Profesor: Fernando Roldán
Ayudantes: Cristofer Mamani y Fernando Muñoz
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Optimización II (5225565)

Tarea 1

Fecha de entrega: Viernes 12 de Septiembre en grupos de dos o tres personas.

P1) Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Demuestre que $\operatorname{conv}(C)$ es compacto.

P2) Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y $C \subset \mathbb{R}^n$ con C convexo.

(i) Pruebe que si $\operatorname{int}(X) \neq \varnothing$ entonces $\operatorname{aff}(X) = \mathbb{R}^n$. **Hint:** Considere primero el caso en que $X = B(0, r)$ para $r > 0$.

(ii) Pruebe que si $\operatorname{aff}(X) = \mathbb{R}^n$ entonces $\operatorname{int}(X) = \operatorname{ri}(X)$.

(iii) Pruebe que si $\operatorname{aff}(C) = \mathbb{R}^n$ entonces $\operatorname{int}(C) \neq \varnothing$.

(iv) Pruebe que
$$\operatorname{aff}(X) = \operatorname{aff}(\operatorname{conv}(X)) = \operatorname{aff}(\overline{X}).$$

(v) Demuestre que $\operatorname{int}(C) \neq \varnothing \Leftrightarrow \operatorname{int}(\overline{C}) \neq \varnothing$.

P3) Sea $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal y sean $C \subset \mathbb{R}^n$, $S \subset \mathbb{R}^n$ y $D \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos convexos no vacíos. Demuestre que las siguientes afirmaciones son verdaderas. Puede utilizar las igualdades $\overline{\operatorname{ri}(C)} = \overline{C}$ $\operatorname{ri}(\overline{C}) = \operatorname{ri}(C)$ vistas en ayudantía y que $A(\overline{X}) \subset \overline{A(X)}$, para cualquier $X \subset \mathbb{R}^n$.

(i) Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $\operatorname{ri}(C) = \operatorname{ri}(S)$.
b) $\overline{C} = \overline{S}$.
c) $\operatorname{ri}(C) \subset S \subset \overline{C}$.

(ii) $A(\operatorname{ri}(C)) \subset A(C) \subset \overline{A(\operatorname{ri}(C))}$.

(iii) $\operatorname{ri}(A(C)) = A(\operatorname{ri}(C))$. **Hint:** Para una inclusión combine (ii) y (i).

(iv) $\operatorname{ri}(C \times S) = \operatorname{ri}(C) \times \operatorname{ri}(S)$.

(v) $\operatorname{ri}(C - S) = \operatorname{ri}(C) - \operatorname{ri}(S)$. **Hint:** Considere el operador lineal $A\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n \colon (x, y) \mapsto x - y$ y verifique que $A(C \times S) = C - S$.

(vi) Si $\operatorname{ri}(D) \cap A(\operatorname{ri}(C)) \neq \varnothing$, entonces $0 \in \operatorname{ri}(D - A(C))$.

P4) Consiere los conjuntos $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \leq -5\}$ y $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(i) Verifique que se cumplen las hipótesis del teorema de separación estricta para A y B.

(ii) Encuentre un plano que separe estrictamente A y B.

(iii) Encuentre un hiperplano soportante para B que lo separe con A.

P5) Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Demuestre que f es semicontinua inferior en $x \in \mathbb{R}^n$ si y solamente si
$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)\colon \|x - y\| < \delta \Rightarrow f(x) - f(y) \leq \varepsilon.$$