【算法】排序算法之堆排序

develop...

前几回，在前面已经对冒泡排序、直接插入排序、希尔排序、选择排序、快速排序、归并排序做了说明分析。本回，将对堆排序进行相关说明分析。

一、排序算法系列目录说明

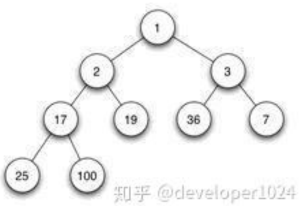
- 冒泡排序（Bubble Sort）
- 插入排序（Insertion Sort）
- 希尔排序（Shell Sort）
- 选择排序（Selection Sort）
- 快速排序（Quick Sort）
- 归并排序（Merge Sort）
- 堆排序（Heap Sort）
- 计数排序（Counting Sort）
- 桶排序（Bucket Sort）
- 基数排序（Radix Sort）

二、堆的相关概念

堆一般指的是二叉堆，顾名思义，二叉堆是完全二叉树或者近似完全二叉树

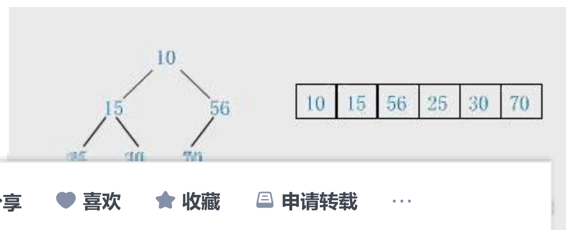
1. 堆的性质

> ① 是一棵完全二叉树
> ② 每个节点的值都大于或等于其子节点的值，为最大堆；反之为最小堆。



2. 堆的存储

一般用数组来表示堆，下标为 i 的结点的父结点下标为(i-1)/2；其左右子结点分别为 (2i + 1)、(2i + 2)



3. 堆的操作

在堆的数据结构中，堆中的最大值总是位于根节点(在优先队列中使用堆的话堆中的最小值位于根节点)。堆中定义以下几种操作：

> ① **最大堆调整（Max_Heapify）**：将堆的末端子节点作调整，使得子节点永远小于父节点
> ② **创建最大堆（Build_Max_Heap）**：将堆所有数据重新排序
> ③ **堆排序（HeapSort）**：移除位在第一个数据的根节点，并做最大堆调整的递归运算

三、堆排序（Heap Sort）

堆排序（Heapsort）是指利用堆这种数据结构所设计的一种排序算法。堆积是一个近似完全二叉树的结构，并同时满足堆积的性质：即子结点的键值或索引总是小于（或者大于）它的父节点。

1. 基本思想

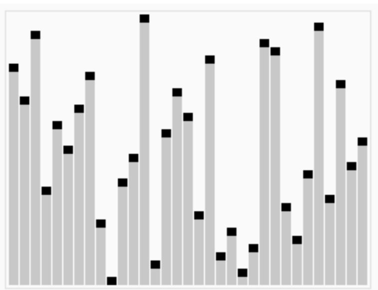
利用大顶堆(小顶堆)堆顶记录的是最大关键字(最小关键字)这一特性，使得每次从无序中选择最大记录(最小记录)变得简单。

> ① 将待排序的序列构造成一个最大堆，此时序列的最大值为根节点
> ② 依次将根节点与待排序序列的最后一个元素交换
> ③ 再维护从根节点到该元素的前一个节点为最大堆，如此往复，最终得到一个递增序列

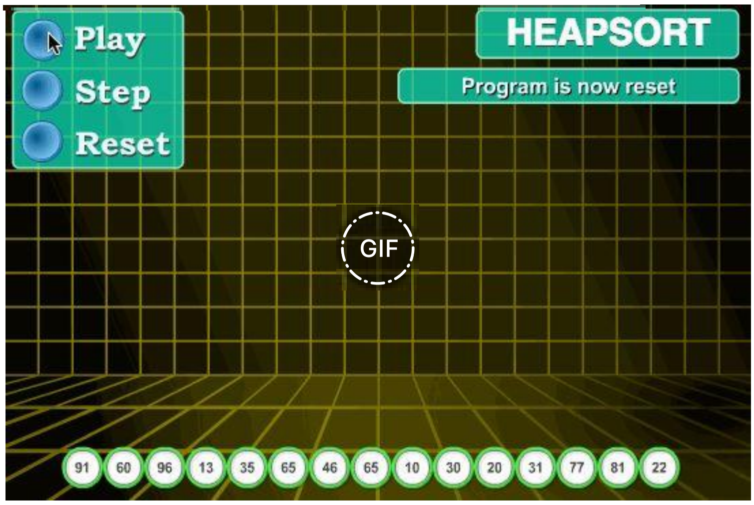
2. 实现逻辑

> ① 先将初始的R[0…n-1]建立成最大堆，此时是无序堆，而堆顶是最大元素。
> ② 再将堆顶R[0]和无序区的最后一个记录R[n-1]交换，由此得到新的无序区R[0…n-2]和有序区R[n-1]，且满足R[0…n-2].keys ≤ R[n-1].key
> ③ 由于交换后新的根R[1]可能违反堆性质，故应将当前无序区R[1..n-1]调整为堆。然后再次将R[1..n-1]中关键字最大的记录R[1]和该区间的最后一个记录R[n-1]交换，由此得到新的无序区R[1..n-2]和有序区R[n-1..n]，且仍满足关系R[1..n-2].keys≤R[n-1..n].keys，同样要将R[1..n-2]调整为堆。
> ④ 直到无序区只有一个元素为止。

3. 动图演示



堆排序算法的演示。首先，将元素进行重排，以匹配堆的条件。图中排序过程之前简单的绘出了堆树的结构。



分步解析说明：

实现堆排序需要解决两个问题：

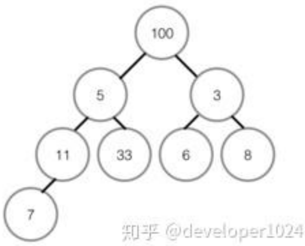
> 1、如何由一个无序序列建成一个堆？
> 2、如何在输出堆顶元素之后，调整剩余元素成为一个新的堆？

假设给定一个组无序数列{100,5,3,11,6,8,7}，带着问题，我们对其进行堆排序操作进行分步操作说明。

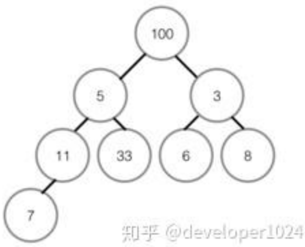
100	5	3	11	33	6	8	7

3.1 创建最大堆

①首先我们将数组我们将数组从上至下按顺序排列，转换成二叉树：一个无序堆。每一个三角关系都是一个堆，上面是父节点，下面两个分叉是子节点，两个子节点俗称左孩子、右孩子；

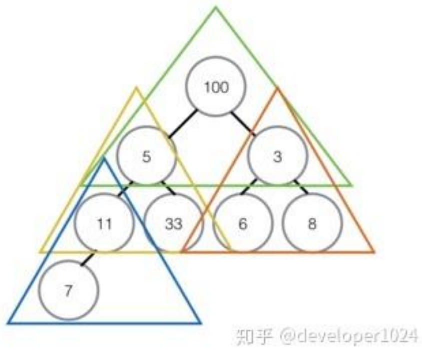


②转换成无序堆之后，我们要努力让这个无序堆变成最大堆(或是最小堆)，即每个堆里都实现父节点的值都大于任何一个子节点的值。



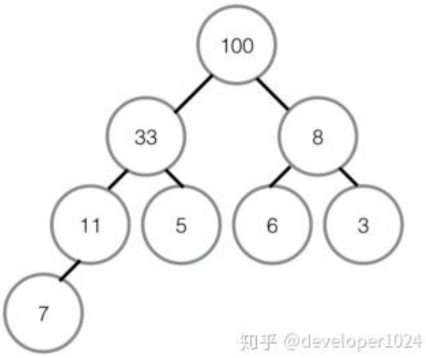
③从最后一个堆开始，即左下角那个没有右孩子的那个堆开始；首先对比左右孩子，由于这个堆没有右孩子，所以只能用左孩子，左孩子的值比父节点的值小所以不需要交换。如果发生交换，要检测子节点是否为其他堆的父节点，如果是，递归进行同样的操作。

④第二次对比红色三角形内的堆，取较大的子节点，右孩子8胜出，和父节点比较，右孩子8大于父节点3，升级做父节点，与3交换位置，3的位置没有子节点，这个堆建成最大堆。



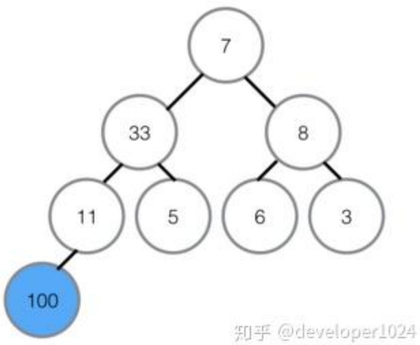
⑤对黄色三角形内堆进行排序，过程和上面一样，最终是右孩子33升为父节点，被交换的右孩子下面也没有子节点，所以直接结束对比。

⑥最顶部绿色的堆，堆顶100比左右孩子都大，所以不用交换，至此最大堆创建完成。

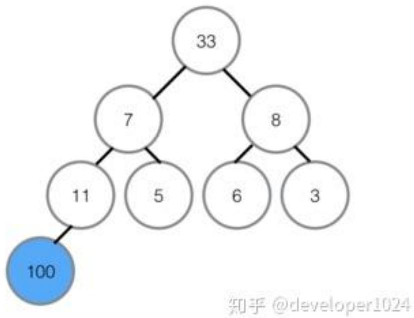


3.2 堆排序（最大堆调整）

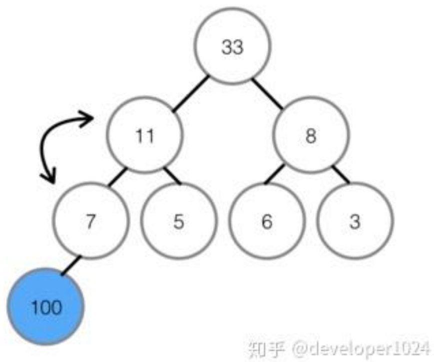
①首先将堆顶元素100交换至最底部7的位置，7升至堆顶，100所在的底部位置即为有序区，有序区不参与之后的任何对比。



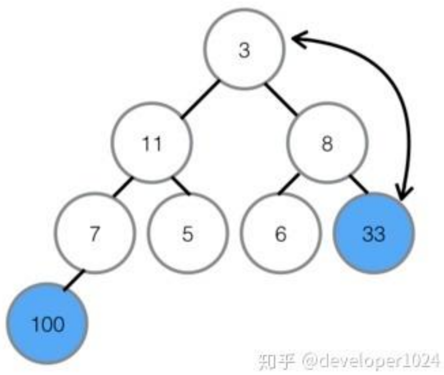
②在7升至顶部之后，对顶部重新做最大堆调整，左孩子33代替7的位置。



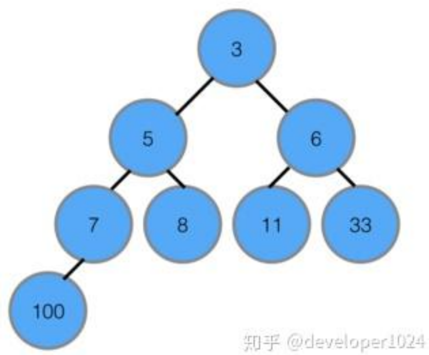
③在7被交换下来后，下面还有子节点，所以需要继续与子节点对比，左孩子11比7大，所以11与7交换位置，交换位置后7下面为有序区，不参与对比，所以本轮结束，无序区再次形成一个最大堆。



④将最大堆堆顶33交换至堆末尾，扩大有序区；



⑤不断建立最大堆，并且扩大有序区，最终全部有序。



4. 复杂度分析

- 最佳时间复杂度：O(nlogn)
- 最差时间复杂度：O(nlogn)
- 稳定性：不稳定

堆排序其实也是一种选择排序，是一种树形选择排序。只不过直接选择排序中，为了从R[1...n]中选择最大记录，需比较n-1次，然后从R[1...n-2]中选择最大记录需比较n-2次。事实上这n-2次比较中有很多已经在前面的n-1次比较中已经做过，而树形选择排序恰好利用树形的特点保存了部分前面的比较结果，因此可以减少比较次数。对于n个关键字序列，最坏情况下每个节点需比较log2(n)次，因此其最坏情况下时间复杂度为nlogn。堆排序为不稳定排序，不适合记录较少的排序。

5. 代码实现

C版本：

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
void swap(int* a, int* b) {
    int temp = *b;
    *b = *a;
    *a = temp;
}
void max_heapify(int arr[], int start, int end) {
    //建立父节点指标和子节点指标
    int dad = start;
    int son = dad * 2 + 1;
    while (son <= end) { //若子节点指标在范围内才做比较
        if (son + 1 <= end && arr[son] < arr[son + 1]) //先比较两个子节点大小，选择最大的
            son++;
        if (arr[dad] > arr[son]) //如果父节点大于子节点代表调整完毕，直接跳出函数
            return;
        else { //否则交换父子内容再继续子节点和孙节点比较
            swap(&arr[dad], &arr[son]);
            dad = son;
            son = dad * 2 + 1;
        }
    }
}
void heap_sort(int arr[], int len) {
    int i;
    //初始化，i从最后一个父节点开始调整
    for (i = len / 2 - 1; i >= 0; i--)
        max_heapify(arr, i, len - 1);
    //先将第一个元素和已排好元素前一位做交换，再从新调整，直到排序完毕
    for (i = len - 1; i > 0; i--) {
        swap(&arr[0], &arr[i]);
        max_heapify(arr, 0, i - 1);
    }
}
int main() {
    int arr[] = { 3, 5, 3, 0, 8, 6, 1, 5, 8, 6, 2, 4, 9, 4, 7, 0, 1, 8, 9, 7, 3, 1, 2,
    int len = (int) sizeof(arr) / sizeof(*arr);
    heap_sort(arr, len);
    int i;
    for (i = 0; i < len; i++)
        printf("%d ", arr[i]);
    printf("\n");
    return 0;
}
```

C++版本：

```cpp
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;
void max_heapify(int arr[], int start, int end) {
    //建立父节点指标和子节点指标
    int dad = start;
    int son = dad * 2 + 1;
    while (son <= end) { //若子节点指标在范围内才做比较
        if (son + 1 <= end && arr[son] < arr[son + 1]) //先比较两个子节点大小，选择最大的
            son++;
        if (arr[dad] > arr[son]) //如果父节点大于子节点代表调整完毕，直接跳出函数
            return;
        else { //否则交换父子内容再继续子节点和孙节点比较
            swap(arr[dad], arr[son]);
            dad = son;
            son = dad * 2 + 1;
        }
    }
}
void heap_sort(int arr[], int len) {
    //初始化，i从最后一个父节点开始调整
    for (int i = len / 2 - 1; i >= 0; i--)
        max_heapify(arr, i, len - 1);
    //先将第一个元素和已经排好的元素前一位做交换，再从新调整(刚调整的元素之前的元素)，直到排序完
    for (int i = len - 1; i > 0; i--) {
        swap(arr[0], arr[i]);
        max_heapify(arr, 0, i - 1);
    }
}
int main() {
    int arr[] = { 3, 5, 3, 0, 8, 6, 1, 5, 8, 6, 2, 4, 9, 4, 7, 0, 1, 8, 9, 7, 3, 1, 2,
    int len = (int) sizeof(arr) / sizeof(*arr);
    heap_sort(arr, len);
    for (int i = 0; i < len; i++)
        cout << arr[i] << ' ';
    cout << endl;
    return 0;
}
```

Java版本：

```java
import java.util.Arrays;
public class HeapSort {

    private int[] arr;

    public HeapSort(int[] arr){
        this.arr = arr;
    }

    /**
     * 堆排序的主要入口方法，共两步。
     */
    public void sort(){
        /*
         *  第一步：将数组堆化
         *  beginIndex = 第一个非叶子节点。
         *  从第一个非叶子节点开始即可。无需从最后一个叶子节点开始。
         *  叶子节点可以看作已符合堆要求的节点，根节点就是它自己且自己以下值为最大。
         */
        int len = arr.length - 1;
        int beginIndex = (len - 1) >> 1;
```

```
        }

        /*
         * 第二步：对堆化数据排序
         * 每次都是移出最顶层的根节点A[0]，与最尾部节点位置调换，同时遍历长度 - 1。
         * 然后从新整理被换到根节点的末尾元素，使其符合堆的特性。
         * 直至未排序的堆长度为 0。
         */
        for(int i = len; i > 0; i--){
            swap(0, i);
            maxHeapify(0, i - 1);
        }
    }

    private void swap(int i,int j){
        int temp = arr[i];
        arr[i] = arr[j];
        arr[j] = temp;
    }

    /**
     * 调整索引为 index 处的数据，使其符合堆的特性。
     *
     * @param index 需要堆化处理的数据的索引
     * @param len 未排序的堆（数组）的长度
     */
    private void maxHeapify(int index,int len){
        int li = (index << 1) + 1; // 左子节点索引
        int ri = li + 1;           // 右子节点索引
        int cMax = li;             // 子节点值最大索引，默认左子节点。

        if(li > len) return;       // 左子节点索引超出计算范围，直接返回。
        if(ri <= len && arr[ri] > arr[li]) // 先判断左右子节点，哪个较大。
            cMax = ri;
        if(arr[cMax] > arr[index]){
            swap(cMax, index);      // 如果父节点被子节点调换，
            maxHeapify(cMax, len);  // 则需要继续判断换下后的父节点是否符合堆的特性。
        }
    }

    /**
     * 测试用例
     *
     * 输出：
     * [0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8,
     */
    public static void main(String[] args) {
        int[] arr = new int[]{3,5,3,0,8,6,1,5,8,6,2,4,9,4,7,0,1,8,9,7,3,1,2,5,9,7,4,0,
        new HeapSort(arr).sort();
        System.out.println(Arrays.toString(arr));
    }
```

四、总结

堆是一种很好做调整的结构，在算法题里面使用频度很高。常用于想知道最大值或最小值的情况，比如优先级队列，作业调度等场景。

堆排序相看似比较复杂（建堆的过程，堆调整的过程，堆排序等等），需要好好推敲揣摩理清思

反复“筛选”上。