

TAD Árboles

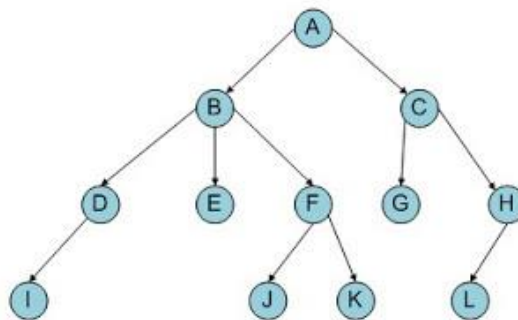
Estructuras de Datos, 620505

Árboles, Estructuras de Datos.

1

Árbol General. Definición (I)

- El concepto de árbol implica una estructura donde los datos se organizan de modo que los elementos de información estén relacionados entre sí a través de ramas.



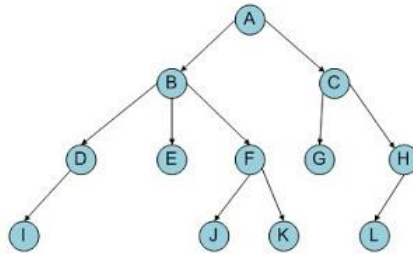
Árboles, Estructuras de Datos.

2

Definición recursiva (II):

Árbol es un conjunto de nodos que:

- Es vacío, o bien,
- Tiene un nodo raíz del que descienden 0 o más subárboles.



Árboles, Estructuras de Datos.

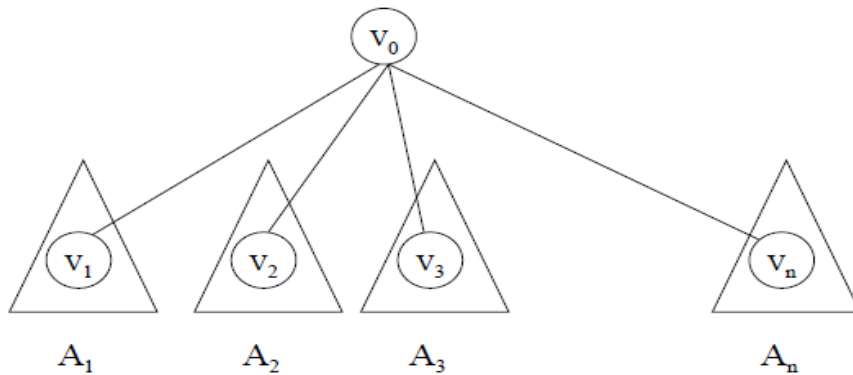
3

Definición (III)

- Formalmente, se define un árbol no nulo de la siguiente forma:
- **Caso base:** un árbol con sólo un nodo (es a la vez raíz del árbol y hoja).
- Un nuevo árbol a partir de un nodo v_0 y n árboles A_1, A_2, \dots, A_n de raíces r_1, r_2, \dots, r_n con D_1, D_2, \dots, D_n elementos cada uno, puede construirse estableciendo una relación padre-hijo entre v_0 y cada una de las raíces de los n árboles.
- El árbol resultante de $D = 1 + D_1 + \dots + D_n$ nodos tiene como raíz el nodo v_0 , los nodos $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$, son los hijos de v_r y el conjunto de nodos hoja está formado por la unión de los n conjuntos hojas iniciales. A cada uno de los árboles A_i se les denota ahora **subárboles** de la raíz.

4

Definición (III):



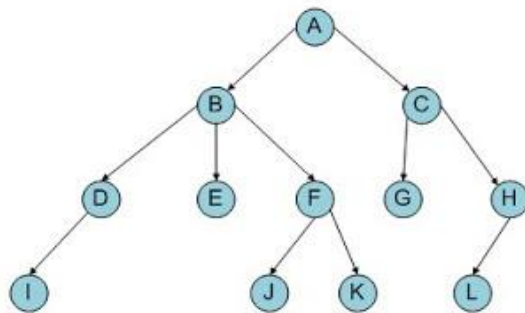
- $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ son llamados subárboles de v_0
- Si A_i no es vacío, entonces su raíz v_i , es llamado hijo de v_0 , y v_0 es llamado padre de v_i

5

Elementos de la definición:

- Nodos: conjunto finito de elementos.
- Ramas: conjunto finito de líneas dirigidas, que conectan nodos entre sí.
- Grado del Nodo: número de ramas descendentes desde el nodo.
- Raíz: primer nodo de un árbol no vacío.
- Camino: secuencia de nodos en los que c/nodo es adyacente al siguiente.
 - Solo existe 1 camino entre la Raíz y un Nodo cualesquiera.
 - La distancia de un Nodo a la Raíz determina la rapidez de búsqueda.

6



Árboles, Estructuras de Datos.

Raíz: A

Nodos: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L

Ramas: A-B; A-C, B-D, B-E, B-F, D-I, F-J, F-K, C-G, C-H, H-L.

Grado del Nodo:
A=2; B=3; D=1; I=0

Caminos:
A-B-D-I; A-B-E; A-B-F-J;
A-B-F-K; A-C-G;
A-C-H-L
:
:
:

7

Elementos de la Definición:

- **Raíz:** es aquel elemento que no tiene antecesor.
- **Rama:** arista entre dos nodos.
- **Antecesor:** un nodo X es antecesor de un nodo Y si existe un camino de X a Y.
- **Sucesor:** un nodo Y es sucesor de un nodo X si existe un camino de X a Y.
- **Grado** de un nodo: el número de hijo que tiene.
- **Hoja:** nodo que no tiene hijos: grado 0.
- **Nodo interno:** aquel que tiene al menos un descendiente.

Árboles, Estructuras de Datos.

8

Definiciones:

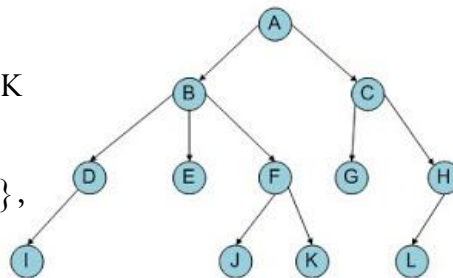
- **Hermanos**: 2 o mas nodos del mismo padre.
- **Nivel de un nodo**: distancia desde la raíz hasta el nodo.
- **Altura o profundidad de un árbol**: nivel de la hoja del camino más largo desde la raíz.
- **Subárbol**: cualquier estructura conectada por debajo del raíz.
- **Anchura**: es el mayor valor del número de nodos que hay en un nivel.

Árboles, Estructuras de Datos.

9

Ejemplo:

- **Padres**: A, B, C, D, F, H.
- **Hijos**: De A(B y C), de B(D, E, F),
de C(G, H), de D(I), de F(J, K),
de H(L).
- **Sucedores** de B: D, E, F, I, J, K
- **Antecesoros** de E: B y A.
- **Hermanos**: {B, C}, {D, E, F},
{G, H}, {J, K}
- **Hojas**: I, E, J, K, G, L
- **Altura del Árbol**: 3
- **Altura del Subárbol B**: 2



Árboles, Estructuras de Datos.

10

Elementos de la Definición:

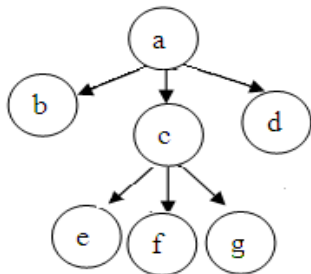


Figura 1: Ejemplo de Árbol

Árboles, Estructuras de Datos.

- Un nodo a es **padre** de un nodo b si existe un enlace desde a hasta b (b es hijo de a).
- Sólo puede haber un único nodo sin padres, denominado **raíz**.
- Un nodo que no tiene hijos se conoce como **hoja**.
- Los demás nodos (tienen padre y uno o varios hijos) son parte de una **rama**.

11

Elementos de la Definición:

- **Recorrido de un árbol** es una sucesión de nodos del árbol, de forma que entre cada dos nodos consecutivos de la sucesión haya una relación de parentesco. Existen dos recorridos típicos para listar los nodos de un árbol:
 - **En profundidad**, se listan los nodos expandiendo el hijo actual de cada nodo hasta llegar a una hoja, donde se vuelve al nodo anterior probando por el siguiente hijo y así sucesivamente.
 - **En anchura** En el segundo, por su parte, antes de listar los nodos de nivel $n + 1$ (a distancia $n + 1$ aristas de la raíz), se deben haber listado todos los de nivel n . La idea es partir desde la raíz, nivel por nivel desde el nodo de más a la izquierda hacia la derecha.

12

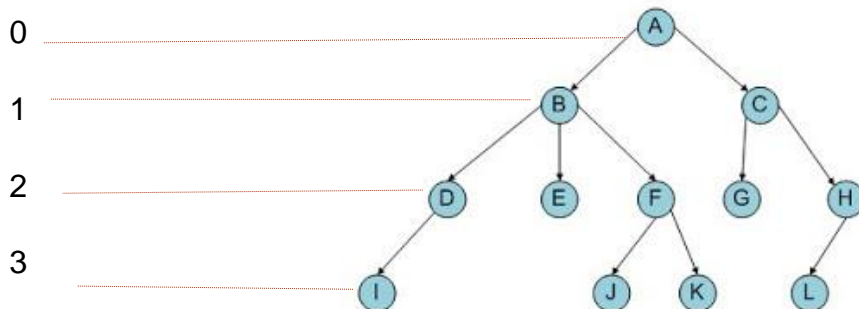
- Un árbol **completo** es un árbol de profundidad K que tiene todos los nodos posibles hasta el penúltimo nivel (profundidad K-1), y donde los elementos del último nivel están colocados de izquierda a derecha sin dejar huecos entre ellos.
- Un árbol se dice **casi-completo** cuando se puede obtener a partir de un árbol completo eliminando hojas consecutivas del último nivel, comenzando por la que está más a la derecha

Árboles, Estructuras de Datos.

13

Ejemplo:

Nivel:



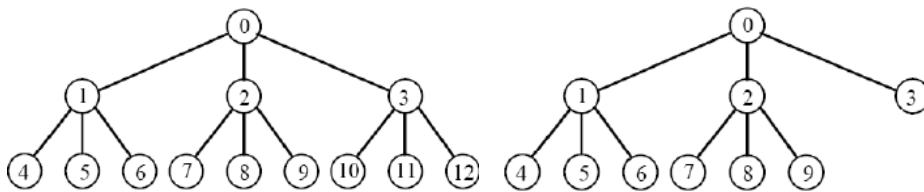
∴ Altura del Árbol= ¿ ?

Árboles, Estructuras de Datos.

14

- **Ejercicios:**

- 1.- Determine el máximo y mínimo de nodos por nivel para un árbol N-ario cualquiera. Suponga K niveles.
- 2.- Determine las propiedades que cumplen los siguientes árboles triarios:



Árboles, Estructuras de Datos.

15

RECORRIDO DE ÁRBOLES GENERALES

Considérese el árbol con Raíz y los subárboles $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$

ORDEN PREVIO

Raíz

Los nodos de A_1 en orden previo

Los nodos de A_2 en orden previo

.....

Los nodos de A_n en orden previo

ORDEN SIMÉTRICO

Los nodos de A_1 en orden simétrico

Raíz

Los nodos de A_2 en orden simétrico

Los nodos de A_3 en orden simétrico

.....

Los nodos de A_n en orden simétrico

Árboles, Estructuras de Datos.

16

ORDEN POSTERIOR

Los nodos de A_1 en orden posterior

Los nodos de A_2 en orden posterior

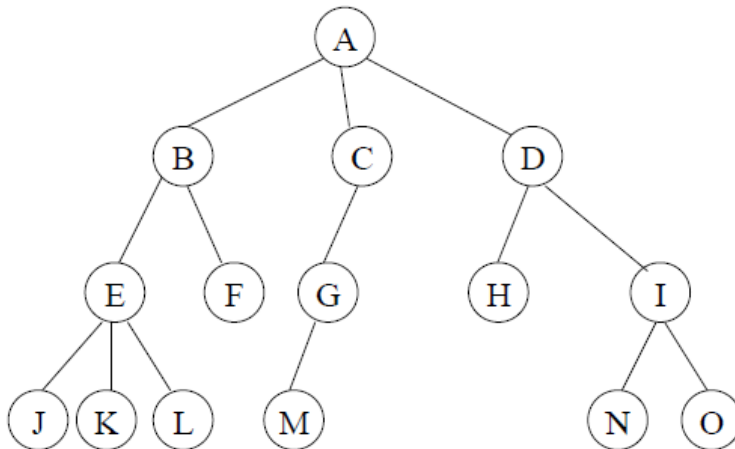
.....

Los nodos de A_n en orden posterior

Raíz

Árboles, Estructuras de Datos.

17



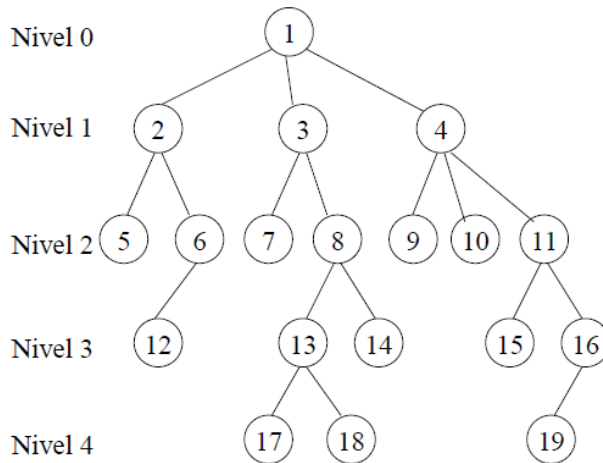
Orden previo: A, B, E, J, K, L, F, C, G, M, D, H, I, N, O

Orden simétrico: J, E, K, L, B, F, A, M, G, C, H, D, N, I, O

Orden posterior: J, K, L, E, F, B, M, G, C, H, N, O, I, D, A

18

Ejemplo: Considere el árbol A siguiente:



Se pide determinar:

- Su altura
- Recorridos InOrden, PreOrden, PostOrden, en Anchura
- Tabla de grados para los nodos internos.

19

Un árbol dirigido es una estructura:

- **Jerárquica** porque los componentes están a distinto nivel.
- **Organizada** porque importa la forma en que esté dispuesto el contenido.
- **Dinámica** porque su forma, tamaño y contenido pueden variar durante la ejecución.

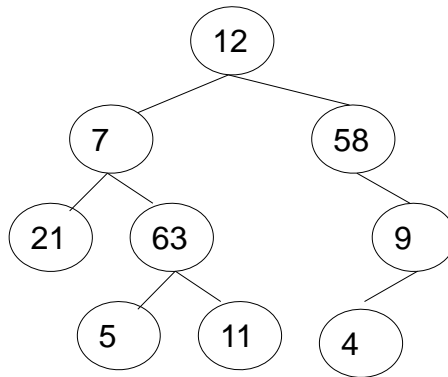
Un árbol puede ser:

- vacío,
- Una raíz + subárboles.

20

Ejemplo:

Árbol Binario no completo, de altura y anchura 3.



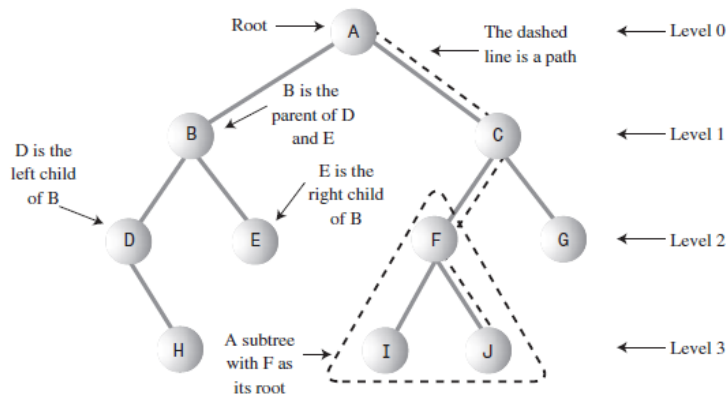
Hacer los recorridos en profundidad (preorden, inorden, postorden) y anchura.

21

Recorridos:

- En el árbol de la figura el recorrido en preorden sería:
12, 7, 21, 63, 5, 11, 58, 9, 4.
- En el árbol de la figura el recorrido en postorden sería:
21, 5, 11, 63, 7, 4, 9, 58, 12.
- En el árbol de la figura el recorrido en inorden sería:
21, 7, 5, 63, 11, 12, 58, 4, 9
- En el árbol de la figura el recorrido en amplitud sería:
12, 7, 58, 21, 63, 9, 5, 11 y 4.

22

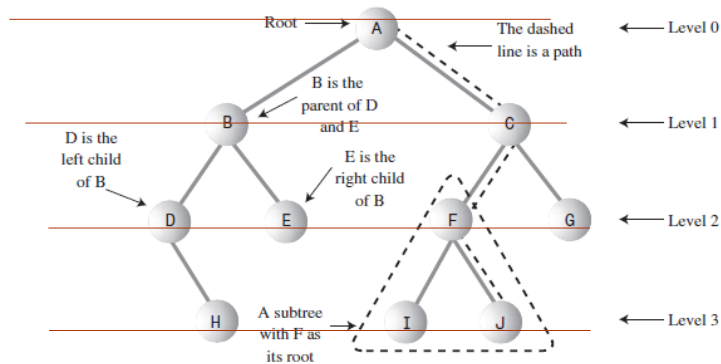


Ejercicio: para el árbol de la figura determine lo indicado:

- Altura
- Hojas
- Tabla de grados para los nodos internos
- Recorrido en Anchura.
- Recorridos PreOrden, InOrden, Post-Orden.



23

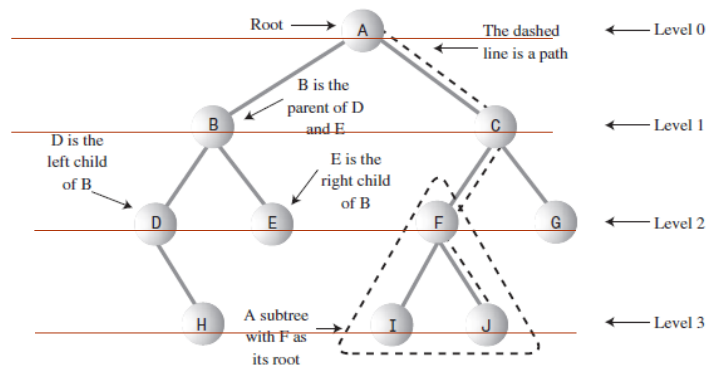


Ejercicio: para el árbol de la figura determine lo indicado:

- Altura: 3 (contando nivel 0 para la raíz).
- Hojas: H, E, I, J, G.
- Tabla de grados para los nodos internos
- Recorrido en Anchura.
- Recorridos PreOrden, InOrden, Post-Orden.



24



Ejercicio: Tabla de grados para los nodos internos

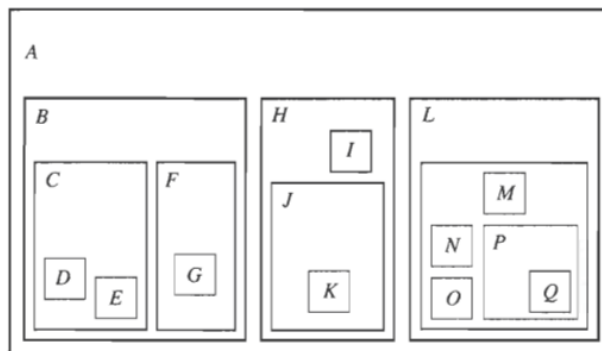
- Recorrido en Anchura.
- Recorridos
- PreOrden: A, B, D, H, E, C, F, I, J, G
- InOrden: D, H, B, E, A, I, F, J, C, G
- Post-Orden: H, D, E, B, I, J, F, G, C, A.

NODOS	GRADOS
A	2
B	2
C	2
D	1
F	2

25

25

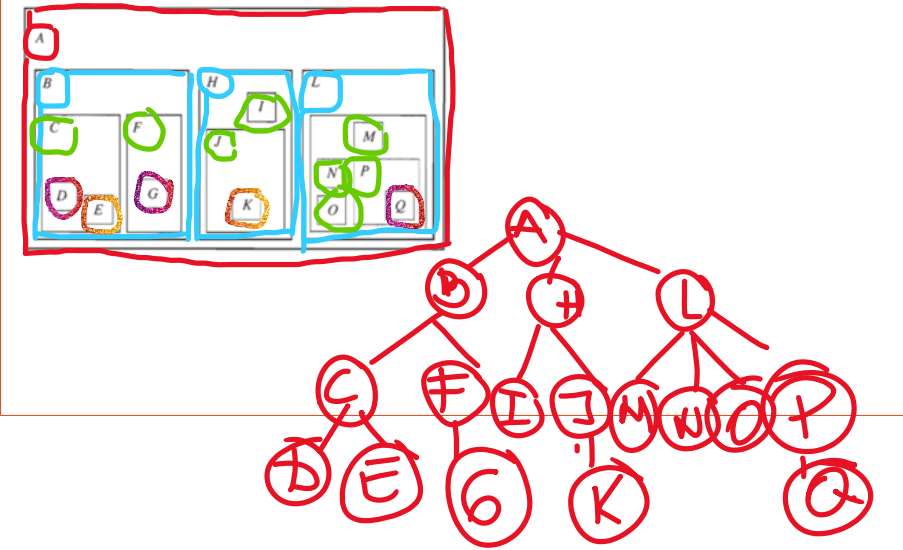
Ejercicio: el siguiente árbol está expresado en notación de Venn, reescribalo como un grafo.



Árboles, Estructuras de Datos.

26

Ejercicio: el siguiente árbol está expresado en notación de Venn, reescríbalo como un grafo.



Árboles, Estructuras de Datos.

27

2. Dada la siguiente estructura del árbol representada como anidación de paréntesis:

$(A(B(E(K), F), C(G(L, M(N))), D(H, I, (O, P, Q, R), J)))$

Calcule lo siguiente:

- Grado del árbol.
- Grado del nodo G.
- Altura del árbol.
- Nodos terminales u hojas.
- Nodos interiores.

3. Dada la siguiente estructura de árbol representada como notación decimal de Dewey:

1.A, 1.1.B, 1.1.1.D, 1.1.2.E, 1.1.2.1.I, 1.1.2.2.J,
1.1.3.F, 1.1.4.G, 1.1.4.1.K, 1.1.4.1.1.M, 1.1.4.1.2.N,
1.2.C, 1.2.1.H, 1.2.1.1.L

Calcule las longitudes de camino interno y externo de dicho árbol.

4. Calcule cuál es el grado del nodo T, si T es padre del nodo P y éste tiene 4 hermanos.

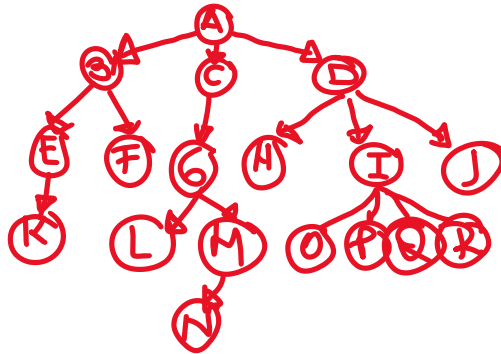
28

2. Dada la siguiente estructura del árbol representada como anidación de paréntesis:

$(A(B(E(K), F), C(G(L, M(N))), D(H, I, (O, P, Q, R), J)))$

Calcule lo siguiente:

- Grado del árbol.
- Grado del nodo G.
- Altura del árbol.
- Nodos terminales u hojas.
- Nodos interiores.



Árboles, Estructuras de Datos.

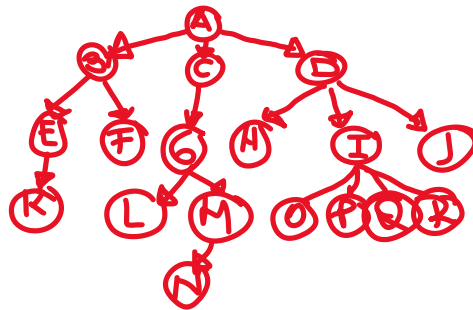
29

2. Dada la siguiente estructura del árbol representada como anidación de paréntesis:

$(A(B(E(K), F), C(G(L, M(N))), D(H, I, (O, P, Q, R), J)))$

Calcule lo siguiente:

- Grado del árbol.
- Grado del nodo G.
- Altura del árbol.
- Nodos terminales u hojas.
- Nodos interiores.

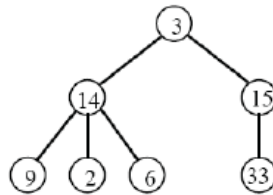


- Grado del Árbol: 4
- Grado del nodo G: 2
- Altura del árbol: 4 (mayor nivel, contando 0 para la raíz).
- Nodos hojas: K, F, L, N, H, O, P, Q, R, J
- Nodos Interiores: A, B, C, D, E, G, I, M

Árboles, Estructuras de Datos.

30

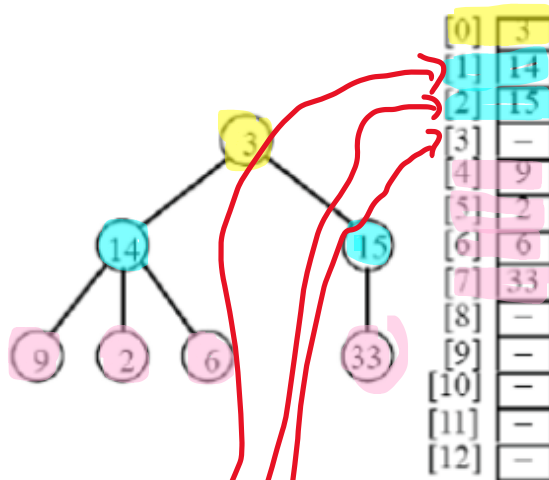
Implementación estática



[0]	3
[1]	14
[2]	15
[3]	-
[4]	9
[5]	2
[6]	6
[7]	33
[8]	-
[9]	-
[10]	-
[11]	-
[12]	-

<i>elemento</i>	<i>índice</i>	<i>condición</i>
e	i	
hijo k-ésimo de e	$n*i+k$	si $n*i+k < \text{max}$
padre de e	$(i-1) \text{ div } n$	si $i \neq 0$
hermano siguiente a e	$i+1$	si $i \bmod n \neq 0$
n.º de orden entre sus hermanos	$((i-1) \bmod n)+1$	si $i \neq 0$

31



La raíz está ubicada en la posición 0.

Se calculan las ubicaciones de los hijos de un nodo en la posición i, según la siguiente fórmula:

Pos: $i*k + \text{Pos.Hijo}$

Hijos de la raíz:

$0*3 + 1=1$
 $0*3 + 2=2$
 $0*3 + 3=3$

Hijos de 14:

$1*3 + 1=4$
 $1*3 + 2=5$
 $1*3 + 3=6$

Hijos de 15:

$2*3 + 1=7$
 $2*3 + 2=8$
 $2*3 + 3=9$

Hijos de 33:

$7*3 + 1=22$
 $7*3 + 2=23$
 $7*3 + 3=24$

32