투빅스 18기 정규세션 3주차

Neural Network Basic Assignment

이름: 김윤서

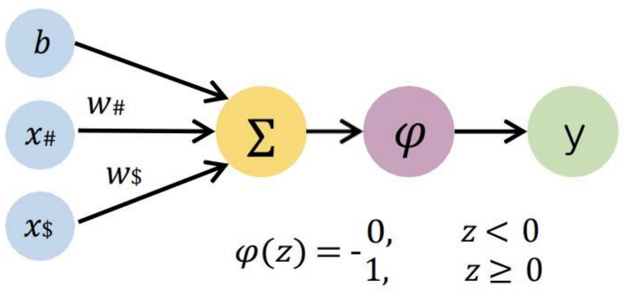
1. Sigmoid Function을 z에 대해 미분하세요.

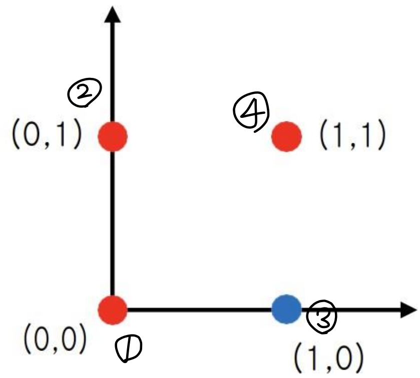
$$\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

$$\sigma'(z) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{1+e^{-z}} = \frac{e^{-z}}{(1+e^{-z})^2}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-z}} \times \frac{e^{-z}}{1+e^{-z}} = \sigma(z) \times (1-\sigma(z))$$

2. 다음과 같은 구조의 Perceptron과 🔴(=1), 🔵(=0)을 평면좌표상에 나타낸 그림이 있습니다.





2-1. 🔴, 🔵을 분류하는 임의의 b, w를 선정하고 분류해보세요. -0.2+1

0.3-0.2

$\begin{pmatrix} W_1 = 0.3 \\ W_2 = -0.2 \\ b = 1 \end{pmatrix}$ 이라고 설정해보자.

① $Z = (0.3\times0)+(-0.2\times0)+1 = 1$

$\varphi(z) = 1$

② $Z = (0.3\times0)+(-0.2\times1)+1 = 0.8$

$\varphi(z) = 1$

③ $Z = (0.3\times1)+(-0.2\times0)+1 = 1.3$ $\varphi(z) = 1$

④ $Z = (0.3\times1)+(-0.2\times1)+1$

$= 1.1$

$\varphi(z) = 1$

2-2. Perceptron 학습 규칙에 따라 임의의 학습률을 정하고 b, w를 1회 업데이트 해주세요.

③가 예측값 ≠ 실제값이므로 가중치 조절을 해준다. (학습률 0.02)

$W_1 = W_1 + 0.02\times(0-1)\times1$

$= W_1 - 0.02$

$\therefore W_1 = 0.3 - 0.02 = 0.28$

$W_2 = W_2 + 0.02\times(0-1)\times1$

$= W_2 - 0.02$

$\therefore W_2 = -2.02$

$b = b + 0.02\times(0-1)$

$= b - 0.02$

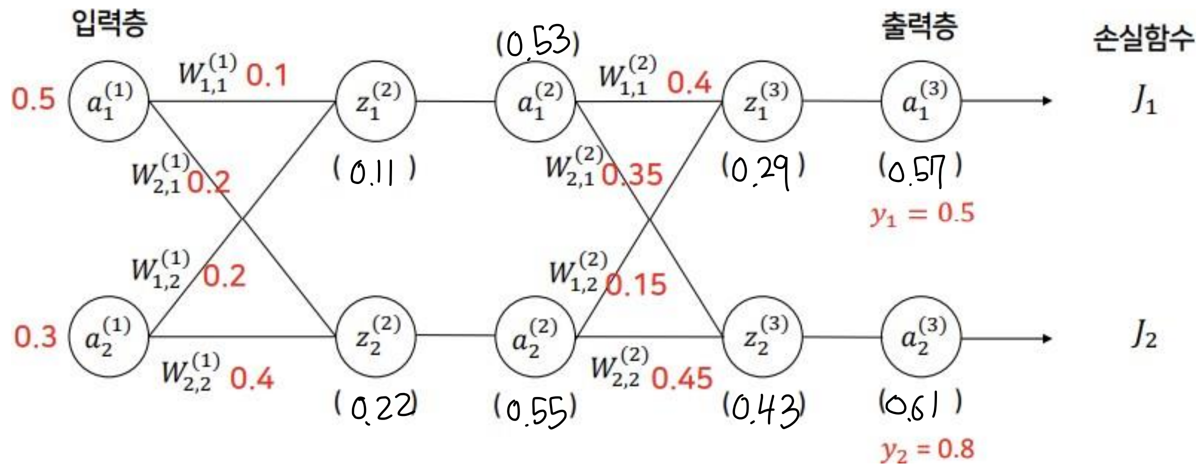
$b = 0.08$

$W_1 = 0.28$

$W_2 = -2.02$

$b = 0.08$

3. 다음과 같이 입력과 가중치가 주어진 퍼셉트론이 있을 때, 아래의 물음에 답해주세요. 모든 문제는 풀이과정을 자세하게 적어주세요! (3-3까지 있습니다.)



3-1. FeedForward가 일어날 때, 각 노드가 갖는 값을 빈칸에 써주세요. 단, 활성화함수는 sigmoid 함수입니다. (모든 계산의 결과는 소수점 셋째자리에서 반올림하여 둘째자리까지만 써주세요.)

$z_1^{(2)} = a_1^{(1)} \times w_{1,1}^{(1)} + a_2^{(1)} \times w_{1,2}^{(1)}$
$= 0.5 \times 0.1 + 0.3 \times 0.2$
$= 0.05 + 0.06 = 0.11$

$z_2^{(2)} = a_1^{(1)} \times w_{2,1}^{(1)} + a_2^{(1)} \times w_{2,2}^{(1)}$
$= 0.5 \times 0.2 + 0.3 \times 0.4$
$= 0.1 + 0.12 = 0.22$

$a_1^{(2)} = 1/1+exp(-0.11)$
$= 0.53$

$a_2^{(2)} = 1/1+exp(-0.22)$
$= 0.55$

$z_1^{(3)} = a_1^{(2)} \times w_{1,1}^{(2)} + a_2^{(2)} \times w_{1,2}^{(2)}$
$= 0.53 \times 0.4 + 0.55 \times 0.15$
$= 0.212 + 0.0825 = 0.29$

$z_2^{(3)} = a_1^{(2)} \times w_{2,1}^{(2)} + a_2^{(2)} \times w_{2,2}^{(2)}$
$= 0.53 \times 0.35 + 0.55 \times 0.45$
$= 0.1855 + 0.2475 = 0.43$

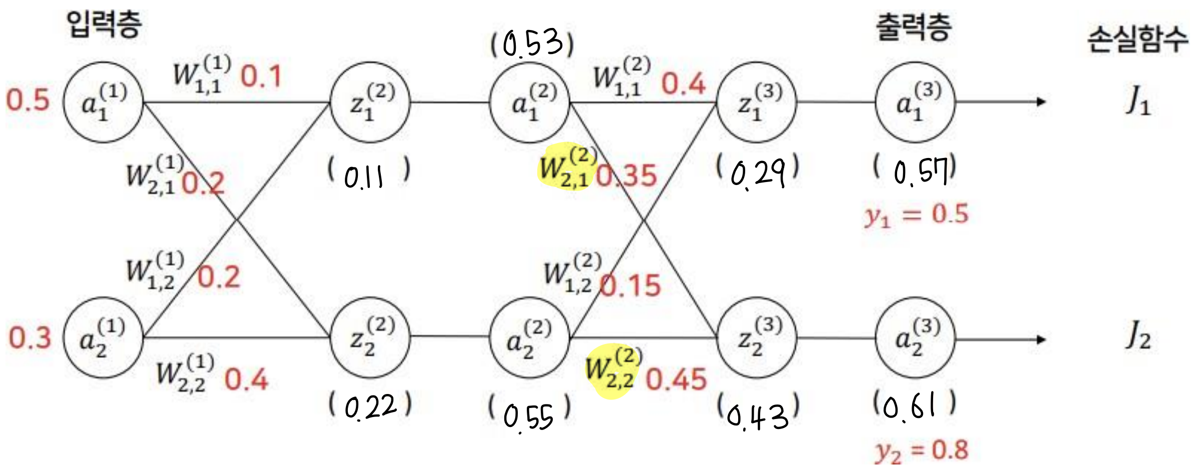
$a_1^{(3)} = 1/1+exp(-0.29)$
$= 0.57$

$a_2^{(3)} = 1/1+exp(-0.43) = 0.61$

3-2. 3-1에서 구한 값을 이용하여 손실함수 J_1과 J_2의 값을 구해주세요. (J_1과 J_2는 반올림하지 말고 써주세요.)

$J_1 = \frac{1}{2}(0.57-0.5)^2 = \frac{1}{2} \times (0.07)^2 = 0.00245$

$J_2 = \frac{1}{2}(0.61-0.8)^2 = \frac{1}{2} \times (0.19)^2 = 0.01805$



3-3. 위에서 구한 값을 토대로, BackPropagation이 일어날 때 $W^{(2)}_{2,2}$과 $W^{(1)}_{2,1}$의 조정된 값을 구해주세요. 단, learning rate는 0.1입니다. (계산 과정에서 소수점 넷째자리에서 반올림하여 셋째자리까지만 써주시고, 마지막 결과인 $W^{(1)}_{2,1}$과 $W^{(2)}_{2,2}$의 값만 반올림하지 말고 써주세요.)

① $W_{2,1}^{(2)}$ 업데이트

$$W_{2,1}^{(2)} = W_{2,1}^{(2)} - \frac{\partial J_{total}}{\partial w_{2,1}^{(2)}}$$

$$\frac{\partial J_{total}}{\partial w_{2,1}^{(2)}} = \frac{\partial J_{total}}{\partial a_2^{(3)}} \times \frac{\partial a_2^{(3)}}{\partial Z_2^{(3)}} \times \frac{\partial Z_2^{(3)}}{\partial w_{2,1}^{(2)}} = -0.19 \times 0.24 \times 0.53$$

(J_{total} "= J_2)

$= -0.024168$

$a_2^{(3)} - y_2 = 0.61 - 0.8 = -0.19$

$a_2^{(3)} \times (1 - a_2^{(3)}) = 0.61 \times 0.39 = 0.2379 \doteqdot 0.24$

$a_1^{(2)} = 0.53$

$$W_{2,1}^{(2)} = 0.35 + 0.024168 \times 0.1 = 0.3524168$$

② $W_{2,2}^{(2)}$ 업데이트

$$W_{2,2}^{(2)} = W_{2,2}^{(2)} - \frac{\partial J_{total}}{\partial w_{2,2}^{(2)}}$$

$$\frac{\partial J_{total}}{\partial w_{2,2}^{(2)}} = \frac{\partial J_{total}}{\partial a_2^{(3)}} \times \frac{\partial a_2^{(3)}}{\partial Z_2^{(3)}} \times \frac{\partial Z_2^{(3)}}{\partial w_{2,2}^{(3)}} = -0.19 \times 0.24 \times 0.55$$

(J_{total} = J_2)

$= -0.02508$

$a_2^{(3)} - y_2 = 0.61 - 0.8 = -0.19$

$a_2^{(3)} \times (1 - a_2^{(3)}) = 0.61 \times 0.39 \doteqdot 0.24$

$a_2^{(2)} = 0.55$

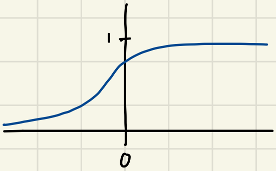
$$W_{2,2}^{(2)} = 0.45 + 0.02508 \times 0.1 = 0.452508$$

*뒷장부터 자세한 공식, 공부한 내용 넣어봤습니다.!

활성화함수

① 시그모이드 함수

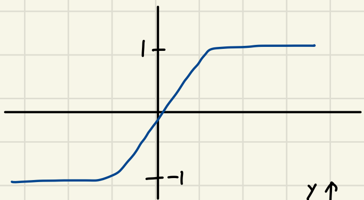
$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$



- 출력은 0보다 크고 1보다 작은 임의의 값
- 미분가능함수
- 0과 1로 강제 출력하는 부분에선 학습잘X → 기울기 소실 문제

② Tanh (하이퍼볼릭 탄젠트 함수)

$$\tanh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$



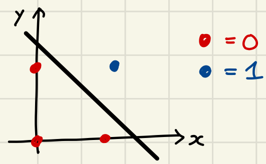
퍼셉트론

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0 & (z<0) \\ 1 & (z \geq 1) \end{cases}$$

$$\varphi(w_1x_1+w_2x_2+w_3) = y$$

$W_0 = 1.0$ $b = -1.5$

$W_1 = 1.0$



① (0,0) 인경우

$Z = (1\times0)+(1\times0) -1.5 = -1.5$

$\varphi(z)=0$

② (1,0)인경우

$Z = (1\times0) + (1\times1) -1.5 = -0.5$

$\varphi(z)=0$

③ (0,1) 인경우

$Z = (1\times1)+(1\times0) -1.5 = -0.5$

$\varphi(z)=0$

④ (1,1)인 경우

$Z = (1\times1)+(1\times1) -1.5 = 0.5$

$\varphi(z)=1$

＊ 실제값(y)과 return이 다른경우 가중치 (W_0,W_1) 업데이트

< 가중치 조정 식 >

$$w_i \leftarrow w_i + \eta\,(y - o)\,x_i$$

예측값(활성화함수 리턴값)

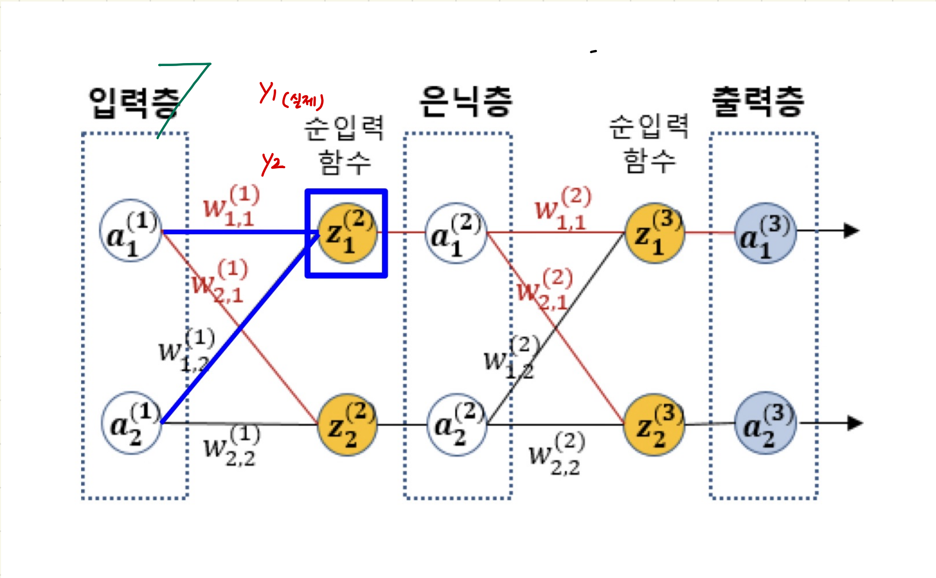
학습률

실제값

그 가중치랑 곱한 X값

＊②,③에 대해서만 가중치 업데이트 (학습률 =0.05)

▨ 순전파(Feedforward)



$$MSE = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

* $Z_1^{(2)} = \underline{a_1^{(1)} \times w_{1.1}^{(1)} + a_2^{(1)} \times w_{1.2}^{(1)}}$

  $a_1^{(2)} = \phi(Z_1^{(2)})$

* $Z_1^{(3)} = \underline{a_1^{(2)} \times w_{1.1}^{(2)} + a_2^{(2)} \times w_{1.2}^{(2)}}$

  $a_1^{(3)} = \phi(Z_1^{(3)})$

→ 출력층의 손실함수 는 MSE라고 하면

$$J_1 = \frac{1}{2}(a_1^{(3)} - y_1)^2$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(a_2^{(3)} - y_1)^2$$

은닉층의 활성화함수는 시그모이드함수

$$\phi(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

역전파(Backpropagation)

- 출력부터 반대 방향으로 순차적으로 편미분을 수행해가면서 weight 와 bias 값을 갱신

$$w_j = w_j - (\text{learning\_rate}) * \frac{\partial J_{total}}{\partial w_j}$$

$* \; \frac{\partial z}{\partial x}$ 란 Z식을 x에 대해서 미분!

$* \; (f(g(x)))' = f'(g(x)) \times g'(x)$

$y = f(u)$

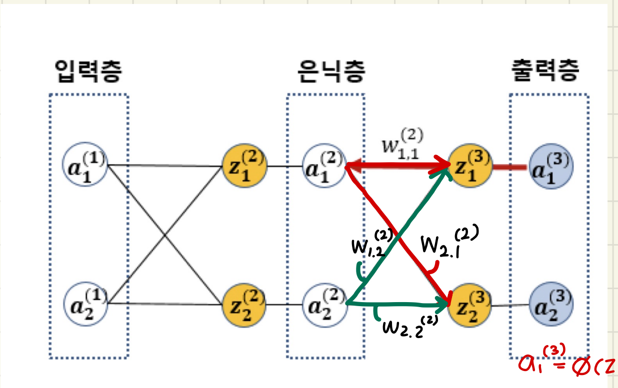
$u = g(x)$ 일때

즉 $f(g(x))$를 x에 대해서 미분

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \times \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{g'(x)}$$

$$\boxed{J_1 = \frac{1}{2}(a_1^{(3)} - y_1)^2}$$

$$w_{1,1}^{(2)} = w_{1,1}^{(2)} - \frac{\partial J_{total}}{\partial w_{1,1}^{(2)}}$$



역전파의 출발노드인 $a_1^{(3)}$의 J_{total}은 J_1 밖에 없음

$$\frac{\partial J_{total}}{\partial w_{1,1}^{(2)}} = \frac{\partial J_1}{\partial a_1^{(3)}} \times \frac{\partial a_1^{(3)}}{\partial z_1^{(3)}} \times \frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial w_{1,1}^{(2)}}$$

① $\frac{\partial J_1}{\partial a_1^{(3)}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a_1^{(3)}}(a_1^{(3)} - y_1)^2 = (a_1^{(3)} - y_1)$

② $\frac{\partial a_1^{(3)}}{\partial z_1^{(3)}} = Ø(z_1^{(3)})(1 - Ø(z_1^{(3)}))$

$= a_1^{(3)} \times (1 - a_1^{(3)})$

$a_1^{(3)} = Ø(z_1^{(3)})$ 인데

$$Ø'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-x}} \times \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$= \sigma(x) \times (1 - \sigma(x))$$

③ $\frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial w_{1,1}^{(2)}} = a_1^{(2)}$

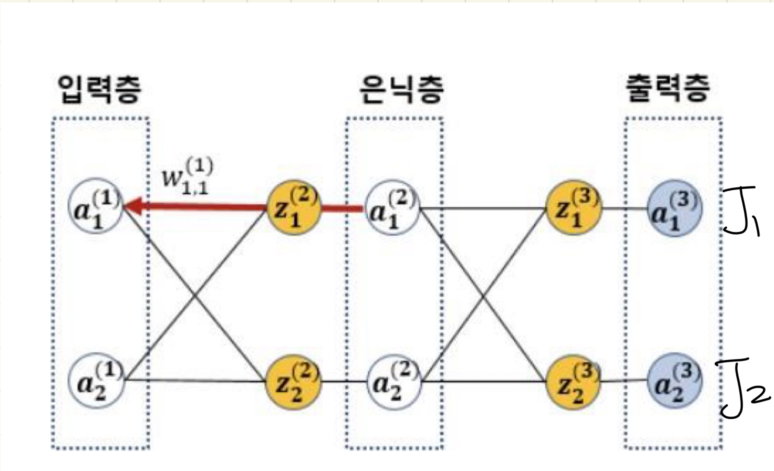
$$① \times ② \times ③ = \underbrace{(a_1^{(3)} - y_1) \times a_1^{(3)}(1 - a_1^{(3)})}_{\delta_1^{(3)}\text{로 치환함.}} \times a_1^{(2)}$$

$$w_{1,1}^{(2)} = w_{1,1}^{(2)} - \frac{\partial J_{total}}{\partial w_{1,1}^{(2)}} = w_{1,1}^{(2)} - \delta_1^{(3)} \times a_1^{(2)}$$

* 같은방식으로

$$w_{2,2}^{(2)} = w_{2,2}^{(2)} - \delta_2^{(3)} \times a_2^{(2)}$$

$$w_{2,1}^{(2)} = w_{2,1}^{(2)} - \delta_2^{(3)} \times a_1^{(2)}$$



$W_j = W_j - L \times \frac{\partial J_{total}}{\partial W_j}$

$a_1^{(2)}$의 J_{total}은 $J_1 + J_2$

- $$\frac{\partial J_{total}}{\partial w_{1.1}^{(1)}} = \frac{\partial J_{total}}{\partial a_1^{(2)}} \times \frac{\partial a_1^{(2)}}{\partial z_1^{(2)}} \times \frac{\partial z_1^{(2)}}{\partial w_{1.1}^{(1)}}$$

- $$\frac{\partial J_{total}}{\partial a_1^{(2)}} = \frac{\partial J_1}{\partial a_1^{(2)}} + \frac{\partial J_2}{\partial a_1^{(2)}} = \left(\underbrace{\frac{\partial J_1}{\partial z_1^{(3)}}}_{\delta_1^{(3)}} \times \underbrace{\frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial a_1^{(2)}}}_{w_{1.1}^{(2)}}\right) + \left(\underbrace{\frac{\partial J_2}{\partial z_2^{(3)}}}_{\delta_2^{(3)}} \times \underbrace{\frac{\partial z_2^{(3)}}{\partial a_1^{(2)}}}_{w_{2.1}^{(2)}}\right)$$

$$= \delta_1^{(3)} \times w_{1.1}^{(2)} + \delta_2^{(3)} \times w_{2.1}^{(2)}$$

* $z_1^{(3)} = a_1^{(2)} \times w_{1.1}^{(2)} + a_2^{(2)} \times w_{1.2}^{(2)}$

* $z_2^{(3)} = a_1^{(2)} \times w_{2.1}^{(2)} + a_2^{(2)} \times w_{2.2}^{(2)}$

$$\therefore \frac{\partial J_{total}}{\partial w_{1.1}^{(1)}} = \underbrace{\left(\delta_1^{(3)} \times w_{1.1}^{(2)} + \delta_2^{(3)} \times w_{2.1}^{(2)}\right) \times a_1^{(2)}(1 - a_1^{(2)})}_{\delta_1^{(2)}\ \text{치환}} \times a_1^{(1)}$$

$$w_{1.1}^{(1)} = w_{1.1}^{(1)} - \delta_1^{(2)} a_1^{(1)}$$