UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Tarea 3 - 525539

Métodos de Elementos Finitos Mixtos

Esteban Henríquez N. Prof. Gabriel N. Gatica.

1. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega) := [L^2(\Omega)]^n$. El problema de Navier-Stokes con viscosidad variable $\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ consiste en encontrar la velocidad $\mathbf{u}$ y la presión p de un fluido que ocupa la región Ω, tal que

$$\begin{aligned} -\mathbf{div}\,(\mu(|\nabla \mathbf{u}|)\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Incorpore una condición de unicidad para la presión, introduzca las incógnitas auxiliares $\boldsymbol{\sigma} := \mu(|\nabla \mathbf{u}|)\nabla \mathbf{u} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - p\mathbb{I}$ y $\mathbf{t} := \nabla \mathbf{u}$ en Ω, elimine fundadamente p, y demuestre que (1) se transforma, equivalentemente, en el sistema de primer orden

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} = \mathbf{t} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mu(|\mathbf{t}|)\mathbf{t} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^{\mathbf{d}} &= \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{d}} \quad \text{en} \quad \Omega, \\ -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma. \end{aligned} \tag{2}$$

Demostración. Introduciendo el tensor

$$\boldsymbol{\sigma} := \mu(|\nabla \mathbf{u}|)\nabla \mathbf{u} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - p\mathbb{I},$$

se tiene que $\mathbf{div}\,(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u}$, así

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{div}\,(\mu(|\nabla \mathbf{u}|)\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{div}\,(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbf{div}\,(p\mathbb{I}) \\ &= \mathbf{div}\,(\mu(|\nabla \mathbf{u}|)\nabla \mathbf{u}) - (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} - \nabla p, \end{aligned}$$

en consecuencia, la primera ecuación de (1) queda

$$-\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega,$$

ahora, introduciendo $\mathbf{t} := \nabla \mathbf{u}$, notemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{d}} &= (\mu(|\mathbf{t}|)\mathbf{t})^{\mathbf{d}} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^{\mathbf{d}} - (p\mathbb{I})^{\mathbf{d}} \\ &= (\mu(|\mathbf{t}|)\mathbf{t})^{\mathbf{d}} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^{\mathbf{d}} - p\mathbb{I} + \frac{1}{n} np\mathbb{I} \\ &= (\mu(|\mathbf{t}|)\mathbf{t})^{\mathbf{d}} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^{\mathbf{d}} \\ &= \mu(|\mathbf{t}|)\mathbf{t} - \frac{1}{n}\mu(|\mathbf{t}|)\operatorname{tr}(\mathbf{t})\mathbb{I} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^{\mathbf{d}} \\ &= \mu(|\mathbf{t}|)\mathbf{t} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^{\mathbf{d}}, \end{aligned}$$

ya que $\operatorname{tr}(\mathbf{t}) = \operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ en Ω, a su vez

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(p\mathbb{I}) = np &= \mu(|\nabla\mathbf{u}|)\operatorname{tr}(\nabla\mathbf{u}) - \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\\ &= \mu(|\nabla\mathbf{u}|)\operatorname{div}(\mathbf{u}) - \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{u}),\end{aligned}$$

así $p = -\frac{1}{n}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{u})$ en Ω. Ahora, considerando la condición de unicidad para la presión, $\displaystyle\int_\Omega p = 0$, con esto se tiene que

$$\int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = 0.$$

En resumen, se obtuvo

$$\nabla\mathbf{u} = \mathbf{t} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mu(|\mathbf{t}|)\mathbf{t} - (\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})^{\mathbf{d}} \;=\; \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{d}} \quad \text{en} \quad \Omega,$$

$$-\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u} \;=\; \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma.$$

□

b) Sea $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + c\mathbb{I}$, con $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega) := \left\{\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega) : \quad \int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{\zeta}) = 0\right\}$, y $c \in \mathbb{R}$, y deduzca de (2) que $c = -\frac{1}{n|\Omega|}\int_\Omega \operatorname{tr}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})$.

Demostración. Con $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + c\mathbb{I}$ y $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)$ notemos que de (2) se tiene que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = 0\\ \Longleftrightarrow &\int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}_0) + nc|\Omega| + \int_\Omega \operatorname{tr}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = 0\\ \Longleftrightarrow &\, c = -\frac{1}{n|\Omega|}\int_\Omega \operatorname{tr}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\end{aligned}$$

□

c) Defina $\mathbb{L}^2(\Omega) := [L^2(\Omega)]^{n\times n}$ y $\mathbb{L}^2_{\mathbf{tr}}(\Omega) := \{s \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \quad \operatorname{tr}\mathbf{s} = 0\}$, y demuestra que la formulación variacional de (2) se reduce a: Hallar $(\mathbf{t},\boldsymbol{\sigma}) \in \mathbb{L}^2_{\mathbf{tr}}(\Omega) \times \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)$, y $\mathbf{u}$ en un espacio por definir, tal que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mu(|\mathbf{t}|)\mathbf{t} : \mathbf{s} - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^d : \mathbf{s} - \int_\Omega (\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})^{\mathbf{d}} : \mathbf{s} \;&=\; 0 \qquad \forall\mathbf{s} \in \mathbb{L}^2_{\mathbf{tr}}(\Omega),\\ \int_\Omega \boldsymbol{\tau}^{\mathbf{d}} : \boldsymbol{t} + \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} \;&=\; 0 \qquad \forall\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)\\ -\int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} \;&=\; \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \quad \forall\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega).\end{aligned}$$

Demostración. Testeando la segunda igualdad de (2) con $\boldsymbol{s} \in \mathbb{L}^2_{\mathbf{tr}}(\Omega)$, se tiene

$$\int_\Omega \mu(|\boldsymbol{t}|)\boldsymbol{t} : \boldsymbol{s} - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{d}} : \boldsymbol{s} - \int_\Omega (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})^{\mathbf{d}} : \boldsymbol{s} = 0 \quad \forall\boldsymbol{s} \in \mathbb{L}^2_{\mathbf{tr}}(\Omega),$$

ahora, testeando la primera igualdad de (2) con $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)$, queda

$$-\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \boldsymbol{t} : \boldsymbol{\tau} = 0,$$

luego, aplicando fórmulas de integración por partes, se sigue que

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\tau\nu}\rangle_\Gamma + \int_\Omega \boldsymbol{t}:\boldsymbol{\tau} = 0$$

$$\iff \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega \boldsymbol{t}:\boldsymbol{\tau} = 0, \tag{3}$$

ya que $\boldsymbol{u} = 0$ en Γ. Por otra parte, notemos que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\tau}^{\mathbf{d}} : \boldsymbol{t} = \int_\Omega \left(\boldsymbol{\tau} - \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\tau})\mathbb{I}\right) : \boldsymbol{t} = \int_\Omega \boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{t},$$

ya que $\tau \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)$, así (3) queda

$$\int_\Omega \boldsymbol{\tau}^{\mathbf{d}} : \boldsymbol{t} + \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}\in\mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega),$$

a su vez, testeando la tercera igualdad de (2) por $\boldsymbol{v}\in\mathbf{L}^2(\Omega)$, se tiene

$$-\int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \quad \forall \boldsymbol{v}\in\mathbf{L}^2(\Omega),$$

en resumen, se obtuvo el siguiente problema variacional: Hallar $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\sigma}) \in \mathbb{L}^2_{\mathbf{tr}}(\Omega)\times\mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)$ y $\boldsymbol{u}$ en un espacio apropiado, tal que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mu(|\mathbf{t}|)\mathbf{t}:\mathbf{s} - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^d:\mathbf{s} - \int_\Omega (\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})^{\mathbf{d}}:\mathbf{s} &= 0 && \forall \mathbf{s}\in\mathbb{L}^2_{\mathbf{tr}}(\Omega),\\
\int_\Omega \boldsymbol{\tau}^{\mathbf{d}}:\boldsymbol{t} + \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} &= 0 && \forall \boldsymbol{\tau}\in\mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)\\
-\int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} && \forall \boldsymbol{v}\in\mathbf{L}^2(\Omega).
\end{aligned}$$

□

d) Aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la inyección continua de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ en $\mathbf{L}^4(\Omega) := [L^4(\Omega)]^n$ para deducir que un espacio factible para $\boldsymbol{u}$ en c) está dado por $\mathbf{H}^1_0(\Omega) := [H^1_0]^n$.

Demostración. Podemos notar que el tercer término de la primera ecuación del ítem c) infiere que $\boldsymbol{u}$ pertenece a un subespacio de $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, así usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y considerando la inyección continua de $\boldsymbol{L}^4(\Omega)$ en $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ con constante $c>0$, podemos deducir lo siguiente

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{w})^{\mathbf{d}} : \boldsymbol{s}\right| &\le \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^4(\Omega)}\|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{L}^4(\Omega)}\|\boldsymbol{s}\|_{0,\Omega}\\
&\le c\|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega}\|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega}\|\boldsymbol{s}\|_{0,\Omega}
\end{aligned}$$

para todo $s\in\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ y $\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{H}^1(\Omega)$, finalmente se sugiere buscar $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}^1_0(\Omega)$ debido a la condición de Dirichlet de la EDP. □

2. Dados X_1, X_2, M_1, y M_2 espacios de Banach reales reflexivos, considere formas bilineales acotadas $a : X_1\times X_2\to\mathbb{R}$ y $b_i : X_i\times M_i\to\mathbb{R}$, $i\in\{1,2\}$, cuyos operadores inducidos se denotan por $A\in\mathcal{L}(X_2,X_1')$ y $B_i\in\mathcal{L}(X_i,M_i')$, respectivamente, esto es

$$A(w)(v) := a(w,v) \quad \forall (w,v)\in X_2\times X_1$$

y

$$B_i(w)(q) := b_i(w,q) \quad \forall (w,q) \in X_i \times M_i.$$

Además, para cada $i \in \{1,2\}$ denote por K_i el espacio nulo de B_i y por $B_i^{\mathbf{t}} \in \mathcal{L}(M_i, X_i')$ su "adjunto" respectivo, esto es

$$B_i^{\mathbf{t}}(q)(w) := b_i(w,q) \quad \forall (q,w) \in M_i \times X_i.$$

A su vez, sea $\Pi : X_1' \to K_1'$ el operador definido por $\Pi(f)(v) := f(v)\ \forall (f,v) \in X_1' \times K_1$, y suponga que se verifican las siguientes hipótesis

i) $\Pi A|_{K_2} : K_2 \to K_1'$ es un isomorfismo (biyección acotada).

ii) para cada $i \in \{1,2\}$ existe $\beta_i > 0$ tal que $\|B_i^{\mathbf{t}}(q)\|_{X_i'} \geq \beta_i \|q\|_{M_i}\ \forall q \in M_i$.

De acuerdo a lo anterior, se pide lo siguiente:

a) Muestre que i) y ii) se pueden re-escribir, equivalentemente, como condiciones inf-sup continuas para a, b_1, b_2.

Demostración. Notemos que para $i \in \{1,2\}$, de la afirmación ii), existe $\beta_i > 0$ tal que

$$\|B_i^{\mathbf{t}}(q)\|_{X_i'} \geq \beta_i \|q\|_{M_i} \quad \forall q \in M_i.$$

Lo cual, a su vez, es equivalente a decir que $B_i^{\mathbf{t}} : M_i \to X_i'$ es un operador inyectivo y de rango cerrado. De lo anterior sea $q \in M_i$m así existe $\beta_i > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\beta_i \|q\|_{M_i} &\leq \|B_i^{\mathbf{t}}(q)\|_{X_i'} \\ &= \sup_{\substack{w \in X_i \\ w \neq \theta}} \frac{B_i^{\mathbf{t}}(q)(w)}{\|w\|_{X_i}} \\ &= \sup_{\substack{w \in X_i \\ w \neq \theta}} \frac{b_i(w,q)}{\|w\|_{X_i}},\end{aligned}$$

entonces tomando ínfimo con respecto a M_i, podemos decir que $\exists \beta_i > 0$ tal que

$$\beta_i \leq \inf_{\substack{q \in M_i \\ q \neq \theta}} \sup_{\substack{w \in X_i \\ w \neq \theta}} \frac{b_i(w,q)}{\|w\|_{X_i}}.$$

Por otra parte, notemos que

$$\begin{aligned}K_i &= \{w \in X_i,\ B_i(w) = \theta \in M_i'\} \\ &= \{w \in X_i,\ B_i(w)(q) = 0 \quad \forall q \in M_i\} \\ &= \{w \in X_i,\ b_i(w,q) = 0 \quad \forall q \in M_i\},\end{aligned}$$

y a su vez, de i) se tiene que

i-1) $\Pi A|_{K_2} : K_2 \to K_1'$ es inyección,

i-2) $\Pi A|_{K_2} : K_2 \to K_1'$ es sobreyección,

al respecto i-1) $\Pi A|_{K_2} : K_2 \to K_1'$ es inyección si y solo si $\Pi A|_{K_2}(\zeta) \neq \theta \quad \forall \zeta \in K_2,\ \zeta \neq \theta$, lo cual es equivalente a

$$\sup_{\tau \in K_1} \Pi A|_{K_2}(\zeta)(\tau) > 0 \quad \zeta \in K_2,\ \zeta \neq \theta$$

$$\Longleftrightarrow \sup_{\tau \in K_1} a(\zeta,\tau) > 0 \quad \forall \zeta \in K_2,\, \zeta \neq \theta,$$

a su vez de i-2), $\Pi A|_{K_2} : K_2 \to K_1'$ sobreyección si y solo si $(\Pi A|_{K_2})' : K_1'' \to K_2'$ es inyectivo y de rango cerrado, lo cual es equivalente a decir que $\exists \alpha > 0$ tal que

$$\|(\Pi A|K_2)'(f)\|_{K_2'} \geq \alpha \|f\|_{K_1''} \quad \forall f \in K_1'',$$

luego, como X_1 es reflexivo y como $K_1 \subseteq X_1$, entonces K_1 es reflexivo, así se tiene que

$$\begin{aligned} J_{K_1} : K_1 &\to K_1'' \\ \tau &\to J_{K_1}, \end{aligned}$$

donde $J_{K_1}(\tau)(F) := F(\tau) \quad \forall F \in K_1'$ es biyección, se sigue de i-2) que $\exists \alpha > 0$ tal que

$$\|(\Pi A|_{K_2})'(J_{K_1}(\tau))\|_{K_2'} \geq \alpha \|J_{K_1}(\tau)\|_{K_1''} \quad \forall \tau \in K_1$$

$$\Longleftrightarrow \exists \alpha > 0 : \sup_{\substack{\zeta \in K_2 \\ \zeta \neq \theta}} \frac{(\Pi A|_{K_2})'(J_{K_1}(\tau))(\zeta)}{\|\zeta\|_{X_2}} \geq \alpha \|\tau\|_{X_1},$$

a su vez,

$$\begin{aligned} (\Pi A|_{K_2})'(J_{K_1}(\tau))(\zeta) &= J_{K_1}((\Pi A|_{K_2})(\zeta)) \\ &= (\Pi A|_{K_2})(\zeta)(\tau) \\ &= a(\zeta,\tau), \end{aligned}$$

se deduce así que, i-2) es equivalente a:

$$\exists \alpha > 0 : \sup_{\substack{\zeta \in K_2 \\ \zeta \neq \theta}} \frac{a(\zeta,\tau)}{\|\zeta\|_{X_2}} \geq \alpha \|\tau\|_{X_1} \quad \forall \tau \in K_1.$$

□

b) Pruebe que para cada $(f,g) \in X_1' \times M_2'$ existe un único $(u,p) \in X_2 \times M_1$ tal que

$$A(u) + B_1^{\mathbf{t}}(p) = f \quad \text{y} \quad B_2(u) = g. \tag{4}$$

Demostración. Considerando los supuestos i) y ii), definamos el operador $\Lambda : X_2 \times X_1 \to X_1' \times M_2'$ por

$$\Lambda(u,p) := (A(u) + B_1^{\mathbf{t}}(p), B_2(u)),$$

así, (4) es equivalente a probar que existe un único $(u,p) \in X_2 \times M_1$ tal que

$$\Lambda(u,p) = (f,g), \tag{5}$$

luego por ii) se tiene que $B_2 \in \mathcal{L}(X_2, M_2')$ es sobreyectiva, así existe $\bar{u} \in X_2$ tal que $B_2(\bar{u}) = g$ y además, podemos notar que

$$\begin{aligned} \beta_2 \|\bar{u}\|_{X_2} &\leq \sup_{\substack{q \in M_2 \\ q \neq \theta}} \frac{b_2(\bar{u},q)}{\|q\|_{M_2}} \\ &= \sup_{\substack{q \in M_2 \\ q \neq \theta}} \frac{g(q)}{\|q\|_{M_2}} \\ &\leq \|g\|_{M_2'}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\|\bar{u}\|_{X_2} \leq \frac{1}{\beta_2}\|g\|_{M_2'}, \tag{6}$$

luego se sigue que $f-A(\bar{u}) \in X_1'$, ya que $A \in \mathcal{L}(X_2, X_1')$, a su vez, restringiendo $f-A(\bar{u})|_{K_1} \in K_1'$ y aplicando i), se deduce que $\exists! u_0 \in K_2$ tal que

$$(\Pi A|_{K_2})(u_0) = f - A(\bar{u})|_{K_1},$$

más aún, por el teorema de la inversa acotada, se tiene

$$\begin{aligned}
\|u_0\|_{K_2} &= \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}(f - A(\bar{u})|_{K_1})\|_{X_1'} \\
&\leq \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|f - A(\bar{u})|_{K_1}\|_{X_1'} \\
&\leq \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|f - A(\bar{u})\|_{X_1'} \\
&\leq \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\| \left\{\|f\|_{X_1'} + \|A\|\|\bar{u}\|_{X_2}\right\} \\
&\leq \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|f\|_{X_1'} + \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|A\|\frac{1}{\beta_2}\|g\|_{M_2'},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\|u_0\|_{K_2} \leq \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|f\|_{X_1'} + \frac{1}{\beta_2}\|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|A\|\|g\|_{M_2'}, \tag{7}$$

ahora, notemos que

$$A(u_0)|_{K_1} = f - A(\bar{u})|_{K_1} \Longleftrightarrow f - A(u_0 + \bar{u})|_{K_1} = 0,$$

equivalentemente podemos decir que

$$f - A(u_0 + \bar{u}) \in K_1^\circ,$$

donde

$$K_1^\circ := \{g \in K_1' : g(x) = 0 \quad \forall x \in K_1\},$$

luego, como $R(B_1^{\mathbf{t}})$ es cerrado, por resultado de análisis funciona

$$R(B_1^{\mathbf{t}}) = N(B_1)^\circ = K_1^\circ,$$

a su vez, como sabemos que $B_1^{\mathbf{t}} : M_1 \to X_1'$ es inyectivo, entonces $B_1^{\mathbf{t}} : M_1 \to K_1^\circ$ es biyectivo. Luego, definiendo $u = u_0 + \bar{u}$, se sigue entonces que $\exists! p \in M_1$ tal que $B_1^{\mathbf{t}} p = f - A(u)$, con esto, se ha probado que Λ es sobreyectivo, así por ii) se tiene que

$$\|p\|_{M_1} = \frac{1}{\beta_1}\|f - A(\bar{u} + u_0)\| \leq \frac{1}{\beta_1}\left\{\|f\|_{X_1'} + \|A\|\|\bar{u} + u_0\|_{X_2}\right\}, \tag{8}$$

finalmente se tiene que

$$\Lambda(u, p) = (f, g),$$

lo cual prueba que $(u, p) \in X_2 \times M_1$ es solución de (5). Ahora, para la unicidad, sean $(\widetilde{u}, \widetilde{p}) \in X_2 \times M_1$ tal que

$$\Lambda(A(\widetilde{u}) + B_1^{\mathbf{t}}(\widetilde{p}), B_2(\widetilde{u})) = (\theta, \theta),$$

podemos notar que, como $B_2(\widetilde{u}) = \theta$, entonces $\widetilde{u} \in K_2$, ahora, sea $\zeta \in K_1$, así

$$A(\widetilde{u})(\zeta) + B_1^{\mathbf{t}}(\widetilde{p})(\zeta) = \theta \Longleftrightarrow A(\widetilde{u})(\zeta) = \theta,$$

se sigue que, aplicando Π a lo anterior

$$\Pi A|_{K_2}(\widetilde{u})(\zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in K_1,$$

es decir,

$$\Pi A|_{K_2}(\widetilde{u}) = \theta,$$

así, como $\Pi A|_{K_2} : K_2 \to K_1'$ es biyección, se concluye que $\widetilde{u} = \theta$, luego se tiene que

$$A(\widetilde{u}) + B_1^{\mathbf{t}}(\widetilde{p}) = B_1^{\mathbf{t}} = \theta \in X_1',$$

de donde $\widetilde{p} = \theta \in M_1$ ya que $B_1^{\mathbf{t}} : M_1 \to K_1^{\circ}$ es biyección. Por lo tanto $(\widetilde{u}, \widetilde{p}) = (\theta, \theta) \in X_2 \times M_1$, con lo cual se tiene que

$$\Lambda : X_2 \times M_1 \to X_2' \times M_2',$$

es también inyectivo y por lo tanto biyectivo, en conclusión $\exists!(u,p) \in X_2 \times M_1$ tal que

$$\begin{array}{lcl} A(u) + B_1^{\mathbf{t}}(p) & = & f, \\ B_2(u) & = & g. \end{array}$$

$\square$

c) Deduzca la existencia de constantes explícitas $C_1, C_2 > 0$, que dependen sólo de A, $\Pi A|_{K_2}$, β_1 y β_2, tales que

$$\|u\|_{X_2} + \|p\|_{M_1} \leq C_1 \|f\|_{X_1'} + C_2 \|g\|_{M_2'}.$$

Demostración. Notemos que

$$\|u\|_{X_2} = \|\bar{u} + u_0\|_{X_2} \leq \|\bar{u}\|_{X_2} + \|u_0\|_{X_2},$$

luego por (6) y (7)

$$\|u\|_{X_2} \leq \frac{1}{\beta_2}\|g\|_{M_2'} + \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|f\|_{X_1'} + \frac{1}{\beta_2}\|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|A\|\|g\|_{M_2'}$$

esto es,

$$\|u\|_{X_2} \leq \frac{1}{\beta_2}\left(1 + \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|A\|\right)\|g\|_{M_2'} + \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|f\|_{X_1'}, \tag{9}$$

ahora en (8)

$$\|p\|_{M_1} \leq \frac{1}{\beta_1}\|f\|_{X_1'} + \frac{1}{\beta_2}\|A\|\left(1 + \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|A\|\right)\|g\|_{M_2'} + \|A\|\|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|f\|_{X_1'},$$

esto es

$$\|p\| \leq \left(\frac{1}{\beta_1} + \|A\|\|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\right)\|f\|_{X_1'} + \frac{1}{\beta_2}\|A\|\left(1 + \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|A\|\right)\|g\|_{M_2'}, \tag{10}$$

así, sumando (9) y (10)

$$\begin{aligned}
\|u\|_{X_2} + \|p\|_{M_1} \leq & \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|f\|_{X_1'} + \frac{1}{\beta_2}\left(1 + \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|A\|\right)\|g\|_{M_2'} \\
& + \left(\frac{1}{\beta_1} + \|A\|\|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\right)\|f\|_{X_1'} \\
& = \left(\frac{1}{\beta_1} + \|A\|\|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\| + \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\right)\|f\|_{X_1'} \\
& + \frac{1}{\beta_2}(1 + \|A\|)\left(1\|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|A\|\right)\|g\|_{M_2'} \\
& = \left(\frac{1}{\beta_1} + (\|A\| + 1)\|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\right)\|f\|_{X_1} \\
& + \frac{1}{\beta_2}(1 + \|A\|)\left(1 + \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|A\|\right)\|g\|_{M_2'}.
\end{aligned}$$

De lo anterior, finalmente se definen

$$\begin{aligned}
C_1 &:= \left(\frac{1}{\beta_1} + (\|A\| + 1)\|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\right), \\
C_2 &= \frac{1}{\beta_2}(1 + \|A\|)\left(1 + \|(\Pi A|_{K_2})^{-1}\|\|A\|\right).
\end{aligned}$$

□

d) Demuestre que i) y ii) son también condiciones necesarias para la solubilidad única de (4) ante cualquier par $(f, g) \in X_1' \times M_2'$.

Demostración. Supongamos que para cualquier par $(f, g) \in X_1' \times M_2'$ (4) tiene única solución $(u, p) \in X_2 \times M_1$, ahora dado $g \in M_2'$, por hipótesis sabemos que $\exists!(\widetilde{u}, \widetilde{p}) \in X_2 \times M_1$ tal que

$$\begin{array}{lcl}
A(\widetilde{u}) + B_1^{\mathbf{t}}(\widetilde{p}) & = & \theta, \\
B_2(\widetilde{u}) & = & g,
\end{array}$$

de donde $B_2(\widetilde{u}) = g$, lo cual prueba que B_2 es sobreyectivo. A su vez, como Λ definido en los ítems anteriores, es lineal, acotado y biyectivo (por hipótesis), notemos que dado $q \in M_1$

$$\Lambda(\theta, q) = (A(\theta) + B_1^{\mathbf{t}}(q), B_2(\theta)) \Longleftrightarrow (\theta, q) = \Lambda^{-1}(B_1^{\mathbf{t}}(q), \theta),$$

así

$$\|(\theta, q)\|_{X_2 \times M_1} \leq \|\Lambda^{-1}\|\|(B_1^{\mathbf{t}}, \theta)\|_{X_1' \times M_2'} \Longleftrightarrow \|q\|_{M_1} \leq \|\Lambda^{-1}\|\|B_1^{\mathbf{t}}(q)\|_{X_1'},$$

ahora, se probará que $\Pi A|_{K_2} : K_2 \to K_1'$ es un isomorfismo. Para ello tomemos $f_0 \in K_1'$, luego, mediante el Teorema de Hanh-Banach, se tiene que $\exists \widetilde{f} \in X_1'$ tal que

$$\widetilde{f}|_{K_1'} = f_0.$$

Luego, por hipótesis $\exists!(\widetilde{u}, \widetilde{p}) \in X_2 \times M_1$ tal que

$$\begin{array}{lcl}
A(\widetilde{u}) + B_1^{\mathbf{t}} & = & \theta \in X_1', \\
B_2(\widetilde{u}) & = & \theta \in M_2',
\end{array}$$

se sigue que $\widetilde{u} \in K_2$, y restringiendo la primera ecuación a evaluaciones $\zeta \in K_1$, queda

$$A(\widetilde{u})(\zeta) = \widetilde{f}(\zeta) = f_0(\zeta),$$

entonces, $\Pi A|_{K_2}(\widetilde{u}) = f_0$, lo cual prueba que $\Pi A|_{K_2} : K_2 \to K_1'$ es sobreyectiva. Ahora para la inyección de $\Pi A|_{K_2} : K_2 \to K_1'$, tomamos $\widetilde{u} \in K_2$ tal que $\Pi A|_{K_2}(\widetilde{u}) = \theta \in K_1'$, es decir, $A(\widetilde{u})(\zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in K_1$, lo cual dice que $A(\widetilde{u}) \in K_1^\circ$, por cuanto ya probamos ii), se tiene a partir de ello que

$$B_1^{\mathbf{t}} : M_1 \to K_1^\circ \quad \text{es biyección,}$$

así, se deduce que $\exists! \widetilde{q} \in M_1$ tal que

$$B_1^{\mathbf{t}}(\widetilde{q}) = -A(\widetilde{u}),$$

esto es,

$$A(\widetilde{u}) + B_1^{\mathbf{t}}(\widetilde{q}) = \theta \in X_1',$$

pero además $B_2(\widetilde{u}) = \theta \in M_2'$, entonces, por hipótesis, $(\widetilde{u}, \widetilde{q}) = (\theta, \theta)$, y por lo tanto $\widetilde{u} = \theta$ lo cual prueba que

$$\Pi A|_{K_2} : K_2 \to K_1' \quad \text{es inyección.}$$

$\square$