Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Информационно-аналитические системы

Ким Юния Александровна
18.Б07-мм

Вычислительный практикум

Отчёт по заданию №8

Преподаватель:
Евдокимова Т.О.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1. Ссылка на код

https://github.com/yuniyakim/MethodsOfComputation/pull/18

2. Постановка задачи

Задача – реализация метода Галёркина решения краевой задачи ОДУ.

3. Теоретическая часть

Исходная задача – краевая задача вида $L[u] = k(x)u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b$ с краевыми условиями первого рода $u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b$.

Основа метода Галёркина – проекционная постановка.

$\Phi = \{$кусочно-дифференцируемые $\varphi : \varphi(a) = \varphi(b) = 0\}$.

Умножим наше уравнение на произвольную функцию $\varphi \in \Phi$ и проинтегрируем по x от a до b, получим интегральное тождество $\int\limits_a^b L[u]\varphi dx = \int\limits_a^b f\varphi dx$.

Если функция u – решение дифференциального уравнения, то она удовлетворяет интегральному тождеству. И наоборот, если интегральное тождество выполняется для любой φ, то $L[u] = f$.

Сформулируем нашу задачу в проекционной постановке: необходимо найти функцию u, которая удовлетворяет интегральному тождеству для произвольной $\varphi \in \Phi$ и для которой выполнены краевые условия.

Решение ищем в виде $u = \sum\limits_{i=0}^{N} \alpha_i\varphi_i$, где φ_i – некоторые базисные функции.

Подставим общий вид решения в наше уравнение $k(x)\sum\limits_{i=0}^{N} \alpha_i\varphi_i'' + p(x)\sum\limits_{i=0}^{N} \alpha_i\varphi_i' + q(x)\sum\limits_{i=0}^{N} \alpha_i\varphi_i - f = 0$,
$\alpha_0\big(k(x)\varphi_0'' + p(x)\varphi_0' + q(x)\varphi_0\big) + \alpha_1\big(k(x)\varphi_1'' + p(x)\varphi_1' + q(x)\varphi_1\big) + \ldots + \alpha_N\big(k(x)\varphi_N'' + p(x)\varphi_N' + q(x)\varphi_N\big) - f = 0$.

Обозначим $k(x)\varphi_i'' + p(x)\varphi_i' + q(x)\varphi_i = A_i, \quad i = 0, \ldots, N$.

Строим линейную алгебраическую систему. Для этого умножаем уравнение на φ_i и интегрируем по x от a до b.

$$\begin{cases} \alpha_0 \int\limits_a^b A_0\varphi_0 dx + \alpha_1 \int\limits_a^b A_1\varphi_0 dx + \ldots + \alpha_N \int\limits_a^b A_N\varphi_0 dx = \int\limits_a^b f(x)\varphi_0 dx \\ \alpha_0 \int\limits_a^b A_0\varphi_1 dx + \alpha_1 \int\limits_a^b A_1\varphi_1 dx + \ldots + \alpha_N \int\limits_a^b A_N\varphi_1 dx = \int\limits_a^b f(x)\varphi_1 dx \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_0 \int\limits_a^b A_0\varphi_N dx + \alpha_1 \int\limits_a^b A_1\varphi_N dx + \ldots + \alpha_N \int\limits_a^b A_N\varphi_N dx = \int\limits_a^b f(x)\varphi_N dx \end{cases}$$

Решаем СЛАУ и находим коэффициенты α_i.

Для наших тестов возьмём базисные функции вида $(1 - x^2)P_i^{(1,1)}(x)$, где

- $P_0^{(k,k)}(x) = 1$,

- $P_1^{(k,k)}(x) = (k+1)x,$
- $P_{n+2}^{(k,k)}(x) = \frac{(n+k+2)(2n+2k+3)x \cdot P_{n+1}^{(k,k)}(x) - (n+k+2)(n+k+1)P_n^{(k,k)}(x)}{(n+2k+2)(n+2)}.$

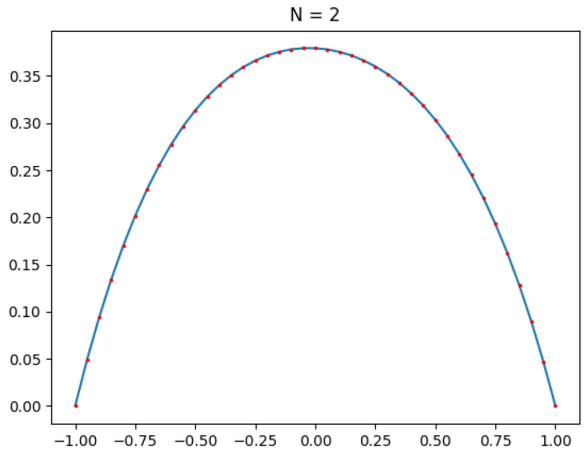
4. Численный эксперимент

4.1. Описание

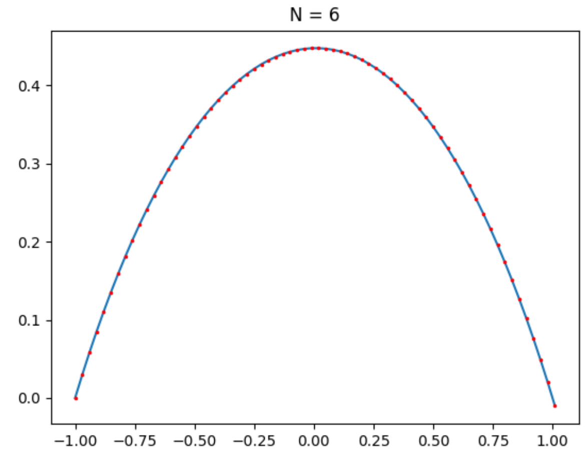
Для численного эксперимента брались следующие краевые задачи.

1. $-\frac{4+x}{5+2x}u''(x) + (\frac{x}{2} - 1)u'(x) + (1 + e^{x/2})u(x) = 2 + x,\ u'(-1) = u'(1) + 2u(1) = 0$
2. $-\frac{4-x}{5-2x}u''(x) - \frac{1-x}{2}u'(x) + \frac{1}{2}\ln(3+x)u(x) = 1 + \frac{x}{3},\ u(-1) = u(1) = 0$
3. $-\frac{6+x}{7+3x}u''(x) - (1 - \frac{x}{2})u'(x) + (1 + \frac{1}{2}\cos(x))u(x) = 1 - \frac{x}{3},\ u'(-1) - 2u(-1) = u'(1) = 0$

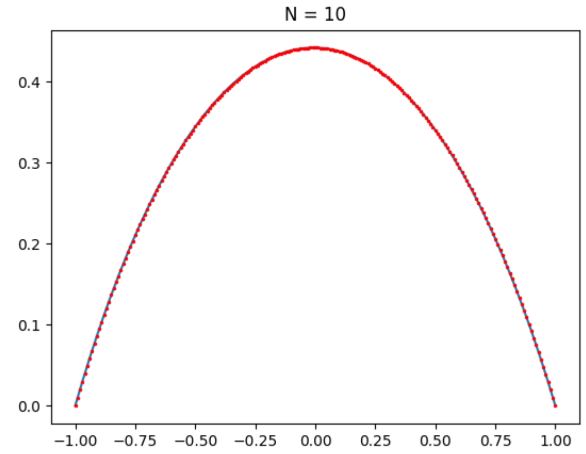
4.2. Результаты



(a) N = 2

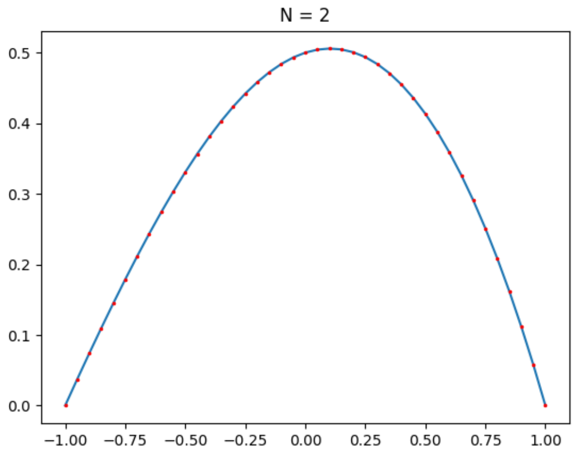


(b) N = 6

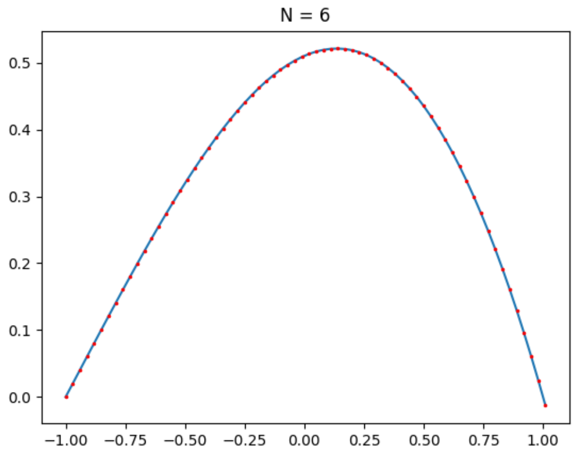


(c) N = 10

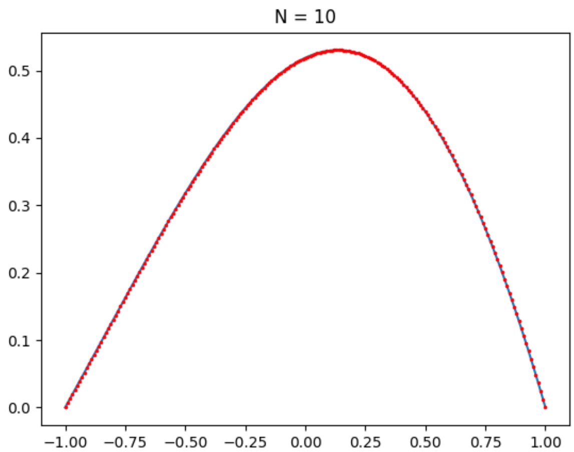
Рисунок 4.1. Приближенное решение краевой задачи номер 1



(a) N = 2

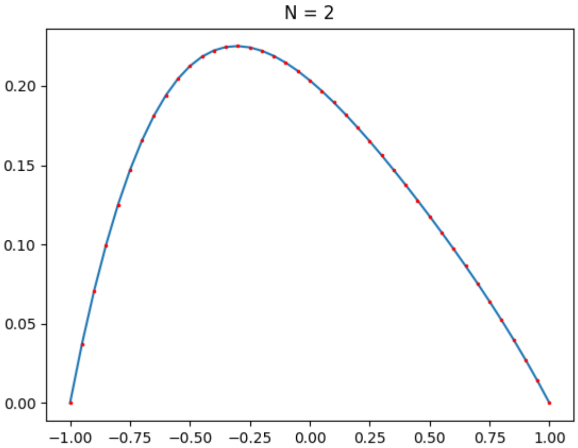


(b) N = 6

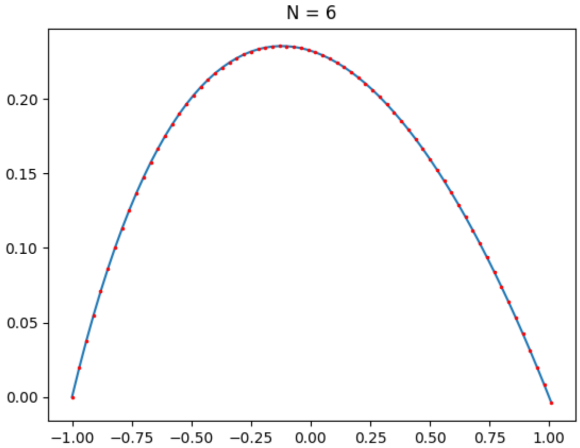


(c) N = 10

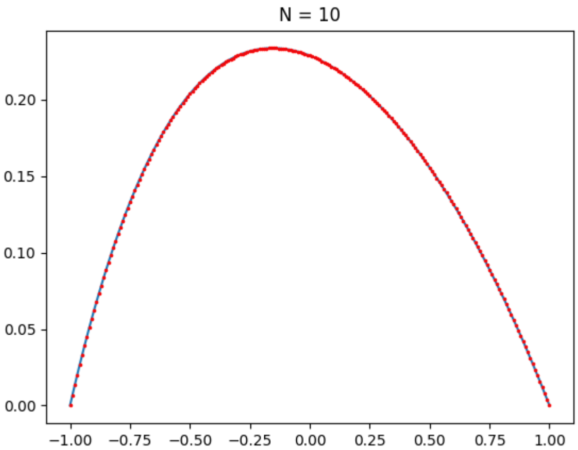
Рисунок 4.2. Приближенное решение краевой задачи номер 2



(a) N = 2



(b) N = 6



(c) N = 10

Рисунок 4.3. Приближенное решение краевой задачи номер 3