TU München, Zentrum Mathematik
M5
WS 2019/2020

Prof. Dr. Silke Rolles
Dr. Diana Conache

Blatt 2
Analysis für Informatik [MA0902]

Ausgabe: 22. Oktober 2019
Abgabe: bis 29. Oktober 2019, 12 Uhr im Briefkasten im Untergeschoss

Präsenzaufgabe 1. Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen auf Konvergenz. Begründen Sie dabei all Ihre Rechenschritte bzw. nennen Sie die verwendeten Verfahren.

(a) $a_n = \dfrac{4n^2+3n-6}{(n+2)^2}$

(b) $a_n = \dfrac{3n^3+5n}{7n^2+4n+4}$

(c) $a_n = \dfrac{2n+3}{n^2+3n}$

(d) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

(e) $a_n = \sqrt{4n+1} - \sqrt{4n-3}$

Präsenzaufgabe 2. Geben Sie, falls möglich, Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen an mit:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht und $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht und $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht.

Präsenzaufgabe 3.

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen. Überlegen Sie sich, dass dann der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ eindeutig bestimmt ist.
Hinweis: Machen Sie sich dies zunächst anschaulich anhand eines Bildes klar und versuchen Sie dann, die Idee zu formalisieren.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Es gebe ein $a \in \mathbb{R}$ sowie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ und

$$|a_n - a| \leq b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass dann $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gilt.

Hausaufgabe 1. (4 Punkte) Beweisen Sie, dass die Definition 2.3 der Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen gegen $a \in \mathbb{R}$ äquivalent zu den folgenden Aussagen ist:

(a) $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| \leq \varepsilon$ und

(b) $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < 17\varepsilon$.

Hausaufgabe 2. (4 Punkte) Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen auf Konvergenz. Begründen Sie dabei all Ihre Rechenschritte bzw. nennen Sie die verwendeten Verfahren.

(a) $a_n = q^n$, wobei q eine beliebige reelle Zahl ist

(b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{b_n}}$, wobei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $b > 0$ konvergente Folge strikt positiver reeller Zahlen ist.

Hinweis: Für (a) dürfen Sie ohne Beweis die Bernoulli-Ungleichung verwenden: Für alle $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Hausaufgabe 3. (4 Punkte) Geben Sie, falls möglich, Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen an mit:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen a, für alle $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ und $a_i \neq a_j$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \neq 0$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht und $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $+\infty$ und $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und divergiert.