

文章编号:1009-3087(2003)04-0064-03

## 肺气管树分形结构的数学描述

段佐刚,谭小苹,裴觉民

(四川大学 生物医学工程中心,四川 成都 610065)

**摘 要:** 根据人体气管树内部复杂的自相似的结构,收集气管树的解剖学资料,在二维平面上建立了人体气管树完全二叉分支的分形结构数学模型。拟合出右肺的外形边界曲线,根据进出气体以最小能量损失到达分布目的的思想,借鉴血管分支形态的优化分析对前几级支气管的几何形态进行数学模拟,在此基础上建立边界控制气管树分叉控制概率模型,模拟了人体右肺气管树的分形结构。计算结果表明,该模型能很好的模拟支气管形态优化及管径确定,并能对复杂的气管树几何形态进行描述。

**关键词:** 气管树;分形结构;优化

**中图分类号:** R318.01

**文献标识码:** A

## Mathematical Description of Fractal Structure of Bronchial Tree

DUAN Zuogang, TAN Xiaoping, PEI Juemin

(Biomedical Eng. Center., Sichuan Univ., Chengdu 610065, China)

**Abstract:** Based on the understanding of the complicated anatomical structure of human bronchial tree, the length ratio of the immediate bronchia, the change of bronchus diameters, and the bifurcation angles were analyzed. A bifurcation mathematical model that is used to simulate the fractal structure of human right bronchial tree was proposed using computer graphic method. According to the minimum energy loss principle and the optimal analysis of blood vessel bifurcation, The bifurcation angles and the diameters of the first three graded bifurcations of bronchia was determined. The bronchial tree of right lung was depicted figuratively. The calculation results showed that the model could simulate the bronchial optimal structure and determine the diameters well, and it can describe the complex geometrical structure of human bronchial tree.

**Key words:** bronchial tree; fractal structure; optimal analysis

肺气管树是人体肺毛细血管与大气之间进行气体交换的通道。它的形态特征及力学性能直接关系到它的通气功能。解剖学界对肺气管树的各级分支的直径、长度等进行了形态学的描述,在此基础上,Weibel 建立了支气管树的一分为二模型<sup>[1]</sup>,Horsfield 根据最小容量原理,应用泊肃叶定律算出最优分支直径比以及最佳分支角,Wanner 确定了在最佳分支角时的最佳分支长度比<sup>[2]</sup>,这些资料只能使人

粗略了解肺气管树的大致形态特征。肺支气管树像一些生命体一样具有分形特征,即每一个细分部分都与整体部分有某些相似,但它的自相似特征不是严格意义上的自相似,而是统计意义上的自相似,如何对其形态进行数学描述引起一些研究者的兴趣。James E M 建立严格自相似的模型,一分为二分叉产生出来的肺支气管树与实际相差甚远<sup>[3]</sup>,根据 Weibel 的模型也产生不出与实际接近的图形。目前国外对肺气管树分形结构的研究有简单的 Cayley 二叉树结构,丹麦植物学家 Lindenmeyer 把完备的二阶 L 系统(能很好的描述树的分叉结构)应用到的研究

收稿日期:2002-10-18

作者简介:段佐刚(1978-),男,硕士生,研究方向:生物力学。

肺气管树的分形结构中<sup>[4]</sup>。总的来说,对肺气管树的分形结构研究很少。相对而言,国内几乎没有这方面的研究。

分形结构是物质远离平衡状态动力过程的结果。从功能与结构一致的角度,肺的功能就不是用经典的力学方程式所全能描述的。为探讨正常肺以及病变了的肺在形态方面以及功能方面变化的动力过程,笔者分析肺支气管树的解剖学资料,用计算机实验的方法来描述气管树的分形特征,提出描述肺气管树形态的数学模型。笔者根据进出气体以最小能量损失到达分布目的地思想,借鉴血管分支形态的优化分析模拟前几级分支,并提出边界约束气管树分支,在优化范围附近参数随机变化的综合数学模型描述肺气管树的几何形态。该模型为今后用分形思想研究肺的某些功能奠定基础,节省计算机存储,加快图形传输也很有意义。

## 1 人体肺支气管树的结构形态

根据解剖学资料可知,人体的主气管长度约为15 cm,直径约为2~3 cm,不断分叉,到第20级分叉的呼吸性支气管,长度为0.083 cm,直径为0.045 cm,22级分叉后与肺泡相连,整个支气管形状有如一棵倒置的树<sup>[5]</sup>。其几何特点如下:

**非对称性:**在总气管分叉处左右支气管的分叉角(与支气管轴线的夹角)并不等。在气管末端的左、右支气管之间的夹角一般为65~80°,右支气管短粗,长2~3 cm,较为陡直,几乎为气管的直接延续。

**分支结构:**肺内支气管树的分支基本上是二叉分支,偶尔也有三叉分支,但其几率非常小。

**自相似性:**支气管树的每一级分支与上一级分支都是一个自相似结构,但不是严格意义上的自相似,根据解剖数据,表现为它的上一级与下一级分支的长度比、管径比、分叉角度并不是一个定值,带有某种随机性。因此,支气管树的分支结构是一个具有递归迭代性质,且是统计自相似性的分形结构。

## 2 人体支气管树分形结构的建模

### 2.1 模型简化

在用分形理论通过计算机来模拟支气管树的生理模型时,笔者作了以下简化:

1)在二维坐标系下,建立肺支气管树的平面模型。由于肺的外形是呈扁平的锥形,支气管主要是朝着两边生长,故此简化合理;

2)假设支气管树的每一级分支都是二叉分支结构;

3)尽管支气管有一定的弯曲度,但仍按直管处理。

### 2.2 模型建立

结合上面的分析,笔者根据肺支气管这种自相似性,把肺支气管分形结构看作是图1的自相似组合,用计算机模拟的方法模拟气管树的结构(图1中 $R$ 、 $L$ 、 $a$ 分别表示分支的半径、长度以及分叉夹角)。在具体实现过程中,考虑支气管树分支的非对称性、直径比、长度比的变化和边界约束等因素,使实验模拟的结果与真实的结构更加接近。

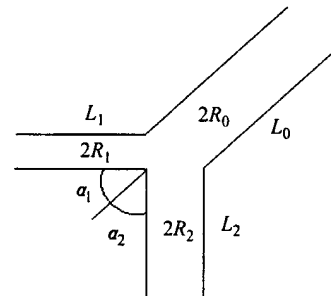


图1 支气管自相结构

Fig.1 Similar structure of bronchus trees

#### 2.2.1 前三级的管径与最优分支角确定

一定环境中长期生存的生物,必具有最适应该环境的结构。肺气管树与心血管系统相似,都应满足流体流动能量消耗最小这一基本原则。笔者根据Murray和Rosen在心血管系统最优分支方面的研究,将此理论应用于肺支气管树分形结构中。在支气管树分支的前3级分支运用最优分支角,控制肺支气管生长的大致走向。根据Murray和Rosen的分析,最佳管径与流量的关系为: $R = (\frac{16\mu}{2k})^{\frac{1}{6}} Q^{\frac{1}{3}}$ 。

将肺视为平面图形,每一部位都应有气体进出,故可认为支气管半径与其“掌管”的面积 $S$ 之间有如下关系: $R = k_1 S^{\frac{1}{3}}$ 其中 $k$ 为 $k$ 系数,实验得出 $k_1 = 0.35$ 在初始角度 $\theta_0$ 方向延长直至边界,将整个边界一分为二,分别计算此两部分面积,并根据最佳管径公式分别计算 $R_1$ 、 $R_2$ 。根据人体气道的生理结构,结合Horsfield及Wanner<sup>[2]</sup>等人的关于人体气道最优化分析;结合最小能量原理,分支管径比为0.79,分支长度比为0.84。由于肺右上叶结构上的特殊性,其比例有所调整。

**最佳分支角:**进而根据能量最小原理,质量守恒: $R_0^3 = R_1^3 + R_2^3$ ,得出最佳分支角<sup>[2]</sup>:

$$\cos \theta_1 = \frac{R_0^4 + R_1^4 + (R_0^3 - R_1^3)^2}{2 R_0^2 R_1^2}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{R_0^4 + R_2^4 + (R_0^3 - R_2^3)^2}{2 R_0^2 R_2^2}$$

### 2.2.2 长度确定

在分支角度确定后,计算初始点到边界的总长度  $L$ ,若从当前分支开始所要控制的级数为  $n$ ,按下一级与上一级分支的平均长度比 0.84,即:

$$L_{n-1} = 0.84 L_n, L_1 + L_2 + \dots + L_n = L,$$

计算出  $L_1$  作为当前分支的长度,同时  $n = n - 1$ 。

### 2.2.3 非对称性处理

支气管分支具有非对称性的特性,如果按左右完全对称的情形一级一级反复的分叉,结果将会呈现很密的菜花状,与真实的支气管树的结构不相符合。通过计算机模拟,笔者把 3 级以后的支气管长度比控制在 0.5 ~ 0.85 内,根据肺叶的基本形状,随机获取长度比,如右肺上叶的支气管长度比相对中、下叶的小。选取右分支的分角为 35 度的概率为 30%,为 5 ~ 10 度的概率为 70%,左分支则相反。对于右中叶支气管,选取左分支的分角为 35 ~ 40 度,右分支为 5 度。对于右下叶支气管,选取右分支的分角为 25 ~ 40 度,左分支的分角为 5 度。这些都是与肺叶的形状有关。

### 2.2.4 边界控制

支气管反复的分支,级数增加,分支可能会超出边界;如果超出边界但还没有达到所要求的分支级数(17 级),则说明分支角度不甚合理。笔者对第三级以后的分叉采取边界控制法:在当前分支级数的基础上,按照上述角度、长度及其概率选取,计算后续 3 级端点。判断后续第三级端点是否超出边界。不超界,则画出后续第一级,并重复上述过程,计算下一级;若超出边界,则在原来分叉角上加上(或减去) 3 度的角,重新计算后续 3 级,再判断。根据对解剖图的分析,笔者在累加的角度绝对值超过 40 度时,则终止当前分支往下分叉,继续进行其它分支计算。从理论上说支气管分叉可达 22 级,由于图形象素原因,本文只进行到 17 级。

经过调试,得计算机模拟图形结果,如图 2,图 3 为 James 的严格自相似模型图。



图 2 肺支气管树模拟结果

Fig. 3 Simulation of bronchus tree

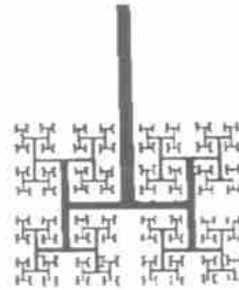


图 3 Jame E M 严格自相似模型

Fig. 3 Jame E M 's servere self-similar model

## 3 结 论

分析此计算机实验的结果,可得如下结论:

- 1) 所建立的边界控制二叉图图形计算模型基本上能反应肺支气管树的大体结构;
- 2) 气管树按二叉分支基本合理,但它并不是完全的对称结构,根据最小能量损失原理,应用泊肃叶定律,建立的气管最优化数学模型适用于局部支气管分支,以及其半径的确定;
- 3) 模拟中发现,不同肺叶的分叉角度、长度比、管径比等参数也并非是一定值,而是在一定范围内波动的随机值,受边界影响很大,肺叶的外形轮廓约束了支气管的生长;
- 4) 该计算思想同样适用于三维模型的建立。

## 参考文献:

- [1] Ginzburg I, Elad D. Dynamic model of bronchial tree[J]. Journal of Biomedical Engineering, 1993, 15(4): 283 ~ 288.
- [2] 陶祖莱. 生物流体力学[M]. 北京: 科学出版社, 1984.
- [3] James E M. Fractal character of pulmonary microvascular permeability[J]. Annual of Biomedical Engineering, 1990, 18: 123 ~ 133.
- [4] Prusinkiewicz P, Lindenmayer A. The algorithmic beauty of plants[J]. Springer Verlag, Berlin, 1990.
- [5] 中国医科大学. 人体解剖学[M]. 北京: 人民卫生出版社, 1978.

(编辑 黄小川)