

Отчёт по лабораторной работе №5

Математическое моделирование

Модель хищник-жертва. Вариант №21

Выполнила: Петрова Мария Евгеньевна,
НФИбд-02-21, 1032216450

Содержание

1	Ц е л ь р а б о т ы	1
2	Теоретическое введение	1
3	Задачи.....	2
4	Задание	3
5	Выполнение лабораторной работы	3
5.1	Построение математической модели. Решение с помощью программ	3
5.1.1	Julia	3
5.1.2	Результаты работы кода на Julia	5
5.2	OpenModelica.....	6
5.2.1	Результаты работы кода на OpenModelica	7
6	Анализ полученных результатов. Сравнение языков.	8
7	Вывод.....	8
8	Список литературы. Библиография.....	8

1 Цель работы

Изучить жесткую модель хищник-жертва и построить эту модель.

2 Теоретическое введение

- Модель Лотки—Вольтерры — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь её авторов, которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами. [4]

Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях [4]:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (-ax(t) + by(t)x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = (cy(t) - dy(t)x(t)) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y – число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c – естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жёсткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени такая система вернётся в изначальное состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решения) будет находиться в точке $x_0 = \frac{c}{a}$, $y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0)$, $y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

3 Задачи

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв
2. Построить график зависимости численности хищников и численности жертв от времени
3. Найти стационарное состояние системы

4 Задание

Вариант 21:

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.42x(t) + 0.043y(t)x(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.44y(t) - 0.045y(t)x(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 4$, $y_0 = 13$ Найдите стационарное состояние системы.

5 Выполнение лабораторной работы

5.1 Построение математической модели. Решение с помощью программ

5.1.1 Julia

Код программы для нестационарного состояния:

```
using Plots
using DifferentialEquations

x0 = 4
y0 = 13

a = 0.42
b = 0.043
c = 0.44
d = 0.045

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
    dpi=300,
```

```

        legend=false)

plot!(
    plt,
    X,
    Y,
    color=:blue)

savefig(plt, "out/lab05_1.png")

plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)

plot!(
    plt2,
    T,
    X,
    label="Численность жертв",
    color=:red)

plot!(
    plt2,
    T,
    Y,
    label="Численность хищников",
    color=:green)

savefig(plt2, "out/lab05_2.png")

```

Код программы для стационарного состояния:

```

using Plots
using DifferentialEquations

a = 0.42
b = 0.043
c = 0.44
d = 0.045

x0 = c / d
y0 = a / b

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)

```

```

sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

```

```

plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)

```

```

plot!(
    plt2,
    T,
    X,
    label="Численность жертв",
    color=:red)

```

```

plot!(
    plt2,
    T,
    Y,
    label="Численность хищников",
    color=:green)

```

```

savefig(plt2, "lab05_3.png")

```

В стационарном состоянии решение вида $y(x) = \text{somefunction}$ будет представлять собой точку.

5.1.2 Результаты работы кода на Julia

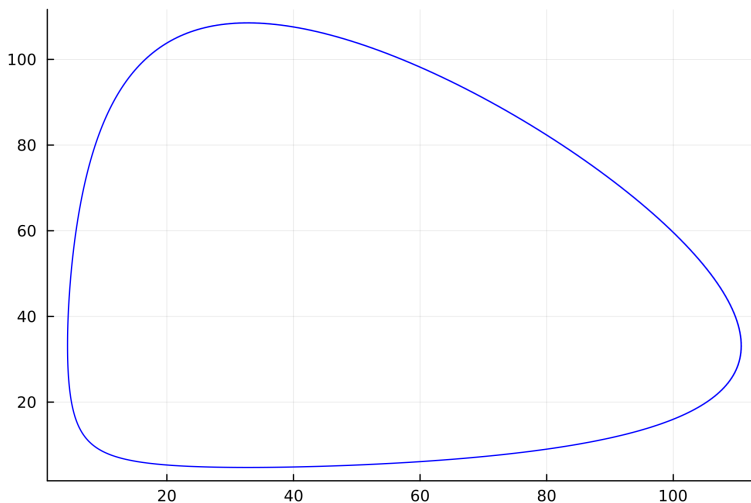


График численности хищников от численности жертв

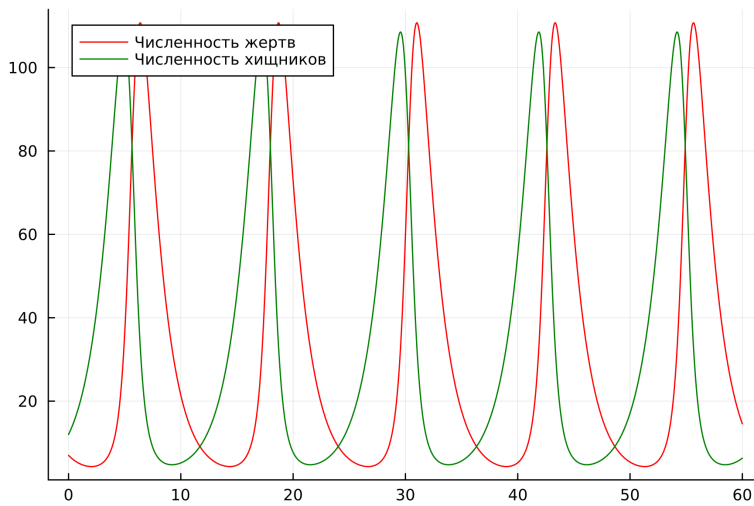
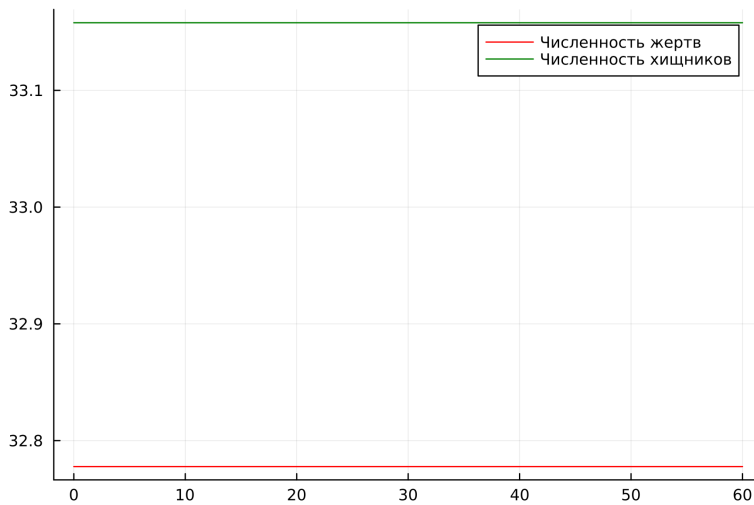


График численности жертв и хищников от времени



Стационарное состояние

5.2 OpenModelica

Код программы для нестационарного состояния:

```
model lab05_1
Real a = 0.42;
Real b = 0.043;
Real c = 0.44;
Real d = 0.045;
Real x;
Real y;
initial equation
x = 4;
y = 13;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
```

```
der(y) = c*y - d*x*y;  
end lab05_1;
```

Код программы для стационарного состояния:

```
model lab05_2  
Real a = 0.42;  
Real b = 0.043;  
Real c = 0.44;  
Real d = 0.045;  
Real x;  
Real y;  
initial equation  
x = c / d;  
y = a / b;  
equation  
der(x) = -a*x + b*x*y;  
der(y) = c*y - d*x*y;  
end lab05_2;
```

В стационарном состоянии решение вида $y(x) = \text{somefunction}$ будет представлять собой точку.

5.2.1 Результаты работы кода на OpenModelica

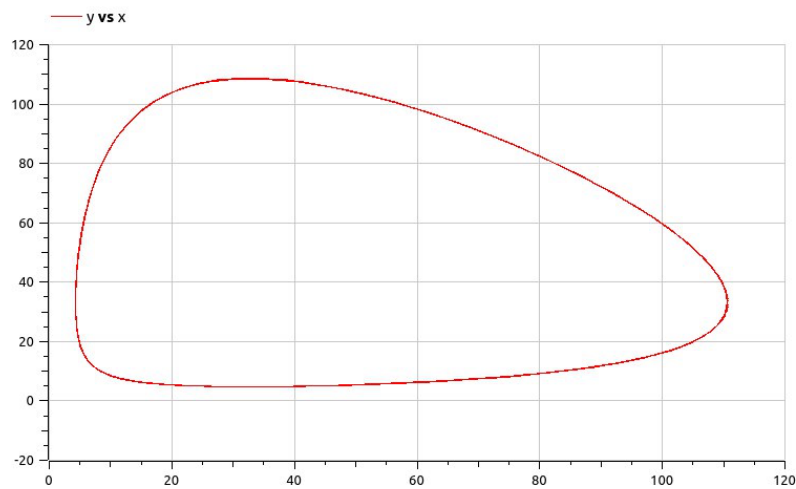


График численности хищников от численности жертв

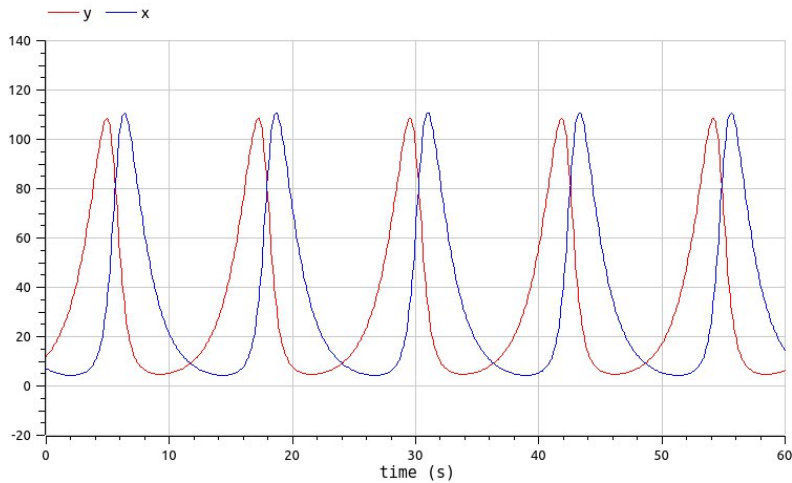
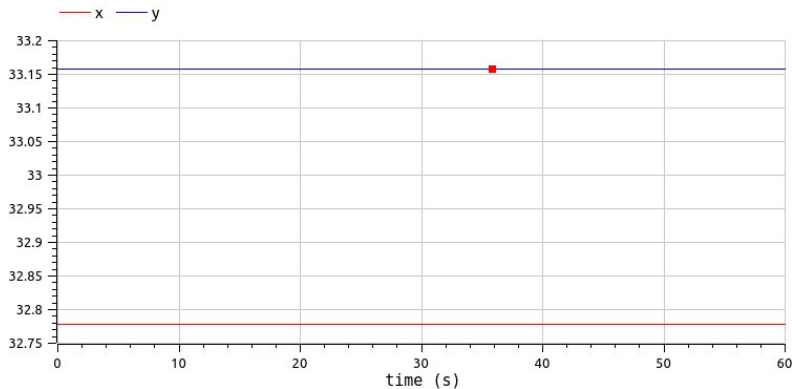


График численности жертв и хищников от времени



Стационарное состояние

6 Анализ полученных результатов. Сравнение языков.

В итоге проделанной работы мы построили график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв на языках Julia и OpenModelica. Построение модели хищник-жертва на языке openModelica занимает меньше строк, чем аналогичное построение на Julia.

7 Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель хищник-жертва и построена модель на языках Julia и Open Modelica.

8 Список литературы. Библиография

- [1] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
- [2] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>

[3] Решение дифференциальных уравнений: <https://www.wolframalpha.com/>

[4] Модель Лотки—Вольтерры: https://math-it.petrus.ru/users/semenova/MathECO/Lectons/Lotka_Volterra.pdf