

Aufgabe 16

$$a) P(F|W) = \frac{P(W|F) P(F)}{P(W)}$$

Ph Nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

~~$$P(F|W) = P(W|F) \frac{P(F)}{P(W)}$$~~

$$P(F \cap W) = P(F) P(W|F)$$

$$\text{und } P(W \cap F) = P(W) P(F|W)$$

setze gleich:

$$P(F|W) = \frac{P(F) P(W|F)}{P(W)} \quad \text{qed.}$$

b) Hier ist $W = (\text{Wind} = \text{stark}, \text{Feuchtigkeit} = \text{hoch}, \text{Temperatur} = \text{kalt}, \text{Ausblick} = \text{sonnig})$; F soll True sein.

$$P(W|F) = \prod_i P(x_i | F)$$

~~$$= \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{243}$$~~

$$= \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{243}$$

$$P(F_{\text{true}}) = \frac{9}{14}$$

$P(W)$ = Gesamtwahrscheinlichkeit für W , egal ob Fußball gespielt wird

~~$$P(W) = P(W_{\text{true}}) P(F_{\text{true}}) + P(W_{\text{false}}) P(F_{\text{false}})$$~~

$$= \frac{7}{14} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{6}{14} = \frac{27}{1372}$$

$$\rightarrow P(F|W) = \frac{\frac{2}{243} \cdot \frac{9}{14}}{\frac{27}{1372}} \approx 0.2689 \approx 26.89\%$$

c) In diesem Fall tritt das Problem auf, dass die Wahrscheinlichkeit = 0 wird:

$$P(W|F) = \prod_i P(x_i|F) = \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{0}{9} \cdot \frac{2}{9} = 0$$

$$\Rightarrow P(F|W) = \frac{P(W|F) P(F)}{P(W)} = 0$$

Allerdings würde das vermutlich zu falschen Einschätzungen durch das Programm führen; nur weil es ~~sonst~~ ^{sonst} wip ~~ist~~ folgt nicht direkt, dass kein Fußball gespielt wird.

Ausweg: additive smoothing

Aufgabe 17

$$a) H(Y) = - \sum_{z \in Z} P(Y=z) \log_2 P(Y=z)$$

$$= - \frac{3}{14} \log_2 \frac{3}{14} - \frac{5}{14} \log_2 \frac{5}{14} = 0.9402$$

$$b) J_G(X, Y) = H(Y) - H(X, Y)$$

$$= H(Y) + \sum P(X=m) \sum P(Y=z|X=m) \log P(Y=z|X=m)$$

$$= H(Y) + \sum P(X=m) \left[P(F=\text{true}|W=\text{true}) \log \text{same} + P(F=\text{false}|W=m) \dots \right]$$

$$= H(Y) + \frac{8}{14} \left(\frac{2}{14} \log_2 \frac{2}{14} + \frac{6}{14} \log_2 \frac{6}{14} \right) + \frac{6}{14} \left(\frac{3}{14} \log_2 \frac{3}{14} + \frac{3}{14} \log_2 \frac{3}{14} \right)$$

$$= 0.477$$