聯合分佈隨機變數

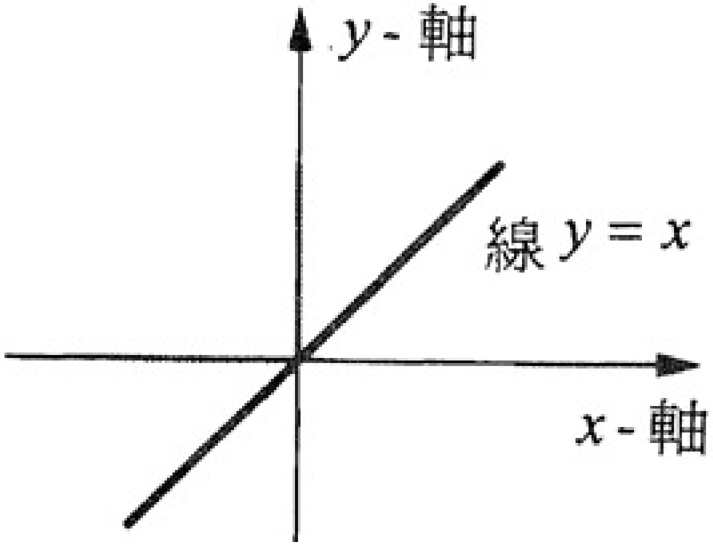
- 本章探討二維連續情況，即具有聯合密度函數的 2 個隨機變數
- 一維情況下：設 X 是隨機變數，其有密度函數 $f(x)$ ，則機率的宇 (Universe) 是由 $f(x) \neq 0$ 的樣本點所組成，而機率是積分 $f(x)$ 得到，即

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

- 若將區間 [a, b] 想像成是符合的事件區域 $a \leq X \leq b$ ，則可表示成規則 $P(X\text{-event}) = \int_{\text{符合區域}} f(x)\,dx$

聯合分佈隨機變數 (Cont.)

- 聯合連續隨機變數
  - 設一項實驗的結果是一組 X, Y，則每一事件均是落在平面上的區域的
  - 例：考慮 $Y > X$ 事件，在實驗結束後，X 取 x 值，Y 取 y 值，如此符合的區域是在 $y > x$ 平面上的樣本點集合



聯合分佈隨機變數 (Cont.)

- 假設有函數 $f(x, y)$ ，要求出事件的機率可用下列的積分方法 $P(\text{包含}\,X\,\text{與}\,Y\,\text{的事件})=\int_{\text{符合區域}} f(x,y)\,dA$
  - 如此 $f(x, y)$ 被稱為 X 與 Y 的**聯合密度函數** (Joint density function)
  - 且 X 與 Y 被稱之為**聯合連續**
- 在平面上的樣本點，當 $f(x,y)\neq 0$ 被稱為**宇** (Universe) ，亦即在二維連續情況裡，要求出一事件的機率可由整個宇中**符合區域**的聯合密度積分求得

聯合分佈隨機變數 (Cont.)

- 將密度 $f(x, y)$ 當作每一單位面積的機率，則 $f(x, y)\, dA$ 是為一小面積 dA 的機率，把 $\int_{符合} f(x, y) dA$ 的小機率後產符合區域的全部機率
- 聯合密度的**特性**
  - 並非任何舊的 $f(x, y)$ 函數都是聯合密度
  - 機率為非負數且 $P(\text{Universe}) = 1$
  - 必須符合
    - $f(x, y) \geq 0 \text{ for all } x, y$
    - $\int_{\text{Universe}} f(x, y)\, dA = 1$

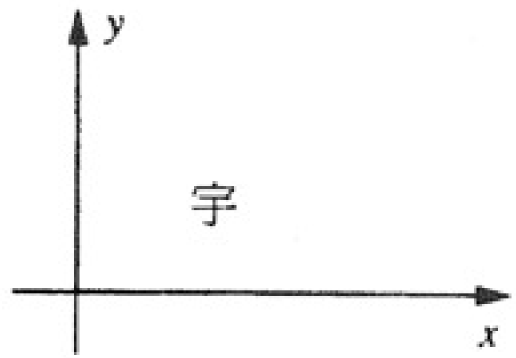
聯合分佈隨機變數 (Cont.)

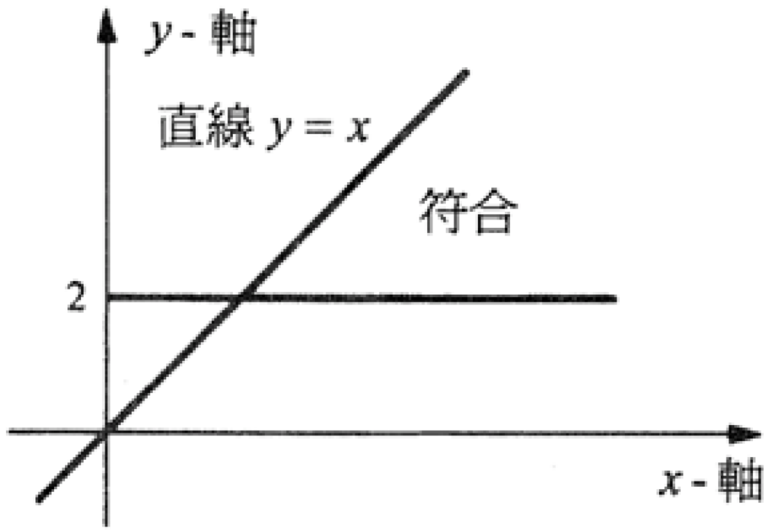
- 例：設 X 與 Y 具有聯合密度

$$f(x, y) = e^{-(x+y)} \text{ for } x \geq 0, y \geq 0$$

- 將可求出 $P(X \geq Y \geq 2)$
- 右圖顯示當 $f(x, y) \neq 0$ 樣本點 (x, y) 的集合
- 右下角圖顯示符合的區域

即在宇中 $x \geqq y \geqq 2$ 的樣本點集合





聯合分佈隨機變數 (Cont.)

- 求出 $X \ge Y \ge 2$ 的機率

$$P(X \ge Y \ge 2) = \int_{\text{符合}} e^{-(x+y)}\, dA = \int_{x=2}^{\infty} \int_{y=2}^{x} e^{-(x+y)}\, dy\, dx$$

$$= -e^{-(x+y)}\Big|_{y=2}^{x} = -e^{-2x} + e^{-(2+x)}$$

$$= \int_{x=2}^{\infty} -e^{-2x} + e^{-(2+x)}\, dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^{-2x} - e^{(2+x)} \right)\Big|_{x=2}^{\infty} = \frac{1}{2} e^{-4}$$

備忘

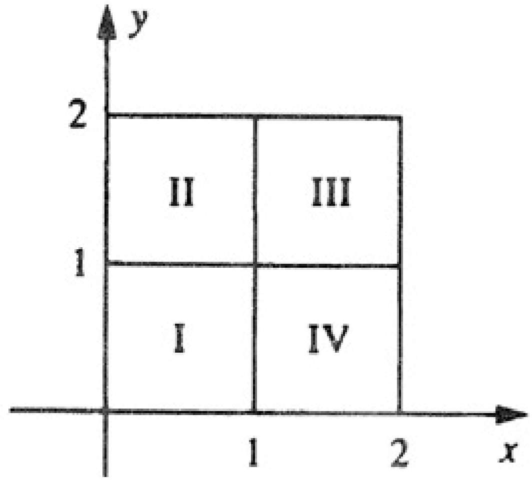
$$\int e^{x}\, dx = e^{x} + C$$

$$\int e^{-x}\, dx = -\int e^{u}\, du = -e^{u} + C = -e^{-x} + C$$

其中 $u = -x$ 且 $du = -dx$

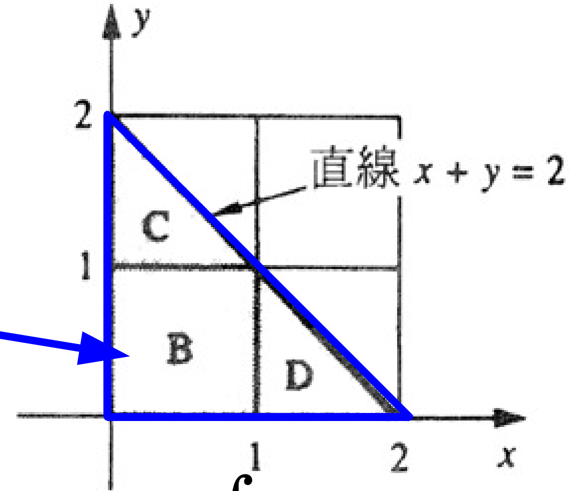
聯合分佈隨機變數 (Cont.)

- 例：設 X 與 Y 具有聯合密度



$$f(x,y)=\begin{cases} 0.1 & \text{in Region I} \\ 0.2 & \text{in Region II} \\ 0.3 & \text{in Region III} \\ 0.4 & \text{in Region IV} \end{cases}$$

  - 求出 $P(X+Y<2)$
  - 符合的區域
  - 面積



$$P(X+Y>2)=\int_{\text{符合}} f(x,y)\,dA=\int_B 0.1\,dA+\int_C 0.2\,dA+\int_D 0.4\,dA$$

$$=0.1\int_B dA+0.2\int_C dA+0.4\int_D dA$$

$$=0.1\times 1+0.2\times\frac{1}{2}+0.4\times\frac{1}{2}=0.4$$

聯合分佈隨機變數 (Cont.)

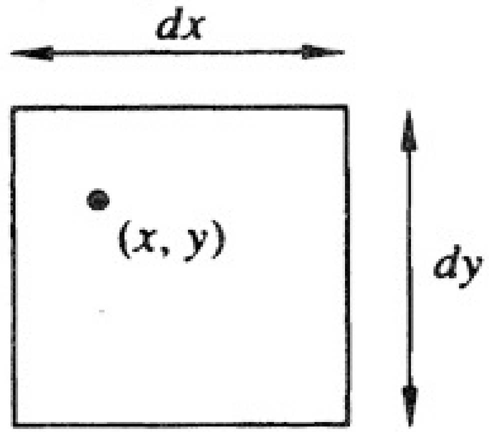
- 事件 $X \approx x$ 與 $Y \approx y$
  - 設 X 與 Y 具有聯合密度 $f(x, y)$ ，與一維情況相同任何個別樣本點的機率是 0 ，也就是說

$$P(X = x, Y = y) = 0$$

  - 在二維連續情況中，不僅某一事件的機率是 0 ，對任何相對應區域面積是 0 的事件同樣是 0
  - 例子： $Y=X^2$ 的機率是 0 ，因為符合的區域是一條曲線，瘦到沒有任何機率

聯合分佈隨機變數 (Cont.)

- 換句話說，求出 X 趨近 x 同時 Y 趨近 y 的機率是有用的
- 若 $X \approx x$ 且 $Y \approx y$，則樣本點 (x, y) 是圍繞樣本點 (x, y) 上維度為 $dx \times dy$ 的小方格
- 小方格的面積是 $dx\,dy$，且其機率密度 $f(x, y)$ 幾乎是常數，因此 方格機率=機率密度×面積
- 亦即 $P(X \approx x \text{ and } Y \approx y) = f(x, y)\,dx\,dy$



聯合分佈隨機變數 (Cont.)

- 獨立隨機變數
  - 設事件 A 與 B 是獨立的，若其滿足

$$P(A \text{ and } B) = P(A)P(B)$$

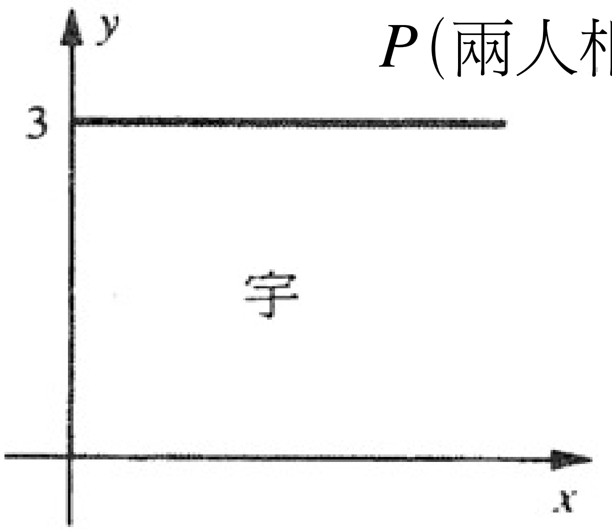
  - 若稱隨機變數 X 與 Y 是獨立的，必須滿足

$$P(X\text{-event and } Y\text{-event}) = P(X\text{-event})P(Y\text{-event})$$

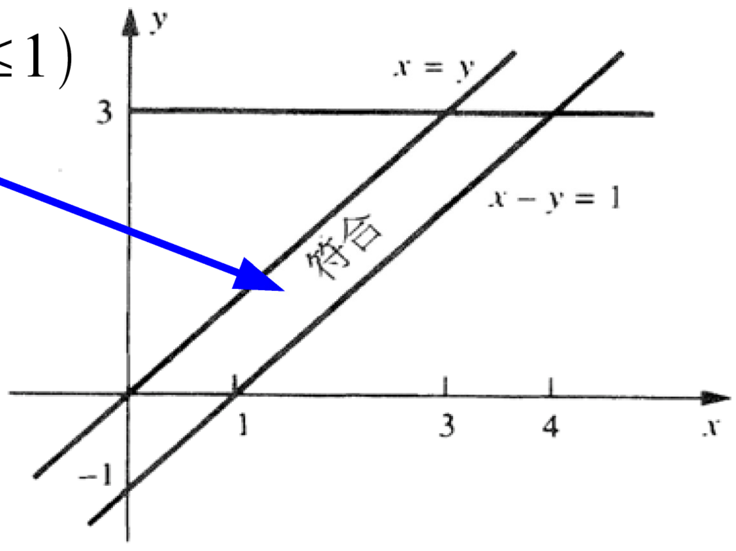
- 獨立隨機變數的聯合密度
  - John 與 Marry 到達某地是獨立的，設 John 到達的時間是 X，其中 $f(x) = e^{-x}$ for $x \geq 0$

聯合分佈隨機變數 (Cont.)

- Marry 抵達的時間是 Y，其中 $f(y)=\frac{2}{9}y$ for $0\le y\le 3$
- 當 marry 抵達後必須要再等 John 一個小時，求兩人相遇的時間
- 此實驗的宇在 $x\ge 0, 0\le y\le 3$ 的二維空間區域
- 若 Marry 先抵達且在一個小時內 John 就抵達 (即 X 比 Y 大)，兩人將會相遇



$P(\text{兩人相遇})=P(0\le X-Y\le 1)$



聯合分佈隨機變數 (Cont.)

- 要求出兩人相遇的機率，須先對整個符合區域的聯合密度積分，但本例並無聯合密度，因此必須依下列規則從兩人各別密度求出聯合密度
  - 假設 X 是在 $[a, b]$ 上取值，密度是 $f_X(x)$ ，Y 是在 $[c, d]$ 上取值，密度為 $f_Y(y)$
  - 若 X 與 Y 為獨立的，則 X 與 Y 具有聯合密度 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ 對矩形 $a \le x \le b, c \le y \le d$
  - 即，對**獨立隨機變數**來說，只要將個別的密度**相乘**就可得**聯合密度**

聯合分佈隨機變數 (Cont.)

- 規則成立的原因

$$f(x,y)\,dx\,dy = P(X \approx x \text{ and } Y \approx y) = P(X \approx x)\,P(Y \approx y) = f_X(x)\,dx\,f_Y(y)\,dy$$

- 在刪去上式的 dx 與 dy 後可得 $f(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$
- John 與 Marry 的聯合密度為

$$f(x,y) = \frac{2}{9}\,y\,e^{-x} \text{ for } 0 \le y \le 3, x \ge 0$$

- 則 $P(\text{兩人相遇}) = \int_{\text{符合}} \frac{2}{9}\,y\,e^{-x}\,dA = \int_{y=0}^{3} \int_{x=y}^{x=1+y} \frac{2}{9}\,y\,e^{-x}\,dx\,dy$

$$= \int_0^3 \frac{2}{9}\,y\left(e^{-y} - e^{-(1+y)}\right)dy = 0.112$$

聯合分佈隨機變數 (Cont.)

- 均勻聯合密度
  - 一維情況下的機率，若在區間中隨機挑出 X，則 $P(\text{事件}) = \dfrac{\text{符合的長度}}{\text{全部的長度}}$
  - 且 X 可被稱為均勻分佈在區間上。X 的密度是
    $$f(x) = \frac{1}{\text{區間的長度}} \quad \text{for } x \text{ in the interval}$$
  - 在二維的情況下，是從一個區域中隨機桃出點 (X, Y)
    $$P(\text{event}) = \frac{\text{符合的面積}}{\text{全部的面積}}$$

聯合分佈隨機變數 (Cont.)

- 我們可稱 X 與 Y 具有聯合均勻分佈 (Joint uniform distribution)
  - 若 x 與 Y 聯合均勻分佈在一區域上，則其聯合密度為

$$f(x, y) = \frac{1}{\text{區域面積}} \text{ for } (x, y) \text{ in the region}$$

- 例：從半徑 3 的圓裡隨機挑出 (X, Y) ，則隨機變數 X 與 Y 具有均勻聯合密度

$$f(x, y) = \frac{1}{9\pi} \text{ for } (x, y) \text{ in the circle}$$