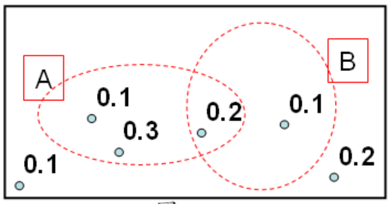
亞洲大學　資訊工程學系

機率 (Spring 2009) 期中考

Date: Apr. 15, 2009

一、填充題 (每題 2 分共 40 分)

1. 丟擲一歪斜的銅板(得到 P(正)=1/3)三次，問，丟三次結果依序為正正反面的機率為__1/3 * 1/3 * 2/3 = 2/27__
2. P(A 或 B) = P(A) + P(B) 算法只適用於 A 集合與 B 集合均為 _互斥_的情況下。
3. 從 52 牌中抽 13 張，P(至少 1 張 A)的互補事件為_無 A__
4. 對 n 個獨立試驗，每一個試驗有 r 個可能結果，這樣的情況稱 n 個試驗的結果具有__多項式__分佈
5. 製作 4 張紙牌，分別標上 A, B, C 及 D, 連抽 9 次，問，9 個位置，在其中排入 3 個完全相同的 A，有__$\binom{9}{3}$__種排法?
6. 一個箱子中放了 20 顆白球，30 顆黑球及 40 顆紅球，以取出後放回的方式抽取 5 顆球，抽中五顆黑球的機率為___$(1/3)^5$____
7. 兩種道具，一個箱子裝有 2 顆綠球及 3 顆白球，另一種道具是一副公平的撲克牌。假設從箱子中抽到一顆綠色球，再從撲克牌中抽 1 張。如果抽到是白色球，則從 16 張圖案牌中抽 1 張牌。若你在第二階段抽到的是 K，問，第一階段你抽到的是綠球的機率為__________ $= \dfrac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{13}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{13}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}} = \dfrac{8}{47}$
8. 當試驗次數很多(即 n 很大)，而成功的機率很小(即 p 很小)，如此，λ 的值是合適的，求 k 次成功的機率可用 __卜瓦松__分佈
9. 假設有一研究發現新世代夫妻希望生三個小孩，如果三個都是男孩，則再生一個，如果又是男孩則再試一次，則新世代夫妻只生 3 個小孩的機率是__1-P(3B) = 1 – 1/8 = 7/8__
10. 丟骰子遊戲，在遊戲開始前必須要先給 20 元，如果奇數點，玩家輸，如果是 2 點，則莊家給玩家 20 元，如果是 4，則莊家給 40 元，如果是 6 則給 60 元，期望值為 _0_
11. 若 X 是具參數 n 與 p 的二項式分佈，則其期望值為_$EX = np$_
12. $\binom{52}{51}$ = __52__
13. 金融提款卡可設定密碼為 4 位數，問，小偷猜中密碼的機率為_1/10000_。
14. 機率為 1 的事件稱之為 _確定_ 事件
15. 圖一中 P(B|A)的機率為_0.2/0.6 = 1/3_



圖一

16. 丟擲硬幣是一種典型的_獨立__試驗
17. 當成功機率 P(成功) 非常小且 n 很大時，二項式機率分配趨近卜瓦松機率分配，可以用__卜瓦松機率__分配的公式來求取近似值
18. 假設丟擲一枚銅板得到正面的機率是 1/5，在丟了 20 次之後正面的期望值為_$20\times 1/5=4$__
19. 若一個家庭的女孩平均數是 1.2 位，男孩平均數是 1.3 位，則一個家庭的小孩平均是_2.5_位
20. 若 X 是具參數 n 與 p 的二項式分佈，則其期望值為_$n\times p$_

二、選擇計算題(每小題選一答案，並列示計算過程，答案對得 4 分，計算過程對得 6 分)(共 60 分)

1. 從一副撲克牌中抽出一張，設 X 表面值(設 J, Q, K 的牌都算 10 點，A 算 11 點)，問從抽出來的牌點數期望值為(a) 364/52 (b) 340/52 (c) 380/52 (d) 52/380

$$EX=2\times P(X=2)+3\times P(X=3)+\ldots+11\times P(X=11)$$
$$=2\times P(2)+3\times P(3)+\ldots+10\times P(10,J,Q,K)+11\times P(11)$$
$$=2\times\frac{4}{52}+3\times\frac{4}{52}+\ldots+9\times\frac{4}{52}+10\times\frac{16}{52}+11\times\frac{4}{52}=\frac{95}{13}$$

2. 從 52 張撲克牌中抽 13 張牌，問，其中含有 4 張 A 或 4 張 K 的機率為何?

(a) $\dfrac{\binom{52}{4}}{\binom{52}{13}}+\dfrac{\binom{52}{4}}{\binom{52}{13}}$ (b) $\dfrac{\binom{52}{4}}{\binom{52}{13}}+\dfrac{\binom{52}{4}}{\binom{52}{13}}-\dfrac{\binom{44}{5}}{\binom{52}{13}}$ (c) $\dfrac{\binom{52}{4}}{\binom{52}{13}}+\dfrac{\binom{48}{4}}{\binom{52}{13}}-\dfrac{\binom{44}{5}}{\binom{52}{13}}$

(d) $\dfrac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}}+\dfrac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}}-\dfrac{\binom{44}{5}}{\binom{52}{13}}$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

P(4A 或 4K) = P(4A) + P(4K) – P(4A 及 4K)

$$P(4A \text{ or } 4K) = \frac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} + \frac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} - \frac{\binom{44}{5}}{\binom{52}{13}}$$

3. 一對夫妻決定至少要有 1 個女兒，但也同意即便沒有女兒最多也只要有 3 個小孩。小孩數的期望值為 (a) 7/4　(b) 7/8　(c) 9/4　(d) 1/8

小孩期望值 $= 1\times P(1$ 個小孩$) + 2\times P(2$ 個小孩$) + 3\times P(3$ 個小孩$)$

$= 1\times P(G) + 2\times P(BG) + 3\times P(BBG \text{ or } BBB)$

$= 1\times 1/2 + 2\times 1/2 \times 1/2 + 3\times 2 \times 1/8 = 7/4$

4. 從 52 張撲克牌中任抽五張，假設你已偷瞄到一張 A，且 A 只有那一張，問，手中的牌有 2 張 J 的機率為 (a) $\frac{\binom{44}{2}}{\binom{48}{4}}$　(b) $\frac{\binom{4}{2}\binom{44}{2}}{\binom{48}{4}}$　(c) $\frac{\binom{4}{1}\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}}$

(d) $\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{44}{2}}{\binom{52}{5}}$

$$P(2J|1A) = P(2J \text{ 及 } 1A) / P(1A) = \frac{\dfrac{\binom{4}{2}4\binom{44}{2}}{\binom{52}{5}}}{\dfrac{4\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{44}{2}}{\binom{48}{4}}$$

5. 有四張紙牌分別寫上 A, B, C, 與 D，從這四張中抽九次，且抽完後放回，問，抽到 3 次 A, 1 次 B, 3 次 C 及 2 次 D 的機率為 (a) $\frac{3!3!2!}{4^9}$　(b) $\frac{9!}{3!3!2!}[P(A)]^3\,[P(B)]\,[P(C)]^3\,[P(D)]^2$　(c) $\frac{3!2!2!}{9!}[P(A)]^3\,[P(B)]\,[P(C)]^3\,[P(D)]^2$　(d) $\frac{3!2!2!}{9!}[P(A)]\,[P(B)]\,[P(C)]\,[P(D)]$

$$\binom{9}{3}\binom{6}{1}\binom{5}{3}1 = \frac{9!}{3!6!}6\frac{5!}{3!2!} = \frac{9!}{3!3!2!}$$

$$P(3A, B, 3C, 2D) = \frac{9!}{3!3!2!}[P(A)]^3\ [P(B)]\ [P(C)]^3\ [P(D)]^2$$
$$= \mathbf{5040}[P(A)]^3\ [P(B)]\ [P(C)]^3\ [P(D)]^2$$

或

- 連抽九次，可能的結果 4^9
- 假設被抽到的 A 分別以 A1, A2 及 A3 分別表示抽到情況，問，就 A 而言，有 3!種可能的組合
- 假設被抽到的 C 分別以 C1, C2 及 C3 分別表示抽到情況，問，就 C 而言，有 3!種可能的組合
- 假設被抽到的 D 分別以 D1 及 D2 分別表示抽到情況，問，就 D 而言，有 2!種可能的組合
- 若以上述假設 A1, A2, A3, B, C1, C2, C3, D1 及 D2 的標示法，問，有 9!種排列法
- A1, A2, A3, 與 A2, A1, A3, …等均視為相同的結果，因此 9!種裡有 3!個 A 的抽出被重覆計算
- C 與 D 與 A 有同樣的情況，因此，在 9!種可能結果裡有 3!的 C 抽出結果被重覆計算，有 2!的 D 抽出結果被重覆計算
- 所以 **9! = 9! / (3!3!2!)**
- 機率為 $P(3A, B, 3C, 2D) = \frac{9!}{3!3!2!}[P(A)]^3\ [P(B)]\ [P(C)]^3\ [P(D)]^2$

$$= \mathbf{5040}[P(A)]^3\ [P(B)]\ [P(C)]^3\ [P(D)]^2$$

6. 兩種道具，一個箱子裝有 2 顆綠球及 3 顆白球，另一種道具是一副公平的撲克牌。假設從箱子中抽到一顆綠色球，再從撲克牌中抽 1 張。如果抽到是白色球，則從 16 張圖案牌中抽 1 張牌。若你在第二階段抽到的是 K，則第一階段你抽到的是綠球的機率為(a) 2/5 (b) 3/5 (c) 4/16 (d) 8/47

利用條件機率的算法

P(第一階段抽到綠球|第二階段拿到 K) = P(綠色與 K)/ P(K)

$$= \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{13}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{13}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{8}{47}$$

抽到 K 的全機率 $= \frac{2}{5}\times\frac{4}{52}+\frac{3}{5}\times\frac{4}{16}$