

Syllabus:	METODOS DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS
Unidad Académica Responsable:	Departamento de Ingeniería Matemática
Carrera a la que se imparte:	Ingeniería Civil Matemática
Módulo:	No aplica

IDENTIFICACION

Nombre: Métodos de Elementos Finitos Mixtos		
Código: 525539	Créditos: 4	Créditos SCT:
Prerequisitos: 522401, 521537		
Modalidad: Online	Calidad: Electiva	Duración: Semestral
Trabajo Académico		
Horas Teóricas: 4	Horas Prácticas: 2	Horas Laboratorio: 0
Horas de otras actividades: 6		

Docente Responsable	Gabriel N. Gatica
Docente Colaborador	
Comisión Evaluación	
Duración	17 semanas
Fecha: 14 de Septiembre de 2020	Aprobado por:

DESCRIPCIÓN

Asignatura de especialización en la cual se introducen y analizan los métodos de elementos finitos mixtos en un marco matemático riguroso, y se estudian sus aplicaciones a diversos problemas en mecánica de medios continuos.

Esta asignatura contribuye a las siguientes competencias del perfil de egreso del Ingeniero Civil Matemático: *Modelar numéricamente problemas en mecánica de medios continuos, y aplicar conocimientos de análisis funcional y ecuaciones diferenciales parciales en la resolución de éstos.*

RESULTADOS DE APRENDIZAJE ESPERADOS

Al completar en forma exitosa esta asignatura, los estudiantes serán capaces de conocer, comprender y aplicar los métodos de elementos finitos mixtos. En particular, ellos deberán:

- conocer el origen y la necesidad de las formulaciones variacionales mixtas, apreciar sus ventajas y desventajas, y ser capaz de aplicarlas a diversos problemas de valores de contornos lineales y no-lineales.
- adquirir una comprensión cabal de los aspectos matemáticos y numéricos involucrados en la definición, análisis y aplicación de los métodos de elementos finitos mixtos.

CONTENIDOS

1. **Introducción:** Ejemplos de motivación; Trazas e identidades de Green; Formulaciones variacionales mixtas en espacios de Hilbert de problemas clásicos en mecánica de medios continuos; Métodos duales y primales; Formulaciones aumentadas; Formulaciones en espacios de Banach de modelos no-lineales.
2. **Teoría abstracta:** Existencia y unicidad de solución de formulaciones variacionales mixtas en espacios de Hilbert y de Banach; condiciones inf-sup continuas; Aplicaciones a problemas clásicos en mecánica de medios continuos; Existencia y unicidad de solución de formulaciones variacionales mixtas discretas; condiciones inf-sup discretas; Lema de Fortin; Análisis de error a-priori; Esquemas no-conformes y Lemas de Strang.
3. **Teoría de interpolación:** Interpolación de funciones vectoriales; Aproximaciones simpliciales de $H(\text{div}; \Omega)$; Espacios de Raviart-Thomas.
4. **Métodos de elementos finitos mixtos:** Subespacios de elementos finitos mixtos; Estabilidad de los esquemas discretos; razones de convergencia; Estimaciones de error en espacios de interpolación; Condiciones de contorno de Dirichlet, Neumann y mixtas; Aplicaciones a los sistemas de Laplace, Lamé, Stokes y otros.
5. **Otros topics (al menos uno de los siguientes):** Métodos mixtos para problemas acoplados (Stokes-Darcy); Metodos mixtos para problemas no-lineales (Navier-Stokes, Boussinesq, Transporte); Análisis de error a posteriori; Métodos mixtos para problemas evolutivos; Métodos de Galerkin discontinuos; Aplicaciones en elasticidad y mecánica de fluidos.

METODOLOGÍA

Cuatro horas de clases teóricas, listado de ejercicios y tareas. Atención individual de alumnos por email o al final de las clases online (preferible por **email**).

EVALUACIÓN

Las evaluaciones se regirán de acuerdo al Reglamento de Docencia de Pregrado de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Se realizaran dos evaluaciones escritas (**40%** cada una), tareas (**20%**). Una evaluación de recuperación que modifica, a lo más, una de las evaluaciones escritas.

BIBLIOGRAFIA Y MATERIAL DE APOYO

Material básico u obligatorio:

- **Braess, D.:** Finite Elements. Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics. Springer-Verlag, 1997.
- **Brezzi, F. and Fortin, M.:** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer-Verlag, 1991.
- **Ern, A. and Guermond, J.-L.:** Theory and Practice of Finite Elements. Applied Mathematical Sciences, 159. Springer-Verlag, New York, 2004.
- **Gatica, G.N.:** A Simple Introduction to the Mixed Finite Element Method. Theory and Applications. SpringerBriefs in Mathematics, Springer, 2014.

- **Girault, V. and Raviart, P.-A.:** Finite Element Methods for Navier Stokes Equations. Springer Verlag, 1986.
- **Quarteroni, A. and Valli, A.:** Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer-Verlag, 1994.
- **Roberts, J.E. and Thomas, J.-M.:** Mixed and Hybrid Methods. Handbook of Numerical Analysis, vol. II, P.G. Ciarlet, J.L. Lions, editors. North-Holland, 1991.

Material complementario:

- **Almonacid, J.A. and Gatica, G.N.:** *A fully-mixed finite element method for the n dimensional Boussinesq problem with temperature-dependent parameters.* Computational Methods in Applied Mathematics, vol. 20, 2, pp. 187-213, (2020).
- **Almonacid, J.A., Gatica, G.N., Oyarzua, R. and Ruiz-Baier, R.:** *A new mixed finite element method for the n -dimensional Boussinesq problem with temperature-dependent viscosity.* Networks and Heterogeneous Media, vol. 15, 2, pp. 215-245, (2020).
- **Babuska, I. and Gatica, G. N.:** *On the mixed finite element method with Lagrange multipliers.* Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 19(2), pp. 192-210, (2003).
- **Babuska, I. and Gatica, G. N.:** *A residual-based a posteriori error estimator for the Stokes-Darcy coupled problem.* SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 48, 2, pp. 498-523, (2010).
- **Benavides, G.A., Caucao, S., Gatica, G.N., and Hopper, A.A.:** *A Banach spaces-based analysis of a new mixed-primal finite element method for a coupled flow-transport problem.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 371, Art. Num. 113285, (2020).
- **Caucao, S., Gatica, G.N. and Sandoval, F.:** *A fully-mixed finite element method for the coupling of the Navier-Stokes and Darcy-Forchheimer equations.* Preprint 2018-49, Centro de Investigacion en Ingenieria Matematica, Universidad de Concepcion, (2018).
- **Colmenares, E., Gatica, G.N. and Moraga, S.:** *A Banach spaces-based analysis of a new fully-mixed finite element method for the Boussinesq problem.* ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 54, 5, pp. 1525-1568, (2020).
- **Gatica, G. N.:** *Solvability and Galerkin approximations of a class of nonlinear operator equations.* Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, vol. 21, 3, pp. 761-781, (2002).
- **Gatica, G.N.:** *A Simple Introduction to the Mixed Finite Element Method. Theory and Applications.* SpringerBriefs in Mathematics, Springer, 2014.
- **Gatica, G. N., Heuer, N. and Meddahi, S.:** *On the numerical analysis of nonlinear two-fold saddle point problems.* IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 23, 2, pp. 301-330, (2003).
- **Gatica, G.N. and Inzunza, C.:** *An augmented fully-mixed finite element method for a coupled flow-transport problem.* Calcolo, vol. 57, 1, article:8, (2020).
- **Gatica, G.N., Marquez, A. and Meddahi, S.:** *Analysis of the coupling of primal and dual-mixed finite element methods for a two-dimensional fluid-solid interaction problem.* SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 45, 5, pp. 2072-2097, (2007).
- **Gatica, G.N., Marquez, A. and Sanchez, M.A.:** *Analysis of a velocity-pressure-pseudostress formulation for the stationary Stokes equations.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 199, 17-20, pp. 1064-1079, (2010).
- **Gatica, G.N., Marquez, A. and Sanchez, M.A.:** *A priori and a posteriori error analysis of a velocity-pseudostress formulation for a class of quasi-Newtonian Stokes flows.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 200, 17-20, pp. 1619-1636, (2011).
- **Gatica, G.N., Meddahi, S. and Oyarzua, R.:** *A conforming mixed finite-element method for the coupling of fluid flow with porous media flow.* IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 29, 1, pp. 86-108, (2009).

- **Gatica, G.N., Oyarzua, R. and Sayas, F.-J.:** *Convergence of a family of Galerkin discretizations for the Stokes-Darcy coupled problem*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 27, 3, pp. 721-748, (2011).
- **Gatica, G.N., Oyarzua, R. and Sayas, F.-J.:** *Analysis of fully-mixed finite element methods for the Stokes-Darcy coupled problem*. Mathematics of Computation, vol. 80, 276, pp. 1911-1948, (2011).
- **Gatica, G.N., Oyarzua, R. and Sayas, F.-J.:** *A twofold saddle point approach for the coupling of fluid flow with nonlinear porous media flow*. IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 32, 3, pp. 845-887, (2012).
- **Gatica, G.N. and Sayas, F.-J.:** *Characterizing the inf-sup condition on product spaces*. Numerische Mathematik, vol. 109, 2, pp. 209-231, (2008).

Fecha aprobación:	2020
Fecha próxima actualización:	2021

VIII. PLANIFICACIÓN

Semana	Actividad	Responsable	Trabajo académico
1	Ejemplos de motivación: un modelo unidimensional; un modelo n-dimensional. Métodos duales y primales. Conexión con el tipo de condiciones de contorno.	Docente	2 horas
2	Trazas e identidades de Green.	Docente	4 horas
3	Formulaciones variacionales mixtas de problemas en mecánica de medios continuos. Métodos duales y primales. Formulaciones aumentadas.	Docente	4 horas
4	Formulaciones variacionales mixtas de problemas en mecánica de medios continuos. Métodos duales y primales. Formulaciones aumentadas.	Docente	2 horas
4	Existencia y unicidad de solución de formulaciones variacionales mixtas continuas: Teoría de Babuska-Brezzi; condición inf-sup continua; casos particulares de la teoría.	Docente	2 horas
5	Aplicaciones de la Teoría de Babuska-Brezzi: Laplace, Lamé, otros.	Docente	4 horas
6	Existencia y unicidad de solución de formulaciones variacionales mixtas discretas: Teoría de Babuska-Brezzi; condición inf-sup discreta; Lema de Fortin.	Docente	2 horas
6	Análisis de error a priori abstracto: proyector de Galerkin; estimación de Cea; estimaciones separadas para cada incógnita.	Docente	2 horas
7	Esquemas de Galerkin no-conformes y Lemas de Strang.	Docente/Alumno	2 horas.
7	Evaluación I	Alumno	3 horas

8	Interpolación de funciones vectoriales: resultados preliminares.	Docente	2 horas
8	Espacios de Raviart-Thomas: unisolvencia; funciones base; operadores de interpolación local y global.	Docente	2 horas
9	Espacios de Raviart-Thomas: errores de interpolación local y global; transformación de Piola.	Docente	4 horas
10	Operadores de proyección. Desigualdades inversas.	Docente	2 horas
10	Métodos de elementos finitos mixtos: aplicación a un problema de segundo orden en forma de divergencia.	Docente	2 horas
11	Métodos de elementos finitos mixtos: aplicación a un problema de segundo orden en forma de divergencia con condiciones de contorno mixtas. Levantamiento discreto estable.	Docente	2 horas
11	Estimaciones de error en espacios de interpolación.	Docente	2 horas
12	Métodos de elementos finitos mixtos: aplicación al sistema de Lamé.	Docente	4 horas
13	Métodos de elementos finitos mixtos: aplicación a una formulación en velocidad, presión y pseudoefuerzo del sistema de Stokes.	Docente	2 horas
13	Análisis de error a posteriori de la formulación en velocidad, presión y pseudoefuerzo del sistema de Stokes.	Docente	2 horas
14	Análisis de error a posteriori de la formulación en velocidad, presión y pseudoefuerzo del sistema de Stokes.	Docente	2 horas
15	Métodos de elementos finitos mixtos para un problema de transmisión: Stokes-Darcy o Helmholtz-Lamé.	Docente	4 horas
16	Evaluación II	Alumno	3 horas

OTROS

Docente: Gabriel N. Gatica
 Oficina: Centro CI²MA, ex-Cabina 6
 Fono: 2661316
 Horario de Clases: Martes y Jueves de 10.15 a 12.00 hrs.
 Horario de Práctica: a convenir
 E-mail del profesor: ggatica@ci2ma.udec.cl

ATENCIÓN DE ALUMNOS: Atención individual de alumnos por email o al final de las clases online (preferible por **email**).

GNG/gng