Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Информационно-аналитические системы

Ким Юния Александровна
18.Б07-мм

Вычислительный практикум

Отчёт по заданию №10

Преподаватель:
Евдокимова Т.О.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1. Ссылка на код

https://github.com/yuniyakim/MethodsOfComputation/pull/19

2. Постановка задачи

Задача – реализация методов сеток решения задачи теплопроводности.

3. Теоретическая часть

Исходная задача – задача теплопроводности вида $u_t(x,t) = \kappa u_{xx} + f(x,t)$, $\kappa = const > 0$, $\quad 0 < x < a$, $\quad 0 < t \leq T$. Заданы одно начальное и два граничных условия $u(x,0) = \mu(x)$, $\quad 0 \leq x \leq a, u(0,t) = \mu_1(t)$, $\quad u(a,t) = \mu_2(t)$, $\quad 0 \leq t \leq T$.

Неоходимо найти решение $u(x,t)$ исходного уравнения, удовлетворяющее этим условиям.

Разбиваем отрезок $[0,a]$ на N равных частей, а отрезок $[0,T]$ на M равных частей. Обозначим

- $h = \frac{a}{N}$, $\quad x_i = ih$, $\quad i = 0, \ldots, N$,
- $\tau = \frac{T}{M}$, $\quad t_k = k\tau$, $\quad k = 0, \ldots, M$.

Строим сетку $\{(x_i, t_k),\ i = 0, \ldots, N,\ k = 0, \ldots, M\}$.

Приближенное решение получаем в виде таблицы значений в узлах сетки. Обозначим u_i^k — значение в узле (x_i, t_k).

Заменяем производные в изначальном уравнении разностными производными.

Схема с весами имеет вид $\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = \frac{\kappa}{h^2}\left(\sigma(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) + (1-\sigma)\left(u_{i+1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}\right)\right) + f(x_i, t_{k-1} + \sigma\tau)$.

При $\sigma = 0$ получаем явную разностную схему.

В этом случае находим u_i^k из формулы, а u_i^0, u_0^k, u_N^k соответственно равны

- $u_i^0 = \mu(x_i)$,
- $u_0^k = \mu_1(t_k)$,
- $u_N^k = \mu_2(t_k)$.

При $\sigma = 1$ получаем неявную разностную схему.

$$\begin{cases} u_0^k = \mu_1(t_k) \\ \frac{\kappa}{h^2} u_{i-1}^k + \left(-\frac{2\kappa}{h^2} - \frac{1}{\tau}\right) u_i^k + \frac{\kappa}{h^2} u_{i+1}^k = -\frac{1}{\tau} u_i^{k-1} - f(x_i, t_k) \\ u_N^k = \mu_2(t_k) \end{cases}$$

Перепишем полученную СЛАУ в более удобном виде

$$\begin{cases} B_0 u_0^k = D_0^k \\ A_i u_{i-1}^k + B_i u_i^k + C_i u_{i+1}^k = D_i^k \\ B_n u_n^k = D_n^k \end{cases}$$

Решаем полученную систему методом прогонки и находим u_i^k.

4. Численный эксперимент

4.1. Описание

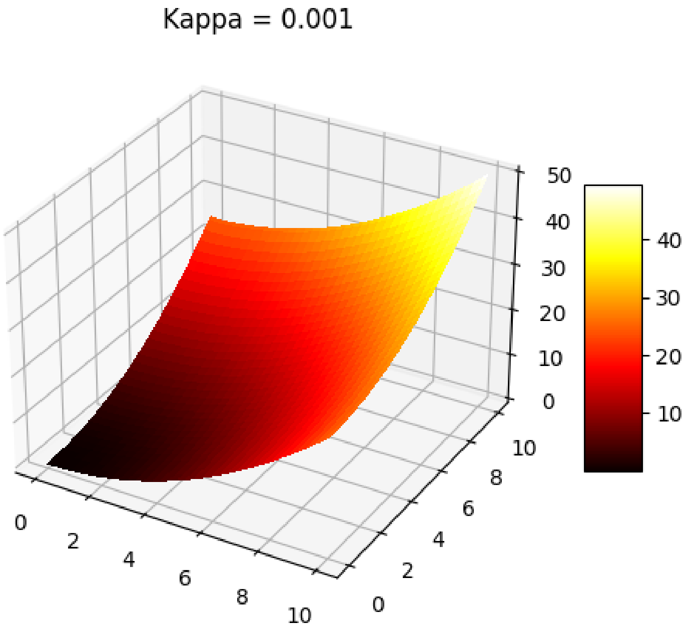
Для численного эксперимента брались следующие задачи.

1. $u_t(x,t) = 0.001u_{xx} + \frac{t}{2} - 0.0005,$
   $u(x,0) = \frac{x^2}{4}, \quad u(0,t) = \frac{t^2}{4}, \quad u(a,t) = \frac{t^2}{4} + 25,$
   $a = 10,\ T = 10,\ N = 100,\ M = 100.$

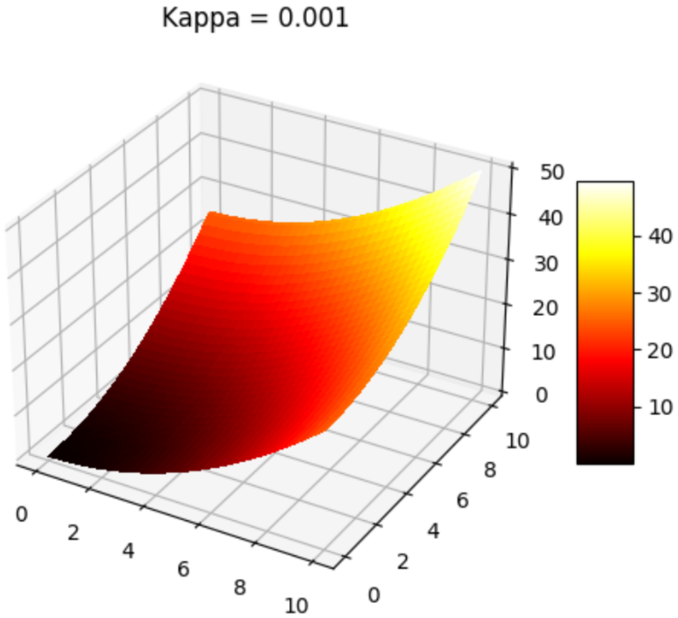
2. $u_t(x,t) = 0.001u_{xx} + x,$
   $u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u(a,t) = 10t,$
   $a = 10,\ T = 10,\ N = 100,\ M = 100.$

3. $u_t(x,t) = 0.001u_{xx} + 3t^2x + 0.02x^3,$
   $u(x,0) = -x^5 - 2x + 25, \quad u(0,t) = 25, \quad u(a,t) = 10t^3 - 99995,$
   $a = 10,\ T = 10,\ N = 100,\ M = 100.$

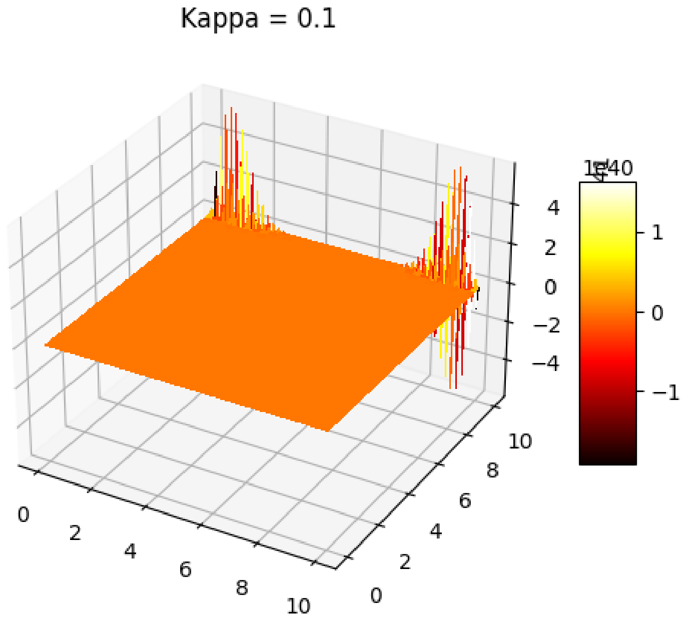
4.2. Результаты



(a) Явная схема, $\kappa = 0.001$

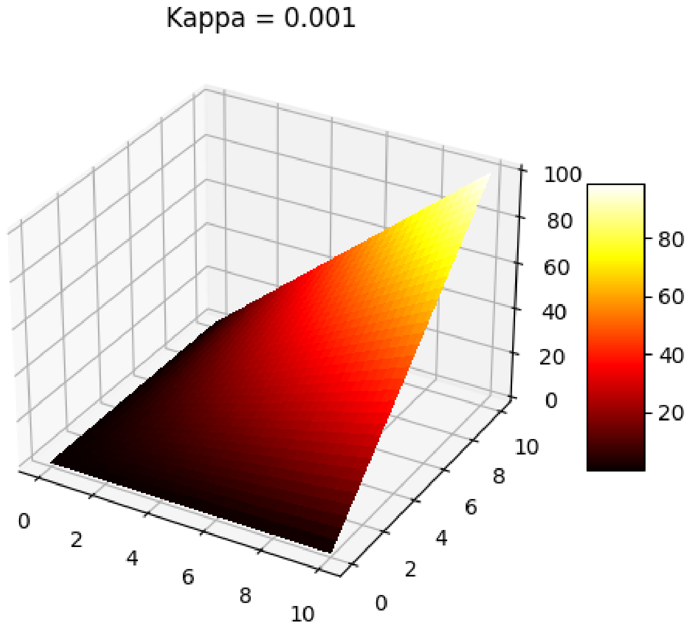


(b) Неявная схема, $\kappa = 0.001$

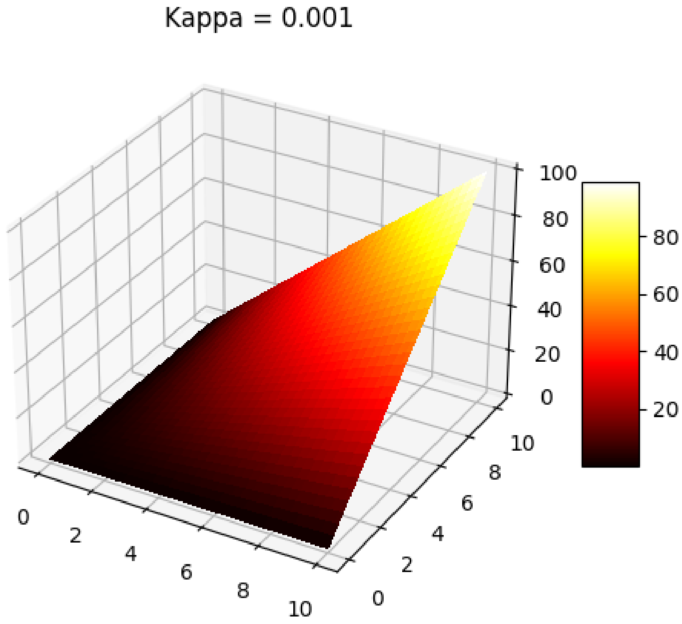


(c) Явная схема, $\kappa = 0.1$ (не выполняется условие устойчивости)

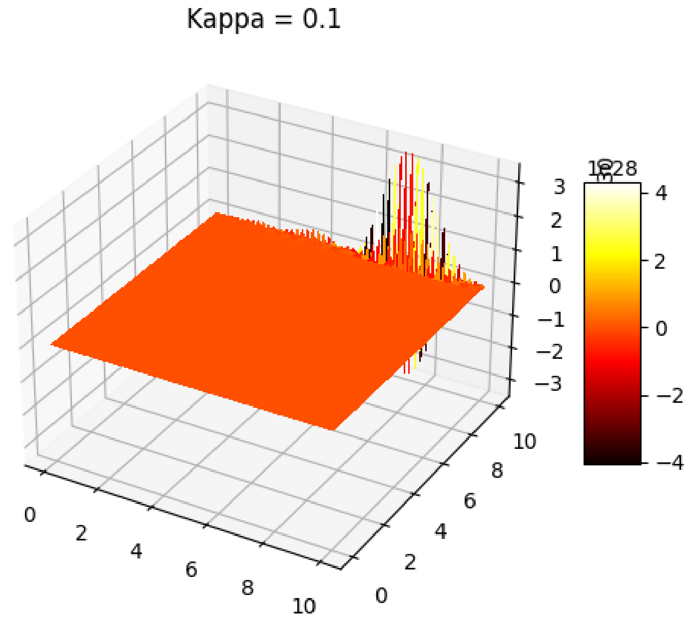
Рисунок 4.1. Приближенное решение задачи номер 1



(a) Явная схема, $\kappa = 0.001$

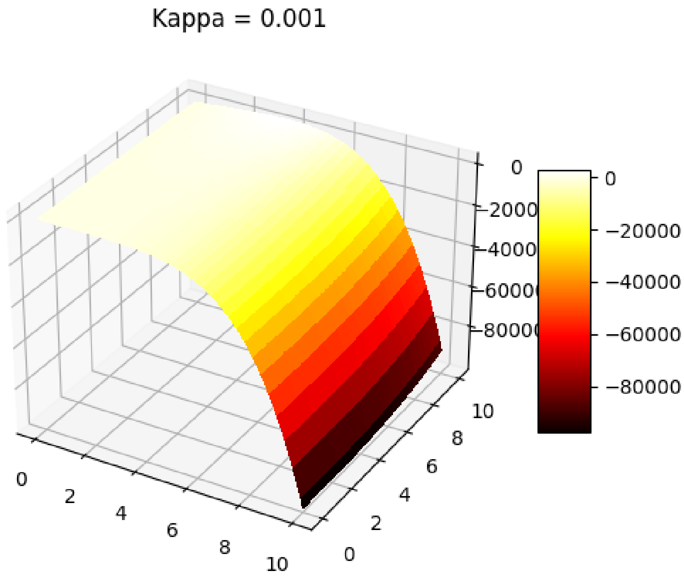


(b) Неявная схема, $\kappa = 0.001$

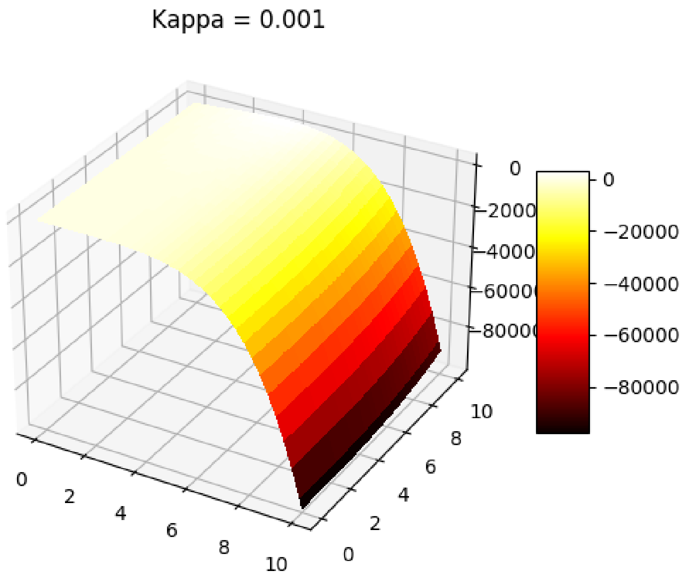


(c) Явная схема, $\kappa = 0.1$ (не выполняется условие устойчивости)

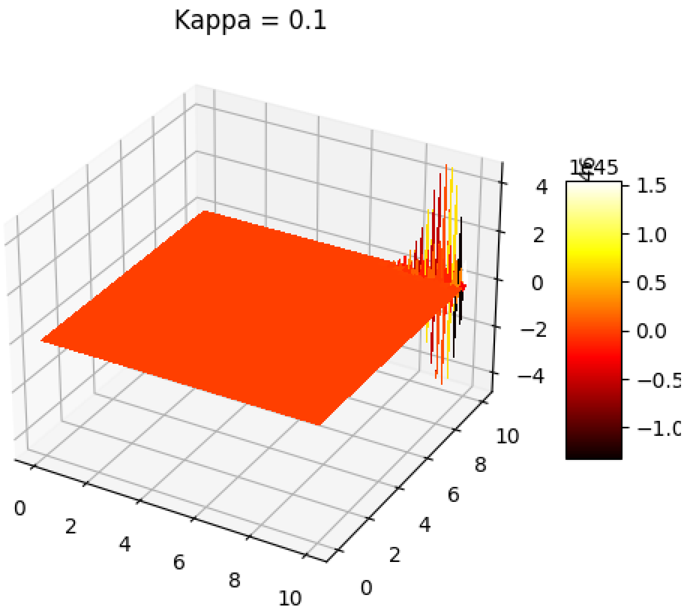
Рисунок 4.2. Приближенное решение задачи номер 2



(a) Явная схема, $\kappa = 0.001$



(b) Неявная схема, $\kappa = 0.001$



(c) Явная схема, $\kappa = 0.1$ (не выполняется условие устойчивости)

Рисунок 4.3. Приближенное решение задачи номер 3