Métodos de Elementos Finitos Mixtos
Evaluación 2 - Problema 1

Víctor Burgos V.

10 de enero de 2022

Problema 1

Se consideran los espacios de Banach reflexivos H y Q, y aplicaciones bilineales acotadas

$$a : H \times H \to R, \quad b : H \times Q \to R, \quad c : Q \times Q \to R.$$

Así, dados funcionales $f \in H'$ y $g \in Q'$, se considera un esquema del siguiente tipo:

Hallar $(\sigma, u) \in H \times Q$ tales que:

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, u) &= f(\tau), \quad \forall \tau \in H \\ b(\sigma, v) - c(u, v) &= g(v), \quad \forall v \in Q. \end{aligned}$$

A su vez, siendo $\{H_h\}_{h>0}$ y $\{Q_h\}_{h>0}$ familias de subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, particularmente el objetivo del presente problema es analizar la unisolvencia a nivel discreto del esquema precedente:

($\bigstar$) Hallar $(\sigma_h, u_h) \in H_h \times Q_h$ tales que:

$$
\begin{aligned}
a(\sigma_h, \tau_h) + b(\tau_h, u_h) &= f(\tau_h), \quad \forall \tau_h \in H_h \\
b(\sigma_h, v_h) - c(u_h, v_h) &= g(v_h), \quad \forall v_h \in Q_h.
\end{aligned}
$$

Problema 1

Junto a lo anterior, se suponen las siguientes hipótesis:

i) a y b son simétricas y semi-defnidas positivas.

ii) Existe una contante $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de h, tal que

$$\sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\zeta_h, \tau_h)}{||\tau_h||} \geq \tilde{\alpha} ||\zeta_h||_H, \quad \forall \zeta_h \in V_h,$$

con V_h el espacio nulo del operador inducido por $b|_{H_h \times Q_h}$. Esto, es

$$V_h = \{\tau_h \in H_h : b(\tau_h, v_h) = 0, \ \ \forall v_h \in Q_h\}$$

iii) Existe una contante $\tilde{\beta} > 0$, independiente de h, tal que

$$\sup_{\substack{\tau_h \in H_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{b(\tau_h, v_h)}{||\tau_h||} \geq \tilde{\beta} ||v_h||_Q, \quad \forall v_h \in Q_h$$

Para esto, se considerará equivalentemente a ($\bigstar$) la siguiente formulación:

($\bigstar\bigstar$) Hallar $(\zeta_h, w_h) \in H_h \times Q_h$ tal que:

$$A\big((\zeta_h, w_h)(\tau_h, v_h)\big) = F(\tau_h, v_h), \quad \forall(\tau_h, v_h) \in H_h \times Q_h,$$

donde la forma bilineal $A : (H_h \times Q_h)^2 \to R$ está dada por

$$A\big((\zeta_h, w_h), (\tau_h, v_h)\big) := a(\zeta_h, \tau_h) + b(\tau_h, w_h) + b(\zeta_h, v_h) - c(w_h, v_h),$$
$$\forall(\zeta_h, w_h), (\tau_h, v_h) \in H_h \times Q_h$$

y $F : H_h \times Q_h \to R$ por

$$F(\tau_h, v_h) := f(\tau_h) + g(v_h), \quad \forall(\tau_h, v_h) \in H_h \times Q_h.$$

Luego, recurriendo al lema de Lax-Milgram generalizado, se tiene garantizada la unisolvencia de (★★) (y a su vez de (★)), si y sólo si existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\forall(\zeta_h, w_h) \in H_h \times Q_h$,

$$S(\zeta_h, w_h) := \sup_{\substack{(\tau_h, v_h) \in H_h \times Q_h \\ (\tau_h, v_h) \neq 0}} \frac{A\big((\zeta_h, w_h), (\tau_h, v_h)\big)}{||(\tau_h, v_h)||_{H\times Q}} \geq \alpha ||(\zeta_h, w_h)||_{H\times Q}. \tag{1}$$

Esto último debido a la simetría del de la forma bilineal A, ya que en tal caso el operador inducido $\mathcal{A} : (H_h \times Q_h) \to (H_h \times Q_h)'$ es "autoadjunto", teniéndose inyectividad si y sólo si se tiene sobreyectividad.

Para $\zeta_h \in H_h$ y $w_h \in Q_h$ dados, se definen además las siguientes funcionales:

$$F_{(\zeta_h, w_h)}(\tau_h) := A\big((\zeta_h, w_h)(\tau_h, 0)\big) = a(\zeta_h, \tau_h) + b(\tau_h, w_h), \quad \forall \tau_h \in H_h$$
$$G_{(\zeta_h, w_h)}(v_h) := A\big((\zeta_h, w_h)(0, v_h)\big) = b(\zeta_h, v_h) - c(w_h, v_h), \quad \forall v_h \in Q_h.$$

Se observa que, por definición, $(\zeta_h, w_h) \in H_h \times Q_h$ es la solución del esquema ($\bigstar$) si se considera $f \equiv F_{(\zeta_h, w_h)}$ y $g \equiv G_{(\zeta_h, w_h)}$.

Problema 1

Además, $\forall(\zeta_h, w_h) \in H_h \times Q_h$, también se tiene que

$$S(\zeta_h, w_h) \geq \frac{1}{2}\left\{||F_{(\zeta_h,w_h)}||_{H'} + ||G_{(\zeta_h,w_h)}||_{Q'}\right\}$$
$$S(\zeta_h, w_h) \leq ||F_{(\zeta_h,w_h)}||_{H'} + ||G_{(\zeta_h,w_h)}||_{Q'}.$$

Por lo cual, es necesario y suficiente mostrar que existe una constante $C > 0$ tal que

$$||(\zeta_h, w_h)||_{H\times Q} \leq C\left\{||F_{(\zeta_h,w_h)}||_{H'_h} + ||G_{(\zeta_h,w_h)}||_{Q'_h}\right\},$$

para concluir la condición inf-sup (**??**) con $\alpha = 2C$.
En lo siguiente, se mostrarán las cotas respectivas que se obtiene para $||\zeta_h||_H$ y $||w_h||_Q$ en el presente contexto.

Cota para $\zeta_h \in H_h$

Por la condición inf-sup sobre b de la hipótesis (iii) dada, se tiene que $B_h : H_h \to Q_h'$ es sobreyectivo, siendo B_h el operador inducido por $b|_{H_h \times Q_h}$. Luego, por resultado visto en clases (Lema 3.26-Apunte de apoyo TBB-Banach), existe $\overline{\zeta_h} \in H_h$ tal que $B(\overline{\zeta_h}) = B(\zeta_h)$ y

$$\tilde{\beta}||\overline{\zeta_h}|| \leq ||B_h(\overline{\zeta_h})||,$$

con igual constante $\tilde{\beta}$ que la dada en la hipótesis (iii).

Lo anterior induce una descomposición

$$\zeta_h = \zeta_h^0 + \overline{\zeta_h}$$

con $\zeta_h^0 := \zeta_h - \overline{\zeta_h}$, y de donde se observa que $\zeta_h^0 \in V_h$. Luego,

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}||\overline{\zeta_h}||_H \leq ||B_h(\overline{\zeta_h})||_{Q_h'} &= \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq 0}} \frac{\langle B_h(\overline{\zeta_h}), v_h \rangle_{Q_h' \times Q_h}}{||v_h||_Q} \\
&= \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq 0}} \frac{b(\overline{\zeta_h}, v_h)}{||v_h||_Q} \\
&= \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq 0}} \frac{b(\zeta_h, v_h)}{||v_h||_Q}
\end{aligned}$$

Problema 1 - Pregunta a)

$$\tilde{\beta}||\overline{\zeta_h}||_H \leq \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq 0}} \frac{b(\zeta_h, v_h) \pm c(w_h, v_h)}{||v_h||_Q}$$
$$= \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq 0}} \frac{G_{(\zeta_h, w_h)}(v_h) + c(w_h, v_h)}{||v_h||_Q}$$

Acotando $c(w_h, v_h)$ por Cauchy-Schwarz ($|w|_c := c(w,w)^{1/2}$) queda

$$c(w_h, v_h) \leq c(w_h, w_h)^{1/2} c(v_h, v_h)^{1/2} \leq |w_h|_c ||c||^{1/2} ||v_h||_Q,$$

de donde

$$||\overline{\zeta_h}||_H \leq \frac{1}{\tilde{\beta}}||G_{(\zeta_h,w_h)}||_{Q_h'} + \frac{||c||^{1/2}}{\tilde{\beta}}|w_h|_c. \qquad (2)$$

Ahora se acota la norma de ζ_h^0: Dado que $\zeta_h^0 \in V_h$, por la condición inf-sup de la hipótesis (ii) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}||\zeta_h^0||_H &\leq \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\zeta_h^0, \tau_h)}{||\tau_h||_H} \\
&= \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\zeta_h^0, \tau_h) \pm a(\overline{\zeta_h}, \tau_h)}{||\tau_h||_H} \\
&= \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\zeta_h, \tau_h) - a(\overline{\zeta_h}, \tau_h)}{||\tau_h||_H}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\alpha}||\zeta_h^0||_H \leq \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\zeta_h, \tau_h) + \cancel{b(\tau_h, w_h)} - a(\overline{\zeta_h}, \tau_h)}{||\tau_h||_H}$$
$$= \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{F_{(\zeta_h, w_h)}(\tau_h) - a(\overline{\zeta_h}, \tau_h)}{||\tau_h||_H},$$

de donde

$$||\zeta_h^0||_H \leq \frac{1}{\tilde{\alpha}}||F_{(\zeta_h, w_h)}||_{H_h'} + \frac{||a||}{\tilde{\alpha}}||\overline{\zeta_h}||_H. \quad (3)$$

Problema 1 - Pregunta a)

En resumidas cuentas, se tienen las siguientes acotaciones:

$$||\zeta_h^0||_H \leq \frac{1}{\tilde{\alpha}}||F_{(\zeta_h,w_h)}||_{H_h'} + \frac{||a||}{\tilde{\alpha}}||\overline{\zeta_h}||_H$$
$$||\overline{\zeta_h}||_H \leq \frac{1}{\tilde{\beta}}||G_{(\zeta_h,w_h)}||_{Q_h'} + \frac{||c||^{1/2}}{\tilde{\beta}}|w_h|_c.$$

Así, por desigualdad triangular se concluye la siguiente cota para ζ_h:

$$\begin{aligned}
||\zeta_h||_H &\leq ||\zeta_0||_H + ||\overline{\zeta_h}||_H \\
&\leq \frac{1}{\tilde{\alpha}}||F_{(\zeta_h,w_h)}||_{H_h'} + \left(1 + \frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)||\overline{\zeta_h}||_H \\
&\leq \frac{1}{\tilde{\alpha}}||F_{(\zeta_h,w_h)}||_{H_h'} + \left(1 + \frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)\frac{1}{\tilde{\beta}}||G_{\zeta_h,w_h}||_{Q_h'} \\
&+ \left(1 + \frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)\frac{||c||^{1/2}}{\tilde{\beta}}|w_h|_c
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Cota para } w_h \in Q_h}$

Por la condición inf-sup para b dada en la hipótesis (iii), se tiene que

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}||w_h||_Q &\leq \sup_{\substack{\tau_h \in H_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{b(\tau_h, w_h)}{||\tau_h||_H} \\
&= \sup_{\substack{\tau_h \in H_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{b(\tau_h, w_h) \pm a(\zeta_h, \tau_h)}{||\tau_h||_H} \\
&= \sup_{\substack{\tau_h \in H_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{F_{(\zeta_h, w_h)}(\tau_h) - a(\zeta_h, \tau_h)}{||\tau_h||_H},
\end{aligned}$$

de donde

$$||w_h||_Q \leq \frac{1}{\tilde{\beta}}||F_{(\zeta_h,w_h)}||_{H'} + \frac{||a||}{\tilde{\beta}}||\zeta_h||_H.$$

Así, reemplazando la cota obtenida sobre $||\zeta_h||_H$, que es:

$$||\zeta_h||_H \leq \frac{1}{\tilde{\alpha}}||F_{(\zeta_h,w_h)}||_{H_h'} + \left(1 + \frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)\frac{1}{\tilde{\beta}}||G_{\zeta_h,w_h}||_{Q_h'} + \left(1 + \frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)\frac{||c||^{1/2}}{\tilde{\beta}}|w_h|_c$$

se llega a

$$||w_h||_Q \leq \left(1 + \frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)\frac{1}{\tilde{\beta}}||F_{(\zeta_h,w_h)}||_{H_h'} + \left(1 + \frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)\frac{||a||}{\tilde{\beta}^2}||G_{\zeta_h,w_h}||_{Q_h'}$$
$$+ \left(1 + \frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)\frac{||a||\ ||c||^{1/2}}{\tilde{\beta}^2}|w_h|_c.$$

Resta obtener una cota para $|w|_c$. Para esto, primero observa que

$$0 \leq a(\zeta_h, \zeta_h) + c(w_h, w_h) \leq F_{(\zeta_h, w_h)}(\zeta_h) - G_{(\zeta_h, w_h)}(w_h),$$

y dado que a es semi-definido positivo, se obtiene

$$\begin{aligned} c(w_h, w_h) = |w_h|_c^2 &\leq F_{(\zeta_h, w_h)}(\zeta_h) - G_{(\zeta_h, w_h)}(w_h) \\ \Rightarrow |w_h|_c^2 &\leq ||F_{(\zeta_h, w_h)}||_{H_h'} ||\zeta_h||_H + ||G_{(\zeta_h, w_h)}||_{Q_H'} ||w_h||_Q. \end{aligned}$$

Luego, por desigualdad de Cauchy con ϵ:

$$|w_h|_c^2 \leq \epsilon_1 ||F_{(\zeta_h, w_h)}||_{H_h'}^2 + \frac{1}{4\epsilon_1} ||\zeta_h||_H^2 + \epsilon_2 ||G_{(\zeta_h, w_h)}||_{Q_H'}^2 + \frac{1}{4\epsilon_2} ||w_h||_Q^2$$

Por otra parte, se pueden reacomodar las cotas obtenidas de $||\zeta_h||_H$ y $||w_h||_Q$ para potencias cuadradas como sigue:

$$||\zeta_h||_H^2 \leq 9\left\{ \frac{1}{\tilde{\alpha}^2}||F_{(\zeta_h,w_h)}||_{H_h'}^2 + \left(1+\frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \frac{1}{\tilde{\beta}^2}||G_{\zeta_h,w_h}||_{Q_h'}^2 + \left(1+\frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \frac{||c||}{\tilde{\beta}^2}|w_h|_c^2 \right\}$$

$$||w_h||_Q^2 \leq 9\left\{ \left(1+\frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \frac{1}{\tilde{\beta}^2}||F_{(\zeta_h,w_h)}||_{H_h'}^2 + \left(1+\frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \frac{||a||^2}{\tilde{\beta}^4}||G_{\zeta_h,w_h}||_{Q_h'}^2 + \left(1+\frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \frac{||a||^2\,||c||}{\tilde{\beta}^4}|w_h|_c^2 \right\}.$$

Problema 1 - Pregunta a)

Luego, se eligen

$$\epsilon_1 := 9\left(1 + \frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \frac{||c||}{\tilde{\beta}^2}$$
$$\epsilon_2 := 9\left(1 + \frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \frac{||a||^2\ ||c||}{\tilde{\beta}^4},$$

quedando así la siguiente cota:

$$|w_h|_c^2 \leq \left(\frac{C_1}{4\epsilon_1} + \epsilon_1\right) ||F_{(\zeta_h, w_h)}||^2_{H_h'} + \left(\frac{C_2}{4\epsilon_2} + \epsilon_2\right) ||G_{(\zeta_h, w_h)}||^2_{Q_H'} + \frac{1}{2}|w_h|_c^2$$

$$C_1 := 9\left\{\frac{1}{\tilde{\alpha}^2} + \left(1 + \frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \frac{1}{\tilde{\beta}^2}\right\}$$
$$C_2 := 9\left\{\left(1 + \frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \frac{1}{\tilde{\beta}^2} + \left(1 + \frac{||a||}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \frac{||a||^2}{\tilde{\beta}^4}\right\}$$

Finalmente, $|w_h|_c$ queda acotado de la siguiente manera:

$$|w_h|_c \leq \left[2\,\text{máx}\left\{\left(\frac{C_1}{4\epsilon_1}+\epsilon_1\right),\left(\frac{C_2}{4\epsilon_2}+\epsilon_2\right)\right\}\right]^{1/2}\left(||F_{(\zeta_h,w_h)}||_{H_h'}+||G_{(\zeta_h,w_h)}||_{Q_H'}\right)$$

Por lo tanto, remplazando esto último en las cotas respectivas de $||\zeta_h||_H$ y $||w_h||_Q$, se llega a

$$||\zeta_h||_H + ||w_h||_Q \leq C\left\{||F_{(\zeta_h,w_h)}||_{H'} + ||G_{(\zeta_h,w_h)}||_{Q'}\right\},$$

con $C>0$ que depende sólo de $||a||$, $||c||$, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ de acuerdo con las estimaciones previamente exhibidas.

Problema 1 - Pregunta b)

En este problema se demuestra la estimación de Céa corresponde al esquema de Galerkin; esto es, que existe una constante $\hat{C}$, que depende de $||a||$, $||c||$, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$, tal que

$$||\sigma - \sigma_h||_H + ||u - u_h||_Q \leq \hat{C}\Big\{\text{dist}(\sigma, H_h) + \text{dist}(u, Q_h)\Big\}.$$

En efecto, aplicando desigualdad triangular, $\forall(\zeta_h, w_h) \in H_h \times Q_h$

$$||(\sigma, u) - (\sigma_h, u_h)||_{H\times Q} \leq ||(\sigma, u) - (\zeta_h, w_h)||_{H\times Q} + ||(\sigma_h, u_h) - (\zeta_h, w_h)||_{H\times Q}.$$

Sobre el segundo término de la desigualdad anterior se aplica la condición inf-sup del operador A definido previamente, obteniendo la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} ||(\sigma_h, u_h) - (\zeta_h, w_h)||_{H\times Q} &\leq 2C \sup_{\substack{(\tau_h, v_h)\in H_h\times Q_h \\ (\tau_h, v_h)\neq 0}} \frac{A\big((\sigma_h, u_h) - (\zeta_h, w_h), (\tau_h, v_h)\big)}{||(\tau_h, v_h)||_{H\times Q}} \\ &= 2C \sup_{\substack{(\tau_h, v_h)\in H_h\times Q_h \\ (\tau_h, v_h)\neq 0}} \frac{A\big((\sigma, u) - (\zeta_h, w_h), (\tau_h, v_h)\big)}{||(\tau_h, v_h)||_{H\times Q}}. \end{aligned}$$

Lo último, pues la consistencia del esquema ($\bigstar\bigstar$) entrega que

$$A\big((\sigma_h, u_h), (\tau_h, v_h)\big) = A\big((\sigma, u), (\tau_h, v_h)\big), \ \forall (\tau_h, v_h) \in H_h \times Q_h.$$

Luego, acotando superiormente por las normas respectivas, se obtiene que

$$||(\sigma_h, u_h) - (\zeta_h, w_h)||_{H\times Q} \leq 2C||A||\ ||(\sigma, u) - (\zeta_h, w_h)||_{H\times Q}.$$

Por lo tanto,

$$||(\sigma, u) - (\sigma_h, u_h)||_{H\times Q} \leq (1 + 2C||A||)\ ||(\sigma, u) - (\zeta_h, w_h)||_{H\times Q},$$

y así la estimación de Céa queda dada por

$$||\sigma - \sigma_h||_H + ||u - u_h||_Q \leq \hat{C}\Big\{\mathrm{dist}(\sigma, H_h) + \mathrm{dist}(u, Q_h)\Big\},$$

con constante

$$\hat{C} := (1 + 2C||A||).$$