Problema 3

Coloque su nombre aqui XD

10 de enero de 2022

Problema 3

Este problema tiene como objetivo mostrar una deducción de los subespacios de elementos finitos que garantizan la verificación de la inf-sup discreta para la forma bilineal b de la formulación mixta del problema de elasticidad.

Problema 3

1. Introducción
2. Las preguntas
   - Pregunta a)
   - Pregunta b)
   - Pregunta c)

Formulación mixta del problema de elasticidad

Recordemos que la formulación mixta del problema de elasticidad lineal en $\mathbb{R}^2$ es: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})) \in H \times Q$ tal que

$$
\begin{array}{rcll}
a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})) & = & F(\boldsymbol{\tau}) & \forall \boldsymbol{\tau} \in H \\
b(\boldsymbol{\sigma}, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\eta})) & = & G(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\eta}) & \forall (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\eta}) \in Q
\end{array}
$$

donde $H = \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega)$ y $Q := Q_1 \times Q_2$, con $Q_1 := \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ y $Q_2 := \mathbb{L}^2_{\text{asim}}(\Omega)$. Los funcionales $F \in H'$ y $G \in Q'$ estan dados por:

$$
F(\boldsymbol{\tau}) := 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H, \qquad G(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\eta}) := -\int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \quad \forall (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\eta}) \in Q
$$

con $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$.

Formulación mixta del problema de elasticidad

Las formas bilineales $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ estas definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \int_\Omega \mathscr{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \qquad \forall (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) \in H \times H$$

y

$$b(\boldsymbol{\tau}, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\eta})) := \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\eta} \qquad \forall (\boldsymbol{\tau}, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\eta})) \in H \times Q$$

donde $\mathscr{C}$ denota al operador de Hooke.

Formulación mixta del problema de elasticidad

Notamos que b puede descomponerse como

$$b(\boldsymbol{\tau}, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\eta})) = b_1(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}) + b_2(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta})$$

donde $b_1 : H \times Q_1 \to \mathbb{R}$ y $b_2 : H \times Q_2 \to \mathbb{R}$ están dadas por:

$$b_1(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}) := \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div}\boldsymbol{\tau} \qquad \forall (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}) \in H \times Q_1$$

y

$$b_2(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) := \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\eta} \qquad \forall (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) \in H \times Q_2$$

Pregunta a): Enunciado

Sean H_h, $Q_{1,h}$ y $Q_{2,h}$ subespacios de elementos finitos de H, Q_1 y Q_2, respectivamente, y suponga que existen operadores $\Pi_{i,h} : H \to H_h$, $i \in \{1,2\}$, uniformemente acotados (con respecto a h), tales que para todo $\boldsymbol{\tau} \in H$:

i) $b_1(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{v}_h) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in Q_{1,h}$

ii) $b_1(\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{v}_h) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in Q_{1,h}$

iii) $b_2(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}) - \Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{\eta}_h) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in Q_{2,h}$

Demuestre que existe $\beta > 0$, independiente de h, tal que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h \\ \boldsymbol{\tau}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}_h, (\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h))}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_H} \geq \beta \|(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h)\|_Q \tag{1}$$

para todo $(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h) \in Q_h := Q_{1,h} \times Q_{2,h}$.

Pregunta a): Respuesta

- Para demostrar lo pedido haremos uso del lema de Fortin, pero para poder usarlo debemos mostrar lo siguiente:

$$b(\boldsymbol{\tau} - \Pi_h(\boldsymbol{\tau}), (\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h)) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in H, \;\; \forall (\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h) \in Q_h \quad (2)$$

donde $\Pi_h(\boldsymbol{\tau}) := \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}) + \Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}) \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in H.$

Pregunta a): Respuesta

- Para demostrar lo pedido haremos uso del lema de Fortin, pero para poder usarlo debemos mostrar lo siguiente:

$$b(\boldsymbol{\tau}-\Pi_h(\boldsymbol{\tau}),(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{\eta}_h))=0 \qquad \forall \boldsymbol{\tau}\in H,\ \ \forall(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{\eta}_h)\in Q_h \quad (2)$$

donde $\Pi_h(\boldsymbol{\tau}) := \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})+\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}) \qquad \forall \boldsymbol{\tau}\in H.$

- Observamos que (2) es equivalente a:

$$b_1(\boldsymbol{\tau}-\Pi_h(\boldsymbol{\tau}),\boldsymbol{v}_h)+b_2(\boldsymbol{\tau}-\Pi_h(\boldsymbol{\tau}),\boldsymbol{\eta}_h)=0$$

para todo $\boldsymbol{\tau}\in H$, $\boldsymbol{v}_h\in Q_{1,h}$ y $\boldsymbol{\eta}_h\in Q_{2,h}$.

Pregunta a): Respuesta

Sean $\boldsymbol{\tau} \in H$, $\boldsymbol{v}_h \in Q_{1,h}$, $\boldsymbol{\eta}_h \in Q_{2,h}$, al sumar *i*) a *iii*) y restar *ii*), obtenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= b_1(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{v}_h) - b_1(\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{v}_h) \\
&\quad + b_2(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}) - \Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{\eta}_h) \\
&= b_1(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{v}_h) + b_1(-\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{v}_h) + b_2(\boldsymbol{\tau} - \Pi_h(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{\eta}_h) \\
&= b_1(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}) - \Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{v}_h) + b_2(\boldsymbol{\tau} - \Pi_h(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{\eta}_h) \\
&= b_1(\boldsymbol{\tau} - \Pi_h(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{v}_h) + b_2(\boldsymbol{\tau} - \Pi_h(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{\eta}_h)
\end{aligned}$$

lo cual demuestra (2).

Pregunta a): Respuesta

- Ahora probaremos que $\{\Pi_h\}_{h>0}$ son uniformemente acotado. Sea $\boldsymbol{\tau} \in H$, se sigue del acotamiento uniforme de los $\Pi_{1,h}$ y $\Pi_{2,h}$, y de la desigualdad triangular que

$$\begin{aligned} \|\Pi_h(\boldsymbol{\tau})\|_{\mathrm{div};\Omega} &\leq \|\Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})\|_{\mathrm{div};\Omega} + \|\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau})\|_{\mathrm{div};\Omega} \\ &\leq \left\{\|\Pi_{1,h}\| + \|\Pi_{2,h}\|\right\}\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathrm{div};\Omega} \\ &\leq \left\{M_1 + M_2\right\}\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathrm{div};\Omega} \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in H \end{aligned}$$

  con $M_1, M_2 > 0$ las constantes que acotan uniformemente a $\Pi_{1,h}$ y $\Pi_{2,h}$, respectivamente. Con esto hemos demostrado que $\{\Pi_h\}_{h>0}$ son uniformemente acotado

Pregunta a): Respuesta

- Ahora probaremos que $\{\Pi_h\}_{h>0}$ son uniformemente acotado. Sea $\boldsymbol{\tau} \in H$, se sigue del acotamiento uniforme de los $\Pi_{1,h}$ y $\Pi_{2,h}$, y de la desigualdad triangular que

$$\begin{aligned}
\|\Pi_h(\boldsymbol{\tau})\|_{\text{div};\Omega} &\leq \|\Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})\|_{\text{div};\Omega} + \|\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau})\|_{\text{div};\Omega} \\
&\leq \left\{\|\Pi_{1,h}\| + \|\Pi_{2,h}\|\right\}\|\boldsymbol{\tau}\|_{\text{div};\Omega} \\
&\leq \left\{M_1 + M_2\right\}\|\boldsymbol{\tau}\|_{\text{div};\Omega} \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in H
\end{aligned}$$

  con $M_1, M_2 > 0$ las constantes que acotan uniformemente a $\Pi_{1,h}$ y $\Pi_{2,h}$, respectivamente. Con esto hemos demostrado que $\{\Pi_h\}_{h>0}$ son uniformemente acotado
- Luego el lema de Fortin nos asegura que existe una constante $\beta > 0$ independiente de h tal que se satisface la condición inf-sup (1)

Pregunta b): Enunciado

Sean H_h y $Q_{1,h}$ subespacios dados, y $\Pi_{1,h} : H \to H_h$ un operador especifico, uniformemente acotado, tales que la parte i) de a) se verifica. A su vez, sean X_h y M_h subespacios de elementos finitos de $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ y $L^2_0(\Omega)$, respectivamente, y suponga que para cada par $(F_h, G_h) \in X'_h \times M'_h$, el siguiente esquema verifica, uniformemente con respecto a h, las hipótesis del teorema de Babuska-Brezzi discreta: Hallar $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_h : \nabla \boldsymbol{w}_h + \int_\Omega p_h \mathrm{div} \boldsymbol{w}_h &= F_h(\boldsymbol{w}_h) \quad \forall \boldsymbol{w}_h \in X_h \\ \int_\Omega q_h \mathrm{div} \boldsymbol{u}_h &= G_h(q_h) \quad \forall q_h \in M_h \end{aligned} \tag{3}$$

Pregunta b): Enunciado

En particular, dado $\boldsymbol{\tau} \in H$, considere $F_h \equiv 0$ y

$$G_h(q_h) := \int_\Omega (\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})) : S(q_h)$$

con $S(q_h) := \begin{pmatrix} 0 & q_h \\ -q_h & 0 \end{pmatrix} \in Q_2$.

Bajo el supuesto que H_h contiene a $\text{curl}(X_h)$, defina $\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}) := \text{curl}\ \boldsymbol{u}_h$. Demuestre entonces que $\Pi_{2,h} : H \to H_h$ es uniformemente acotado y satisface *ii*) de la parte *a*). Además, suponga que $Q_{2,h}$ esta contenido en $S(M_h)$, y demuestre, integrando por partes en la segunda ecuación de (3), que la parte *iii*) de *a*) también se verifica.

Pregunta b): Respuesta

Consideremos a $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ como las soluciones de (3). Es claro que

$$\textbf{div}\ \text{curl}\ \boldsymbol{u}_h = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \textbf{div}\ \Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0}$$

Implicando que

$$0 = \int_\Omega \boldsymbol{v}_h \cdot \textbf{div}\ \Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}) = b_1(\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{v}_h) \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in Q_{1,h}$$

Lo cual demuestra que $\Pi_{2,h}$ cumple *ii*) de la pregunta *a*).

Pregunta b): Respuesta

- Ahora mostraremos que $\Pi_{2,h}$ cumple *iii*) de la pregunta *a*). Sea $q_h \in M_h$, empecemos por notar que

$$
\begin{aligned}
q_h \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h &= q_h \left(\frac{\partial u_{1,h}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2,h}}{\partial x_2} \right) \\
&= \frac{\partial u_{1,h}}{\partial x_1} q_h + \left(-\frac{\partial u_{2,h}}{\partial x_2} \right) (-q_h) \\
&= \begin{pmatrix} Z_1 & \frac{\partial u_{1,h}}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial u_{2,h}}{\partial x_2} & Z_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & q_h \\ -q_h & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

con $\boldsymbol{u}_h := (u_{1,h}, u_{2,h})^t$.

Pregunta b): Respuesta

- Ahora mostraremos que $\Pi_{2,h}$ cumple *iii*) de la pregunta *a*). Sea $q_h \in M_h$, empecemos por notar que

$$\begin{aligned} q_h \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_h &= q_h \left(\frac{\partial u_{1,h}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2,h}}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{\partial u_{1,h}}{\partial x_1} q_h + \left(-\frac{\partial u_{2,h}}{\partial x_2} \right) (-q_h) \\ &= \begin{pmatrix} Z_1 & \frac{\partial u_{1,h}}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial u_{2,h}}{\partial x_2} & Z_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & q_h \\ -q_h & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con $\boldsymbol{u}_h := (u_{1,h}, u_{2,h})^t$.

- Eligiendo a $Z_1 = -\frac{\partial u_{1,h}}{\partial x_2}$ y $Z_2 = \frac{\partial u_{2,h}}{\partial x_1}$, obtenemos que $q_h \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_h = \mathrm{curl}\, \boldsymbol{u}_h : S(q_h)$.

Pregunta b): Respuesta

- Con esta información la segunda ecuación de (3) nos queda así:

$$\int_\Omega \mathrm{curl}\boldsymbol{u}_h : S(q_h) = \int_\Omega q_h \mathrm{div}\boldsymbol{u}_h = \int_\Omega (\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})) : S(q_h)$$

Pregunta b): Respuesta

- Con esta información la segunda ecuación de (3) nos queda así:

$$\int_\Omega \mathrm{curl}\boldsymbol{u}_h : S(q_h) = \int_\Omega q_h \mathrm{div}\boldsymbol{u}_h = \int_\Omega (\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})) : S(q_h)$$

- o bien,

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}) - \mathrm{curl}\boldsymbol{u}_h) : S(q_h) = 0 \qquad \forall q_h \in M_h$$

Es decir,

$$b_2\big(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}) - \Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), S(q_h)\big) = 0 \qquad \forall q_h \in M_h$$

Pregunta b): Respuesta

- Con esta información la segunda ecuación de (3) nos queda así:

$$\int_\Omega \mathrm{curl}\boldsymbol{u}_h : S(q_h) = \int_\Omega q_h \mathrm{div}\boldsymbol{u}_h = \int_\Omega (\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})) : S(q_h)$$

- o bien,

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}) - \mathrm{curl}\boldsymbol{u}_h) : S(q_h) = 0 \qquad \forall q_h \in M_h$$

Es decir,

$$b_2\big(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}) - \Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), S(q_h)\big) = 0 \qquad \forall q_h \in M_h$$

- Como $Q_{2,h} \subseteq S(M_h)$, podemos inferir de la igualdad anterior que $\Pi_{2,h}$ cumple *iii*) de la pregunta *a*).

Pregunta b): Respuesta

Finalizaremos mostrando que $\{\Pi_{2,h}\}_{h>0}$ es uniformemente acotada. Notamos que

$$\|\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau})\|_{\mathrm{div};\Omega} = \|\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega} = \|\mathrm{curl}\ \boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega} \leq \|\boldsymbol{u}_h\|_{1,\Omega}$$

Gracias a la estabilidad de (3) tenemos la desigualdad:

$$\|\boldsymbol{u}_h\|_{1,\Omega} + \|p_h\|_{0,\Omega} \leq C\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega}$$

con la constante $C > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau})\|_{\mathrm{div};\Omega} \leq \|\boldsymbol{u}_h\|_{1,\Omega} &\leq C\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega} \\ &\leq C\Big\{\|\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega} + \|\Pi_{1,h}\|\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathrm{div};\Omega}\Big\} \\ &\leq C\{1 + M_1\}\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathrm{div};\Omega}\end{aligned}$$

Dado que $C\{1 + M_1\}$ es independiente a h, hemos probado que $\{\Pi_{2,h}\}_{h>0}$ son uniformemente acotado respecto a h.

Pregunta c): Enunciado

Comenzando con H_h y $Q_{1,h}$ dados por el espacio global de Raviart-Thomas de orden k y el espacio de funciones polinomiales discontinuas de grado $\leq k$ en cada elemento, respectivamente, aplique lo deducido en b) al caso de X_h y M_h dados por el mini-elemento estable para Stokes, y deduzca los subespacios H_h, $Q_{1,h}$ y $Q_{2,h}$ resultantes que prueban la inf-sup discreta para b.

Pregunta c): Respuesta

- Recordemos que en el enunciado de la pregunta *b*) tuvimos que asumir las siguiente hipótesis sobre los espacios H_h y $Q_{2,h}$:
  1. H_h contiene a $\text{curl}(X_h)$
  2. $Q_{2,h}$ esta contenido en $S(M_h)$

Pregunta c): Respuesta

- Recordemos que en el enunciado de la pregunta *b*) tuvimos que asumir las siguiente hipótesis sobre los espacios H_h y $Q_{2,h}$:
  1. H_h contiene a $\mathrm{curl}(X_h)$
  2. $Q_{2,h}$ esta contenido en $S(M_h)$
- Para que se cumple 1., podemos re-definir a H_h de esta manera:

$$H_h := \left\{ \boldsymbol{\tau}_h \in H : \ \boldsymbol{\tau}_{h,i}\Big|_K \in RT_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} + \mathrm{curl}(X_h)$$

Pregunta c): Respuesta

- Recordemos que en el enunciado de la pregunta *b*) tuvimos que asumir las siguiente hipótesis sobre los espacios H_h y $Q_{2,h}$:
  1. H_h contiene a $\mathrm{curl}(X_h)$
  2. $Q_{2,h}$ esta contenido en $S(M_h)$
- Para que se cumple 1., podemos re-definir a H_h de esta manera:

$$H_h := \left\{ \boldsymbol{\tau}_h \in H : \ \boldsymbol{\tau}_{h,i}\Big|_K \in RT_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} + \mathrm{curl}(X_h)$$

- Para satisfacer 2., podemos definir a $Q_{2,h} := S(M_h)$.

Pregunta c): Respuesta

En particular, los espacios X_h y M_h dados por el mini-elementos estables para el problema de Stokes[1] son:

$$X_h := \left\{ \boldsymbol{w}_h \in [C(\Omega)]^2 : \ \boldsymbol{w}_h\Big|_K \in \left[\mathbb{P}_1(K) \oplus \langle b_k \rangle\right]^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$
$$M_h := \left\{ q_h \in C(\Omega) : \ q_h\Big|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$

donde b_K es la funciones burbuja en el triangulo K.

[1] Ver archivo adjunto al problema 3.

Pregunta c): Respuesta

Luego los espacios H_h, $Q_{1,h}$ y $Q_{2,h}$ (con $k = 0$) estarían dados por:

$$H_h = \left\{ \boldsymbol{\tau}_h \in H : \; \boldsymbol{\tau}_{h,i}\Big|_K \in RT_0(K) + \langle \text{curl } b_k \rangle \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$

$$Q_{1,h} = \left\{ \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) : \; \boldsymbol{v}_h\Big|_K \in [\mathbb{P}_0(K)]^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$

$$Q_{2,h} = \left\{ \boldsymbol{\eta}_h := \begin{pmatrix} 0 & q_h \\ -q_h & 0 \end{pmatrix} : q_h \in C(\Omega) \text{ y } q_h\Big|_K \in \mathbb{P}_1(K) \;\; \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$