Optimización No lineal (5225565)

Fernando Roldán

Departamento de Ingeniería Matemática

Facultad Ciencias Físicas y Matemáticas.

Universidad de Concepción

11 de agosto, 2025

Contacto

- Profesor: Fernando Roldán
- Correo: fernandoroldan@udec.cl, (tambien pueden escribir por teams)
- Oficina: F428
- Horario de consultas:
- Horario de clases: Lunes 1-2, Miercoles 1.

Descripción

- Asignatura teórica y práctica donde estudiaremos problemas de minimizar (o maximizar) una función no lineal en varias variables con y sin restricciones.
- Analizaremos condiciones de optimalidad necesarias y/o suficientes de primer o de segundo orden (Karush–Kuhn–Tucker).
- Estudiaremos también dualidad Lagrangiana y las propiedades de dualidad.
- En la última parte del curso estudiaremos métodos numéricos para resolver problemas de optimización.

Contenidos

- Convexidad: Análisis convexo en espacios de dimensión finita. Funciones convexas y generalizaciones. Subdiferenciabilidad.
- Minimización con restricciones: Condiciones de optimalidad de Fritz John y de Karush–Kuhn–Tucker. Condiciones de calificación. Condiciones de optimalidad necesarias y/o suficientes de segundo orden.
- Dualidad Lagrangiana y condiciones del tipo punto de silla: Problema dual: salto o gap de dualidad, dualidad débil y fuerte.
- Algoritmos en optimización para problemas diferenciasbles y no diferenciables.

Evaluaciones

- Dos Certamenes:
  - Certamen 1 (C1): Lunes 06 de Octubre
  - Certamen 2 (C2): Miercoles 03 de Diciembre
- Cuatro Tareas ($\overline{T}$ nota promedio tareas). La fecha de entrega de las tareas será indicada oportunamente.
- Nota final (NF)

$$NF = 0.4 \cdot C1 + 0.4 \cdot C2 + 0.2\overline{T}.$$

- En caso que NF sea menor que 4, se puede rendir un certamen recuperativo (CR) que equivale al 40% de la nota definitiva, es decir:

$$NF = 0.6 \cdot (0.4 \cdot C1 + 0.4 \cdot C2 + 0.2\overline{T}) + 0.4 \cdot CR.$$

Bibliografía

1. Bazaraa M. S., Sherali H. D., y Shetty C. M. (2006). Non-Linear Programming: Theory and Algorithms. USA: John Wiley Sons Inc, 3ra Ed. ISBN: 9780471486008.
2. Boyd, S., Vandenberghe, L. (2004). Convex optimization. Reino Unido: Cambridge University Press. ISBN: 0-521-83378-7.
3. Bertsekas D. P., Nedić A., y Ozdaglar A. E. (2003). Convex Analysis and Optimization. USA: Athena Scientific. ISBN: 9781886529236.
4. Bertsekas D. P. (2009). Convex Optimization Theory. USA: Athena Scientific. ISBN: 9781886529458.
5. Rockafellar R. T. (1996). Convex Analysis. USA: Princeton University Press, ISBN: 0691015864
6. Bauschke H. H., Combettes P. L., Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces, 2017, Springer, New York, 2da Ed., ISBN: 978-3- 319-48310-8.

Introducción

- La optimización se puede dividir en diferentes subáreas como optimización lineal, optimización continua (no lineal), optimización entera (o desde matemática discreta en en general), calculo de variaciones, control óptimo, optimización estocástica, entre otras.
- Estas subáreas ofrecen muchas aplicaciones a problemas reales:
    - Planificación de rutas y asignación de recursos en logística (optimización entera y lineal)
    - Tratamientos de imágenes o ajuste de parámetros en modelos de machine learning (optimización continua)
    - Diseño de estructuras eficientes en ingeniería (cálculo de variaciones)
    - La gestión dinámica de sistemas en tiempo real (control óptimo)
    - La toma de decisiones bajo incertidumbre en finanzas y gestión de riesgos (optimización estocástica)

  por nombrar algunos.

Optimización Lineal

Problema de Optmización Lineal

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & c^\top x \\
\text{sujeto a} \quad & Ax \leq b, \\
& x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}
$$

donde:

- $c \in \mathbb{R}^n$
- $b \in \mathbb{R}^m$
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Optimización no Lineal

Problema de Optmización no Lineal

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & f(x) \\
\text{sujeto a} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\
& h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \\
& x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}
$$

donde:

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la función objetivo a minimizar;
- $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, m$, son las funciones que definen las restricciones de desigualdad;
- $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, para $j = 1, \dots, p$, son las funciones que definen las restricciones de igualdad.

Problema de Cálculo de Variaciones

Problema de Cálculo de Variaciones

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx \\ \text{sujeto a} \quad & y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, \end{aligned}$$

donde:

- $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ es la función desconocida que se desea optimizar;
- $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es el lagrangiano, una función dada que depende de x, $y(x)$, e $y'(x)$;
- $J[y]$ es un funcional, es decir, una función cuyo dominio es un conjunto de funciones.

Problema de Control Óptimo

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & J[u] = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt \\
\text{sujeto a} \quad & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_f], \\
& x(t_0) = x_0, \\
& u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

donde:

- $x(t)$ es el estado del sistema en el tiempo t;
- $u(t)$ es la señal de control (o entrada) que se desea optimizar;
- $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ define la dinámica del sistema;
- $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función de costo instantáneo;
- $J[u]$ es el funcional objetivo, que acumula el costo total en el tiempo.

Ejemplo: Reconstrucción de Imágenes

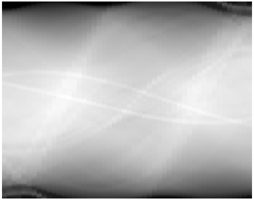
En este curso nos enfocaremos en problemas de optimización No lineal.

Optimización No Lineal con Regularización de TV

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \|\nabla x\|_1 + \frac{\lambda}{2}\|Ax - b\|_2^2 \\ \text{sujeto a} \quad & x \in [0,1]^n, \end{aligned}$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ representa la imagen a reconstruir (vectorizada);
- ∇x es el gradiente discreto de la imagen, aplicado pixel a pixel;
- $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es el operador de observación (por ejemplo, proyección tomográfica o blur);
- $b \in \mathbb{R}^m$ es la observación (ruidosos o incompletos);
- $\lambda > 0$ es un parámetro que balancea fidelidad y regularización;
- $x \in [0,1]^n$ impone que los píxeles estén en un rango válido.

Ejemplo: Reconstrucción de Imágenes



$$\longrightarrow \min_{x\in[0,1]^n} \|\nabla x\|_1 + \frac{\lambda}{2}\|Ax-b\|_2^2 \quad \longrightarrow$$