高级算法设计与分析作业 3-1

钟赟 202028013229148

2021 年 5 月 30 日

1. 证明斐波那契门在第一种张量网络运算下封闭。

设 $F=[f_0,f_1,\ldots,f_n]$，$H=[h_0,h_1,\ldots,h_m]$ 分别是 n 元 m 元对称函数，其中 $f_{i+2}=f_i+f_{i+1}$，$h_{i+2}=h_i+h_{i+1}$。一个度为 n 的 F 点和一个度为 m 的 H 点构成一个张量网络，网络只有一条内部边连接 F 和 H，其余 $m+n-2$ 条边是外部边。

证明此开放张量网络的函数 S 是一个斐波那契门，即 S 是对称函数，S 的函数值满足相同的递推关系。

证明. 函数 S 可以表示为:

$$S(x_1,x_2,\ldots,x_{m+n-2})=\sum_{e\in\{0,1\}}F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},e)H(e,x_1,x_2,\ldots,x_{m-1})$$

记 $F=[f_0,f_1,\ldots,f_n]$, $H=[h_0,h_1,\ldots,h_m]$ 。

首先证明 S 为对称函数。设 s_j 表示输入中有 j 个 1 时的 S 值，$j=0,1,\ldots,m+n-1$。

$\forall k\in\{0,1,\ldots,m+n-1\}$, 设 S 的 k 个输入 1 中，有 i 个来自 F 的外部边，有 j 个来自 H 的外部边，$i,j\in\{0,1,\ldots,m+n-2\},i+j=k$，则有

$$\begin{aligned}
s_k &= \sum_{e\in\{0,1\}} f_{i,e}h_{j,e} \\
&= f_ih_j+f_{i+1}h_{j+1} \\
&= f_ih_j+(f_i+f_{i-1})h_{j+1} && F\text{是斐波那契门} \\
&= f_i(h_j+h_{j+1})+f_{i-1}h_{j+1} \\
&= f_{i-1}h_{j+1}+f_ih_{j+2} && H\text{是斐波那契门}
\end{aligned}$$

继续递推可得 $f_{i-1}h_{j+1}+f_ih_{j+2}=f_{i-2}h_{j+2}+f_{i-1}h_{j+3}=\ldots=f_{i-t}h_{j+t}+f_{i+1-t}h_{j+1+t}$ ，即当 F 和 H 中为 1 的外部边总数不变，S 的值不变。

因此，对于任意置换 π,

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-2}) = S(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m+n-2)})$$

$\therefore S$ 是对称函数。

下证 S 满足斐波那契性质：

$\forall i \in \{0, 1, \ldots, m+n-3\}$ ，有

$$\begin{aligned}
s_i + s_{i+1} &= \sum_{e \in \{0,1\}, i_1+i_2=i} f_{i_1,e} h_{i_2,e} + \sum_{e \in \{0,1\}, i_1+i_2=i+1} f_{i_1,e} h_{i_2,e} \\
&= (f_0 h_i + f_1 h_{i+1}) + (f_0 h_{i+1} + f_1 h_{i+2}) && \text{此处取} i_1 = 0 \\
&= f_0(h_i + h_{i+1}) + f_1(h_{i+1} + h_{i+2}) \\
&= f_0 h_{i+2} + f_1 h_{i+3} && H\text{是斐波那契门} \\
&= s_{i+2}
\end{aligned}$$

故 S 满足斐波那契性质，函数 S 是一个斐波那契门。 $\square$