

14주차 강의자료 및 과제 : 연립방정식 모형(simultaneous-equation model)

1. 기본 개념

- 단일방정식모형

- 일방통행적 원인(독립변수)과 결과(종속변수)의 인과관계를 반영하는 함수식을 설정한 후, 식 (14-1)과 같이 단일방정식의 회귀모형을 구축

$$(14-1) \quad y_t = \alpha + \beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \epsilon_t$$

- 그러나 현실적으로 경제변수들간에는 상호의존 관계를 갖으면서 지속적으로 변동

- 연립방정식모형 또는 구조모형

- 경제이론에 기초해서 2개 이상의 방정식과 항등식 설정
- 13주차까지는 종속변수와 독립변수로 구분하였음. 따라서 독립변수에 의해 종속변수가 어느 정도 영향을 받는가가 주요 관심사이었음. 그러나 여기서는 내생변수(endogenous variables)와 선결변수(predetermined variables)로 구분한 후, 선결변수를 다시 외생변수와 내생시차변수로 구분하고 있음. 연립방정식모형에서는 경제변수들간에 상호의존 관계 속에서 외생변수 값이 변화할 경우 연립방정식모형내 내생변수들이 어느 정도 영향을 받는가가 주된 관심사임.
- 경제변수들간에 상호의존 관계 속에서 외생변수의 영향력을 분석하고, 정책실험, 내생변수 예측 작업 등을 수행할 수 있도록 연립방정식모형(구조모형)을 구축하고 계수를 추정

- Keynes 국민소득결정 모형 예

$$(14-2) \quad C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 C_{t-1} + e_{1,t}$$

$$(14-3) \quad I_t = b_0 + b_1 Y_t + b_2 r_t + e_{2,t}$$

$$(14-4) \quad Y_t = C_t + I_t + G_t$$

- 외생변수 : 정부지출(G_t), 이자율(r_t)

- 내생시차변수 : C_{t-1} ,

- 내생변수 : 소비,투자,국민소득(C_t, I_t, Y_t)

- 개별 상품 수급균형 모형 예

$$(14-5) \quad Q_t^d = a_0 + a_1 P_t + a_2 Y_t + e_{1,t}$$

$$(14-6) \quad Q_t^s = b_0 + b_1 P_t + b_2 W_t + e_{2,t}$$

$$(14-7) \quad Q_t^d = Q_t^s$$

- 외생변수 : 소득,임금(Y_t, W_t)

- 내생변수 : 가격, 수급균형량(P_t, Q_t)

2. 구조모형과 유도형 모형

- Keynes 국민소득결정모형 또는 개별상품 수급균형모형은 연립방정식으로 구성된 구조모형 (structural model)임.
- 통상적으로 구조모형은 경제이론에 기초로 해서 설정된다. 이 때문에 연립방정식 체계에서 외생변수(선결변수)는 개별 방정식 오른쪽에, 그리고 소비,투자, 국민소득 등 내생변수는 개별 방정식 왼쪽에 있지 못하는 경우가 대부분이다.
다시 말해서 독자적으로(외생으로, 독립적으로) 결정되는 선결변수(독립변수)가 오차와 무관하지 않을 경우, 또한 선결변수(독립변수)만이 내생변수(종속변수)에 영향을 준다는 기본가정(SR_1 or MR_1)이 깨지게 될 경우 어떤 문제가 발생할까?
- 이 경우 무수히 많은 표본자료를 이용하여 최소제곱추정법에 의해 추정량(b_k ; 표본회귀모형 계수)를 구한 후 이에 대한 기댓값을 산출해보면 진회귀모형에서 모수 β_k 와 일치하지 않는다($E(b_k) \neq \beta_k$). 즉, 구조방정식 편기로 인해 불일치 추정량을 얻게 된다. 즉, 불편추정량 조건을 만족하지 못한다.
- 따라서 이와 같은 문제를 해결하기 위하여 구조모형을 유도형 모형으로 전환해야 한다. 이때 유도형 모형에는 외생변수(선결변수 포함)는 개별 방정식 오른쪽에, 그리고 소비,투자, 국민소득 등 내생변수는 개별 방정식 왼쪽에 배치된다.

$$(14-2)' C_t = \pi_{1,0} + \pi_{1,1}C_{t-1} + \pi_{1,2}G_t + \pi_{1,3}\gamma_t + v_{1,t}$$

$$(14-3)' I_t = \pi_{2,0} + \pi_{2,1}C_{t-1} + \pi_{2,2}G_t + \pi_{2,3}\gamma_t + v_{2,t}$$

$$(14-4)' Y_t = \pi_{3,0} + \pi_{3,1}C_{t-1} + \pi_{3,2}G_t + \pi_{3,3}\gamma_t + v_{3,t}$$

$$(14-5)' Q_t = \pi_{1,0} + \pi_{1,1}Y_t + \pi_{1,2}W_t + v_{1,t}$$

$$(14-6)' P_t = \pi_{2,0} + \pi_{2,1}Y_t + \pi_{2,2}W_t + v_{2,t}$$

- 우리가 지금까지 배웠던 최소제곱추정법, 즉 고전적인 최소자승법으로 구조모형의 계수를 추정할 경우 불일치 추정량을 얻게 된다. 따라서 이 문제를 해결하기 위하여,
 - ① 식(14-2)~(14-4)의 구조모형을 식(14-2)'~(14-4)'의 유도형 모형으로 전환한 다음, 식(14-2)'~(14-4)'의 개별 방정식 계수(π)를 최소제곱추정법(OLS)에 의해 추정한다.
 - ② 다음으로 추정된 유도형 모형의 계수를 연립해서 풀면 식(14-2)~(14-4)의 계수가 간접적으로 산출된다. 우리는 이와 같은 방법을 간접최소자승법(ILS)이라고 한다.

3. 추정된 유도형 개별 방정식을 구조모형내 개별 방정식으로 언제나 복원이 가능할까?

- 가령 식(14-5)'~(14-6)'을 최소자승추정법으로 각각 추정하면 6개의 계수 값(유도모형 계수)을 구할 수 있다. 다음으로 6개의 유도모형 계수를 이용해서 식(14-5)~(14-6)의 구조모형 계수 6개를 구할 수 있으면 우리는 이를 적도식별이라고 한다. 이 경우 간접최소자승추정법이 유용하다.
- 하지만 유도형 모형내 계수를 추정했을 지라도 구조모형내 계수를 복원하지 못하는 경우가 흔히 있다. 예컨대 유도형 모형 계수 수는 적은 대신에 구조모형내 계수 수가 많아서

복원되지 못하는 경우도 있다(과소식별). 또는 정반대의 경우도 복원이 어려울 수 있다(과대식별).

4. 식별 법칙에 대해 알아 본 후 구조모형을 어떻게 모델링해야 할까? 연립방정식 체계를 어떻게 만들까를 고민하자.

- 구조모형내 내생변수 수(G), 그리고 개별 방정식에서 제외된 내생변수 수 ($G^{TRIANGLETRIANGLE}$)와 외생변수 수(K^{**})를 기준으로 위수조건을 따져보자

·구조모형에서 내생변수는 몇개인가? 우리는 G 개 있다고 가정하자.

·구조모형 개별방정식에서 제외된 내생변수 수는 몇 개인가? 이 개수를 $G^{\Delta\Delta}$ 라고 하자.

·구조모형 개별방정식에서 제외된 외생변수 수는? 이 개수를 K^{**} 라고 하자.

· $G^{\Delta} + K^{**} = G - 1$ 이면 적도식별이다. 이 경우 간접최소자승추정법이 유용하다.

· $G^{\Delta} + K^{**} > G - 1$ 이면 과대식별이다. 이 경우 2, 3단계최소자승법(2년, 3SLS)이 가능하다.

· $G^{\Delta} + K^{**} < G - 1$ 이면 과소식별이다. 이 경우 구조모형(연립방정식) 추정이 불가능하다. 이 경우 구조모형을 다시 모델링해야 한다.

- 개별 상품 수급균형 모형 예제 1

$$(14-5) \quad Q_t = a_0 + a_1 P_t + a_2 Y_t + e_{1,t}$$

$$(14-6) \quad Q_t = b_0 + b_1 P_t + b_2 W_t + e_{2,t}$$

·구조모형에서 포함되어 있는 내생변수의 수(G)는? 2개 (P, Q)

·식(14-5)에서 제외된 내생변수의 수($G^{\Delta\Delta}$)는? 0개

·식(14-5)에서 제외된 외생변수의 수(K^{**})는? 1개(Y)

·식(14-5)의 위수조건: $G^{\Delta} + K^{**} = G - 1 \rightarrow 0 + 1 = 2 - 1$ 이다. 적도식별이다.

·식(14-6)에서 제외된 내생변수의 수($G^{\Delta\Delta}$) : 0개

·식(14-6)에서 제외된 외생변수의 수(K^{**}) : 1개(Y)

·식(14-6)의 위수조건: $G^{\Delta} + K^{**} = G - 1 \rightarrow 0 + 1 = 2 - 1$ 이다. 적도식별이다.

·식(14-5)~(14-6)의 구조모형은 잘 모델링됐다. 개별 방정식은 모두 적도식별을 만족하므로 우리가 이미 배웠던 최소자승추정법으로 유도형 모형 개별 방정식을 추정 후 구조모형으로 복원이 가능하다.

① 구조모형 → 유도형 모형으로 전환

② 최소제곱추정법(OLS)에 의해 유도형 모형내 개별방정식 계수 추정

③ 구조형 모형의 계수로 복원, 간접 추정된 구조모형으로 정책실험 또는 예측

- 개별 상품 수급균형 모형 예제 2

$$(14-5) \quad Q_t = a_0 + a_1 P_t + a_2 Y_t + e_{1,t}$$

$$(14-6) \quad Q_t = b_0 + b_1 P_t + e_{2,t}$$

· 구조모형(식(14-5)~(14-6))에서 포함되어 있는 내생변수의 수(G) : 2개 (P, Q)

· 식(14-5)에서 제외된 내생변수의 수($G^{\Delta\Delta}$) : 0개

· 식(14-5)에서 제외된 외생변수의 수(K^{**}) : 0개

· 식(14-5)의 위수조건: $G^{\Delta} + K^{**} = G - 1 \rightarrow 0 + 0 < 2 - 1$ 이다. 과소식별이다.

· 식(14-6)에서 제외된 내생변수의 수($G^{\Delta\Delta}$) : 0개

· 식(14-6)에서 제외된 외생변수의 수(K^{**}) : 1개 (Y)

· 식(14-6)의 위수조건: $G^{\Delta} + K^{**} = G - 1 \rightarrow 0 + 1 = 2 - 1$ 이다. 적도식별이다.

· 식(14-6)의 경우 과소식별이다. 따라서 유도형 모형 추정으로 구조모형 복원이 불가능하다. 다시 구조모형의 구조를 설계해야 한다.

- 개별 상품 수급균형 모형 예제 3

$$(14-5) \quad Q_t = a_0 + a_1 P_t + a_2 Y_t + a_3 PS_t + e_{1,t}$$

$$(14-6) \quad Q_t = b_0 + b_1 P_t + b_2 W_t + e_{2,t}$$

· 외생변수 : 소득, 임금, 대체재 가격(Y_t, W_t, PS_t)

· 내생변수 : 가격, 수급균형량(P_t, Q_t)

· 구조모형(식(14-5)~(14-6))에서 포함되어 있는 내생변수의 수(G) : 2개 (P, Q)

· 식(14-5)에서 제외된 내생변수의 수($G^{\Delta\Delta}$) : 0개

· 식(14-5)에서 제외된 외생변수의 수(K^{**}) : 1개

· 식(14-5)의 위수조건: $G^{\Delta} + K^{**} = G - 1 \rightarrow 0 + 1 = 2 - 1$ 이다. 적도식별이다.

· 식(14-6)에서 제외된 내생변수의 수($G^{\Delta\Delta}$) : 0개

· 식(14-6)에서 제외된 외생변수의 수(K^{**}) : 2개 (Y, PS)

· 식(14-6)의 위수조건: $G^{\Delta} + K^{**} = G - 1 \rightarrow 0 + 2 > 2 - 1$ 이다. 과대식별이다.

· 식(14-6)의 경우 과대식별이다.

- 개별 상품 수급균형 모형 예제 3의 경우가 흔히 우리가 겪게 되는 문제이다. 이 경우 2단계 최소자승추정법 또는 3단계 최소자승추정법을 채택한다.

14주차 과제

문제 1. 다음은 2단계 추정법과 3단계 추정법에 대한 설명을 간단하게 요약한 것이다.
2SLS와 3SLS 추정방법을 구체적으로 설명하고 두 추정방법을 비교하시오.

- 2단계 최소자승법 : 과도식별일 경우 채택(실례 개별 상품 수급균형 모형 예제 3)
 - 1) 구조형 방정식에 포함된 내생 설명변수를 선택한다.
 - 2) 내생 설명변수를 선결변수(외생변수, 내생시차변수)들의 함수식으로 설정한다.
 - 유도형 방정식 유도
 - 3) OLS에 의해 유도형 모형내 개별방정식 계수 추정
 - 내생 설명변수 추정치 산출
 - 내생 설명변수 추정치와 오차항간 상관관계 無
 - 4) 구조형 모형에 내생 설명변수 추정치와 선결변수 투입
 - OLS에 의해 구조형 모형 파라메타 추정

- 3단계 최소자승법 : 과도식별일 경우 채택 (실례 개별 상품 수급균형 모형 예제 3)
2SLS과정에서는 구조방정식간의 상호연관성 또는 교란항간의 상관관계를 무시하고 있다.
반면 3SLS의 경우 구조방정식간의 상호연관성 또는 교란항간의 상관관계를 고려하고 있다.
 - 1) 구조형 모형을 유도형 모형으로 유도
 - 2) OLS에 의해 유도형 모형 추정
 - 내생 설명변수 추정치 산출
 - 3) 구조형 모형에 내생 설명변수 추정치와 선결변수 투입
 - OLS에 의해 구조형 모형 파라메타 추정
 - 잔차항들로 부터 오차항에 대한 분산·공분산 행렬작성
 - 4) 3)단계에서 도출된 분산·공분산 행렬을 이용하여 GLS를 적용함으로써
최종적인 구조모형의 파라메타 추정치를 산출

- ※ 3SLS는 2SLS경우와 마찬가지로 일관성을 갖게되는 반면 2SLS 추정량보다 더욱 효율적이다(3SLS는 보다 광범위한 정보를 활용하는 이점이 있음). 그러나 추정과정이 복잡하여 시간과 비용이 더 들고, 또한 어느 한 구조방정식에서의 설정 오류가 발생하면 모형 전체에 그 효과가 파급 되는 문제가 발생.