあたり，大変多くのご指導，ご助言を頂いた中央大学大学院理工学研究科情報工学専攻の今堀慎治教授，ZDD の実装にあたりライブラリの提供やご相談に快く応じて頂いた京都大学大学院情報学研究科通信情報システム専攻の川原純准教授に深く感謝いたします．また，多大なるご助言，ご協力を頂いた今堀研究室の皆様には大変お世話になりました．心から感謝いたします．

最後に，大学に 6 年間通わせていただいた両親に深く感謝いたします．

参考文献

[1] 一森哲夫：議席配分の数理-選挙制度に潜む 200 年の数学-，近代科学社 (2022).

[2] 根本俊男，堀田敬介：区割画定問題のモデル化と最適区割の導出，オペレーションズ・リサーチ，vol. 48，no. 4，pp. 300-306 (2003).

[3] Minato, S.: Zero-suppressed BDDs for set manipulation in combinatorial problems, Proceedings of the 30th international Design Automation Conference, pp. 272-277 (1993).

[4] 湊真一：BDD/ZDD を用いたグラフ列挙索引化技法，オペレーションズ・リサーチ，vol. 57，no. 11，pp. 597-603 (2012).

[5] Sekine, K., Imai, H. Tani, S.: Computing the Tutte polynomial of a graph of moderate size, Proceedings of the 6th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC), LNCS-1004, pp. 224-233 (1995).

[6] Kawahara, J. et al.: Generating All Patterns of Graph Partition Within a Disparity Bound, WALCOM, pp. 119-131 (2017).