

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Информационно-аналитические системы

Ким Юния Александровна
18.Б07-мм

Вычислительный практикум

Отчёт по заданию №6

Преподаватель:
Евдокимова Т.О.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1. Ссылка на код	3
2. Постановка задачи	3
3. Теоретическая часть	3
4. Численный эксперимент	3
4.1. Описание	3
4.2. Результаты	4
4.3. Анализ	7

1. Ссылка на код

<https://github.com/yuniyakim/MethodsOfComputation/pull/16>

2. Постановка задачи

Задача – реализация метода нахождения всех собственных чисел матрицы под названием метод Якоби с использованием двух различных стратегий выбора обнуляемого элемента, а также сравнение количества итераций и точности и проверка принадлежности найденных значений областям из теоремы Гершгорина.

3. Теоретическая часть

Исходная задача – нахождение всех собственных чисел матрицы A .

Существует матрица вращения Якоби $H^{(k)}$, у которой только следующие элементы отличны от нуля: $h_{ii} = \cos \phi^{(k)}$, $h_{ij} = -\sin \phi^{(k)}$, $h_{ji} = \sin \phi^{(k)}$, $h_{jj} = \cos \phi^{(k)}$, $h_{kk} = 1$ для всех

$k = 1, \dots, n, k \neq i, j$.

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \cos \phi^{(k)} & 0 & \dots & 0 & -\sin \phi^{(k)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sin \phi^{(k)} & 0 & \dots & 0 & \cos \phi^{(k)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Итерационный процесс метода Якоби: $A^{(k+1)} = (H^{(k)})^T * A^{(k)} * H^{(k)}$, $A^{(0)} = A$.

На k -й итерации процесса выбираем элемент $a_{ij}^{(k)}$ в зависимости от того, какая стратегия используется. Для выбранного элемента существует матрица $H^{(k)}$, которая приводит к нулю элемент $a_{ij}^{(k+1)}$ матрицы $A^{(k+1)}$.

$$\phi^{(k)} = \frac{1}{2} \arctg \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}.$$

Процесс продолжаем, пока не будет достигнута желаемая точность $\epsilon : a_{ij}^{(k)} < \epsilon$.

Таким образом, все собственные числа матрицы A лежат на диагонали матрицы $A^{(k)}$.

4. Численный эксперимент

4.1. Описание

Для численного эксперимента брались следующие матрицы.

$$1. \begin{pmatrix} -0.81417 & -0.01937 & 0.41372 \\ -0.01937 & 0.54414 & 0.00590 \\ 0.41372 & 0.00590 & -0.81445 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} -1.51898 & -0.19907 & 0.95855 \\ -0.19907 & 1.17742 & 0.06992 \\ 0.95855 & 0.06992 & -1.57151 \end{pmatrix}$$

3. Матрица Гильберта порядка 4.

4. Матрица Гильберта порядка 7.

5. Матрица Гильберта порядка 10.

6. Матрица Гильберта порядка 15.

Точность ϵ варьировалась от 10^{-2} до 10^{-5} .

4.2. Результаты

```

Microsoft Visual Studio Debug Console

Max module value strategy
ε      ||lambda - lambda_ε|      Amount of iterations
0.01   |2.0087908414507183         |2
0.001  |2.008836026744114         |3
0.0001 |2.008836026744114         |3
1E-05  |2.0088360313355778         |4

Zeroing in order strategy
ε      ||lambda - lambda_ε|      Amount of iterations
0.01   |2.008836031335069         |2
0.001  |2.008836031335069         |2
0.0001 |2.008836031335069         |2
1E-05  |2.008836031335069         |2

Eigenvalue belongs to Gershgorin circle: True.

```

Рисунок 4.1. Результаты матрицы номер 1

```

Microsoft Visual Studio Debug Console

Max module value strategy
ε      ||lambda - lambda_ε|      Amount of iterations
0.01   |4.112621189918239      |3
0.001  |4.112626778899073      |4
0.0001 |4.112626794446494      |5
1E-05  |4.112626794446494      |5

Zeroing in order strategy
ε      ||lambda - lambda_ε|      Amount of iterations
0.01   |4.112626741856305      |2
0.001  |4.112626741856305      |2
0.0001 |4.112626794446591      |4
1E-05  |4.112626794446591      |4

Eigenvalue belongs to Gershgorin circle: True.

```

Рисунок 4.2. Результаты матрицы номер 2

```

Microsoft Visual Studio Debug Console

Max module value strategy
ε      ||lambda - lambda_ε|      Amount of iterations
0.01   |2.5005090375427392      |8
0.001  |2.5005157099483815      |11
0.0001 |2.5005157099483815      |11
1E-05  |2.5005157107221514      |15

Zeroing in order strategy
ε      ||lambda - lambda_ε|      Amount of iterations
0.01   |2.5004632976896444      |7
0.001  |2.50047463225907      |10
0.0001 |2.50047463225907      |10
1E-05  |2.500474633435846      |11

Eigenvalue belongs to Gershgorin circle: True.

```

Рисунок 4.3. Результаты матрицы Гильберта порядка 4

```
Microsoft Visual Studio Debug Console

Max module value strategy
ε      ||lambda - lambda_ε|      Amount of iterations
0.01   |3.9556989302470957      |17
0.001  |3.9557816922089084      |28
0.0001 |3.9557818100984314      |36
1E-05  |3.955781813910928      |43

Zeroing in order strategy
ε      ||lambda - lambda_ε|      Amount of iterations
0.01   |3.955231956297036      |13
0.001  |3.9552443947973543      |15
0.0001 |3.9552444020669175      |16
1E-05  |3.955313952219025      |38

Eigenvalue belongs to Gershgorin circle: True.
```

Рисунок 4.4. Результаты матрицы Гильберта порядка 7

```
Microsoft Visual Studio Debug Console

Max module value strategy
ε      ||lambda - lambda_ε|      Amount of iterations
0.01   |5.138455260832401      |24
0.001  |5.138651391497853      |45
0.0001 |5.138652326252294      |64
1E-05  |5.138652329738786      |76

Zeroing in order strategy
ε      ||lambda - lambda_ε|      Amount of iterations
0.01   |5.137493095490976      |19
0.001  |5.137510266010043      |21
0.0001 |5.137510273415583      |22
1E-05  |5.137510273500312      |24

Eigenvalue belongs to Gershgorin circle: True.
```

Рисунок 4.5. Результаты матрицы Гильберта порядка 10

```
Microsoft Visual Studio Debug Console

Max module value strategy
ε      ||lambda - lambda_ε|      Amount of iterations
0.01   |6.787992136329514      |40
0.001  |6.788282875390815      |72
0.0001 |6.788284029432708      |104
1E-05  |6.788284048622885      |137

Zeroing in order strategy
ε      ||lambda - lambda_ε|      Amount of iterations
0.01   |6.786279751736791      |30
0.001  |6.786281039007682      |31
0.0001 |6.786281047460615      |32
1E-05  |6.786281047460615      |32

Eigenvalue belongs to Gershgorin circle: True.
```

Рисунок 4.6. Результаты матрицы Гильберта порядка 15

4.3. Анализ

В результате экспериментов была выявлена зависимость между точностью и числом итераций: чем лучшая точность необходима, тем большее количество итераций требуется.

Кроме того, при сравнении результатов, полученных с помощью стратегии с выбором наибольшего по модулю недиагонального элемента и стратегии с выбором по порядку, было замечено, что последняя требует меньшее количество итераций для достижения одинаковой точности.

Также была проведена проверка принадлежности найденных значений собственных чисел областям из теоремы Гершгорина.