Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Информационно-аналитические системы

Ким Юния Александровна
18.Б07-мм

Вычислительный практикум

Отчёт по заданию №5

Преподаватель:
Евдокимова Т.О.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1. Ссылка на код

https://github.com/yuniyakim/MethodsOfComputation/pull/15

2. Постановка задачи

Задача – реализация двух методов нахождения максимального по модулю собственного числа матрицы: степенного метода и метода скалярных произведений, а также сравнение количества итераций и точности.

3. Теоретическая часть

Исходная задача – нахождение максимального по модулю собственного числа матрицы A.

3.1. Степенной метод

Пусть $\lambda_1, .., \lambda_n$ – собственные числа матрицы A. Пусть $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$. В качестве начального приближения берём произвольный вектор $x^{(0)}$. Вычисляем значения $x^{(k)}$, $\lambda_1^{(k)}$ следующим образом.

- $x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$.
- $\lambda_1^{(k)} = (x^{(k)})_i/(x^{(k-1)})_i$.

Процесс продолжаем, пока не будет достигнута желаемая точность $\epsilon : |\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \epsilon$.

Таким образом, $\lambda_1 \approx \lambda_1^{(k+1)}$.

3.2. Метод скалярных произведений

Пусть $\lambda_1, .., \lambda_n$ – собственные числа матрицы A. Пусть $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$. В качестве начального приближения берём произвольный вектор $x^{(0)}$. Пусть $y^{(0)} = x^{(0)}$. Вычисляем значения $x^{(k)}, y^{(k)}, \lambda_1^{(k)}$ следующим образом.

- $x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$.
- $y^{(k)} = A^T y^{(k-1)}$.
- $\lambda_1^{(k)} = \frac{(x^{(k)}, y^{(k)})}{(x^{(k-1)}, y^{(k)})}$.

Процесс продолжаем, пока не будет достигнута желаемая точность $\epsilon : |\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \epsilon$.

Таким образом, $\lambda_1 \approx \lambda_1^{(k+1)}$.

4. Численный эксперимент

4.1. Описание

Для численного эксперимента брались следующие матрицы.

1. Верхняя треугольная матрица.
$$\begin{pmatrix} -198.1 & 389.9 & 123.2 \\ 0 & 202.4 & 249.3 \\ 0 & 0 & 489.2 \end{pmatrix}$$
2. Трёхдиагональная матрица.
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 18 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -401.98 & 200.34 \\ 1202.04 & -602.32 \end{pmatrix}$
5. Матрица Гильберта порядка 4.
6. Матрица Гильберта порядка 5.
7. Матрица Гильберта порядка 6.

Точность ϵ варьировалась от 10^{-2} до 10^{-5}.

4.2. Результаты

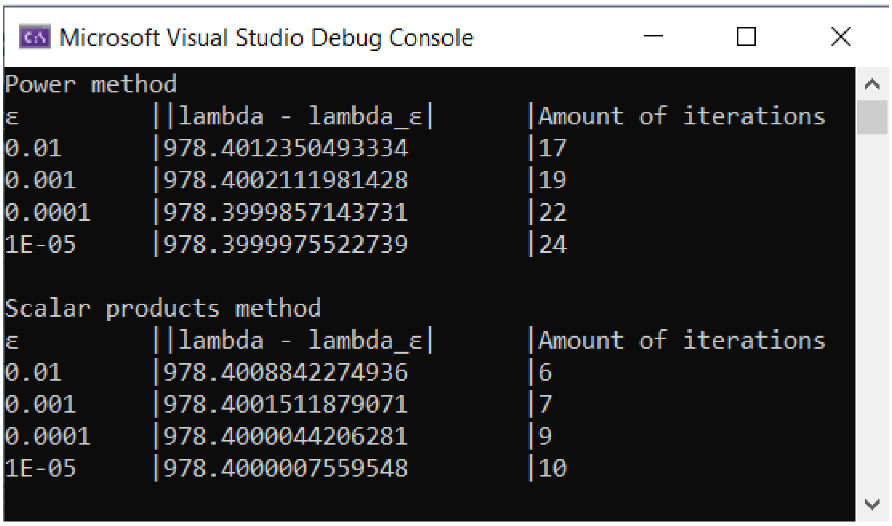
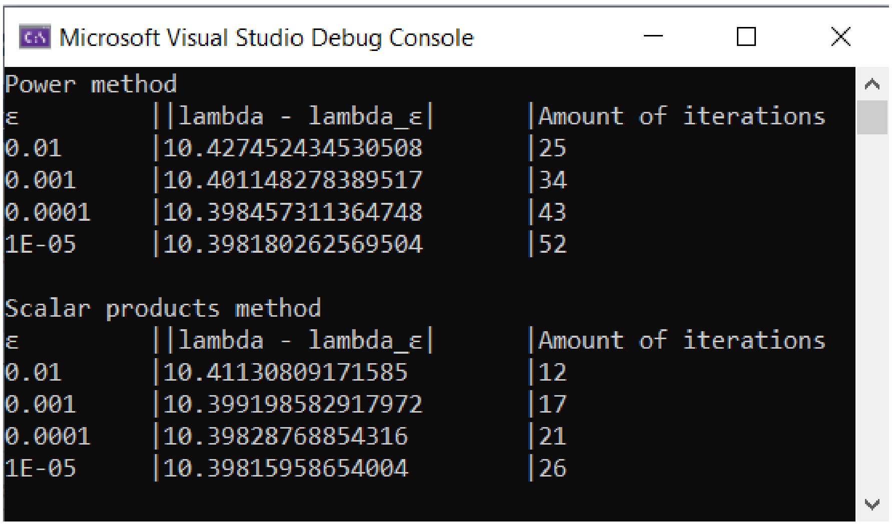


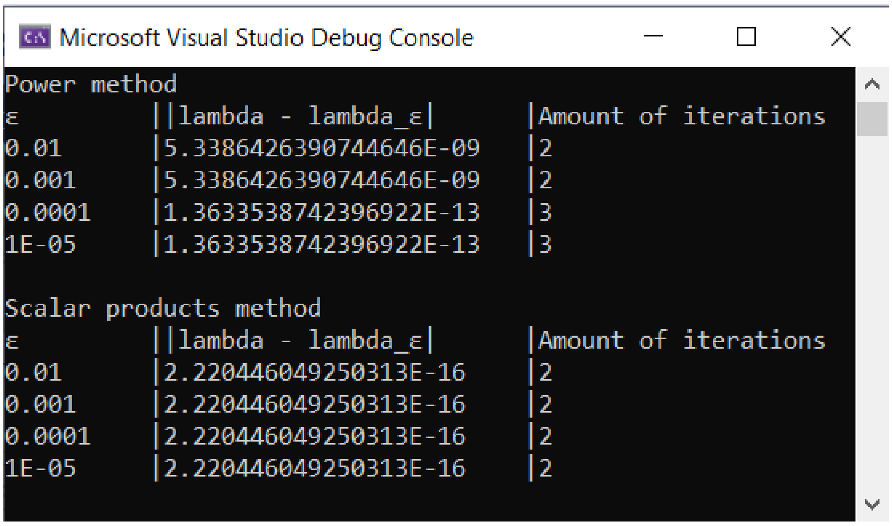
Рисунок 4.1. Результаты верхней треугольной матрицы



```
Microsoft Visual Studio Debug Console
Power method
ε         ||lambda - lambda_ε|      |Amount of iterations
0.01      |10.427452434530508       |25
0.001     |10.401148278389517       |34
0.0001    |10.398457311364748       |43
1E-05     |10.398180262569504       |52

Scalar products method
ε         ||lambda - lambda_ε|      |Amount of iterations
0.01      |10.41130809171585        |12
0.001     |10.399198582917972       |17
0.0001    |10.39828768854316        |21
1E-05     |10.39815958654004        |26
```

Рисунок 4.2. Результаты трёхдиагональной матрицы



```
Microsoft Visual Studio Debug Console
Power method
ε         ||lambda - lambda_ε|      |Amount of iterations
0.01      |5.3386426390744646E-09   |2
0.001     |5.3386426390744646E-09   |2
0.0001    |1.3633538742396922E-13   |3
1E-05     |1.3633538742396922E-13   |3

Scalar products method
ε         ||lambda - lambda_ε|      |Amount of iterations
0.01      |2.220446049250313E-16    |2
0.001     |2.220446049250313E-16    |2
0.0001    |2.220446049250313E-16    |2
1E-05     |2.220446049250313E-16    |2
```

Рисунок 4.3. Результаты матрицы номер 3

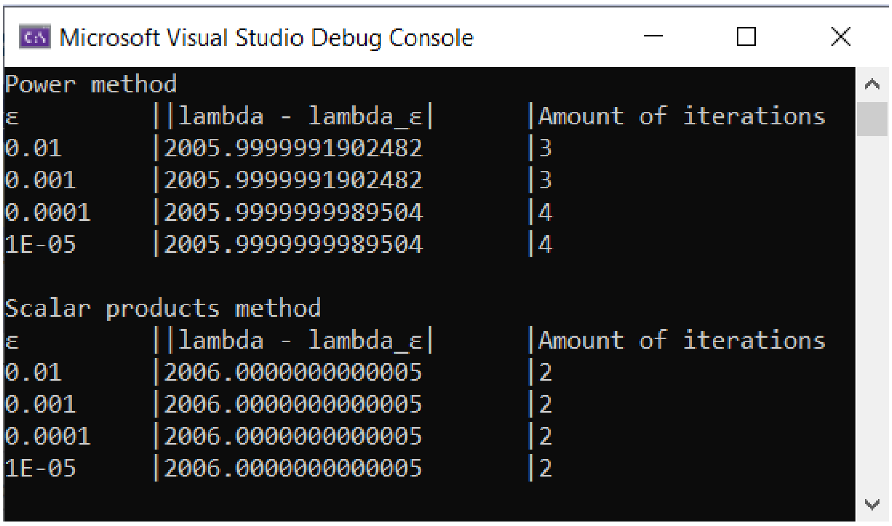


Рисунок 4.4. Результаты матрицы номер 4

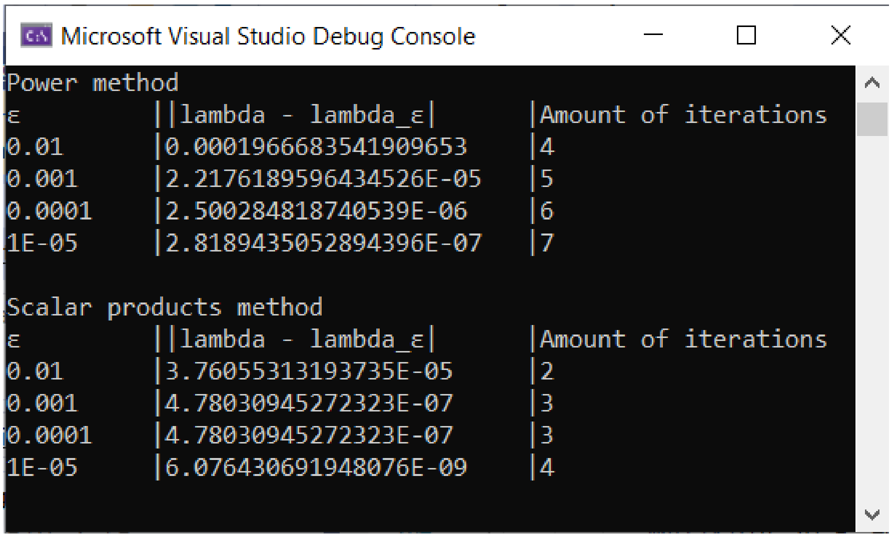
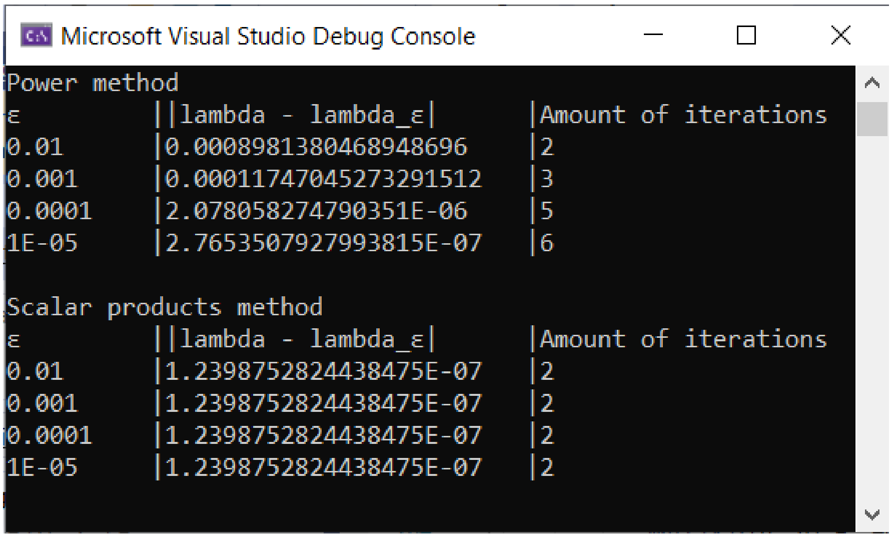


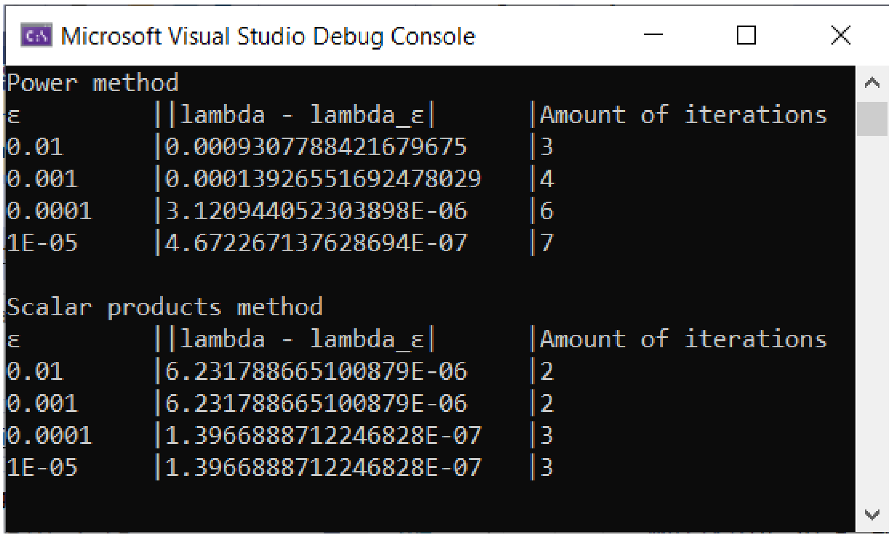
Рисунок 4.5. Результаты матрицы Гильберта порядка 4




```
Power method
ε          ||lambda - lambda_ε|       |Amount of iterations
0.01       |0.0008981380468948696     |2
0.001      |0.00011747045273291512    |3
0.0001     |2.078058274790351E-06     |5
1E-05      |2.7653507927993815E-07    |6

Scalar products method
ε          ||lambda - lambda_ε|       |Amount of iterations
0.01       |1.2398752824438475E-07    |2
0.001      |1.2398752824438475E-07    |2
0.0001     |1.2398752824438475E-07    |2
1E-05      |1.2398752824438475E-07    |2
```

Рисунок 4.6. Результаты матрицы Гильберта порядка 5




```
Power method
ε          ||lambda - lambda_ε|       |Amount of iterations
0.01       |0.0009307788421679675     |3
0.001      |0.00013926551692478029    |4
0.0001     |3.120944052303898E-06     |6
1E-05      |4.672267137628694E-07     |7

Scalar products method
ε          ||lambda - lambda_ε|       |Amount of iterations
0.01       |6.231788665100879E-06     |2
0.001      |6.231788665100879E-06     |2
0.0001     |1.3966888712246828E-07    |3
1E-05      |1.3966888712246828E-07    |3
```

Рисунок 4.7. Результаты матрицы Гильберта порядка 6

4.3. Анализ

В результате экспериментов была выявлена зависимость между точностью и числом итераций: чем лучшая точность необходима, тем большее количество итераций требуется.

Кроме того, при сравнении результатов, полученных с помощью степенного метода и метода скалярных произведений, было замечено, что последний требует меньшее количество итераций для достижения одинаковой точности.