Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Информационно-аналитические системы

Ким Юния Александровна
18.Б07-мм

Вычислительный практикум

Отчёт по заданию №7

Преподаватель:
Евдокимова Т.О.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1. Ссылка на код

https://github.com/yuniyakim/MethodsOfComputation/pull/17

2. Постановка задачи

Задача – реализация метода сеток решения краевой задачи ОДУ.

3. Теоретическая часть

Исходная задача – краевая задача $k(x)u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b$. Нужно найти $u = u(x)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$\begin{cases} \alpha_0 u_0(a) + \alpha_1 u_0'(a) = A \\ \beta_0 u_n(b) + \beta_1 u_n'(b) = B \end{cases}$$

Разбиваем $[a, b]$ на равные части с шагом $h : x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}$. Заменяем производные в изначальной краевой задаче разностными производными:

- $u'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$;
- $u' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$.

Получаем $(2k_i - hp_i)u_{i-1} + (-4k_i + 2h^2 q_i)u_i + (2k_i + hp_i)u_{i+1} = 2h^2 f_i$, где k_i, p_i, q_i, f_i соответственно являются значениями функций $k(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ в точках x_i. Аналогично производим замену в краевых условиях и получим систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} (h\alpha_0 - \alpha_1)u_0 + \alpha_1 u_1 = hA \\ (2k_i - hp_i)u_{i-1} + (-4k_i + 2h^2 q_i)u_i + (2k_i + hp_i)u_{i+1} = 2h^2 f_i \\ -\beta_1 u_{n-1} + (h\beta_0 + \beta_1)u_n = hB \end{cases}$$

Матрица этой системы трехдиагональна. Перепишем её в более удобном виде.

$$\begin{cases} B_0 u_0 + C_0 u_1 = D_0 \\ A_i u_{i-1} + B_i u_i + C_i u_{i+1} = D_i \\ A_n u_{n-1} + B_n u_n = D_n \end{cases}$$

Здесь $i = 1, 2, \ldots, n-1$.
Решаем эту систему с помощью метода прогонки. Решение системы ищем в виде
$u_i = s_i u_{i+1} + t_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
Прямым ходом находим $s_0 = -\frac{C_0}{B_0}, \quad t_0 = \frac{D_0}{B_0}, s_i = -\frac{C_i}{A_i s_{i-1} + B_i}, \quad t_i = \frac{D_i - A_i t_{i-1}}{A_i s_{i-1} + B_i}$,
$i = 1, 2, \ldots, n$.
Так как $C_n = 0 \Rightarrow s_n = 0 \Rightarrow u_n = t_n$.
Обратным ходом находим $u_{n-1}, \ldots, u_0$.
Для контроля точности используем метод сгущения сетки. Строим сетки с шагами $h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \ldots$. Находим решение для каждой сетки и высчитываем погрешность по формуле $\Delta(x) = \frac{v_2(x) - v_1(x)}{r^p - 1}$, где $v_2(x)$ — более мелкая сетка, r — коэффициент сгущения сетки, p — теоретический порядок точности численного метода (в нашем случае равен 1).
Далее уточняем решение с помощью полученной погрешности $\widetilde{v_2}(x) = v_2(x) + \Delta(x)$. Погрешности нечётных узлов вычисляются с помощью среднего $\Delta(x_{2n+1}) = \frac{\Delta(x_{2n}) + \Delta(x_{2n+2})}{2}$.

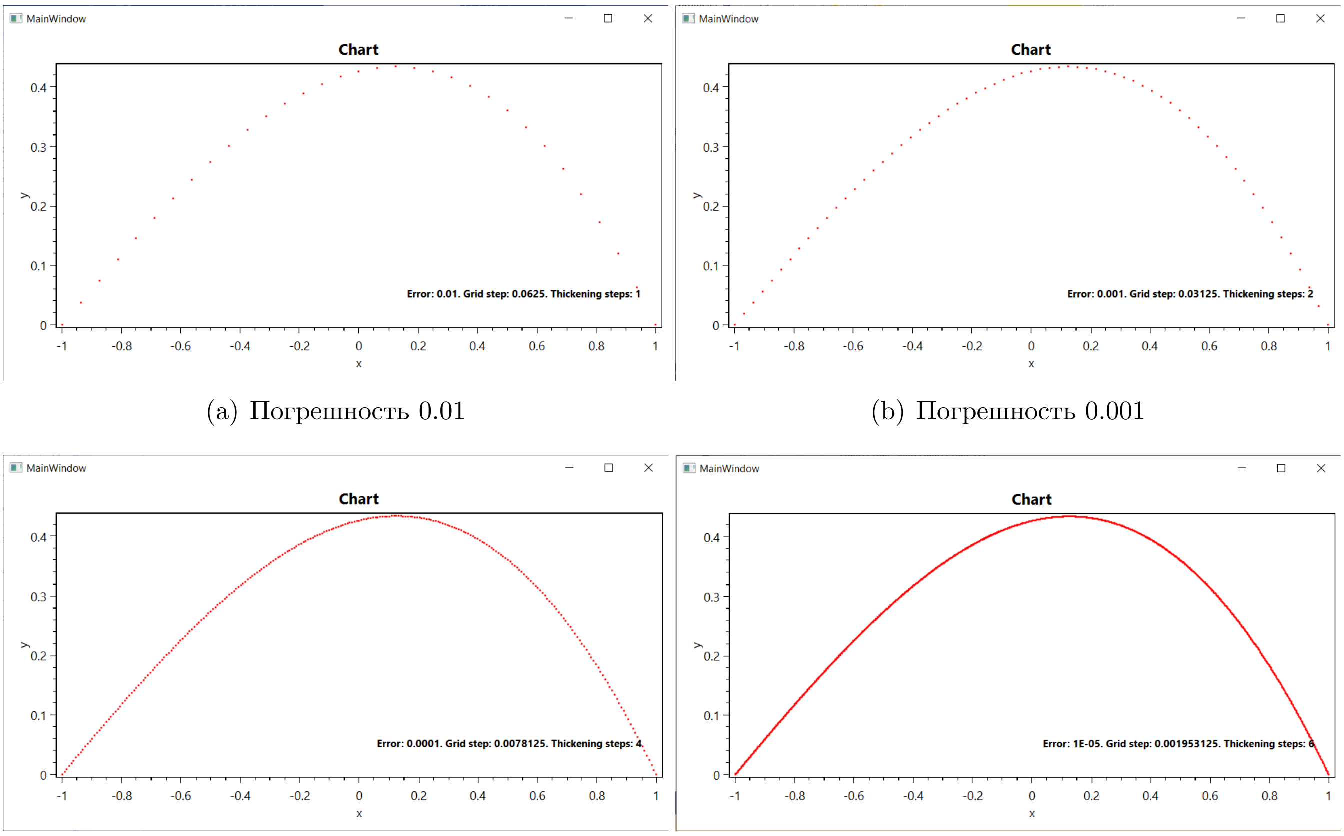
4. Численный эксперимент

4.1. Описание

Для численного эксперимента брались следующие краевые задачи.

1. $-\frac{4-x}{5-2x}u''(x) - \frac{1-x}{2}u'(x) + \frac{1}{2}\ln(3+x)u(x) = 1 + \frac{x}{3},\ u(-1) = u(1) = 0$
2. $-\frac{6+x}{7+3x}u''(x) - (1 - \frac{x}{2})u'(x) + (1 + \frac{1}{2}\cos(x))u(x) = 1 - \frac{x}{3},\ u'(-1) - 2u(-1) = u'(1) = 0$
3. $-\frac{5-x}{7-3x}u''(x) - \frac{1-x}{2}u'(x) + (1 + \frac{1}{2}\sin(x))u(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2},\ u'(-1) = 2u'(1) + 3u(1) = 0$

4.2. Результаты



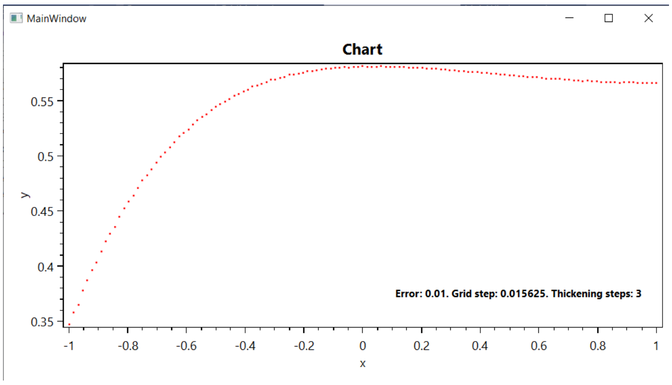
(a) Погрешность 0.01

(b) Погрешность 0.001

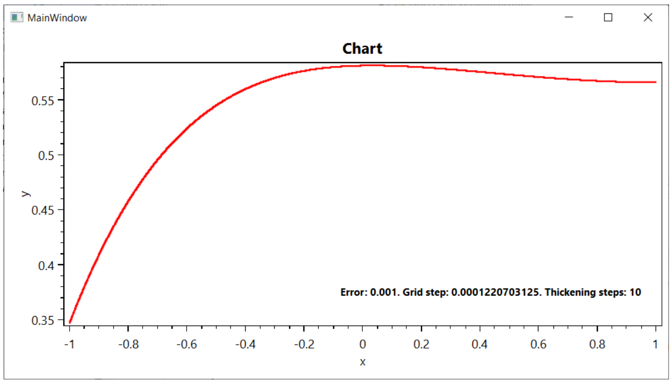
(c) Погрешность 0.0001

(d) Погрешность 0.00001

Рисунок 4.1. Приближенное решение краевой задачи номер 1

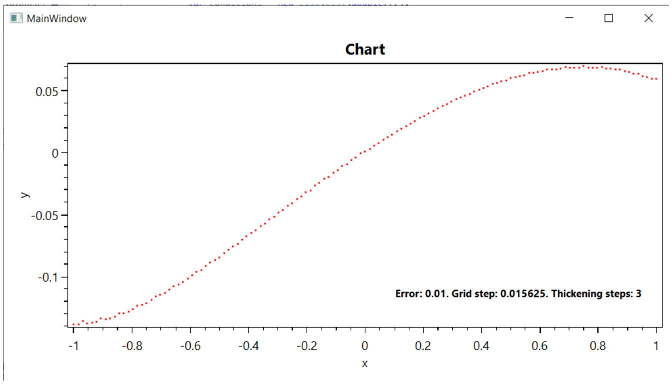


(a) Погрешность 0.01

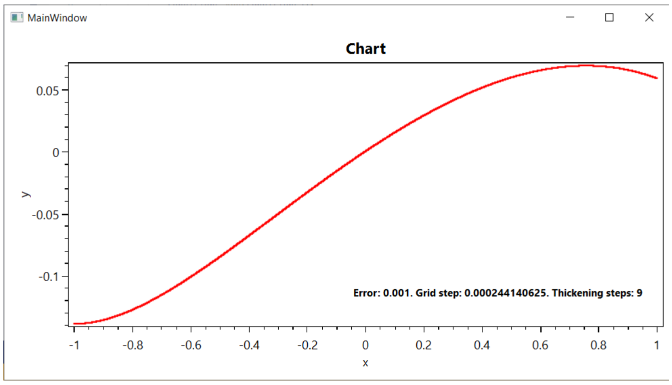


(b) Погрешность 0.001

Рисунок 4.2. Приближенное решение краевой задачи номер 2



(a) Погрешность 0.01



(b) Погрешность 0.001

Рисунок 4.3. Приближенное решение краевой задачи номер 3