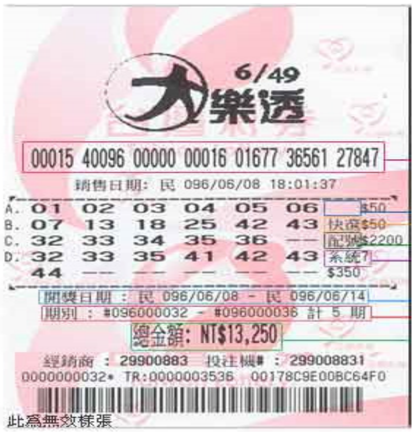
期望值 (Expected value)

- 樂透買不買？
  - 什麼情況下你/妳會想買？ 想當富翁 or 想做公益？
  - 決定買樂透 → 你覺得會贏錢

50 元 →



→ 槓龜 => 賠錢

→ 三星 => 賺 150

→ 四星 ...

→ 頭獎 => 億萬富翁

期望值 (Expected value) (Cont.)

- A 君到博奕特區玩丟骰子遊戲，在遊戲開始前想玩的人必須要先給 20 元，如果骰子丟出後得到奇數點，則玩家輸，如果是 2 點，則莊家給玩家 20 元，如果是 4 ，則莊家給 40 元，如果是 6 則給 60 元
- 決定是否要玩得先評估一下
  - (0-20)+(20-20)+(40-20)+(60-20) = 40 我有贏面，我會賺 40 元

這樣對嗎？

期望值 (Expected value) (Cont.)

- 如果加入機率概念又將如何？
  - 得到奇數點 → 賠 20 元
  - 得到 2 點 → 無輸贏
  - 得到 4 點 → 賺 20 元
  - 得到 6 點 → 賺 40 元

這就是期望值

$$-20\times(\frac{3}{6})+0\times(\frac{1}{6})+20\times(\frac{1}{6})+40\times(\frac{1}{6})=0$$

這樣你還會想玩嗎？

期望值 (Expected value) (Cont.)

- 以賭骰子為例，如果你算出來的期望值大於０則有賺頭，應該要玩，如果是小於０則表會賠，等於０，沒輸沒贏，玩趣味的。
- 丟擲兩顆骰子，問，兩顆骰子點數和的期望值是多少？

$$
\begin{aligned}
&0\times P_0+1\times P_1+2\times P_2+\ldots+12\times P_{12}\\
&=0\times 0+1\times 0+2\times\frac{1}{36}+\ldots+12\times\frac{1}{36}
\end{aligned}
$$

期望值 (Expected value) (Cont.)

- 假設老師以去年度學生 (50 人) 修課成績當依據，並將其製成許多卡片，讓學生從中抽一張卡片以做為該學生此學期的學期成績。若卡片中有 4 張分數不到 50 分，問，你這學期成績在 50 分以下的機率為何？$f(X<50)=\frac{4}{50}=0.08$
- 若已知去年有 6 個人不及格，問，你這學期成績不及格的機率是多少？$f(X<60)=\frac{6}{50}=0.12$
- 期望值為 74(因為老師說去年的學生成績平均 74 分，所以你會期望自己的成績是 74)

期望值 (Expected value) (Cont.)

- 假設有一研究發現新世代夫妻希望生三個小孩，如果三個都是男孩，則再生一個，如果又是男孩則再試一次，問，有此類想法的新世代夫妻會有幾個小孩?(亦即小孩數的期望值)
  - 每生一胎，是男生的機率多少？是女生的機率多少？
  - 新世代夫妻只生3個小孩的機率是多少？$3 \times P(3\text{個小孩})$
  - 新世代夫妻生4個小孩的機率是多少？ $4 \times P(4\text{個小孩})$
  - 新世代夫妻生5個小孩的機率是多少？ $5 \times P(5\text{個小孩})$

期望值 (Expected value) (Cont.)

$$
\begin{aligned}
&\textit{新世代夫妻小孩平均數} = 3\times P(3\text{個小孩}) + 4\times P(4\text{個小孩}) + 5\times P(5\text{個小孩}) \\
&= 3\times P(\mathrm{2B1G}) + 4\times P(BBBG) + 5\times P(BBBB) \\
&= 3\times[1-P(\mathrm{3B})] + 4\times P(BBBG) + 5\times P(BBBB) \\
&= 3\times\left[1-(\frac{1}{2})^3\right] + 4\times(\frac{1}{2})^4 + 5\times(\frac{1}{2})^4 \\
&= \frac{51}{16} \\
&= 3\frac{3}{16}
\end{aligned}
$$

隨機變數 (Random variable)

- 若某民調機構針對 2009 年台灣地區縣市長候選人支持度進行調查，以 1 表支持， 0 表不支持，假設某社區有 1000 位選民。
  - 樣本空間 → 2^{1000} 種
  - 簡化 → X 表 支持者人數

樣本空間變小了

- 隨機變數 (Random variable)
  - 一個定義在樣本空間Ω的實函數，若以 X 表示一隨機變數，則此函數的定義為Ω，對應域為 R ，值域則為 R 的一個子集合

隨機變數 (Random variable) (Cont.)

- 丟擲一個公正的銅板兩次，以 H 表正面，T 表反面，則此試驗之樣本空間為
  - Ω={HH, HT, TH, TT}
  - 設隨機變數 X= 出現正面的次數，則
    - X(HH) 表出現正面兩次，X(HH) = 2
    - X(HT) or X(TH) 表出現 1 次正面，X(HT) = X(TH) = 1
    - X(TT) 表沒出現正面，X(TT) = 0

隨機變數 (Random variable) (Cont.)

- 隨機變數通常以大寫英文字母表示 (e.g. X)
- 隨機變數的觀察值則以小寫英文字母表示 (e.g. x)
- 常用表示法"隨機變數 X 取值 x"
- 依取值方式分
  - 取值為有限或無限且與自然數有 1 對 1 對應，稱之為**離散型**隨機變數 (Discrete Random Variable)
  - 取值在某一區間或區間集合的所有數值，如重量、時間、溫度等，稱之為**連續型**隨機變數 (Continuous Random Variable)

隨機變數 (Random variable) (Cont.)

- 丟擲一枚公平的銅板10次 (百努利試驗)，假設P(成功) ＝p
- 設 X 是 n 次試驗中成功的次數
  - 二項式分佈
  - X 的機率函數為 $P(X=x)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ 當 $x=0,1,2,\ldots,n$
- 設 Y 是得到第 1 次成功所需的試驗次數
  - 幾何分佈
  - Y 的機率函數為 $P(Y=k)=q^{k-1}p$ 當 $x=0,1,2,\ldots$

隨機變數 (Random variable) (Cont.)

- 隨機變數的期望值
  - 若 X 表示新世代夫妻小孩數，那麼 X 是以 3, 4, 及 5 來取值，所以 $E(X)=3P(X=3)+4P(X=4)+5P(X=5)$
- **定義：隨機變數 X 的期望值是 X 的加權平均數，其中每一個 X 值是依它發生的機率來加權。若期望值是 $E(X)$ 或 EX 表示，則**

$$E(X)=\sum_x xP(X=x)$$

卜瓦松隨機變數的期望值

- 當成功機率 P(成功) 非常小且N 很大時，二項式機率分配趨近*卜瓦松機率分配。*可以用卜瓦松分配的公式來求取近似值
- 設 X 是具有參數 λ 的卜瓦松分佈

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!},\ for\ k=0,1,2,3,...$$

- 卜瓦松隨機變數函數之期望值

$$E(X)=\lambda$$

- 因卜瓦松當作在一段時間內到達數的模型，所以λ自然就是每段平均到達的平均數

卜瓦松隨機變數的期望值 (Cont.)

- 數學期望值與物理解釋相同的的證明

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

$$=e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{1!}+\frac{2\lambda^{2}}{2!}+\frac{3\lambda^{3}}{3!}+\ldots\right)$$

$$=e^{-\lambda}\lambda\underbrace{\left(1+\lambda+\frac{\lambda^{2}}{2!}+\frac{\lambda^{3}}{3!}\right)}_{e^{\lambda}}$$

$$=\lambda$$

指標法（The Method of Indicators）

- 若一個家庭的女孩平均數是 1.2 位，男孩平均數是 1.3 位，則一個家庭的小孩平均是 2.5 位
- 和的期望值 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- 證明：若以 x 代表隨機變數 X 的值，而 y 代表隨機變數 Y 的值，則 $X+Y$ 的期望值為 $x+y$

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_{x,y}(x+y)P(X=x,Y=y) \\
&= \sum_{x,y} xP(X=x,Y=y)+\sum_{x,y} yP(X=x,Y=y) \\
&= \sum_{x}\left[x\underbrace{\sum_{y} P(X=x,Y=y)}_{P(X=x)}\right]+\sum_{y}\left[y\underbrace{\sum_{x} P(X=x,Y=y)}_{P(Y=y)}\right] \\
&= \sum_{x} xP(X=x)+\sum_{y} yP(Y=y) \\
&= E(X)+E(Y)
\end{aligned}
$$

指標法及白努利分佈平均值

- 設 x 是具有參數 n 及 p 的二項式分佈，即 X 是 n 項白努利試驗的成功數，其中 P(成功)=p, P(失敗) = 1-P(成功)=q
  - 求 n 項試驗成功期望值 EX

$$
\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^{k}(1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{1} pq^{n-1} + 2\binom{n}{2} p^{2} q^{n-2} + \ldots + n\binom{n}{n} p^{n}
\end{aligned}
$$

指標法及白努利分佈平均值 (Cont.)

- 更簡便的方法
  - 定義 n 個新隨機變數 X_i(亦稱為指標 indicator) 如下，其中 $i = 1, 2, 3, ..., n$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{若第}i\text{次試驗是成功的} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

  - 若進行 5 次試驗 (i.e. $n = 5$)，且其結果為 { 成功，成功，失敗，失敗，成功 }
  - $X = 3, X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 1$

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

使用和的期望值

$$EX = EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_n$$

指標法及白努利分佈平均值 (Cont.)

- 計算每一個 EX_i
- $$\begin{aligned} EX_i &= 0\times P(X_i=0)+1\times P(X_i=1)\\ &= P(X_i=1)\\ &= P(\text{第}\,i\,\text{次試驗成功})\\ &= p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\; EX &= EX_1+EX_2+\ldots+EX_n\\ &= \text{總共}\,n\,\text{項個}\,p\,\text{的總合}\\ &= np \end{aligned}$$

整理一下

若 X 是具參數 n 與 p 的二項式分佈，則其期望值為

$$EX = np$$

參考資料

- 機率一講 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_02_3_
- 【機率】期望值 http://synnwang.blogspot.com/2005/07/blog-post_23
- 隨機變數 http://www.stat.nuk.edu.tw/prost/content_new/c1-5.htm