UNA INTEGRAL SOBRE UNA BOLA DE CALOR

LEONARDO FIGUEROA

Al final de la demostración de teorema 2.3/3 de [Eva10] se emplea el valor de $\int_{E(0,0,1)} \frac{|y|^2}{s^2}\,\mathrm{d}(y,s)$, omitiendo los detalles de su cómputo. Aquí $E(0,0,1)$ es la bola de calor

$$E(0,0,1) = \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq 0,\ \frac{1}{(-4\pi s)^{n/2}} e^{\frac{|y|^2}{s}} \geq 1 \right\}$$
$$= \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -\frac{1}{4\pi} \leq s \leq 0,\ |y| \leq R(s) \right\},$$

donde, a su vez,

$$R(s) := \sqrt{2ns\log(-4\pi s)}.$$

Aquí llenaremos los detalles. Comenzamos con la observación de que la función gamma satisface [AAR99, Ec. (1.1.6), Cor. 1.1.5]

$$(\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)) \quad \Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \tag{1}$$

y

$$(\forall\, z \in \mathbb{C} \text{ con } \Re(z) > 0) \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Sea ahora σ la medida usual sobre la esfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Empleando la descomposición $y = rz$ con $r = |y|$ y $z = y/|y|$, que es válida para todo $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, obtenemos que nuestra de integral de interés satisface

$$I := \int_{E(0,0,1)} \frac{|y|^2}{s^2}\,\mathrm{d}(y,s) = \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \int_{B(0,R(s))} \frac{|y|^2}{s^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$$
$$= \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \int_0^{R(s)} \int_{S^{n-1}} \frac{|rz|^2}{s^2} r^{n-1}\,\mathrm{d}\sigma(z)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s = \left|S^{n-1}\right| \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \int_0^{R(s)} \frac{r^{n+1}}{s^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s.$$

Fecha: 30 de agosto de 2023.

Computando la integral radial, sustituyendo el valor de $\alpha(n)$ dado en [Eva10, Sec. A.2] y el valor de $R(s)$ dado más arriba, obtenemos

$$I = \frac{n\,\pi^{n/2}}{(n+2)\,\Gamma(n/2+1)} \underbrace{\int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{\sqrt{2ns\log(-4\pi s)}^{\,n+2}}{s^2}\,\mathrm{d}s}_{:=J}\,. \tag{3}$$

Para computar la integral unidimensional J, efectuamos el cambio de variable $q = -\frac{n}{2}\log(-4\pi s) \leftrightarrow s = -\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{2q}{n}}$, $\mathrm{d}q = -\frac{2}{n}\frac{1}{s}\mathrm{d}s$, obteniendo

$$\begin{aligned} J = \int_0^\infty \frac{\sqrt{2n\left(-\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{2q}{n}}\right)\left(-\frac{2q}{n}\right)}^{\,n+2}}{-\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{2q}{n}}}\left(-\frac{2}{n}\right)\mathrm{d}q &= \frac{8}{n\,\pi^{n/2}}\int_0^\infty q^{\left(\frac{n}{2}+2\right)-1}e^{-q}\,\mathrm{d}q \\ &\overset{(2)}{=} \frac{8}{n\,\pi^{n/2}}\Gamma\Big(\frac{n}{2}+2\Big)\,. \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor obtenido para J en (3) y empleando (1) para expandir $\Gamma\big(\frac{n}{2}+2\big) = \big(\frac{n}{2}+1\big)\,\Gamma\big(\frac{n}{2}+1\big)$, obtenemos finalmente que nuestra integral de interés es

$$I = \int_{E(0,0,1)} \frac{|y|^2}{s^2}\,\mathrm{d}(y,s) = 4.$$

Referencias

[AAR99] George E. Andrews, Richard Askey, and Ranjan Roy, *Special functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. MR 1688958 (2000g:33001)

[Eva10] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR 2597943 (2011c:35002)