Statistique Bayésienne : Devoir Maison 1

Anna Simoni

3 novembre 2022

Instructions : 1) ce devoir maison doit être complété par chaque étudiant individuellement et rendu le 22 Novembre 2022 au plus tard. 2) Le devoir maison doit être deposé sur `https://www.compilatio.net/dossier/ztxbc` dans le format pdf. 3) Le document doit être nommé de la façon suivante : `NOM_PRENOM_DM1`. (3) De preference, la solution doit être tapée à l'ordinateur en format pdf. En alternative, la solution peut être écrite à la main à condition qu'elle soit *très claire et lisible*. Pour éviter tous malentendus de correction, les solutions qui ne sont pas aisément lisibles ne seront pas considérées. (4) Pour chaque question merci de déveloper les calculs nécessaires pour arriver à la réponse. Une réponse sans les calculs nécessaires ne sera pas considérée. (4) Le point 3 de l'Exercice 2 doit être developé avec le logiciel statistique de votre choix parmi Matlab, R ou Python.

Exercice 1

On considère un modèle à volatilité stochastique autoregressive : pour $t = 1, \dots, T$,

$$\begin{aligned} y_t &= \exp(\sigma_t/2)\,\varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim^{i.i.d.} \mathcal{N}(0,1) \\ \sigma_t &= \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1} + \tau\eta_t, \qquad \eta_t \sim^{i.i.d.} \mathcal{N}(0,1) \end{aligned}$$

où $\sigma_t = \log(v_t)$ est la log-variance. On considère la distribution à prior suivante :

$$\begin{aligned} \beta_0 &\sim \mathcal{N}(\alpha_0, \gamma_0) \\ \beta_1 &\sim \mathcal{N}(\alpha_1, \gamma_1)\mathbb{1}_{(-1,1)}(\beta_1) \\ \tau^2 &\sim I\Gamma(c_0, d_0), \end{aligned}$$

où α_0, α_1, γ_0, γ_1, c_0 et d_0 sont des paramètres donnés, $I\Gamma$ denote une loi inverse gamma et $\mathbb{1}_{(-1,1)}(\beta_1) = 1$ si $\beta_1 \in (-1, 1)$ et zero sinon. Notez $y^{(T)} := (y_1, \ldots, y_T)$ et $\sigma^{(T)} := (\sigma_1, \ldots, \sigma_T)$

1. Dérivez la loi a posteriori $\Pi(\tau^2 | y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \beta_0, \beta_1)$.
2. Dérivez la loi a posteriori $\Pi(\beta_0 | y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \tau^2, \beta_1)$.
3. Dérivez la loi a posteriori $\Pi(\beta_1 | y^{(T)}, \sigma^{(T)}, \sigma_0, \tau^2, \beta_0)$.

Exercice 2

Soit $y_1, y_2, \ldots, y_T$ une série chronologique de réponses de *comptage* indépendantes, générées de la façon suivante :

$$y_t | \gamma, \delta, \lambda \sim \begin{cases} Po(\gamma) & \text{if } t \leq \lambda, \\ Po(\delta) & \text{if } t > \lambda, \end{cases} \tag{0.1}$$

où $Po(\mu)$ dénote la distribution de Poisson avec moyenne μ et fonction de densité de probabilité $f(y_t|\lambda) = \lambda^y \exp(-\lambda)/y!$ si $y_t = 0, 1, 2, \ldots$ et $f(y_t|\lambda) = 0$ sinon. λ est le point de changement. Supposez que les distributions a priori sont de la forme :

$$\begin{aligned} \gamma &\sim Gamma(a_1, a_2), \\ \delta &\sim Gamma(d_1, d_2), \\ \lambda &\sim Uniform\{1, 2, \ldots, T-1\}. \end{aligned}$$

1. Dérivez la fonction de vraisemblance pour ce modèle.
2. Décrivez comment l'algorithme de Gibbs peut être utilisé pour estimer les paramètres de ce modèle.
3. Considérez les données `acc_usines.txt` sur les accidents dans les usines sur la période 1851-1962 en France. En regardant les données, on a l'impression que le nombre d'accidents a diminué avec le temps. Sur la base de ceci, utilisez ces données pour estimer le modèle de Poisson (0.1) avec un point de changement inconnu (en appliquant l'algorithme de Gibbs dévelopé au point precedent). Quand se produit le point de changement ? (Pour répondre à cette question vous devez trouver la moyenne et l'écart-type a postériori de λ). Quel est le nombre prévu d'accidents avant et après ce changement ?