계량경제학 13주차 과제 201547130 윤요섭

1. 오차항의 분산이 다음과 같다. 이를 증명하시오.

$$var(e_t) = \sigma_e^2 = \frac{\sigma_\nu^2}{1-\rho^2}$$

오차항이 자기상관이 되어 있는 경우에도 불구하고 최소제곱추정법으로 계수(b_2)를 산출하면 β_2의 최우수선형불편추정량(BLUE)이라고 할 수 없는 오류를 범하게 된다, 따라서 자기상관 관계를 가지고 있는 경우 자기상관 관계를 이용하여 각 시차별 식을 전개하여야 한다. 예시로 식 (13-2)의 진회귀모형과 식(13-3)에서 식(13-3)의 t를 t-1, t-2, t-3...으로 전개하면 다음과 같다. (13-7) $e_t = \nu_{t-1} + \rho\nu_{t-2} + \rho^2\nu_{t-3} + \rho^3\nu_{t-4} + \rho^4\nu_{t-5} + ...$ 이는 무한등비수열로 이 식에서의 오차의 분산은 $var(e_t) = \sigma_e^2 = \dfrac{\sigma_\nu^2}{1-\rho^2}$으로 나오게 된다.

2. 오차항간에 1차 자기상관이 있는 경우 부정확한 신뢰구간 추정이나 부정확한 검정통계량 값을 피해야 한다. 이를 해결하기 위한 코크레인-오르커트(Cochrane-Orcutt)방법과 그리고 프라이스-윈스텐(Prais-Winsten)방법에 대해 설명하시오.

AR(1) 오차를 갖는 단순회귀 모형은 다음과 같다.

식1) $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + e_t$

식2) $e_t = \rho e_{t-1} + v_t$

식3) $e_{t-1} = y_{t-1} - \beta_1 - \beta_2 x_{t-1}$

3번식에 양변에 ρ를 곱하면 다음과 같다.

식4) $\rho e_{t-1} = \rho y_{t-1} - \rho\beta_1 - \rho\beta_2 x_{t-1}$

4번 식을 1번 식에 대입하면 다음과 같다.

식5) $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \rho y_{t-1} - \rho\beta_1 - \rho\beta_2 x_{t-1} + v_t$

이를 재정리하면 다음과 같다.

식6) $y_t - \rho y_{t-1} = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(x_t - \rho x_{t-1}) + v_t$

이를 다른 변수로 변환하여 치환하면 다음과 같다.

$y_t^* = y_t - \rho y_{t-1}$

$x_{t2}^* = x_t - \rho x_{t-1}$

$x_{t1}^* = 1 - \rho$

식7) $y_t^* = x_{t1}^*\beta_1 + x_{t2}^*\beta_2 + v_t$

최소제곱법에 이를 적용할 경우 $(y_1^*, x_{11}^*, x_{12}^*)$를 구할 수 없을뿐더러, ρ의 값을 알지 못한다는 오류가 있다.

이를 프라이스-윈스텐 방법에 의해 해결하려면 먼저, 회귀모형 양변에 $\sqrt{1-\rho^2}$을 곱한 결과는 다음과 같다.

식8) $\sqrt{1-\rho^2}\,y_1 = \sqrt{1-\rho^2}\,\beta_1 + \sqrt{1-\rho^2}\,x_1\beta_2 + \sqrt{1-\rho^2}\,e_1$

식7) $y_1^* = x_{11}^*\beta_1 + x_{12}^*\beta_2 + e^{*_1}$

$y_1^*, x_{11}^*, x_{12}^*, e_1^*$은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$y_1^* = \sqrt{1-\rho^2}\,y_1$

$x_{11}^* = \sqrt{1-\rho^2}$

$x_{12}^* = \sqrt{1-\rho^2}\,x_1$

$e_1^* = \sqrt{1-\rho^2}\,e_1$

따라서 분산은 다음과 같다.

$$var(e_1^*) = (1-\rho)var(e_1) = (1-\rho^2)\frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2} = \sigma_v^2$$

또 다른 해결방법인 코크레인-오르커트 방법은 OLS가 갖는 추정방법의 한계성을 보완하면서 프라이스-윈스텐 방법이 갖는 추론상의 우수성을 보유하는 방법이다.

이는 OLS를 통해 베타값을 구한 뒤, 추정된 베타값을 원래 회귀식에 대입하여 새로운 회귀오차를 구하여 해결하는 방법이다.

3. 더빈-왓슨(Dubin-Watson)검정에 대해 설명하시오.

AR(1) 오차모형에서 $H_0 : \rho = 0$에 대한 더빈-왓슨 검정은 다음과 같다.

$H_0 : \rho = 0, H_1 : \rho > 0$ 통계량 d는 $d \approx 2(1-r_1)$의 관계를 갖는다. ρ의 추정값이 $r_1 = 0$인 경우 더빈-왓슨 통계량은 $d \approx 2$가 되며 이는 모형오차가 자기상관되지 않는다는 의미로 받아들여진다. 이 대, H_0을 기각시키는 $d \leq d_c$를 만족하는 임계값 d_c를 알기 위해서는 $H_0 : \rho = 0$이 참이라는 가정하에서 본 검정 통계량의 확률분포를 알아야 한다. d와 d_c를 비교할 때에는 확률분포 $f(d)$가 필요한데, $f(d)$는 설명변수 값에 의존하기 때문에 주어진 문제에 대한 임계값 d_c 또한 설명변수 값에 의존한다. 즉, 모든 가능한 상황에서 사용할 수 있는 임계값을 표로 만드는 것이 불가능 하다는 것이다. 이 문제를 해결하기 위해 설명변수에 관한 $p-$값을 계산하여 자기상관의 존재여부를 확인하거나, $p-$값을 모르는 경우 영영 내 검정을 통해 해결한다.