Problema 1. *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea u una función biarmónica; esto es, $u \in C^4(U)$ y*

$$\Delta\Delta u = 0.$$

(a) Sea $x \in U$ y sea $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$. Pruebe

$$u(x) + \frac{r^2}{2n}\Delta u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}S(y)$$

(b) Bajo las mismas condiciones de la parte anterior, pruebe que

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}S(y) - \frac{1}{2}\fint_{\partial B(x,r)} Du(y)\cdot(y-x)\ \mathrm{d}S(y)$$

Demostración. (a) Dado $x \in U$, se define la función auxiliar $\varphi : I_x \longrightarrow \mathbb{R}$ donde

$$\varphi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}S(y) - \frac{r^2}{2n}\Delta u(x),$$

con $I_x := \{r > 0 : B(x,r) \subset U\}$. Se puede observar que la función φ se puede extender por continuidad en cero, ya que

$$\lim_{r\to 0^+}\varphi(r) = \lim_{r\to 0^+}\left(\fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}S(y) - \frac{r^2}{2n}\Delta u(x)\right) \overset{\text{Álgebra de límites}}{=} \lim_{r\to 0^+}\fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}S(y) - \frac{\Delta u(x)}{2n}\lim_{r\to 0^+} r^2 = u(x),$$

de esta forma, se puede re-definir la función $\varphi : I_x \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ donde

$$\varphi(r) = \begin{cases} \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}S(y) - \frac{r^2}{2n}\Delta u(x) & \text{Si } r > 0 \\ u(x) & \text{Si } r = 0 \end{cases}.$$

Notar que demostrar (a) es equivalente a probar que φ es constante en I_x, esto es $\varphi'(r) = 0$, para todo $r \in I_x$. Derivar la función φ, puede ser complicado considerando que el dominio de integración depende de r, por esta razón se hace el cambio de variable $y = x + zr$ con $z \in \partial B(0,1)$, luego

$$\varphi(r) = \fint_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\ \mathrm{d}S(z) - \frac{r^2}{2n}\Delta u(x),$$

derivando φ respecto a r se obtiene que

$$\varphi'(r) = \fint_{\partial B(0,1)} Du(x+rz)\cdot z\ \mathrm{d}S(z) - \frac{r}{n}\Delta u(x),$$

haciendo el cambio de variable $y = x + rz$, se obtiene

$$\varphi'(r) = \fint_{\partial B(x,r)} Du(y)\cdot\frac{y-x}{r}\ \mathrm{d}S(y) - \frac{1}{n}\Delta u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}\frac{\partial u}{\partial \nu}\ \mathrm{d}S(y) - \frac{r}{n}\Delta u(x),$$

usando la formula de Green

$$\varphi'(r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(x,r)}\Delta u(y)\ \mathrm{d}y - \frac{r}{n}\Delta u(x) = \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)}\Delta u(y)\ \mathrm{d}y - \frac{r}{n}\Delta u(x). \tag{†}$$

Luego, notando que $\Delta u(x) \in C^2(U)$ es armónica, se tiene

$$\Delta u(x) = \fint_{B(x,r)}\Delta u(y)\ \mathrm{d}S(y),$$

reemplazando en (†), se obtiene

$$\varphi'(r) = \frac{r}{n}\Delta u(x) - \frac{r}{n}\Delta u(x) = 0.$$

Así, φ es constante en I_x y dado que es continua en cero, se deduce que

$$\varphi(r) = \varphi(0) = \Delta u(x),$$

para todo $r \in I_x$. Lo cual muestra lo pedido.

(*b*) Sean $x \in U$ y $r > 0$ tales que $B(x,r) \subset U$. De (*a*) se tiene que

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}S(y) - \frac{r^2}{2n}\Delta u(x).$$

Por tanto, probar (*b*) es equivalente a mostrar que

$$\Delta u(x) = \frac{n}{r^2}\fint_{\partial B(x,r)} Du(y)\cdot(y-x)\ \mathrm{d}S(y),$$

para esto, recordemos que $\Delta u(x)$ es armónica en U, por tanto satisface la formula del valor medio, esto es

$$\Delta u(x) = \fint_{B(x,r)} \Delta u(y)\ \mathrm{d}y = \frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)} \Delta u(y)\ \mathrm{d}y.$$

Usando formula de Green

$$\Delta u(x) = \frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\ \mathrm{d}S(y) = \frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{\partial B(x,r)} Du(y)\cdot\nu\ \mathrm{d}S(y) = \frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{\partial B(x,r)} Du(y)\cdot\frac{y-x}{r}\ \mathrm{d}S(y)$$

Desarrollando la ultima igualdad

$$\Delta u(x) = \frac{n}{r^2}\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} Du(y)\cdot(y-x)\ \mathrm{d}S(y) = \frac{n}{r^2}\fint_{\partial B(x,r)} Du(y)\cdot(y-x)\ \mathrm{d}S(y),$$

mostrando lo pedido.

□

Problema 2. *Dé una fórmula explícita para una solución de*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + cu &= f \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ u &= g \quad \text{sobre} \quad \mathbb{R}^n\times\{t=0\}, \end{aligned}$$

donde $c \in \mathbb{R}$.

Demostración. Considere la función

$$\begin{aligned} v\,:\,\mathbb{R}^n\times(0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,t) &\mapsto v(x,t) := e^{\beta t}u(x,t), \end{aligned}$$

donde β es una constante real a determinar. Derivando respecto a t y x_i con $i \in \{1,\dots,n\}$, se obtiene

$$\begin{aligned} v_t(x,t) &= \beta e^{\beta t}u(x,t) + e^{\beta t}u_t(x,t),\\ v_{x_i}(x,t) &= e^{\beta t}u_{x_i}(x,t),\\ v_{x_ix_i}(x,t) &= e^{\beta t}u_{x_ix_i}(x,t). \end{aligned}$$

Luego,

$$v_t - \Delta v = \beta e^{\beta t}u + e^{\beta t}u_t - e^{\beta t}\Delta u = e^{\beta t}\left(u_t - \Delta u + \beta u\right),$$

considerando $\beta = c$ se obtiene,

$$v_t(x,t) - \Delta v(x,t) = e^{ct}\left(u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + cu(x,t)\right) = e^{ct}f(x,t), \quad \forall (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty),$$

además,

$$v(x,0) = e^0u(x,0) = u(x,0) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Lo anterior nos dice que v es solución de

$$\begin{aligned} v_t(x,t) - \Delta v(x,t) &= e^{ct}f(x,t) \quad (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ v(x,0) &= g(x), \quad \forall x\in\mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

luego, por teorema visto en clases v tiene la forma explícita

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t)g(y)\ \mathrm{d}y + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)e^{cs}f(y,s)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}s,$$

por tanto

$$u(x,t) = e^{-ct}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t)g(y)\ \mathrm{d}y + e^{-ct}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)e^{cs}f(y,s)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}s.$$

□

Problema 3. *Sea u una solución del problema de valores iniciales para la ecuación de la onda unidimensional*

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad &\text{en} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g, \ u_t = h \quad &\text{sobre} \quad \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Suponga que g y h tienen soporte compacto. La energía cinética es $k(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t)\,\mathrm{d}x$ y la energía potencial es $p(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x$. Pruebe que

(*a*) *$k(t) + p(t)$ es constante respecto a t, y que*

(*b*) *$k(t) = p(t)$ para todos los tiempos t suficientemente grandes.*

Demostración. (*a*) Dado que u es solución de la ecuación de la onda unidimensional, por formula de d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x-t) + g(x+t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(s)\,\mathrm{d}s,$$

luego, usando las hipótesis sobre h y g se deduce que u también tiene soporte compacto.

Sea la función $E : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$E(t) := k(t) + p(t) \quad \forall t > 0,$$

derivando E respecto a t

$$E'(t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t)\,\mathrm{d}x\right) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x\right),$$

para poder pasar la derivada bajo el signo de la integral, usaremos que u es lo suficientemente regular y de soporte compacto, luego

$$E'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t u_{tt}(x,t)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} u_x u_{tx}(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

lo cual al integrar por partes

$$E'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,t)u_{tt}(x,t)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}(x,t)u_t(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\left(u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t)\right)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Por tanto, E es constante en $(0,\infty)$.

(*b*) Calculando u_t y u_x, usando el hecho que u se puede representar mediante la formula de d'Alembert

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \frac{1}{2}\left[g'(x-t) + g'(x+t)\right] + \frac{1}{2}\left[h(x+t) - h(x-t)\right], \\ u_t(x,t) &= \frac{1}{2}\left[g'(x+t) - g'(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[h(x+t) + h(x-t)\right], \end{aligned}$$

restando y sumando ambas funciones

$$\begin{aligned} u_x(x,t) - u_t(x,t) &= g'(x-t) - h(x-t), \\ u_x(x,t) + u_t(x,t) &= g'(x+t) + h(x+t), \end{aligned}$$

multiplicando ambas ecuaciones

$$u_x^2(x,t) - u_t^2(x,t) = \left(g'(x-t) - h(x-t)\right)\left(g'(x+t) + h(x+t)\right),$$

integrando a ambos lados y multiplicando por $\frac{1}{2}$

$$p(t) - k(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(g'(x-t) - h(x-t)\right)\left(g'(x+t) + h(x+t)\right)\,\mathrm{d}x.$$

Como k y p tienen soporte compacto, se puede considerar

$$t \geq \frac{\text{máx}\{|\text{sop}(h)|, |\text{sop}(g)|\}}{2} =: R,$$

y así

$$k(t) = p(t) \quad \forall t > R.$$

$\square$