

# 都柱摆地动仪的响应指向性研究<sup>\*</sup>

## RESEARCH ON THE DIRECTIVITY RESPONSE OF THE SPHERICAL PENDULUM SEISMOGRAPH

刘 钊<sup>\*\*</sup> 刘禹明<sup>\*\*\*</sup> 徐 浩 李亚美 朱玉田

(同济大学机械与能源工程学院, 上海 201804)

LIU Zhao LIU YuMing XU Hao LI YaMei ZHU YuTian

(School of Mechanical Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

**摘要** 为解决候风地动仪指向性功能记载受到大家普遍质疑的问题,分析得出以非地方震主要成分瑞利波为波源,球面都柱摆测震方案可能为可行复原方案。通过建立球面都柱摆在瑞利波激励下的非线性完整力学模型,推导其运动方程后运用摄动法求得近似解。结果表明球面都柱摆复原模型对瑞利波的响应具有指向性,其指向性的大小与瑞利波幅值、频率比和阻尼有关。后结合历史记载对候风地动仪复原模型进行研究,可见球面都柱摆模型在多方面上为当前对张衡侯风地动仪的最佳复原模型。结论可作为证明候风地动仪的历史真实性的重要理论依据。

**关键词** 候风地动仪 瑞利波 摄动法 球面都柱摆

**中图分类号** TB123

**Abstract** To solve the problem that the Houfeng Seismograph's directional function's historical record was generally questioned. The analysis concludes that the spherical pendulum seismic measurement scheme may be a feasible restoration scheme with Rayleigh wave (the main component of non-local earthquakes) as wave source. A nonlinear complete mechanical model of the spherical pendulum under Rayleigh wave excitation is established. The equation of motion was derived. The approximate solution is obtained using the perturbation method. The results show that: the spherical pendulum restoration model has a directional response to Rayleigh waves. The magnitude of the directional response is related to the amplitude of the Rayleigh wave, as well as the frequency ratio and damping of the system. Combined with historical records to study the restoration models of the weather seismograph, the spherical pendulum model is the best restoration model for Zhang Heng's Hou Feng seismograph in many aspects. This conclusion is an important theoretical basis to prove the historical authenticity of the Houfeng Seismograph.

**Key words** Houfeng seismograph; Rayleigh wave; Perturbation method; Spherical Pendulum

Corresponding author: ZHU YuTian, E-mail: yutianzhu@tongji.edu.cn, Tel: +86-21-69588909, Fax: +86-21-69588909

Manuscript received 20210420, in revised form 20210513.

### 引言

候风地动仪是世界上第一架有明确历史记载的测震仪器<sup>[1-2]</sup>,是我国科学研究历史上具有重要影响的重大成果。但是候风地动仪的历史真实性一直受到质疑,候风地动仪失传后还没有一个能被科学界普遍接受的复原模型<sup>[3-6]</sup>。特别是由于简单地地震波(S波、P波)单测点的振动信息不包含地震波传播方向的信息<sup>[7] 77-100[8]</sup>,所以对震源方向的指向性功能成为张衡地动仪历史记录被质疑的一个重要方面<sup>[9-10]</sup>。

候风地动仪是一种非地方震测震仪器。经一段距

离传播后的非地方震地震波中的瑞利波成分因不易衰减而被凸显出来。瑞利波的单测点运动形式与地震波传播方向相关,因此单测点实现对非地方震震源方向的指示在理论上是完全可能的。

作者在文献[11-12]中提出了一种候风地动仪都柱复原模型:球面都柱摆。球面都柱摆同时感受水平和竖直方向的振动,其在瑞利波激励下的振动响应就可能具有对地震波传播方向的指向性。

本文的研究将通过理论推导与仿真实验结合证明球面都柱摆复原模型对非地方震的指向性的存在,同时为候风地动仪的历史真实性提供相关的理论依据。

<sup>\*</sup> 20210420 收到初稿, 20210513 收到修改稿。

<sup>\*\*</sup> 刘 钊, 男, 1958 年生, 江苏无锡人, 汉族, 同济大学机械与能源工程学院教授, 博士生导师, 博士。研究方向为工程机械及其关键技术、机械控制与信息处理技术、智能机械与机器人。

<sup>\*\*\*</sup> 刘禹明, 男, 1997 年 3 月生, 黑龙江佳木斯人, 汉族, 同济大学机械与能源工程学院硕士研究生。研究方向为工程机械及其关键技术。

## 1 瑞利波与球面都柱摆

瑞利波在地表传播时,每个质点同时参与水平和垂直两个方向的振动,表现为椭圆形状的运动轨迹,此轨迹旋转方向与瑞利波传播方向相关,因此也被称为“地滚波”,如图1所示。

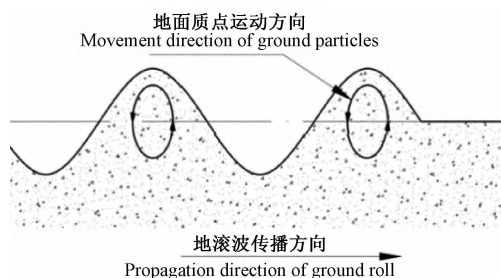


图1 “地滚波”示意图

Fig.1 Schematic diagram of "ground roll"

球面都柱摆由与地面相连的底座与竖直置于其中央的都柱构成,如图2所示。都柱下方为球面,其球心 $O$ 略高于重心 $G$ 。底座受瑞利波影响进行水平振动 $u_x$ 与垂直方向振动 $u_y$ ,带动都柱进行微幅摆动。当都柱重心垂直投影运动超出倒角点,都柱失稳倾倒,如图3所示,倒角点的位置确定了都柱摆的倾倒阈值。

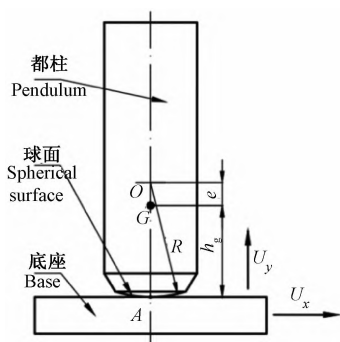


图2 球面都柱摆结构

Fig.2 The structure of the spherical pendulum

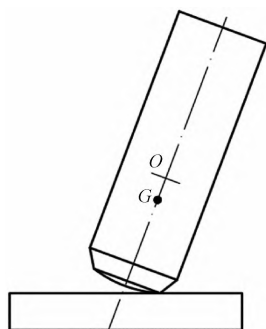


图3 球面都柱摆失稳倾倒

Fig.3 The spherical pendulum collapses

## 2 球面都柱摆在瑞利波激励下的运动方程

由于瑞利波波长较长,不考虑其引起的地面倾角。

如图4所示,在相对底座静止的非惯性坐标系 $xoy$ 下,考虑牵连运动的惯性力 $m\ddot{u}_x$ 、 $m\ddot{u}_y$ ,以都柱与底座接触点 $B$ 为旋转中心于 $xoy$ 平面列出动量矩定理。

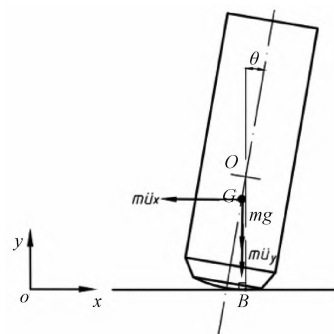


图4 都柱摆在瑞利波作用下的力学模型

Fig.4 The mechanical model of the spherical pendulum under the action of Rayleigh waves

$$[J_G + m(R^2 + e^2 - 2eR\cos\theta)]\ddot{\theta} + 2meR\sin\theta\dot{\theta}^2 = -m\ddot{u}_x(R - e\cos\theta) - (m\ddot{u}_y + mg)e\sin\theta \quad (1)$$

其中,广义坐标 $\theta$ 为都柱相对于底座摆角(顺时针为正), $J_G$ 为都柱重心处转动惯量, $m$ 为都柱质量, $R$ 为球面半径, $e$ 为球心到重心距离。式(1)中的地面振动激励假设为从 $x$ 轴负方向传来的瑞利波

$$\begin{cases} u_x(t) = u_{xu}\sin\omega t \\ u_y(t) = u_{yu}\cos\omega t \end{cases} \quad (2)$$

根据瑞利波的特征,式中水平激励与垂直激励的幅值比固定<sup>[7] 77-100</sup>,  $u_{xu}:u_{yu} = 0.432:0.620$ 。

考虑阻尼,将式(1)整理为

$$\ddot{\theta}(t) + 2\xi\omega_n\dot{\theta}(t) + \omega_n^2\theta(t) = p \quad (3)$$

其中, $\xi$ 为都柱摆摆动系统阻尼比, $\omega_n$ 为系统固有频率

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mge}{J_G + mh_g^2}} \quad (4)$$

其中, $h_g$ 为平衡时重心垂直高度; $p$ 为系统激励项

$$p = -\frac{1}{J_G + mh_g^2}\{m\ddot{u}_x(R - e\cos\theta) - m\ddot{u}_ye\sin\theta - [2meR(1 - \cos\theta)\ddot{\theta} + 2meR\sin\theta\dot{\theta}^2 + mge(\sin\theta - \theta)]\} \quad (5)$$

式中,激励项 $p$ 同时包含水平振动 $u_x$ 与垂直方向振动 $u_y$ ,其响应就可能具有对地震波传播方向的指向性。

## 3 瑞利波激励下球面都柱摆运动方程的摄动求解

由于式(5)是一个高度复杂的非线性运动方程,

且非线性影响相对较小,故拟采用摄动法求解。将运动方程的激励分为线性激励部分  $p_0$  和摄动项(高阶非线性小量)  $\varepsilon$ ,即

$$p = p_0(t) + \varepsilon \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} p_0(t) &= -\frac{mh_g \ddot{u}_x(t)}{J_G + mh_g^2} = -\frac{h_g \omega_n^2}{ge} \ddot{u}_x(t) = \\ &\frac{h_g \omega_n^2}{ge} u_{xu} \omega^2 \sin \omega t \quad (7) \\ \varepsilon &= \frac{1}{J_G + mh_g^2} (-m \ddot{u}_x e(1 - \cos \theta) - \\ &m \ddot{u}_y e \sin \theta - 2meR \sin \theta \dot{\theta}^2 - \\ &mge(\sin \theta - \theta) - 2meR(1 - \cos \theta) \ddot{\theta}) = \\ &\frac{\omega_n^2}{ge} (-\ddot{u}_x e(1 - \cos \theta) - \ddot{u}_y e \sin \theta - \\ &2eR \sin \theta \dot{\theta}^2 - ge(\sin \theta - \theta) - \\ &2eR(1 - \cos \theta) \ddot{\theta}) \quad (8) \end{aligned}$$

相对而言,  $\varepsilon$  中的二阶项对球面都柱摆响应的影  
响较其他高阶项大,因此忽略二阶以上高阶项,把  $\theta$  作  
为微小角度处理

$$\varepsilon \approx -\frac{\omega_n^2}{g} \theta \ddot{u}_y = \frac{\omega_n^2 u_{yu} \omega^2}{g} \theta \cos \omega t \quad (9)$$

由于  $\varepsilon$  近似后只显含  $\theta$  和  $t$ ,从而近似为

$$\ddot{\theta}(t) + 2\xi\omega_n \dot{\theta}(t) + \omega_n^2 \theta(t) = p_0(t) + \varepsilon(\theta, t) \quad (10)$$

在式(10)中将  $\varepsilon$  设为零可求得一阶近似解  $\theta_1$

$$\theta_1 = \theta_{1u} \sin(\omega t + \beta_1) \quad (11)$$

其中

$$\theta_{1u} = \frac{h_g}{ge} u_{xu} \omega^2 \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\xi^2 \lambda^2}} \quad (12)$$

$$\beta_1 = -\arctan \frac{2\xi\lambda}{1 - \lambda^2} \in [-\pi, 0] \quad (13)$$

其中,  $\lambda$  为频率比

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (14)$$

将非受扰系统求出的二阶近似解  $\theta_1$  代入到摄动  
项中得到摄动项的二阶近似函数  $\varepsilon_2$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = \varepsilon(\theta_1, t) &= \frac{\omega_n^2 u_{yu} \omega^2}{g} \theta_1 \cos \omega t = \\ &\frac{\omega_n^2 u_{yu} \omega^2}{g} \theta_{1u} \sin(\omega t + \beta_1) \cos \omega t = \\ &\frac{\omega_n^2 u_{yu} \omega^2}{2g} \theta_{1u} [\sin(2\omega t + \beta_1) + \sin \beta_1] \quad (15) \end{aligned}$$

将  $\varepsilon_2$  代入式(10),得到原运动方程的二阶近似  
方程

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t) + 2\xi\omega_n \dot{\theta}(t) + \omega_n^2 \theta(t) &= \\ p_0(t) + \frac{\omega_n^2 u_{yu} \omega^2}{2g} \theta_{1u} [\sin(2\omega t + \beta_1) + \sin \beta_1] \quad (16) \end{aligned}$$

求解此方程得到原方程的二阶近似解  $\theta_2$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \theta_{1u} \sin(\omega t + \beta_1) + \\ &\theta_{2u} \sin(2\omega t + \beta_1 + \beta_2) + \Delta\theta \quad (17) \end{aligned}$$

其中

$$\theta_{2u} = \frac{u_{yu} \omega^2}{2g} \theta_{1u} \frac{1}{\sqrt{(1 - 4\lambda^2)^2 + 16\xi^2 \lambda^2}} \quad (18)$$

$$\beta_2 = -\tan^{-1} \frac{4\xi\lambda}{1 - 4\lambda^2} \in [-\pi, 0] \quad (19)$$

$$\Delta\theta = \frac{u_{yu} \omega^2}{2g} \theta_{1u} \sin \beta_1 \quad (20)$$

将式(18)、式(19)、式(20)代入式(17)

$$\theta_2 = \theta_{1u} \eta \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \eta &= \sin(\omega t + \beta_1) + \\ &\frac{u_{yu} \omega^2}{2g} \left[ \frac{\sin(2\omega t + \beta_1 + \beta_2)}{\sqrt{(1 - 4\lambda^2)^2 + 16\xi^2 \lambda^2}} + \sin \beta_1 \right] \quad (22) \end{aligned}$$

式(22)经过两次迭代的近似解与原始方程的仿  
真结果已经非常接近,说明上述近似解已相当精确,可  
以此解作为指向性的分析基础。

#### 4 球面都柱摆的响应指向性分析

式(17)中三项叠加使得结果对于平衡位置不对  
称,故定义振动最大最小值中值对平衡位置的偏移量  
 $\Delta\theta_{all}$  为指向性的指标,即

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{all} &= \frac{(\max(\theta_2) + \min(\theta_2))}{2} = \\ &\theta_{1u} \frac{(\eta_{\max} + \eta_{\min})}{2} \quad (23) \end{aligned}$$

由于式(17)中,其第一项的值远大于后两项,都  
柱摆的响应大小可近似由  $\theta_{1u}$  描述。所以  
 $\frac{(\eta_{\min} + \eta_{\max})}{2}$  表示了偏移量占整体响应大小的比值,  
可直接衡量指向性的强弱。

由数值计算结果可知,当  $\frac{u_{yu} \omega^2}{g}$  较小时,有

$$\eta_{\min} + \eta_{\max} \approx -\frac{u_{yu} \omega^2}{g} \kappa(\lambda, \xi) \quad (24)$$

其中,  $\kappa(\lambda, \xi)$  可以用比较小的瑞利波加速度代入进行

数值求解,求解结果如图 5 所示。

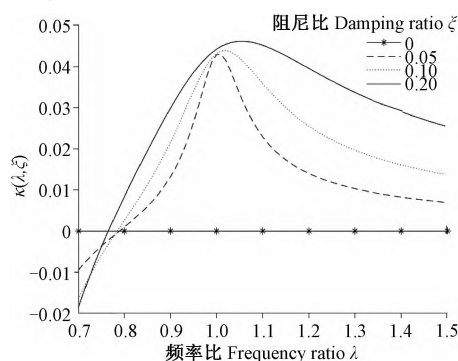


图 5  $\kappa(\lambda, \xi)$  求解结果

Fig.5 Solution results of  $\kappa(\lambda, \xi)$

由求解结果可知,  $\kappa(\lambda, \xi)$  在频率比接近于 1 的较大范围为正值, 故  $\Delta\theta_{all}$  为负值, 表示都柱摆在瑞利波作用下产生负向偏移, 偏移方向指向瑞利波传来的方向, 体现指向性。

由式 (24), 指向性的强弱与瑞利波垂直方向加速度幅值  $u_{yu}\omega^2$  成正比。在非地方震使室内绝大多数人、室外多数人有感觉<sup>[13]</sup>时, 都柱负向偏移量占摆动幅值 3% 以上。

由图 5, 系统的阻尼越大指向性越明显, 但在固有频率与激励频率接近时受阻尼影响较小。

## 5 候风地动仪复原模型研究

前文的结论说明: 球面都柱摆模型对瑞利波的单点测量可以指示瑞利波波源的方向, 有效的反驳了非地方震单测点的振动信息不包含地震波传播方向信息的论断。如果球面都柱摆模型与张衡地动仪的内部机构相同, 那么张衡地动仪是具有符合“寻其方面, 乃知震之所在”等历史所记载的指向性功能的。对张衡地动仪真实性的相关质疑也得到了有力反驳。反过来说, 球面都柱摆模型在原理上是正确的张衡地动仪复原模型之一。

此外, 球面都柱摆模型在具备测震能力的同时多方面符合历史对张衡地动仪的记载。

“虽一龙发机, 而七首不动”: 通过合理设计都柱倒角位置可使都柱摆倾倒后触发一方向机关后停止从而无法触发其他方向机关, 而当前较为主流的悬垂摆模型需要借助复杂的牙关机构才可实现单一机关触发;

“中有都柱, 傍行八道, 施关发机”: 相对于悬垂摆模型, 球面都柱摆模型更加符合“都柱”的描述;

“员径八尺”: 经换算及相关考古成果推断候风地动仪的直径约为 60 cm、高度约为 78 cm~90 cm, 球面都柱摆模型经证明可在该尺寸下实现非地方震的测量;

“以铜为器”: 球面都柱摆模型结构为简单的球面与柱形, 该结构可以用汉代的铸造工艺制造出来。

所以, 综合多个方面, 球面都柱摆模型为当前对张衡侯风地动仪的最佳复原模型。

## 6 结论

针对候风地动仪复原指向性问题, 本文通过建立球面都柱摆在考虑多项激励时的非线性完整力学模型, 推导了球面都柱摆在瑞利波激励下的运动方程, 运用摄动法对此非线性运动方程求得近似解。得到如下结论:

- 1) 所提出的球面都柱摆测震方案可通过拾取地震波中的方向信息产生具有指向性的响应;
- 2) 指向性大小与瑞利波加速度幅值成正比;
- 3) 阻尼越大指向性越明显, 但在固有频率与激励频率接近时受阻尼影响较小;
- 4) 球面都柱摆模型实现了单测点对非地方震震源方向的指示;
- 5) 球面都柱摆模型既符合测震原理又符合历史对候风地动仪的描述, 为当前最佳复原模型。

## 参考文献 (References)

- [1] 冯 锐, 朱 涛, 武玉霞, 等. 张衡地动仪的科学性及其历史贡献[J]. 自然科学史研究, 2006(增刊 1): 1-15.  
FENG Rui, ZHU Tao, WU YuXia, et al. Scientificity and historical contribution of Zhang Heng's seismograph [J]. History of Natural Science, 2006 (Suppl1): 1-15 (In Chinese).
- [2] 冯 锐, 武玉霞, 朱 涛. 地动仪的史料和模型研究[J]. 自然科学史研究, 2006(增刊 1): 34-52.  
FENG Rui, WU YuXia, ZHU Tao. Research on historical data and models of seismograph [J]. Research on History of Natural Science, 2006 (Suppl1): 34-52 (In Chinese).
- [3] 冯 锐, 武玉霞, 朱 涛, 等. 对地动仪传统模型的置疑[J]. 自然科学史研究, 2006(增刊 1): 16-33.  
FENG Rui, WU YuXia, ZHU Tao, et al. Doubt on the traditional model of seismograph [J]. History of Natural Science, 2006 (Suppl 1): 16-33 (In Chinese).
- [4] 李 强. 简评冯锐复原张衡地动仪的设计思路[J]. 自然科学史研究, 2008(3): 378-387.  
LI Qiang. A brief review of Feng Rui's design ideas for restoring Zhang Heng's seismograph [J]. Research on History of Natural Science, 2008 (3): 378-387 (In Chinese).
- [5] 李志超. 三议候风地动仪[J]. 寻根, 2004(6): 48-50.  
LI ZhiChao. Sanyi Houfeng seismograph [J]. Root Searching, 2004 (6): 48-50 (In Chinese).
- [6] 赵冠峰. 张衡地动仪文献蠡读-对地动仪功能的重新认识[J]. 自然科学史研究, 2004(4): 334-344.  
ZHAO GuanFeng. A review of the seismograph literature by Zhang Heng: A new understanding of the function of the seismograph [J]. Research on the History of Natural Science, 2004 (4): 334-344 (In Chinese).

- [7] 王有学. 地震波理论基础 [M]. 北京: 地质出版社, 2011: 77-100.  
WANG YouXue. Theoretical basis of seismic wave [M]. Beijing: Geological Press, 2011: 77-100 ( In Chinese) .
- [8] 汪利民, 吴 嵩, 徐义贤, 等. 近地表速度不均匀下的高频瑞雷波传播特性研究 [C]. 北京: 2014 年中国地球科学联合学术年会-专题 24: 浅地表地球物理进展, 2014: 1451.  
WANG LiMin, WU Song, XU YiXian, et al. Study on propagation characteristics of high frequency Rayleigh waves under near surface velocity inhomogeneity [C]. Beijing: 2014 China Geosciences Annual Meeting-Special Topic 24: Progress in Shallow Surface Geophysics, 2014: 1451( In Chinese) .
- [9] 赵冠峰.《张衡地动仪文献蠡读》补论-兼论文献与科技史模拟试验的关系 [J]. 自然科学史研究, 2006( 3): 300-310.  
ZHAO GuanFeng. A supplementary discussion on Zhang Heng's seismograph Literature-and on the relationship between the literature and the simulation experiment of the history of science and technology [J]. Research on the History of Natural Science, 2006 ( 3): 300-310( In Chinese) .
- [10] 冯 锐.张衡地动仪的否定之否定 [J]. 防灾博览, 2003( 1): 5-9.  
FENG Rui. Negative negation of Zhang Heng seismograph [J]. Disaster Prevention Expo, 2003 ( 1): 5-9( In Chinese) .
- [11] 刘 钊,秦仙蓉,朱传敏,等. 机械振动 [M]. 上海: 同济大学出版社, 2016: 53-57.  
LIU Zhao, QIN XianRong, ZHU ChuanMin, et al. Mechanical vibration [M]. Shanghai: Tongji University Press, 2016: 53-57( In Chinese) .
- [12] 陈茂林,曹家伟,刘 钊,等. 还原候风地动仪的稳定倒立摆结构 [J]. 机械强度, 2020, 42( 5): 1250-1253.  
CHEN MaoLin, CAO JiaWei, LIU Zhao, et al. Stable structure of inverted pendulum used to revert the HouFeng seismograph [J]. Journal of Mechanical Strength 2020, 42 ( 5): 1250-1253 ( In Chinese) .
- [13] 全国地震标准化技术委员会. 中国地震烈度表: GB/T 17742-2008 [S]. 北京: 中国标准出版社, 2008: 1-4.  
National Seismological Standardization Technical Committee. China earthquake intensity table: GB/T 17742-2008 [S]. Beijing: China Standard Press, 2008: 1-4( In Chinese) .