指標法及白努利分佈平均值

- 假設丟擲一枚銅板得到正面的機率是 1/5 ，問，在丟了 20 次之後正面的期望值為何？

$n = 20, p = 1/5$

指標法 (The Method of Indicator)

設 X 可表示成

$$X = X_1 + X_2 + \ldots$$

其中 X_i 為指標(隨機變數 X_i 的值為 0(表不需觀察)或 1(表需要觀察))

$$EX = EX_1 + EX_2 + \ldots$$

指標法及白努利分佈平均值 (Cont.)

- 一個箱子裡裝滿了各式各樣的球，僅知其中有 40% 是紅球，從中任意抽 n 顆
  - 取出後放回 (with replacement) ➡ 百努利試驗
  - 取出結果是紅球的期望值

$$P(\text{success}) = P(\text{red}) = 0.4$$

$$EX = np = n \times 0.4$$

  - 取出後不放回 (without replacement)
  - 假設

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{if 第}\, i \,\text{次抽出是紅球} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$X = X_1 + X_2 + \ldots \quad \Rightarrow \quad EX = EX_1 + EX_2 + \ldots$$

指標法及白努利分佈平均值 (Cont.)

$$
\begin{aligned}
EX_i &= P(X_i = 1) \\
&= P(\text{第}\,i\,\text{顆是紅球}) \\
&= P(\text{第1顆是紅球})(\text{利用對稱性}) \\
&= 0.4
\end{aligned}
$$

$EX =$ 抽中紅球機率0.4，總共有n次

$= n \times 0.4$

幾何隨機變數的平均值

- 在百努利試驗下，計算第 1 次成功所需的試驗次數，*幾何分佈*
- 幾何隨機變數的期望值是求在幾何分佈的情況下，要執行多少次試驗才能獲得第 1 次成功
- 假設 $P($成功$)=p$

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{if 前 } i \text{ 次試驗都是失敗}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

- 例：F F F F S

$$X=5, X_1=1, X_2=1, X_3=1, X_4=1, X_5=0, X_6=0, \ldots$$

幾何隨機變數的平均值 (Cont.)

$$X = 1 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots$$

$$EX = E(1) + E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \ldots$$

$$\begin{aligned} EX_i &= P(X_i = 1) \\ &= P(\text{前 } i \text{ 次試驗是失敗的}) \\ &= q^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EX &= 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots \\ &= \frac{1}{1-q} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

幾何隨機變數的平均值 (Cont.)

- 假設丟擲銅板得到正面的機率為 $P(\mathrm{H}) = p$ ，問，得到三次正面的期望值為何？
  - 令， $X_1 =$ 得到一個正面所需的丟擲數
  - $X_2 =$ 得到二個正面所需的丟擲數
  - $X_3 =$ 得到三個正面所需的丟擲數

反 反 正 正 反 反 反 正

$$X = 8, X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 4$$

反 反 正 正 反 反 反 正

幾何分佈 幾何分佈 幾何分佈

$$EX = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{3}{p}$$

幾何隨機變數的平均值 (Cont.)

- 箱子裡有 10 顆白球及 14 顆黑球，以取出後放回的方式進行白努利試驗，其中 $P(W) = 10/24$ ，則抽到白球的期望值是 24/10 。若，抽球是以取出後不放回的方式進行，問，抽到一顆白球的期望值為何？
  - 假設將黑球分別給予編號，如 $B_1, B_2, \ldots, B_{14}$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{若 } B_i \text{ 出現在任一顆白球之前} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

幾何隨機變數的平均值 (Cont.)

- 假設執行試驗的結果為 $B_4\ B_1\ B_7\ B_8\ W$
- 則 $X=5, X_4=1, X_1=1, X_7=1, X_8=1$

$$EX=1+EX_1+EX_2+\ldots+EX_{14}$$

$$=1+P(B_1\text{在任何W前被抽出})+P(B_2\text{在任何W前被抽出})+\ldots$$
$$+P(B_{14}\text{在任何W前被抽出})$$

$$=1+14\times\frac{1}{11}$$

$$=\frac{25}{11}$$

想像任一黑球在白球之前被抽到的機率為 1/11 (因為箱子裡有 10 顆白球及可能被抽到的那顆黑球

條件期望值

- 條件機率
  - $P(B|A)$ 表示已知 A 事件已經發生的條件下，B 事件發生的機率。要求得 $P(B|A)$ ，縮減機率空間成 A ，然後在新的機率空間中計算 B 的機率
  - 例：從 52 張牌的撲克牌中任抽一張，問，抽中 K 的機率為何？又，假設你有超能力，已經知道拿到的牌是圖樣的，問，拿到的牌是 K 的機率為何？

$$P(K)=\frac{4}{52}$$

$$P(K|\text{圖})=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

條件期望值 (Cont.)

- 條件期望值：在事件 A 已發生的情況下，計算隨機變數的期望值。設有一隨機變數 X，則其條件期望值為

$$E(X|\text{事件}A)=\sum_x xP(X=x|A)$$

- 例：從一副撲克牌中抽出一張，設 X 表面值 (設 J, Q, K 的牌都算 10 點， A 算 11 點) ，問從抽出來的牌點數期望值為何？

$$\begin{aligned} EX &= 2\times P(X=2)+3\times P(X=3)+\ldots+11\times P(X=11) \\ &= 2\times P(2)+3\times P(3)+\ldots+10\times P(10,J,Q,K)+11\times P(11) \\ &= 2\times\frac{4}{52}+3\times\frac{4}{52}+\ldots+9\times\frac{4}{52}+10\times\frac{16}{52}+11\times\frac{4}{52}=\frac{95}{13} \end{aligned}$$

條件期望值 (Cont.)

– 在已知抽到的是圖形牌 (包括 A)，求 X 的期望值

$$E(X|\text{圖形}) = 10 \times P(X=10|\text{圖形}) + 11 \times P(X=11|\text{圖形})$$

$$= 10 \times \frac{12}{16} + 11 \times \frac{4}{16}$$

$$= \frac{41}{4}$$

全期望值定理

- 全機率
  - 兩階段的試驗是有關係的
  - 兩種道具，一個箱子裝有 2 顆綠球及 3 顆白球，另一種道具是一副公平的撲克牌
  - 假設從箱子中抽到一顆綠色球，再從撲克牌中抽 1 張。如果抽到是白色球，則從 16 張圖案牌中抽 1 張牌。問抽到 K 的機率為何？

$$
\begin{aligned}
P(K) &= P((G \wedge K) \vee (W \wedge K)) \\
&= P(G \wedge K) + P(W \wedge K) \\
&= P(G) \times P(K|G) + P(W) \times P(K|W) \\
&= \frac{2}{5} \times \frac{4}{52} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{16}
\end{aligned}
$$

全期望值定理 (Cont.)

- 1 號箱子有 20 顆紅球及 10 顆白球；2 號箱子有 10 顆紅球及 10 顆白球，以一個歪斜的硬幣 (P(H) = 0.4) 來決定要抽取的箱子，如果是正面從 1 號箱子抽出 3 顆球，反之從 2 號箱子抽出 5 顆球，設 *X* 是樣本中的紅球數，求 *EX*

不管抽球是否有放回，當執行夠多次的抽取動作之後，取出來的紅球比率應與在箱子裡的紅球比率相同

全期望值定理 (Cont.)

$$E(3\text{R} \in BOX\ 1) = \frac{20}{30} \times 3 = 2$$

$$E(5\text{R} \in BOX\ 2) = \frac{10}{20} \times 5 = \frac{5}{2}$$

$$E(X|H) = \frac{20}{30} \times 3 = 2$$

$$E(X|T) = \frac{10}{20} \times 5 = \frac{5}{2}$$

0.4 正面

$$E(X|H) = \frac{20}{30} \times 3 = 2$$

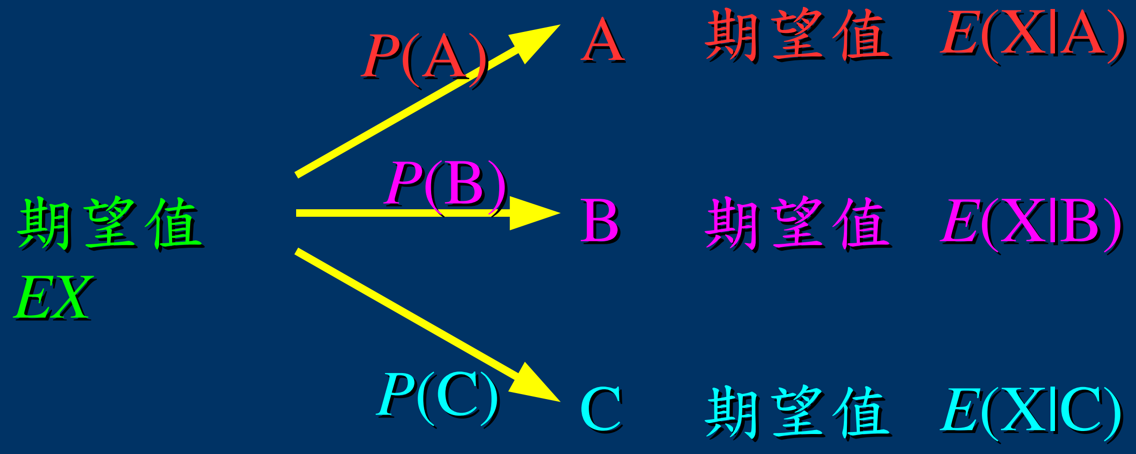
0.6 反面

$$E(X|T) = \frac{10}{20} \times 5 = \frac{5}{2}$$

$$EX = 0.4 \times 2 + 0.6 \times \frac{5}{2} = 2.3$$

全期望值定理 (Cont.)

- 假設一個機率空間可以被分割成 3 個互斥事件，A, B, C 。設 X 是定義在空間裡的隨機變數。則



$$EX = P(A)\times E(X|A) + P(B)\times E(X|B) + P(C)\times E(X|C)$$

全期望值定理 (Cont.)

- 一個丟擲骰子的遊戲，玩家下注後丟一對骰子，如果點數和 7 或 11 ，則玩家贏；如果是 2, 3 或 12 ，玩家輸；若在開始玩之前訂定點數和為 r (非 2, 3, 7, 11, 12 點) ，若玩家丟到的點數不是上列 5 個數字則可繼續丟。
  - 如果 r 在 7 之前出現，則玩家贏
  - 如果 r 在 7 之後出現，則玩家輸
  - 丟出的點數和為 2, 3, 7, 11 或 12 的期望值為何？

$$E(X|2,3,7,11,12)=1$$

因丟得 2, 3, 7,
11, 12 則勝負已分

全期望值定理 (Cont.)

- 丟出的點數和為 4 (i.e. $r = 4$) 的期望值為何？
  - $r = 4$ 到遊戲結束的機率為何？

$$P(\text{success}) = P(\text{Game over}) = P(4 \vee 7) = \frac{9}{36}$$

  - 期望值為何？

$$E(X|4) = \text{第1次丟擲} + \text{繼續丟擲的期望值} = 1 + \frac{36}{9} = 5$$

- 丟出點數和為 5 (i.e. $r = 5$) 的期望值為何？
  - $r = 5$ 且遊戲結束的機率為何？

$$P(\text{success}) = P(\text{Game over}) = P(5 \vee 7) = \frac{10}{36}$$

  - 期望值為何？

$$E(X|5) = \text{第1次丟擲} + \text{繼續丟擲的期望值}$$
$$= 1 + \frac{36}{10}$$

全期望值定理 (Cont.)

- 丟出的點數和為 6 (i.e. $r = 6$) 的期望值為何？
  - $r = 6$ 到遊戲結束的機率為何？

$$P(\text{success}) = P(\text{Game over}) = P(6 \vee 7) = \frac{11}{36}$$

  - 期望值為何？

$$E(X|6) = \text{第1次丟擲} + \text{繼續丟擲的期望值} = 1 + \frac{36}{11}$$

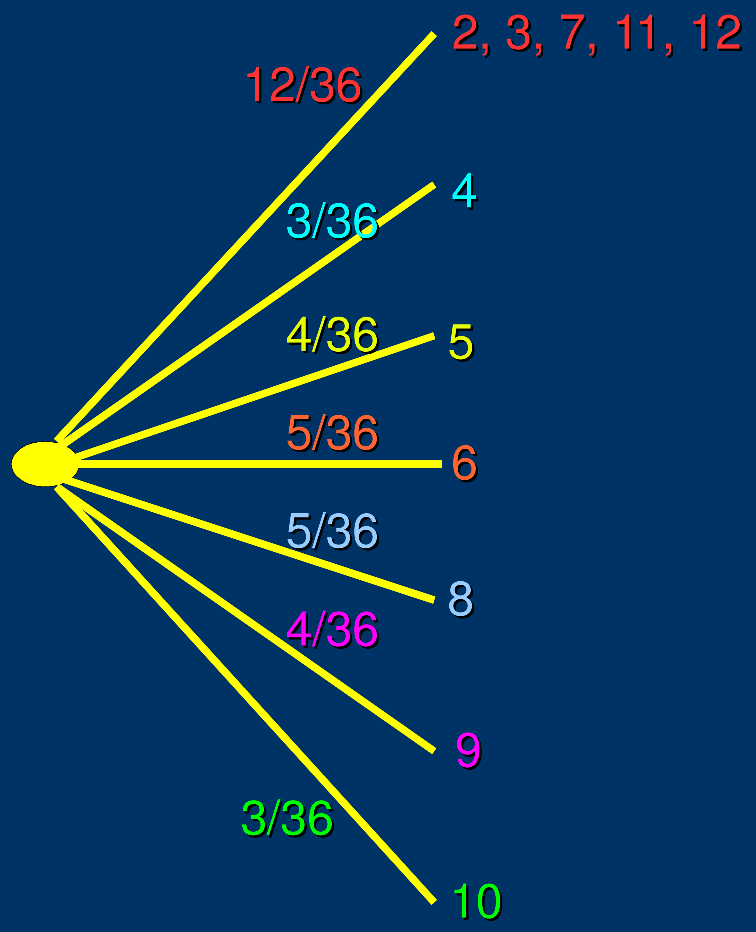
- 丟出點數和為 8 (i.e. $r = 8$) 的期望值為何？
  - $r = 8$ 且遊戲結束的機率為何？

$$P(\text{success}) = P(\text{Game over}) = P(8 \vee 7) = \frac{11}{36}$$

  - 期望值為何？

$$E(X|8) = \text{第1次丟擲} + \text{繼續丟擲的期望值} = 1 + \frac{36}{11}$$

全期望值定理 (Cont.)



$$E(X|2,3,7,11,12)=1$$

$$E(X|4)=1+\frac{36}{9}=5$$

$$E(X|5)=1+\frac{36}{10}=\frac{46}{10}$$

$$E(X|6)=1+\frac{36}{11}=\frac{47}{11}$$

$$E(X|8)=1+\frac{36}{11}=\frac{47}{11}$$

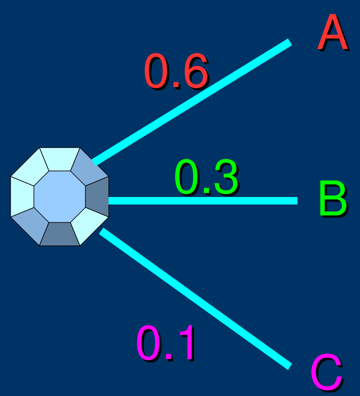
$$E(X|9)=1+\frac{36}{10}=\frac{46}{10}$$

$$E(X|10)=1+\frac{36}{9}=5$$

$$E(X)=\frac{12}{36}\times1+\frac{3}{36}\times5+\frac{4}{36}\times\frac{46}{10}+\frac{5}{36}\times\frac{47}{11}+\frac{5}{36}\times\frac{47}{11}+\frac{4}{36}\times\frac{46}{10}+\frac{3}{36}\times5\sim3.375$$

全期望值定理 (Cont.)

- 某工廠裡有一部秀逗的機器，按下按鈕會發生下列三種狀況之一
  - 有 60% 會進行模式 A 並運行 5 分鐘
  - 有 30% 會進行模式 B ，嗡鳴 2 分鐘並有動作，不產生任何東西，必須重試
  - 有 10% 會進行模式 C ，無作用地嗡鳴 3 分鐘，之後必須重試
  - 問，其生產出東西的運作期望時間為何？
    - 設 X 為產出東西的運作時間



$$E(X|A)=5$$

$$E(X|B)=2+E$$

$$E(X|C)=3+E$$

$$\begin{aligned}
E&=0.6\times5+0.3\times(2+E)+0.1\times(3+E)\\
&=3+0.6+0.3E+0.3+0.1E\\
&=0.4E+3.9\\
0.6E&=3.9\\
E&=6.5
\end{aligned}$$

變異數 (Variance)

- 設有雙胞胎兄妹約翰與瑪麗，他們唸同一所大學同一科系，學期結束，約翰與瑪麗的平均分數都是 50 分，誰比較聰明？
  - 若約翰的機率與國文分數為 51 分及 49 分，而瑪麗的分數為 100 及 0 分，誰比較聰明？
  - 平均分數無法顯現全貌
  - 必須衡量平均數涵蓋的範圍 => 變異數 (Variance)

變異數 (Variance) (Cont.)

- 變異數是根據每一個觀察值與平均數之差求得。每一個觀察值與平均數之差稱為*離差* (deviation about the mean)
- 設丟一個特製的3面骰子，其中$P(1) = 0.5$, $P(2) = 0.1$, $P(3) = 0.4$，令隨機變數X為面值，其期望值為? $EX = 1\times 0.5 + 2\times 0.1 + 3\times 0.4 = 1.9$
  - 求X的變異數

$$1-1.9=-0.9$$
$$2-1.9=0.1$$
$$3-1.9=1.1$$

加權平均

$$Var\,X = (-0.9)^2\times 0.5 + 0.1^2\times 0.1 + 1.1^2\times 0.4 = 0.89$$

變異數 (Variance) (Cont.)

- 變異數的一般定義：
  - 設 μ_X 表示 X 的平均值。則

$$Var\,X = E(X-\mu_X)^2 = E(X-EX)^2$$

  - 若 $Var\,X$ 是大的，表示 X 離平均值較遠，反之，若 $Var\,X$ 是小的，則表示 X 靠近平均值。