



Profesor: Fernando Roldán
Ayudantes: Cristofer Mamani y Fernando Muñoz
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Optimización II (5225565)

Tarea 4

Fecha de entrega: 23:59 viernes 05 de diciembre en grupos de 2 o 3 personas.

En esta tarea compararemos los métodos del gradiente (G), proximal (P) y gradiente-proximal (GP).

Sea $b \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una imagen que presenta ruido. Se propone disminuir el ruido resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|x - b\|^2 + \lambda H(Wx), \quad (1)$$

donde $H(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_\rho(x_{i,j})$, $W: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ es un operador wavelet ortonormal y

$$h_\rho(t) = \begin{cases} |t| - \frac{\rho}{2}, & \text{si } |t| > \rho; \\ \frac{t^2}{2\rho}, & \text{si } |t| \leq \rho. \end{cases} \quad (2)$$

Note que $\nabla H = W^\top \circ \nabla H \circ W$ y, debido a que W es ortonormal, $\text{prox}_{\lambda(H \circ W)}(x) = W^\top \text{prox}_{\lambda H}(Wx)$.

- Considere como imagen inicial \bar{x} la imagen `bird.tif`, y obtenga b mediante la función `imnoise(\bar{x} , 'gaussian', 0, σ)` de MATLAB.
- Compare los resultados obtenidos para G, P, y GP en los dos casos posible (es decir hacer prox en una función, gradiente en la otra y viceversa) en términos del número de iteraciones (NI), tiempo de cálculo en segundos (T) y valor en la función objetivo (FO) (complete la tabla de resultados).
- Considere los casos $\sigma \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}$ y $\lambda \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}$ (es decir, 9 casos en total).
- Adjunte para cada σ la imagen con ruido (b) y las imágenes obtenidas de mejor calidad para cada algoritmo (es decir, tres grupos de imágenes). Para evaluar la calidad de las imágenes, utilice la función `psnr` de MATLAB. Indique también el PSNR en la tabla de resultados.
- Utilice criterio de parada de error relativo con tolerancia 10^{-9} y un máximo de 1000 iteraciones.
- Se entrega un script en MATLAB para resolver este problema mediante GP haciendo prox en la norma 2 y gradiente en $H \circ W$. Para resolver mediante los otros métodos, se deben hacer las modificaciones adecuadas. En todos los experimentos utilice el operador W dado en el script y $\rho = 0.1$.
- Calcule el paso (γ) adecuado para cada método. Para el método proximal, realice algunas pruebas para encontrar un paso óptimo. Note que debe calcular $\text{prox}_{\gamma(\frac{1}{2}\|\cdot - x\|^2 + \lambda H \circ W(\cdot))}$, se recomienda calcular $\text{prox}_{\gamma(\frac{1}{2}\|\cdot - x\|^2 + \lambda g)}$ para g en general y luego reemplazar. Recuerde que $\text{prox}_{\lambda H(x)}$ ya fue calculado en la tarea 3. Indique, en cada caso, el paso en la tabla de resultados.
- Responda las siguientes preguntas
 - ¿Qué método es más rápido en NI y T?
 - ¿Qué método es más costoso en tiempo por iteración?

– ¿Cómo influye λ en la imagen obtenida?

En resumen, los resultados a entregar son:

- (i) Tabla de resultados.
- (ii) Mejores imágenes en λ para cada σ y cada algoritmo.
- (iii) Respuesta a preguntas.
- (iv) Scripts de códigos en MATLAB

σ	λ	G					P					GP1					GP2				
		NI	T	FO	PSNR	γ	NI	T	FO	PSNR	γ	NI	T	FO	PSNR	γ	NI	T	FO	PSNR	γ
10^{-1}	10^{-1}																				
	10^{-2}																				
	10^{-3}																				
10^{-2}	10^{-1}																				
	10^{-2}																				
	10^{-3}																				
10^{-3}	10^{-1}																				
	10^{-2}																				
	10^{-3}																				

Table 1: Resultados