Evaluación 2 de MEF-Mixtos: Problema 2

Profesor: Gabriel Gatica P.
Alumnos: Victor Cartés, Victor Burgos, Esteban Henriquez, Javier Gamonal

Universidad de Concepción

2021

Enunciado

En el mismo contexto del problema 4 de la evaluación 1, suponga ahora que Ω es convexo y considere el esquema de Galerkin: Hallar $(u_h, p_h) \in X_{2,h} \times M_{1,h}$ tal que

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) + b_1(v_h, p_h) &= F(v_h) \quad \text{Para todo } v_h \in X_{1,h}, \\ b_2(u_h, q_h) &= G(q_h) \quad \text{Para todo } q_h \in M_{2,h}, \end{aligned}$$

Donde, dados un entero $k \geq 0$ y una triangularización $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$, se definen:

$$\begin{aligned} \mathbf{RT}_k(\mathcal{T}_h) &:= \{v_h \in \boldsymbol{H}(div;\Omega) : v_h|_K \in \mathbf{RT}_k(K), \text{Para todo } K \in \mathcal{T}_h\} \\ \mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h) &:= \left\{q_h \in L^2(\Omega) : q_h|_K \in \mathbb{P}_k(K), \text{Para todo } K \in \mathcal{T}_h\right\} \\ X_{2,h} &:= \mathbf{H}_0^r(div_r;\Omega) \cap \mathbf{RT}_k(\mathcal{T}_h),\ M_{1,h} := L_0^r(\Omega) \cap \mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h) \\ X_1, h &:= \mathbf{H}_0^s(div_s;\Omega) \cap \mathbf{RT}_k(\mathcal{T}_h), M_{2,h} := L_0^s(\Omega) \cap \mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h) \\ \widetilde{\mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h)} &:= \left\{\phi_h \in H_0^1(\Omega) : \phi_h|_K \in \mathbb{P}_k(K),\ \text{Para todo } K \in \mathcal{T}_h\right\} \end{aligned}$$

Enunciado

A su vez, sea $\mathcal{R}_h^k : H_0^1(\Omega) \to \widetilde{\mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h)}$ el proyector que a cada $\phi \in H_{1(\Omega)}$ le asigna el único $\mathcal{R}_h^k(\phi) \in \widetilde{\mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h)}$ tal que:

$$\int_\Omega \nabla \mathcal{R}_h^k(\phi) \cdot \nabla \phi_h = \int_\Omega \nabla \phi \cdot \nabla \phi_h \quad \text{Para todo } \phi_h \in \widetilde{\mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h)}$$

a) Demuestre que los espacios nulos discretos de los operadores inducidos por b_1 y b_2 están dados por:

$$K_h^k = \{v_h \in \mathbf{RT}_k(\Omega) : div(v_h) = 0 \,\text{en}\, \Omega;\; v_h \cdot \nu = 0 \text{ en } \Gamma\}$$

y deduzca que $K_h^k = curl(\widetilde{\mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h)})$
b) Sea $\Theta_h^k : \mathbf{L}^1(\Omega) \to K_h^k$ el proyector que a cada $w \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ le asigna un único $\Theta_h^k(w) \in K_h^k$ tal que $\int_\Omega \Theta_h^k(w) \cdot v_h = \int_\Omega w \cdot v_h$ para todo $v_h \in K_h^k$, suponga que para cada $t \in (1, +\infty)$ existe una constante C_t^k, independiente de h, tal que $||\nabla \mathcal{R}_h^k(\phi)||_{0,t;\Omega} \leq C_t^k ||\nabla \phi||_{0,t;\Omega}$, Para todo $\phi \in W_0^{1,t}(\Omega)$, y utilice a) para demostrar que $||\Theta_h^k(w)||_{0,t;\Omega} \leq C_t^k ||w||_{0,t;\Omega}$, Para todo $w \in \mathbf{H}_0^t(div_t; \Omega)$ tal que $div(w) = 0$

Enunciado

c) Use el operador $D_s : \mathbf{L}^s(\Omega) \to \mathbf{L}^s(\Omega)$ y b) para probar que existe una constante $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de h, tal que para todo $w_h \in K_h$ se tiene $\sup_{v_h \in K_h^k} \frac{a(w_h, v_h)}{||v_h||_{X_1}} \geq \tilde{\alpha}||w_h||_{X_2}$,

d) De manera análoga a c) pruebe que $\sup_{w_h \in K_h^k} a(w_h, v_h) > 0$ Para todo $v_h \in K_h^k, v_h \neq 0$

e) Suponga que para cada $g \in M_2$(resp. $g \in M_1$) hay un único $z \in W^{2,s}(\Omega)$ (resp. $z \in W^{2,r}(\Omega)$) tal que $\Delta z = g$ en Ω, $\nabla z \cdot \nu = 0$ en Γ y $\int_\Omega z = 0$, para el cual se tiene que $||z||_{2,s;\Omega} \leq C_s||g||_{0,s;\Omega}$ (resp. $||z||_{2,r;\Omega} \leq C_s||g||_{0,r;\Omega}$) Con constantes $C_s, C_r > 0$, independientes de g y z, y pruebe las condiciones inf-sup discretas para b_1, b_2

f) Aplique el caso general del Teorema de Babuska-Brezzi discreto en espacios de Banach y concluya la solubilidad y dependencia continua del problema. Establezca además la estimación de Céa y las razones de convergencia respectivas.

Problema (a)

Notamos que las formas bilineales b_i inducen los siguientes operadores caracterizados por el producto de dualidad como sigue:

$$\langle \mathbb{B}_{h,i}(v_h), q_h \rangle = b_i(v_h, q_h) = \int_\Omega div(v_h) q_h$$

Para el par $(v_h, q_h) \in X_{i,h} \times M_{i,h}$. (Además $\mathbb{B}_{h,i} := \mathbb{B}_i|_{X_{i,h}}$)
Entonces, convenientemente el Kernel discreto queda caracterizado como:

$$\begin{aligned} K_{h,i}^k &:= \{v_h \in X_{i,h} : \mathbb{B}_{h,i}(v_h) = 0\} \\ &= \{v_h \in X_{i,h} : \int_\Omega q_h div(v_h) = 0, \text{Para todo } q_h \in M_{i,h}\} \end{aligned}$$

Y como $v_h \in X_{i,h}$ Entonces es un polinomio de RT, por ende tanto el como su divergencia se encuentran en todo espacio $L^p(\Omega)$ en particular en $L^r(\Omega)$ para $i = 1$ o $L^s(\Omega)$ para $i = 2$.

Problema (a)

Además, notamos que gracias a la F.I.P dada en $\boldsymbol{H}^r(div_t;\Omega)$ y en $W^{1,s}(\Omega)$ (se puede cambiar r por s) Tenemos que:

$$\langle \gamma_\nu(v_h), \gamma_0(1)\rangle = \int_\Omega \{v_h \cdot \nabla 1 + div(v_h)\}$$

Lo cúal implica que:

$$\int_\Omega div(v_h) = 0 \ \text{ En } \Omega$$

Así $div(v_h) \in L_0^r(\Omega)$ (caso i=1) o $div(v_h) \in L_0^s(\Omega)$ (caso i=2). Así $div(v_h) \in M_{i,h}$. Y por ello tenemos que la definición para el kernel discreto viene dada por:

$$K_{h,i}^k = \{v_h \in X_{i,h} : div(v_h) = 0\}$$

Lo cual para ambos kernel discretos puede simplificarse por la pertenencia al espacio RT, quedando en que ambos espacios son iguales al espacio:

$$K_h^k = \{v_h \in \mathbf{RT}_k(\mathcal{T}_h) : div(v_h) = 0 \,\text{en}\ \Omega;\ \ v_h \cdot \nu = 0 \text{ en } \Gamma\}$$

Problema (a)

Ahora para demostrar la igualdad de espacios pedida, primero consideremos un elemento $v_h \in K_h^k$, esto es
$v_h \in \mathbf{RT}_k(\Omega), div(v_h) = 0 \text{ en } \Omega; \;\; v_h \cdot \nu = 0$. Entonces como tenemos que la divergencia de v_h es nula, notamos que dado que $v_h|_K \in \mathbf{RT}_k(K)$, existen $\boldsymbol{q} \in [\mathbb{P}_k(K)]^n$ y $q_0 \in \tilde{\mathbb{P}}_k(K)$ tal que:

$$v_h|_K = \boldsymbol{q} + q_0\boldsymbol{x}$$

De donde entonces notamos que:

$$0 = div(v_h|_K) = div(\boldsymbol{q}) + (n+k)q_0$$

De donde concluimos que:

$$q_0 = -\frac{1}{(n+k)}div(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{P}_{k-1}(K)$$

Y dado que $q_0 \in \tilde{\mathbb{P}}_k(K)$ entonces solo nos queda la opción que $q_0 = 0$, de esta manera $v_h|_K = \boldsymbol{q} \in [\mathbb{P}_k(K)]^n$

Problema (a)

Además dado que Ω es simplemente conexo y $v_h \in [\mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h)]^n$ Usamos un resultado descrito en el libro "Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations" de Girault y Raviart que dice lo siguiente:

Una función v en $[L^2(\Omega)]^2$ que satisface:

$$div(v) = 0, \quad \langle v \cdot n, 1 \rangle_\Gamma = 0$$

sí y sólo sí existe una función flujo $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$v = curl(\phi)$$

Y más aun, el teorema permite aseverar que para cada función $v \in [L^2(\Omega)]^2$ existe una única función flujo ϕ que además de estar en el espacio $H^1(\Omega)$ se anula en la frontera. Es decir $\phi \in H_0^1(\Omega)$ Considerando esto, entonces existe un unico $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tal que: $v_h = curl(\phi)$. Y además para cada $K \in \mathcal{T}_h$

$$v_h|_K = curl(\phi)|_K$$

Lo cual permite concluir que: $\phi|_K \in \mathbb{P}_{k+1}(K)$ Así, dado que $\phi \in \widetilde{\mathbb{P}}_{k+1}(\mathcal{T}_h)$ entonces $v_h \in curl(\widetilde{\mathbb{P}}_{k+1}(\mathcal{T}_h))$.

Recíprocamente sea un elemento $v_h \in curl(\widetilde{\mathbb{P}_{k+1}(\mathcal{T}_h)})$, es decir, existe $\phi_h \in \mathbb{P}_{k+1}(\mathcal{T}_h)$ tal que $v_h = curl(\phi_h)$. Se sigue que, por la definición de ϕ_h:

$$v_h|_K = curl(\phi_h)|_K \in [\mathbb{P}_k(K)]^n \subset \mathbf{RT}_k(K)$$

Para todo $K \in \mathcal{T}_h$. Lo cual implica que v_h es un elemento del espacio $\mathbf{RT}_k(\mathcal{T}_h)$. Por ende, como este espacio goza de gran regularidad y $\phi_h \in H_0^1(\Omega)$, por el resultado descrito en la diapositiva anterior concluimos que:

$$div(v_h) = 0 \text{ en } \Omega \quad y \quad v_h \cdot \nu = 0 \text{ en } \Gamma$$

Lo cual entonces concluye que $v_h \in K_h^k$

Problema (b)

Consideremos un elemento $w \in \mathbf{H}_0^t(div_t;\Omega)$ tal que $div(w) = 0$. Usando el mismo resultado del libro citado anteriormente (en particular, su extensión para espacios $[L^t(\Omega)]^n$] Tenemos que existe una función flujo $\phi \in W_0^{1,t}(\Omega)$ tal que:

$$w = curl(\phi)$$

Luego, evaluando el proyector Θ_h^k en w notamos que por la evaluación del proyector $\theta_h^k(w) \in K_h^k$ y por el resultado demostrado en (a), existe una función $\psi_h \in \widetilde{\mathbb{P}_{k+1}(\mathcal{T}_h)}$ tal que

$$\Theta_h^k(w) = curl(\psi_h)$$

De esta forma la caracterización del proyector Θ_h^k se vuelve:

$$\int_\Omega curl(\psi_h) \cdot curl(\phi_h) = \int_\Omega curl(\phi) \cdot curl(\phi_h)$$

Para todo $\phi_h \in \widetilde{\mathbb{P}_{k+1}(\mathcal{T}_h)}$

Problema (b)

Ahora, usando las relaciones entre el *curl* y el gradiente en dos dimensiones tenemos que:

$$\int_\Omega \nabla(\psi_h)\cdot\nabla(\phi_h) = \int_\Omega \nabla(\phi)\cdot\nabla(\phi_h)$$

Para todo $\phi_h \in \widetilde{\mathbb{P}_{k+1}(\mathcal{T}_h)}$. Lo que es justamente la caracterización del proyector $\mathcal{R}_h^k(\Omega)$ de donde entonces se tiene que:

$$\mathcal{R}_h^k(\phi) = \psi_h$$

Y notamos que esto

$$||\Theta_h^k(w)||_{0,t;\Omega} = ||curl(\psi_h)||_{0,t;\Omega} = ||\nabla\psi_h||_{0,t;\Omega} = ||\nabla\mathcal{R}_h^k(\phi)||_{0,t;\Omega}$$

Junto con esto

$$||w||_{0,t;\Omega} = ||curl(\phi)||_{0,t;\Omega} = ||\nabla\phi||_{0,t;\Omega}$$

nos permite concluir, gracias a la desigualdad de la hipótesis que:

$$||\Theta_h^k(w)||_{0,t;\Omega} \leq C_t^k ||w||_{0,t;\Omega}$$

Problema (c)

Consideremos un elemento $w_h \in K_h^k$, $w_h \neq 0$, y definimos:

$$w_{h,s} := \begin{cases} |w_h|^{s-2} w_h, & w_h \neq 0 \\ 0 & w_h = 0 \end{cases}$$

Y notamos que:

$$||w_{h,s}||_{0,s;\Omega}^s = \int_\Omega |w_h|^{s(r-1)} = \int_\Omega |w_h|^r = ||w_h||_{0,r;\Omega}^r < \infty$$

Así, $w_{h,s} \in \boldsymbol{L}^s(\Omega)$. Por otro lado, definimos $\tilde{v}_h := \Theta_h^k(D_s(w_{h,s})) \in K_h^k$, Entonces tenemos que, por la definición del proyector Θ_h^k y la definición del operador D_s y dado que $w_h \in K_h^k$ y por ello en K_2:

$$\int_\Omega w_h \cdot \tilde{v}_h = \int_\Omega w_h \cdot D_s(w_{h,s}) = \int_\Omega w_h \cdot w_{h,s} = ||w_h||_{0,r;\Omega} ||w_{h,s}||_{0,s,\Omega}$$

Problema (c)

Ahora, usando el resultado probado en (b), tenemos la siguiente desigualdad:

$$||\tilde{v}_h||_{0,s;\Omega} \leq C_s^k ||D_s(w_{h,s})||_{0,s,\Omega} \leq C_s^k ||D_s|| \, ||w_{h,s}||_{0,s;\Omega}$$

Por último dado que $v \in K_h^k$ cumple que $div(v) = 0$ en Ω, entonces $||v||_{div_r;\Omega} = ||v||_{0,r;\Omega}$ (también funciona con s)

$$\sup_{v_h \in K_h^k} \frac{a(w_h, v_h)}{||v_h||_{X_1}} \geq \frac{\int_\Omega w_h \cdot \tilde{v}_h}{||\tilde{v}_h||_{0,s;\Omega}} \geq \frac{||w_h||_{0,r;\Omega} ||w_{h,s}||_{0,s,\Omega}}{C_s^k ||D_s|| \, ||w_{h,s}||_{0,s;\Omega}} = \frac{1}{C_s^k ||D_s||} ||w_h||_{div_r;\Omega}$$

Y como el elemento w_h es arbitario en K_h^k se prueba lo pedido. Y definimos $\alpha_h := \frac{1}{C_s^k ||D||}$

Problema (d)

De manera análoga para un elemento $v_h \in K_h^k$ definimos:

$$v_{h,r} := \begin{cases} |v_h|^{r-2} v_h, & v_h \neq 0 \\ 0 & v_h = 0 \end{cases}$$

Y se prueba que $v_{h,r} \in \boldsymbol{L}^{r}(\Omega)$.(pues se prueba que $||v_h||_{0,s;\Omega}^{s} = ||v_{h,r}||_{0,r;\Omega}^{r}$
Definiendo $\tilde{w}_h := \Theta_h^k(D_r(v_{h,r}))$ y se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \tilde{w}_h \cdot v_h = ||v_h||_{0,s;\Omega} ||v_{h,r}||_{0,r;\Omega} = ||v_h||_{0,s;\Omega} ||v_h||_{0,s;\Omega}^{s/r} &= ||v_h||_{0,s;\Omega} ||v_h||_{0,s;\Omega}^{s-1} \\ &= ||v_h||_{0,s;\Omega}^{s} > 0\end{aligned}$$

sí y sólo sí $v_h \neq 0$. Así, tenemos que:

$$\sup_{w_h \in K_h^k} a(w_h, v_h) \geq a(\tilde{w}_h, v_h) = \int_{\Omega} \tilde{w}_h \cdot v_h > 0$$

Problema (e)

Primero probaremos el caso $i = 1$, el caso $i = 2$ es totalmente análogo. Consideramos un elemento $q_h \in M_{1,h}$, y fijamos:

$$q_{h,s} := \begin{cases} |q_h|^{s-2} q_h, & q_h \neq 0 \\ 0 & q_h = 0 \end{cases}$$

Donde también se prueba que $||q_h||_{0,r;\Omega}^r = ||q_{h,s}||_{0,s;\Omega}^s$ y por ello $q_{h,s} \in L^s(\Omega)$. Definimos ahora $q_{h,s}^0 := q_{h,s} - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega q_{h,s}$ y notamos que este elemento pertenece al espacio $L_0^s(\Omega)$. O mejor dicho, $q_{h,s}^0 \in M_2$, de esta forma, existe un único $z_1 \in W^{2,s}(\Omega)$ tal que:

$$\Delta z_1 = q_{h,s}^0 \ \text{ en } \Omega$$

$$\nabla z_1 \cdot \nu = 0 \ \text{ en } \Gamma$$

$$\int_\Omega z_1 = 0$$

Y cumple que:

$$||z_1||_{2,s;\Omega} \leq C_s ||q_{h,s}^0||_{0,s;\Omega}$$

Problema (e)

Ahora entonces, definimos $\bar{v} = \nabla z_1$ Y tenemos que $\bar{v} \cdot \nu = 0$ en Γ, y $div(\bar{v}) = q^0_{h,s}$ en Ω. Y usando la desigualdad anterior, tenemos que:

$$||\bar{v}||_{1,s;\Omega} \leq ||z_1||_{2,s;\Omega} \leq C_s||q^0_{h,s}||_{0,s;\Omega}$$

Definiendo ahora el proyector de RT sobre $\bar{v}$ tenemos a $\bar{v}_h := \Pi^k_h(\bar{v})$ Y utilizando las identidades vistas en clases de la relación de los proyectores tenemos que:

$$\bar{v}_h \cdot \nu = \Pi^k_h(\bar{v}) \cdot \nu = \mathcal{P}^k_h(\bar{v} \cdot \nu) = 0$$

Así $\bar{v}_h \in X_{1,h}$ (Pues es un RT y su traza normal es nula). Y dado que

$$div(\bar{v}_h) = div(\Pi^k_h(\bar{v})) = \mathcal{P}^k_h(div(\bar{(}v))) = \mathcal{P}^k_h(q^0_{h,s})$$

Usando entonces el acotamiento del proyector RT Π^k_h y del proyector 'tipo L2' $\mathcal{P}$ tenemos que:

$$||\bar{v}_h||_{0,s;\Omega} = ||\Pi^k_h(\bar{v})||_{0,s;\Omega} \leq C||\bar{v}||_{0,s;\Omega} \leq CC_s||q^0_{h,s}||_{0,s;\Omega}$$

Y tenemos que:

$$||div(\bar{v}_h)||_{0,s;\Omega} = ||\mathcal{P}^k_h(q^0_{h,s})||_{0,s;\Omega} \leq C_1||q^0_{h,s}||_{0,s;\Omega}$$

Problema (e)

Y notamos ahora que:

$$
\begin{aligned}
||q^0_{h,s}||_{0,s;\Omega} &\leq ||q_{h,s}||_{0,s;\Omega} + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |q_{h,s}|\; ||1||_{0,s;\Omega} \\
&\leq ||q_{h,s}||_{0,s;\Omega} + \frac{||1||_{0,s;\Omega}\, ||1||_{0,r;\Omega}}{|\Omega|}\, ||q_{h,s}||_{0,s;\Omega} \\
&\leq \bar{C}||q_{h,s}||_{0,s;\Omega}
\end{aligned}
$$

Así, combinando este resultado con los anteriores se obtiene que:

$$
||\bar{v}_h||_{X_{1,h}} = ||\bar{v}_h||_{div_s;\Omega} = ||\bar{v}_h||_{0,s;\Omega} + ||div(\bar{v}_h)||_{0,s;\Omega} \leq \hat{C}||q_{h,s}||_{0,s;\Omega}
$$

Donde $\hat{C}_1$ depende de las constantes anteriores C, C_s, C_1 Finalmente notamos que para un elemento $\phi_h \in M_{1,h} \subset L^s_0(\Omega)$

$$
\int_\Omega \phi_h q^0_{h,s} = \int_\Omega \phi_h q_{h,s} - \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega q_{h,s}\right)\int_\Omega \phi_h = \int_\Omega \phi_h q_{h,s}
$$

Así entonces:

$$
\begin{aligned}
\sup_{v_h \in X_{1,h}} \frac{b_1(v_h, q_h)}{||v_h||_{X_{1,h}}} \geq \frac{\int_\Omega q_h div(\bar{v}_h)}{||\bar{v}_h||_{X_{1,h}}} &\geq \frac{\int_\Omega q_h \mathcal{P}_h^k(q_{h,s}^0)}{||\bar{v}_h||_{X_{1,h}}} \\
&\geq \frac{\int_\Omega q_h q_{h,s}}{||\bar{v}_h||_{X_{1,h}}} \\
&\geq \frac{||q_{h,s}||_{0,s;\Omega}||q_h||_{0,r;\Omega}}{\hat{C}_1||q_{h,s}||_{0,s;\Omega}} \\
&= \frac{1}{\hat{C}_1}||q_{h,s}||_{0,s;\Omega}
\end{aligned}
$$

Donde definimos entonces $\beta_{1,h} = \frac{1}{\hat{C}_1}$

Problema (e)

Ahora para el caso $i = 2$, se sigue de manera análoga pero tomando $q_h \in M_{2,h}$, y fijamos:

$$q_{h,r} := \begin{cases} |q_h|^{r-2} q_h, & q_h \neq 0 \\ 0 & q_h = 0 \end{cases}$$

Donde también se prueba que $||q_h||_{0,s;\Omega}^s = ||q_{h,r}||_{0,r;\Omega}^r$ y por ello $q_{h,r} \in L^r(\Omega)$. Definimos ahora $q_{h,r}^0 := q_{h,r} - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega q_{h,r}$ y notamos que este elemento pertenece al espacio $L_0^r(\Omega)$. O mejor dicho, $q_{h,r}^0 \in M_1$, de esta forma, existe un único $z_2 \in W^{2,r}(\Omega)$ tal que:

$$\Delta z_2 = q_{h,r}^0 \text{ en } \Omega$$

$$\nabla z_2 \cdot \nu = 0 \text{ en } \Gamma$$

$$\int_\Omega z_2 = 0$$

Y cumple que:

$$||z_2||_{2,r;\Omega} \leq C_r ||q_{h,r}^0||_{0,r;\Omega}$$

Problema (e)

Ahora entonces, definimos $\bar{v} = \nabla z_2$ Y tenemos que $\bar{v} \cdot \nu = 0$ en Γ, y $div(\bar{v}) = q^0_{h,r}$ en Ω. Y usando la desigualdad anterior, tenemos que:

$$||\bar{v}||_{1,r;\Omega} \leq ||z||_{2,r;\Omega} \leq C_r||q^0_{h,s}||_{0,r;\Omega}$$

Definiendo ahora el proyector de RT sobre $\bar{v}$ tenemos a $\bar{v}_h := \Pi^k_h(\bar{v})$ Y utilizando las identidades vistas en clases de la relación de los proyectores tenemos que:

$$\bar{v}_h \cdot \nu = \Pi^k_h(\bar{v}) \cdot \nu = \mathcal{P}^k_h(\bar{v} \cdot \nu) = 0$$

Así $\bar{v}_h \in X_{2,h}$ (Pues es un RT y su traza normal es nula). Y dado que

$$div(\bar{v}_h) = div(\Pi^k_h(\bar{v})) = \mathcal{P}^k_h(div(\bar{(v)})) = \mathcal{P}^k_h(q^0_{h,r})$$

Usando entonces el acotamiento del proyector RT Π^k_h y del proyector 'tipo L2' $\mathcal{P}$ tenemos que:

$$||\bar{v}_h||_{0,r;\Omega} = ||\Pi^k_h(\bar{v})||_{0,r;\Omega} \leq C||\bar{v}||_{0,r;\Omega} \leq CC_r||q^0_{h,r}||_{0,r;\Omega}$$

Y también

$$||div(\bar{v}_h)||_{0,r;\Omega} = ||\mathcal{P}^k_h(q^0_{h,r})||_{0,s;\Omega} \leq C_2||q^0_{h,r}||_{0,s;\Omega}$$

Problema (e)

Y notamos ahora que:

$$\begin{aligned} ||q_{h,r}^{0}||_{0,r;\Omega} &\leq ||q_{h,r}||_{0,r;\Omega} + \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} |q_{h,r}| \, ||1||_{0,r;\Omega} \\ &\leq ||q_{h,r}||_{0,r;\Omega} + \frac{||1||_{0,r;\Omega}\, ||1||_{0,s;\Omega}}{|\Omega|} ||q_{h,r}||_{0,r;\Omega} \\ &\leq \bar{C}||q_{h,r}||_{0,r;\Omega} \end{aligned}$$

Así, combinando este resultado con los anteriores se obtiene que:

$$||\bar{v}_h||_{X_{2,h}} = ||\bar{v}_h||_{div_r;\Omega} = ||\bar{v}_h||_{0,r;\Omega} + ||div(\bar{v}_h)||_{0,r;\Omega} \leq \hat{C}_2||q_{h,r}||_{0,r;\Omega}$$

Donde $\hat{C}_2$ depende de las constantes C, $\bar{C}$, C_s, C_2. Finalmente notamos que para un elemento $\phi_h \in M_{2,h} \subset L_0^r(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \phi_h q_{h,r}^{0} = \int_{\Omega} \phi_h q_{h,r} - \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_{\Omega} q_{h,r}\right)\int_{\Omega}\phi_h = \int_{\Omega}\phi_h q_{h,r}$$

Así entonces:

$$\sup_{v_h \in X_{2,h}} \frac{b_2(v_h, q_h)}{||v_h||_{X_{2,h}}} \geq \frac{\int_\Omega q_h div(\bar{v}_h)}{||\bar{v}_h||_{X_{2,h}}} \geq \frac{\int_\Omega q_h \mathcal{P}_h^k(q_{h,r}^0)}{||\bar{v}_h||_{X_{2,h}}}$$

$$\geq \frac{\int_\Omega q_h q_{h,r}}{||\bar{v}_h||_{X_{2,h}}}$$

$$\geq \frac{||q_{h,r}||_{0,s;\Omega}||q_h||_{0,s;\Omega}}{\hat{C}||q_{h,r}||_{0,s;\Omega}}$$

$$= \frac{1}{\hat{C}_2}||q_{h,r}||_{0,r;\Omega}$$

Así definimos $\beta_{2,h} := \frac{1}{\hat{C}_2}$

Problema (f)

Basandonos en el paper "GENERALIZED INF-SUP CONDITIONS FOR CHEBYSHEV SPECTRAL APPROXIMATION OF THE STOKES PROBLEM"de Bernardi,Canuto y Maday Notamos que al aplicar el resultado discreto cuando las aproximaciones de las formas bilineales a, b_1, b_2 son las mismas formas, y las aproximaciones de los funcionales F, G son los mismos funcionales originales tenemos que gracias a las condiciones inf-sup recién mostradas existe una única solución para nuestro problema variacional. Y más aún, tenemos la siguiente dependencia continua respecto a los datos (Corolario 2.2):

$$||u_h||_{X_2} \leq \alpha_h^{-1}||F||_{X_1'} + \beta_{2.h}^{-1}(1 + \alpha_h^{-1}||a||)||G||_{M_2'}$$

Y además:

$$||p_h||_{M_1} \leq \beta_{1,h}^{-1}(1 + \alpha_{1,h}^{-1})||F||_{X_1'} + \beta_{1,h}^{-1}\beta_{2,h}^{-1}||a||(1 + \alpha_{1,h}^{-1})||G||_{M_2'}$$

Problema (f)

Ahora, dado que anteriormente mencionamos que el espacio nulo discreto de b_1, b_2 está contenido en ambos espacios nulos "continuos" podemos usar el corolario 2.3 y el teorema 2.3. Es importante recalcar que en el resultado se cancelan varios terminos dado que las aproximaciones de las formas bilineales y los funcionales son los mismos. Por ende, tenemos que:

$$||u - u_h||_{X_2} \leq c(1 + \alpha_{1,h}^{-1})\,[2(1 + ||a||)\mathrm{dist}(u, X_{2,h})]$$

y además

$$\begin{aligned} ||p - p_h||_{M_1} \leq & c(1 + \beta_{1,h}^{-1})(1 + \alpha_{1,h}^{-1})(1 + ||a||)[2(1 + ||a||)\mathrm{dist}(u, X_{2,h}) \\ & + \mathrm{dist}(p, M_{1,h})] \end{aligned}$$

Las cuales juntas permiten afirmar que existe una constante C dependiente de $\alpha_h, \beta_{1,h}, \beta_{2,h}, ||a||$ tal que:

$$||u - u_h||_{X_2} + ||p - p_h||_{M_1} \leq C\{\mathrm{dist}(u, X_{2,h}) + \mathrm{dist}(p, M_{1,h})\}$$

Problema (f)

Gracias a esta estimación, y gracias a las propiedades del interpolante Raviart Thomas tenemos que, si asumimos que existe un l tal que $1 \leq l \leq k+1$ tal que $u \in W^{l,r}(\Omega)$

$$\text{dist}(u, X_{2,h}) \leq ||u - \Pi_h^k(u)||_{div_r;\Omega} \leq C_{rt} h^l \{|u|_{l,r;\Omega} + |div(u)|_{l,r;\Omega}\}$$

Y de forma análoga con la presión, tenemos que:

$$\text{dist}(p, M_{1,h}) \leq ||p - P_k^h(p)||_{0,l;\Omega} \leq C_{pol} h^l |p|_{l,t;\Omega}$$

De donde entonces, tenemos la relación:

$$||u - u_h||_{X_2} + ||p - p_h||_{M_1} \leq C_{final} h^l \{|u|_{l,r;\Omega} + |div(u)|_{l,r;\Omega} + |p|_{l,t;\Omega}\}$$