

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Информационно-аналитические системы

Ким Юния Александровна
18.Б07-мм

Вычислительный практикум

Отчёт по заданию №5

Преподаватель:
Евдокимова Т.О.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1. Ссылка на код	3
2. Постановка задачи	3
3. Теоретическая часть	3
3.1. Степенной метод	3
3.2. Метод скалярных произведений	3
4. Численный эксперимент	3
4.1. Описание	3
4.2. Результаты	4
4.3. Анализ	7

1. Ссылка на код

<https://github.com/yuniyakim/MethodsOfComputation/pull/15>

2. Постановка задачи

Задача – реализация двух методов нахождения максимального по модулю собственного числа матрицы: степенного метода и метода скалярных произведений, а также сравнение количества итераций и точности.

3. Теоретическая часть

Исходная задача – нахождение максимального по модулю собственного числа матрицы A .

3.1. Степенной метод

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы A . Пусть $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. В качестве начального приближения берём произвольный вектор $x^{(0)}$. Вычисляем значения $x^{(k)}, \lambda_1^{(k)}$ следующим образом.

- $x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$.
- $\lambda_1^{(k)} = (x^{(k)})_i / (x^{(k-1)})_i$.

Процесс продолжаем, пока не будет достигнута желаемая точность $\epsilon : |\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \epsilon$.
Таким образом, $\lambda_1 \approx \lambda_1^{(k+1)}$.

3.2. Метод скалярных произведений

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы A . Пусть $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. В качестве начального приближения берём произвольный вектор $x^{(0)}$. Пусть $y^{(0)} = x^{(0)}$. Вычисляем значения $x^{(k)}, y^{(k)}, \lambda_1^{(k)}$ следующим образом.

- $x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$.
- $y^{(k)} = A^T y^{(k-1)}$.
- $\lambda_1^{(k)} = \frac{(x^{(k)}, y^{(k)})}{(x^{(k-1)}, y^{(k-1)})}$.

Процесс продолжаем, пока не будет достигнута желаемая точность $\epsilon : |\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \epsilon$.
Таким образом, $\lambda_1 \approx \lambda_1^{(k+1)}$.

4. Численный эксперимент

4.1. Описание

Для численного эксперимента брались следующие матрицы.

1. Верхняя треугольная матрица.

$$\begin{pmatrix} -198.1 & 389.9 & 123.2 \\ 0 & 202.4 & 249.3 \\ 0 & 0 & 489.2 \end{pmatrix}$$

2. Трёхдиагональная матрица.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 18 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -401.98 & 200.34 \\ 1202.04 & -602.32 \end{pmatrix}$

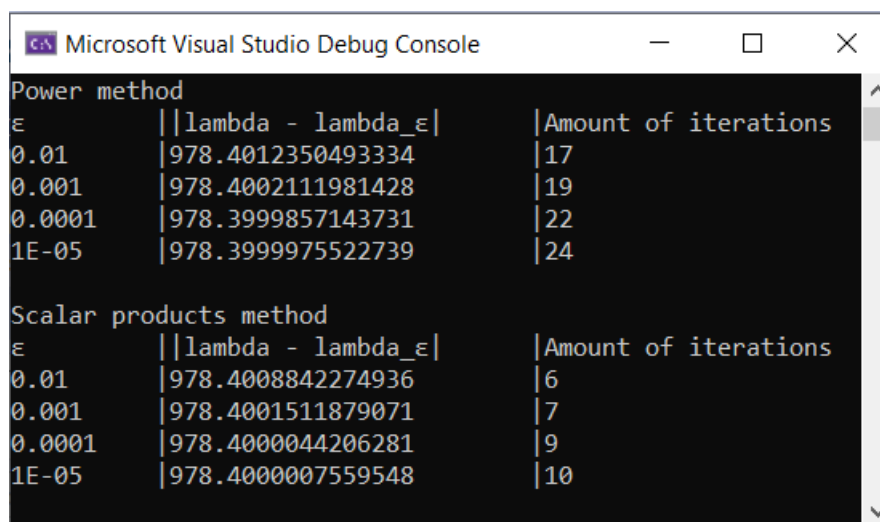
5. Матрица Гильберта порядка 4.

6. Матрица Гильберта порядка 5.

7. Матрица Гильберта порядка 6.

Точность ϵ варьировалась от 10^{-2} до 10^{-5} .

4.2. Результаты



The screenshot shows a window titled "Microsoft Visual Studio Debug Console" with a black background and white text. It displays the results of two numerical methods: "Power method" and "Scalar products method". Each method's results are presented in a table with three columns: ϵ , $||\lambda - \lambda_\epsilon||$, and "Amount of iterations".

Power method		
ϵ	$ \lambda - \lambda_\epsilon $	Amount of iterations
0.01	978.4012350493334	17
0.001	978.4002111981428	19
0.0001	978.3999857143731	22
1E-05	978.3999975522739	24

Scalar products method		
ϵ	$ \lambda - \lambda_\epsilon $	Amount of iterations
0.01	978.4008842274936	6
0.001	978.4001511879071	7
0.0001	978.4000044206281	9
1E-05	978.4000007559548	10

Рисунок 4.1. Результаты верхней треугольной матрицы

Power method		
ϵ	$ \lambda - \lambda_{\epsilon} $	Amount of iterations
0.01	10.427452434530508	25
0.001	10.401148278389517	34
0.0001	10.398457311364748	43
1E-05	10.398180262569504	52

Scalar products method		
ϵ	$ \lambda - \lambda_{\epsilon} $	Amount of iterations
0.01	10.41130809171585	12
0.001	10.399198582917972	17
0.0001	10.39828768854316	21
1E-05	10.39815958654004	26

Рисунок 4.2. Результаты трёхдиагональной матрицы

Power method		
ϵ	$ \lambda - \lambda_{\epsilon} $	Amount of iterations
0.01	5.3386426390744646E-09	2
0.001	5.3386426390744646E-09	2
0.0001	1.3633538742396922E-13	3
1E-05	1.3633538742396922E-13	3

Scalar products method		
ϵ	$ \lambda - \lambda_{\epsilon} $	Amount of iterations
0.01	2.220446049250313E-16	2
0.001	2.220446049250313E-16	2
0.0001	2.220446049250313E-16	2
1E-05	2.220446049250313E-16	2

Рисунок 4.3. Результаты матрицы номер 3

Microsoft Visual Studio Debug Console

Power method

ϵ	$ \lambda - \lambda_{\epsilon} $	Amount of iterations
0.01	2005.9999991902482	3
0.001	2005.9999991902482	3
0.0001	2005.999999989504	4
1E-05	2005.999999989504	4

Scalar products method

ϵ	$ \lambda - \lambda_{\epsilon} $	Amount of iterations
0.01	2006.0000000000005	2
0.001	2006.0000000000005	2
0.0001	2006.0000000000005	2
1E-05	2006.0000000000005	2

Рисунок 4.4. Результаты матрицы номер 4

Microsoft Visual Studio Debug Console

Power method

ϵ	$ \lambda - \lambda_{\epsilon} $	Amount of iterations
0.01	0.0001966683541909653	4
0.001	2.2176189596434526E-05	5
0.0001	2.500284818740539E-06	6
1E-05	2.8189435052894396E-07	7

Scalar products method

ϵ	$ \lambda - \lambda_{\epsilon} $	Amount of iterations
0.01	3.76055313193735E-05	2
0.001	4.78030945272323E-07	3
0.0001	4.78030945272323E-07	3
1E-05	6.076430691948076E-09	4

Рисунок 4.5. Результаты матрицы Гильберта порядка 4

Power method		
ϵ	$ \lambda - \lambda_{\epsilon} $	Amount of iterations
0.01	0.0008981380468948696	2
0.001	0.00011747045273291512	3
0.0001	2.078058274790351E-06	5
1E-05	2.7653507927993815E-07	6

Scalar products method		
ϵ	$ \lambda - \lambda_{\epsilon} $	Amount of iterations
0.01	1.2398752824438475E-07	2
0.001	1.2398752824438475E-07	2
0.0001	1.2398752824438475E-07	2
1E-05	1.2398752824438475E-07	2

Рисунок 4.6. Результаты матрицы Гильберта порядка 5

Power method		
ϵ	$ \lambda - \lambda_{\epsilon} $	Amount of iterations
0.01	0.0009307788421679675	3
0.001	0.00013926551692478029	4
0.0001	3.120944052303898E-06	6
1E-05	4.672267137628694E-07	7

Scalar products method		
ϵ	$ \lambda - \lambda_{\epsilon} $	Amount of iterations
0.01	6.231788665100879E-06	2
0.001	6.231788665100879E-06	2
0.0001	1.3966888712246828E-07	3
1E-05	1.3966888712246828E-07	3

Рисунок 4.7. Результаты матрицы Гильберта порядка 6

4.3. Анализ

В результате экспериментов была выявлена зависимость между точностью и числом итераций: чем лучшая точность необходима, тем большее количество итераций требуется.

Кроме того, при сравнении результатов, полученных с помощью степенного метода и метода скалярных произведений, было замечено, что последний требует меньшее количество итераций для достижения одинаковой точности.