

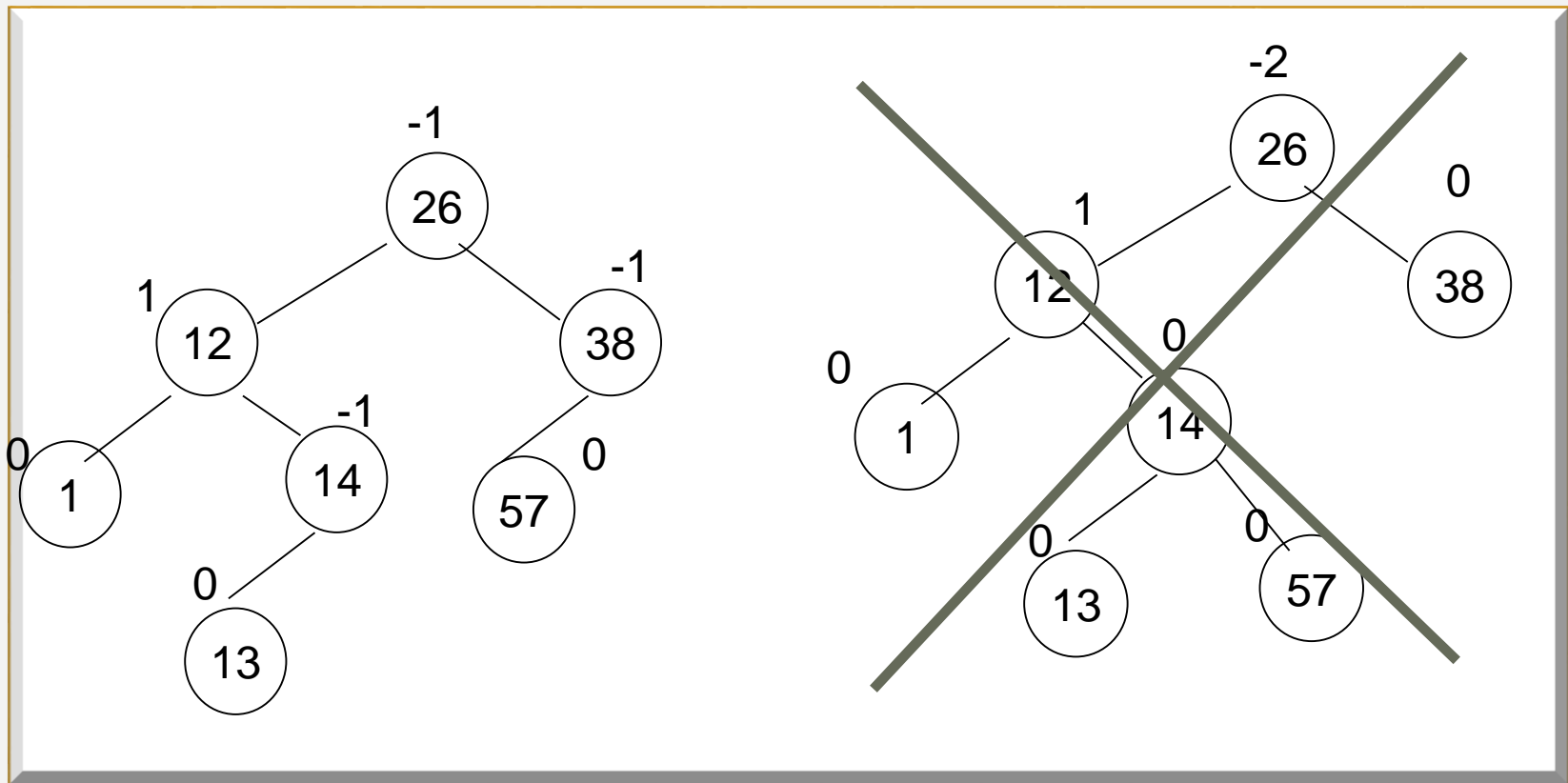
ÁRBOLES BALANCEADOS (AVL)

Estructuras de Datos,
cursos 620435.

DEFINICIÓN

- El nombre AVL son las iniciales de los hombres que idearon este tipo de árbol **A**delson-**V**elskii y **L**andis en 1962.
- Un árbol AVL es un Árbol binario de búsqueda (ABB) al que se le añade una condición de equilibrio.
- Esta condición es que para todo nodo la altura de sus subárboles izquierdo y derecho pueden diferir a lo sumo en 1.

EJEMPLO DE AVL

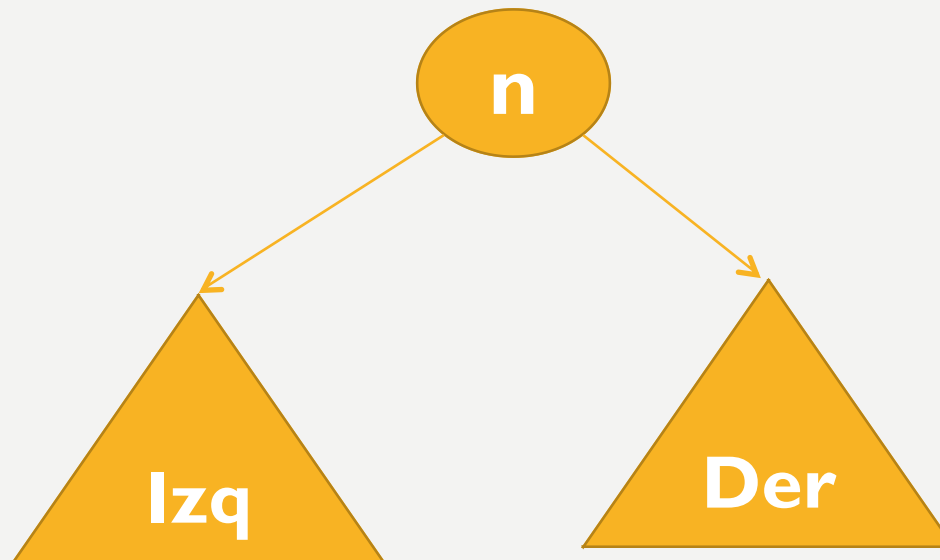


Sólo el árbol de la izquierda es AVL. El de la derecha viola la condición de equilibrio en el nodo 6, ya que su subárbol izquierdo tiene altura 3 y su subárbol derecho tiene altura 1. Además no es un ABB.

FACTOR DE EQUILIBRIO (FE)

Factor de Equilibrio (n) = altura-der (n) – altura-izq (n)

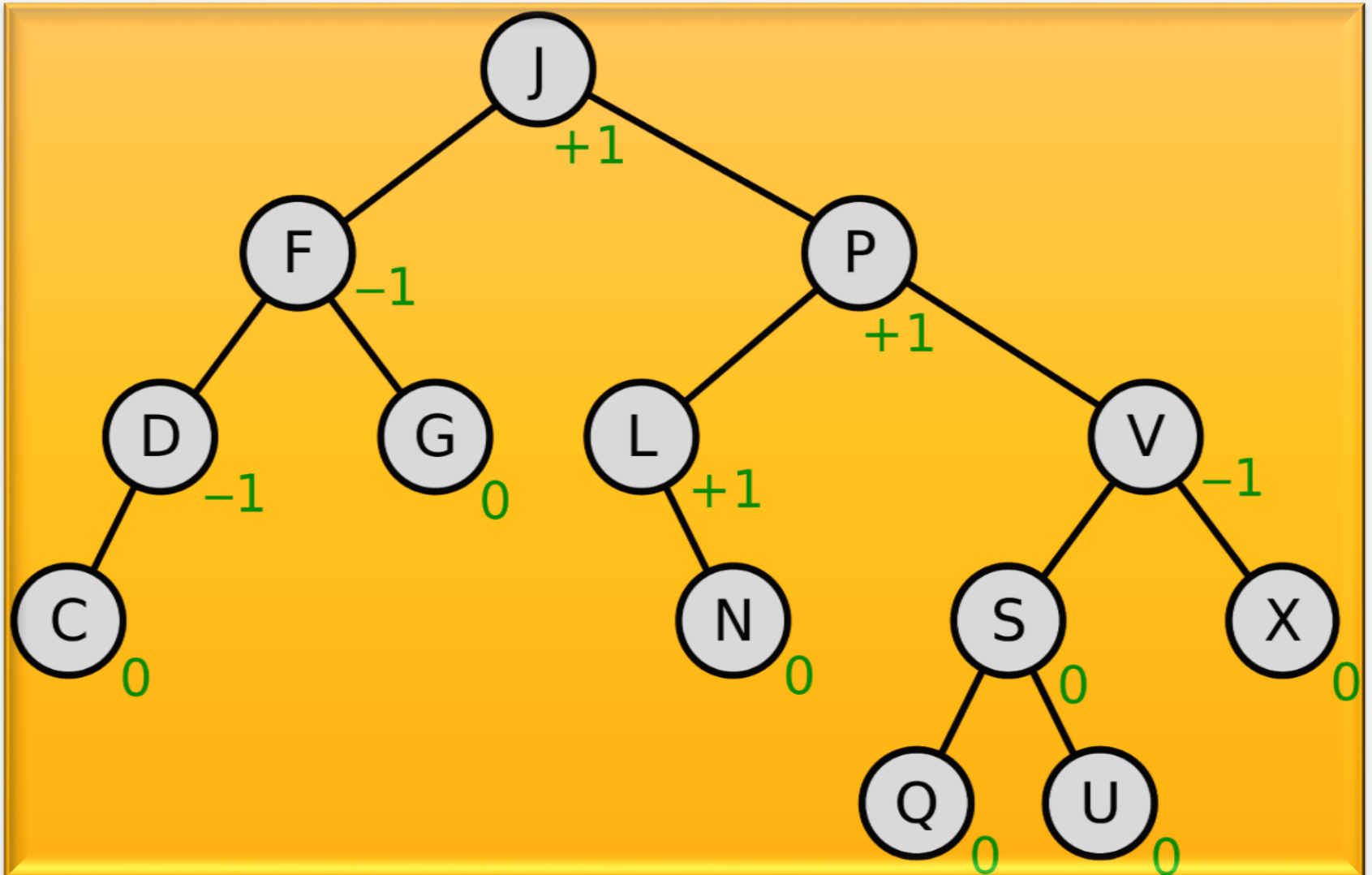
describe la relación de profundidad entre el subárbol derecho y el subárbol izquierdo de un nodo n.



CARACTERÍSTICAS DE UN AVL

- Un AVL es un ABB
- La diferencia entre las alturas de los subárboles derecho e izquierdo sean de 0, 1 ó -1.
- Cada nodo tiene asignado un Factor de Equilibrio (FE) de acuerdo a las alturas de sus subárboles.
- Un nodo tiene un FE de 1 si su subárbol derecho es más alto, de -1 si su subárbol izquierdo es más alto y 0 si las alturas son las mismas.
- La inserción y eliminación en AVLs es igual a la de los ABBs.

AVL



AB BALANCEADO

- Un árbol binario de búsqueda es un AVL si y sólo si cada uno de sus nodos tiene un equilibrio de $-1, 0, +1$ y cumple con la condición de ser ABB.
- Si alguno de los pesos de los nodos se modifica en un valor no válido (2 ó -2) debe aplicarse un esquema de rotación.

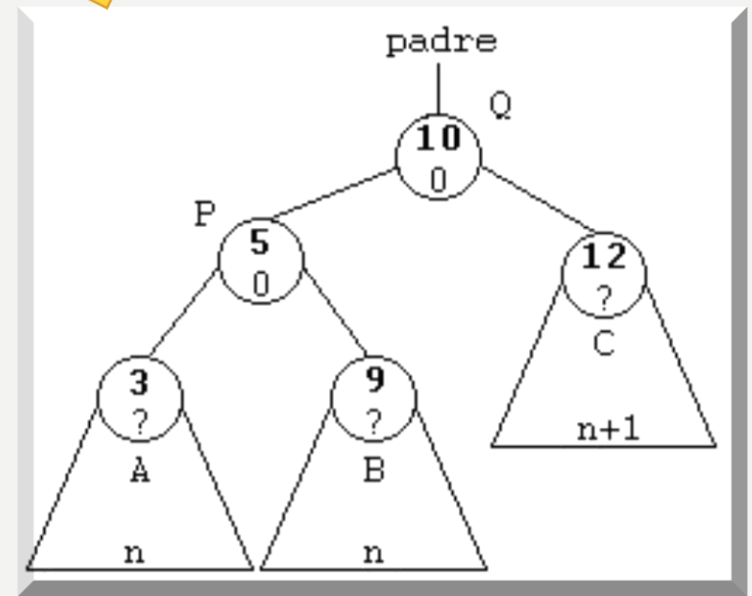
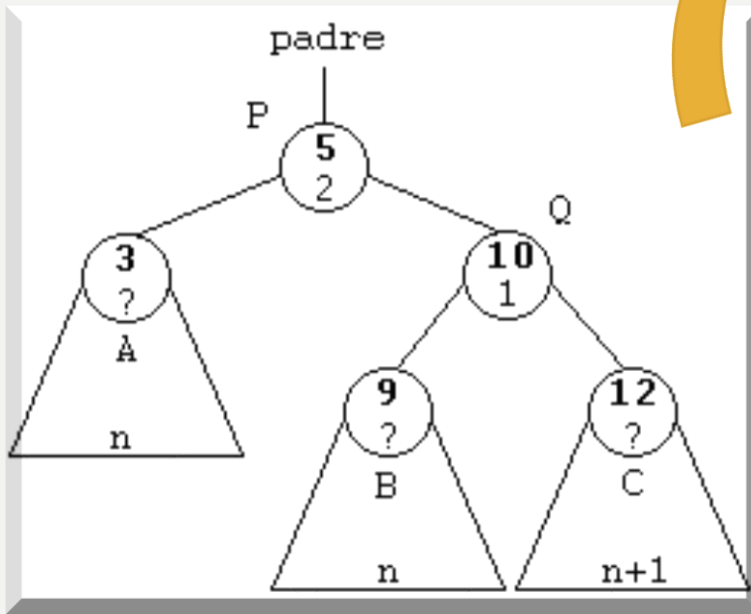
INSERCIÓN DE UN NUEVO NODO

Se usa la misma técnica para insertar un nodo en un ABB ordenado:

- Se sigue una ruta desde el nodo raíz hasta un nodo hoja (donde se hace la inserción).
- Se inserta el nodo nuevo.
- Se vuelve por la ruta al nodo raíz, ajustando el equilibrio a lo largo de ella.
- Si $|FE| > 1$, se vuelve a ajustar los subárboles de los nodos para que su equilibrio se mantenga en el rango $[-1, 1]$

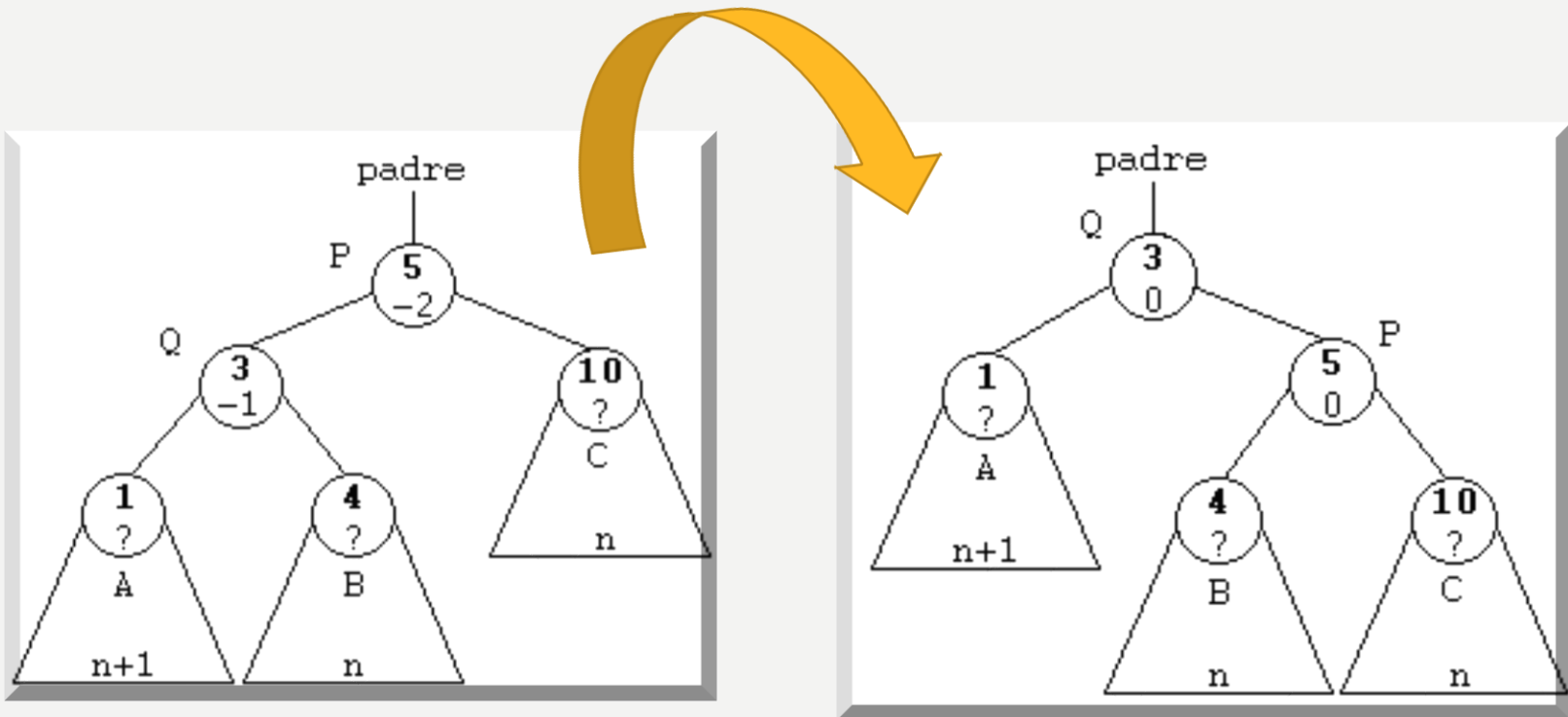
CASO I: ROTACIÓN SIMPLE IZQUIERDA RSI

- Si está desequilibrado a la izquierda y su hijo derecho tiene el mismo signo (+) se efectúa rotación simple izquierda.

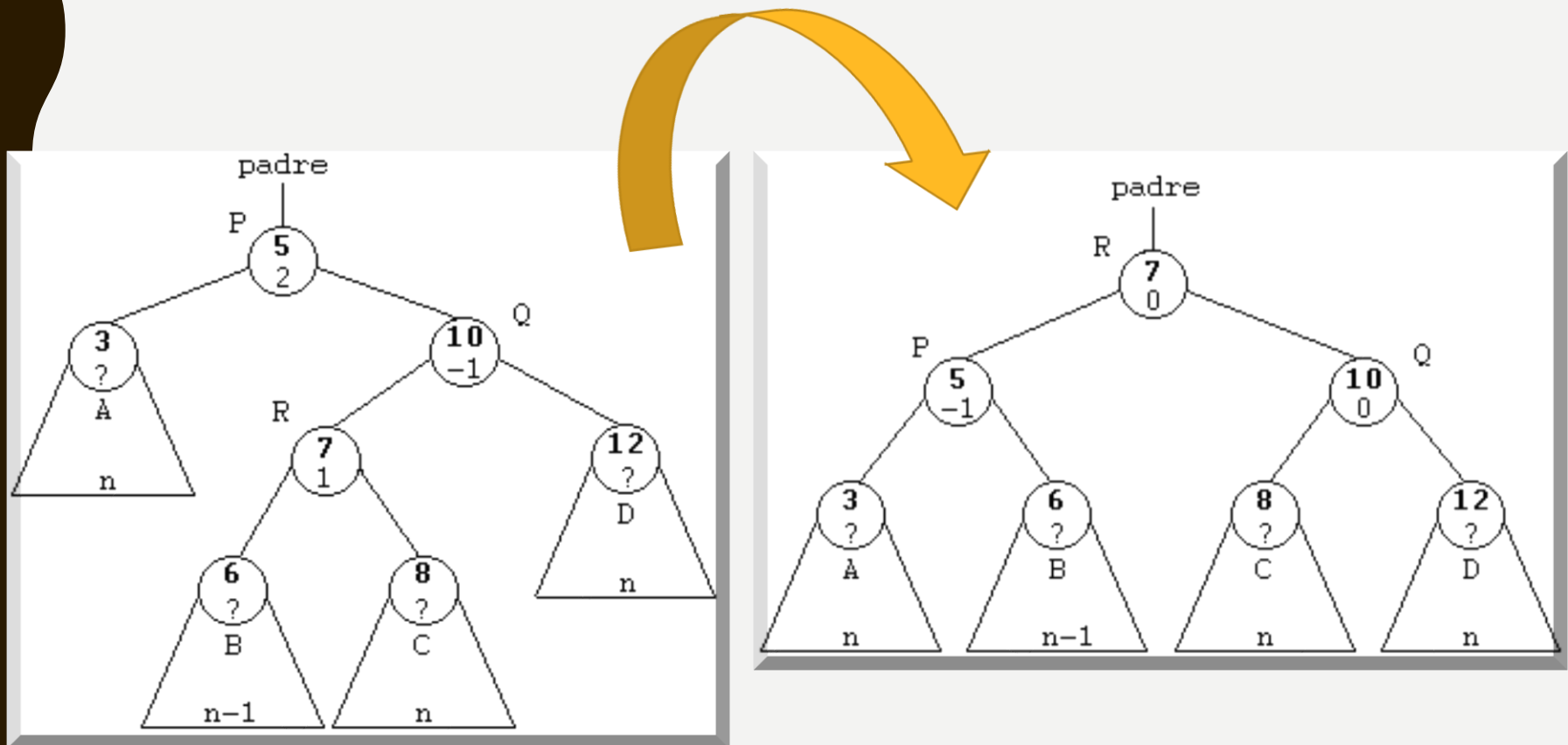


Caso 2: Rotación simple derecha RSD

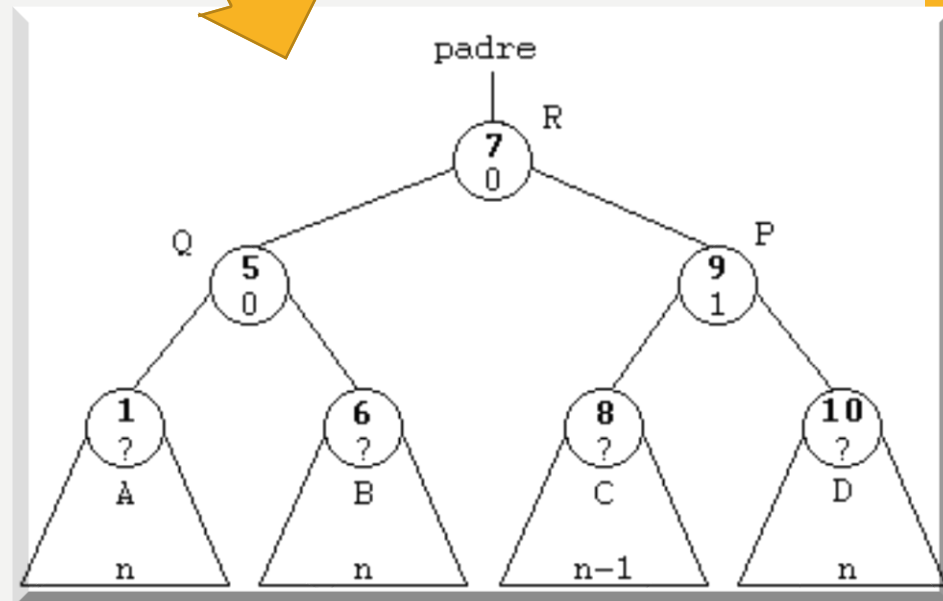
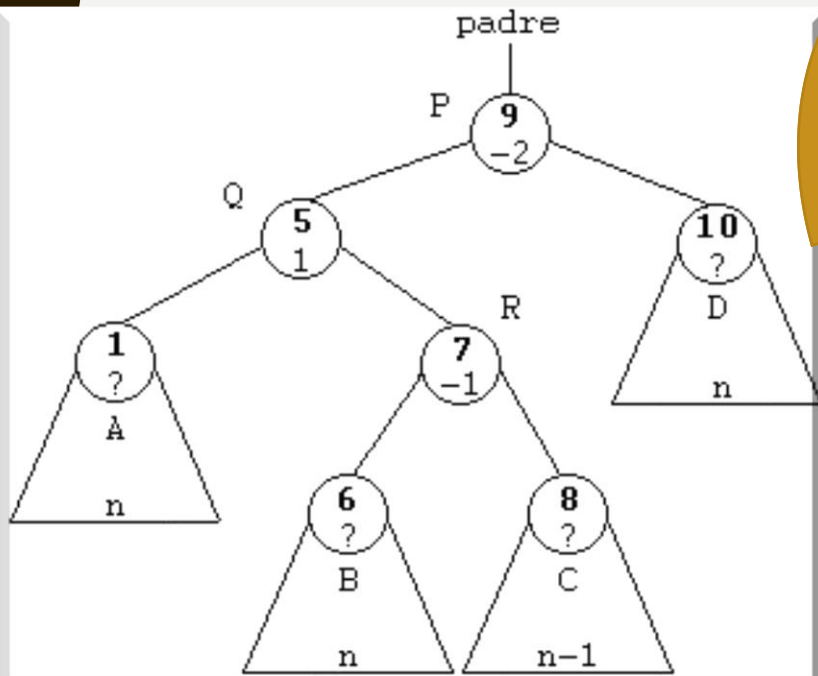
- Si esta desequilibrado a la derecha y su hijo izquierdo tiene el mismo signo (-) hacemos rotación sencilla derecha.



Caso 3: Rotación doble izquierda RDI



Caso 4: Rotación doble derecha RDD

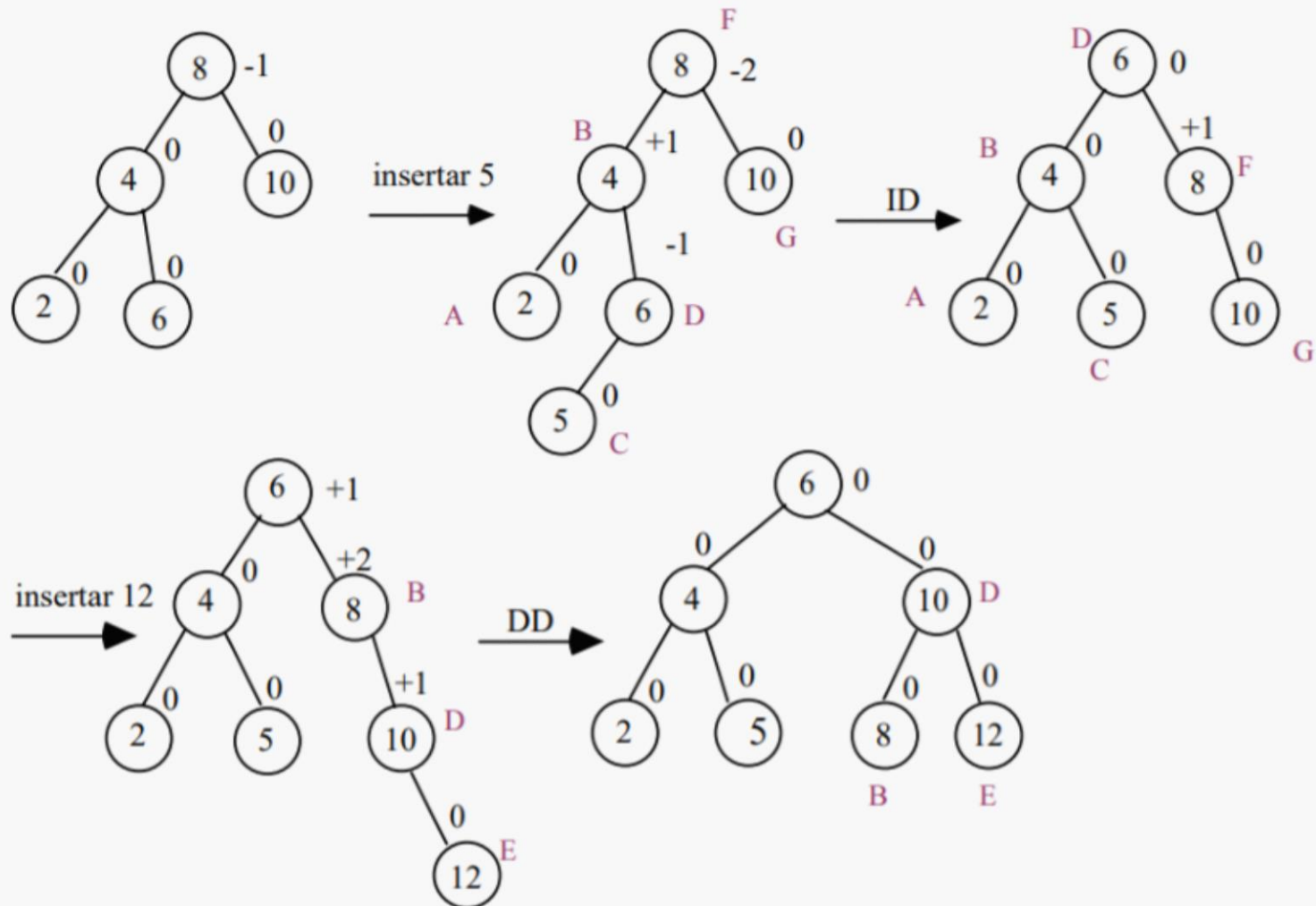


Reequilibrados en árboles AVL por inserción de un nodo

En ese caso, cuando el valor de FE de un nodo tome el valor -2 ó 2, con el valor de FE de el nodo actual y el del nodo derecho si FE es 2 o el del nodo izquierdo si es -2, se determina qué tipo de rotación se debe aplicar:

FE nodo actual	FE del nodo derecho	FE del nodo izquierdo	Rotación
-2	No importa	-1	RSD
-2	No importa	1	RDD
2	-1	No importa	RDI
2	1	No importa	RSI

Ejemplo. Insertar en el siguiente árbol los elementos 5 y 12



- https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/4411/20/ped-06_07-tema3_2.pdf

EJERCICIOS DE INSERCIÓN:

- Sobre el AVL de la figura P11.2 se desea insertar el nodo con el valor 2:

a) Los factores de balance:

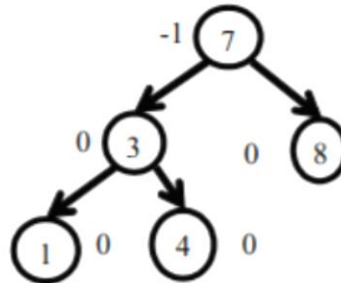


Figura P11.2.

b) Luego de insertar el 2, no queda AVL. Con una rotación simple a la derecha, se reestablece la propiedad AVL.

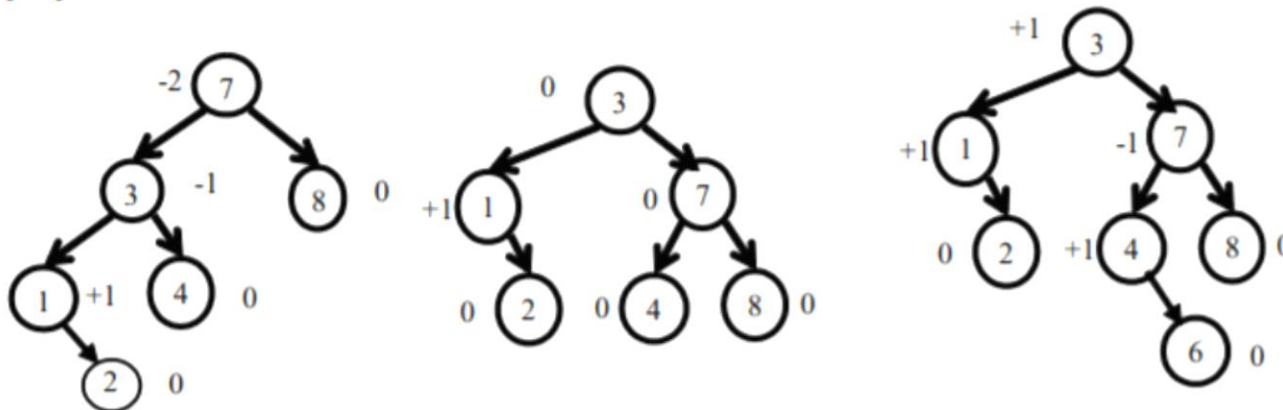
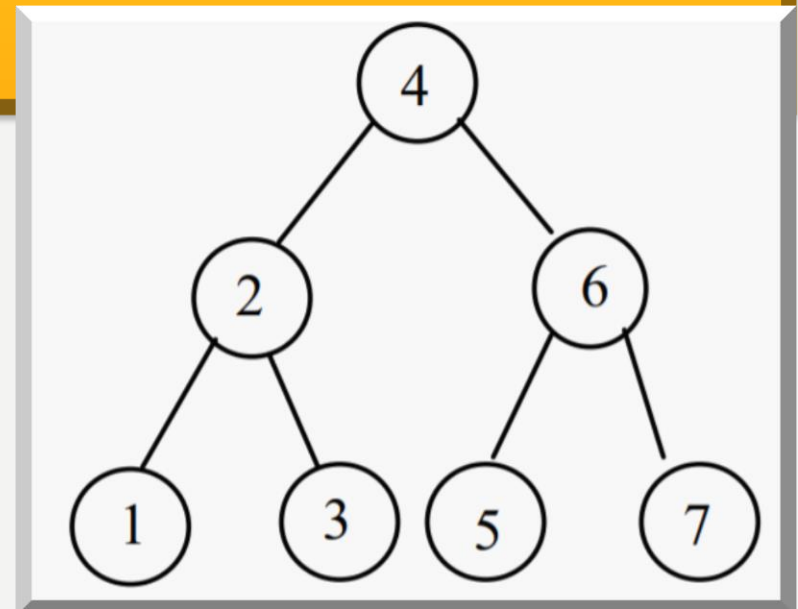


Figura P11.3.

EJERCICIOS DE INSERCIÓN EN AVL.

1. Construir un árbol AVL formado por los nodos insertados en el siguiente orden con etiquetas 4, 5, 7, 2, 1, 3, 6
2. Insertar las mismas etiquetas con el siguiente orden: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
3. Verificar que el árbol de la figura es la solución de los ejercicios 1 y 2.



- https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/4411/20/ped-06_07-tema3_2.pdf

PARA RE-CALCULAR EL FE

Para seguir el camino desde el nodo insertado o borrado hasta el nodo raíz existen dos alternativas:

- Guardar en una pila los punteros a los nodos por los que se ha pasado para llegar al nodo insertado o borrado (almacenar el camino recorrido).
- Buscar al padre del nodo actual en una función recursiva que acabe al llegar a la raíz.

REEQUILIBRADOS EN ÁRBOLES AVL POR INSERCIÓN DE UN NODO (CONTINUACIÓN).

- Sólo los casos señalados en la tabla importan, el resto de los casos no interesan.
- Esto porque en nodos desequilibrados hacia la derecha (valores de FE positivos), se busca el equilibrio mediante rotaciones a la izquierda.
- Viceversa, con nodos desequilibrados hacia la izquierda (valores de FE negativos), se busca el equilibrio mediante rotaciones a la derecha.

ELIMINACIÓN EN AVL

- Eliminar un nodo en un árbol AVL puede afectar el equilibrio de sus nodos.
- Cuando sea necesario, se deben efectuar rotaciones simples o dobles que permitan mantener el árbol balanceado.

ELIMINACIÓN EN AVL

Se elimina un nodo igual a como se eliminan de un ABB.

Al localizar el nodo que se va a eliminar, se sigue el siguiente procedimiento:

- Si el nodo es un nodo hoja, se elimina.
- Si el nodo solo tiene un hijo, se sustituye con su hijo.
- Si el nodo eliminado tiene dos hijos, se sustituye por el hijo derecho y se ubica al hijo izquierdo en el subárbol izquierdo del hijo derecho (o al revés).

ELIMINACIÓN EN AVL

Una vez eliminado el nodo, se vuelve a equilibrar el árbol:

- Si el equilibrio del padre del nodo eliminado cambia de 0 a ± 1 el algoritmo concluye.
- Si el padre del nodo eliminado cambio de ± 1 a 0, la altura del árbol ha cambiado y se afecte el equilibrio de su abuelo.

ELIMINACIÓN EN AVL

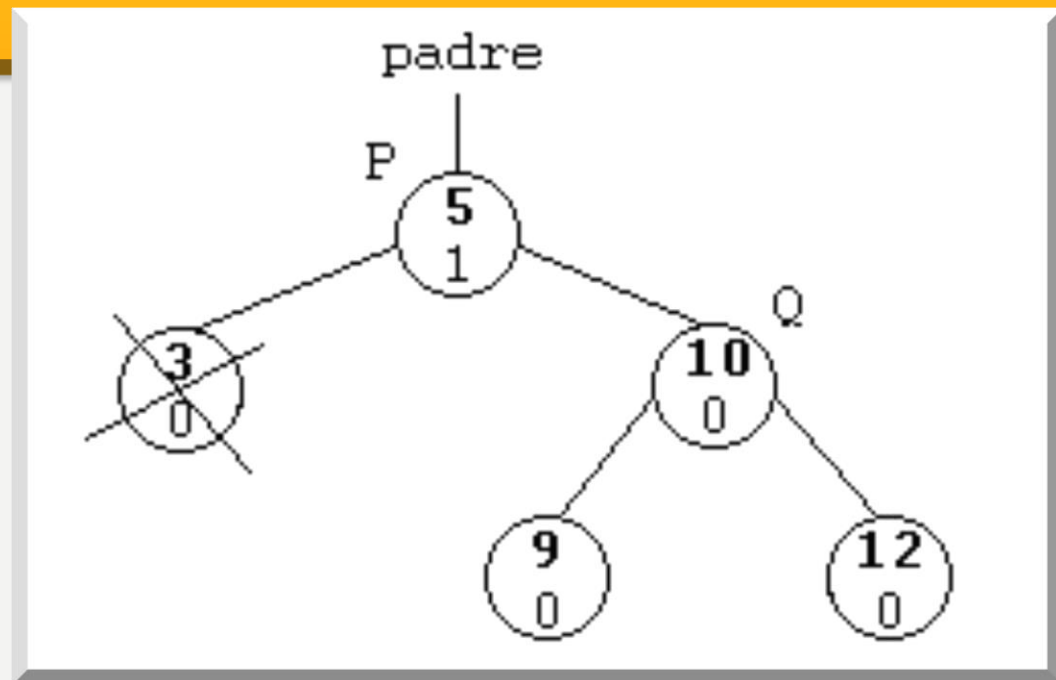
Una vez eliminado el nodo, se vuelve a equilibrar el árbol:

- Si el equilibrio del padre del nodo eliminado cambia de ± 1 a ± 2 hay que hacer una rotación. Después de concluirla, el equilibrio del padre podría cambiar, lo que, a su vez, podría forzar otros cambios (y probables rotaciones) en toda la ruta hacia arriba a medida que se asciende hacia la raíz.
- Si en la ruta un nodo cambia de 0 a ± 1 entonces termina el algoritmo.

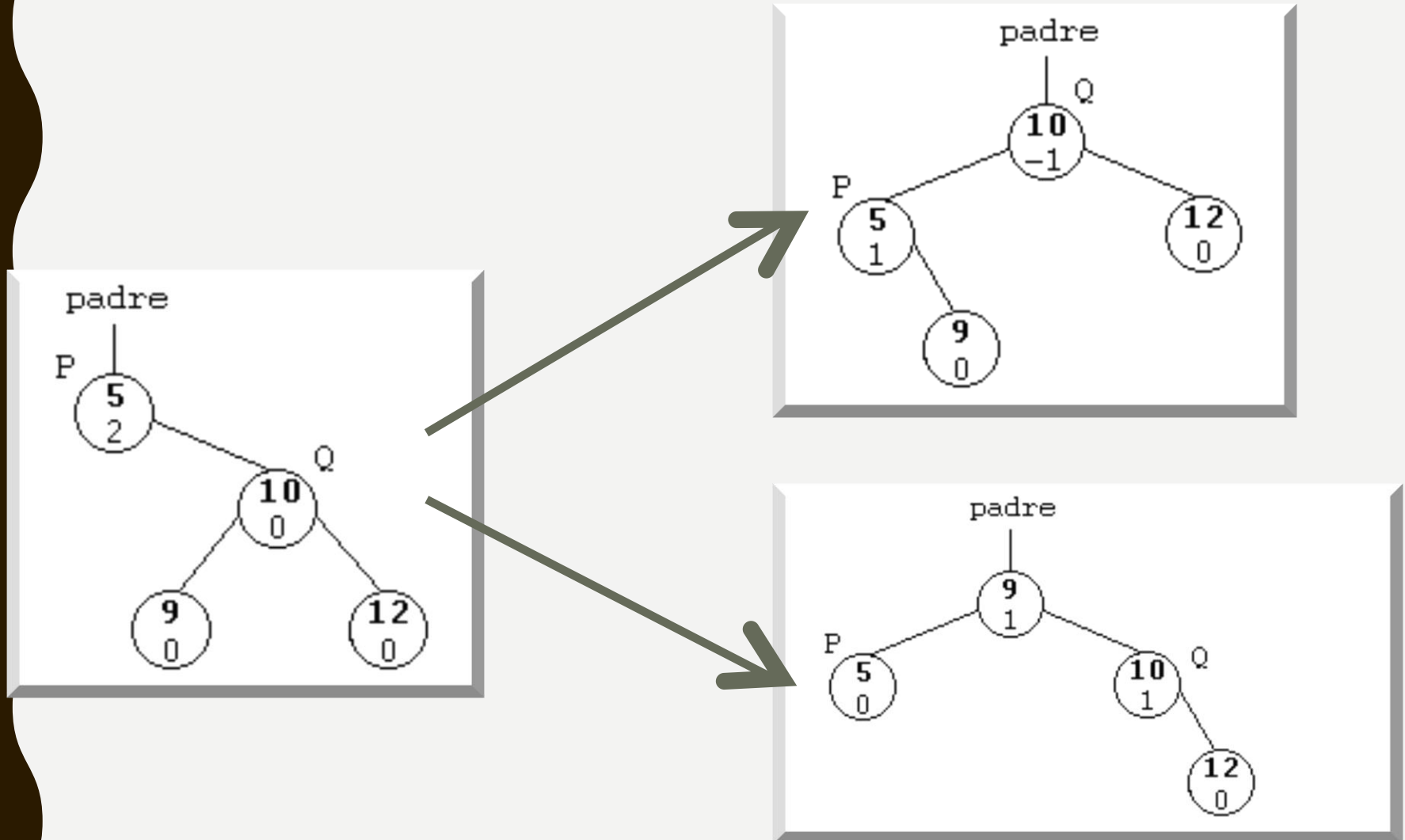
Reequilibrio en árboles AVL por eliminación de un nodo.

Cuando el desequilibrio se debe a la eliminación de un nodo la situación puede ser algo diferente, pero siempre se puede llegar a uno de los casos anteriores.

Suponga el siguiente ejemplo, en el árbol AVL se elimina el nodo de valor 3:



Reequilibrio en árboles AVL por eliminación de un nodo.



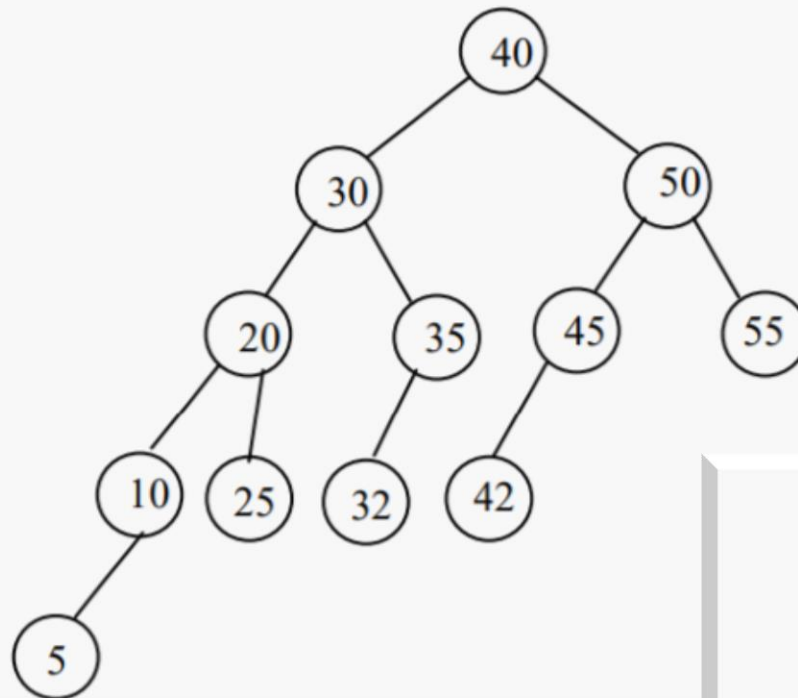
Reequilibrio en árboles AVL por eliminación de un nodo.

FE nodo actual	FE del nodo derecho	FE del nodo izquierdo	Rotación
-2	No importa	-1	RSD
-2	No importa	0	RSD
-2	No importa	1	RDD
2	-1	No importa	RDI
2	0	No importa	RSI
2	1	No importa	RSI

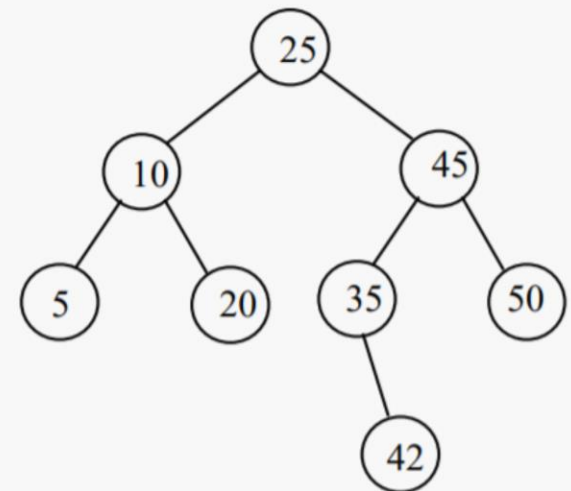
- Los árboles AVL siempre quedan equilibrados después de una rotación.

EJERCICIO:

Dado el siguiente árbol AVL de entrada, efectuar los siguientes borrados en el mismo: 55, 32, 40, 30. (Nota: al borrar un nodo con 2 hijos, sustituir por el mayor de la izquierda)



Solución:



- Fuente: https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/4411/20/ped-06_07-tema3_2.pdf

EJERCICIOS:

1. Crear un AVL con las claves: 12, 45, 65, 34, 123, 7, 124, 35, 100, 5, 84
2. Desarrollar ejercicios propuestos en http://decsai.ugr.es/~jfv/ed1/tedi/cdrom/docs/Ejer_Avl.htm