高级算法设计与分析作业 1

钟赟 202028013229148

2021 年 5 月 19 日

1. 证明：$\left(\frac{n}{m}\right)^m \leq \binom{n}{m} \leq \left(\frac{ne}{m}\right)^m$, 其中 $0 < m \leq n$.

证明. 先证 $\left(\frac{n}{m}\right)^m \leq \binom{n}{m}$:

当 $m = 1$ 时，$\left(\frac{n}{m}\right)^m \leq \binom{n}{m} = n$。

当 $m > 1$ 时，

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdot\dots\cdot 1} \\ &= \frac{n}{m}\cdot\frac{n-1}{m-1}\cdot\dots\cdot\frac{n-m+1}{1}\end{aligned}$$

其中，$\frac{n}{m} = \frac{n-\frac{n}{m}}{m-1} < \frac{n-1}{m-1}(\frac{n}{m} > 1)$,

$\therefore \frac{n}{m} < \frac{n-1}{m-1} < \frac{n-2}{m-2} < \dots < \frac{n-m+1}{1}$,

$\therefore \left(\frac{n}{m}\right)^m < \frac{n}{m}\cdot\frac{n-1}{m-1}\cdot\dots\cdot\frac{n-m+1}{1} = \binom{n}{m}$,

故 $\left(\frac{n}{m}\right)^m \leq \binom{n}{m}$。

再证 $\binom{n}{m} \leq \left(\frac{en}{m}\right)^m$：

注意函数 $f(x) = (\frac{en}{m})^m$ 是一个严格凸函数，$\therefore \forall h > 0, f(x) + f'(x)h < f(x+h)$ 。

特别地，当 $h = 1$ 时，有

$$f'(x-1) + f(x-1) < f(x)$$
$$(\frac{e(x-1)}{m})^{m-1}e + (\frac{e(x-1)}{m})^m < (\frac{ex}{m})^m$$

其中，$(\frac{m}{m-1})^{m-1} = (1+\frac{1}{m-1})^{m-1}$，单调递增且收敛于 e，故 $(\frac{m}{m-1})^{m-1} < e$。代入上述第二个式子

中，替换第二个 e，有

$$(\frac{e(x-1)}{m})^{m-1}(\frac{m}{m-1})^{m-1}+(\frac{e(x-1)}{m})^{m}<(\frac{ex}{m})^{m} \tag{1}$$

$$(\frac{e(x-1)}{m-1})^{m-1}+(\frac{e(x-1)}{m})^{m}<(\frac{ex}{m})^{m} \tag{2}$$

根据组合数公式，有

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1} \tag{3}$$

当 $m=1$ 时，有

$$\binom{n}{1}\leq(\frac{en}{1})^{1}, \tag{4}$$

根据 (2) 式和 (3) 式已知，若有 $\binom{n-1}{m-1}\leq(\frac{e(n-1)}{m-1})^{m-1}$，则可推出 $\binom{n}{m}\leq\left(\frac{en}{m}\right)^{m}$。

则根据 (4) 式可归纳得出 $\binom{n}{m}\leq\left(\frac{en}{m}\right)^{m}$。

□

2. 一枚硬币掷出正面的概率为 p, 掷出反面的概率为 $1-p$, 求首次掷出正面所需次数 T 的期望和方差。

解. 根据题意，易得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= p\cdot 1+(1-p)\cdot p\cdot 2+(1-p)^2\cdot p\cdot 3+\ldots+(1-p)^{n-1}\cdot p\cdot n+\ldots \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}(1-p)^{i-1}\cdot p\cdot i\end{aligned}$$

记 $1-p$ 为 x, 令 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}x^{i-1}\cdot i$，则 $\mathbb{E}(T)=\lim_{n\to+\infty}f(x)\cdot p$。

函数 $f(x)$ 有原函数 $F(x)=\sum_{i=1}^{n}x^{i}$，即 $F'(x)=f(x)$。

对 $F(x)$ 进行求和，有

$$F(x)=x\cdot\frac{1-x^n}{1-x}\overset{n\to+\infty}{=}\frac{x}{1-x},$$

$\therefore \lim_{n\to+\infty}f(x)=\lim_{n\to+\infty}F'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

$\therefore \mathbb{E}(T)=\lim_{n\to+\infty}f(x)\cdot p=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}$。

下面求 T 的方差：$Var(T)=\mathbb{E}(T^2)-\mathbb{E}^2(T)$。根据题意，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T^2) &= p\cdot 1^2+(1-p)\cdot p\cdot 2^2+(1-p)^2\cdot p\cdot 3^2+\ldots+(1-p)^{n-1}\cdot p\cdot n^2+\ldots \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}(1-p)^{i-1}\cdot p\cdot i^2\end{aligned}$$

同理，记 $1-p$ 为 x, 令 $f_1(x)=\sum_{i=1}^{n}x^{i-1}\cdot i^2$，则 $\mathbb{E}(T^2)=\lim_{n\to+\infty}f_1(x)\cdot p$。
函数 $f_1(x)$ 有原函数 $F_1(x)=\sum_{i=1}^{n}i\cdot x^i$，即 $F_1'(x)=f_1(x)$。
对 $F_1(x)$ 进行求和，有

$$\begin{aligned}F_1(x) &= \sum_{i=1}^{n}i\cdot x^i \\ &= x\cdot\sum_{i=1}^{n}x^{i-1}\cdot i \\ &= x\cdot f(x),\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{n\to+\infty}F_1(x)=\lim_{n\to+\infty}x\cdot f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$

$\lim_{n\to+\infty}f_1(x)=\lim_{n\to+\infty}F_1'(x)=(\frac{x}{(1-x)^2})'=\frac{1+x}{(1-x)^3}$

$\therefore \mathbb{E}(T^2)=\lim_{n\to+\infty}f_1(x)\cdot p=\frac{2-p}{p^2}$

$\therefore Var(T)=\mathbb{E}(T^2)-\mathbb{E}^2(T)=\frac{2-p}{p^2}-(\frac{1}{p})^2=\frac{1-p}{p^2}$

故 T 的期望为 $\frac{1}{p}$，T 的方差为 $\frac{1-p}{p^2}$。

□

3. $X_1,\ldots,X_n$ 是独立的 $0-1$ 随机变量，有 $\Pr(X_i=1)=p_i$, $\Pr(X_i=0)=1-p_i$ 记 $X=X_1+\cdots+X_n$, $\mathbb{E}(X)=p_1+\cdots+p_n=\mu$, 证明：当 $0<\delta<1$ 时,

$$\Pr(X\leq(1-\delta)\mu)\leq\left[\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right]^{\mu}\leq e^{\frac{-\delta^2\mu}{2}}$$

证明. 取 $\lambda<0$, 有

$$
\begin{aligned}
\Pr(X \le (1-\delta)\mu) &= \Pr(-X \ge -(1-\delta)\mu) \\
&= \Pr(e^{\lambda x} \ge e^{\lambda(1-\delta)\mu}) \\
&\le \frac{\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right)}{e^{\lambda(1-\delta)\mu}} && \text{Markov 不等式} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left(e^{\lambda(X_1+\cdots+X_n)}\right)}{e^{\lambda(1-\delta)\mu}} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left(e^{\lambda X_1}\right)\cdot\mathbb{E}\left(e^{\lambda X_2}\right)\ldots\mathbb{E}\left(e^{\lambda X_n}\right)}{e^{\lambda(1-\delta)\mu}} && X_i\text{ 相互独立} \\
&= \frac{\left[(1-p_1)+p_1e^{\lambda}\right]\cdot\left[(1-p_2)+p_2e^{\lambda}\right]\cdots\left[(1-p_n)+p_ne^{\lambda}\right]}{e^{\lambda(1-\delta)\mu}} \\
&= \frac{\left[1+p_1\left(e^{\lambda}-1\right)\right]\cdot\left[1+p_2\left(e^{\lambda}-1\right)\right]\cdots\left[1+p_n\left(e^{\lambda}-1\right)\right]}{e^{\lambda(1-\delta)\mu}} \\
&\le \frac{e^{p_1\left(e^{\lambda}-1\right)}\cdot e^{p_2\left(e^{\lambda}-1\right)}\ldots e^{p_n\left(e^{\lambda}-1\right)}}{e^{\lambda(1-\delta)\mu}} && 1+x\le e^x \\
&= \frac{e^{\left(e^{\lambda}-1\right)(p_1+\cdots+p_n)}}{e^{\lambda(1-\delta)\mu}} \\
&= \left[\frac{e^{e^{\lambda}-1}}{e^{\lambda(1-\delta)}}\right]^{\mu}
\end{aligned}
$$

对右边的结果求导得，当 $\lambda=\ln(1-\delta)$ 时，$\left[\frac{e^{e^{\lambda}-1}}{e^{\lambda(1-\delta)}}\right]^{\mu}$ 取最小值 $\left[\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right]^{\mu}$。
对 $\left[\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right]^{\mu}$ 取对数，得

$$
\begin{aligned}
\ln\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}} &= -\delta-(1-\delta)\ln(1-\delta) \\
&= -\delta-(1-\delta)(\delta-\frac{1}{2}\delta^2-\frac{1}{3}\delta^3-\cdots) \\
&= -\frac{1}{2}\delta^2-\frac{1}{6}\delta^3-\cdots \\
&\le -\frac{1}{2}\delta^2 && 0<\delta<1
\end{aligned}
$$

综上，我们有 $\Pr(X\le(1-\delta)\mu)\le\left[\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right]^{\mu}\le e^{\frac{-\delta^2\mu}{2}}$。

$\square$

4. 分析 MAX-CUT 随机算法的方差。

解. 根据讲义 Lec5 中 MAX-CUT 算法的定义：

给定图 $G=(V,E)$, 定义随机变量 $X_i, i=1,\ldots,|V|$,

$$X_i=\begin{cases}0, & \text{顶点}u_i\in A\\ 1, & \text{顶点}u_i\in B\end{cases}$$

则有 $\Pr(X_i=0)=\Pr(X_i=1)=\frac{1}{2}$ 。

对于任意的 $(u_i,u_j)\in E$, 定义随机变量 $Y_{i,j}$ 如下,

$$Y_{i,j}=\begin{cases}0, & (u_i,u_j)\notin E(A,B)\\ 1, & (u_i,u_j)\in E(A,B)\end{cases}$$

则有 $\mathbb{E}(Y_{i,j})=\frac{1}{2}$。

已知 MAX-CUT 算法求得的最大割的期望为 $\mathbb{E}(|E(A,B)|)=\frac{|E|}{2}$，则方差记为 $Var(|E(A,B)|)$。记 $|E(A,B)|$ 为 S ，则 $Var(S)=\mathbb{E}(S^2)-\mathbb{E}(S)^2$。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S^2)&=\mathbb{E}\left[\left(\sum_{(u_i,u_j)\in E}Y_{i,j}\right)^2\right]\\&=\mathbb{E}\left[\sum_{(u_i,u_j)\in E}Y_{i,j}^2+\sum_{(u_{i_1},u_{j_1}),(u_{i_2},u_{j_2})\in E,(u_{i_1},u_{j_1})\neq(u_{i_2},u_{j_2})}2Y_{i_1,j_1}Y_{i_2,j_2}\right]\\&=\sum_{(u_i,u_j)\in E}\mathbb{E}\left[Y_{i,j}^2\right]+\sum_{(u_{i_1},u_{j_1}),(u_{i_2},u_{j_2})\in E,(u_{i_1},u_{j_1})\neq(u_{i_2},u_{j_2})}2\mathbb{E}\left[Y_{i_1,j_1}Y_{i_2,j_2}\right]\end{aligned}$$

根据 $Y_{i,j}$ 的概率分布，可得 $Y_{i,j}^2$ 和 $Y_{i_1,j_1}Y_{i_2,j_2}$ 的概率分布为：

$$Y_{i,j}^2=\begin{cases}0, & (u_i,u_j)\notin E(A,B)\\ 1, & (u_i,u_j)\in E(A,B)\end{cases}$$

$$Y_{i_1,j_1}Y_{i_2,j_2}=\begin{cases}1, & (u_{i_1,j_1}),(u_{i_2,j_2})\in E(A,B)\\ 0, & else\end{cases}$$

因此，$\mathbb{E}\left[Y_{i,j}^2\right]=\frac{1}{2}$, $\mathbb{E}\left[Y_{i_1,j_1}Y_{i_2,j_2}\right]=\frac{1}{4}$，代入 $\mathbb{E}(S^2)$ 中得：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S^2)&=\frac{1}{2}\cdot|E|+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\tbinom{|E|}{2}\\&=\frac{|E|^2+|E|}{4}\end{aligned}$$

故方差为 $Var(S)=\mathbb{E}(S^2)-\mathbb{E}(S)^2=\frac{|E|^2+|E|}{4}-(\frac{|E|}{2})^2=\frac{|E|}{4}$。

$\square$

5. 设计一个多项式时间随机算法求解二部图的红蓝匹配问题。

问题描述：二部图 G 的边被染成了红和蓝两种颜色，判定 G 中是否存在一个完美匹配 M, 使得 M 中恰有 k 条红边和 $n-k$ 条蓝边。

输入：二部图 $G(U \cup V, E)$, 其中顶点集 $U \cap V = \emptyset$, 且对任意 $(x, y) \in E$ 有 $x \in U, y \in V$; 边染色函数 $c : E \to \{$ **red, blue** $\}$; 以及非负整数 k 。

输出：Yes, 如果 G 中存在一个完美匹配 $M \subseteq E$, 要求 $|\{e \in M : c(e) = \textbf{red}\}| = k$; 若不存在这样的 M, 则输出 No。

解. 1). 首先构造图 G 的代数化邻接矩阵 $M_{n\times n}$，M 的每一项定义如下：

$$M_{i,j} = \begin{cases} y, & (i,j) \in E \text{ and is red} \\ 1, & (i,j) \in E \text{ and is blue} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

2). M 的行列式 $det(A)$ 是关于 y 的多项式，记为 $p(y)$ 。通过拉格朗日插值法计算 $p(y)$ 每一项的系数：随机选择 n+1 个不同的点 $(y_0, y_1, \cdots, y_n)$，令 $y = y_i, i = 0 \to n$, 计算 M 的行列式在这些点上的值，从而求出每一项的系数，得到 $p(y)$ 。

3). 如果 $p(y)$ 中包含 $\pm y^k$ 这一项，则输出“存在”；若不包含，则输出“不存在”。

如果 $p(y)$ 中包含 $\pm y^k$，说明 M 中存在 n 项，其分属于不同行和不同列，且乘积为 $\pm y^k$（包含 k 个 y 和 $n-k$ 个 1），即存在一个由 k 个红线和 $n-k$ 个蓝线构成的完美匹配。值得注意的是，可能存在图 G 有多种完美匹配（包括满足题述的红蓝匹配），且 M 的非满秩的情况，此时 M 的行列式恒为 0，上述算法无法得到 y^k 的系数，会输出“不存在”。

拉格朗日插值算法可在多项式时间内完成，故该算法是多项式时间的算法。

□