

概率统计任务 Part1

Yu Meng

2024 年 8 月 7 日

1 随机事件与概率

1.1 一些基本概念

样本空间 Ω : 所有试验的可能集合, 其中每一个可能的结果叫元素 (样本点), 用 ω 表示.

事件: 样本空间的子集 (如掷骰子为偶数).

用集合元素关系描述:

- 事件发生为 $\omega \in A$, 事件不发生为 $\omega \notin A$.
- A 发生必然导致 B 发生: $\forall \omega \in A$, 都有 $\omega \in B$, 即 $A \subset B$.

并事件: A 发生或 B 发生 ($A \cup B$).

交事件: A 发生且 B 发生 ($A \cap B$ 或 AB).

互不相容/互斥: A 发生时 B 一定不发生. 特别的, 当 $A \cup B$ 为全集时, A、B 为对立事件, 记作 $B = \bar{A}$.

差事件: $A - B = A \cap \bar{B} = A\bar{B}$

1.2 事件的运算法则

1. 交换律: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.
2. 结合律: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (必须是同种符号之间).
3. 分配律: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
4. De-Morgan(德摩根) 法则 (对偶律): $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

推广: $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$, $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$.

1.3 概型

等可能概型: 样本空间中的每一个样本点等可能地发生.

性质: (1) $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$, (2) $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n)$, (3) $P(\Omega) = 1 = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n)$.

此时, 当样本点个数有限, 为古典概型; 当样本空间是某区域 (一维直线, 二维平面, 三维空间等), 为几何概型.

1.4 其他

求对立事件的概率： $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

注意： $P=0$ 不一定为不可能事件， $P=1$ 不一定为必然事件.

1.5 概率的统计定义

频率和频数：称 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ 为事件 A 在 n 次重复试验中出现的频率，其中 n_A 为频数.

频率稳定性：在大量重复试验中，某个事件发生的频率具有稳定性.

频率的统计定义： n 次重复试验中事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 随着 n 的增大将稳定到某个常数（实际应用时，往往把频率当概率使用）.

1.6 概率的公理化定义

概率的公理化定义：给定一个随机试验， Ω 是它的样本空间，对于任意一个事件 A ，规定一个实数，记作 $P(A)$ ，如果 $P(\cdot)$ 满足下列三条公理，那么就称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

1. 非负性：对于任意一个事件 A ， $P(A) \geq 0$.
2. 规范性： $P(\Omega) = 1$.
3. 可列可加性：当可列无限个事件 A_1, A_2, \dots 两两互不相容时， $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$.

1.7 条件概率

条件概率：对于任意 2 个事件 A, B ，其中 $P(B) > 0$ ，称 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 为在已知事件 B 发生的条件下事件 A 的条件概率.

概率的乘法公式：当 $P(A) > 0$ 时， $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

推广：当 $n \geq 2$ 且 $P(A_1 \dots A_{n-1}) > 0$ 时， $P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$.

相互独立： $P(AB) = P(A)P(B)$ 成立.

定理：如果 $P(A) > 0$ ，那么，事件 A 与 B 相互独立 1 充分必要条件是 $P(B|A) = P(B)$.

相互独立的推广：对于任意 3 个事件 A, B, C ，如果 $P(AB) = P(A)P(B)$ ， $P(BC) = P(B)P(C)$ ， $P(AC) = P(A)P(C)$ ， $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 都成立，那么，称事件 A, B, C 相互独立.

1.8 伯努利试验

Bernoulli(伯努利) 试验：在 1 个试验中只关心某个事件 A 是否发生（通常记为 $P(A) = p (0 < p < 1)$ ）. 如果独立地重复做 n 次，这 n 个试验合在一起称为 n 重 Bernoulli 试验.

1.9 贝叶斯公式

- 全概率公式： $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i|B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$.
- 贝叶斯公式： $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$, $i = 1, 2, \dots$

2 离散型随机变量

2.1 随机变量与分布律

(一维) 随机变量: 对 Ω 中的每一个样本点 ω , 有一个实数 $X(\omega)$ 与它对应.

随机变量 $X = X(\omega)$, 定义域为 Ω , 值域为 $\Omega_X \subset (-\infty, +\infty)$.

分布律: 称表 $P(X = a_i) = p_i, i = 1, 2, \dots$ 为随机变量 X 的概率 (质量) 函数 (或分布律).

2.2 二项分布

二项分布: 在 n 重伯努利试验中, 设随机变量 X 为 n 次试验中事件 A 发生的次数.

则 $\Omega_X = \{0, 1, \dots, n\}$, X 的概率函数为 $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$, 记 $X \sim B(n, p)$.

2.3 二维随机变 (向) 量

定义: 对 Ω 的每一个样本点 ω , 有一对有序实数对 $(X(\omega), Y(\omega))$ 与之对应.

值域 $\Omega_{(X,Y)} = \{(a_i, b_j) : i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots\}$.

分布律: 称 $P(X = a_i, Y = b_j) = P(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\}) = P_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$ 为二维随机变量 (X, Y) 的概率 (质量) 函数 (或分布律), 或称为联合概率函数.

边缘概率函数: 若 $P(X = a_i, Y = b_j) = P(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\}) = P_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$, 则满足 $P(X = a_i) = \sum_j P(X = a_i, Y = b_j) = \sum_j P_{ij} = P_{i.}, i = 1, 2, \dots$ 的所有 $P(X)$ 称为 X 的边缘概率分布.

随机变量的独立性: 如果联合概率函数恰为两个边缘概率函数的乘积, 即 $P_{ij} = P_{i.} \cdot P_{.j}$ 对一切 $i, j = 1, 2, \dots$ 成立, 那么称随机变量 X 与 Y 相互独立.

条件概率函数: 对任意一个固定的 $j, j=1, 2, \dots$, 称 $P(X = a_i | Y = b_j) = \frac{P_{ij}}{P_{.j}}, i = 1, 2, \dots$ 为已知 $\{Y = b_j\}$ 发生的条件下 X (记作 " $X|Y = b_j$ ") 的条件概率.

3 连续型随机变量及其分布

3.1 连续型随机变量

连续型随机变量: 值域是一个区间 (或若干区间的并).

分布函数: (关心随机变量落在某个区间内的概率, 单调递增) 给定一个随机变量 X , 称 $F(x) = P(X \leq x), -\infty < x < +\infty$ 为 x 的分布函数.

对任意随机变量 X , $F(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续的充分必要条件为 $P(X = x_0) = 0$.

对于 n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) , 分布函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$.

概率密度函数: 给定一个连续型随机变量 X , 如果存在一个定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的非负实值函数 $f(x)$, 使得 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, 则称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数.

性质: (1) $f(x) \geq 0$; (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

连续型随机变量的性质:

1. $F(x)$ 是一个连续函数, 且当 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续时, $F'(x_0) = f(x_0)$.
2. 对任意一个常数 $c, P(X = c) = 0$.

3. 对任意两个常数 a, b , $P(a < x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

3.2 连续型随机变量的分布

3.2.1 连续型均匀分布

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a < x < b \\ 0 & , \text{其余} \end{cases}$$

3.2.2 指数分布 (无记忆性)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

记作 $X \sim E(\lambda)$.

3.2.3 高斯分布 (正态分布)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$$

记作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

标准正态分布: $\mu = 0$ 且 $\sigma = 1$, 记作 $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$, 其分布函数记作 $\Phi(x)$.

正态概率计算公式: $P(a < X \leq b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$.

3.2.4 二维连续型随机变量

联合分布: 给定二维连续型随机变量 (X, Y) , 如果存在一个定义域为整个平面的二元非负实值函数 $f(x, y)$, 使得 (X, Y) 的分布函数 $F(x, y)$ 可以表达成 $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv, -\infty < x, y < +\infty$, 那么称 $f(x, y)$ 为 (X, Y) 的 (概率) 密度函数 (或分布), 或者称为 X 与 Y 的联合分布.

二维连续型均匀分布:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{G \text{ 的面积}} & , (x, y) \in G \\ 0 & , \text{其余} \end{cases}$$

二维正态分布的密度函数:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}, -\infty < x, y < +\infty$$

记作 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 其中 $-\infty < \mu_1, \mu_2 < +\infty$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $|\rho| < 1$.