

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Информационно-аналитические системы

Ким Юния Александровна
18.Б07-мм

Вычислительный практикум

Отчёт по заданию №1

Преподаватель:
Евдокимова Т.О.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1. Ссылка на код	3
2. Постановка задачи	3
3. Теоретическая часть	3
4. Численный эксперимент	3
4.1. Описание	3
4.2. Результаты	3
4.3. Анализ	7

1. Ссылка на код

<https://github.com/yuniyakim/MethodsOfComputation/pull/11>

2. Постановка задачи

Задача – определение влияния ошибок округления на решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), а также выявление зависимости (при наличии) между погрешностью решения СЛАУ и числами обусловленности матрицы левой части.

3. Теоретическая часть

Исходная задача – решение СЛАУ вида $Ax = b$.

Для матрицы A правой части вычисляются так называемые качественные критерии или числа обусловленности, которые могут показать насколько сильно изменения матриц в уравнении повлияют на изменение решения.

- Спектральный критерий: $cond_s = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$; $cond_s > 10^4$ – признак плохой обусловленности.
- Объёмный критерий: $cond_v = \prod_{n=1}^N \sqrt{\sum_{m=1}^N a_{nm}^2} / \det A$.
- Угловой критерий: $cond_a = \max_n (|a_n| \cdot |c_n|)$, где a_n – n -я строка матрицы A , c_m – m -й вектор-столбец матрицы $C = A^{-1}$.

4. Численный эксперимент

4.1. Описание

Для численного эксперимента берутся различные матрицы левой части (как хорошо обусловленные, так и плохо обусловленные), вычисляются их числа обусловленности, затем в соответствующей СЛАУ варьируются матрицы левой и правой части и вычисляются новые решения. Предполагается, что при плохой обусловленности матрицы левой части (числа обусловленности больше 10^4) после возмущения решение СЛАУ сильно меняется.

4.2. Результаты

Для проверки корректности программы проводились следующие тесты.

1. Объёмный и угловой критерии диагональной матрицы равны 1.
2. Объёмный и угловой критерии равны при размерности матрицы меньше или равной 2.
3. Числа обусловленности плохо обусловленной матрицы больше 10^4 .
4. Числа обусловленности матрицы Гильберта порядка 6 больше 10^4 .

Кроме того, вычислялись числа обусловленности (в частности, спектральный критерий) и возмущения решения для СЛАУ со следующими матрицами левой части.

$$1. \begin{pmatrix} -400.6 & 199.8 \\ 1198.8 & -600.4 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} -401.98 & 200.34 \\ 1202.04 & -602.32 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} -400.94 & 200.2 \\ 1200.12 & -600.96 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} -41 & 127 \\ 113 & -60 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} -402.9 & 200.7 \\ 1204.2 & -603.6 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}$$

7. Матрица Гильберта порядка 7.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/7 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots & 1/8 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & 1/9 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1/7 & 1/8 & 1/9 & \dots & 1/13 \end{pmatrix}$$

Первые пять матриц являются хорошо обусловленными, поэтому при варьировании матриц в соответствующих СЛАУ решения менялись не сильно. Результаты представлены на рис. 4.1, где ось OX обозначает величину числа обусловленности (спектрального критерия), а ось OY – модуль разности между точным решением и решением соответствующей проварьированной СЛАУ. Точки красного цвета соответствуют решению, возмущённому на величину 10^{-1} , зелёного – на величину 10^{-2} , чёрного – на 10^{-3} .

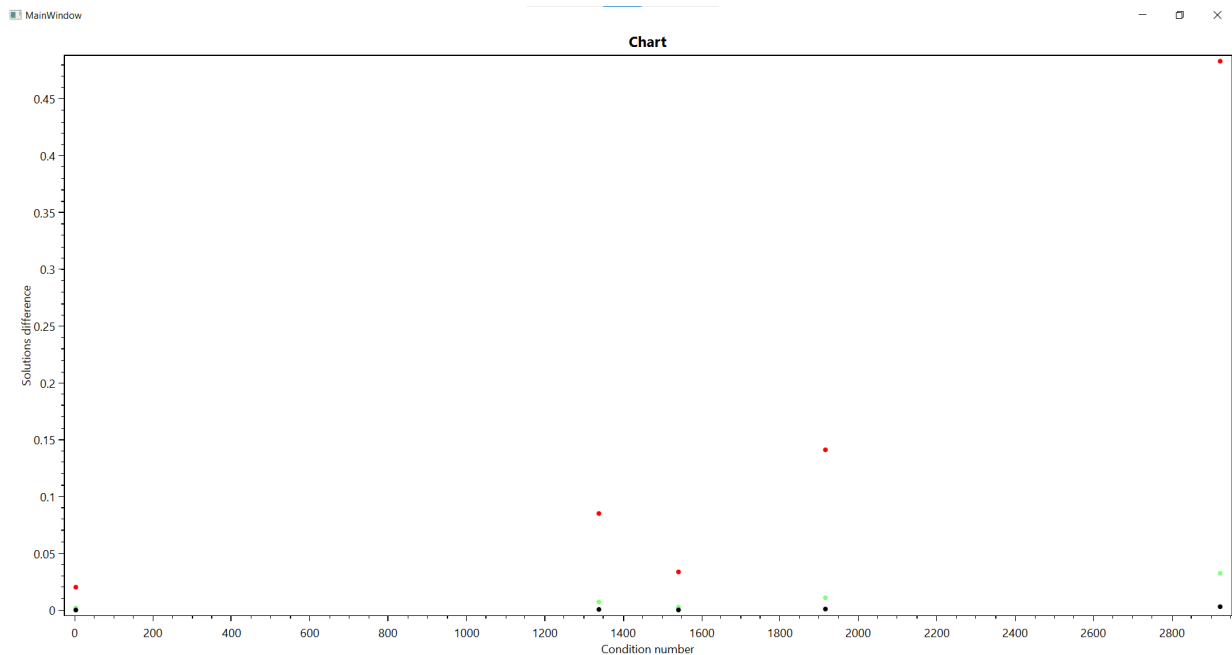


Рисунок 4.1. Результаты варьирования СЛАУ с хорошо обусловленной матрицей

Для сравнения к первым пяти хорошо обусловленным матрицам прибавили одну плохо обусловленную под номером 6. Результаты можно увидеть на рис. 4.2: разница между решениями для СЛАУ с плохо обусловленной матрицей левой части велика и в разы превосходит аналогичную для хорошо обусловленных матриц.

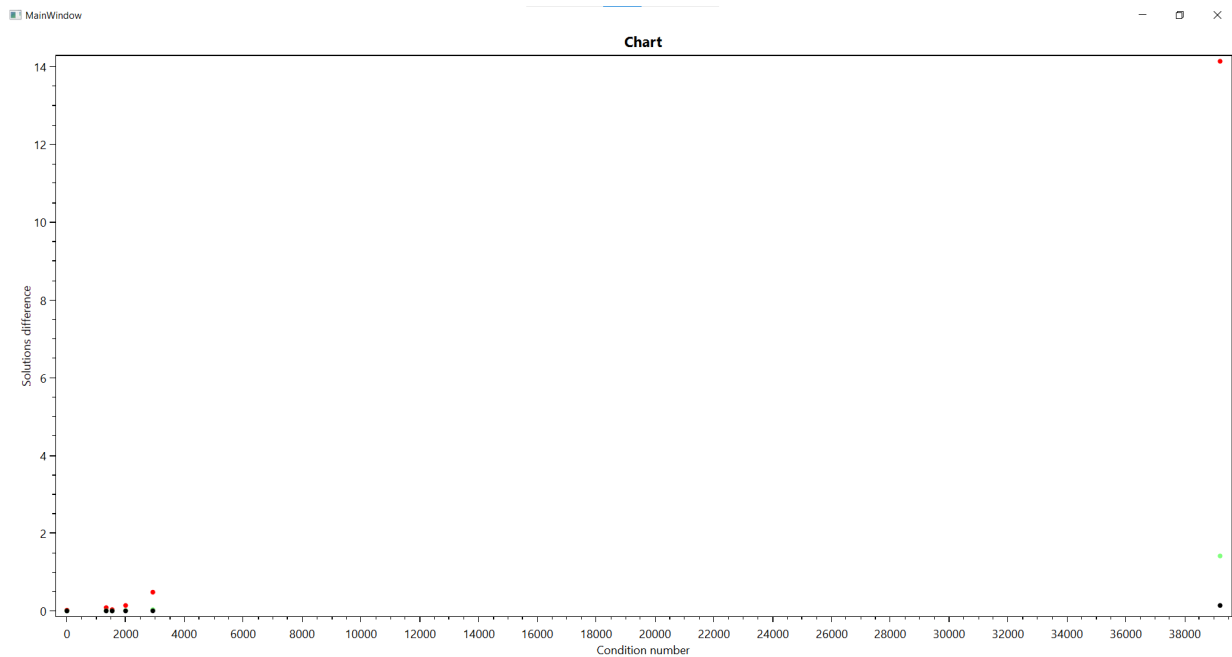


Рисунок 4.2. Результаты варьирования СЛАУ с хорошо обусловленной матрицей в сравнении с аналогичными результатами для плохо обусловленной матрицы

Также была рассмотрена СЛАУ с матрицей Гильберта порядка 7, соответствующий график представлен на рис 4.3. Можно увидеть, что для данной задачи число обусловленности очень велико, как и разница между решениями.

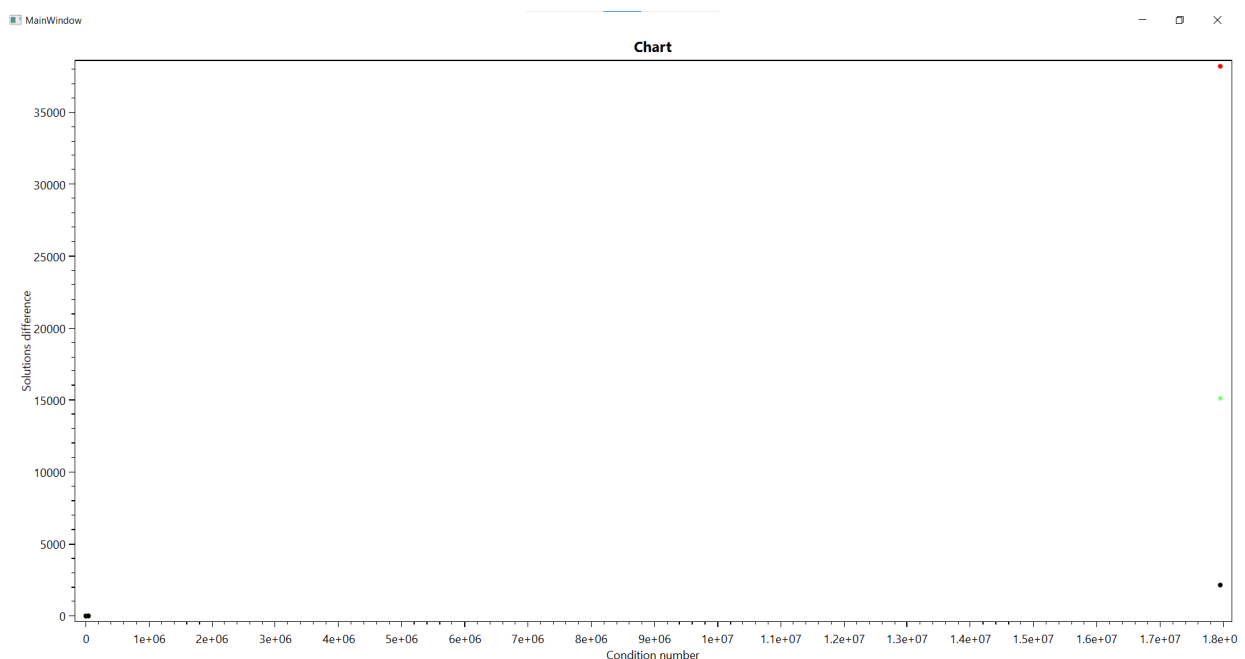


Рисунок 4.3. Результаты варьирования СЛАУ с матрицей Гильберта порядка 7

Рис. 4.4 демонстрирует результаты работы программы для СЛАУ с хорошо обусловленной матрицей. Наглядно показаны числа обусловленности, а также выведены модули разницы между точным решением и решением проварьированной СЛАУ.

```

Microsoft Visual Studio Debug Console

Left matrix is
-41, 127,
113, -60,

Right matrix is
-787
1589

Exact solution is
13
-2

Spectral criterion is 2.8743587587250863.
Volumetric criterion is 1.4359015191230662.
Angle criterion is 1.4359015191230662.

|x - x~| is 0.002036669923106954 when variation is 0.01.
|x - x~| is 2.0372534000798793E-06 when variation is 0.00001.
|x - x~| is 2.037254137032016E-09 when variation is 0.00000001.

```

Рисунок 4.4. Результаты работы программы для СЛАУ с хорошо обусловленной матрицей

На рис. 4.5 показан результат работы программы для СЛАУ с матрицей Гильберта порядка 7.

```

Microsoft Visual Studio Debug Console

Left matrix is
1, 0.5, 0.3333333333333333, 0.25, 0.2, 0.1666666666666666, 0.14285714285714285,
0.5, 0.3333333333333333, 0.25, 0.2, 0.1666666666666666, 0.14285714285714285, 0.125,
0.3333333333333333, 0.25, 0.2, 0.1666666666666666, 0.14285714285714285, 0.125, 0.1111111111111111,
0.25, 0.2, 0.1666666666666666, 0.14285714285714285, 0.125, 0.1111111111111111, 0.1,
0.2, 0.1666666666666666, 0.14285714285714285, 0.125, 0.1111111111111111, 0.1, 0.09090909090909091,
0.1666666666666666, 0.14285714285714285, 0.125, 0.1111111111111111, 0.1, 0.09090909090909091, 0.08333333333333333,
0.14285714285714285, 0.125, 0.1111111111111111, 0.1, 0.09090909090909091, 0.08333333333333333, 0.07692307692307693,

Right matrix is
13.56904761904762
9.769047619047619
7.801984126984127
6.541666666666667
5.650468975468976
4.981673881673881
4.459004884004884

Exact solution is
2
9
4
7
11
9
2

Spectral criterion is 481747254.0926319.
Volumetric criterion is 1.4210002977950198E+22.
Angle criterion is 71621856.85407415.

|x - x~| is 15128.440576137842 when variation is 0.01.
|x - x~| is 22.530336292430437 when variation is 0.00001.
|x - x~| is 0.02254115445385251 when variation is 0.00000001.

```

Рисунок 4.5. Результаты работы программы для СЛАУ с матрицей Гильберта порядка 7

4.3. Анализ

В результате экспериментов была выявлена зависимость между величиной чисел обусловленности матрицы и изменением решения при возмущении матриц СЛАУ: при достаточно больших числах обусловленности (больше 10^4) решение также меняется достаточно сильно, при малых числах обусловленности изменение решения не велико.