3

EXCEL'DE

BENZETİM ÖRNEKLERİ

İLHAN AYDIN + ERKAN DUMAN

GİRİŞ

→ Benzetim örnekleri Monte Carlo benzetiminin yanısıra dinamik benzetimler de içerir.

→ Bu bölümde anlatılan temel kavramlar belirsizliği göstermek için rastgele sayı kullanımını içerir.

→ Kuyruk ve envanter modellerinde sistem performansını göstermek için tanımlayıcı istatistikler kullanılır.

→ Giriş, Çıkış, aktiviteler, durum ve cevaplar ile bir modelin davranışı incelenir.

RASTGELELİĞİN BENZETİMİ

→ Bu bölümde ele alınan benzetim modelleri bir veya daha fazla rastgele değişken içerir.

→ Rastgele bir madeni para atılırken yazı veya tura gelmesi belli bir mekanizma ile yapılır.

→ Bir kuyruk modelinde servis zamanı ve varışlar arası zaman eğer kesin bilinmiyor ve tahmin edilemiyorsa istatistiksel dağılım ile tanımlanabilir.

→ Rastgele bir sayı üretilmesi 0 ile 1 aralığında üretimi ile yapılabilir.

→ Rastgele sayıların üretimi iki önemli özelliğe sahip olmalıdır.

1. Sayılar 0 ile 1 aralığında uniform bir dağılımda olmalıdır.
2. Üretilen ardışık sayılar daha önce üretilen bütün sayılardan istatistiki olarak bağımsız olmalıdır.

→ Excel'de rastgele sayı üretimi için =S_SAYI_ÜRET() fonksiyonu kullanılır.

→ 0 veya 1 üretilmek isteniyorsa; =EĞER(S_SAYI_ÜRET()<=0,5;0;1)

→ Belli bir aralıkta rastgele sayı üretmek için =RASTGELEARADA(alt;üst) metodu kullanılır.

→ Excel'de makrolar aracılığıyla Visual Basic komutları da kullanılır.

→ VB'de rnd fonksiyonu rastgele sayı üretmek için kullanılır.

→ Rnd 0.1() = 0 ile 1 aralığında rastgele sayı üretir.

→ Discrete Uniform (min, max) = min ile max arasında rastgele sayı üretir.

ÖRNEK-1: MADENİ PARA BENZETİMİ

→ Hilesiz bir paranın 10 kez atıldığını düşünelim. (Hilesiz olduğundan) Yazı ve tura gelme olasılığı eşittir.

→ Her birinin oluşma olasılığı 0.5'tir.

→ Bu örnek bir Monte Carlo benzetimi'dir. Çünkü bir zaman veya olay yoktur. Böyle sistemler statostik sistemlerdir.

= EĞER (C15 <= $C$7 ; H ; T) (C7 = 0.5 ⇒ H'nin gelme olasılığı)

→ $C$7'nin anlamı; C7 hücresinin içeriğinin alınmasıdır. Yani denklemde sürekli olarak C7 nin değeri kullanılır. (C7'yi denklemde sabitledim)

Frekans, her birinin kaç defa geldiğini belirlemek için kullanılır.

Frekansı bulmak için; =EĞERSAY ($I$15 : $I$24 ; H) kullanılır.

I15 ile I24 arasındaki (10 hücrede) H'leri say. Aynı şekilde

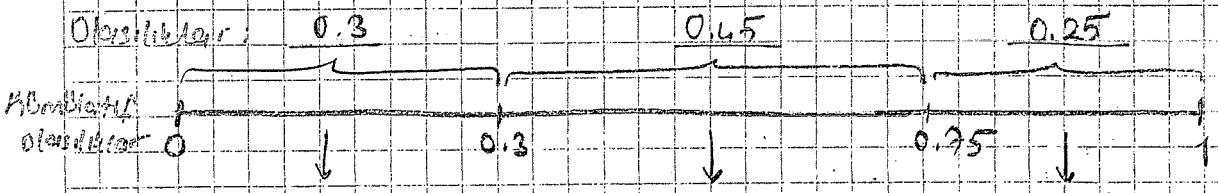
=EĞERSAY ($I$15 : $I$24 ; T) T'leri de sayarak Frekanslarını bulup olasılıklarını hesaplarız.

ÖRNEK-2 : RASTGELE SERVİS ZAMANLARININ BENZETİMİ

→ Temel prensip, belirlenen zaman aralıklarına göre servis zamanlarını ayarlamaktır.

→ Otomatikleştirilmiş bir telefon bilgi servisi her bir çağrıya 3, 6 ve 10 dk harcamaktadır. Her bir servisin çağrı oranı %30, %45 ve %25 dir. Amacımız bu servis zamanlarını excel'de simüle etmektir.

→ Bu örnek aynı zamanda Monte Carlo benzetimidir. Çözüm şöyle olmalıdır;



= DiscreteEmp ($D$7 : $D$9 ; $B$7 : $B$9) fonksiyonunda

$D$7 : $D$9 kümülatif olasılıkları içeren hücrelerin aralığı

$B$7 : $B$9 servis zamanları için istenen değerleri içeren hücrelerin aralığı

	B	C	D
	Servis time	Probability	Cumulative Probability
7	3	0.30	0.30
8	6	0.45	0.75
9	10	0.25	1.00

	Simulation Table	
	Step	Service time
16	1	3
17	2	6
18	3	6
19	4	10
20	5	3
	⋮	6
22	10	10

→ DiscreteEmp ($D$7 : $D$9 ; $B$7 : $B$9) ← B Fonksiyonu

Frekanslar : EĞERSAY ($C$16 : $C$40 ; 3)
EĞERSAY ($C$16 : $C$40 ; 6)
EĞERSAY ($C$16 : $C$40 ; 10)

40 24

RASTGELE VARIŞ ZAMANLARININ BENZETİMİ

⇒ İki ardışık varış zamanı arasındaki zamanın nasıl üretileceği ve müşterilerin varış zaman ile sisteme girişleri hesaplanmaktadır.

⇒ Benzetim saati her dinamik ayrık zaman benzetimi için anahtar bileşenidir.

⇒ Bütün excel örneklerinde saat zamanı benzetim tablosunun en üstünde uygun bir sütunda verilir.

⇒ Bütün durumlarda saat zamanı; varış, servis başlaması, kuyrukta beklemenin bitmesi gibi bir olayın oluşunu göstermiş

ÖRNEK-3: RASTGELE VARIŞ ZAMANLARININ BENZETİMİ

⇒ Bir telefon bilgi servisine göre, telefon çağrıları varışları arası zamanı 1, 2, 3, 4 dakikaya sahip varışlar arası zaman ile rastgele zamanlardan oluşur. Her birinin olasılığı eşittir.

⇒ Amaç varış zamanları ile varışlar arası zamanı nasıl üreteceğimizi belirlemektir.

⇒ Bu, önceki varış olayı gibi sadece bir olaya sahiptir. Dolayısıyla bu örnek aynı zamanda ilk dinamik olay tabanlı örneğimizdir.

⇒ Dinamik basit sekilde zaman tabanlı anlamına gelir. Sistem durumu zaman içinde değişir. Olay tabanlı ise zaman üzerinde olay oluşlarının ilerlemesini takip eder.

⇒ Ayrık bir uniform dağılım ile zamanlar üretilir.

⇒ Uniform'dan basit eşit olasılık değerlerine sahip olmalıdır.

⇒ Bu amaçla özel bir VBA fonksiyonu DiscreteUniform() kullanılır.

⇒ =DiscreteUniform(SG$55, SG$6)

⇒ Veya =DiscreteUniform(1,4) fonksiyonu kullanılır.

low high

→ DiscreteUniform (low, high) fonksiyonu VBA'da tek bir satırlık kod ile yazılabilir.

* DiscreteUniform = low + Int((high-low)+1) * Rnd()

→ Bu örnek için ;

DiscreteUniform = 1 + Int(4 * Rnd()) komutu kullanılır.

	B	C
	Interarrival Times (minutes)	
6	Minimum	1
7	Maximum	4

Simulation Table

Step	Interarrival Time	Arrival Time
1	2	0
2	1	1
3	4	5
4	4	9
5	1	10
6	3	13
7	3	16
8	1	17
⋮	⋮	⋮

=DiscreteUniform($C$6;$C$7)

Önceki müşterinin varış zamanı = Önceki müşterinin varış zamanı + (Sonraki-önceki müşterinin varış zamanı)

EXCEL'DE BENZETİMİN TEMEL ÇATISI

→ Giriş örnekleri ; yazı-tura örneğinde tura olasılığı, servis zamanı ve bir kuyruk sistemindeki varışlararası zaman dağılımı.

→ Bu giriş elemanları rastgele aktarılır zamanları ve diğer değişkenleri üretmek için kullanılır.

→ Çıkışlar, sistem performans ölçütlerini hesaplamak için kullanılır.

→ Örneğin: Bir bekleme hattı modelinde her bir bireyin kuyruktaki geçirmesi model çıkışı, bütün müşterilerin ortalama bekleme zamanı ise model cevabıdır.

MODEL GELİŞTİRİLİRKEN DİKKAT EDİLMESİ GEREKEN MADDELER

① Girişlerin özelliğini belirle

② Problem ile ilgili aktiviteleri, olayları ve sistem durumlarını belirle

③ Hedeflere bağlı olarak model cevaplarını ve sistem performans ölçümlerini belirle.

④ Model cevaplarını elde etmek için çıkışlarını belirle.

⑤ Benzetim tablosu oluştur

⑥ Her i adımı için aktiviteleri, sistem durumlarını ve çıkışı belirle

⑦ benzetim bittiğinde model cevaplarını ve performans ölçümlerini hesaplamak için çıkışları kullan.

ÖRNEK : MADENİ PARA ATMA OYUNU

Bir madeni para 100 kez atılıyor. Yazı gelirse Tom 1$ kazanır, Harry 1$ kaybeder. Tura gelirse Harry 1$ kazanır, Tom 1$ kaybeder. Bunu Excelde modelleyiniz.

	B	C	D
6	Coin	Probability	Kümülatif
7	Head	0.50	0.50
8	Tail	0.50	1

Frequency

Tom	9
Harry	80
Even	11

=EĞERSAY($D$10:$D$109;">0")

Simulating Table		Harry Win	Tom Win
Step	State	Output	Output
1	T	-$1	+$1
2	H	0	0
3	H	1	-1
4	T	0	0
5	T	-1	1
6	T	-2	2
7	H	-1	1
8	T	-2	2
9	H	-1	1
10	H	0	0
11	T	-1	1
12	H	0	0
13	H	1	-1
14	T	0	0
15	T	-1	1
16	T	-2	2
⋮	⋮	⋮	⋮
100			

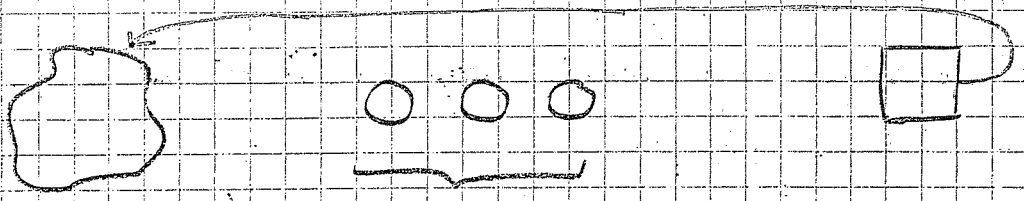
State (row 3) → =EĞER(RASTGELE()<=$C$7;"H";"T")

Harry Win (row 6) → =D14+EĞER($C15="H";1;(-1))

ÖRNEK: KUYRUK BENZETİM MODELİ

→ Kuyruk modellerini veya bekleme hat modellerini tanımlayacağız. (Tek servis ve iki servisli kuyruk modelleri)

→ Her ikisi de dinamik ve olay tabanlıdır = Zamana bağlıdır.



Çağırma popülasyonu — Bekleme hattı — Hizmet

- müşteriler
- telefon çağrıları
- tamircideki işler

→ Bir kuyruk sistemi, çağırma popülasyonu, varışlar, servis mekanizması ve kuyruk disiplini ile tanımlanır.

→ Yukarıdaki şekil tek kanallı bir kuyruk sistemi'dir.

→ Bu örnekte sabit varış oranı ve sınırsız potansiyelli çağırı popülasyonu olduğu varsayılacaktır.

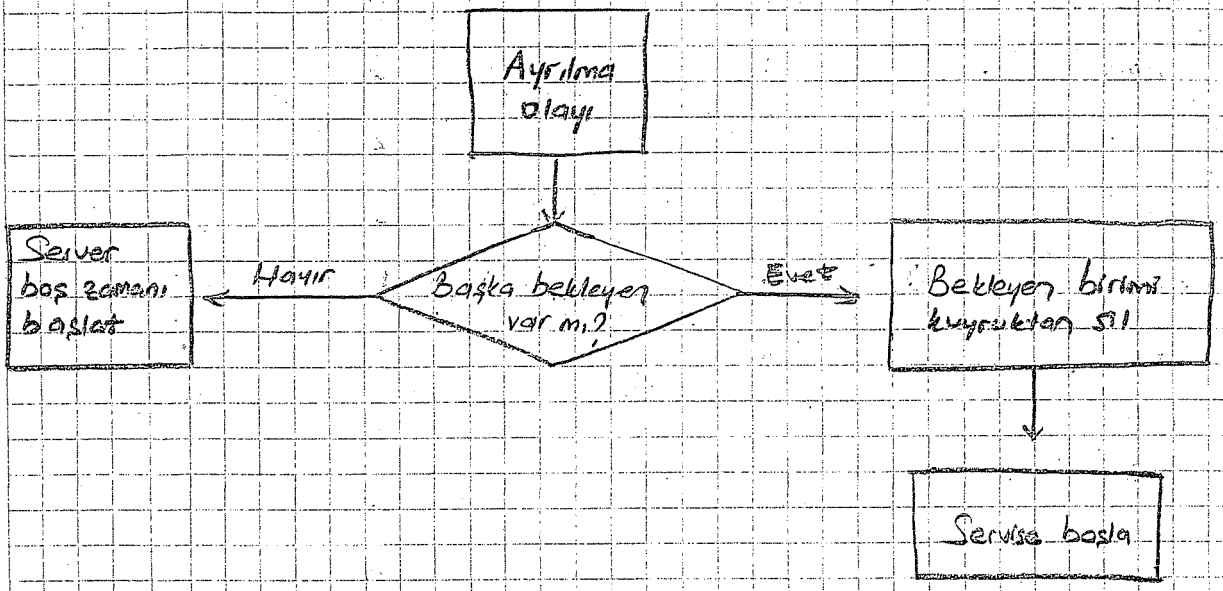
→ Sistem kapasitesi bir limite sahip değildir.

→ İlk gelen ilk çıkar (FIFO) mantığı ile çalışır.

→ Ayrılış olayı sistem durumunu değiştirir. Eğer kuyrukta bekleyen yoksa sistem durumu boş olur. Bekleyen var ise sonraki birim servise alınır.

Her iki durumda da sistemdeki birimlerin sayısı bir azalır.

→ Bir ayrılma olduğunda benzetim aşağıdaki akış diyagramı ile ilerletilir.



ÖRNEK: KUYRUK BENZETİM MODELİ

A	B	C	D	E
Müşteri No	Varış Zamanı	Servis başlama zamanı	Servis Zamanı	Servis bitiş zamanı
1	0	0	2	2
2	2	2	1	3
3	6	6	3	9
4	7	9	2	11
5	9	11	1	12
6	15	15	4	19

→ Yukarıdaki tabloda tek kanallı bir kuyruk sistemi modellenmiştir. İlk giren ilk çıkar mantığı ile çalışır.

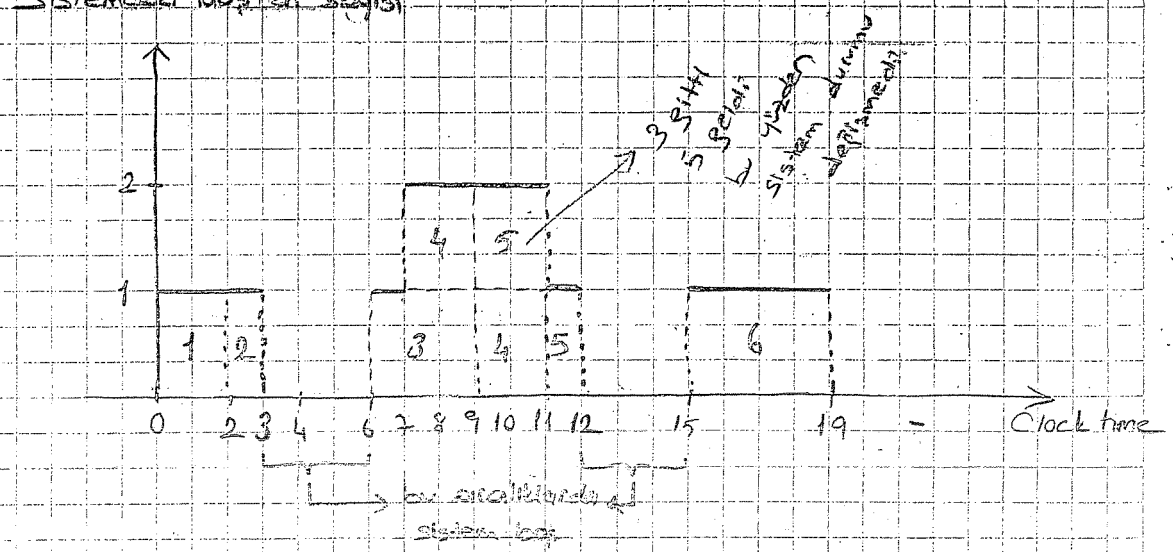
→ Her olayın oluştuğu zamanı tutar. Bu benzetim tablosu, varışlar arası zamanların, rassal sayıdan sırasıyla varış zamanlarını hesaplar. 2 4 1 2 6

→ B, C ve E sütunları olacak zamanlarını gösterir. B varış zamanını, E ayrılış zamanını gösterir ve D kolaylıkla hesaplanır.

Olay Tipi	Müşteri No	Clock time
Varış	1	0
Ayrılış	1	2
Varış	2	2
Ayrılış	2	3
Varış	3	6
Varış	4	7
Ayrılış	3	9
Varış	5	9
Ayrılış	4	11
Ayrılış	5	12
Varış	6	15
Ayrılış	6	19

bu aralıkta sistem boş

bu aralıkta sistem boş



ÖRNEK - 2: KUYRUK BENZETİM MODELİ

G	H
Interarrival times (minutes)	
min	1
max	8

→ Basit bir bakkaliye bir kontrol sayıcısına sahiptir.

→ Müşteriler 1 ile 8 dk arasında değişen, rastgele bir kontrol sayıcı ile verir.

→ Her birinin olasılığı eşittir.

→ Servis zamanları 1 ile 6 arasında değişir. Olasılıkları aşağıdaki tablodadır.

→ Amaç; 100 müşteri üzerinde varış ve servis zamanlarını simüle ederek sistem performansını ölçmek.

	Service Times (minutes)	Probability	Cumulative Probability
7	1	0,10	0,10
8	2	0,20	0,30
9	3	0,30	0,60
10	4	0,25	0,85
11	5	0,10	0,95
12	6	0,05	1.00

B	C	D	E	F	G	H	I	J
		Simulating	Table					
Step	Activity	Clock	Activity	Clock	Output	Clock	Output	Output
Customer	Interarrival Time (minutes)	Arrival time (Varış zamanı)	Service time (minutes)	Servis başlama zamanı	Kuyrukta bekleme zamanı	Servis bitme zamanı	Sistemdeki Müşteri hizmetlerinin süresi	Server'ın boş kalma süresi
1	0	0	2	0	0	2	2	—
2	5	5	2	5	0	7	2	3
3	5	10	4	10	0	14	4	3
4	4	14	4	14	0	18	4	0
5	2	16	3	18	2	21	5	0
6	8	24	2	24	0	26	2	3
7	7	31	3	31	0	34	3	5
8	8	39	5	39	0	44	5	5
9	5	44	1	44	0	45	1	0
10	2	46	6	46	0	52	6	1
11	1	47	4	52	5	56	9	0

1-8 arasında rastgele üretilen bir değer

Yanda gösterilmiştir. Canlar

(Sonraki) Interarrival time + (Önceki) Arrival time = Sonraki müşterinin arrival time

İki olay arasında geçen zaman + Varış zamanı = Sonraki müşterinin Varış zamanı

Servis zamanı + Servis başlama zamanı = Servis bitiş zamanı

Servis başlama zamanı − Varış zamanı = Kuyrukta bekleme zamanı

Sonraki işin varış zamanı − Önceki işin bitiş zamanı = Server'ın boş olduğu zaman

ÖRNEĞİN: Tabloda 2 müşterinin geliş zamanı = 5

1. müşterinin servis bitiş zamanı = 2

Server'ın boşta kaldığı süre = 5 − 2 = 3

STOKASTİK DİRETEÇLER

(Viteria Son Konusu)

$y = mx + n$

$-1 \quad 0 = 2m + n$

$\frac{1}{2} = 4m + n$

$2m = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{4}$

$n = -\frac{1}{8}$

$\frac{1}{2} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{8}\right)\Big|_2^x$

$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{8} - \left(2 - \frac{1}{4}\right)$

$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{8} - \frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{4x^2 - x - 14}{8} + \frac{1}{2} = 0$

$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{8} - \frac{5}{4}$

$\frac{4x^2 - x - 10}{8} = 0$

$\frac{1}{2}$

$(x-2)(4x+7) = 8 \cdot 0 - \frac{1}{2}$

RASTGELE SAYI VE DEĞİŞKEN ÜRETEÇLERİ

→ Gerçek sistemlerin olasılıklı, stokastik davranışı her zaman düzgün (uniform) dağılımla açıklanamaz.

→ Bir sistem içinde karşılaşılan stokastik işlemler, uniform dağılımdan daha çok diğer teorik dağılımlarla (üstel, normal, gamma ...) açıklanabilmektedir.

→ Bu nedenle uniform dağılımdan [0,1] aralığında elde edilen rassal sayıların teorik veya deneysel dağılımlara dönüştürülmesi gerekir.

→ Bunun için bir dönüşüm tekniği kullanılarak, 0-1 aralığında düzgün dağılımdan üretilen rassal sayı, istenilen dağılım türünden bir rassal değişkene dönüştürülür.

RASTGELE SAYI

→ Herhangi bir dağılımdan rassal değişken üretmek veya bir rassal süreç üretmek için U(0,1) rassal değişkenleri gereklidir.

→ Bu nedenle kullanılan bilgisayarda istatistiksel olarak güvenilir bir rassal sayı üreteci olmalıdır. Eğer yoksa bir alt programı olarak hazırlanıp yüklenebilir.

→ Stokastik faaliyetler konu olan benzetim modellerinde, olasılık dağılımlarından rassal değişken üretmek için rassal sayılar gereklidir. Bu nedenle Monte Carlo bunla uğraşan deneysel matematiğin bir dalıdır.

RASTSAL SAYI ÜRETEÇLERİNDEN İSTENEN ÖZELLİKLER

1. Rassallık
2. Büyük Periyod
3. Yeniden üretilebilirlik (Reproducibility)
4. Hesaplama etkenliği

TEK-DÜZE DAĞITIMLI RASTGELE SAYILAR

→ Dil derleyicileri [0,1] aralığında tekdüze dağılımlı rastgele sayılar için olanak sağlar. Böyle yaratımlar $U(0,1)$ olarak bilinir.

→ Örneğin; BASIC dilinde RND çağrısı $0 <= x <= 1$ aralığında bir x kesiri döndürecektir.

→ Bu, ayrık bir rastgele değişkendir; fakat pratikte sürekli olduğu varsayılır.

→ 100 defa RND fonksiyonunu çağırırsanız kabaca %10'u 0 ile 0.1 arasında, %10'u 0.1 ile 0.2 arasında ... dağılımlar oluşacaktır.

RASSAL SAYI ÜRETİMİ İÇİN TEKNİKLER

① Orta Kare Yöntemi → karesini al ortadan seç eksikse 0. ekle

② LCG → $(a z_0 + c) \bmod m$ $\quad u_i = \frac{z_0}{m}$

③ Hull-Dobell Yöntemi

1-) ORTA KARE YÖNTEMİ :

1-) (m) basamaklı ve genellikle tek olan bir sayı başlangıç değeri olarak alınır.

2-) Bu sayının karesi alınır. Elde edilen sonucun ortasındaki (m) kadar basamaklı sayı alınır.

3-) Bu bir rassal sayı olarak kaydedilir.

4-) Tekrar bu rassal sayının karesi alınır ve yine sonucun ortasındaki (m) basamaklı sayı, bir rassal sayı olarak kaydedilir.

5-) Bu işlem istenilen sayıda rassal sayı elde edilinceye kadar devam eder.

ÖRNEK: $X_0 = 5497$ olarak seçilsin. Orta Kare yöntemi ile üç sayı üretiniz.

ÇÖZÜM:

$X_0 = 5497$ → 4 basamaklı ($m=4$) → Karesini alalım.

$X_0^2 = 30217009$ → ortasında kalan 4 basamaklı sayı = 2170

(1) $X_1 = 2170$ → $U_1 = 0.2170$ ($U(0,1)$ olduğundan)

↳ 1. rassal sayımız.

$X_1 = 2170$ → $X_1^2 = (2170)^2 = 4708900$ → ortadaki 4 basamaklı sayı

(2) $X_2 = 7089$ → $U_2 = 0.7089$

↳ 2. rassal sayımız.

$X_2 = 7089$ → $X_2^2 = (7089)^2 = 50253921$ → ortadaki 4 basamaklı sayı

(1) $X_3 = 2539$ → $U_3 = 0.2539$

↳ 3. rassal sayımız.

BU TEKNİĞİN DEZAVANTAJLARI

- İlk sayı ve dizinin tekrar uzunluğu arasındaki ilişkiyi (peryod) önceden bilmek mümkün değildir. Çoğu kez tekrar uzunluğu kısadır.
- Elde edilen sayılar rassal olmayabilir. Yani dizide dejenerasyon sözkonusu olabilir.
- Bu yöntemle, belirli bir sayı adımdaki işleme başlangıç değeri (seed) olarak verilmekte ve buna bağlı olarak bir sayı hesaplanmaktadır. Hesaplanan sayı bu kez başlangıç değeri alınmakta ve yeni bir sayı üretilmektedir. Böylece her üretilen sayıdan, yeni bir sayı üretilerek bir sayı dizisi elde edilmektedir.

2-) LCG (Linear Congruential Generators = Lineer Eşkalıksal Üreteçler)

→ Tek düzen rastgele sayı üreteçlerinin çoğu LCG şeklindedir.

→ Bunlar genelde deterministik olup bir algoritmaya bağlıdır.

→ LCG tahmin edilemez gibi görünen bir dizi sayılar oluştur.

→ Başlamak için bir ilk değer çekirdeğe Z_0 ihtiyaç duyar.

→ Bu çekirdek ve Z_k dizisinin ardışıl terimleri bir LCG formülüne uygulanır.

→ Aranılan Z_k, $0 \leq U_k \leq 1$ aralığında bir U_k çıkışına

dönüştürülür.

→ Yani;

Z_0 = "çekirdek" , X_0

$$Z_{k+1} = (a \cdot Z_k + c) \bmod m \qquad X_{k+1}$$

$$U_k = \frac{Z_k}{m} \qquad X_k$$ → rassal değer bulunur

a: çarpan

c: artım

m: genlik

ÖRNEK: $a=5$, $c=3$, $m=16$ ve $Z_0=7$ değerleri ile LCG kullanarak oluşturulan sayı dizisini belirleyelim.

ÇÖZÜM

$$U_0 = \frac{Z_0}{m} = \frac{7}{16} \Rightarrow U_0 = 0.4375 \qquad Z_{k+1} = (a \cdot Z_k + c) \bmod m$$

$$Z_{k+1} = (5 \cdot Z_k + 3) \pmod{16}$$

$$Z_1 = (5 \cdot Z_0 + 3) \pmod{16} \Rightarrow Z_1 = 5 \cdot 7 + 3 \pmod{16} = 38 \pmod{16} \Rightarrow Z_1 = 6$$

$$U_1 = \frac{Z_k}{m} = \frac{Z_1}{m} = \frac{6}{16} \Rightarrow U_1 = 0.375$$

$$Z_2 = (5 \cdot Z_1 + 3) \pmod{16} \Rightarrow Z_2 = 5 \cdot 6 + 3 \pmod{16} = 33 \pmod{16} \Rightarrow Z_2 = 1$$

$$U_2 = \frac{Z_2}{m} = \frac{1}{16} \Rightarrow U_2 = 0.0625$$

⟹ Burada Z_k, m ile bölümü sonucu elde edildiğinden, sadece m adet kalan vardır. Bu örnek için maximum 16 rastgele sayı bulmak mümkündür.

⟹ Büyük m değerleri için iyi bir seçim elde etmek gereklidir.

⟹ m adet tekrar için m farklı sayının oluştuğu durumda seçilen LCG'nin tam peryoda sahip olduğu söylenir.

⟹ Bu her bir Z_k bir kez tekrar ettiği için tam peryod oluşmaktadır.

⟹ Bu örnek tam peryoda sahiptir ve üretilen tesadüfi değerler şu şekildedir:

k	Z_k	U_k
0	7	0.4375
1	6	0.375
2	1	0.062
3	8	0.500
4	11	0.688
5	10	0.625
6	5	0.313
7	12	0.750
8	15	0.938
9	14	0.875
10	9	0.563
11	0	0.000
12	3	0.188
13	2	0.125
14	13	0.813
15	4	0.250

- Dizinin ilk 16 elemanı yandaki gibidir.
- m tekrarlı bir durum için m tane farklı rastgele sayı oluştuğundan LCG seçimi tam peryoda sahiptir.
- Z_k nın bir tekrarında tam bir döngü izler.
- Buradaki LCG tam peryoda sahiptir.

16'yı hesaplayalım $Z_{16} = 5 \cdot Z_{15} + 3 \pmod{16}$

$= 5 \cdot 4 + 3 \pmod{16}$

$= 7$

$U_{16} = \frac{Z_{16}}{m} = \frac{7}{16} = 0.4375 \longrightarrow U_0$'la aynısı (Bu yüzden max m farklı değer üretmiş oldu)

3.) Hull - Dabell Teoremi

⇒ Bu teorem tam periyodu elde etmek için gerekli ve yeterli şartları sağlar.

⇒ LCG ancak ve ancak aşağıdaki üç şartı sağlarsa tam periyodlu sahiptir.

(I) a ve c asal olmalı.

(II) m sayısının bölünebildiği bütün asal sayılara, a-1 de bölünebilmeli.

(III) Eğer m 4 le bölünebiliyorsa a-1 de 4'le bölünmeli.

⇒ Örneğin; önceki örnekte a=5 c=3 m=16 ve $z_0 = 7$ değerleri verilmişti.

* 3 ve 5 asaldır (I. şart)
* 16 nın bölünebildiği asal sayılar: 2 . a-1 = 5-1 = 4 . a-1 de 2 ye bölünmeli. 4, 2 ye bölünür. (II. şart)
* Eğer m=16, 4 'e bölünebiliyorsa (ki bölünebiliyor) a-1 de 4'le bölünebilir (ki a-1=4) (III. şart)

⇒ Bütün şartlar sağlandığı için tam periyodu sahiptir.

⇒ Bir bilgisayar uygulaması bu algoritmayı donanım aşamasında ele alır. Çünkü işlemler hesaplama ve hız odaklıdır.

⇒ İşlem makineye shift registerı kullanılarak yaptırılır.

⇒ m, 2 nin kuvveti şeklinde ele alınır.

* Yukarıdaki örnekte ele $m = 16 = 2^4$ tür. Dolayısıyla LCG, 4-bit shift registerı ile tamsayıları gösterebilir.

$$Z = [\, r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4 \,]$$

Register uzunluğu 4 bit alınacaktır.

* $Z_4 = 5$ olduğundan $R_1 = [0101]$ dir. Z_5 yi elde etmek için;
* $Z_5 = 5 \cdot Z_4 + 3 = R_1 : [1100] = 28$ Burada bastaki 1 shift register 4 bit olduğundan kaybediliyor $28 \pmod{16} = 12 = R_1 : [1100]$
* $R_1 \leftarrow 5R_1 + 3 : [1111]$ elde edilir $Z_6 = 15$ olur.
* İkili nokta uygulandığında $(0.1100)_2 = 0.75$ olur.

→ Gerçek bilgisayarlarda farklı şekilde üreteçler vardır. IBM'in RANDU üreteci, $a = 2^{16} + 3$, $c = 0$ ve $m = 2^{31}$ değerlerine sahiptir.

ÜRETEÇLERİN İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ

→ Dönemin hesaplanabilirliği için seçilen mod işlemi ve geniş bir periyoda sahip olmanın yanı sıra bir $U[0,1]$ üreteci istatistiksel anlamda iyi olmalıdır. Şu iki özelliğin sağlanması önemlidir.

- Üreteç Tekdüze Olmalı: Herhangi bir L uzunluk aralığında oluşan sayıların miktarı, diğer bir L uzunluk aralığında oluşan miktara yakın olmalı.
- Dizi Bağımsız Olmalı: Herhangi bir sayı, bir sonrakine etkisini göstermemeli. Aksi halde ciddi boşluk veya gruplama eğilimi gösterir.

→ Üreteçleri test etmek için teorik ve deneysel araçlar vardır.

→ Birinci özelliği test etmek için Chi-Square (Ki-kare) testi uygulanır.

→ Ki-Kare Testi; beklenen frekans değerler ile gözlenen frekans değerlerinin karşılaştırılıp aradaki uyuma bakılmasıdır.

$$\sum \frac{(f_1 - e_2)^2}{e_i}$$

Frekans Dağılım tablosu

Aralık sayısı k	Aralık	Deneysel frekans (f_k)	Beklenen frekans (e_k)
1	$[0, 1/m]$	f_1	e_1
2	$[1/m, 2/m]$	f_2	e_2
3	$[2/m, 3/m]$	f_3	e_3
⋮	⋮	⋮	⋮
m	$[\frac{m-1}{m}, 1]$	f_m	e_m

→ Bu test için FDT (Frequency Distribution Table) faydalanılır.

→ n tane rastgele sayı oluşturularak ve her birini bir m sınıfına atayarak $f_1, f_2 \dots, f_m$ frekansları elde edilir.

→ Her bir sınıf için beklenen $e_k = \frac{n}{m}$ frekansı ile karşılaştırılır.

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(f_k - e_k)^2}{e_k} = \frac{m}{n} \sum_{k=1}^{m} \left(f_k - \frac{n}{m}\right)^2$$

(f_k: gözlenen değerler, e_k: beklenen)

→ $\nu = m - 1$ bağımsızlık derecesi.

ÖRNEK: SNAFU olarak işaretlenen $U[0,1]$ üreteci 100 sayı üretilerek test edilmiş ve frekanslar sayılmıştır. Frekans değerleri aşağıda verilmiştir. Üreteç verilen dağılıma uymadığını bulunuz.

$0.00 \le x < 0.25$ Sonuçlar; $f_1 = 21$
$0.25 \le x < 0.50$ $f_2 = 31$
$0.50 \le x < 0.75$ $f_3 = 26$
$0.75 \le x < 1.00$ $f_4 = 22$ dir. Üreteç verilen dağılıma uymadığını bulunuz.

Çözüm: $n = 100$ → örnek sayısı
$m = 4$ → aralık sayısı
} → n/m her sınıfta olması beklenen sayıların sayısı. $\frac{n}{m} = \frac{100}{4} = 25$

Kikare testinin formülü;

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} \Rightarrow \chi^2 = \frac{(21-25)^2}{25} + \frac{(31-25)^2}{25} + \frac{(26-25)^2}{25} + \frac{(22-25)^2}{25}$$

$$= \frac{16}{25} + \frac{36}{25} + \frac{1}{25} + \frac{9}{25} = \frac{62}{25} = 2.48$$

→ Ki kare tablosunun 3. satırı

→ Bağımsızlık derecesi $v = m - 1 \Rightarrow v = 4 - 1 = 3$. x^2 değeri;

$\alpha = \%0.95$ $x_c^2 = 7.81$ olduğu ki kare tablosundan bulunabilir.

→ $x^2 < x_c^2$ olduğundan Uniform olduğu söylenebilir.

v	0.10	0.05	0.02	0.01
1	..	..	..	..
2	..	..	..	..
3	6.251	7.815	9.837	11.341

} Ki kare tablosunun bir kısmı

TEKDÜZE OLMAYAN RASTGELE DEĞİŞKENLERİN ÜRETİMİ

→ İsteğe bağlı sayıları oluşturabilmek için, bilinen bazı algoritmalar;

① Ters Dönüşüm Metodu

② Red Metodu

③ Konvolüsyon Metodu

1-) Ters Dönüşüm Metodu

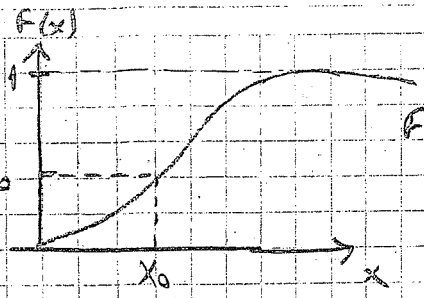
$f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun verildiğini kabul edelim. Amaç; $f(x)$ 'ten bir rassal değişken üretmektir.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \qquad 0 \le F(x) \le 1$$

$u = F(x)$ için $x = F^{-1}(u)$ ters fonksiyon

$u \sim u(0,1)$

Yani; x 'e karşılık gelen u terimi üretilmesi gerek.



$F^{-1}(u) = x$ ifadesi; u değerlerine karşılık gelen x değerlerini bulur.

→ $0 \leq F(x) \leq 1$ F(x) artan bir fonksiyondur.

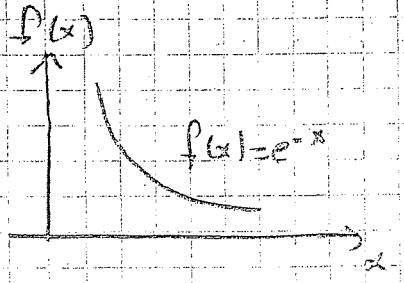
→ Algoritması

1. $U \sim u(0,1)$ rastgele değişken üret
2. $x = F^{-1}(u)$ den X rastgele değerini hesapla
3. RETURN

NOT Hangi dağılımlar için rassal değişkenler üretilir?

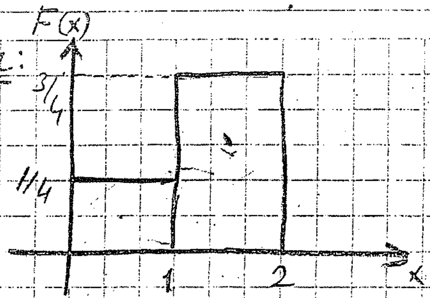
→ Üssel
→ uniform
→ üçgen dağılım
→ sürekli ve ayrık deneysel dağılımlar.

NOT Üstel fonksiyonda f(x) şöyledir:



$0 \leq f(x) \leq 1$ olmalı.

ÖRNEK:



$$F(x) = \begin{cases} 1/4 & 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Yukarıda verilen F(x) parçalı fonksiyonunu kullanarak rassal değişken üretiniz?

Çözüm: 1. Adım F(x) in integralini al ($0 \leq x \leq 1$ aralığı için)

2. Adım Değişken üret

$0 \leq x \leq 1$ aralığı için;

$$u = \int_0^x \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}x \Big|_0^x = \frac{1}{4}x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$\frac{x}{4} = u$ $x = 4u$

$0 \leq x < 1$

$0 \leq u < \frac{1}{4}$

$$u = \frac{x}{4} \Rightarrow \boxed{x = 4u} \Rightarrow \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq 4u \leq 1 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{0 \leq u \leq 1/4}$$

Yani;

$$\begin{cases} x = 0 & u = 0 \\ x = 1 & u = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$1 \leq x < 2$ aralığı için;

$$u = \int_0^1 \frac{1}{4}dx + \int_1^x \frac{3}{4}dx = \frac{1}{4}x \Big|_0^1 + \frac{3}{4}x \Big|_1^x \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$u = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \xrightarrow{x \text{ i yalnız bırak}} \boxed{x = \frac{4}{3}u + \frac{2}{3}}$$

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 4u & 0 \leq u < \frac{1}{4} \\ \frac{4}{3}u + \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \leq u < 1 \end{cases}$$

x→u Integral hesabı ;

$$u = \int_0^1 \frac{1}{4}\,dt + \int_1^x \frac{3}{4}\,dt = \frac{1}{4}t\Big|_0^1 + \frac{3}{4}t\Big|_1^x = \frac{1}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{3}{4}$$

$$u = \frac{3x}{4} - \frac{1}{2}$$

x 'i yalnız bırakırsak ;

$$x = \frac{4u}{3} + \frac{2}{3}$$

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 4u & 0 \le u \le 1/4 \\ \frac{4u}{3} + \frac{2}{3} & 1/4 \le u \le 1 \end{cases}$$

ÖRNEK:

$$F(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \ge 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$ olasılık yoğunluk fonksiyonu

Verilmiştir. $F^{-1}(u) = ?$

Çözüm: Verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu; aynı zamanda kümülatif olasılık yoğunluk fonksiyonudur. (eğrs altındaki alan)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} F(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$u = 1 - e^{-\lambda x} \quad = e^{-\lambda x} = 1 - u \quad \text{(iki tarafın ln'ini al)}$$

$$-\lambda x = \ln(1-u)$$

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$$

1 İntegral al
2 u'ya eşitle
3 x 'i yalnız bırak

Son olarak rassal u değişkenleri üret. Buna karşılık gelen x'i hesapla

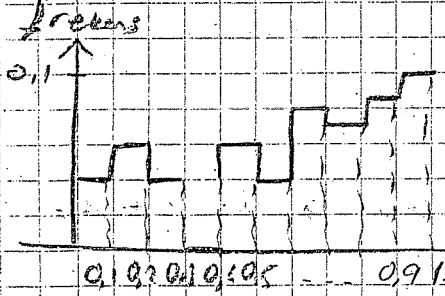
$\lambda = 1$ olsun. Hesaplanan u'lar

0.1306 0.0622 0.6597 0.7915 0.7696

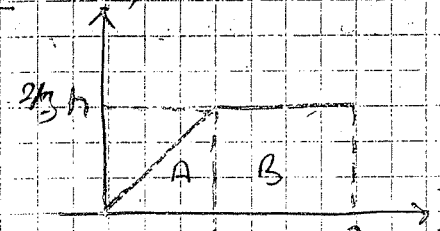
$\lambda = 1$ ise $\Rightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u) \Rightarrow x = -\ln(1-u)$

$u = 0.1306$ için $x = ?$

$u = 0.0622$ için $x = ? \Rightarrow x = 0,063$



ÖRNEK: $F(x)$



$F(x)$ e uygun rassal değişken üreten algoritmayı ters dönüşüm ile çıkarınız.

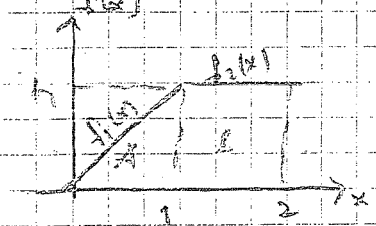
$[0,1]$

$\frac{3 \cdot h}{2} = 1$

$h = \frac{2}{3}$

$y = m(x - x_0)$ $\quad 1-x$ $\quad y = m \cdot x$

Çözüm:



(0,1) aralığında çalıştığımızdan eğri altındaki alan maximum 1 olabilir. $A + B = 1$

$1 \cdot h + \frac{1 \cdot h}{2} = 1 \Rightarrow h = \frac{2}{3}$

$f_1(x) = h \cdot x \rightarrow$ orijinden geçer

$f_2(x) = h \rightarrow$ sabit

$$F(x) = \begin{cases} hx & 0 \le x \le 1 \\ h & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & 0 \le x \le 1 \quad \text{I} \\ \frac{2}{3} & 1 \le x \le 2 \quad \text{II} \end{cases}$$

I $\quad u = \int_0^x \frac{2}{3}x\,dx = \frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{3}\Big|_0^x = \boxed{\frac{x^2}{3}}$

II $\quad u = \int_0^1 \frac{2}{3}x\,dx + \int_1^x \frac{2}{3}\,dx = \frac{x^2}{3}\Big|_0^1 + \frac{2x}{3}\Big|_1^x = \frac{1}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}$

I $\rightarrow u = \frac{x^2}{3} \Rightarrow x^2 = 3u \Rightarrow \underline{x = \sqrt{3u}}$

$0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le \sqrt{3u} \le 1 \Rightarrow 0 \le 3u \le 1 \Rightarrow \boxed{0 \le u \le \frac{1}{3}}$

II $\rightarrow u = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\frac{3}{2}\left(u + \frac{1}{3}\right) = x}$

$1 \le x \le 2 \Rightarrow 1 \le \frac{3}{2}\left(u + \frac{1}{3}\right) \le 2 \Rightarrow \frac{2}{3} \le u + \frac{1}{3} \le \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{3} \le u \le 1}$

Sonuç:

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} \sqrt{3u} & 0 \le u \le \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2}\left(u + \frac{1}{3}\right) & \frac{1}{3} \le u \le 1 \end{cases}$$

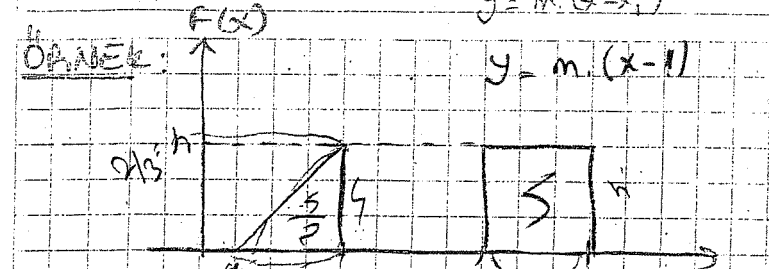
$3u$

ALGORİTMA

1. $u \sim U(0,1)$
2. If $u \le \frac{1}{3} \Rightarrow x = \sqrt{3u}$
3. If $u \ge \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{2}\left(u + \frac{1}{3}\right)$
4. RETURN

$y = m.(x - x_1)$

ÖRNEK:

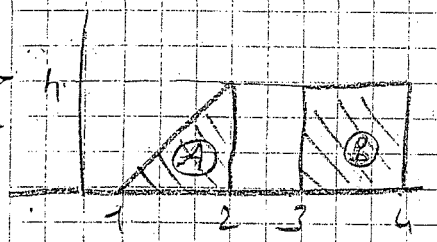


$y = m.(x-1)$

F(x) fonksiyonunun ters dönüşüm tekniği ile rassal değişken üreten algoritmayı yazınız.

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & 1 \le x \le 2 \\ f_2(x), & 3 \le x \le 4 \end{cases}$$



$A + B = 1 \Rightarrow \frac{1.h}{2} + 1.h = 1 \Rightarrow \frac{3h}{2} = 1$

$h = \frac{2}{3}$

$f_1(x) \Rightarrow (1,0)$ noktasından geçmekte bir doğrusu verilen değişken elemanı; $f_1(x) = m.(x - x_1)$ ile bulunur. $m = \tan\alpha = \frac{2/3}{1} = \frac{2}{3}$

$$f_1(x) = \frac{2}{3}.(x-1) \Rightarrow \boxed{f_1(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}$$

$f_2(x) \Rightarrow$ sabit h noktasında olduğundan $f_2(x) = \frac{2}{3}$ dür.

F(x) fonksiyonum $\Rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}, & 1 \le x \le 2 \quad (I) \\ \frac{2}{3}, & 3 \le x \le 4 \quad (II) \end{cases}$$

(I) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$, $1 \le x \le 2$

$$u = \int_1^x \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right) dx = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x \Big|_1^x = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\boxed{u = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}$$

$u = \frac{1}{3}(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow 3u = (x-1)^2 \Rightarrow \boxed{x = 1 + \sqrt{3u}}$

$1 \le x \le 2 \Rightarrow 1 \le 1 + \sqrt{3u} \le 2 \Rightarrow 0 \le \sqrt{3u} \le 1$

$0 \le 3u \le 1$

$$\boxed{0 \le u \le \frac{1}{3}}$$

(II) $\frac{2}{3}$, $3 \le x \le 4$

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right) dx + \int_3^x \frac{2}{3}\, dx = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x \Big|_1^2 + \frac{2}{3}x \Big|_3^x = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x - 2$$

$$\boxed{u = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}}$$

$u = \frac{1}{3}(2x - 5) \Rightarrow 3u = 2x - 5 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3u+5}{2}}$

$3 \le x \le 4 \Rightarrow 3 \le \frac{3u+5}{2} \le 4 \Rightarrow 6 \le 3u + 5 \le 8$

$1 \le 3u \le 3$

$$\boxed{1/3 \le u \le 1}$$

Sonuç:

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 1 + \sqrt{3u} & , \ 0 \le u \le \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2}u + \frac{5}{2} & , \ 1/3 \le u \le 1 \end{cases}$$

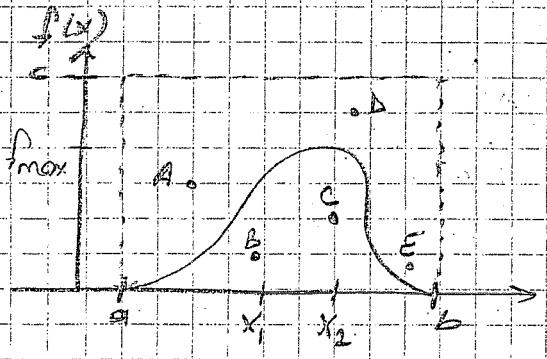
2-) REDDETME TEKNİĞİ

Bu teknik, sürekli ve sınırlı olan herhangi bir $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonundan rassal değişken üretmek için kullanılan genel bir metodudur.

Sürekli bir x rassal değişkeni için

$$0 \le f(x) \le f_{max} \qquad a \le x \le b$$ dir.

Reddetme tekniği, direkt teknikler başarısız veya etkin olmadığında kullanılır.



$a \le x \le b$ ve $0 \le y \le c$

- $f(x)$ yoğunluk fonksiyonudur.
- Kare kutuya hedef denir.
- Algoritma, hedef alanına rastgele düşen noktalar dizisini seçer.

$$c = \int_0^{f(x)} \frac{f(x)}{c} = f(x)$$

- x ve y koordinatları için;

$$x = a + b - a * RND$$
$$y = c * RND$$

$x = a + b - a * RND$

$y = c * RND$

If $y > f x$ then go to 1

Print x

- A, D ve E noktaları, hedefin içinde olmasına rağmen, eğrinin dışında olduğundan örneklenmez.
- B ve C nin x_1 ve x_2 noktaları, iki rastgele değişkendir.

Reddetme Tekniğinin Adımları:

→ Öncelikle bir t fonksiyonunun tanımlanması gerekir.

→ Her x_i için $t(x) \geq f(x)$ olmalıdır.

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\,dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

→ $t(x)$ fonksiyonu bir olasılık fonksiyonu değildir çünkü $c > 1$

→ $r(x) = \frac{t(x)}{c}$ bir olasılık fonksiyonudur. Çünkü;

$$r(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t(x)\,dx}{c} = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} t(x)\,dx = \frac{1}{c}\cdot c = 1$$

→ $r(x)$ olasılık fonksiyonundan y rassal değişkeni aşağıdaki algoritma ile üretilebilir.

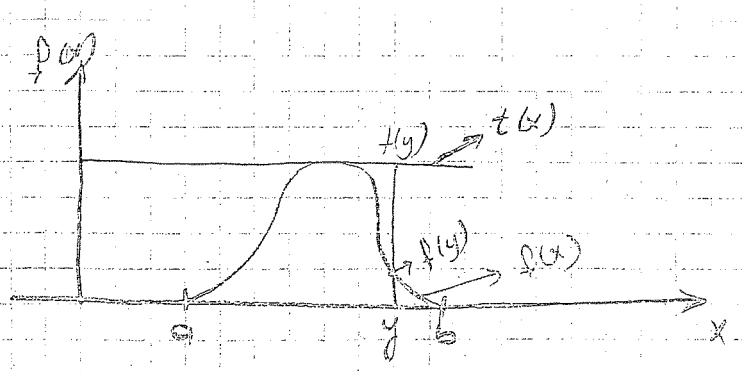
(1) $r(x)$ yoğunluk fonksiyonundan y rassal değişkeni üret

$U_1 \sim U(0,1)$; $y = x$

(2) $U_2 \sim U(0,1)$ üret (y den bağımsız)

(3) $U_2 \leq \frac{f(y)}{t(y)}$ ise $x = y$ AND RETURN

değilse goto 1 (YENİDEN DENE)



ÖRNEK $t(x)=q$ olsun. Reddetme tekniğini gösteriniz $[a,b]$

Çözüm

1-) $c=\int_a^b t(x)dx=\int_a^b q\,dx = qx\Big|_a^b = qb-q.a \Rightarrow \boxed{c=q(b-a)}$

2-) $r(x)=\dfrac{t(x)}{c}=\dfrac{q}{q(b-a)} \Rightarrow \boxed{r(x)=\dfrac{1}{b-a}}$

3-) $r(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{diğer durumlar}\end{cases}$

4-) Ters dönüşüm metodu kullanılarak $r(x)$ yoğunluk fonksiyonundan $[a,b]$ aralığında rassal bir değişken üretilebilir.

$R(x)=\int_a^y r(x)dx = u$

$=\int_a^y \dfrac{1}{b-a}dx = \dfrac{1}{b-a}x\Big|_a^y = \dfrac{y}{b-a}-\dfrac{a}{b-a} \Rightarrow \boxed{u=\dfrac{y-a}{b-a}}$

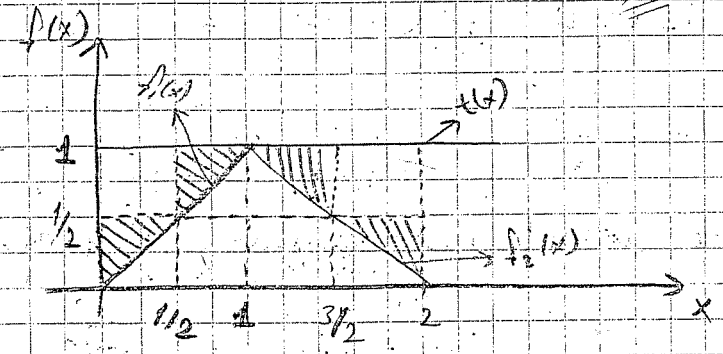
$\boxed{y=u(b-a)+a}$

Bu Arada Bi Beta Dağılımı Var Slaytta

Anlamadım ?!

ÖRNEK: $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$ Reddetme tekniği ile rassal değişken üretiniz.

ÇÖZÜM: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2-x$ olsun. Sabit bir $t(x)$ değeri tanımlayalım.



$x = 2-x \Rightarrow 2x = 2$, $x = 1$ kesişim noktası

$0 \le x \le 1$ ve $1 \le x \le 2$ aralıklarını birleştir.

$0 \le x \le 2$

(Burası benim yorumum gerçeğin bilmiyorum)

Yani; $t(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{diğer durumlar.} \end{cases}$

1-) $c = \int_0^2 1\,dx = x\Big|_0^2 \Rightarrow \boxed{c = 2}$

2-) $r(x) = \dfrac{t(x)}{c} \Rightarrow \boxed{r(x) = \dfrac{1}{2}}$

3-) $r(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$

4-) Ters Dönüşüm tekniği uygulayalım

$u = F_1(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^x \Rightarrow \boxed{u = \frac{1}{2}x}$ $\quad \boxed{x = 2u}$

$y = x^2$

$0 \le x \le 2 \Rightarrow 0 \le 2u \le 2 \Rightarrow \boxed{0 \le u \le 1}$

$$f^{-1}(u) = \begin{cases} 2u, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

DENEYSEL SÜREKLİ DAĞILIMLAR

(İLHAN HOCA KİTAPTAN YAZDIRDI)

* Burada amaç; elimizdeki deneysel verilerden rassal değişken üretmektir.

* ÖRNEK: Yangın alarmı şu dakikalarda gelmiştir. 2.76, 1.83, 0.8, 1.45, 1.24. Bu verileri kullanıp rassal değişken üretiyoruz, bunlara karşılık gelen değerleri bulmak istiyorum.

(1) Eldeki verilerden (x_i'ler) maximum olanı bul. ($\max x_i = 2.76$)

(2) Verileri küçükten büyüğe doğru sırala. (0.8, 1.24, 1.45, 1.83, 2.76)

(3) Bu veriler arasında parçalı fonksiyon tanımla.

(4) $n = 5 \rightarrow$ veri sayısı. Yani her biri için olasılık değeri $\frac{1}{5}$ tir.

$$\text{Eğim} = a_i = \frac{x_i - x_{(i-1)}}{\frac{i}{n} - \left(\frac{i-1}{n}\right)} = \frac{x_{(i+1)} - x_{(i-1)}}{\frac{1}{n}} \qquad \left(x_{(i+1)} - x_{(i-1)}\right) \cdot n$$

$$x_{((i+1))} = x_{(i)} + a_i$$

Tabloya dönüştürelim;

i	$x_{(i-1)} < x < x_{(i+1)}$	Olasılık $1/n$	Kümülatif Olasılık (toplam olasılık)	a_i
1	$0 < x < 0.8$	0.2	0.2	4
2	$0.8 \le x < 1.24$	0.2	0.4	2.90
3	$1.24 \le x < 1.45$	0.2	0.6	1.05
4	$1.45 \le x < 1.83$	0.2	0.8	1.90
5	$1.83 \le x < 2.76$	0.2	1	4.65

Deneysel veri

$x_{i-1} + a_i \cdot \left(u - \frac{(i-1)}{n}\right)$

$X = F^{-1}(u)$ şöyle verilmiştir:

$$X_i = X_{(i-1)} + a_i \cdot \left(u - \frac{(i-1)}{n} \right)$$ ⇒ Olasılık yoğunluk fonksiyonu

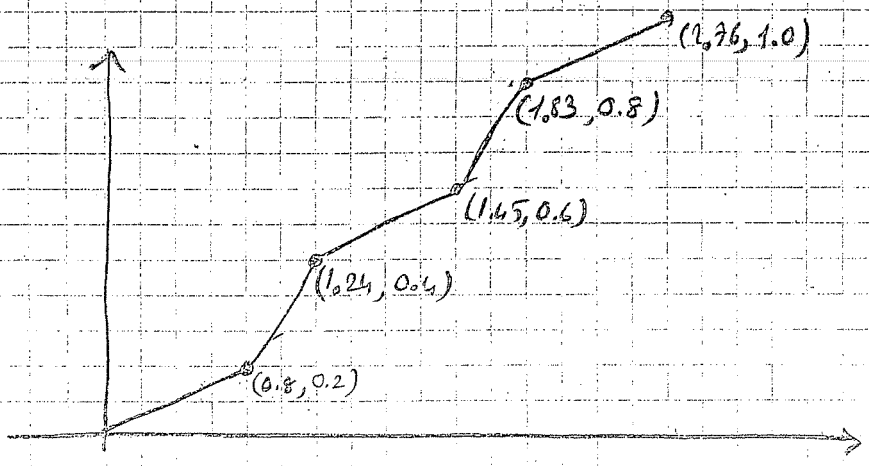
Örneğin: $u = 0.71$ olsun. 0,71 değeri kümülatif olasılıkların 0.8 den küçüktür. Bu nedenle $i=4$ için verilen aralık kullanılır. $(1.45 < x < 1.83)$

$$X_1 = X_{(4-1)} + a_4 \cdot \left(0.71 - \frac{(4-1)}{5} \right)$$

$$X_1 = X_3 + a_4 \cdot \left(0.71 - \frac{3}{5} \right)$$

$$X_1 = 1.45 + 1.90 \cdot (0.71 - 0.60)$$

$$\boxed{X_1 = 1.659}$$ şeklinde bulunur.



ÖRNEK: 100 makinenin tamir zamanları aşağıdaki gibidir.

i	Aralık	frekans	olasılık	kümülatif olasılık (c_i)	a_i
1	$0.25 < x < 0.50$	31	0.31	0 – 0.31	0.81
2	$0.5 < x < 1.0$	10	0.10	0.31 – 0.41	5.0
3	$1.0 < x < 1.5$	25	0.25	0.41 – 0.66	2.0
4	$1.5 < x < 2.0$	34	0.34	0.66 – 1.00	1.47

↳ Açıklama: 31 tane makine $0.25 < x < 0.50$ saat aralığında tamir edilmiş ($i = 1$ için)

$u = 0.83$ olduğuna göre buna karşılık gelen $x = ?$

Çözüm:

$u = 0.83$ kümülatif olasılıklardan 1.00 değerinden küçüktür. Bu yüzden $i = 4$ için verilen aralık kullanılır

$(1.5 < x < 2.0)$

$$x = x_{i-1} + a_i \left(u - \frac{i-1}{n}\right)$$

$$x = x_{4-1} + a_4 \left(0.83 - \frac{4-1}{34}\right) = x = 1 + 1.47(0.83 - 0,088)$$

(frekans)

$$= \boxed{x = 1.7417}$$

$u = 0.33$ için $x = ?$

0,33 değeri küm. olasılıklardan 0.41 den küçüktür. $i = 2$ kullanılır.

Frekanslı olan formül

$$\boxed{x = x_{i-1} + a_i (u - c_{i-1})}$$ → Yukarıdakine de (hepsine de) bunu uygulayabilirsin

$x = x_{2-1} + a_2 (u - c_{2-1})$

$x = 0.5 + 5(0.33 - 0.31)$

$\boxed{x = 0.6}$

Yukarıdaki formülü buradaki örneğe uygularsan cevap gelmiyor ?!!!

$m = 2^b$ $c = 0$ tek

HOCANIN YAZDIRDIĞI HULL-DOBEL TEOREMİ

("Kesinlikle bilin" dedi)

1-) m için ; $m = 2^b$ seçilir $c \neq 0$ ise en uzun periyot $p = m = 2^b$ dir.

Eğer c ile m aralarında asal ise $a = 1 + 4k$ olmalı.

2-) $m = 2$ nin kuvveti $\Rightarrow$ $m = 2^b$ ve $c = 0$ ise en uzun periyot

$p = \frac{m}{4} = 2^{b-2}$

Eğer x çarpanı x_0 = tek ise ve $a = 3 + 8k$ veya $a = 5 + 8k$ olur.

3-) m asal sayı ve $c = 0$ ise en uzun periyod $p = m - 1$ olur. Eğer a çarpanı $a^k = 1$ için. (k en küçük tamsayı seçilir)

ÖRNEK $a = 13$ $m = 64$ ve $X_0 = 1, 2, 3, 4$ için üreteceği periyodları bulunuz

ÇÖZÜM $m = 64 = 2^6$ ve $c = 0$ olduğu için en uzun periyod $p = \frac{64}{4} = 16$

$X_0 = 1$ ve $X_0 = 3$ için (tek olmalı)

$a = 13 = 5 + 8k \rightarrow$ $k = 1$ için $a = 13$ ✓

i	X_i	X_i	X_0	X_i
0	1	2	3	52
1	13	26	39	36
2	41	18	59	20
3	21	42	63	4
4	17	34	51	
5	29	58	23	
6	57	50	43	
7	37	10	47	
8	33	2	35	
9	45		7	
10	9		27	
11	53		31	
12	49		19	
13	61		55	
14	25		11	
15	5		15	
16	1		3	

$X_0 = 1$ için $\{1, 5, 9, 13, \ldots, 53, 59, 61\}$

(küçükten büyüğe doğru sıralandı)

$\frac{1}{64}$ ile $\frac{5}{64}$ arasındaki fark 0,0625

Bu fark ne kadar az olursa benzer sayıların üretilme oranı o kadar az olur.

1 ve 3 te tam periyod sağlanır.

4 periyodik sağlanmaz

Combined LCG

$X_{i,1}, X_{i,2}, \ldots X_{i,k}$

$X_{i,k}$ → i. üretecin k. üretteği sayı

$X_{i,2}$ → i. üretecin 2. üretteği sayı

$X_{i,1}$ → i. üreteçin 1. üretteği sayı

$$X_i = \sum_{j=1}^{k} ((-1)^{j-1} \cdot X_{i,j}) \bmod (m_1 - 1)$$

$$B_i = \begin{cases} \frac{X_i}{m_1}, & X_i > 0 \\ \frac{m_1 - 1}{m_1}, & X_i = 0 \end{cases}$$

$$P = \frac{(m_1 - 1)(m_2 - 1) \cdots (m_k - 1)}{2^{k-1}}$$

$$W_{i,j} = X_{i,j-1}$$

$$W_{i,j} = \left(\sum_{l=1}^{k} W_{i,j} \right) \bmod m_1 - 1$$

} Uniform olarak gelen aynı değerli rastgele değişkenler

ÖRNEK : 32 bit mikroişlemciler için $k=2$

$a_1 = 40014$ $\quad$ $a_2 = 40692$

$m_1 = 2\,147\,483\,563$ $\quad$ $m_2 = 2\,147\,483\,399$

ÇÖZÜM :

1. ADIM $\quad$ $X_{1,0}$ $[1 - 2\,147\,483\,563]$ aralığında sayı üretir.

$X_{2,0}$ $[1 - 2\,147\,483\,399]$ " " "

2. ADIM

$$X_{1,j+1} = (40014 \cdot X_{1,j}) \bmod 2\,147\,483\,563$$

$$X_{2,j+1} = (40692 \cdot X_{2,j}) \bmod 2\,147\,483\,399$$

3. ADIM

$$X_{j+1} = (X_{1,j+1} - X_{2,j+1}) \bmod 2\,147\,483\,562$$

4. ADIM

$$R_{j+1} = \begin{cases} \dfrac{X_{j+1}}{2\,147\,483\,563}, & X_{j+1} > 0 \\ \dfrac{2\,147\,483\,562}{2\,147\,483\,563}, & X_{j+1} = 0 \end{cases}$$

AYRIK DAĞILIMLAR

ÖRNEK: 1 günün sonunda bir kamyonyetten ürün satılma miktarları 0, 1 veya 2 olabilir. %50 olasılıkla 0, %30 olasılıkla 1, %20 olasılıkla 2 ürün satılabilir. Buna göre ters dönüşüm tekniği ile rassal değişken üreten bir matlab fonksiyonu (ayrık değişken) ile

Çözüm

x	Olasılık	Küm. Olasılık
0	%50	0.5
1	%30	0.8
2	%20	1.0

$$F(x) = P(X \le x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ 0.5 & , \ 0 \le x < 1 \\ 0.8 & , \ 1 \le x < 2 \\ 1.0 & , \ 2 \le x \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} 0 & , \ u \le 0.5 \\ 1 & , \ 0.5 < u \le 0.8 \\ 2 & , \ 0.8 < u < 1 \end{cases}$$