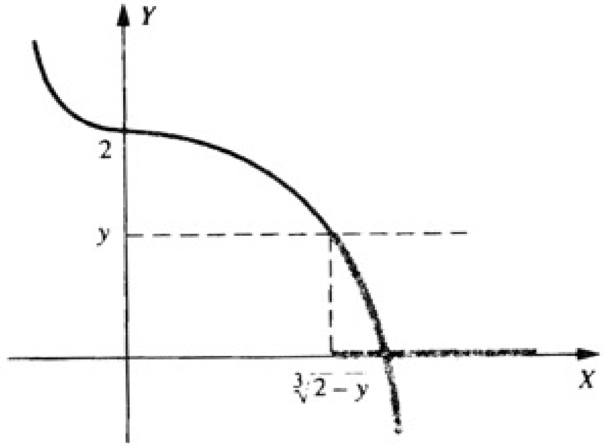
隨機變數函數

- 假設某問題的事件分佈呈現圓形分佈，其半徑為 R，則其面積為 πR^2
- 一般而言，若已知 X 的分佈，要求出一些 X 的 Y 函數有下列兩種方法
  - 先求分佈函數 $F(y)$ 再求其密度 $f(y)$
  - 直接求出密度 $f(y)$
- 分佈函數法
  - 設 X 是具參數 $\lambda=1$ 的指數分佈，所以 $f_X(x)=e^{-x}$ for $x\geq 0$

隨機變數函數 (Cont.)

- 令 $Y=2-X^3$ 且我們知道 X 始終≧ 0 ，所以 Y 總是≦ 2 ，因此 $F_Y(y)=1$ if $y\geq 2$
- 思考當 y ≦2 時可得到 $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(2-X^3\leq y)$
- 可解得 $2-X^3\leq y$ 且得到 $X\geq\sqrt[3]{2-y}$
- 由上述可知



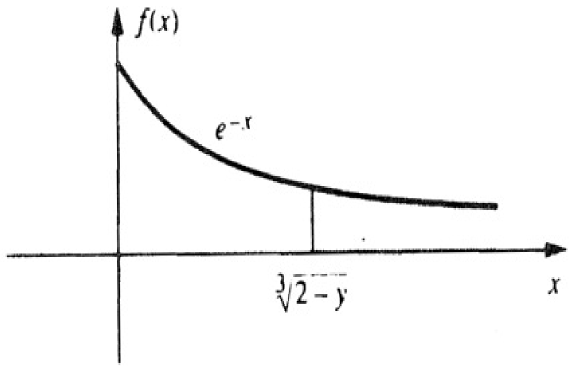
$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(X\geq\sqrt[3]{2-y})$$

$$=\text{在 }\sqrt[3]{2-y}\text{點之後 } f_X(x)\text{ 下方的面積}$$

$$=\int_{\sqrt[3]{2-y}}^{\infty} e^{-x}dx$$

$$=-e^{-x}\Big|_{\sqrt[3]{2-y}}^{\infty}$$

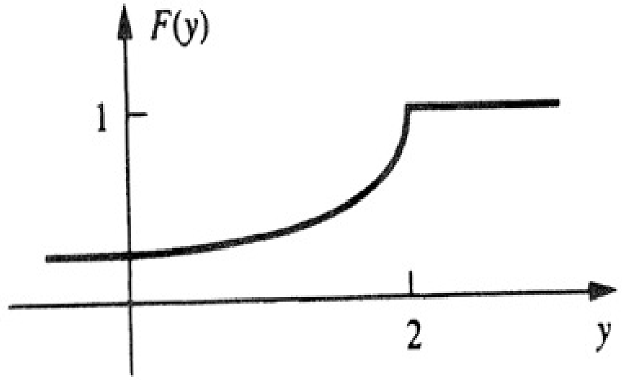
$$=e^{-\sqrt[3]{2-y}}$$



隨機變數函數 (Cont.)

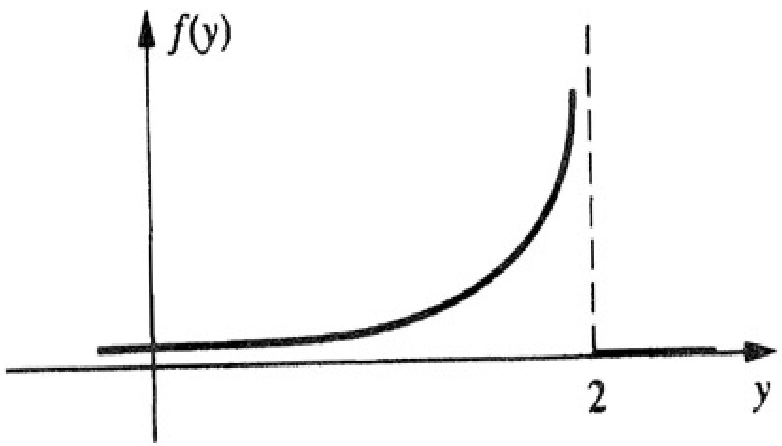
- 總而言之

$$F_Y(y)=\begin{cases} e^{-\sqrt[3]{2-y}} & \text{if} \quad y \le 2 \\ 1 & \text{if} \quad y \ge 2 \end{cases}$$



- 且

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases} e^{-\sqrt[3]{2-y}} & \text{if} \quad y \le 2 \\ 0 & \text{if} \quad y \ge 2 \end{cases}$$



隨機變數函數 (Cont.)

- 整理一下
  - 假設你知道 Y 總是≧ 5 ，則
    - $F(y) = 0$ for $y \leqq 5$ (尚未有累積機率)
    - $f(y) = 0$ for $y \leqq 5$ (不可能有 Y 的值)
  - 假設你知道 Y 總是≦ 5 ，則
    - $F(y) = 1$ for $y \geqq 5$ (當 y=5 時所有的機率都被累積)
    - $f(y) = 0$ for $y \geqq 5$ (不可能有 Y 的值)

隨機變數函數 (Cont.)

- 又，假設你知道 Y 總是介於 3 到 7 之間，則

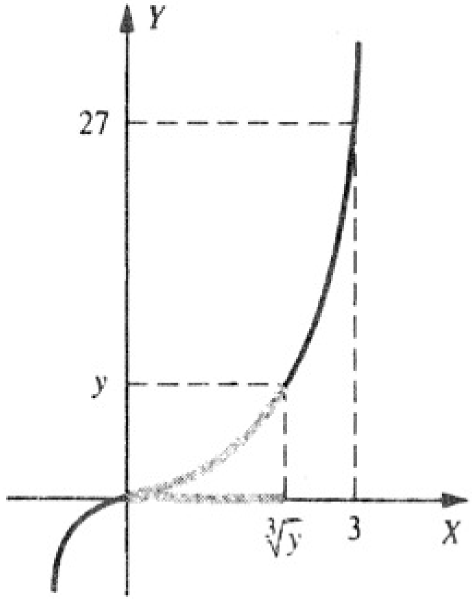
$$F(y)=\begin{cases} 0 & \text{for} \quad y \le 3 \\ \text{未知} & \text{for} \quad 3 \le y \le 7 \\ 1 & \text{for} \quad y \ge 7 \end{cases}$$

$$f(y)=\begin{cases} \text{未知} & \text{for} \quad 3 \le y \le 7 \\ 0 & \text{for} \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

- 例子：令 X 具有密度

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if} \quad 0 \le x \le 1 \\ -\frac{1}{4}x+\frac{3}{4} & \text{if} \quad 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

隨機變數函數 (Cont.)



- 令 $Y = X^3$
- 使用分佈函數求 Y 的密度
  - 觀察一下， $0 \leqq X \leqq 3$ ，這使得 Y 介於 0 到 27 之間，因此

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad y \le 0 \\ 1 & \text{if} \quad y \ge 27 \end{cases}$$

  - 接下來思考當 $0 \leqq y \leqq 27$ 時 $F(y) = P(Y \le y)$
  - 從圖上看出 Y 是在圖上 y 點以下的區域，所以

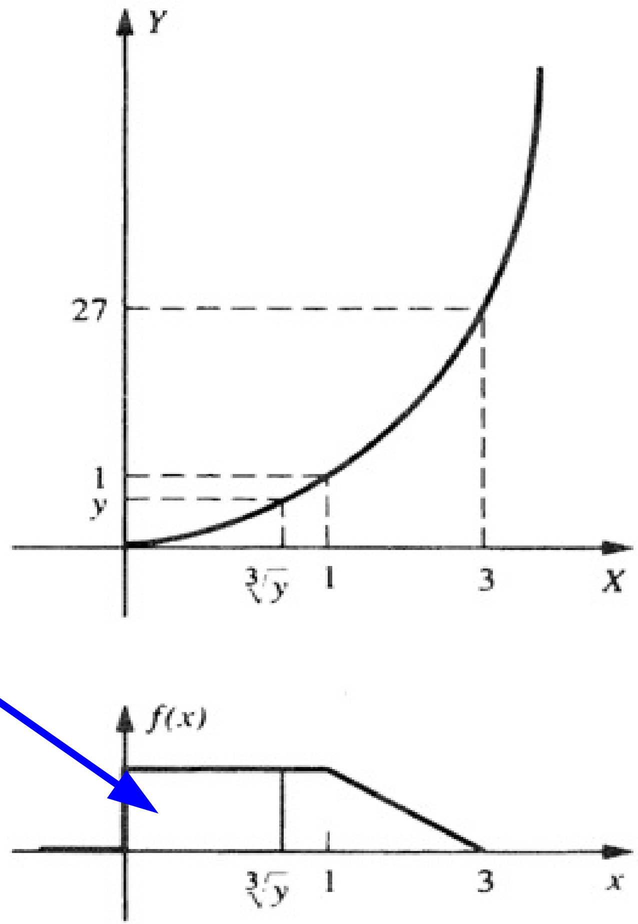
$$F(y) = P(Y \le y) = P(X \le \sqrt[3]{y}) = \int_{x=-\infty}^{\sqrt[3]{y}} f(x)\,dx$$

隨機變數函數 (Cont.)

- 但 $f(x)$ 方程式在 $x = 1$ 時有所改變，所以積分是靠 $\sqrt[3]{y}$ 決定，而其是受 y 的影響，因此可分為下列情況
- 情況一：
  - $0 \leqq y \leqq 1$ 使得 $0 \le \sqrt[3]{y} \le 1$

$$F(y) = \int_{x=-\infty}^{\sqrt[3]{y}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if} \quad 0 \le x \le 1 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} & \text{if} \quad 1 \le x \le 3 \end{cases}$$



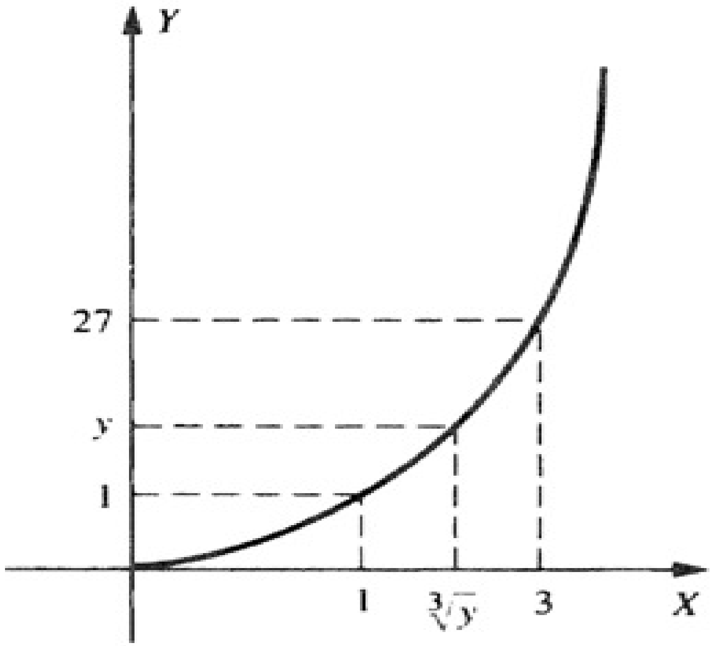
隨機變數函數 (Cont.)

- 情況二：
  - 當 1≦y≦27 時，則 $1 \leq \sqrt[3]{y} \leq 3$

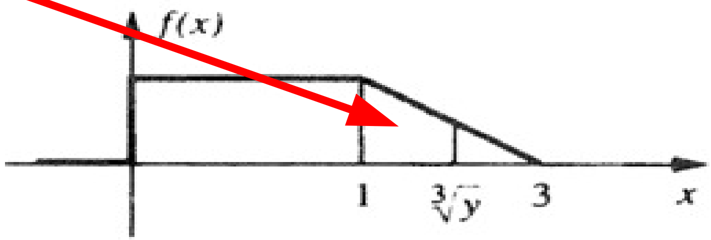
$$F(y) = \int_{x=-\infty}^{\sqrt[3]{y}} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} + \int_{x=1}^{\sqrt[3]{y}} \left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right) dx$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{y} - \frac{1}{8}y^{2/3} - \frac{1}{8}$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} & \text{if} \quad 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

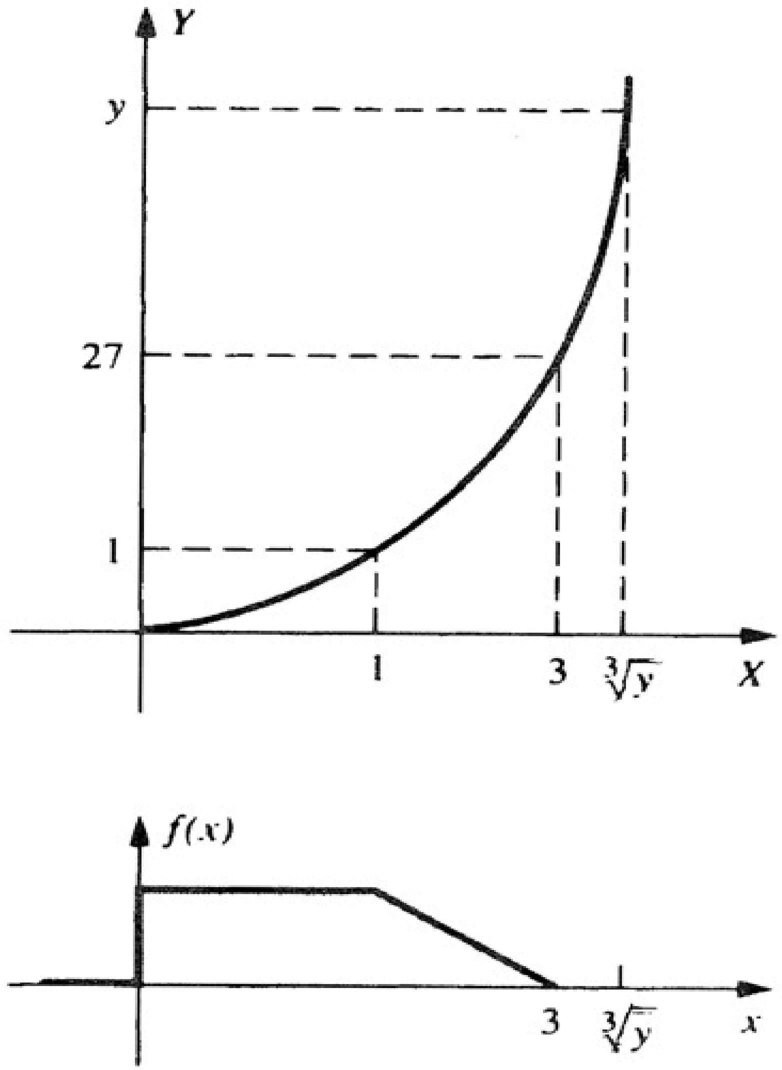


隨機變數函數 (Cont.)

- 情況三：
  - 當 $y \geqq 27$ ，則 $\sqrt[3]{y} \geq 3$

$$F(y)=\int_{x=-\infty}^{\sqrt[3]{y}} f(x)\,dx=1$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{if} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4} & \text{if} \quad 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



隨機變數函數 (Cont.)

- 整理一下，得到 Y 的分佈函數及密度函數如下

$$F(y)=\begin{cases} 0 & \text{if} \quad y\le 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{y} & \text{if} \quad 0\le y\le 1 \\ \frac{3}{4}\sqrt[3]{y}-\frac{1}{8}y^{2/3}-\frac{1}{8} & \text{if} \quad 1\le y\le 27 \\ 1 & \text{if} \quad y\ge 27 \end{cases}$$

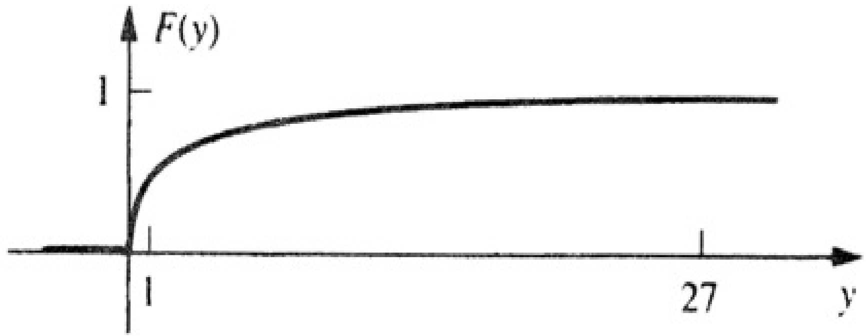
$$\frac{d}{dy}\frac{1}{2}\sqrt[3]{y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{6}\cdot y^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{3}{4}\sqrt[3]{y}-\frac{1}{8}y^{2/3}-\frac{1}{8}$$
$$=\frac{d}{dx}\frac{3}{4}y^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{8}y^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{8}$$
$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}-1}-\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}-1}$$
$$=\frac{1}{4}y^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{12}y^{-\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{1}{4y^{2/3}}-\frac{1}{12y^{1/3}}$$

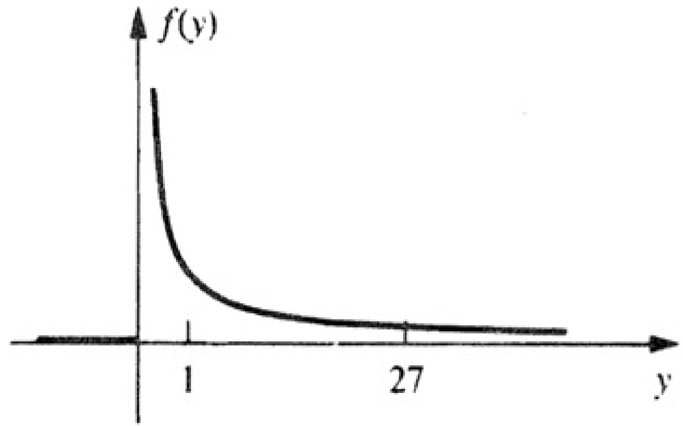
$$f(y)=F'(y)=\begin{cases} \frac{1}{6y^{2/3}} & \text{if} \quad 0\le y\le 1 \\ \frac{1}{4y^{2/3}}-\frac{1}{12y^{1/3}} & \text{if} \quad 1\le y\le 27 \end{cases}$$

隨機變數函數 (Cont.)

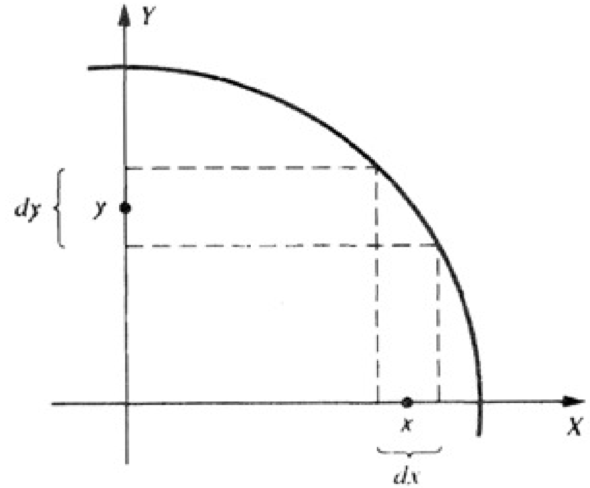
$$F(y)=\begin{cases} 0 & \text{if} \quad y\le 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{y} & \text{if} \quad 0\le y\le 1 \\ \frac{3}{4}\sqrt[3]{y}-\frac{1}{8}y^{2/3}-\frac{1}{8} & \text{if} \quad 1\le y\le 27 \\ 1 & \text{if} \quad y\ge 27 \end{cases}$$



$$f(y)=F'(y)=\begin{cases} \frac{1}{6y^{2/3}} & \text{if} \quad 0\le y\le 1 \\ \frac{1}{4y^{2/3}}-\frac{1}{12y^{1/3}} & \text{if} \quad 1\le y\le 27 \end{cases}$$



隨機變數函數 (Cont.)



- 密度函數法
  - 設 X 有密度 $f(x)$。 Y 是 X 的函數
  - 我們可以得到 Y 的密度函數 $f(y)$ ，而不用透過先求分佈函數的動作
  - 分析圖示： y 點的變動範圍在 dy 的情況且其對應的 x 點變動也剛好在 dx 的範圍下，則可表示成 $P(Y \approx y) = P(X \approx x)$
  - 計算這些機時可由 $f(y)dy = f(x)dx$ 求得
  - 所以 $f(y) = f(x)\dfrac{\text{length } dx}{\text{length } dy}$

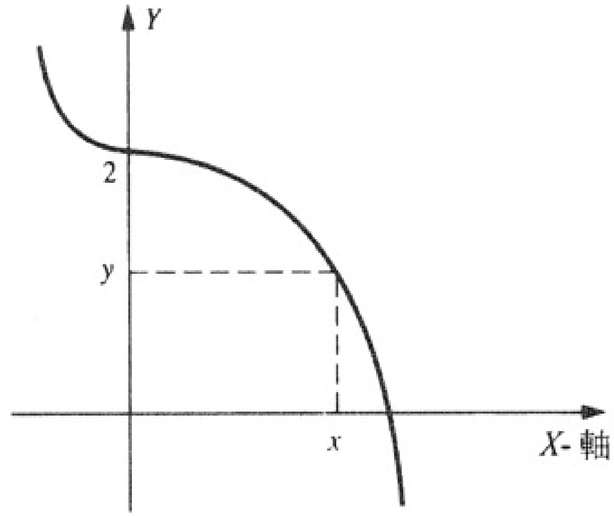
隨機變數函數 (Cont.)

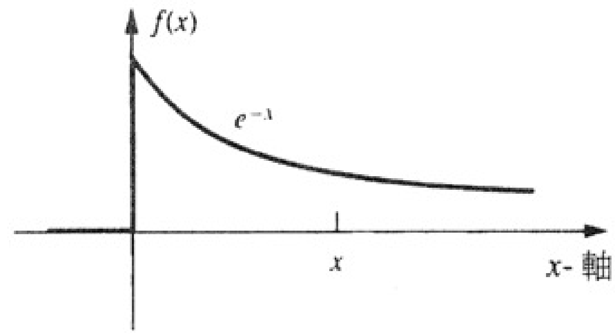
- 不同的函數畫出來的圖形也不同，當然也有可能計算出**負值**的長度，再者當 dy 的長度向 0 逼近時則
$$\frac{\text{length } dx}{\text{length } dy} \rightarrow \text{導函數 } \frac{dx}{dy} \text{ 的絕對值}$$
- 也就是 $f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$
- 上式將 x 與 y 建立起關聯，而我們知道 X 的函數 $f(x)$，只要計算導函數 dx/dy，並用 y 取代式子右方所有的 x，便可求得 $f(y)$

隨機變數函數 (Cont.)

- 例子：設 X 是具有 $\lambda=1$ 的指數分佈 $f(x)=e^{-x}$ for $x\geq 0$
  - 設 $Y=2-X^3$ 試求 Y 的密度 $f(y)$
  - 從右側上圖看出當 X>0 時 Y<2
  - 即 $f(y)=0$ if $y\geq 2$
  - 設 $y\leqq 2$ ，則 $f(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$
  - 由 $f(x)=e^{-x}$ for $x\geq 0$ 及 $Y=2-X^3$
  - 得 $y=2-x^3$ ⇨ $x=\sqrt[3]{2-y}$

⇨ $\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{3}(2-y)^{\frac{1}{3}-1}=-\frac{1}{3(2-y)^{2/3}}$





隨機變數函數 (Cont.)

- 整理一下可得

$$f(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \Rightarrow f(y)=e^{-x}\left|-\frac{1}{3(2-y)^{2/3}}\right|=e^{-x}\frac{1}{3(2-y)^{2/3}}$$

- 再用 $x=\sqrt[3]{2-y}$ 取代 x 的部份
- 得到 $f(y)=\dfrac{e^{-\sqrt[3]{2-y}}}{3(2-y)^{2/3}}$ for $y\le 2$

隨機變數函數 (Cont.)

- 例子：設 X 有密度

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{if} \quad 0\le x\le 1 \\ -\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4} & \text{if} \quad 1\le x\le 3 \end{cases}$$

- 且令 $Y=X^3$
- 使用密度函數法求 Y 的密度
  - 已知，$0\le X\le 3$ 所以 $0\le Y\le 27$ 且 $f(y)=0$ if $y\le 0$ or $y\ge 27$
  - 因此只要注意 $0\le Y\le 27$ 的情況，答案會是

$$f(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

隨機變數函數 (Cont.)

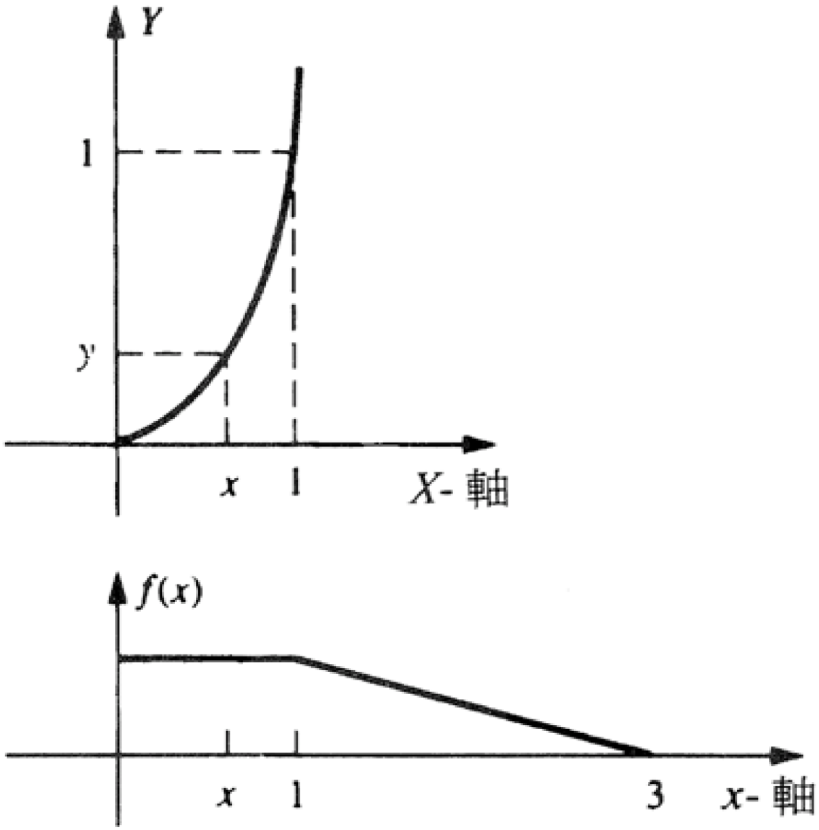
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{if} \quad 0\le x\le 1\\ -\frac{1}{4}x+\frac{3}{4} & \text{if} \quad 1\le x\le 3\end{cases}$$

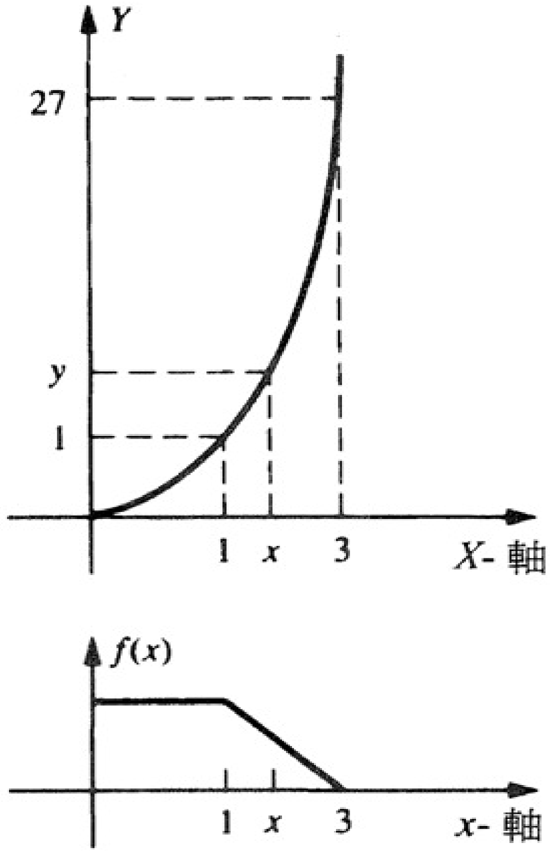
- 其中 $y=x^3$ 又可改寫成 $x=\sqrt[3]{y}$ 又可得 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{3y^{2/3}}$
- 接下來無法立即處理 $f(x)$ ，因為 $f(x)$ 具有兩個方程式，因此以下列情況分析之
- 情況一：$0\le y\le 1$
  - ✔ $0\le x\le 1$ 且 $f(x)=1/2$ 因此 $f(y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3y^{2/3}}$
- 情況二：$1\le y\le 27$
  - ✔ $1\le x\le 3$ 且 $f(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$ 因此

$$f(y)=\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\right)\frac{1}{3y^{2/3}}=\left(-\frac{1}{4}\sqrt[3]{y}+\frac{3}{4}\right)\frac{1}{3y^{2/3}}$$

隨機變數函數 (Cont.)

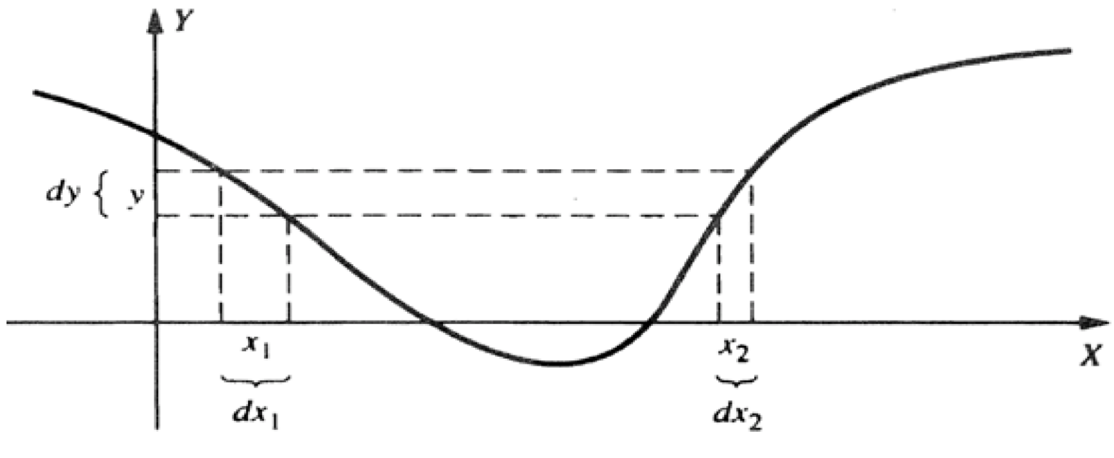
✓ 所以 $f(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{6y^{2/3}} & \text{if} \quad 0\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{4y^{2/3}}-\dfrac{1}{12y^{1/3}} & \text{if} \quad 1\le x\le 27 \end{cases}$





隨機變數函數 (Cont.)

- 其它密度函數方法
  - 令 X 有密度函數 $f(x)$ ， Y 為 X 的非一對一對應，即 y 的某些值不止一個相對應的 x 值
  - $P(Y \approx y) = P(X \approx x_1) + P(X \approx x_2)$
  - 可改寫成 $f(y)dy = f(x_1)dx_1 + f(x_2)dx_2$



隨機變數函數 (Cont.)

- 因此 $f(y)=f(x_1)\dfrac{\text{length of } dx_1}{\text{length of } dy}+f(x_2)\dfrac{\text{length of } dx_2}{\text{length of } dy}$

$$\Rightarrow \quad f(y)=f(x_1)\left|\frac{dx_1}{dy}\right|+f(x_2)\left|\frac{dx_2}{dy}\right|$$

- 若你知道 $f(x)$ 則可透過 x_1 與 y 的關聯及 x_2 與 y 的關聯將之代入上式，即可解得 $f(y)$