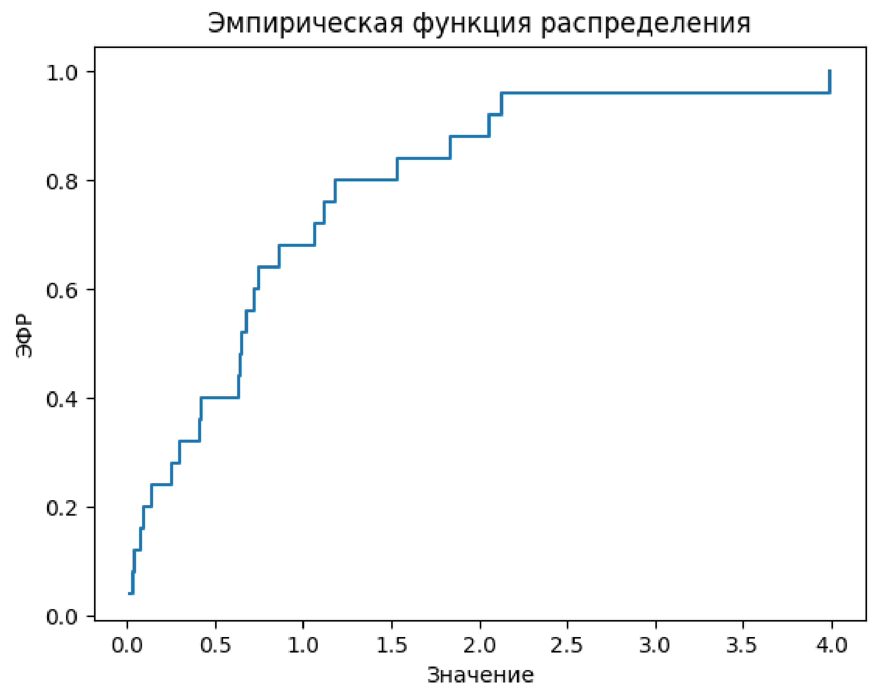
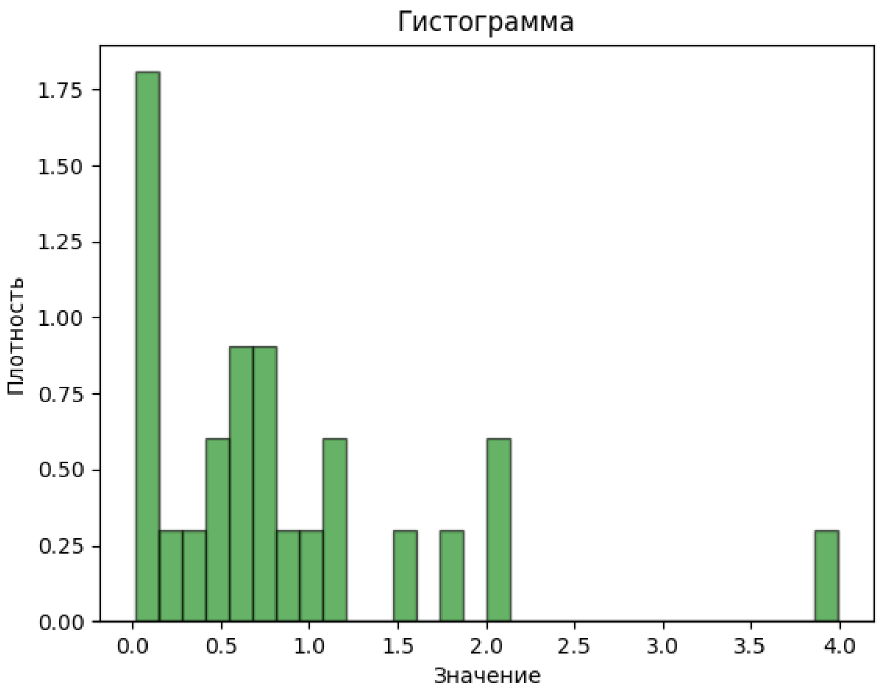
№2

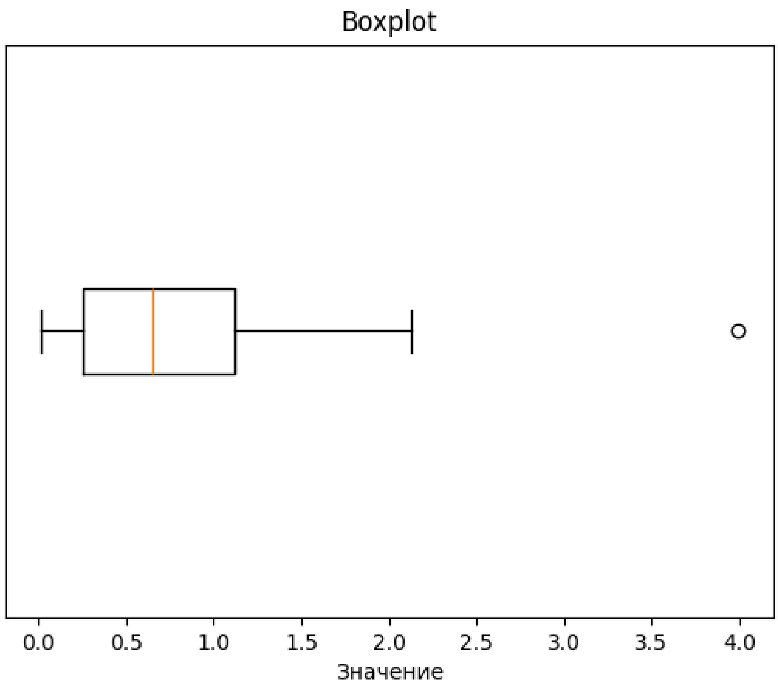
a)

```
[0.644 1.121 0.3   0.093 2.127 1.181 0.867 3.996 0.012 0.414 0.725 0.254
 0.421 0.042 1.07  0.14  1.54  0.03  0.631 2.056 0.678 1.837 0.075 0.65
 0.745]
Mode =  0.012
Median =  0.65
Range of data (razmah) =  3.984
Skewness (asymmetry coefficient) =  1.8402669287354243
```

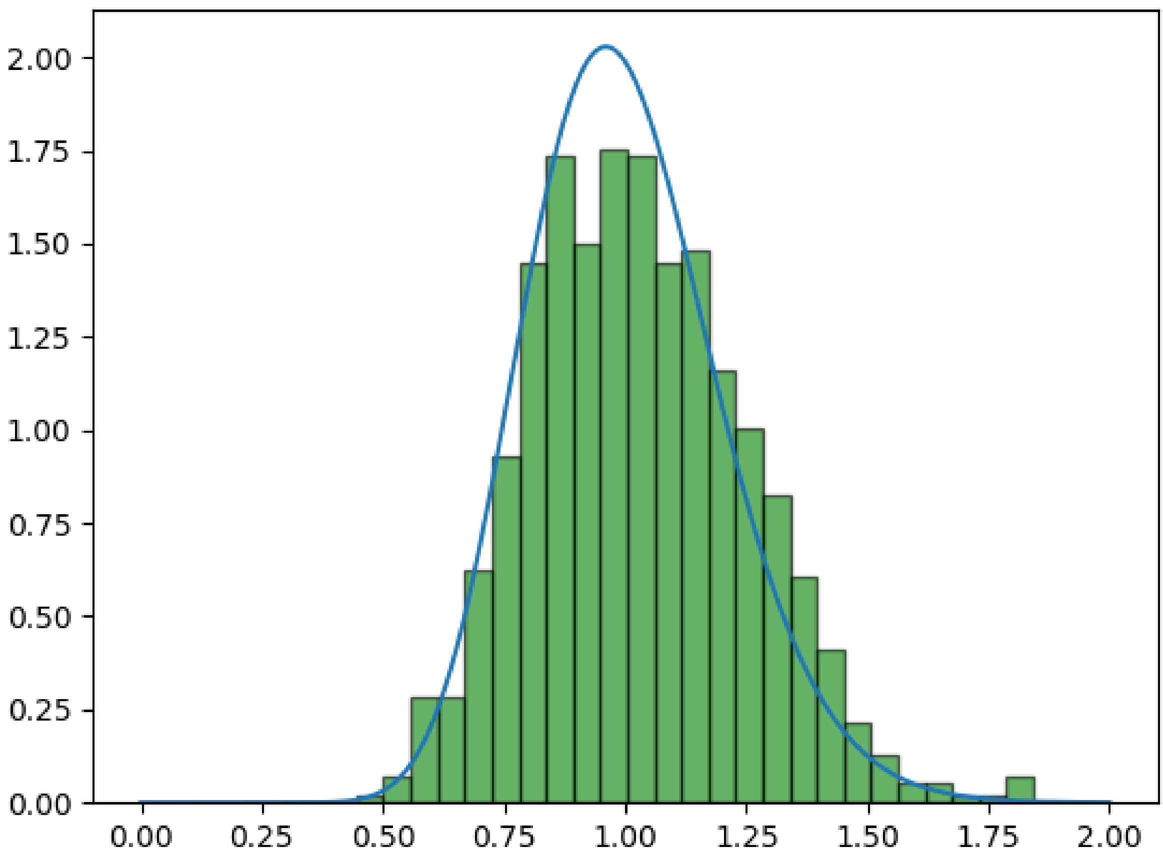
b)







c, d) Сравнение теоретической плотности распределения среднего арифметического элементов выборки с бутстраповской оценкой



№2

e; d) $\omega = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad p_\omega(y) - ?$

$p_\xi(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$\boxed{-}$

$$f(t;\omega) = M[e^{i\omega t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} p(y)\,dy$$

$$f(t;\omega) = f\left(t; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi\right) = f\left(t; \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\xi\right) =$$

$$= \left\{ f\left(t; \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i\right) = \prod_{i=1}^{n} f(a_i t; \xi_i) \right\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{1}{n}t; \xi\right) = f^n\left(\frac{t}{n}; \xi\right) = \left(M\left[e^{ix\frac{t}{n}}\right]\right)^n =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ixt}{n}} p(x)\,dx\right)^n = \left(\int_{0}^{\infty} e^{\frac{it}{n}x} \cdot e^{-x}\,dx\right)^n =$$

$$= \left(\int_{0}^{\infty} e^{\frac{x(it-n)}{n}}\,dx\right)^n = \left(\frac{n}{it-n}\int_{0}^{\infty} e^{\frac{x(it-n)}{n}}\,d\left(\frac{(it-n)x}{n}\right)\right)^n =$$

$$= \left(\frac{n}{it-n} e^{\frac{x(it-n)}{n}}\Big|_0^\infty\right)^n = \left\{ e^{i\frac{xt}{n} - x} = e^{-x}\left(\cos\frac{xt}{n} + \right.\right.$$

$$\left. + i\sin\frac{xt}{n}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \Big\} = \left(\frac{n}{n-it}\right)^n$$

Гамма распред:

1) $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независ: $\xi_i \sim \Gamma(\lambda, a_i)$

2) $\eta \sim \xi_1 + \dots + \xi_n$

$$\Rightarrow f(t;\eta) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^{a_k}$$

$$\Downarrow$$

$\left(\frac{n}{n-it}\right)^n = f(t;\eta)$, где $\eta \sim \xi_1 + \dots + \xi_n$:

$\xi_i \sim \Gamma(n, 1)$, $i = 1, \dots, n$

$\eta \sim \Gamma(n, n)$

$$\Downarrow$$

$f(t;\eta) = f(t;\omega) \Rightarrow \omega = \eta = \Gamma(n, n)$

для $\Gamma(\lambda, a)$: $p(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \Rightarrow$

$\Rightarrow p_\omega(y) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-nx}$

т.к. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow p_\omega(y) = \frac{n^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-nx}$

e)


Бутстрэповская оценка плотности распределения коэффициента асимметрии
Плотность
Коэффициент асимметрии
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5