MAP556 CMC1

Yunhao CHEN, Xinkai TANG

22 octobre 2021

1 Introduction

Dans ce projet, on simule l'espérance $\mathbb{E}(f(G))$, où f est une fonction quelconque avec propriétés assez bonnes et G un vecteur gaussien de dimension 5 à composantes indépendantes, dont chaque composante est centrée de variance unitaire.

2 Algorithme

La quantité d'appel de f est limitée à 400 fois. Dans ce cas, la méthode de Monte Carlo naive ne marche pas très bien. Pour résoudre ce problème, nous avons principalement employé **l'échantillon d'importance**, **la méthode de variable de contrôle** et **Méthode de quasi Monte Carlo**.

2.1 Méthode de quasi Monte Carlo

400 points dans $\mathbb{R}^5$ ne peuvent probablement pas bien représenter la distribution théorique de gaussien. Nous visons alors de simuler les variables le plus proche possible que la distribution théorique. Pour cette raison, on utilise la méthode de quasi Monte Carlos. On a utilisé **Irrational winding of a torus** pour simuler une suite de variables qui suivent la loi uniforme dans $\mathbb{R}^5$ et qui remplissent bien cet espace. À partir de ces variables dans $[0,1]^5$, nous pouvons simuler les variables gaussiennes en appliquant l'inverse de fonction de répartition de gaussienne sur elles(la proposition 1.2.1 dans le polycopié).

2.2 Méthode adapté d'échantillon d'importance

Comme f n'est pas connue avant, nous avons choisi la méthode adapté d'échantillon d'importance, afin d'ajuster automatiquement les paramètres. G est un vecteur gaussien en dimension 5, on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^5, \mathbb{E}(f(G)) = \mathbb{E}\left(f(G+\theta)\exp(-\theta \cdot G - \frac{\theta^2}{2}) \right).$$

Pour choisir le meilleur θ, on a :

$$\theta^* \in argmin_{\theta \in \mathbb{R}^5} \mathbb{E}\left(f^2(G+\theta)\exp(-2\theta \cdot G - \theta^2)\right).$$

Dans le cours, nous avons vu qu'il est équivalent de trouver le minimiseur tel que :

$$\theta^*_M = \frac{\Sigma_{m=1}^M G_m f^2(G_m)\exp(-\theta^*_M \cdot G_m)}{\Sigma_{m=1}^M f^2(G_m)\exp(-\theta^*_M \cdot G_m)}.$$

Pour la recherche de θ^*_M, nous avons utilisé la méthode de Newton-Raphson. Comme θ^*_M converge vers θ^*, nous aurions un bon estimateur de θ^*.

2.3 Méthode de variable de contrôle

En plus, nous utilisons la méthode de variable de contrôle, ayant objectif de réduire la variance. Ici nous notons :

$$X := f(G+\theta^*)\exp(-\theta^* \cdot G - \frac{\theta^{*2}}{2})$$

L'idée de variable de contrôle est de choisir une variable Z qui est simulable conjointement avec X tel que :

$$\forall \beta \in \mathbb{R}^d, Z(\beta) = \beta \cdot Z = \Sigma_{j=1}^d \beta_i Z_i : \mathbb{E}(Z(\beta)) = 0, \mathrm{Var}(Z(\beta)) < +\infty.$$

β est choisi en minimisant le deuxième moment

$$\mathbb{E}(X - Z(\beta))^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2\beta \cdot \mathbb{E}(XZ) + \beta \cdot \mathbb{E}(ZZ^T)\beta.$$

Alors nous obtenons :

$$\beta_M^* = (\frac{1}{M}\Sigma_{m=1}^M Z_m Z_m^T)^{-1} \frac{1}{M}\Sigma_{m=1}^M X_m Z_m$$

où β_M^* est un éstimateur empirique de β^*. À partir de β_M^* obtenu, nous pouvons ensuite estimer l'espérance.

Plus X et Z sont corrélés, plus la performance est bonne. Comme ici $X = f(G+\theta^*)\exp(-\theta^* \cdot G - \frac{\theta^{*2}}{2})$, on choisit $Z := G$, où G est les variables gaussiennes. L'estimateur est alors :

$$\mathbf{I}_{\beta_M^*, N} = \frac{1}{N}\Sigma_{n=1}^N (X_n - Z_n(\beta_M^*))$$