Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Информационно-аналитические системы

Ким Юния Александровна
18.Б07-мм

Вычислительный практикум

Отчёт по заданию №4

Преподаватель:
Евдокимова Т.О.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1. Ссылка на код

https://github.com/yuniyakim/MethodsOfComputation/pull/14

2. Постановка задачи

Задача – реализация двух итерационных методов решения СЛАУ: метода простой итерации и метода Зейделя, а также сравнение количества итераций и точности.

3. Теоретическая часть

Исходная задача – решение СЛАУ вида $Ax = b$.

3.1. Метод простой итерации

Приводим исходную СЛАУ к виду $x = \alpha x + \beta$.

Пусть $\beta_i = b_i/a_{ii}, \alpha_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}, i \neq j, \alpha_{ii} = 0$. В качестве начального приближения берём исходный вектор правой части b.

Метод простой итерации: $x_k = \alpha x_{k+1} + \beta$. Процесс продолжаем, пока не будет достигнута желаемая точность $\epsilon : |x_{k+1} - x_k < \epsilon|$ или же достигнуто максимальное количество итераций $n = 500$.

3.2. Метод Зейделя

Метод Зейделя эквивалентен методу простой итерации с матрицей $\alpha = -(D + L)^{-1} * R$ и вектором $\beta = (D + L)^-1 * b$. Матрицы R, L и D следующие.

- $R_{ij} = a_{ij}, i < j; R_{ij} = 0, i \geq j.$
- $L_{ij} = a_{ij}, i > j; L_{ij} = 0, i \leq j.$
- $D_{ii} = a_{ii}; D_{ij} = 0, i \neq j.$

4. Численный эксперимент

4.1. Описание

Для численного эксперимента брались следующие матрицы.

1. Диагональная матрица.
$$\begin{pmatrix} -400.6 & 0 & 0 \\ 0 & -600.4 & 0 \\ 0 & 0 & 200.2 \end{pmatrix}$$
2. Верхняя треугольная матрица.
$$\begin{pmatrix} -198.1 & 389.9 & 123.2 \\ 0 & 202.4 & 249.3 \\ 0 & 0 & 489.2 \end{pmatrix}$$

3. Трёхдиагональная матрица.
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 18 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -401.98 & 200.34 \\ 1202.04 & -602.32 \end{pmatrix}$

6. Матрица Гильберта порядка 4.

7. Матрица Гильберта порядка 5.

8. Матрица Гильберта порядка 6.

Точность ϵ варьировалась от 10^{-3} до 10^{-11}.

4.2. Результаты

```
Simple-iteration method
ε         |||x - x_ε||              |Amount of iterations
0.001     |0                        |2
1E-05     |0                        |2
1E-07     |0                        |2
1E-09     |0                        |2
1E-11     |0                        |2

Seidel method
ε         |||x - x_ε||              |Amount of iterations
0.001     |3.0665868333667484E-19   |2
1E-05     |3.0665868333667484E-19   |2
1E-07     |3.0665868333667484E-19   |2
1E-09     |3.0665868333667484E-19   |2
1E-11     |3.0665868333667484E-19   |2
```

Рисунок 4.1. Результаты диагональной матрицы

```
Simple-iteration method
ε          |||x - x_ε||               |Amount of iterations
0.001      |0                         |4
1E-05      |0                         |4
1E-07      |0                         |4
1E-09      |0                         |4
1E-11      |0                         |4

Seidel method
ε          |||x - x_ε||               |Amount of iterations
0.001      |1.5023145987371592E-18    |4
1E-05      |1.5023145987371592E-18    |4
1E-07      |1.5023145987371592E-18    |4
1E-09      |1.5023145987371592E-18    |4
1E-11      |1.5023145987371592E-18    |4
```

Рисунок 4.2. Результаты верхней треугольной матрицы

```
Simple-iteration method
ε          |||x - x_ε||               |Amount of iterations
0.001      |0.0006132602751363665     |10
1E-05      |6.771808422283668E-06     |16
1E-07      |7.432974904750421E-08     |22
1E-09      |8.156963151445666E-10     |28
1E-11      |8.951466745434662E-12     |34

Seidel method
ε          |||x - x_ε||               |Amount of iterations
0.001      |0.00016043604282665254    |7
1E-05      |1.7690158319811605E-06    |10
1E-07      |1.941632614870339E-08     |13
1E-09      |2.1307488506753528E-10    |16
1E-11      |2.338328980429992E-12     |19
```

Рисунок 4.3. Результаты трёхдиагональной матрицы

```
Simple-iteration method
ε          |||x - x_ε||               |Amount of iterations
0.001      |27220.541658440095        |500
1E-05      |27220.541658440095        |500
1E-07      |27220.541658440095        |500
1E-09      |27220.541658440095        |500
1E-11      |27220.541658440095        |500

Seidel method
ε          |||x - x_ε||               |Amount of iterations
0.001      |27923.292694789783        |500
1E-05      |27923.292694789783        |500
1E-07      |27923.292694789783        |500
1E-09      |27923.292694789783        |500
1E-11      |27923.292694789783        |500
```

Рисунок 4.4. Результаты матрицы номер 4

```
Simple-iteration method
ε           |||x - x_ε||              |Amount of iterations
0.001       |0.3200677976874432       |500
1E-05       |0.3200677976874432       |500
1E-07       |0.3200677976874432       |500
1E-09       |0.3200677976874432       |500
1E-11       |0.3200677976874432       |500

Seidel method
ε           |||x - x_ε||              |Amount of iterations
0.001       |0.18380400836254301      |311
1E-05       |0.06624046619744794      |500
1E-07       |0.06624046619744794      |500
1E-09       |0.06624046619744794      |500
1E-11       |0.06624046619744794      |500
```

Рисунок 4.5. Результаты матрицы номер 5

```
Simple-iteration method
ε           |||x - x_ε||              |Amount of iterations
0.001       |5.77059988683735E+205    |500
1E-05       |5.77059988683735E+205    |500
1E-07       |5.77059988683735E+205    |500
1E-09       |5.77059988683735E+205    |500
1E-11       |5.77059988683735E+205    |500

Seidel method
ε           |||x - x_ε||              |Amount of iterations
0.001       |15224.687552807854       |500
1E-05       |15224.687552807854       |500
1E-07       |15224.687552807854       |500
1E-09       |15224.687552807854       |500
1E-11       |15224.687552807854       |500
```

Рисунок 4.6. Результаты матрицы Гильберта порядка 4

```
Simple-iteration method
ε           |||x - x_ε||              |Amount of iterations
0.001       |3.315387314501189E+268   |500
1E-05       |3.315387314501189E+268   |500
1E-07       |3.315387314501189E+268   |500
1E-09       |3.315387314501189E+268   |500
1E-11       |3.315387314501189E+268   |500

Seidel method
ε           |||x - x_ε||              |Amount of iterations
0.001       |344713.16115726717       |500
1E-05       |344713.16115726717       |500
1E-07       |344713.16115726717       |500
1E-09       |344713.16115726717       |500
1E-11       |344713.16115726717       |500
```

Рисунок 4.7. Результаты матрицы Гильберта порядка 5

```
Simple-iteration method
ε          |||x - x_ε||              |Amount of iterations
0.001      |NaN                      |487
1E-05      |NaN                      |487
1E-07      |NaN                      |487
1E-09      |NaN                      |487
1E-11      |NaN                      |487

Seidel method
ε          |||x - x_ε||              |Amount of iterations
0.001      |23156658.16103563        |500
1E-05      |23156658.16103563        |500
1E-07      |23156658.16103563        |500
1E-09      |23156658.16103563        |500
1E-11      |23156658.16103563        |500
```

Рисунок 4.8. Результаты матрицы Гильберта порядка 6

4.3. Анализ

В результате экспериментов была выявлена зависимость между точностью и числом итераций: чем лучшая точность необходима, тем большее количество итераций требуется.

Кроме того, при сравнении результатов, полученных с помощью метода простой итерации и метода Зейделя, было замечено, что последний требует меньшее количество итераций для достижения одинаковой точности.