Universidad de Concepción
Departamento de Ingeniería Matemática

Apuntes de clases

Tópicos de Elementos Finitos (4220018)

Nicolás A. Núñez Lira[1], *Juan C. Rojas Espinoza*

Curso dictado por
Dr. Gabriel N. Gatica

Semestre 2, 2020

[1]Email: nicolasnunez@udec.cl

Índice

1. Teoría de Babuška-Brezzi en espacios de Banach

Sean $(H, \|\cdot\|_H)$ y $(Q, \|\cdot\|_Q)$ espacios de Banach, y sean $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas. Entonces dados $f \in H'$ y $G \in Q'$ nos interesa el problema:

$$\begin{array}{lcll} \multicolumn{4}{l}{\textit{Hallar } (\sigma, u) \in H \times Q \textit{ tal que}} \\ a(\sigma,\tau) + b(\tau, u) & = & F(\tau) & ,\forall \tau \in H \\ b(\sigma, v) & = & G(v) & ,\forall v \in Q \end{array} \tag{P}$$

A su vez, sean $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H, H')$ y $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(H, Q')$ los operadores lineales acotados inducidos por a y b, respectivamente, esto es,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} : H & \to & H' \\ \zeta & \mapsto & \mathcal{A}(\zeta) \textit{ tal que } \mathcal{A}(\zeta)(\tau) := a(\zeta, \tau), \forall \zeta, \tau \in H \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B} : H & \to & Q' \\ \tau & \mapsto & \mathcal{B}(\tau) \textit{ tal que } \mathcal{B}(\tau)(v) := b(\tau, v), \forall \tau \in H, \forall v \in Q \end{array}$$

Se sigue entonces que $\mathcal{B}' \in \mathcal{L}(Q'', H')$ y está definido como

$$\mathcal{B}'(\mathcal{G})(\tau) := \mathcal{G}(\mathcal{B}(\tau)) \qquad \forall \mathcal{G} \in Q'', \forall \tau \in H$$

Ahora, sea

$$\begin{array}{rcl} J_Q : Q & \to & Q'' \\ v & \mapsto & J_Q(v) \textit{ tal que } J_Q(v)(G) := G(v) \forall G \in Q', \forall v \in Q \end{array}$$

En particular, tomando $\mathcal{G} = J_Q(v), \forall v \in Q$, se obtiene,

$$\mathcal{B}'(J_Q(v))(\tau) = J_Q(v)(\mathcal{B}(\tau)) = \mathcal{B}(\tau)(v) = b(\tau, v) \qquad (\tau, v) \in H \times Q$$

Con estos conceptos, el problema (P) se reescribe como

$$\begin{array}{lcll} \multicolumn{4}{l}{\textit{Hallar } (\sigma, u) \in H \times Q \textit{ tal que}} \\ \mathcal{A}(\sigma)(\tau) + \mathcal{B}'(J_q(v))(\tau) & = & F(\tau) & ,\forall \tau \in H \\ \mathcal{B}(\sigma)(v) & = & G(v) & ,\forall v \in Q \end{array} \tag{P}$$

o bien, en forma sólo de operadores

$$\begin{array}{lcl} \multicolumn{3}{l}{\textit{Hallar } (\sigma, u) \in H \times Q \textit{ tal que}} \\ \mathcal{A}(\sigma) + \mathcal{B}'(J_q(v)) & = & F \\ \mathcal{B}(\sigma) & = & G \end{array} \tag{P}$$

Ahora suponemos que Q es reflexivo, ie, que $J_Q : Q \to Q''$ es biyección, y definimos la incógnita $\mathcal{G} := J_Q(u) \in Q''$ de modo que (P) se reescribe como

$$
\begin{array}{lcl}
\multicolumn{3}{l}{\textit{Hallar } (\sigma, \mathcal{G}) \in H \times Q'' \textit{ tal que}} \\
\mathcal{A}(\sigma) + \mathcal{B}'(\mathcal{G}) & = & F \\
\mathcal{B}(\sigma) & = & G
\end{array}
\tag{P}
$$

En tal caso, u se recupera como $u = J_Q^{-1}(\mathcal{G})$.

1.1. Un resultado previo

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach, y sean $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(X, X')$ y $\mathbb{B} \in \mathcal{L}(X, Y)$, de modo que, $\mathbb{B}' \in \mathcal{L}(Y', X')$. Entonces, dados $F \in X'$ e $y \in Y$, nos interesa:

$$
\begin{array}{lcl}
\multicolumn{3}{l}{\textit{Hallar } (\sigma, U) \in X \times Y' \textit{ tal que}} \\
\mathbb{A}(\sigma) + \mathbb{B}'(U) & = & F \\
\mathbb{B}(\sigma) & = & y
\end{array}
\tag{Q}
$$

Observación 1.1

Notar que (P) es un caso particular de (Q) con $X = H$ e $Y = Q'$.

1.1.1. Resultados preliminares para analizar (Q)

Lema 1.1

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach, y sea $B \in \mathcal{L}(X, Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

I) $R(B)$ es cerrado.

II) $\exists \beta > 0$ tal que para cada $y \in R(B)$, $\exists x \in X$ tal que:

$$y = B(x) \qquad \wedge \qquad \beta \|x\|_X \leq \|y\|_Y$$

Lema 1.2

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach, y sea $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ sobreyectivo. Entonces:

I) $\exists \beta > 0$ tal que para cada $y \in R(B)$, $\exists x \in X$ tal que:

$$y = B(x) \qquad \wedge \qquad \beta \|x\|_X \leq \|y\|_Y$$

II) $\|B'(G)\| \geq \beta \|G\|, \forall G \in Y'$

Observación 1.2

Notemos que I) implica II). Y si X es reflexivo, entonces II) implica I) con la misma constante β.

1.1.2. Análisis de solubilidad del problema (Q)

Definimos $Z = N(\mathbb{B})$, ie,

$$Z = \{\tau \in X : \mathbb{B}(\tau) = \theta \in Y\}$$

y definimos el operador

$$\begin{array}{rcl} \Pi\mathbb{A} : Z & \to & Z' \\ \tau & \mapsto & (\Pi\mathbb{A})(\tau) \ ,donde \ (\Pi\mathbb{A})(\tau)(\zeta) := \mathcal{A}(\tau)(\zeta) \forall \tau, \zeta \in Z \end{array}$$

Teorema 1.1: Teorema Principal para (Q)

Para cada par $(F, y) \in X' \times Y$ el problema (Q) tiene una única solución que depende continuamente de los datos si y sólo si:

I) $\Pi\mathbb{A} : Z \to Z'$ es biyección.

II) $\mathbb{B} : X \to Y$ es sobreyección.

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos I) y II) válidos, y sea $(F, y) \in X' \times Y$. Como $\mathbb{B}$ es sobreyectivo, $R(\mathbb{B}$ es obviamente cerrado y por lo tanto aplicando el Lema 1.1 se deduce que $\exists \beta > 0$ y $\sigma_y \in X$ tal que

$$y = \mathbb{B}(\sigma_y) \qquad \wedge \qquad \|\sigma_y\| \leq \frac{1}{\beta} \|y\|$$

Se sigue que

$$(F - \mathbb{A}(\,\sigma_y))|_Z \in Z'$$

y aplicando I), se deduce que $\exists! \sigma_0 \in Z$ tal que

$$(\Pi\mathbb{A})(\sigma_0) = (F - \mathbb{A}(\sigma_y))\,|_Z$$

y además

$$\begin{array}{rl} \|\sigma_0\| = & \|(\Pi\mathbb{A})^{-1}\,(F - \mathbb{A}(\sigma_y))\,|_Z\| \\ \leq & \|(\Pi\mathbb{A})^{-1}\|\,\|(F - \mathbb{A}(\sigma_y))\,|_Z\|_{Z'} \\ \leq & \|(\Pi\mathbb{A})^{-1}\|\,(\|F\| + \|\mathbb{A}\|\,\|\sigma_y\|) \end{array}$$

A su vez, se tiene que

$$(\Pi\mathbb{A})(\sigma_0)(\zeta) = (F - \mathbb{A}(\sigma_y))\,(\zeta) \qquad , \forall \zeta \in Z$$

es decir,

$$\mathbb{A}(\sigma_0)(\zeta) = (F - \mathbb{A}(\sigma_y))\,(\zeta) \qquad , \forall \zeta \in Z$$

o bien,

$$(F - \mathbb{A}(\sigma_y + \sigma_0))\,(\zeta) = 0 \qquad , \forall \zeta \in Z$$

lo cual dice que $F - \mathbb{A}(\sigma_y + \sigma_0) \in Z^\circ$. A su vez, como $R(\mathbb{B})$ es obviamente cerrado, se tiene que $R(\mathbb{B}')$ tambien es cerrado, y

$$R(\mathbb{B}') = N(\mathbb{B})^\circ = Z^\circ$$

y por lo tanto $\exists U \in Y'$ tal que $F - \mathbb{A}(\sigma_y + \sigma_0) = \mathbb{B}'(U)$, y más aún, del Lema 1.2 tenemos que

$$\begin{aligned} \|U\| &\leq \frac{1}{\beta}\|\mathbb{B}'(U)\| \\ &= \frac{1}{\beta}\|F - \mathbb{A}(\sigma_y + \sigma_0)\| \\ &\leq \frac{1}{\beta}(\|F\| + \|A\|(\|\sigma_0\| + \|\sigma_y\|)) \end{aligned}$$

Finalmente, definiendo $\sigma := \sigma_0 + \sigma_y \in X$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\sigma) + \mathbb{B}'(U) &= F \\ \mathbb{B}(\sigma) &= y \end{aligned}$$

con $\|\sigma\|$ y $\|U\|$ acotadas por constantes que dependen de $\|(\Pi\mathbb{A})^{-1}\|, \|\mathbb{A}\|$ y β, multiplicadas por $\|F\| + \|y\|$.
Para la unicidad de (Q), sea $(\tilde{\sigma}, \tilde{U}) \in X \times Y'$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\tilde{\sigma}) + \mathbb{B}'(\tilde{U}) &= \theta \in X' \\ \mathbb{B}(\tilde{\sigma}) &= \theta \in Y \end{aligned}$$

Se sigue de la segunda ecuación que $\tilde{\sigma} \in Z = N(\mathbb{B})$. A su vez, evaluando la primera ecuación en $\tau \in Z$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} 0 = &\ \mathbb{A}(\tilde{\sigma})(\tau) + \mathbb{B}'(\tilde{U})(\tau) \\ = &\ \mathbb{A}(\tilde{\sigma})(\tau) + \tilde{U}(\cancelto{=0}{\mathbb{B}(\tau)}) \\ = &\ \mathbb{A}(\tilde{\sigma})(\tau) \end{aligned}$$

o bien

$$(\Pi\mathbb{A})(\tilde{\sigma})(\tau) = 0 \qquad , \forall \tau \in Z$$

esto es,

$$(\Pi\mathbb{A})(\tilde{\sigma}) = \theta \in Z'$$

de donde, por I), $\tilde{\sigma} = \theta \in Z$.
Así, la primera ecuación nos queda

$$\mathbb{B}'(\tilde{U}) = \theta$$

y por la inyección de $\mathbb{B}'$ se sigue que $\tilde{U} = \theta \in Y'$.
($\Rightarrow$) Supongamos que para cada $(F, y) \in X' \times Y, \exists!(\sigma, U) \in X \times Y'$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\tilde{\sigma}) + \mathbb{B}'(\tilde{U}) &= F \\ \mathbb{B}(\tilde{\sigma}) &= y \end{aligned}$$

con (σ, U) dependiendo continuamente de $\|F\|$ y $\|y\|$. Queremos probar que

I) $\Pi\mathbb{A} : Z \to Z'$ es biyección.

II) $\mathbb{B} : X \to Y$ es sobreyección.

En efecto, dado $y \in Y$, sabemos por hipótesis que $\exists!(\tilde{\sigma}, \tilde{U}) \in X \times Y'$ tal que,

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{A}(\tilde{\sigma}) + \mathbb{B}'(\tilde{U}) & = & \theta \in X' \\ \mathbb{B}(\tilde{\sigma}) & = & y \end{array}$$

y así de la segunda ecuación se deduce la sobreyección de $\mathbb{B}$.
Veamos ahora que $(\Pi\mathbb{A}) : Z \to Z'$ es sobreyección. En efecto, dado $\tilde{\mathbb{F}}_0 \in Z'$, por Teorema de Hahn-Banach, $\exists \tilde{F} \in X'$ tal que $\tilde{F}|_Z = \tilde{F}_0$ y $\left\|\tilde{F}\right\|_{X'} = \left\|\tilde{F}_0\right\|_{Z'}$. Así, por hipótesis, $\exists!(\tilde{\sigma}, \tilde{U}) \in X \times Y'$ tal que

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{A}(\tilde{\sigma}) + \mathbb{B}'(\tilde{U}) & = & \tilde{F} \\ \mathbb{B}(\tilde{\sigma}) & = & \theta \in Y \end{array}$$

Se tiene que, $\tilde{\sigma} \in Z$ y evaluando la primera ecuación en $\tau \in Z$, se tiene

$$\tilde{F}(\tau) = (\Pi\mathbb{A})(\tilde{\sigma})(\tau)$$

o bien

$$\tilde{F}_0(\tau) = (\Pi\mathbb{A})(\tilde{\sigma})(\tau) \qquad \forall \tau \in Z$$

esto es,

$$\tilde{F}_0 = (\Pi\mathbb{A})(\tilde{\sigma})$$

y por lo tanto $(\Pi\mathbb{A})$ es sobreyección.
Finalmente, sea $\bar{\sigma} \in Z$ tal que $(\Pi\mathbb{A})(\bar{\sigma}) = \theta \in Z$, esto es,

$$\mathbb{A}(\bar{\sigma})(\tau) = 0 \qquad , \forall \tau \in Z$$

lo cual dice que $\mathbb{A}(\bar{\sigma}) \in Z^\circ = R(\mathbb{B}')$, pues ya sabemos que $\mathbb{B}$ es sobreyectivo, y por lo tanto, como $\mathbb{B}'$ es inyectivo(aplicación del Lema 1.2), $\exists! \bar{U} \in Y'$ tal que

$$\mathbb{B}'(\bar{U}) = -\mathbb{A}(\bar{\sigma})$$

Se tiene así que

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{A}(\bar{\sigma}) + \mathbb{B}'(\bar{U}) & = & \theta \in X' \\ \mathbb{B}(\bar{\sigma}) & = & \theta \in Y \end{array}$$

de donde $(\bar{\sigma}, \bar{U}) = (\theta_X, \theta_{Y'})$, y por lo tanto, $\Pi\mathbb{A}$ es inyectivo. ■

Observación 1.3

Las cotas a priori para σ y U están dadas por:

$$\|\sigma\| \leq \left\|(\Pi\mathbb{A})^{-1}\right\| \|F\| + \frac{1}{\beta}\left(1 + \left\|(\Pi\mathbb{A})^{-1}\right\| \|\mathbb{A}\|\right) \|y\|$$

$$\|U\| \leq \frac{1}{\beta}\left(1 + \left\|(\Pi\mathbb{A})^{-1}\right\| \|\mathbb{A}\|\right) \|F\| + \frac{\|\mathbb{A}\|}{\beta^2}\left(1 + \left\|(\Pi\mathbb{A})^{-1}\right\| \|\mathbb{A}\|\right) \|y\|$$

con β es la constante de los lemas 1.1 o 1.2.

1.2. Análisis de solubilidad del problema original (P)

Recordemos que el problema de interés es,

$$\begin{array}{lcl} \textit{Hallar } (\sigma, \mathcal{G}) \in H \times Q'' \textit{ tal que} & & \\ \mathcal{A}(\sigma) + \mathcal{B}'(\mathcal{G}) & = & F \\ \mathcal{B}(\sigma) & = & G \end{array} \tag{P}$$

donde $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H, H'), \mathcal{B} \in \mathcal{L}(H, Q')$ y $\mathcal{B}' \in \mathcal{L}(Q'', H')$, aplicando el Teorema 1.1 al presente problema (P), con

(Q)	(P)
X	H
Y	Q'
$\mathbb{A} \in \mathcal{L}(X, X')$	$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H, H')$
$\mathbb{B} \in \mathcal{L}(X, Y)$	$\mathcal{B} \in \mathcal{L}(H, Q')$
$F \in X'$	$F \in H'$
$y \in Y$	$G \in Q'$

Se deduca que (P) es únicamente soluble para cualquier par $(F, G) \in H' \times Q'$ si y sólo si,

I) $\Pi\mathcal{A} : V \to V'$ es biyección con $V := N(\mathcal{B})$

II) $\mathcal{B} : H \to Q'$ es sobreyección.

1.2.1. Equivalencias de las hipótesis anteriores con condiciones *inf-sup*

Se tiene que II), es equivalente a decir que $\mathcal{B}' \in \mathcal{L}(Q'', H')$ es inyectivo y de rango cerrado, lo cual a su vez se reduce a la existencia de una constante $\beta > 0$ tal que

$$\|\mathcal{B}'(\mathcal{G})\| \ \geq \beta \, \|\mathcal{G}\| \qquad \forall \mathcal{G} \in Q''$$

Como Q es reflexivo se tiene que $Q'' = J_Q(Q)$ y por lo tanto la ecuación anterior es equivalente a decir que,

$$\|\mathcal{B}'(J_Q(v))\| \ \geq \beta \, \|J_Q(v)\| \qquad \forall v \in Q$$

esto es,

$$\sup_{\tau \in H \setminus \{\theta\}} \frac{\mathcal{B}'(J_Q(v))(\tau)}{\|\tau\|} \geq \beta \, \|v\| \qquad v \in Q$$

o bien, usando que

$$\mathcal{B}'(J_Q(v))(\tau) = J_Q(v)(\mathcal{B}(\tau)) = \mathcal{B}(\tau)(v) = b(\tau, v)$$

resulta

$$\sup_{\tau \in H \setminus \{\theta\}} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|} \geq \beta \, \|v\| \qquad , \forall v \in Q \tag{Condición \textit{inf-sup} continua para b}$$

Por otro lado, I) es equivalente a

I)' $\Pi\mathcal{A} : V \to V'$ inyectiva.

II)' $\Pi\mathcal{A} : V \to V'$ sobreyectiva.

A su vez, I)' equivale a decir

$$\Pi\mathcal{A}(\zeta) \neq \theta \in V \qquad , \forall \zeta \in V \backslash \theta$$

esto es,

$$\sup_{\tau \in V \backslash \{\theta\}} \Pi\mathcal{A}(\zeta)(\tau) \geq 0 \qquad , \forall \zeta \in V \backslash \theta$$

o bien, usando que,

$$\Pi\mathcal{A}(\zeta)(\tau) = \mathcal{A}(\zeta)(\tau) \qquad , \forall \zeta, \tau \in V$$

resulta

$$\sup_{\tau \in V \backslash \{\theta\}} a(\zeta, \tau) \geq 0 \qquad , \forall \zeta \in V \backslash \theta$$

Por otro lado, II)' es equivalente a $(\Pi\mathcal{A})' : V'' \to V$ es inyectivo y de rango cerrado, lo cual significa que existe $\alpha > 0$ tal que:

$$\|(\Pi\mathcal{A})'(\mathcal{F})\| \geq \alpha \|\mathcal{F}\| \qquad , \forall \mathcal{F} \in V''$$

Para manejar mejor esta hipótesis, suponemos ahora que H también es reflexivo, con lo cual, dado que V es subespacio cerrado de H, se tiene que V también es reflexivo. Así la ecuación anterior se reduce a

$$\|(\Pi\mathcal{A})'(J_V(\tau))\| \geq \alpha \|J_v(\tau)\| \qquad , \forall \tau \in V$$

Observación 1.4

Sabiendo que $(\Pi\mathcal{A}) : V \to V'$ se supone biyectivo, se tiene, equivalentemente que $(\Pi\mathcal{A})' : V'' \to V'$ también lo es y por lo tanto, de las ecuaciones interiores se deduce que

$$\left\|(\Pi\mathcal{A})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\alpha}$$

y por lo tanto,

$$\left\|(\Pi\mathcal{A})^{-1}\right\| = \left\|\left((\Pi\mathcal{A})^{-1}\right)'\right\| = \left\|((\Pi\mathcal{A})')^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\alpha}$$

Se tiene que II)' se reescribe como

$$\sup_{\zeta \in V \backslash \{\theta\}} \frac{(\Pi\mathcal{A})'(J_V(\tau))(\zeta)}{\|\zeta\|} \geq \alpha \|\tau\| \qquad , \forall \tau \in V$$

o bien, notando que

$$(\Pi\mathcal{A})'(J_V(\tau))(\zeta) = J_V(\tau)((\Pi\mathcal{A})(\zeta)) = (\Pi\mathcal{A})(\zeta)(\tau) = a(\zeta, \tau)$$

nos queda que, II)' es equivalente a la existencia de una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\sup_{\zeta \in V \backslash \{\theta\}} \frac{a(\zeta, \tau)}{\|\zeta\|} \geq \alpha \|\tau\| \qquad , \forall \tau \in V \qquad \text{(Condición \textit{inf-sup} continua para } a\text{)}$$

Alternativamente, I) se puede ver como $(\Pi\mathcal{A})' : V'' \to V'$ es biyección, lo cual a su vez significa

I)" $(\Pi\mathcal{A})' : V \to V'$ inyectivo.

II)” $(\Pi\mathcal{A})' : V \to V'$ sobreyectivo.

o bien,

I)” $(\Pi\mathcal{A})' : V \to V'$ inyectivo.

II)” $(\Pi\mathcal{A}) : V \to V'$ inyectivo y de rango cerrado.

En este caso se tiene que I)”, es equivalente

$$(\Pi\mathcal{A})(\mathcal{F}) \neq \theta \in V' \qquad , \forall \mathcal{F} \in V'' \backslash \{\theta\}$$

o bien,

$$\sup_{\zeta \in V} (\Pi\mathcal{A})'(\mathcal{F})(\zeta) > 0 \qquad , \forall \mathcal{F} \in V'' \backslash \{\theta\}$$

lo que se reescribe como

$$\sup_{\zeta \in V} (\Pi\mathcal{A})'(J_V(\tau))(\zeta) > 0 \qquad , \forall \tau \in V \backslash \{\theta\}$$

lo que es equivalente a

$$\sup_{\zeta \in V} a(\zeta, \tau) > 0 \qquad , \forall \tau \in V \backslash \{\theta\}$$

A su vez, II)” se reduce a la existencia de $\alpha > 0$ tal que

$$\|(\Pi\mathcal{A})(\zeta)\| \geq \alpha \|\zeta\| \qquad , \forall \zeta \in V$$

esto es

$$\sup_{\tau \in V \backslash \{\theta\}} \frac{(\Pi\mathcal{A})(\zeta)(\tau)}{\|\tau\|} \geq \alpha \|\zeta\| \qquad , \forall \zeta \in V$$

o bien

$$\sup_{\tau \in V \backslash \{\theta\}} \frac{a(\zeta, \tau)}{\|\tau\|} \geq \alpha \|\zeta\| \qquad , \forall \zeta \in V$$

De esta forma, hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 1.2: Teorema de Babuška-Brezzi en espacios de Banach (primera versión)

Sean H y Q espacios de Banach reflexivos, y sean $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas con operadores inducidos dados por $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H, H')$ y $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(H, Q')$, respectivamente. Además sea $V := N(\mathcal{B})$, y supongamos que:

I) Se satisface uno de los siguientes pares de condiciones

I)’ $\sup_{\tau \in V \backslash \{\theta\}} a(\zeta, \tau) > 0, \forall \zeta \in V$

II)’ $\exists \alpha > 0$ tal que

$$\sup_{\zeta \in V \backslash \{\theta\}} \frac{a(\zeta, \tau)}{\|\zeta\|} \geq \alpha \|\tau\| \qquad , \forall \tau \in V$$

o

I)" $\sup_{\zeta\in V\setminus\{\theta\}} a(\zeta,\tau) > 0, \forall\tau \in V$

II)" $\exists\alpha > 0$ tal que

$$\sup_{\tau\in V\setminus\{\theta\}} \frac{a(\zeta,\tau)}{\|\tau\|} \geq \alpha\,\|\zeta\| \qquad ,\forall\zeta \in V$$

II) Existe $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{\tau\in H\setminus\{\theta\}} \frac{b(\tau,v)}{\|\tau\|} \geq \beta\,\|v\| \qquad ,\forall v \in Q$$

Entonces, para cada par $(F,G) \in H' \times Q'$, $\exists!(\sigma,u) \in H \times Q$ solución del problema original P, la cual satisface que

$$\|\sigma\| \leq \frac{\|F\|}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\|\mathbb{A}\|}{\alpha}\right)\|y\|$$

$$\|U\| \leq \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\|\mathbb{A}\|}{\alpha}\right)\|F\| + \frac{\|\mathbb{A}\|}{\beta^2}\left(1 + \frac{\|\mathbb{A}\|}{\alpha}\right)\|y\|$$

Además, las hipótesis I) y II) son necesarias.

Demostración. Se sigue del Teorema 1.1 y las equivalencias de esta sección. ■

2. Espacios de Raviart-Thomas

Dado un dominio poligonal $\bar{\Omega}$ de $\mathbb{R}^n$, con frontera Γ, consideramos una triangularización $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ compuesta de triángulos(o tetraedros) K, tal que:

I) $\bar{\Omega} = \bigcup\limits_{K \in \mathcal{T}_h} K$.

II) $\mathring{K}_i \bigcap \mathring{K}_j = \emptyset, \forall K \in \mathcal{T}_h$ elementos distintos.

III) $\mathring{K} \neq \emptyset, \forall K \in \mathcal{T}_h$.

IV) $\forall K_i, K_j \in \mathcal{T}_h, K_i \neq K_j$ se tiene que $F := K_i \bigcup K_j$ es vacio, un vértice común, un lado común o una cara común.

V) $h_K := \mathrm{diam}(K), \forall K \in \mathcal{T}_h$ y $h := \max\limits_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$

Teorema 2.1

Sea $Z := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \boldsymbol{\tau}|_K \in \mathbf{H}^1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$, alternativamente $Z := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^t(\Omega) : \boldsymbol{\tau}|_K \in \mathbf{W}^{1,t}(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$. Entonces,

$$\mathrm{H}(\mathrm{div}; \Omega) \bigcap Z := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in Z : \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_i + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_j = 0, \text{ en } \mathbf{L}^2(F), \forall F = K_i, K_j, \text{ con } K_i, K_j \in \mathcal{T}_h, K_i \neq K_j \right\} \tag{2.1}$$

o alternativamente,

$$\mathrm{H}^t(\mathrm{div}_t; \Omega) \bigcap Z := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in Z : \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_i + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_j = 0, \text{ en } \mathbf{L}^t(F), \forall F = K_i, K_j, \text{ con } K_i, K_j \in \mathcal{T}_h, K_i \neq K_j \right\} \tag{2.2}$$

Definición 2.1: Espacios de Raviart-Thomas

Dado $k \geq 0$ y $K \in \mathcal{T}_h$, se define el espacio de Raviart-Thomas RT de orden k sobre K como

$$RT_k(K) := \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K) + x\mathcal{P}_k(K) \tag{2.3}$$

o

$$RT_k(K) := \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K) \oplus x\tilde{\mathcal{P}}_k(K) \tag{2.4}$$

donde $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ y $\tilde{\mathcal{P}}$ son los polinomios de grado a lo más k y de grado exactamente k, respectivamente. Se sigue que,

$$\dim(RT_k(K)) = n \dim(\boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K)) + \dim(\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_k(K))$$

donde $\dim(\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_k) = \binom{n+k-1}{k}$ y

$$\dim(\boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K)) = \sum_{j=0}^{k} \dim(\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_j(K)) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+j-1}{j} = \binom{n+k}{k}$$

Así,

$$\dim(RT_k(K)) = n\binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k+1)(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

Observación 2.1

Notar que

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K) \subset RT_k(K) \subset \boldsymbol{\mathcal{P}}_{k+1}(K) \qquad ,\forall K \in \mathcal{T}_h$$

Lema 2.1

Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ se tiene

1. $\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \in \mathcal{P}_k(K), \forall \boldsymbol{\tau} \in RT_k(K)$.
2. $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}|_F \in \mathcal{P}_k(F)$, para todo lado/cara $F \in \partial K$, para todo $\boldsymbol{\tau} \in RT_k(K)$.

Observación 2.2

Se tiene

$$\dim(\boldsymbol{\mathcal{P}}_k(F)) = \binom{n-1+k}{k}$$

porque $F \subset \mathbb{R}^{n-1}$, es decir,

$$\dim(\boldsymbol{\mathcal{P}}_k(F)) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} =: d_k \qquad , k \geq 0$$

Observación 2.3

En general, se tiene que

$$\dim(RT_k(K)) - (n+1)d_k = \frac{k(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

Esta cantidad denota el mínimo de grados de libertad adicionales que deben generarse para .empezar a pensar en la unisolvencia"de los polinomios de Raviart-Thomas.

Observación 2.4

Notar que

$$\dim(\boldsymbol{\mathcal{P}}_{k-1}(K)) = n\mathcal{P}_{k-1}(K) = n\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{n(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \frac{k(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

Ahora, sean

I) $\{\psi_{l,F}\}_{l=1}^{d_k}$ base de $\mathcal{P}_k(F), \forall F \subset \partial K$.

II) $\{\varphi_{l,K}\}_{l=1}^{r_k}$ base de $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{k-1}(K), \forall K \in \mathcal{T}_h$, donde $r_k := \dfrac{k(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$.

Luego, se define para cada $\boldsymbol{\tau} \in RT_k(K)$ sus F-momentos:

$$m_{l.F}(\boldsymbol{\tau}) := \int_F \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_F \psi_{l,F} \qquad \forall l \in \{1, ..., d_k\}, \forall F \subset \partial K$$

y sus K-momentos:

$$m_{l.K}(\boldsymbol{\tau}) := \int_K \boldsymbol{\tau} \cdot \varphi_{l,K} \qquad \forall l \in \{1, ..., r_k\}, \forall K \in \mathcal{T}_h$$

Luego la cantidad total de momentos está dada por

$$N_k := (n+1)d_k + r_k = \dim(RT_k(K)s)$$

re-denotamos estos F y K momentos en la forma

$$m_j(\boldsymbol{\tau}) \qquad ,\forall j \in \{1, ..., N_k\}$$

y definimos la transformación lineal

$$\begin{aligned} m : RT_k(K) &\longrightarrow \mathbb{R}^{N_k} \\ \boldsymbol{\tau} &\longmapsto m(\boldsymbol{\tau}) := (m_j(\boldsymbol{\tau}))_{j=1}^{N_k} \end{aligned}$$

Teorema 2.2

La transformación lineal es inyectiva, es decir,

$$m(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{0}$$

Equivalentemente, m es biyectivo, o dicho de otra manera, $RT_k(K)$ es unisolvente respecto a m, o equivalentemente, para cada vector $(c_1, ..., c_{N_k})^t \in \mathbb{R}^{N_k}$, existe un único $\boldsymbol{\tau} \in RT_k(K)$ tal que

$$m_j(\boldsymbol{\tau}) = c_j \qquad ,\forall j \in \{1, ..., N_k\}$$

En particular, para cada $j \in \{1, ..., N_k\}$, existe un único $\boldsymbol{\tau}_j \in RT_k(K)$ tal que

$$m_i(\boldsymbol{\tau}_j) = \delta_{ij} \qquad ,\forall i \in \{1, ..., N_k\}$$

y $\{\boldsymbol{\tau}_j\}_{j=1}^{N_k}$ es base de $RT_k(K)$.

2.1. Operador de interpolación local

Dado $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tal que $\boldsymbol{\tau}|_K \in \mathbf{H}^1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h$, o análogamente, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^t(\Omega)$ tal que $\boldsymbol{\tau}|_K \in \mathbf{W}^{1,t}(K), \forall K \in \mathcal{T}_h$, se definen también sus momentos $m_j(\boldsymbol{\tau}), \forall j \in \{1, ..., N_k\}$. En efecto, si m_j es un F-momento, se tiene

$$m_j(\boldsymbol{\tau}) = \int_F \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_F \psi_{l,F} \qquad ,\text{para algún } l \in \{1, ..., d_k\}$$

Si $\boldsymbol{\tau}|_K \in \mathbf{H}^1(K)$, se tiene $\boldsymbol{\tau}|_{\partial K} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial K) \subset \mathbf{L}^2(\partial K)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \left| \int_F \boldsymbol{\tau} \cdot \psi_{l,F} \right| &\leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{0;F} \|\psi_{l,F}\|_{0;F} \\ &\leq C_K \|1/2; \partial K\| \|\psi_{l,F}\|_{0;F} \\ &\leq \tilde{C}_K \|1; K\| \|\psi_{l,F}\|_{0;F} \end{aligned}$$

Ahora, si $\boldsymbol{\tau}|_K \in \mathbf{W}^{1,t}(K)$ con $t > 1$, se tiene $\boldsymbol{\tau}|_{\partial K} \in \mathbf{W}^{1-1/t,t}(\partial K) \subset \mathbf{L}^t(\partial K)$ y luego

$$\begin{aligned} \left| \int_F \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_F \psi_{l,F} \right| &\leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,t;F} \|\psi_{l,F}\|_{0,t';F} \\ &\leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,t;\partial K} \|\psi_{l,F}\|_{0,t';F} \\ &\leq C_K \|\boldsymbol{\tau}\|_{1-1/t,t;\partial K} \|\psi_{l,F}\|_{0,t';F} \\ &\leq \tilde{C}_K \|\boldsymbol{\tau}\|_{1,t;K} \|\psi_{l,F}\|_{0,t';F} \end{aligned}$$

donde t' es el conjugado de Hölder de t.

Ahora, si $m_j(\boldsymbol{\tau})$ es un K-momento, entonces

$$m_j(\boldsymbol{\tau}) = \int_K \boldsymbol{\tau} \cdot \varphi_{l,K} \qquad , \text{para algún } l \in \{1, ..., r_k\}$$

y en tal caso

$$\begin{aligned} \left| \int_K \boldsymbol{\tau} \cdot \varphi_{l,K} \right| &\leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{0;K} \|\varphi_{l,K}\|_{0;K} \\ &\leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{1;K} \|\varphi_{l,K}\|_{0;K} \end{aligned}$$

si $\boldsymbol{\tau}|_K \in \mathbf{H}^1(K)$, o bien

$$\begin{aligned} \left| \int_K \boldsymbol{\tau} \cdot \varphi_{l,K} \right| &\leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,t;K} \|\varphi_{l,K}\|_{0,t';K} \\ &\leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{1,t;K} \|\varphi_{l,K}\|_{0,t';K} \end{aligned}$$

si $\boldsymbol{\tau}|_K \in \mathbf{W}^{1,t}(K)$. Luego, dado $\boldsymbol{\tau}$ con la suavidad escrita, se define su interpolante como sigue:

$$\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{j=1}^{N_k} m_j(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}_j \tag{2.5}$$

o equivalentemente, $\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})$ es el único polinomio de $RT_k(K)$ tal que

$$m_i(\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})) = m_i(\boldsymbol{\tau}) \qquad , \forall i \in \{1, ..., N_k\}$$

2.2. Interpolante global de Raviart-Thomas

Se define el espacio de Raviart-Thomas global de orden k como

$$H_h^k := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{H}(\mathrm{div}; \Omega) : \boldsymbol{\tau} \in RT_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

o bien

$$H_h^k := \left\{\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{H}^t(\mathrm{div}_t; \Omega) : \boldsymbol{\tau} \in RT_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\right\}$$

Entonces, dado $\boldsymbol{\tau} \in H_h^k$ se definen sus F-momentos como

$$\int_F \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_F \psi_{l,F} \qquad , \text{para algún } l \in \{1, ..., d_k\}$$

donde $\boldsymbol{\nu}_F$ es el vector normal para cada F, fijo, y $\{\psi_{l,F}\}_{l=1}^{d_k}$ es base de $\mathcal{P}_k(F)$. A su vez, sus K-momentos para $K \in \mathcal{T}_h$, son

$$\int_K \boldsymbol{\tau} \cdot \varphi_{l,K} \qquad , \text{para algún } l \in \{1, ..., r_k\}$$

donde $\{\varphi_{l,K}\}_{l=1}^{r_k}$ es base de $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{k-1}(K)$. Así, la cantidad total de momentos es

$$N := (\#\text{ lados caras } F \text{ de } \mathcal{T}_h) \times d_k + (\#\text{elementos } K \text{ de } \mathcal{T}_h) \times r_k$$

los cuales se reagrupan en la forma $m_j(\boldsymbol{\tau}), \forall \boldsymbol{\tau} \in j \in \{1, ..., N\}$. Así, se denota por $\boldsymbol{\tau}_j$ al único elemento en H_h^k tal que

$$m_i(\boldsymbol{\tau}_j) = \delta_{ij} \qquad , \forall i \in \{1, ..., N\}$$

de modo que $\{\boldsymbol{\tau}_1, ..., \boldsymbol{\tau}_N\}$ es base de H_h^k. Luego, para cada $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)(\mathrm{H}^t(\mathrm{div}_t;\Omega))$ tal que $\boldsymbol{\tau}|_K \in \mathbf{H}^1(K)(\boldsymbol{\tau}|_K \in \mathbf{W}^{1,t}(K))$, se define su interpolante global como

$$\Pi_h^k(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{j=1}^{N} m_j(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}_j \tag{2.6}$$

o equivalentemente, $\Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})$ es el único elemento en H_h^k tal que

$$m_i(\Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})) = m_i(\boldsymbol{\tau})$$

Observación 2.5

Notar que

$$\Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})|_K = \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau}|_K)$$

para todo $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)$(para todo $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{H}^t(\mathrm{div}_t;\Omega)$) tal que $\boldsymbol{\tau}|_K \in \mathbf{H}^1(K)(\boldsymbol{\tau}|_K \in \mathbf{W}^{1,t}(K))$

Lema 2.2: Propiedad del diagrama conmutativo

I) $\mathrm{div}(\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})) = P_K^k(\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})), \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}^1(K)$(resp. $\mathbf{W}^{1,t}(K)$), donde $P_K^k : \mathbf{L}^1(K) \to \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K)$ es el "proyector ortogonal" con respecto al producto interior de $\mathbf{L}^2(K)$.

II) $\mathrm{div}(\Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})) = P_h^k(\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})), \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}^1(K)$(resp. $\mathbf{W}^{1,t}(K)$), donde $P_h^k : \mathbf{L}^1(\Omega) \to \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(\mathcal{T}_h)$ es el "proyector ortogonal" con respecto al producto interior de $\mathbf{L}^2(K)$ y $\boldsymbol{\mathcal{P}}_k(\mathcal{T}_h) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \boldsymbol{v}|_K \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K)\}$.

Observación 2.6

I) Sobre $P_K^k : \mathbf{L}^1(K) \to \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K)$, dado $\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^1(K)$, se define $P_K^k(\boldsymbol{v})$ como el único polinomio en $\boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K)$ tal que

$$\int_K P_K^k(\boldsymbol{v})q = \int_K \boldsymbol{v}q \qquad ,\forall q \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K)$$

Luego por Hölder, se tiene que

$$\left|\int_K \boldsymbol{v}q\right| \leq \|q\|_{\infty;K} \int_K |\boldsymbol{v}|$$

Así, dada $\{q_1, ..., q_M\}$ una base ortonormal de $\boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K)$ con respecto al producto interior de $\mathbf{L}^2(K)$, se tiene que

$$P_K^k(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{M} \left(\int_K \boldsymbol{v}q_j\right) q_j$$

II) Sobre $P_h^k : \mathbf{L}^1(\Omega) \to \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(\mathcal{T}_h)$, dado $\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^1(\Omega)$, se define $P_K^k(\boldsymbol{v})$ como el único polinomio en $\boldsymbol{\mathcal{P}}_k(\mathcal{T}_h)$ tal que

$$\int_\Omega P_h^k(\boldsymbol{v})q = \int_\Omega \boldsymbol{v}q \qquad ,\forall q \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(\mathcal{T}_h)$$

Notar que

$$P_h^k(\boldsymbol{v})|_K = P_K^k(\boldsymbol{v}|_K) \qquad ,\forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^1(\Omega)$$

Teorema 2.3: Desigualdad de Poincaré Generalizada

Dado un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y dados $m \in \mathbb{N}$ y $p > 1$, se define

$$\mathrm{W}^{m,p}(\Omega) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^p(\Omega); \partial^\alpha \boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$$

el cual es Banach con la norma

$$\|\boldsymbol{v}\|_{m,p;\Omega} := \left\{ \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha \boldsymbol{v}\|_{0,p;\Omega}^p \right\}^{1/p}$$

A su vez, la semi-norma está dada por

$$\|\boldsymbol{v}\|_{m,p;\Omega} := \left\{ \sum_{|\alpha|= m} \|\partial^\alpha \boldsymbol{v}\|_{0,p;\Omega}^p \right\}^{1/p}$$

Por otro lado, sea $\mathcal{F}$ una familia finita de funcionales en $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)'$ tal que

$$\mathcal{P}_{m-1}(\Omega) \cap {}^\circ\mathcal{F} = \{\theta\} \Leftrightarrow p \in \mathcal{P}_{m-1}(\Omega) \text{ y } F(p) = 0, \forall F \in \mathcal{F}, \text{ entonces } p \equiv \theta$$

y definimos

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{F}} := \left\{ |\boldsymbol{v}|_{m,p;\Omega}^p + \sum_{F \in \mathcal{F}} |F(\boldsymbol{v})|^p \right\}^{1/p} \qquad , \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$$

Entonces $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ es una norma sobre $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$, la cual equivalente con $\|\cdot\|_{m,p;\Omega}$, es decir, existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tal que

$$c_1 \|\boldsymbol{v}\|_{m,p;\Omega} \leq \|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{F}} \leq c_2 \|\boldsymbol{v}\|_{m,p;\Omega}$$

Lema 2.3: Lema Deny-Lions en $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$

Dados un entero $k \geq 0$ y $p \in]1, +\infty[$, y un compacto K de $\mathbb{R}^n$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_k(K)} \|\boldsymbol{v} - p\|_{k+1,p;K} \leq C |\boldsymbol{v}|_{k+1,p;\Omega} \qquad , \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{W}^{k+1,p}(K)$$

Demostración. Sea $N := \dim(\mathcal{P}_k(K))$ y sea $\{p_1, ..., p_N\}$ una base de $P_k(K)$. A su vez, sea $\{f_1, ..., f_N\}$ la base canónica de $\mathcal{P}_k(K)'$, es decir, $f_j \in \mathcal{P}_k(K)', \forall k \in \{1, ..., N\}$ y $f_j(p_i) = \delta_{ij}, \forall i, j \in \{1, .., N\}$. Equivalentemente, dado $p \in \mathcal{P}_k(K)$ y $\alpha_1, ..., \alpha_N \in \mathbb{R}$ tal que $p = \sum_{j=1}^N \alpha_j p_j$, entonces $f_j(p) = \alpha_j$. En particular, se observa que dados escalares $c_1, ..., c_N \in \mathbb{R}$, entonces existe un único $p \in \mathcal{P}_k(K)$ tal que $f_j(p) = c_j, \forall j \in \{1, ..., N\}$. En efecto, basta definir

$$p = \sum_{i=1}^N c_i p_i$$

Puesto que $\mathcal{P}_k(K)$ es subespacio de $\mathrm{W}^{k+1,p}(K)$, por Teorema de Hahn-Banach se deduce que existen funcionales $F_1, ..., F_N \in \mathrm{W}^{k+1,p}(K)'$ tal que $F_j|_{\mathcal{P}_k(K)} = f_j$ y

$$\|F_j\|_{\mathrm{W}^{k+1,p}(K)'} = \|f_j\|_{\mathcal{P}_k(K)'}, \forall j \in \{1, ..., N\}$$

Se sigue que $\mathcal{P}_k(K) \cap^\circ \{F_1, ..., F_N\} = \{\theta\}$. En efecto, sea $p \in \mathcal{P}_k(K)$ tal que $0 = F_j(p) = f_j(p), \forall j \in \{1, ..., N\}$. Se sigue que $f(p) = 0, \forall f \in \mathcal{P}_k(K)'$, de donde necesariamente $p \equiv 0$. Así, aplicando el Teorema 2.3, se deduce que existen $c_1, c_2 > 0$ tal que

$$c_1 \|\boldsymbol{v}\|_{k+1,p;\Omega} \leq \|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{F}} \leq c_2 \|\boldsymbol{v}\|_{k+1,p;\Omega} \qquad , \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{W}^{k+1,p}(K)$$

donde

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{F}} := \left\{ |\boldsymbol{v}|^p_{k+1,p;K} + \sum_{j=1}^{N} |F_j(\boldsymbol{v})|^p \right\}^{1/p} \qquad , \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{W}^{k+1,p}(K)$$

Ahora, dado $\boldsymbol{v} \in \mathrm{W}^{k+1,p}(K)$, consideremos los escalares $F_j(\boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}, \forall j \in \{1, ..., N\}$, para los cuales existe un único $q_{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{P}_k(K)$ tal que $f_j(q_{\boldsymbol{v}}) = F_j(\boldsymbol{v}), \forall j \in \{1, ..., N\}$, esto es,

$$F_j(\boldsymbol{v} + q_{\boldsymbol{v}}) = 0 \qquad , \forall j \in \{1, ..., N\}$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned}
\inf_{p \in \mathcal{P}_k(K)} \|\boldsymbol{v} - p\|_{k+1,p;K} \leq & \|\boldsymbol{v} - q_{\boldsymbol{v}}\|_{k+1,p;K} \\
\leq & c_1^{-1} \|\boldsymbol{v} - q_{\boldsymbol{v}}\|_{\mathcal{F}} \\
= & c_1^{-1} \left\{ |\boldsymbol{v} - q_{\boldsymbol{v}}|_{k+1,p;K} + \sum_{j=1}^{N} |F_j(\boldsymbol{v} - q_{\boldsymbol{v}})|^p \right\}^{1/p} \\
= & c_1^{-1} |\boldsymbol{v} - q_{\boldsymbol{v}}|_{k+1,p;K} \\
= & c_1^{-1} |\boldsymbol{v}|_{k+1,p;K}
\end{aligned}$$

■

Lema 2.4: Lema de Bramble-Hilbert

Dados enteros $k \geq 0$ y $0 \leq m \leq k+1$, $p \in]1, +\infty[$, y un compacto K de $\mathbb{R}^n$, y sea $\Pi \in \mathcal{L}(\mathrm{W}^{k+1,p}(K), \mathrm{W}^{m,p}(K))$ tal que $\Pi(p) = p, \forall p \in \mathcal{P}_k(K)$. Entonces, existe $c > 0$ tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{m,p;K} \leq C\, |v|_{k+1,p;K} \qquad , \forall v \in \mathrm{W}^{k+1,p}(K)$$

Demostración. Dado $v \in \mathrm{W}^{k+1,p}(K)$ y para todo $p \in \mathcal{P}_k(K)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|v - \Pi(v)\|_{m,p;K} &= \|(v-p) - (\Pi(v) - p)\|_{m,p;\Omega} \\
&= \|(v-p) - \Pi(v-p)\|_{m,p;K} \\
&= \|(I - \Pi)(v-p)\|_{m,p;K}
\end{aligned}$$

donde $I : \mathrm{W}^{k+1,p}(K) \longrightarrow \mathrm{W}^{k+1,p}(K)$ es el operador identidad, el cual es continuo porque $0 \leq m \leq k+1$. Se sigue que

$$\|v - \Pi(v)\|_{m,p;K} \leq \|I - \Pi\|_{\mathcal{L}(\mathrm{W}^{k+1,p}(K), \mathrm{W}^{k+1,p}(K))} \|v - p\|_{k+1p;K} \qquad , \forall p \in \mathcal{P}_k(K)$$

de donde, tomando ínfimo con respecto a $p \in \mathcal{P}_k(K)$, y aplicando el Lema 2.3, resulta

$$\begin{aligned}\|v - \Pi(v)\|_{m,p;K} \leq& \|I - \Pi\| \inf_{p \in \mathcal{P}_k(K)} \|v - p\|_{k+1,p;K} \\ \leq& C \|I - \Pi\| \, |v|_{k+1,p;K} \qquad , \forall v \in \mathrm{W}^{k+1,p}(K)\end{aligned}$$

■

2.3. Propiedades de escalamiento

Sean K y $\hat{K}$ compactos conexos de $\mathbb{R}^n$ con fronteras de clase $C^{0,1}$, y sea $T_K.\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación afín, es decir, $T_K(\hat{x}) := B_k\hat{x} + b_K, \forall \hat{x} \in \mathbb{R}^n$, con B_K invertible y $b_K \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$T_K(\hat{K}) = K$$

Entonces se prueba que

$$\hat{\boldsymbol{v}} \in \mathrm{W}^{m,p}(K) \Longleftrightarrow \hat{\boldsymbol{v}} := \boldsymbol{v} \circ T_K \in \mathrm{W}^{m,p}(\hat{K})$$

Además, existen constantes $c_j := c_j(m,p,n) > 0, j = 1, 2$ tal que para todo $\hat{\boldsymbol{v}} \in \mathrm{W}^{m,p}(\hat{K})$

$$|\hat{\boldsymbol{v}}|_{m,p;\hat{K}} \leq C_1 \|B_K\|^m \left|\det(B_K)^{-1/p}\right| |\boldsymbol{v}|_{m,p;K}$$

con $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{v}} \circ T_K^{-1}$, y para todo $\boldsymbol{v} \in \mathrm{W}^{m,p}(K)$

$$|\boldsymbol{v}|_{m,p;K} \leq C_1 \left\|B_K^{-1}\right\|^m \left|\det(B_K)^{1/p}\right| |\hat{\boldsymbol{v}}|_{m,p;\hat{K}}$$

con $\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} \circ T_K$. Análogamente, para la Transformación de Piola

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} := |\det(B_K)| \, B_K^{-1} \boldsymbol{\tau} \circ T_K \tag{2.7}$$

se tiene

$$|\hat{\boldsymbol{\tau}}|_{m,p;\hat{K}} \leq C \left\|B_K^{-1}\right\| \|B_K\|^m |\det(B_K)|^{1-1/p} |\boldsymbol{\tau}|_{m,p;K}$$

y

$$|\boldsymbol{\tau}|_{m,p;K} \leq C \|B_K\| \left\|B_K^{-1}\right\|^m |\det(B_K)|^{1-1/p} |\hat{\boldsymbol{\tau}}|_{m,p;\hat{K}}$$

2.3.1. Propiedades geométricas

Se tiene que

I) $|\det(B_K)| = \dfrac{|K|}{\hat{K}}$.

II) $\|B_K\| \leq \dfrac{h_K}{\hat{\rho}}$, donde $h_K := \operatorname{diam}(K) = \text{máx}_{x,y \in K} \|x - y\|$ y $\hat{\rho} := \sup\left\{\operatorname{diam}(S) : S \text{ bola contenida en } \hat{K}\right\}$.

III) $\left\|B_K^{-1}\right\| \leq \dfrac{\hat{h}}{\rho_K}$, donde $\hat{h} := \operatorname{diam}(\hat{K})$ y $\rho_K := \sup\left\{\operatorname{diam}(S) : S \text{bola contenida en } K\right\}$.

2.4. Ejemplo de aplicación del Lema de Bramble-Hilbert

Sean $\Pi_K : L^1(K) \to \mathcal{P}_k(K)$ y $\Pi_{\hat{K}} : L^1(\hat{K}) \to \mathcal{P}_k(\hat{K})$ los operadores definidos por las identidades

$$\int_K \Pi_K(v)q = \int_K vq \qquad , \forall v \in L^1(K), \forall q \in \mathcal{P}_k(K)$$

y

$$\int_{\hat{K}} \Pi_{\hat{K}}(\hat{v})\hat{q} = \int_{\hat{K}} \hat{v}\hat{q} \qquad , \forall \hat{v} \in L^1(\hat{K}), \forall \hat{q} \in \mathcal{P}_k(\hat{K})$$

respectivamente. Veamos que relación existe entre los operadores Π_K y $\Pi_{\hat{K}}$, para ello, sea $\hat{v} \in L^1(\hat{K})$ y $\hat{q} \in \mathcal{P}_k(\hat{K})$ y observemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{K}} \hat{v}\hat{q}d\hat{x} &= \int_{\hat{K}} (\hat{v} \circ T_K)(T_K^{-1}(\hat{x}))(\hat{q} \circ T_K)(T_K^{-1}(\hat{x}))d\hat{x} \\
&= |\det(B_K)|^{-1} \int_K \underbrace{(\hat{v} \circ T_K^{-1})(x)}_{\mathbf{L}^1(K)} \underbrace{(\hat{q} \circ T_K^{-1})(x)}_{\mathcal{P}_k(K)} dx \\
&= |\det(B_K)|^{-1} \int_K \Pi_K(\hat{v} \circ T_K^{-1})(x)(\hat{q} \circ T_K^{-1})(x)dx \\
&= \int_{\hat{K}} (\Pi_K(\hat{v} \circ T_K^{-1}) \circ T_K)(\hat{x})\hat{q}(x)d\hat{x}
\end{aligned}$$

Hemos probado así que

$$\int_{\hat{K}} \hat{v}\hat{q} = \int_{\hat{K}} (\Pi_K(\hat{v} \circ T_K^{-1}) \circ T_K)(\hat{x})\hat{q}(x)d\hat{x} \qquad , \forall \hat{v} \in L^1(\hat{K}), \forall \hat{q} \in \mathcal{P}_k(\hat{K})$$

de donde se deduce que

$$\Pi_{\hat{K}}(\hat{v}) = \Pi_K(\hat{v} \circ T_K^{-1}) \circ T_K$$

o bien, denotando $v = \hat{v} \circ T_K^{-1}$, se tiene que

$$\Pi_{\hat{K}}(\hat{v}) = \Pi_K(v) \circ T_K = \widehat{\Pi_K(v)}$$

Ahora, sea $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^N$ una base ortonormal con respecto al producto escalar de $L^2(\hat{K})$ de $\mathcal{P}_k(K)$. Entonces, se tiene que

$$\Pi_{\hat{K}}(\hat{v}) = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\hat{K}} \hat{v}\hat{q}_j \right\} \hat{q}_j$$

Luego, dados $\hat{v} \in \mathrm{W}^{k+1,p}(\hat{K})$, p' el conjugado de Hölder de p, y $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq m \leq k+1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|\Pi_{\hat{K}}\|_{m,p;\hat{K}} &\leq \sum_{j=1}^N \left| \int_{\hat{K}} \hat{v}\hat{q}_j \right| \|\hat{q}_j\|_{m,p;\hat{K}} \\
&\leq \sum_{j=1}^N \|\hat{v}\|_{0,p;\hat{K}} \|\hat{q}_j\|_{0,p';\hat{K}} \|\hat{q}_j\|_{0,p;\hat{K}}
\end{aligned}$$

de donde

$$\|\Pi_{\hat{K}}\|_{m,p;\hat{K}} \leq \underbrace{\left\{ \sum_{j=1}^N \|\hat{q}_j\|_{0,p';\hat{K}} \|\hat{q}_j\|_{0,p;\hat{K}} \right\}}_{C(\hat{K}):=} \|\hat{v}\|_{0,p;\hat{K}}$$

esto es,

$$\|\Pi_{\hat{K}}(\hat{v})\|_{m,p;K} \leq C(\hat{K})\,\|\hat{v}\|_{0,p;\hat{K}} \leq C(\hat{K})\,\|\hat{v}\|_{k+1,p;\hat{K}}$$

Por otro lado, para cada $v \in \mathrm{W}^{k+1,p}(K)$ se tiene

$$\begin{aligned}|v-\Pi_K(v)|_{m,p;K} \leq& c_2 \left\|B_K^{-1}\right\|^m |\det(B_K)|^{1/p} \left|\widehat{v-\Pi_K(v)}\right|_{m,p;\hat{K}}\\ =& c_2 \left\|B_K^{-1}\right\|^m |\det(B_K)|^{1/p} |\hat{v}-\Pi_{\hat{K}}(\hat{v})|_{m,p;\hat{K}}\end{aligned}$$

Observación 2.7

Si tomamos en vez de $k+1$, un entero l tal que $0 \leq l \leq k$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\|\Pi_{\hat{K}}(\hat{v})\|_{m,p;\hat{K}} \leq& C(\hat{K})\,\|\hat{v}\|_{0,p;\hat{K}}\\ \leq& C(\hat{K})\,\|\hat{v}\|_{l,p;\hat{K}}\end{aligned}$$

Así, aplicando Lema 2.4 a m y l tal que $0 \leq l \leq k$ y $0 \leq m \leq l+1$, y notando que $\Pi_{\hat{K}}(\hat{p}) = \hat{p}, \forall \hat{p} \in \mathcal{P}_l(\hat{K})$, se tiene que

$$\begin{aligned}|v-\Pi_K(v)|_{m,p;K} \leq& C \left\|B_K^{-1}\right\|^m |\det(B_K)|^{1/p} |\hat{v}|_{l+1,p;\hat{K}}\\ \leq& C \left\|B_K^{-1}\right\|^m |\det(B_K)|^{1/p} \|B_K\|^{l+1} |\det(B_K)|^{-1/p} |v|_{l+1,p;K}\\ \leq& C \left(\frac{\hat{h}}{\rho_K}\right)^m \left(\frac{h_K}{\hat{\rho}}\right)^{l+1} |v|_{l+1,p;K}\end{aligned}$$

Finalmente, suponiendo una familia $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ regular, esto es que existe $c_0 > 0$ tal que

$$\frac{h_K}{\hat{\rho}} \leq c_0 \qquad ,\forall K \in \mathcal{T}_h, \forall h > 0$$

entonces se tiene que

$$|v-\Pi_K(v)|_{m,p;K} \leq C\hat{C}c_0^m h_K^{l+1-m} |v|_{l+1,p;K} \qquad ,\forall v \in \mathrm{W}^{l+1,p}(K)$$

o bien,

$$|v-\Pi_K(v)|_{m,p;K} \leq \tilde{C}h_K^{l+1-m} |v|_{l+1,p;K} \qquad ,\forall v \in \mathrm{W}^{l+1,p}(K)$$

con $0 \leq l \leq k$ y $0 \leq m \leq l+1$, redenotando $l+1$ simplemente como l, entonces lo anterior queda

$$|v-\Pi_K(v)|_{m,p;K} \leq \tilde{C}h_K^{l-m} |v|_{l,p;K} \qquad ,\forall v \in \mathrm{W}^{l,p}(K)$$

con $1 \leq l \leq k+1$ y $0 \leq m \leq l$.

Por otro lado, si tomamos $l = m = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}|v-\Pi_K(v)|_{0,p;K} =& \|v-\Pi_K(v)\|_{0,p;K}\\ =& \|v\|_{0,p;K} + \|\Pi_K(v)\|_{0,p;K}\end{aligned}$$

A su vez,

$$\begin{aligned}\|\Pi_K(v)\|_{0,p;K} =& |\Pi_K(v)|_{0,p;K}\\ \leq& C \left\|B_K^{-1}\right\|^0 |\det B_K|^{1/p} \|\Pi_{\hat{K}}(\hat{v})\|_{0,p;\hat{K}}\\ \leq& C \left\|B_K^{-1}\right\| |\det(B_K)|^{1/p} \hat{C} \|\hat{v}\|_{0,p;\hat{K}}\\ \leq& C |\det(B_K)|^{1/p} \|B_K\|^0 |\det(B_K)|^{-1/p} \|v\|_{0,p;K}\\ =& \tilde{C} \|v\|_{0,p;K}\end{aligned}$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned}|v - \Pi_K(v)|_{0,p;K} =& \|v - \Pi_K(v)\|_{0,p;K}\\ =& C \|v\|_{0,p;K} \qquad , \forall v \in \mathbf{L}^p(K)\end{aligned}$$

Así, finalmente se obtiene

$$|v - \Pi_K(v)|_{m,p;K} \leq \tilde{C} h_K^{l-m} |v|_{l,p;K} \qquad , \forall v \in \mathrm{W}^{l,p}(K)$$

con $0 \leq l \leq k+1$ y $0 \leq m \leq l$.

2.5. Errores de interpolación de Raviart-Thomas

2.5.1. Error de interpolación local

En este caso se tienen los operadores de interpolación locales $\Pi_K^k : \mathbf{W}^{1,p}(K) \to RT_h(K)$ y $\Pi_{\hat{K}}^k : \mathbf{W}^{1,p}(\hat{K}) \to RT_h(\hat{K})$, donde

$$\Pi_{\hat{K}}^k(\hat{\boldsymbol{\tau}}) := \sum_{j=1}^{N_k} m_{j,\hat{K}}(\hat{\boldsymbol{\tau}})\hat{\boldsymbol{\tau}}_{j,\hat{K}}$$

con $\left\{\boldsymbol{\tau}_{j,\hat{K}}\right\}_{j=1}^{N_k}$ base canónica de $RT_k(\hat{K})$, es decir, $m_{i,\hat{K}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{j,\hat{K}}) = \delta_{ij}, foralli, j \in \{1, ..., N-k\}$. Se tiene además que

$$\widehat{\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})} = \Pi_{\hat{K}}^k(\hat{\boldsymbol{\tau}}) \qquad , \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{1,p}(K)$$

con $\hat{\boldsymbol{\tau}} := |\det(B_K)| B_K^{-1}\boldsymbol{\tau} \circ T_K$.

Veamos primero que $\Pi_{\hat{K}}^k$ verifica las hipótesis de Lema de Bramble-Hilbert(Lema 2.4). En efecto, dados l, m enteros tales que $0 \leq l \leq k$ y $0 \leq m \leq l+1$, consideremos $\hat{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbf{W}^{l+1,p}(\hat{K})$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left\|\Pi_{\hat{K}}^k(\hat{\boldsymbol{\tau}})\right\|_{m,p;\hat{K}} =& \left\|\sum_{j=1}^{N_k} m_{j,\hat{K}}(\hat{\boldsymbol{\tau}})\hat{\boldsymbol{\tau}}_{j,\hat{K}}\right\|_{m,p;\hat{K}}\\ \leq& \sum_{j=1}^{N_k} \left|m_{j,\hat{K}}\right| \left\|(\hat{\boldsymbol{\tau}})\hat{\boldsymbol{\tau}}_{j,\hat{K}}\right\|_{m,p;\hat{K}}\end{aligned}$$

Ahora, para estimar $\left|m_{j,\hat{K}}\right|$ consideramos los dos casos posibles,

1. Si $m_{j,\hat{K}}$ es un $\hat{K}$-momentos, entonces existe $i \in \{1, ..., r_k\}$ tal que

$$m_{j,\hat{K}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) = \int_{\hat{K}} \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\varphi}_{i,\hat{K}}$$

donde $\left\{\hat{\varphi}_{j,\hat{K}}\right\}_{j=1}^{r_k}$ es una base de $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{k-1}(\hat{K})$. En tal caso, aplicando la desigualdad de Hölder con p y q, se obtiene

$$\begin{aligned}\left|m_{j,\hat{K}}(\hat{\boldsymbol{\tau}})\right| &= \left|\int_{\hat{K}} \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\varphi}_{i,\hat{K}}\right| \\ &\leq \left\|\hat{\varphi}_{i,\hat{K}}\right\|_{0,q;\hat{K}} \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{0,p;\hat{K}} \\ &\leq \left\|\hat{\varphi}_{i;\hat{K}}\right\|_{0,q;\hat{K}} \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{l+1,p;\hat{K}}\end{aligned}$$

2. Si $m_{j,\hat{K}}$ es un $\hat{F}$-momento, entonces existe $F \subset \partial\hat{K}$ e $i \in \{1, ..., d_k\}$ tal que

$$m_{j,\hat{K}} = \int_{\hat{F}} \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\nu} \psi_{i,\hat{F}}$$

donde $\left\{\hat{\psi}_{j,\hat{F}}\right\}_{j=1}^{d_k}$ es base de $\mathcal{P}_k(\hat{F})$. En tal caso, se tiene

$$\left|m_{j,\hat{K}}(\hat{\boldsymbol{\tau}})\right| = \left|\int_{\hat{F}} \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\nu} \hat{\psi}_{i,\hat{F}}\right|$$

y aplicando Hölder en $\hat{F}$ con p y q, resulta

$$\begin{aligned}\left|m_{j,\hat{K}}(\hat{\boldsymbol{\tau}})\right| &\leq \int_{\hat{F}} \left|\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\nu} \hat{\psi}_{i,\hat{F}}\right| \\ &\leq \int_{\hat{F}} \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\| \left|\hat{\psi}_{i,\hat{F}}\right| \\ &\leq \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{0,p;\hat{F}} \left\|\hat{\psi}_{i,\hat{F}}\right\|_{0,q;\hat{F}} \\ &\leq \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{0,p;\partial\hat{K}} \left\|\hat{\psi}_{i,\hat{F}}\right\|_{0,q;\hat{F}}\end{aligned}$$

Luego, recordando el operador de trazas $\hat{\gamma} : \mathbf{W}^{1,p}(\hat{K}) \to \mathbf{W}^{1-1/p,p}(\partial\hat{K}) = \mathbf{W}^{1/q,p}(\partial\hat{K})$ y el hecho que la inyección $i_q : \mathbf{W}^{1/q,p}(\partial\hat{K}) \to \mathbf{W}^{0,p}(\partial\hat{K}) = \mathbf{L}^p(\partial\hat{K})$ es contiene, se obtiene

$$\begin{aligned}\left|m_{j,\hat{K}(\hat{\boldsymbol{\tau}})}\right| &\leq \left\|\hat{\psi}_{i,\hat{F}}\right\|_{0,q;\hat{F}} \|i_q\| \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{1/q,p;\partial\hat{K}} \\ &\leq \left\|\hat{\varphi}_{i,\hat{F}}\right\|_{0,q;\hat{F}} \|i_q\| \|\hat{\gamma}_p\| \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{1,p;\hat{K}} \\ &\leq \left\|\hat{\varphi}_{i,\hat{F}}\right\|_{0,q;\hat{F}} \|i_q\| \|\hat{\gamma}_p\| \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{l+1,p;\hat{K}}\end{aligned}$$

Juntando las distintas estimaciones anteriores, se deduce que existe una constante $\left\|\Pi_{\hat{K}}^k\right\|$ que depende de las bases $\left\{\hat{\varphi}_{i,\hat{K}}\right\}_{i=1}^{r_k}$, $\left\{\hat{\psi}_{i,\hat{F}}\right\}_{i=1}^{d_k}$ para todo $\hat{F} \subset \partial\hat{K}$, $\|i_q\|$, $\|\hat{\gamma}_p\|$ y $\left\{\hat{\boldsymbol{\tau}}_{i,\hat{K}}\right\}_{i=1}^{N_k}$, tal que

$$\left\|\Pi_{\hat{K}}^k(\hat{\boldsymbol{\tau}})\right\|_{m,p;\hat{K}} \leq \left\|\Pi_{\hat{K}}^k\right\| \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{l+1,p;\hat{K}} \qquad , \forall \hat{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbf{W}^{l+1,p}(\hat{K}) \tag{2.8}$$

y por lo tanto, $\Pi^k_{\hat{K}} \in \mathcal{L}(\mathbf{W}^{l+1,p}(\hat{K}), \mathbf{W}^{m,p}(\hat{K}))$. A su vez, $\boldsymbol{\mathcal{P}}_k(\hat{K}) \subset RT_k(\hat{K}) \subset \boldsymbol{\mathcal{P}}_{k+1}(\hat{K})$, se tiene que

$$\Pi_{\hat{K}^k(\hat{\boldsymbol{\tau}})} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \qquad , \forall \hat{\boldsymbol{\tau}} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(\hat{K})$$

y en particular, dado que $l \leq k$, se tiene que

$$\Pi_{\hat{K}^k(\hat{\boldsymbol{\tau}})} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \qquad , \forall \hat{\boldsymbol{\tau}} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_l(\hat{K})$$

Con lo anterior, dado $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{l+1,p}(K)$ nos interesa estimar $\left|\boldsymbol{\tau} - \Pi^k_K(\boldsymbol{\tau})\right|_{m,p,K}$ con $0 \leq m \leq l+1$. Para ello, se utilizan las siguientes propiedades de escalamiento

$$\begin{aligned}
|\hat{\boldsymbol{\tau}}|_{m,p;\hat{K}} &= \left| |\det(B_K)| \, B_K^{-1} \boldsymbol{\tau} \circ T_K \right|_{m,p;K} \\
&= |\det B_K| \left| B_K^{-1} \boldsymbol{\tau} \circ T_K \right|_{m,p;K} \\
&\leq |\det(B_K)| \left\| B_K^{-1} \right\| |\boldsymbol{\tau} \circ T_K|_{m,p;K} \\
&\leq |\det(B_K)| \left\| B_K^{-1} \right\| C \left\| B_K \right\|^m |\det(B_K)|^{-1/p} |\boldsymbol{\tau}|_{m,p;K} \\
&\leq C \left\| B_K^{-1} \right\| C \left\| B_K \right\|^m |\det(B_K)|^{1-1/p} |\boldsymbol{\tau}|_{m,p;K}
\end{aligned}$$

es decir,

$$|\tilde{\boldsymbol{\tau}}|_{m,p;\hat{K}} \leq \left\| B_K^{-1} \right\| \left\| B_K \right\|^m |\det(B_K)|^{1/q} |\boldsymbol{\tau}|_{m,p;K} \tag{2.9}$$

Análogamente, se prueba que

$$|\boldsymbol{\tau}|_{m,p;K} \leq \left\| B_K \right\| \left\| B_K^{-1} \right\|^m |\det(B_K)|^{-1/q} |\hat{\boldsymbol{\tau}}|_{m,p;\hat{K}} \tag{2.10}$$

Ahora, dado $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{l+1,p}(K)$, por Lema de Bramble-Hilbert(ver (2.4)), se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{\tau} - \Pi^k_K(\boldsymbol{\tau})\right|_{m,p;K} &\leq C \left\| B_K \right\| \left\| B_K^{-1} \right\|^m |\det(B_K)|^{-1/q} \left| \widehat{\boldsymbol{\tau} - \Pi^k_K(\boldsymbol{\tau})} \right|_{m,p;\hat{K}} \\
&\leq C \left\| B_K \right\| \left\| B_K^{-1} \right\|^m |\det(B_K)|^{-1/q} \left| \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \Pi^k_K(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) \right|_{m,p;\hat{K}} \\
&\leq C \left\| B_K \right\| \left\| B_K^{-1} \right\|^m |\det(B_K)|^{-1/q} |\tilde{\boldsymbol{\tau}}|_{l+1,p;\hat{K}} \\
&\leq C \left\| B_K \right\| \left\| B_K^{-1} \right\|^m |\det(B_K)|^{-1/q} \left\| B_K^{-1} \right\| \left\| B_K \right\|^m |\det(B_K)|^{1/q} |\boldsymbol{\tau}|_{l+1,p;K}
\end{aligned}$$

es decir,

$$\left|\boldsymbol{\tau} - \Pi^k_K(\boldsymbol{\tau})\right|_{m,p;K} \leq C \left\| B_K \right\|^{l+2} \left\| B_K^{-1} \right\|^{m+1} |\boldsymbol{\tau}|_{l+1,p;K}$$

considerando las estimaciones $\|B_K\| \leq \dfrac{h_K}{\hat{\rho}}$ y $\left\| B_K^{-1} \right\| \leq \dfrac{\hat{h}}{\rho_K}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{\tau} - \Pi^k_K(\boldsymbol{\tau})\right|_{m,p;K} &\leq C \left(\frac{h_K}{\hat{\rho}}\right)^{l+2} \left(\frac{\hat{h}}{\rho_K}\right)^{m+1} |\boldsymbol{\tau}|_{l+1,p;K} \\
&\leq \hat{C} h_K^{l+1-m} \left(\frac{h_K}{\rho_K}\right)^{m+1} |\boldsymbol{\tau}|_{l+1,p;K}
\end{aligned}$$

Así, considerando la malla regular, esto es la existencia de una constante que acota $\dfrac{h_K}{\rho_K}$ para todo $K \in \mathcal{T}_h$ y para todo h positivo, se tiene que

$$\left|\boldsymbol{\tau} - \Pi^k_K(\boldsymbol{\tau})\right|_{m,p;K} \leq \tilde{C} h_K^{l+1-m} |\boldsymbol{\tau}|_{l+1,p;K} \qquad , \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{l+1,p}(K) \tag{2.11}$$

con $0 \leq l \leq k$ y $0 \leq m \leq l+1$.

Redenotando a su vez l en vez de $l+1$ se tiene

$$\left|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right|_{m,p;K} \leq \tilde{C} h_K^{l+1-m} \left|\boldsymbol{\tau}\right|_{l,p;K} \qquad , \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{l,p}(K) \tag{2.12}$$

con $1 \leq l \leq k+1$ y $0 \leq m \leq l$.

Por otro lado, para el caso $l = m = 0$, se tiene que estimar

$$\left|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right|_{0,p;K} \leq \left\|\boldsymbol{\tau}\right\|_{0,p;K} + \left\|\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{1,p;K}$$

Al respecto, se tiene

$$\left\|\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0,p;K} \leq C \left\|B_K\right\| \left\|B_K^{-1}\right\|^0 \left|\det B_K\right|^{1/q} \left\|\Pi_{\hat{K}}^k(\hat{\boldsymbol{\tau}})\right\|_{0,p;\hat{K}}$$

y usando que $\Pi_{\hat{K}}^k \in \mathcal{L}(\mathbf{W}^{l,p}(\hat{K}), \mathbf{W}^{m,p}(\hat{K}))$ con $1 \leq l \leq k+1$ y $0 \leq m \leq l$, se tiene

$$\left\|\Pi_{\hat{K}}^k(\hat{\boldsymbol{\tau}})\right\|_{0,p;\hat{K}} \leq \left\|\Pi_{\hat{K}}^k\right\| \left\|\hat{\boldsymbol{\tau}}\right\|_{0,p;\hat{K}}$$

y luego,

$$\begin{aligned}
\left\|\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0,p;K} \leq & C \left\|B_K\right\| \left|\det(B_K)\right|^{-1/q} \left\|\Pi_{\hat{K}}^k\right\| \left\{\left|\hat{\boldsymbol{\tau}}\right|_{0,p;\hat{K}} + \left|\hat{\boldsymbol{\tau}}\right|_{1,p;\hat{K}}\right\} \\
\leq & C \left\|B_K\right\| \left|\det(B_K)\right|^{-1/q} \left\|\Pi_{\hat{K}}^k\right\| \left\{\left\|B_K^{-1}\right\| \left\|B_K\right\|^0 \left|\det(B_K)\right|^{1/q} \left|\boldsymbol{\tau}\right|_{0,p;K} + \right. \\
& \quad \left. \left\|B_K^{-1}\right\| \left\|B_K\right\|^0 \left|\det(B_K)\right|^{1/q} \left|\boldsymbol{\tau}\right|_{1,p;K}\right\} \\
\leq & \hat{C} \left\{\left|\boldsymbol{\tau}\right|_{0,p;K} + h_K \left|\boldsymbol{\tau}\right|_{1,p;K}\right\}
\end{aligned}$$

es decir,

$$\left\|\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0,p;K} \leq \hat{C} \left\{\left|\boldsymbol{\tau}\right|_{0,p;K} + h_K \left|\boldsymbol{\tau}\right|_{1,p;K}\right\} \qquad , \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{1,p}(K)$$

con lo que se obtiene

$$\left\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0,p;K} \leq \tilde{C} \left\{\left\|\boldsymbol{\tau}\right\|_{0,p;K} + h_K \left|\boldsymbol{\tau}\right|_{1,p;K}\right\} \qquad , \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{1,p}(K) \tag{2.13}$$

Observación 2.8

No obstante, si bien (2.13) está correcto, se puede obtener una cota mejor para $\left\|\Pi_{\hat{K}}^k(\hat{\boldsymbol{\tau}})\right\|_{0,p;\hat{K}}$ aplicando la estimación de error de interpolación general a $l = 1$ y $m = 0$, lo cual da

$$\left\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0,p;K} \leq C h_K \left|\boldsymbol{\tau}\right|_{1,p;K} \qquad , \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{1,p}(K)$$

El objetivo siguiente es estimar

$$\left|\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) - \operatorname{div}(\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau}))\right|_{m,p;K}$$

para todo $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{1,p}(K)$ tal que $\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \in \mathrm{W}^{l,p}(K)$, con $1 \leq l \leq k+1$ y $0 \leq m \leq l$, y para ello, recordamos la identidad,

$$\operatorname{div}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) = \left|\det B_K\right| \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \circ T_K = \left|\det B_K\right| \widehat{\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})} \tag{2.14}$$

Luego, usando propiedad de escalamiento para la transformación afín, se obtiene

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})-\mathrm{div}(\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau}))\right|_{m,p;K} \leq& C\left\|B_K^{-1}\right\|^m |\det(B_K)|^{1/p}\left|\widehat{\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})-\mathrm{div}(\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau}))}\right|_{m,p;\hat{K}}\\ =& C\left\|B_K^{-1}\right\|^m |\det(B_K)|^{1/p}\left|\widehat{\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})}-\widehat{\mathrm{div}(\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau}))}\right|_{m,p;\hat{K}}\\ =& C\left\|B_K^{-1}\right\|^m |\det(B_K)|^{1/p}\left|\widehat{\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})}-\mathrm{div}(\widehat{\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})})\right|_{m,p;\hat{K}}\\ =& C\left\|B_K^{-1}\right\|^m |\det(B_K)|^{1/p}\left|\widehat{\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})}-\mathrm{div}(\Pi_{\hat{K}}^k(\hat{\boldsymbol{\tau}}))\right|_{m,p;\hat{K}}\\ =& C\left\|B_K^{-1}\right\|^m |\det(B_K)|^{1/p}\left|\widehat{\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})}-P_{\hat{K}}^k(\mathrm{div}(\hat{\boldsymbol{\tau}}))\right|_{m,p;\hat{K}}\end{aligned}$$

donde $P_{\hat{K}}^k : \mathbf{L}^1(\hat{K}) \to \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(\hat{K})$ es el proyector "ortogonal" con respecto al producto interior de $\mathbf{L}^2(\hat{K})$. Se sigue que

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})-\mathrm{div}(\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau}))\right|_{m,p;K} \leq& C\left\|B_K^{-1}\right\|^m |\det(B_K)|^{-1/q}\left|\widehat{\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})}-P_{\hat{K}}^k(\mathrm{div}(\hat{\boldsymbol{\tau}}))\right|_{m,p;\hat{K}}\\ \leq& \hat{C}\left\|B_K^{-1}\right\|^m |\det(B_K)|^{-1/q}|\mathrm{div}(\hat{\boldsymbol{\tau}})|_{l+1,p;\hat{K}}\\ =& \hat{C}\left\|B_K^{-1}\right\|^m |\det(B_K)|^{-1/q}\left||\det(B_K)|\,\widehat{\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})}\right|_{l+1,p;\hat{K}}\\ =& \hat{C}\left\|B_K^{-1}\right\|^m |\det(B_K)|^{1/p}\left|\widehat{\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})}\right|_{l+1,p;\hat{K}}\\ \leq& \hat{C}\left\|B_K^{-1}\right\|^m |\det(B_K)|^{1/p}\left\|B_K\right\|^{l+1}|\det(B_K)|^{-1/p}|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})|_{l+1,p;K}\end{aligned}$$

y luego,

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})-\mathrm{div}(\Pi_K^k)\right| \leq& \hat{C}\frac{\hat{h}^m}{\rho_K^m}\frac{h_K^{l+1}}{\hat{\rho}^{l+1}}|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})|_{l+1,p;K}\\ =& \tilde{C}h_K^{l+1-m}|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})|_{l+1,p;K}\end{aligned}$$

En resumen,

$$\left|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})-\mathrm{div}(\Pi_K^k)\right| \leq \tilde{C}h_K^{l+1-m}|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})|_{l+1,p;K} \qquad ,\forall\boldsymbol{\tau}\in\mathbf{W}^{1,p}(K) \text{ con } \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\in \mathrm{W}^{l+1,p}(K) \tag{2.15}$$

con $0 \leq l \leq k$ y $0 \leq m \leq l+1$.

Observación 2.9

Alternativamente, usando las propiedades de P_K^k, se sigue

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})-\mathrm{div}(\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau}))\right|_{m,p;K} =& \left|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})-P_K^k(\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}))\right|_{m,p;K}\\ \leq& Ch_K^{l+1-m}|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})|_{l+1,p;K}\end{aligned}$$

para todo $\boldsymbol{\tau}\in\mathbf{W}^{1,p}(K)$ con $\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\in \mathrm{W}^{l+1,p}(K)$, y $0 \leq l \leq k$ y $0 \leq m \leq l+1$. Más aún,

$$\left|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})-\mathrm{div}(\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau}))\right|_{m,p;K} \leq Ch_K^{l-m}|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})|_{l,p;K}$$

para todo $\boldsymbol{\tau}\in\mathbf{W}^{1,p}(K)$ con $\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\in \mathrm{W}^{l+1,p}(K)$, y $0 \leq l \leq k+1$ y $0 \leq m \leq l$.

Finalmente, para el error de $H^p(\mathrm{div}_p; K)$, se tiene

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{\tau}-\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{p,div_p;K} \leq & C\left\{\left\|\boldsymbol{\tau}-\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0,p;K}+\left\|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})-\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0,p;K}\right\} \\ \leq & C\left\{h_k^{l+1}\left|\boldsymbol{\tau}\right|_{l+1,p;K}+h_K^{l+1}\left|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\right|\right\}_{l+1,p;K}\end{aligned}$$

con $0 \leq l \leq k$, para todo $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{l+1,p}(K)$ con $\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \in \mathrm{W}^{l+1,p}(K)$, es decir,

$$\left\|\boldsymbol{\tau}-\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{p,div_p;K} \leq Ch_k^{l+1}\left\{\left|\boldsymbol{\tau}\right|_{l+1,p;K}+\left|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\right|\right\}_{l+1,p;K} \tag{2.16}$$

2.5.2. Error de interpolación global

Aplicando el Teorema 3.2 al contexto $r = 1$, $s = 0$ y $q = 2$, se tiene que $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{cont} \mathbf{L}^2(\Omega)$, si y sólo si

$$1-\frac{n}{p} \geq -\frac{n}{2}$$

esto es

$$p \geq \frac{2n}{n+2}$$

esto es $p \geq 1$ en $\mathbb{R}^2$ y $p \geq 6/5$ en $\mathbb{R}^3$.

Lema 2.5

Supongamos que $p \geq \dfrac{2n}{n+2}$, entonces, existe $c > 0$ independiente de h, tal que que para $1 \leq l \leq k+1$, se tiene

$$\left\|\boldsymbol{\tau}-\Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0;\Omega} \leq Ch^{l-n(2-p)/2p}\left|\boldsymbol{\tau}\right|_{l,p;\Omega} \qquad ,\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{l,p}(\Omega) \tag{2.17}$$

Demostración. Se tiene para cada $K \in \mathcal{T}_h$ y denotando $\hat{}$ la composición con la aplicación afín T_K

$$\left|\boldsymbol{\tau}-\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right|_{0;K} \leq C\left\|B_K^{-1}\right\|^0\left|\det(B_K)\right|\left|\hat{\boldsymbol{\tau}}-\widehat{\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})}\right|_{0;\hat{K}}$$

y utilizando la inyección continua de $\mathbf{W}^{1,p}(\hat{K})$ en $\mathbf{L}^2(\hat{K})$ resulta

$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{\tau}-\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right|_{0;K} \leq & \hat{c}\left|\det(B_K)\right|^{1/2}\left\|\hat{\boldsymbol{\tau}}-\widehat{\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})}\right\|_{1,p;\hat{K}} \\ = & \hat{c}\left|\det(B_K)\right|^{1/2}\left\{\left\|\hat{\boldsymbol{\tau}}-\widehat{\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})}\right\|_{0,p;\hat{K}}+\left|\hat{\boldsymbol{\tau}}-\widehat{\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})}\right|_{1,p;\hat{K}}\right\} \\ \leq & C\left|\det(B_K)\right|^{1/2}\left\{\left\|B_K\right\|^0\left|\det(B_K)\right|^{-1/p}\left|\boldsymbol{\tau}-\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right|_{0,p;K}\right. \\ & \left.+\left\|B_K\right\|^1\left|\det(B_K)\right|^{-1/p}\left|\boldsymbol{\tau}-\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right|_{1,p;K}\right\} \\ = & C\left|\det(B_K)\right|^{-(2-p)/2p}\left\{\left|\boldsymbol{\tau}-\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right|_{0,p;K}+\left\|B_K\right\|\left|\boldsymbol{\tau}-\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right|_{1,p;K}\right\}\end{aligned}$$

Ahora, de las estimaciones locales del error de interpolación, se tiene

$$\left|\boldsymbol{\tau}-\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right|_{0,p;K} \leq Ch_K^l\left|\boldsymbol{\tau}\right|_{l,p;K} \qquad ,\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{l,p}(K)$$

con $1 \leq l \leq k+1$ y $m = 0$. A su vez,

$$\left|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right|_{1,p;K} \leq C h_K^{l-1} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K} \qquad , \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{l,p}(K)$$

con $1 \leq l \leq k+1$ y $m = 1$. Resumiendo, se tiene

$$\left|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right|_{0;K} \leq C \left|\det(B_K)\right|^{-(2-p)/2p} h_K^l |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K} \qquad , \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{l,p}(K)$$

con $1 \leq l \leq k+1$. Por otro lado, sabemos que

$$|\det(B_K)| = \frac{|K|}{\left|\hat{K}\right|} \quad \text{y} \quad |K| = \mathcal{O}(h_K^n)$$

es decir, que existen $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1 h_K^n \leq |K| \leq c_2 h_K^n$$

Luego, resulta

$$\left|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\right|_{0;K} \leq C h_K^{l-n(2-p)/2p} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K} \qquad , \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{1,p}(K)$$

con $1 \leq l \leq k+1$. Ahora, definiendo $m := l - n(2-p)/2p$, tomando el cuadrado en la expresión anterior, y sumando sobre $K \in \mathfrak{T}_h$, resulta

$$\begin{aligned}
\left\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0;\Omega}^2 \leq & C^2 \sum_{K \in \mathfrak{T}_h} h_K^{2m} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K}^2 \\
\leq & C^2 h^{2m} \sum_{K \in \mathfrak{T}_h} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K}^2 \\
= & C^2 h^{2m} \left\{ \left(\sum_{K \in \mathfrak{T}_h} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K}^2 \right)^{p/2} \right\}^{2/p}
\end{aligned}$$

Si $p \in (1,2)$, entonces $p/2 \in (1/2, 1)$, y usamos la propiedad sub-aditiva, la cual establece que

$$\left(\sum_n a_n \right)^r \leq \sum_n a_n^r \qquad , \forall a_n \geq 0, r \in (0,1)$$

con lo que se tiene que

$$\left\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0;\Omega}^2 \leq C^2 h^{2m} \left\{ \sum_{K \in \mathfrak{T}_h} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K}^p \right\}^{2/p} = C^2 h^{2m} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;\Omega}^2$$

y tomando raíz, se tiene que

$$\left\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0;\Omega} \leq C h^m |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;\Omega}$$

con lo que queda probado el Lema. ■

Observación 2.10

Considerando la notación del Lema anterior, con $p > 2$, entonces también se tiene

$$\left\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0;\Omega}^2 \leq C^2 \sum_{K\in\mathfrak{T}_h} h_K^{2m} \left|\boldsymbol{\tau}\right|_{l,p;K}^2$$

Luego, con p, q conjugados de Hölder, se tiene que

$$\left\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0;\Omega}^2 \leq C^2 \left(\sum_{K\in\mathfrak{T}_h} h_K^{2mq}\right)^{1/q} \left(\sum_{K\in\mathfrak{T}_h} \left|\boldsymbol{\tau}\right|_{l,p;K}^{2p}\right)^{1/p}$$

Y usando que

$$\sum_n a_n^2 \leq \left(\sum_n a_n\right)^2 \qquad ,\forall a_n > 0$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0;\Omega}^2 \leq & C^2 \left(\sum_{K\in\mathfrak{T}_h} h_K^{2mq}\right)^{1/q} \left(\sum_{K\in\mathfrak{T}_h} \left|\boldsymbol{\tau}\right|_{l,p;K}^{p}\right)^{2/p} \\
= & C^2 \left(\sum_{K\in\mathfrak{T}_h} h_K^{2mq}\right)^{1/q} \left|\boldsymbol{\tau}\right|_{l,p;\Omega} \\
= & C^2 \left(\sum_{K\in\mathfrak{T}_h} h_K^{2mq-n} h_K^n\right)^{1/q} \left|\boldsymbol{\tau}\right|_{l,p;\Omega} \\
\leq & C^2 h^{2m-n/q} \left(\sum_{K\in\mathfrak{T}_h} h_K^n\right)^{1/q} \left|\boldsymbol{\tau}\right|_{l,p;\Omega}
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\left\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0;\Omega}^2 \leq C^2 h^{2m-n/q} \left|\Omega\right|^{1/q} \left|\boldsymbol{\tau}\right|_{l,p;\Omega}^2$$

de donde

$$\left\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0;\Omega} \leq \tilde{C} h^{m-n/2q} \left|\boldsymbol{\tau}\right|_{l,p;\Omega}$$

Además, se tiene que $m - \dfrac{n}{2q} = l - \dfrac{n}{2p}$, y luego

$$\left\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\right\|_{0;\Omega} \leq \tilde{C} h^{l-n/2p} \left|\boldsymbol{\tau}\right|_{l,p;\Omega} \qquad ,\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathrm{W}^{l,p}(\Omega) \tag{2.18}$$

con $1 \leq l \leq k+1$, $p \geq \dfrac{n}{2l}$ y $p \geq \dfrac{2n}{n+1}$.

2.6. Propiedades adicionales del operador de Raviart-Thomas

Lema 2.6

Sea $t \in]1, \infty[$, $t \neq 2$, y $\delta \in [0, 1]$ tales que

$$\begin{cases} \delta > \frac{1}{t} & \text{si } t \in]1, 2[\\ \delta \geq 0 & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Entonces, existe *hatc* > 0, tal que

$$\left\| \Pi^k_{\hat{K}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) \right\|_{0,t;\hat{K}} \leq \hat{c} \left\{ \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{\delta,t;\hat{K}} + \|\mathrm{div}(\hat{\boldsymbol{\tau}})\|_{0,t;\hat{K}} \right\} \qquad , \forall \hat{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbf{W}^{\delta,t}(\hat{K}) \bigcap \mathrm{H}^t(\mathrm{div}_t; \hat{K}) \tag{2.19}$$

Como consecuencia del lema anterior, se obtienen también las siguientes propiedades de aproximación.

Lema 2.7

Sean t y δ como en el Lema 2.6. Entonces, existe $c > 0$, independiente de h, tal que

$$\left\| \boldsymbol{\tau} - \Pi^k_{\hat{K}}(\boldsymbol{\tau}) \right\|_{0,t;K} \leq \hat{c} \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|_{\delta,t;K} + \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,t;K} \right\} \qquad , \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{\delta,t}(K) \bigcap \mathrm{H}^t(\mathrm{div}_t; K) \tag{2.20}$$

Lema 2.8

Consideremos $t \in]1, \infty[$, $t \neq 2$, y δ tal que

$$\begin{cases} \delta > \dfrac{1}{t} & \text{si } t \in]1, 2[\\ \delta \geq 0 & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Entonces

$$\left\| \Pi^k_h(\hat{\boldsymbol{\tau}}) \right\|_{0,t;\Omega} \leq C \left\{ \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{\delta,t;\hat{K}} + \|\mathrm{div}(\hat{\boldsymbol{\tau}})\|_{0,t;\hat{K}} \right\} \qquad , \forall \hat{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbf{W}^{\delta,t}(\hat{K}) \bigcap \mathrm{H}^t(\mathrm{div}_t; \hat{K}) \tag{2.21}$$

Demostración. Veamos que los momentos están bien definidos para $\hat{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbf{W}^{\delta,t}(\hat{K}) \bigcap \mathrm{H}^t(\mathrm{div}_t; \hat{K})$. En efecto, si se trata de un $\hat{K}$-momento $m_{l,\hat{K}}(\hat{\boldsymbol{\tau}})$, entonces existe $l \in \{1, ..., r_k\}$, con $\left\{ \hat{\psi}_{l,\hat{K}} \right\}_{l=1}^{r_k}$ base de $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{k-1}(\hat{K})$, tal que

$$m_{l,\hat{K}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) := \int_\Omega \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\psi}_{l,\hat{K}}$$

y luego, con t y t' conjugados de Hölder, se sigue

$$\begin{aligned} \left| m_{l,\hat{K}} \right| (\hat{\boldsymbol{\tau}}) &\leq \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{0,t;\hat{K}} \left\| \hat{\psi}_{l,\hat{K}} \right\|_{0,t';\hat{K}} \\ &\leq \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{\delta,t;\hat{K}} \left\| \hat{\psi}_{l,\hat{K}} \right\|_{0,t';\hat{K}} \end{aligned}$$

Supongamos ahora que se tiene un $\hat{F}$-momento, es decir

$$m_{l,\hat{F}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) := \int_{\hat{F}} \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\nu} \hat{\varphi}_{l,\hat{F}}$$

donde $\left\{ \hat{\varphi}_{l,\hat{F}} \right\}_{l=1}^{d_k}$ es base de $P_k(\hat{F})$.

Primero, si $t \in]1,2[$ y $\delta > 1/t$, se tiene que el operador de trazas $\hat{\gamma} : \mathbf{W}^{\delta,t}(\hat{K}) \to \mathbf{W}^{\delta-1/t,t}(\partial\hat{K})$ es continuo. Luego, usando la inyección continua de $\mathbf{W}^{\delta-1/t,t}(\partial\hat{K})$ en $\mathbf{L}^t(\partial\hat{K}) = \mathbf{W}^{0,t}(\partial\hat{K})$, se obtiene

$$\begin{aligned}\left|m_{l,\hat{F}}(\hat{\boldsymbol{\tau}})\right| = \left|\int_{\hat{F}} \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\nu}\hat{\varphi}_{l,\hat{F}}\right| & \\ &\leq \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{0,t;\hat{F}} \left\|\hat{\varphi}_{l,\hat{F}}\right\|_{0,t';\hat{F}} \\ &\leq \left\|\hat{i}\right\| \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{\delta-1/t,t;\partial\hat{K}} \left\|\hat{\varphi}_{l,\hat{F}}\right\|_{0,t';\hat{F}} \\ &\leq \left\|\hat{i}\right\| \|\hat{\varphi}\| \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{\delta,t;\partial\hat{K}} \left\|\hat{\varphi}_{l,\hat{F}}\right\|_{0,t';\hat{F}}\end{aligned}$$

Por otro lado, si $t > 2$ y $\delta \geq 0$, se tiene que $t' \in]1,2[$, y luego es claro que $\hat{\varphi}_{l,\hat{F}} \in \mathbf{W}^{1/t,t'}(\hat{F})$. Más aún, dado que $t' \in]1,2[$, se tiene que la extensión de $\hat{\varphi}_{l,\hat{K}}$ por 0 en $\partial\hat{K}\backslash\hat{F}$, denotada por $\hat{\varphi}^0_{l,\hat{F}}$, pertenece a $\mathbf{W}^{1/t,t'}(\partial\hat{K})$(cf. [6]). Gracias a ello, el $\hat{F}$-momento se redefine

$$m_{l,\hat{F}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) := \int_{\hat{F}} \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\nu}\hat{\varphi}_{l,\hat{F}} = \left\langle \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\nu}, \hat{\varphi}^0_{l,\hat{F}} \right\rangle_{\partial\hat{K}}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es la paridad dual entre $\mathbf{W}^{-1/t,t}(\partial\hat{K})$ y $\mathbf{W}^{1/t,t'}(\partial\hat{K})$. Ahora, por el Teorema de Trazas aplicado a $\mathbf{W}^{1,t'}(\hat{K})$ se deduce que existen $\hat{\boldsymbol{v}}_{l,\hat{F}} \in \mathbf{W}^{1,t'}(\hat{K})$ tal que

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{l,\hat{F}}|_{\partial\hat{K}} = \hat{\varphi}^0_{l,\hat{F}} \quad \text{y} \quad \left\|\hat{\boldsymbol{v}}_{l,\hat{F}}\right\|_{1,t';\hat{K}} \leq \hat{c} \left\|\hat{\varphi}^0_{l,\hat{F}}\right\|_{1/t,t';\partial\hat{K}}$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned}\left|m_{l,\hat{F}}\right| &= \left|\left\langle \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\nu}, \hat{\boldsymbol{v}}_{l,\hat{F}} \right\rangle_{\partial\hat{K}}\right| \\ &= \left|\int_{\Omega} \left\{\hat{\boldsymbol{v}}_{l,\hat{F}} \operatorname{div}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) + \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla\hat{\boldsymbol{v}}_{l,\hat{F}}\right\}\right| \\ &\leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{t,\operatorname{div}_t;\hat{K}} \left\|\hat{\boldsymbol{v}}_{l,\hat{F}}\right\|_{1,t';\hat{K}} \\ &\leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{t,\operatorname{div}_t:\hat{K}} C \left\|\hat{\varphi}^0_{l,\hat{F}}\right\|_{1/t,t;\hat{K}} \\ &= C\left\{\|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{0,t;\hat{K}} + \|\operatorname{div}(\hat{\boldsymbol{\tau}})\|_{0,t;\hat{K}}\right\} \\ &\leq C\left\{\|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{\delta,t;\hat{K}} + \|\operatorname{div}(\hat{\boldsymbol{\tau}})\|_{0,t;\hat{K}}\right\} \qquad ,\forall\delta \geq 0\end{aligned}$$

$\blacksquare$

3. Resultados previos para formulaciones mixtas en espacios de Banach

Dado un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontera Lipschitz continua Γ, tenmemos que el operador de trazas

$$\gamma_0 : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$$

es sobreyectivo, y su restricción

$$\tilde{\gamma_0} := \gamma_0|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)^\perp} : \mathrm{H}_0^1(\Omega)^\perp \to \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$$

es lineal, acotado y biyectivo.

Observación 3.1

El operador $\tilde{\gamma_0}$ es el inverso a derecha del operador γ_0.

Además se tiene que

$$\|\varphi\|_{1/2,\gamma} = \left\|\tilde{\gamma_0}^{-1}(\varphi)\right\|_{1,\Omega} \qquad ,\forall \varphi \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$$

es decir, el operador $\tilde{\gamma_0}$ es una isometría.

A su vez, dado $\tau \in \mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)$ se define $\gamma_\nu(\tau) \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) = \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)'$ como

$$\langle \gamma_\nu(\tau), \varphi \rangle_\Gamma := \int_\Omega \left(\tilde{\gamma_0}^{-1}(\varphi)\,\mathrm{div}(\tau) + \tau \cdot \nabla \tilde{\gamma_0}^{-1}(\varphi) \right) \qquad ,\forall \varphi \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$$

Se prueba que $\gamma_\nu : \mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega) \to \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$ es lineal, acotado y sobreyectivo, con

$$\|\gamma_\nu\| \leq 1$$

$$\|\gamma_\nu(\tau)\|_{-1/2,\Omega} \leq \|\tau\|_{\mathrm{div},\Omega} \qquad ,\forall \tau \in \mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)$$

3.1. Teoremas de inclusión de Sóbolev

Teorema 3.1: Teorema de inclusión de Sovoleb

Dado un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se tiene que

I) $\mathrm{W}^{1,r}(\Omega) \overset{\mathrm{cont}}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \forall q \in [1, r^*]$, con $r^* = \frac{nr}{n-r}$, si $r < n$.

II) $\mathrm{W}^{1,r}(\Omega) \overset{\mathrm{cont}}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \forall q \in [r, \infty[$, si $r = n$.

III) $\mathrm{W}^{1,r}(\Omega) \overset{\mathrm{cont}}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$ si $r > n$.

Teorema 3.2: Teorema de inclusión general de Sóbolev

Dados, $r, s \geq 0$, $p, q \geq 1$ y Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Lipschitz continua se tiene que $\mathrm{W}^{r,p}(\Omega) \overset{\mathrm{cont}}{\hookrightarrow} \mathrm{W}^{s,q}(\Omega)$ si y sólo si $r - \dfrac{n}{p} = s - \dfrac{n}{q}$ y $r \geq s$.

Observación 3.2

Notemos que el Teorema 3.2 también implica que la inclusión de $\mathrm{W}^{r,p}(\Omega)$ en $\mathrm{W}^{s,q}(\Omega)$es continua si y sólo si $r - \dfrac{n}{p} \geq s - \dfrac{n}{q}$ y $r \geq s$, pues en dicho caso existe $\delta > 0$ tal que

$$r - \frac{n}{p} = s + \delta - \frac{n}{q}$$

con lo cual

$$\mathrm{W}^{r,p}(\Omega) \overset{\text{cont}}{\hookrightarrow} \mathrm{W}^{s+\delta,q}(\Omega) \overset{\text{cont}}{\hookrightarrow} \mathrm{W}^{s,q}(\Omega)$$

3.2. Operadores de traza y traza normal en $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ e integración por partes en $\mathrm{H}(\mathrm{div}_q;\Omega)$ y $\mathrm{H}^q(\mathrm{div}_q;\Omega)$

Por el Teorema 3.1, si $r = 2$, se tiene que $\mathrm{W}^{1,r}(\Omega) = \mathrm{H}^1(\Omega)$ y resulta, en $\mathbb{R}^2$, que

$$\mathrm{H}^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad , \forall q \in [1, \infty[$$

lo que significa que $\forall q \in [1, \infty[$ se tiene

$$\|v\|_{0,q;\Omega} \leq \left\| i_q^{(2)} \right\| \|v\|_{1,\Omega} , \qquad , \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$$

y en el caso de $\mathbb{R}^3$, tenemos

$$\mathrm{H}^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad , \forall q \in [1, r^* = 6]$$

lo que significa que $\forall q \in [1, 6]$ tenemos

$$\|v\|_{0,q;\Omega} \leq \left\| i_q^{(3)} \right\| \|v\|_{1,\Omega} , \qquad , \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$$

Ahora, dado $\tau \in L^2(\Omega)$ tal que $\mathrm{div}(\tau) \in L^p(\Omega), p > 1$, nos interesa ver si es posible definir $\gamma_\nu(\tau) \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Si adoptamos la misma definición, podríamos introducir

$$\langle \gamma_\nu(\boldsymbol{\tau}), \varphi \rangle_\Gamma := \int_\Omega \Big(\tilde{\gamma_0}^{-1}(\varphi)\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \tilde{\gamma_0}^{-1}(\varphi) \Big) \qquad , \forall \varphi \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$$

Observamos primero que el segundo término está bien definido pues $\boldsymbol{\tau}, \nabla \tilde{\gamma_0}^{-1}(\varphi) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Sin embargo, para el segundo término por desigualdad de Hölder se tendría

$$\left| \int_\Omega \tilde{\gamma_0}^{-1}(\varphi)\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \right| \leq \left\| \tilde{\gamma_0}^{-1}(\varphi) \right\|_{0,q;\Omega} \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,p;\Omega}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, para lo cual se requiere que $\tilde{\gamma_0}^{-1}(\varphi) \in L^q(\Omega)$. Esta inclusión está garantizada en $\mathbb{R}^2$ para todo $q \geq 1$ y en $\mathbb{R}^3$ para todo $q \in [1, 6]$. Equivalentemente, en $\mathbb{R}^2$ para todo $p \in [1, \infty[$ y en $\mathbb{R}^3$ para todo $p \in [\frac{6}{5}, \infty[$.

Así, suponiendo $p \geq 1$(caso $\mathbb{R}^2$) o $p \geq \frac{6}{5}$(caso $\mathbb{R}^3$), se tiene que para cada $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ con $\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^p(\Omega)$ se define

$$\langle \gamma_\nu(\boldsymbol{\tau}), \varphi \rangle_\Gamma := \int_\Omega \Big(\tilde{\gamma_0}^{-1}(\varphi)\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \tilde{\gamma_0}^{-1}(\varphi) \Big) \qquad , \forall \varphi \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$$

y en tal caso, resulta

$$
\begin{aligned}
|\langle\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau}),\varphi\rangle_\Gamma| &\leq \left\|\tilde{\gamma}_0{}^{-1}(\varphi)\right\|_{0,q;\Omega}\|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,p;\Omega}+\|\boldsymbol{\tau}\|_{0;\Omega}\left|\nabla\tilde{\gamma}_0{}^{-1}(\varphi)\right|_{1;\Omega}\\
&\leq \left\|i_q^{(n)}\right\|\left\|\tilde{\gamma}_0{}^{-1}(\varphi)\right\|_{1;\Omega}\|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,p;\Omega}+\|\boldsymbol{\tau}\|_{0;\Omega}\left|\nabla\tilde{\gamma}_0{}^{-1}(\varphi)\right|_{1;\Omega} \qquad ,\forall\varphi\in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)
\end{aligned}
$$

de donde

$$
|\langle\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau}),\varphi\rangle_\Gamma| \leq \text{máx}\left\{1,\left\|i_q^{(n)}\right\|\right\}\left\{\|\boldsymbol{\tau}\|_{0;\Omega}+\|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,p;\Omega}\right\}\left\|\tilde{\gamma}_0{}^{-1}(\varphi)\right\|_{1;\Omega} \qquad ,\forall\varphi\in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)
$$

lo cual muestra que $\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau})\in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$ y

$$
\|\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau})\|_{-1/2;\Gamma}\leq \text{máx}\left\{1,\left\|i_q^{(n)}\right\|\right\}\left\{\|\boldsymbol{\tau}\|_{0;\Omega}+\|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,p;\Omega}\right\}
$$

Más aún, el igual que en el caso $\mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)$, la definición de $\langle\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau}),\varphi\rangle_\Gamma$ se puede hacer no sólo con $\tilde{\gamma}_0(\varphi)$, sino que con cualquier $v\in \mathrm{H}^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(v)=\varphi$, en tal caso, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3: Fórmula de Integración por partes en $\mathrm{H}(\mathrm{div}_p;\Omega)$

Dado el abierto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, se tiene que

$$
\int_\Omega \boldsymbol{\tau}\cdot\nabla v = -\int_\Omega v\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})+\langle\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau}),\gamma_0(v)\rangle_\Gamma \qquad ,\forall(\boldsymbol{\tau},v)\in \mathrm{H}(\mathrm{div}_p;\Omega)\times \mathrm{H}^1(\Omega)
$$

donde $\mathrm{H}(\mathrm{div}_p;\Omega):=\{\tau\in \mathbf{L}^2(\Omega):\mathrm{div}(\tau)\in L^p(\Omega)\}$.

Definición 3.1: Operador de trazas en $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$

Se define el operador de trazas $\gamma_0:\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)\to \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$, donde $p,q>1$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, el cual es acotado y sobreyectivo, como la definición habitual.

Además se denota $\mathrm{W}^{-1/q,q}(\Gamma):=\mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)'$.

Definición 3.2: Traza normal en $\mathrm{H}^q(\mathrm{div}_q;\Omega)$

Se define el operador de traza normal lineal y acotado $\gamma_\nu:\mathrm{H}^q(\mathrm{div}_q;\Omega)\to \mathrm{W}^{-1/q,q}(\Gamma)$, donde $p,q>1$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tal que $\gamma_\nu(\tau)$ se identifica con $\gamma_0(\tau)\cdot\nu$ cuando $\tau\in \mathrm{W}^{1,q}(\Omega)$.

Observación 3.3

La definición del operador de traza normal induce una formula de integración por partes con $\tau\in \mathrm{H}^q(\mathrm{div}_q;\Omega)$ y $v\in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$.

Para probar que el operador cumple las propiedades enunciadas necesitaremos los siguientes resultados:

Teorema 3.4: Teorema de la Divergencia de Gauss

Dado un abierto acotado Ω con frontera Γ de clase Lipschitz continua. se tiene que

$$
\int_\Omega \mathrm{div}(F)=\int_\Gamma F\cdot\nu \qquad ,\forall F\in[C_0^\infty(\overline{\Omega})]^n
$$

Teorema 3.5

$\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ es denso en $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ con respecto a $\|\cdot\|_{1,p;\Omega}$.

Teorema 3.6

$[\mathcal{C}(\overline{\Omega})]^n$ es denso en $\mathrm{H}^q(\mathrm{div}_q;\Omega)$.

Sean $\boldsymbol{\tau} \in [\mathcal{C}(\overline{\Omega})]^n$ y $v \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$. Se sigue que existe una sucesión $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tal que $\|v - v_k\|_{1,p;\Omega} \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Así, aplicando el Teorema de la Divergencia de Gauss (3.4) a $v_k\boldsymbol{\tau}$ se obtiene

$$\int_\Omega \mathrm{div}(v_k\boldsymbol{\tau}) = \int_\Gamma v_k\boldsymbol{\tau}\cdot\nu$$

es decir,

$$\int_\Omega \{v_k\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau}\cdot\nabla v_k\} = \int_\Gamma v_k\boldsymbol{\tau}\cdot\nu$$

De aquí, tomando limite con k tendiendo a infinito, resulta

$$\int_\Omega \{v\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau}\cdot\nabla v\} = \int_\Gamma v\boldsymbol{\tau}\cdot\nu \qquad ,\forall(\boldsymbol{\tau},v)\in[C^\infty(\Omega)]^n\times \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \tag{3.1}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega v_k\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) - \int_\Omega v\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\right| &= \left|\int_\Omega (v_k - v)\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\right| \\ &\le \|v_k - v\|_{0,p;\Omega}\,\|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,q;\Omega} \\ &\le \|v_k - v\|_{1,p;\Omega}\,\|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,q;\Omega} \xrightarrow{k\to\infty} 0\end{aligned}$$

Análogamente, se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla v - \int_\Omega \boldsymbol{\tau}\cdot\nabla v_k\right| &= \left|\int_\Omega \boldsymbol{\tau}\cdot\nabla(v - v_k)\right| \\ &\le \|\nabla(v - v_k)\|_{0,p;\Omega}\,\|\boldsymbol{\tau}\|_{0,q;\Omega} \\ &\le \|v_k - v\|_{1,p;\Omega}\,\|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,q;\Omega} \xrightarrow{k\to\infty} 0\end{aligned}$$

Finalmente, se sigue que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma \boldsymbol{\tau}\cdot\nu\gamma_0(v_k) - \int_\Gamma \boldsymbol{\tau}\cdot\nu\gamma_0(v)\right| &= \left|\int_\Gamma \boldsymbol{\tau}\cdot\nu\gamma_0(v_k - v)\right| \\ &\le \|\boldsymbol{\tau}\cdot\nu\|_{0,q;\Gamma}\,\|\gamma_0(v_k - v)\|_{0,p;\Gamma} \\ &\le C\,\|\boldsymbol{\tau}\|_{0,q;\Gamma}\,\|\gamma_0(v_k - v)\|_{1/q,p;\Gamma} \qquad (\mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)\hookrightarrow L^p(\Gamma)) \\ &\le C\,\|\boldsymbol{\tau}\|_{0,q;\Omega}\,\|v_k - v\|_{1,p;\Omega} \xrightarrow{k\to\infty} 0\end{aligned}$$

En primera instancia, se tiene la identidad (3.1).

Se sigue de aquí que para todo $v, w \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ tal que $\gamma_0(v) = \gamma_0(w)$, se tiene que

$$\int_\Omega \{v \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla v\} = \int_\Omega \{w \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla w\} \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in [C^\infty(\Omega)]^n \tag{3.2}$$

Ahora, dado $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{H}^q(\operatorname{div}_q; \Omega)$ se tiene que existe $\{\boldsymbol{\tau}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [C^\infty(\Omega)]^n$ tal que $\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_k\|_{q,\operatorname{div}_q;\Omega} \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Así, aplicando (3.1) a $\boldsymbol{\tau}_k \in [C^\infty(\Omega)]^n$ y a $v \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$, se tiene entonces que

$$\int_\Gamma \boldsymbol{\tau}_k \cdot \nu\gamma_0(v) = \int_\Omega \{v \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_k) + \boldsymbol{\tau}_k \cdot \nabla v\} \qquad ,\forall k \in \mathbb{N}$$

Tomando limite con k tendiendo a infinito, de manera análoga a lo hecho anteriormente, se obtiene

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Gamma \boldsymbol{\tau}_k \cdot \nu\gamma_0(v) = \int_\Omega \{v \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla v\}$$

Más aún, si $\{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [C_0^\infty(\overline{\Omega})]^n$ es otra sucesión tal que $\|\boldsymbol{\tau} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_k\|_{q,\operatorname{div}_q;\Omega} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ resulta

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \int_\Gamma \tilde{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \nu\gamma_0(v) &= \int_\Omega \{v \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla v\} \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_\Gamma \boldsymbol{\tau}_k \cdot \nu\gamma_0(v)\end{aligned}$$

es decir, que la igualdad es independiente de la sucesión tomada.

Lo anterior induce la definición de un funcional

$$\begin{aligned}\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau}) : \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \gamma_\nu(\boldsymbol{\tau})(\varphi)\end{aligned}$$

donde

$$\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau})(\varphi) = \gamma_\nu(\boldsymbol{\tau})(\gamma_0(v)) := \int_\Omega \{v \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla v\}$$

donde $v \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ es tal que $\gamma_0(v) = \varphi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$.

Notemos que la definición anterior está bien definido. En efecto, dados $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{H}^q(\operatorname{div}_q; \Omega)$ y $v \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$, podemos definir primero

$$\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau})(\gamma_0(v)) := \lim_{k\to\infty} \int_\Gamma \boldsymbol{\tau}_k \cdot \nu\gamma_0(v)$$

donde $\{\boldsymbol{\tau}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [C^\infty(\Omega)]^n$ es tal que $\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_k\|_{q,\operatorname{div}_q;\Omega} \xrightarrow{k\to\infty} 0$. En otras palabras se define

$$\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau})(\varphi) := \int_\Omega \{v \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla v\}$$

Veamos que $\gamma_\nu(\tau)$ así definido es lineal y acotado. En efecto, dado $\phi, \varphi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, existen $v, w \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ tal que $\gamma_0(v) = \phi$ y $\gamma_0(w) = \varphi$, se sigue que

$$\gamma_0(\alpha v + \beta w) = \alpha\gamma_0(v) + \beta\gamma_0(w) = \alpha\phi + \beta\varphi$$

por la linealidad del operador de trazas y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau})(\alpha\phi + \beta\varphi) =& \int_\Omega \{(\alpha v + \beta w)\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau}\cdot\nabla(\alpha v + \beta w)\} \\
=&\alpha \int_\Omega \{v \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau}\cdot\nabla v\} + \beta \int_\Omega \{w \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau}\cdot\nabla w\} \\
=&\alpha\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau})(\phi) + \beta\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau})(\varphi)
\end{aligned}$$

lo cual prueba la linealidad del operador $\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau})$.

A su vez, usando que $\gamma_0 : \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$ es sobreyectivo, el Lema 1.2 nos garantiza la existencia de $c_p > 0$ tal que para todo $\varphi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$, existe $v_\varphi \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ tal que $\gamma_0(v_\varphi) = \varphi$ y

$$\|v_\varphi\|_{1,p;\Omega} \leq c_p \|\varphi\|_{1/q,p;\Gamma}$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau})(\varphi)| =& \left|\int_\Omega \{v_\varphi \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau}\cdot\nabla v_\varphi\}\right| \\
\leq& \|v_\varphi\|_{0,q;\Omega} \|\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,q;\Omega} + \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,q;\Omega} \|\nabla v_\varphi\|_{0,p;\Omega} \qquad \text{(Desigualdad de Hölder)} \\
\leq& \|v_\varphi\|_{1,p;\Omega} \|\boldsymbol{\tau}\|_{q,\operatorname{div}_p;\Omega} \\
\leq& c_p \|\boldsymbol{\tau}\|_{q,\operatorname{div}_q;\Omega} \|\varphi\|_{1/q,p;\Gamma} \qquad ,\forall\varphi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)
\end{aligned}$$

de donde $\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau}) \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)' = \mathrm{W}^{-1/q,q}(\Gamma)$ y

$$\|\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau})\|_{-1/q,q;\Gamma} \leq c_p \|\boldsymbol{\tau}\|_{q,\operatorname{div}_q;\Omega}$$

con lo que tenemos que

Teorema 3.7

El operador $\gamma_\nu : \mathrm{H}^q(\operatorname{div}_q;\Omega) \to \mathrm{W}^{-1/q,q}(\Gamma)$ es un operador lineal y acotado, definido como

$$\langle\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau}),\varphi\rangle_\Gamma := \int_\Omega \{v \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau}\cdot\nabla v\} \qquad ,\forall\varphi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$$

con $v \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ tal que $\gamma_0(v) = \varphi$.

con el operador definido antes se tiene la siguiente integración por partes

Teorema 3.8: Fórmula de Integración por partes en $\mathrm{H}^q(\operatorname{div}_q;\Omega)$

Dado el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\tau}\cdot\nabla v = -\int_\Omega v \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \langle\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau}),\gamma_0(v)\rangle_\Gamma \qquad ,\forall(\boldsymbol{\tau},v) \in \mathrm{H}^q(\operatorname{div}_q;\Omega)\times\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$$

Observación 3.4

En el caso particular en que $\boldsymbol{\tau} \in [\mathrm{W}^{1,q}(\Omega)]^n$, se tiene que

$$\gamma_\nu(\boldsymbol{\tau}) = \int_\Gamma \gamma_0(\boldsymbol{\tau}) \cdot \nu\varphi \qquad \forall\varphi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$$

Observación 3.5

Notar que si $\boldsymbol{\tau} \in [\mathrm{W}^{1,q}(\Omega)]^n$ entonces $\gamma_0(\boldsymbol{\tau}) \in \mathrm{W}^{1/p,q}(\Gamma)$

3.3. Extensiones y restricciones en la frontera

Sea Ω un abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Lipchitz continua $\Gamma := \overline{\Gamma}_\mathrm{D} \cup \overline{\Gamma}_\mathrm{N}$, con $\Gamma_\mathrm{D} \cap \Gamma_\mathrm{N} = \emptyset$.

Definición 3.3: Espacios $\mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_*)$

Se definen los espacios de restricción en la frontera como:

$$\mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_*) := \left\{\gamma_0(w)|_{\Gamma_*}, w \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)\right\} \qquad , * \in \{\mathrm{D}, \mathrm{N}\}$$

o equivalentemente,

$$\mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_*) := \left\{\varphi|_{\Gamma_*} : \varphi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)\right\} \qquad , * \in \{\mathrm{D}, \mathrm{N}\}$$

el cual es Banach con la norma

$$\|\varphi\|_{1/q,p;\Gamma_*} := \text{ínf}\left\{\|w\|_{1,p;\Omega} : w \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \ \textit{tal que} \ \gamma_0(w)\Big|_{\Gamma_*} = \varphi\right\} \qquad , \forall\varphi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_*), * \in \{\mathrm{D}, \mathrm{N}\}$$

A su vez se definen los operadores de extensión por cero como sigue

Definición 3.4: Operadores extensión por cero

Se define el operador de extensión por cero como

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{E}_{*,0} : \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_*) & \to & L^p(\Gamma) \\ \varphi & \mapsto & \mathrm{E}_{*,0}(\varphi) = \begin{cases} \varphi & , \ en \ \Gamma_* \\ 0 & , \ en \ \Gamma \backslash \overline{\Gamma}_* \end{cases} \end{array} \qquad , * \in \{\mathrm{D}, \mathrm{N}\}$$

Observación 3.6

El operador $\mathrm{E}_{*,0}$ anteriormente definido es lineal.

El operador anterior induce la definición del siguiente espacio.

Definición 3.5: Espacios $\mathrm{W}^{1/q,p}_{00}(\Gamma_*)$

Se define el espacio

$$\mathrm{W}^{1/q,p}_{00}(\Gamma_*) := \left\{\varphi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_*) : \mathrm{E}_{*,0}(\varphi) \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)\right\} \qquad , * \in \{\mathrm{D}, \mathrm{N}\}$$

provisto de la norma

$$\|\varphi\|_{1/q,p,00,\Gamma_*} := \|\mathrm{E}_{*,0}(\varphi)\|_{1/q,p;\Gamma} \qquad ,\forall\varphi\in \mathrm{W}^{1/q,p}_{00}(\Gamma_*), *\in\{\mathrm{D},\mathrm{N}\}$$

Ahora, dado $\lambda\in \mathrm{W}^{-1/q,p}(\Gamma)$, se define la restricción a Γ_* como

$$\lambda\Big|_{\Gamma_*}(\varphi) = \langle\lambda, \mathrm{E}_{*,0}(\varphi)\rangle_\Gamma \qquad ,\forall\varphi\in \mathrm{W}^{1/q,p}_{00}(\Gamma_{\Gamma_*}), *\in\{\mathrm{D},\mathrm{N}\}$$

Es claro que $\lambda\Big|_{\Gamma_*}$ es lineal, puesto que λ y $\mathrm{E}_{*,0}$ lo son. Además,

$$\begin{aligned}\left|\lambda\Big|_{\Gamma_*}(\varphi)\right| &= \left|\langle\lambda, \mathrm{E}_{*,0}(\varphi)\rangle_\Gamma\right| \\ &\leq \|\lambda\|_{-1/q,p;\Gamma}\,\|\mathrm{E}_{*,0}(\varphi)\|_{1/q,p;\Gamma} \\ &= \|\lambda\|_{-1/q,p;\Gamma}\,\|\varphi\|_{1/q,p,00,\Gamma_*}\end{aligned}$$

lo cual prueba que $\lambda\Big|_{\Gamma_*}\in[\mathrm{W}^{1/q,p}_{00}(\Gamma_*)]' := \mathrm{W}^{-1/q,q}_{00}(\Gamma_*)$ y

$$\left\|\lambda\Big|_{\Gamma_*}\right\|_{-1/q,q,00;\Gamma_*} \leq \|\lambda\|_{-1/q,q;\Gamma} \qquad ,*\in\{\mathrm{D},\mathrm{N}\}$$

Observación 3.7

De aquí en adelante denotaremos

$$\lambda\Big|_{\Gamma_*}(\varphi) = \left\langle \lambda\Big|_{\Gamma_*}, \varphi\right\rangle_{\Gamma_*} \qquad ,\forall\varphi\in \mathrm{W}^{1/q,p}_{00}(\Gamma_*), *\in\{\mathrm{D},\mathrm{N}\}$$

El siguiente objetivo es definir un operación de extensión $\mathrm{E}_* : \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_*)\to \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$, tal que sea **estable**, es decir, la existencia de una constante $C>0$ tal que

$$\|\mathrm{E}_*(\varphi)\|_{1/q,p;\Gamma} \leq C\,\|\varphi\|_{1/q,p;\Gamma_*} \qquad \forall\varphi\in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_*), *\in\{\mathrm{D},\mathrm{N}\}$$

Observación 3.8

El concepto de estabilidad de un operador es el acotamiento para operadores no necesariamente lineales.

Para este efecto, dado $\varphi\in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$ tomamos, sin perdida de generalidad, $*=\mathrm{D}$, consideramos el Problema de valores de contorno no lineal

$$\begin{aligned} &\textit{Hallar } z_\varphi\in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \textit{ tal que:} \\ -\operatorname{div}(|\nabla z_\varphi|^{p-2}\,\nabla z_\varphi) &= 0 \quad , \textit{ en } \Omega \\ \gamma_0(z_\varphi) &= \varphi \quad , \textit{ en } \Gamma_\mathrm{D} \\ \gamma_\nu(|\nabla z_\varphi|^{p-2}\,\nabla z_\varphi) &= 0 \quad , \textit{ en } \Gamma_\mathrm{N}\end{aligned} \tag{P_{aux}}$$

Observación 3.9

Suponemos que $p\geq 2$, pero el resultado a demostrar puede extenderse a $p>1$.

Observación 3.10

Notemos que si $z_\varphi \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$, entonces se tiene que

$$\int_\Omega \left| |\nabla z_\varphi|^{p-2} \nabla z_\varphi \right|^q = \int_\Omega |\nabla z_\varphi|^{(p-1)q} = \int_\Omega |\nabla z_\varphi|^p < +\infty$$

lo anterior, puesto que si p y q son conjugados de Hölder, entonces $p = (p-1)q$. Y por lo tanto, entonces $|\nabla z_\varphi|^{p-2} \nabla z_\varphi \in \mathrm{H}^q(\mathrm{div}_q; \Omega)$.

Observación 3.11

Será útil en resultados posteriores el resultado:

$$v \in \mathbf{L}^p(\Omega) \to |v|^{p-2} v \in \mathbf{L}^q(\Omega)$$

con $p > 1$ y q su conjugado de Hölder.

Así, multiplicando la primera ecuación por $v \in \mathrm{W}^{1,p}_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega) := \left\{ v \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) : \gamma_o(v)\Big|_{\Gamma_\mathrm{D}} = 0 \right\}$ y aplicando la Formula de Integración por partes respectiva(Teorema (3.8)) a dicho v y $|\nabla z_\varphi|^{p-2} \nabla z_\varphi \in \mathrm{H}^q(\mathrm{div}_q; \Omega)$, se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_\Omega v \,\mathrm{div}(|\nabla z_\varphi|^{p-2} \nabla z_\varphi) \\ &= \int_\Omega |\nabla z_\varphi|^{p-2} \nabla z_\varphi \cdot \nabla v - \left\langle \gamma_\nu(|\nabla z_\varphi|^{p-2} \nabla z_\varphi), \gamma_o(v) \right\rangle_\Gamma \end{aligned}$$

Puesto que, $\gamma_0(v) = 0$ en Γ_D, se tiene,

$$\mathrm{E}_{\mathrm{N},0}\left(\gamma_0(v)\Big|_{\Gamma_\mathrm{N}} \right) = \gamma_0(v)$$

y luego, de la condición de contorno Neumann homogénea de (P_{aux}), se sigue

$$\begin{aligned} \left\langle \gamma_\nu(|\nabla z_\varphi|^{p-2} \nabla z_\varphi), \gamma_o(v) \right\rangle_\Gamma &= \left\langle \gamma_\nu(|\nabla z_\varphi|^{p-2} \nabla z_\varphi), \mathrm{E}_{\mathrm{N},0}\left(\gamma_0(v)\Big|_{\Gamma_\mathrm{N}} \right) \right\rangle_\Gamma \\ &= \left\langle \gamma_\nu(|\nabla z_\varphi|^{p-2} \nabla z_\varphi)\Big|_{\Gamma_\mathrm{N}}, \gamma_0(v)\Big|_{\Gamma_\mathrm{N}} \right\rangle_{\Gamma_\mathrm{N}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así, la formulación variacional de nuestro problema se reduce a

$$\begin{aligned} &\textit{Hallar } z_\varphi \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \textit{ tal que } \gamma_0(z_\varphi) = \varphi \textit{ y:} \\ &\int_\Omega |\nabla z_\varphi|^{p-2} \nabla z_\varphi \cdot \nabla v = 0 \qquad , \forall v \in \mathrm{W}^{1,p}_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega) \end{aligned} \tag{FV_{aux}}$$

Puesto que, $\gamma_0 : \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_\mathrm{D})$ es también lineal, acotado y sobreyectivo, aplicando el lema (1.2), se deduce que $\exists c > 0$ y para $\varphi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_\mathrm{D})$ existe $w_\varphi \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ tal que $\gamma_0(w_\varphi)\Big|_{\Gamma_\mathrm{D}} = \varphi$ y

$$\|w_\varphi\|_{1,p;\Omega} \leq c \, \|\varphi\|_{1/q,p;\Gamma_\mathrm{D}}$$

Luego, definiendo la nueva incógnita $\tilde{z}_\varphi := z_\varphi - w_\varphi \in \mathrm{W}^{1,p}_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega)$, nuestro problema ($FV_{\mathrm{aux}}$) lo podemos reescribir como

$$\begin{aligned}&\textit{Hallar } \tilde{z}_\varphi \in \mathrm{W}^{1,p}_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega) \textit{ tal que:}\\ &\int_\Omega |\nabla(\tilde{z}_\varphi + w_\varphi)|^{p-2}\,\nabla(\tilde{z}_\varphi + w_\varphi)\cdot\nabla v = 0 \qquad ,\forall v \in \mathrm{W}^{1,p}_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega)\end{aligned} \tag{FV_{aux}}$$

Definimos así el siguiente operador

$$\begin{aligned} T_{w_\varphi} : \mathrm{W}^{1,p}_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega) &\longrightarrow \mathrm{W}^{1,p}_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega)' \\ z &\longmapsto T_{w_\varphi}(z) \end{aligned}$$

Donde,

$$\left[T_{w_\varphi}(z), v\right] := \int_\Omega |\nabla(z + w_\varphi)|^{p-2}\,\nabla(z + w_\varphi)\cdot\nabla v \qquad ,v \in \mathrm{W}^{1,p}_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega)$$

Se demuestra que T_{w_φ} es Lipchitz continuo y fuertemente monónoto(ver [7]), esto último quiere decir que, $\exists \alpha > 0$ tal que:

$$\alpha\,\|z - \tilde{z}\|^p_{1,p;\Omega} \leq \left[T_{w_\varphi}(z) - T_{w_\varphi}(\tilde{z}), z - \tilde{z}\right] \qquad ,\forall z, \tilde{z} \in \mathrm{W}^{1,p}_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega)$$

y bajo estos hechos T_{w_φ} resulta biyectivo(ver [8]).

Observación 3.12

El concepto de un operador fuertemente monótono generaliza el concepto de elipticidad en operadores no lineales.

Así, aplicando este resultado al funcional nulo en $\mathrm{W}^{1,p}_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega)'$, se deduce que existe un único $\tilde{z}_\varphi \in \mathrm{W}^{1,p}_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega)$ solución de (FV_{aux}), y por lo tanto, $z_\varphi := \tilde{z}_\varphi + w_\varphi$ es solución de (P_{aux}).

Aplicando la monotonía fuerte a $\tilde{z}_\varphi$ y θ resulta

$$\begin{aligned}\alpha\,\|\tilde{\tau}_\varphi\|^p_{1,p;\Omega} &\leq \left[T_{w_\varphi}(\tilde{z}_\varphi) - T_{w_\varphi}(\theta), \tilde{z}_\varphi\right]\\ &= -\left[T_{w_\varphi}(\theta), \tilde{z}_\varphi\right]\\ &= -\int_\Omega |\nabla w_\varphi|^{p-2}\,\nabla w_\varphi\cdot\nabla\tilde{z}_\varphi \leq \left(\int_\Omega |\nabla w_\varphi|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\|\nabla\tilde{z}_\varphi\|_{0,p;\Omega} \qquad \text{(Desigualdad de Hölder)}\\ &= \|\nabla w_\varphi\|^{p/q}_{0,p;\Omega}\,\|\nabla\tilde{z}_\varphi\|_{0,p;\Omega}\\ &= \|\nabla w_\varphi\|^{p-1}_{0,p;\Omega}\,\|\nabla\tilde{z}_\varphi\|_{0,p;\Omega}\\ &= \|\nabla w_\varphi\|^{p-1}_{1,p;\Omega}\,\|\tilde{z}_\varphi\|_{1,p;\Omega}\end{aligned}$$

de donde

$$\alpha\,\|\tilde{z}_\varphi\|^{p-1}_{1,p;\Omega} \leq \|w_\varphi\|^{p-1}_{1,p;\Omega}$$

o bien

$$\|\tilde{z}_\varphi\|^{p-1}_{1,p;\Omega} \leq \frac{1}{\alpha^{p-1}}\,\|w_\varphi\|_{1,p;\Omega}$$

y por lo tanto, existe $\tilde{C} > 0$ tal que:

$$\|\tilde{z}_\varphi\|^{p-1}_{1,p;\Omega} \leq \tilde{C}\,\|w_\varphi\|_{1,p;\Gamma_\mathrm{D}}$$

Finalmente, definiendo

$$\begin{aligned} \mathrm{E_D} : \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_\mathrm{D}) &\longrightarrow \mathrm{W}^{1/p,q}(\Gamma) \\ \varphi &\longmapsto \mathrm{E_D}(\varphi) := \gamma_o(z_\varphi) = \gamma_0(\tilde{z}_\varphi + w_\varphi) \end{aligned}$$

se tiene $\mathrm{E_D}\left(\varphi\right)\Big|_{\Gamma_\mathrm{D}} = \varphi$ y

$$\begin{aligned} \|\mathrm{E_D}(\varphi)\|_{1/q,p;\Gamma} &= \|\gamma_0(z_\varphi)\|_{1/q,p,\Gamma} \\ &\leq \|\gamma_0\| \, \|z_\varphi\|_{1,p;\Omega} \\ &= \|\gamma_0\| \, \|\tilde{z}_\varphi + w_\varphi\|_{1,p;\Omega} \\ &\leq \|\gamma_0\| \left\{ \|\tilde{z}_\varphi\|_{1,p;\Omega} + \|w_\varphi\|_{1,p;\Omega} \right\} \\ &\leq \hat{C} \, \|\varphi\|_{1/q,p;\Omega} \end{aligned}$$

Lema 3.1: Descomposición de $\mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$

Para cada $\phi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$, existen únicos $\phi_\mathrm{D} \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_\mathrm{D})$ y $\phi_\mathrm{N} \in \mathrm{W}^{1/q,p}_{00}(\Gamma_\mathbb{N})$ tal que

$$\phi = \mathrm{E_D}(\phi_\mathrm{D}) + \mathrm{E_{N,0}}(\phi_\mathrm{N})$$

es decir,

$$\mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma) = \mathrm{E_D}\left(\mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_\mathrm{D})\right) \oplus \mathrm{E_{N,0}}\left(\mathrm{W}^{1/q,p}_{00}(\Gamma_\mathrm{D})\right)$$

Demostración. Dado $\phi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$, definimos $\phi_\mathrm{D} := \phi\Big|_{\Gamma_\mathrm{D}}$ y $\phi_\mathrm{N} := (\phi - \mathrm{E_D}\left(\phi_\mathrm{D}\right))\Big|_{\Gamma_\mathrm{N}}$.
Es claro que $\phi - \mathrm{E_D}\left(\phi_\mathrm{D}\right) \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$, y por lo tanto, $\phi_N b \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_\mathrm{N})$. Pero además,

$$\phi - \mathrm{E_D}\left(\phi_\mathrm{D}\right) = 0 \qquad \text{, en } \Gamma_\mathrm{D}$$

y por lo tanto,

$$\mathrm{E_{N,0}}\left(\phi_\mathrm{N}\right) = \mathrm{E_{N,0}}\left(\left(\phi - \mathrm{E_D}\left(\phi_\mathrm{D}\right)\right)\Big|_{\Gamma_\mathrm{N}}\right) = \phi - \mathrm{E_D}\left(\phi_\mathrm{D}\right) \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$$

con lo cual $\phi_\mathrm{N} \in \mathrm{W}^{1/q,p}_{00}(\Gamma_\mathrm{N})$, y así,

$$\phi = \mathrm{E_D}(\phi_\mathrm{D}) + \mathrm{E_{N,0}}(\phi_\mathrm{N})$$

con $\phi_\mathrm{D} \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_\mathrm{D})$ y $\phi_\mathrm{N} \in \mathrm{W}^{1/q,p}_{00}(\Gamma_\mathrm{N})$.
Para la unicidad, sean $\tilde{\phi}_\mathrm{D} \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_\mathrm{D})$ y $\tilde{\phi}_\mathrm{N} \in \mathrm{W}^{1/q,p}_{00}(\Gamma_\mathrm{N})$ tal que

$$\phi = \mathrm{E_D}(\phi_\mathrm{D}) + \mathrm{E_{N,0}}(\phi_\mathrm{N}) = \mathrm{E_D}(\tilde{\phi}_\mathrm{D}) + \mathrm{E_{N,0}}(\tilde{\phi}_\mathrm{N})$$

Se sigue entonces que

$$\phi\Big|_{\Gamma_\mathrm{D}} = \phi_\mathrm{D} = \tilde{\phi}_\mathrm{D}$$

de donde $\phi_\mathrm{D} = \tilde{\phi}_\mathrm{D}$ y por lo tanto,

$$\mathrm{E_{N,0}}(\phi_\mathrm{N}) = \mathrm{E_{N,0}}(\tilde{\phi}_\mathrm{N})$$

Así, restringiendo a Γ_N, resulta $\phi_\mathrm{N} = \tilde{\phi}_\mathrm{N}$. Y por lo tanto la descomposición es única. ■

Ahora, dados $\lambda \in \mathrm{W}^{-1/q,q}(\Gamma)$ y $\phi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \lambda, \phi \rangle &= \langle \lambda, \mathrm{E_D}(\phi_\mathrm{D}) + \mathrm{E_{N,0}}(\phi_\mathrm{N}) \rangle_\Gamma \\ &= \langle \lambda, \mathrm{E_D}(\phi_\mathrm{D}) \rangle_\Gamma + \langle \lambda, \mathrm{E_{N,0}}(\phi_\mathrm{N}) \rangle_\Gamma\end{aligned}$$

con $\phi_\mathrm{D} = \phi\Big|_{\Gamma_\mathrm{D}} \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_\mathrm{D})$ y $\phi_\mathrm{N} = (\phi - \mathrm{E_D}(\phi_\mathrm{D}))\Big|_{\Gamma_\mathrm{N}} \in \mathrm{W}_{00}^{1/q,p}(\Gamma_\mathrm{N})$.
Lo anterior induce definir los funcionales

$$\begin{aligned}\lambda_\mathrm{D} : \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_\mathrm{D}) : \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \varphi \quad &\longmapsto \quad \lambda_\mathrm{D}(\varphi) := \langle \lambda, \mathrm{E_D}(\varphi) \rangle_\Gamma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_\mathrm{N} : \mathrm{W}_{00}^{1/q,p}(\Gamma_\mathrm{N}) : \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \psi \quad &\longmapsto \quad \lambda_\mathrm{N}(\psi) := \langle \lambda, \mathrm{E_{N,0}}(\psi) \rangle_\Gamma\end{aligned}$$

Puesto que $\mathrm{E_{N,0}}$ y λ son lineales, se tiene que λ_N también lo es. Además,

$$\begin{aligned}|\lambda_\mathrm{N}(\psi)| &= |\langle \lambda, \mathrm{E_{N,0}}(\psi) \rangle|_\Gamma \\ &\leq \|\lambda\|_{-1/q,q;\Gamma} \|\mathrm{E_{N,0}}(\psi)\|_{1/q,p;\Gamma} \\ &= \|\lambda\|_{-1/q,q;\Gamma} \|\psi\|_{1/q,p,00;\Gamma_\mathrm{N}} \qquad , \forall \psi \in \mathrm{W}_{00}^{1/q,p}(\Gamma_\mathrm{N})\end{aligned}$$

lo cual dice que $\lambda_\mathrm{N} \in \mathrm{W}_{00}^{-1/q,q}(\Gamma_\mathrm{N})$ y $\|\lambda_\mathrm{N}\|_{-1/q,q,00;\Gamma_\mathrm{N}} \leq \|\lambda\|_{-1/q,q;\Gamma}$.
A su vez, en general λ_D no es lineal porque $\mathrm{E_D}$ no lo es, sin embargo, λ_D verifica el acotamiento

$$\begin{aligned}|\lambda_\mathrm{D}(\varphi)| &= |\langle \lambda, \mathrm{E_D}(\varphi) \rangle|_\Gamma \\ &\leq \|\lambda\|_{-1/q,q;\Gamma} \|\mathrm{E_D}(\varphi)\|_{1/q,p;\Gamma} \\ &\leq \tilde{C} \|\lambda\|_{-1/q,q;\Gamma} \|\varphi\|_{1/q,p;\Gamma_\mathrm{D}} \qquad , \forall \varphi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_\mathrm{D})\end{aligned}$$

Observación 3.13

En el caso particular en que $\lambda\Big|_{\Gamma_\mathrm{N}} \equiv \lambda_\mathrm{N} \equiv \theta$, entonces λ_D es lineal, y la desigualdad dice que $\lambda_\mathrm{D} \in \mathrm{W}^{-1/q,q}(\Gamma_\mathrm{D})$.
En efecto, supongamos que $\lambda_\mathrm{N} = \lambda\Big|_{\Gamma_\mathrm{N}} \equiv \theta$, y sean $\varphi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_\mathrm{D})$ y $\phi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$ tal que $\phi\Big|_{\Gamma_\mathrm{D}} = \varphi$. Se sigue que

$$\begin{aligned}\lambda_\mathrm{D}(\varphi) &= \langle \lambda, \mathrm{E_D}(\varphi) \rangle_\Gamma \\ &= \left\langle \lambda, \mathrm{E_D}(\phi\Big|_{\Gamma_\mathrm{D}}) \right\rangle_\Gamma \\ &= \langle \lambda, \phi \rangle_\Gamma - \langle \lambda, \mathrm{E_{N,0}}(\phi_\mathrm{N}) \rangle_\Gamma \\ &= \langle \lambda, \phi \rangle_\Gamma - \left\langle \lambda\Big|_{\Gamma_\mathrm{N}}, \phi_\mathrm{N} \right\rangle_{\Gamma_\mathrm{N}} \\ &= \langle \lambda, \phi \rangle_\Gamma\end{aligned}$$

es decir,

$$\lambda_\mathrm{D}(\varphi) = \langle \lambda, \phi \rangle_\Gamma \qquad , \forall \varphi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_\mathrm{D})$$

donde $\phi \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$ es tal que $\phi\Big|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} = \varphi$. Así, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \varphi, \tilde{\varphi} \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_{\mathrm{D}})$ y $\phi, \tilde{\phi} \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma)$ tal que $\phi\Big|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} = \varphi$ y $\tilde{\phi}\Big|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} = \tilde{\varphi}$, se tiene que

$$\left(\alpha\phi + \beta\tilde{\phi}\right)\Big|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} = \alpha\varphi + \beta\tilde{\varphi}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{D}}(\alpha\phi + \beta\tilde{\phi}) =& \left\langle \lambda, \alpha\phi + \beta\tilde{\phi} \right\rangle_{\Gamma} \\ =& \alpha \left\langle \lambda, \phi \right\rangle_{\Gamma} + \beta \left\langle \lambda, \tilde{\phi} \right\rangle \\ =& \alpha\lambda_{\mathrm{D}}(\varphi) + \beta\lambda_{\mathrm{D}}(\tilde{\varphi})\end{aligned}$$

y así λ_{D} es lineal, y por lo tanto $\lambda_{\mathrm{D}} \in \mathrm{W}^{-1/q,q}(\Gamma_{\mathrm{D}})$

Luego, dado $\phi \in \mathrm{W}_{00}^{1/q,p}(\Gamma_{\mathrm{D}})$ se tiene que,

$$\begin{aligned}\left\langle \lambda\Big|_{\Gamma_{\mathrm{D}}}, \varphi \right\rangle_{\Gamma_{\mathrm{D}}} &= \left\langle \lambda, \mathrm{E}_{\mathrm{D},0}(\varphi) \right\rangle_{\Gamma} \\ &= \left\langle \lambda_{\mathrm{D}}, \mathrm{E}_{\mathrm{D},0}(\varphi)\Big|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} \right\rangle_{\Gamma_{\mathrm{D}}} \\ &= \left\langle \lambda_{\mathrm{D}}, \varphi \right\rangle_{\Gamma_{\mathrm{D}}}\end{aligned}$$

De donde, $\lambda\Big|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} = \lambda_{\mathrm{D}} \in \mathrm{W}^{-1/q,q}(\Gamma_{\mathrm{D}})$. Además, dado que $\mathrm{W}_{00}^{1/q,p}(\Gamma_{\mathrm{D}}) \subset \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_{\mathrm{D}})$, entonces, $\mathrm{W}^{-1/q,q}(\Gamma_{\mathrm{D}}) \subset \mathrm{W}_{00}^{-1/q,q}(\Gamma_{\mathrm{D}})$, lo cual da más precisión en la ubicación de λ_{D}.

4. Problema para Flujos de Navier-Stokes-Brinkman acoplados con Convección Natural[2]

4.1. Formulación mixta-primal

El problema a considerar, bajo los supuestos de [3], está dado por

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t} + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}) &= \nabla \boldsymbol{u} && \text{en} \quad \Omega, && (4.1a)\\
\alpha\,\mu(\theta)\,\boldsymbol{t} - (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})^{\mathrm{d}} &= \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} && \text{en} \quad \Omega, && (4.1b)\\
\eta(\theta)\,\boldsymbol{u} - \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} &= f(\theta)\boldsymbol{k} && \text{en} \quad \Omega, && (4.1c)\\
-\rho\,\mathrm{div}(\kappa\nabla\theta) + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta + \boldsymbol{u}\cdot\nabla s(\theta) &= 0 && \text{en} \quad \Omega, && (4.1d)\\
\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} && \text{on} \quad \Gamma, && (4.1e)\\
\theta &= \theta_{\mathrm{D}} && \text{on} \quad \Gamma, && (4.1f)\\
\int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) &= 0 && && (4.1g)
\end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación (4.1d) por $\psi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ e integrando, se obtiene

$$-\rho\int_\Omega \psi\,\mathrm{div}(\kappa\nabla\theta) + \int_\Omega \psi\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\theta + s(\theta)) = 0 \qquad ,\forall\psi\in\mathrm{H}^1(\Omega)$$

o bien, integrando por partes

$$\rho\int_\Omega \kappa\nabla\theta\cdot\nabla\psi - \rho\,\langle\kappa\nabla\theta\cdot\nu,\psi\rangle_\Gamma + \int_\Omega \psi\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\theta + s(\theta)) = 0 \qquad ,\forall\psi\in\mathrm{H}^1(\Omega)$$

Observación 4.1

Notar que si se tuviese condiciones de contorno de Neumann para el problema 4.1, está debería ser

$$\kappa\nabla\theta\cdot\nu = g_N \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$$

Introduciendo $\lambda := -\rho\kappa\nabla\theta\cdot\nu \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$ como incógnita, nos queda

$$\rho\int_\Omega \kappa\nabla\theta\cdot\nabla\psi + \langle\lambda,\psi\rangle_\Gamma + \int_\Omega \psi\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\theta + s(\theta)) = 0 \qquad ,\forall\psi\in\mathrm{H}^1(\Omega) \tag{4.2}$$

Observación 4.2

Al introducir la incógnita auxiliar λ la condición de Dirichlet pasa a ser una condición esencial.

A su vez, la condición de Dirichlet (4.1f) se impone debilmente como sigue

$$\langle\xi,\theta\rangle_\Gamma = \langle\xi,\theta_{\mathrm{D}}\rangle \qquad ,\forall\xi\in\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) \tag{4.3}$$

Para el tercer término, observemos que

$$\left|\int_\Omega \psi\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\theta + s(\theta))\right| \leq \|\boldsymbol{u}\psi\|_{0;\Omega}\,\|\nabla(\theta + s(\theta))\|_{0;\Omega} \qquad ,\forall\psi\in\mathrm{H}^1(\Omega)$$

[2]Problema abordado en el proyecto de tesis de Nicolás Núñez Lira

A su vez,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}\psi\|_{0;\Omega} &= \left(\int_\Omega \|\boldsymbol{u}\psi\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_\Omega \|\boldsymbol{u}\|^4\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_\Omega \|\psi\|^4\right)^{\frac{1}{4}} && \text{(Desigualdad de Cauchy-Schwartz)} \\
&= \|\boldsymbol{u}\|_{0,4;\Omega} \|\psi\|_{0,4;\Omega} \\
&\leq \|\boldsymbol{u}\|_{0,4;\Omega} \left\|i_4^{(n)}\right\| \|\psi\|_{1;\Omega} && ,\forall \psi \in \mathrm{H}^1(\Omega), \forall n \in \{2,3\}
\end{aligned}$$

es decir, lo anterior nos dice que el espacio de búsqueda para $\boldsymbol{u}$ será $\mathbf{L}^4(\Omega)$.

Observación 4.3

Alternativamente a lo anterior, si se requiere una desigualdad distinta para ψ y $\boldsymbol{u}$, podemos acotar

$$\|\psi\boldsymbol{u}\|_{0;\Omega} \leq \|\psi\|_{0,2p;\Omega} \|\boldsymbol{u}\|_{0,2q;\Omega} \qquad \text{(Desigualdad de Hölder)}$$

donde $p, q > 1$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Por ejemplo, $(\psi, \boldsymbol{u}) \in L^6(\Omega) \times \mathbf{L}^3(\Omega)$, $(\psi, \boldsymbol{u}) \in L^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega)$, $(\psi, \boldsymbol{u}) \in L^5(\Omega) \times \mathbf{L}^{10/3}(\Omega)$ o $(\psi, \boldsymbol{u}) \in L^8(\Omega) \times \mathbf{L}^{8/3}(\Omega)$.

Para las ecuaciones de Navier-Stokes-Brinkman, (4.1a),(4.1b) y (4.1c), notamos primero que $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{L}^2_{sym}(\Omega)$ y $\mathrm{tr}(\boldsymbol{t}) = \mathrm{div}(\boldsymbol{u}) = 0$, es decir, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) := \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{L} : \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^t, \mathrm{tr}(\boldsymbol{s}) = 0\}$. Así, multiplicando (4.1b) por $\boldsymbol{s} \in \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}$ e integrando sobre Ω, resulta:

$$\alpha \int_\Omega \mu(\theta)\boldsymbol{t} : \boldsymbol{s} - \int_\Omega (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{s} - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{s} = 0 \tag{4.4}$$

Notemos que está ecuación está bien definida pues $\boldsymbol{u}$ se busca en $\mathbf{L}^4(\Omega)$.

Ahora multiplicando (4.1a) por el tensor $\boldsymbol{\tau}$ e integramos sobre Ω, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \boldsymbol{t} : \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \gamma(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\tau} &= \int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \boldsymbol{\tau} \\
&= -\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) + \langle \boldsymbol{\tau}\nu, \boldsymbol{u}\rangle_\Gamma \\
&= -\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) + \langle \boldsymbol{\tau}\nu, \boldsymbol{u}_D\rangle_\Gamma
\end{aligned}$$

suponiendo que $\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \in \mathbf{L}^{4/3}(\Omega)$, y usando que u, inicialmente, en $\mathrm{H}^1(\Omega)$, lo anterior es válido por el Teorema 3.3.

Nos queda así

$$\int_\Omega \boldsymbol{t} : \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \gamma(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) = \langle \boldsymbol{\tau}\nu, \boldsymbol{u}_D\rangle_\Gamma \qquad ,\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3}; \Omega) \tag{4.5}$$

Observación 4.4

De la ecuación (4.1c), sabiendo que $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^4(\Omega)$, y de las suposiciones sobre f y η, se deduce que $\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) \in \mathbf{L}^4(\Omega)$.

Para la ecuación (4.1c) se tienen dos opciones:

I) Testear con $\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^{4/3}(\Omega)$, obteniendo

$$\int_\Omega \eta(\theta)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} - \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} = \int_\Omega f(\theta)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{v}\in\mathbf{L}^{4/3}(\Omega)$$

con lo cual se buscaría $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}_4;\Omega)$.

II) Testear con $\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^{4}(\Omega)$, obteniendo

$$\int_\Omega \eta(\theta)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} - \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} = \int_\Omega f(\theta)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{v}\in\mathbf{L}^{4}(\Omega)$$

con lo cual se buscaría $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega)$.

Observación 4.5

Si bien la I) es más natural dificultaría el análisis discreto probablemente, por lo tanto, se recomienda la alternativa II), pues con dicha formulación coinciden los espacios de testeo y de búsqueda, facilitando el análisis.

Por otro lado,introduciendo la incógnita $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{L}^2_{\text{skew}}(\Omega)$ e imponiendo la simetría de $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega)$ débilmente, se tiene

$$-\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\delta} = 0 \qquad ,\forall \boldsymbol{\delta} \in \mathbb{L}^2_{\text{skew}}(\Omega) \tag{4.6}$$

Así, de (4.2) y (4.3) se tiene la formulación variacional

$$\begin{array}{llll}
\textit{Hallar } (\theta,\lambda) \in \mathrm{H}^1(\Omega)\times\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \textit{ tal que:} & & & \\
\rho\displaystyle\int_\Omega \kappa\nabla\theta\cdot\nabla\psi + \langle\lambda,\psi\rangle_\Gamma + \int_\Omega \psi\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\theta+s(\theta)) & = & 0 & ,\forall\psi\in\mathrm{H}^1(\Omega) \\
\langle\xi,\theta\rangle_\Gamma & = & \langle\xi,\theta_{\mathrm{D}}\rangle & ,\forall\xi\in\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)
\end{array} \tag{$\tilde{P}$}$$

y de (4.4),(4.5),(4.6) y de II), se obtiene la formulación variacional

$$\begin{array}{llll}
\textit{Hallar } (\boldsymbol{t},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\gamma}) \in \mathbb{L}^2_{\text{tr}}(\Omega)\times\mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega)\times\mathbf{L}^4(\Omega)\times\mathbb{L}^2_{\text{skew}}(\Omega) \textit{ tal que:} & & & \\
\alpha\displaystyle\int_\Omega \mu(\theta)\boldsymbol{t}:\boldsymbol{s} - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}}:\boldsymbol{s} - \int_\Omega (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})^{\mathrm{d}}:\boldsymbol{s} & = & 0 & ,\forall\boldsymbol{s}\in\mathbb{L}^2_{\text{tr}}(\Omega) \\
-\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}}:\boldsymbol{t} - \int_\Omega \gamma:\boldsymbol{\tau} - \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) & = & -\langle\boldsymbol{\tau}\nu,\boldsymbol{u}_D\rangle_\Gamma & ,\forall\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega) \\
-\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\delta}:\boldsymbol{\sigma} - \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \int_\Omega \eta(\theta)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} & = & \displaystyle\int_\Omega f(\theta)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} & ,\forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta})\in\mathbf{L}^4(\Omega)\times\mathbb{L}^2_{\text{skew}}(\Omega)
\end{array} \tag{$\hat{P}$}$$

Observación 4.6

En las formulaciones ($\tilde{P}$) y ($\hat{P}$) los términos resaltados serán utilizados para la formulación del punto fijo en la próxima subsección.

Observación 4.7

Definiendo las formas bilineales:

$$\begin{array}{rcl}
a_\varphi : \mathbb{L}^2_{\text{tr}}(\Omega)\times\mathbb{L}^2_{\text{tr}}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\
(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}) & \mapsto & a_\varphi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}) := \alpha\displaystyle\int_\Omega \mu(\varphi)\boldsymbol{t}:\boldsymbol{s}
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
b_1 : \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\
(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{s}) &\mapsto b_1(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{s}) := -\int_\Omega \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{s}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b : \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega) \times (\mathbb{L}^2_{\mathrm{skew}}(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega)) &\rightarrow \mathbb{R} \\
(\boldsymbol{\tau}, (\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{v})) &\mapsto b(\boldsymbol{\tau}, (\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{v})) := -\int_\Omega \boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{\tau} - \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})
\end{aligned}
$$

Así, podemos definir, considerando $\mathrm{H} := \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) \times \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{skew}}(\Omega)$, la forma bilineal $A_\varphi : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\forall (\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\gamma}), (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) \in \mathrm{H}$

$$
A_\varphi((\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\gamma}), (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta})) := a_\varphi(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s}) + b_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{s}) + b_1(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{t}) + b(\boldsymbol{\sigma}, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta})) + b(\boldsymbol{\tau}, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\gamma}))
$$

Con las definiciones anteriores, podemos ver que el problema $(\hat{P})$, es posible plantearlo matricialmente(en términos de operadores)

$$
A_\varphi = \left(\begin{array}{cc|c} a_\varphi & b_1 & \theta \\ b_1 & \theta & b \\ \hline \theta & b & \theta \end{array} \right)
$$

en la cual podemos apreciar una estructura de doble punto de silla.
Por otro lado, definiendo la forma bilineal $B_{\boldsymbol{w}} : \mathrm{H} \times \mathrm{H} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\forall (\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\gamma}), (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) \in \mathrm{H}$

$$
B_{\boldsymbol{w}}((\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\gamma}), (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta})) := -\int_\Omega (\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{u})^{\mathrm{d}} : s
$$

y el funcional $F \in \mathrm{H}'$, tal que $\forall (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) \in \mathrm{H}$

$$
F_{\boldsymbol{w},\varphi}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) := -\langle \boldsymbol{\tau}\nu, \boldsymbol{u}_D \rangle_\Gamma + \int_\Omega f(\varphi)\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} - \int_\Omega \eta(\varphi)\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}
$$

Así, el problema $(\hat{P})$ se reescribe como

$$
\begin{aligned}
&\textit{Hallar } \vec{\boldsymbol{t}} \in \mathrm{H} \textit{ tal que:} \\
&A_\varphi(\vec{\boldsymbol{t}}, \vec{\boldsymbol{s}}) + B_{\boldsymbol{w}}(\vec{\boldsymbol{t}}, \vec{\boldsymbol{s}}) = F_{\boldsymbol{w},\varphi}(\vec{\boldsymbol{s}}) \qquad , \forall \vec{\boldsymbol{s}} \in \mathrm{H}
\end{aligned}
$$

4.2. Estructura de punto fijo

Se definen los operadores solución $\tilde{S} : \mathbf{L}^4(\Omega) \rightarrow \mathrm{H}^1(\Omega)$, donde dado $\boldsymbol{w} \in \mathbf{L}^4(\Omega), \tilde{S}(\boldsymbol{w}) = \tilde{\theta}$, donde $(\tilde{\theta}, \tilde{\lambda})$ es la única solución(a ser demostrado) del problema

$$
\begin{aligned}
&\textit{Hallar } (\tilde{\theta}, \tilde{\lambda}) \in \mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \textit{ tal que} \\
&\rho \int_\Omega \kappa \nabla\tilde{\theta} \cdot \nabla\psi + \left\langle \tilde{\lambda}, \psi \right\rangle_\Gamma + \int_\Omega \psi w \cdot \nabla(\tilde{\theta} + s(\tilde{\theta})) &= 0 \qquad &, \forall \psi \in \mathrm{H}^1(\Omega) \\
&\langle \xi, \theta \rangle_\Gamma &= \langle \xi, \theta_{\mathrm{D}} \rangle_\Gamma \quad &, \forall \xi \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)
\end{aligned}
$$

Se define también el operador $\hat{S} : \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^4(\Omega)$, tal que dado $(\boldsymbol{w}, \varphi), \hat{S}(\boldsymbol{w}, \varphi) = \tilde{\boldsymbol{u}}$, donde $(\tilde{\boldsymbol{t}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{\gamma}})$ es única solución(a ser demostrado) del problema

$$
\begin{array}{l}
\textit{Hallar } (\tilde{\boldsymbol{t}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\gamma}) \in \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) \times \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{skew}}(\Omega) \textit{ tal que:}\\
\begin{array}{rcll}
\alpha \displaystyle\int_\Omega \mu({\color{red}\varphi})\tilde{\boldsymbol{t}} : \boldsymbol{s} - \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{s} - \int_\Omega ({\color{red}\boldsymbol{w}} \otimes \tilde{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{s} & = & 0 & , \forall \boldsymbol{s} \in \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega)\\
-\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}} : \tilde{\boldsymbol{t}} - \int_\Omega \tilde{\gamma} : \boldsymbol{\tau} - \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) & = & -\langle \boldsymbol{\tau}\nu, \boldsymbol{u}_D \rangle & , \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega)\\
-\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\delta} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) & = & \displaystyle\int_\Omega f({\color{red}\varphi})\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} - \int_\Omega \eta({\color{red}\varphi}){\color{red}\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{v} & , \forall (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{skew}}(\Omega)
\end{array}
\end{array}
$$

Observación 4.8

El operador solución es posible definirlo $\hat{S} : \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathbf{L}^4(\Omega)$, tal que dado $(\boldsymbol{w}, \varphi)$, $\hat{S}(\boldsymbol{w}, \varphi) = \hat{\boldsymbol{u}}$, donde $(\tilde{\boldsymbol{t}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\gamma})$ es única solución (a ser demostrado) del problema

$$
\begin{array}{l}
\textit{Hallar } (\tilde{\boldsymbol{t}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\gamma}) \in \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) \times \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{skew}}(\Omega) \textit{ tal que:}\\
\begin{array}{rcll}
\alpha \displaystyle\int_\Omega \mu({\color{red}\varphi})\tilde{\boldsymbol{t}} : \boldsymbol{s} - \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{s} - \int_\Omega ({\color{red}\boldsymbol{w}} \otimes \tilde{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{s} & = & 0 & , \forall \boldsymbol{s} \in \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega)\\
-\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}} : \tilde{\boldsymbol{t}} - \int_\Omega \tilde{\gamma} : \boldsymbol{\tau} - \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) & = & -\langle \boldsymbol{\tau}\nu, \boldsymbol{u}_D \rangle & , \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega)\\
-\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\delta} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \int_\Omega \eta({\color{red}\varphi})\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} & = & \displaystyle\int_\Omega f({\color{red}\varphi})\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} & , \forall (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{skew}}(\Omega)
\end{array}
\end{array}
$$

Así el operador de punto fijo (en cualquier caso) queda dado por:

$$
\begin{array}{rcl}
T : \mathbf{L}^4(\Omega) & \to & \mathbf{L}^4(\Omega)\\
\boldsymbol{w} & \mapsto & T(\boldsymbol{w}) := \hat{S}(\boldsymbol{w}, \tilde{S}(\boldsymbol{w}))
\end{array}
$$

5. Problema para Flujos de Brinkman-Darcy Acoplados con Transporte No-lineal[3]

El problema a considerar, bajo los supuestos de [4], está dado por

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}}^{\mathtt{d}} - \mu\nabla \boldsymbol{u}_{\mathrm{B}} &= 0, && \text{en} \quad \Omega_{\mathrm{B}}, && (5.1a)\\
\mu\mathbb{K}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{u}_{\mathrm{B}} - \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}} &= \phi \boldsymbol{f}_{\mathrm{B}} && \text{en} \quad \Omega_{\mathrm{B}}, && (5.1b)\\
\boldsymbol{u}_{\mathrm{B}} &= 0 && \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{B}}, && (5.1c)\\
\mu\mathbb{K}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} + \nabla\, p_{\mathrm{D}} &= \phi \boldsymbol{f}_{\mathrm{D}} && \text{en} \quad \Omega_{\mathrm{D}}, && (5.1d)\\
\operatorname{div} \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} &= 0 && \text{en} \quad \Omega_{\mathrm{D}}, && (5.1e)\\
\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \cdot \boldsymbol{\nu} &= 0 && \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{D}}, && (5.1f)\\
\rho\phi - \operatorname{div}(\vartheta(\phi)\nabla\phi - \phi\boldsymbol{u} - f_{\mathrm{bk}}(\phi)\boldsymbol{g}) &= 0 && \text{en} \quad \Omega\,, && (5.1g)\\
\phi &= 0 && \text{on} \quad \Gamma\,, && (5.1h)\\
\boldsymbol{u}_{\mathrm{B}} \cdot \boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \cdot \boldsymbol{\nu} && \text{on} \quad \Sigma\,, && (5.1i)\\
\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\nu} + \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i(\boldsymbol{u}_{\mathrm{B}} \cdot \boldsymbol{s}_i)\boldsymbol{s}_i &= -p_{\mathrm{D}}\boldsymbol{\nu} && \text{on} \quad \Sigma\,, && (5.1j)
\end{aligned}
$$

Testeando la ecuación (5.1g) con $\psi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ resulta

$$
\rho\int_\Omega \phi\psi + \int_\Omega \vartheta(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla\psi - \int_\Omega \phi\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi - \int_\Omega f_{\mathrm{bk}}(\psi)\boldsymbol{g}\cdot\nabla\psi = 0, \qquad \forall\psi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)
$$

Notar aquí que

$$
\left|\int_\Omega \phi\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi\right| \overset{c-s}{\leq} \|\phi\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}\,\|\nabla\psi\|_{0,\Omega} \overset{d-h}{\leq} \|\phi\|_{0,2\tilde{q};\Omega}\,\|\boldsymbol{u}\|_{0,2\tilde{p};\Omega}\,\|\psi\|_{1,\Omega}
$$

y de esta forma, se buscará $\phi \in L^{2\tilde{q}}(\Omega)$ y $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^{2\tilde{p}}(\Omega)$ de modo que $\dfrac{1}{\tilde{p}} + \dfrac{1}{\tilde{q}} = 1$. Para efectos del análisis, definiendo $p = 2\tilde{p}$ y $q = \dfrac{2\tilde{p}}{2\tilde{p}-1}$ se tiene que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Suponiendo inicialmente que $p_{\mathrm{D}} \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega_{\mathrm{D}})$, multiplicando (5.1d) por $\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}} \in \mathrm{H}^q(\operatorname{div}_q;\Omega_{\mathrm{D}})$ e integrando por partes resulta

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_{\mathrm{D}}} \phi\boldsymbol{f}_{\mathrm{D}}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}} &= \mu\int_{\Omega_{\mathrm{D}}} \mathbb{K}_{\mathrm{D}}^{-1}\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}} + \int_{\Omega_{\mathrm{D}}} \nabla p_{\mathrm{D}}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}}\\
&= \mu\int_{\Omega_{\mathrm{D}}} \mathbb{K}_{\mathrm{D}}^{-1}\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}} - \int_{\Omega_{\mathrm{D}}} p_{\mathrm{D}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}} + \langle\gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}}),\gamma_0(p_{\mathrm{D}})\rangle_{\partial\Omega_D}
\end{aligned}
$$

Luego, introduciendo la incógnita $\lambda_{\mathrm{D}} = \gamma_0(p_{\mathrm{D}})\big|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} \in \mathrm{W}^{1/q,p}(\Gamma_{\mathrm{D}})$ se obtiene la ecuación

$$
\mu\int_{\Omega_{\mathrm{D}}} \mathbb{K}_{\mathrm{D}}^{-1}\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}} - \int_{\Omega_{\mathrm{D}}} p_{\mathrm{D}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}} + \langle\gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{v}),\lambda_{\mathrm{D}}\rangle_{\partial\Omega_D} = \int_{\Omega_{\mathrm{D}}} \phi\boldsymbol{f}_{\mathrm{D}}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}}, \qquad \forall\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}} \in \mathrm{H}^q(\operatorname{div}_q;\Omega_{\mathrm{D}})
$$

Las ecuaciones (5.1e) y (5.1f) se impone débilmente como

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Omega_{\mathrm{D}}} q_{\mathrm{D}}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} &= 0, && \forall q_{\mathrm{D}} \in L^p(\Omega_{\mathrm{D}})\\
\left\langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}})\big|_{\Gamma_{\mathrm{D}}},\lambda_{\mathrm{D}}\right\rangle_{\Gamma_{\mathrm{D}}} &= 0, && \forall\lambda_{\mathrm{D}} \in \mathrm{W}_{00}^{1/q,p}(\Sigma)
\end{aligned}
$$

[3] Problema abordado en el proyecto de tesis de Juan Rojas Espinoza

Por otra parte, testeando (5.1a) con $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{B}} \in \mathrm{H}^q(\mathrm{div}_q;\Omega_{\mathrm{B}})$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\mathrm{B}}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}}^{\mathtt{d}} : \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{B}} - \mu \int_{\Omega_{\mathrm{B}}} \nabla \boldsymbol{u}_{\mathrm{B}} \cdot : \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{B}} &= 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \int_{\Omega_{\mathrm{B}}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}}^{\mathtt{d}} : \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{B}} - \mu \left(- \int_{\Omega_{\mathrm{B}}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{B}} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{B}} + \langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{B}}), \gamma_0(\boldsymbol{u}_{\mathrm{B}}) \rangle_{\partial\Omega_{\mathrm{B}}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

y como

$$\langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{B}}), \gamma_0(\boldsymbol{u}_{\mathrm{B}}) \rangle_{\partial\Omega_{\mathrm{B}}} = \left\langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{B}}), \mathrm{E}_{\Sigma,0} \left(\gamma_0(\boldsymbol{u}_{\mathrm{B}}) \Big|_{\Sigma} \right) \right\rangle_{\partial\Omega_{\mathrm{B}}} = \left\langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{B}}) \Big|_{\Sigma}, \gamma_0(\boldsymbol{u}_{\mathrm{B}}) \Big|_{\Sigma} \right\rangle_{\Sigma}$$

por lo que al definir la incógnita $\xi_{\mathrm{B}} = -\mu \gamma_0(\boldsymbol{u}_{\mathrm{B}}) \Big|_{\Sigma} \in \mathrm{W}_{00}^{1/q,p}(\Sigma)$ se obtiene la ecuación

$$\int_{\Omega_{\mathrm{B}}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}}^{\mathtt{d}} : \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{B}} + \mu \int_{\Omega_{\mathrm{B}}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{B}} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{B}}) + \left\langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{B}}) \Big|_{\Sigma}, \xi_{\mathrm{B}} \right\rangle_{\Sigma} = 0, \qquad \forall \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{B}} \in \mathrm{H}^q(\mathrm{div}_q;\Omega_{\mathrm{B}})$$

A su vez, al testear (5.1b) con $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} \in \mathbf{L}^q(\Omega_{\mathrm{B}})$

$$\mu \int_{\Omega_{\mathrm{B}}} \mathbb{K}_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{u}_{\mathrm{B}} \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} - \int_{\Omega_{\mathrm{B}}} \boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}}) = \int_{\Omega_{\mathrm{B}}} \phi \boldsymbol{f}_{\mathrm{B}} \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}, \qquad \forall \boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} \in \mathbf{L}^q(\Omega_{\mathrm{B}})$$

5.1. Problema para Flujo de Brinkman Acoplado con Transporte No-lineal

Las ecuaciones que gobiernan este modelo son

$$\text{BRINKMAN} \quad \left\{ \begin{array}{rcll} \mu\mathbb{K}^{-1}\boldsymbol{u} - \mu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p &=& \phi\boldsymbol{f} & \text{en} \quad \Omega \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) &=& 0 & \text{en} \quad \Omega \\ \boldsymbol{u} &=& 0 & \text{en} \quad \Gamma_{\mathrm{D}} \\ (\mu\nabla\boldsymbol{u} - p\mathbb{I})\boldsymbol{\nu} &=& \boldsymbol{h} & \text{en} \quad \Gamma_{\mathrm{N}} \end{array} \right. \tag{5.2a}$$

$$\text{TRANSPORTE} \quad \left\{ \begin{array}{rcll} \rho\phi - \operatorname{div}(\vartheta(\phi)\nabla\phi - \phi\boldsymbol{u} - f_{\mathrm{bk}}(\phi)\boldsymbol{g}) &=& 0 & \text{en} \quad \Omega \\ \phi &=& 0 & \text{en} \quad \Gamma := \Gamma_{\mathrm{D}} \cup \Gamma_{\mathrm{N}} \end{array} \right. \tag{5.2b}$$

y se pretende encontrar $\boldsymbol{u}$, p y ϕ que las satisfagan, donde estas corresponden a la velocidad, presión y alguna característica física del fluido (concentración de un componente químico, densidad, temperatura o saturación de una fase sólida), respectivamente. A su vez, $\mu > 0$ es la viscocidad constante del fluido, $\rho > 0$ es la porosidad del medio (la cual se asume constante), $\mathbb{K}$ es un tensor simétrico que caracteriza la permeabilidad absoluta del dominio. Este último se asume uniformemente definido positivo, lo cual significa

$$\boldsymbol{v}\mathbb{K}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} \geq \alpha|\boldsymbol{v}|^2 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{R}^n, \ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega$$

Además, ϑ es una función de difusividad no-lineal, y f_{bk} es un flujo no-lineal que actúa en la dirección de la aceleración de gravedad $\boldsymbol{g}$, la cual está alineada con el eje x_n negativo. Se supone también que $\boldsymbol{f}$ es una función suficientemente regular.

Por medio de la condición de incompresibilidad de $\boldsymbol{u}$ (las cuales permiten eliminar p) es posible re-escribir (5.2a), equivalentemente, como

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} - \mu\nabla\boldsymbol{u} &=& 0 & \text{en} \quad \Omega \\ \mu\mathbb{K}^{-1}\boldsymbol{u} - \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) &=& 0 & \text{en} \quad \Omega \\ \boldsymbol{u} &=& 0 & \text{en} \quad \Gamma_{\mathrm{D}} \\ \boldsymbol{\sigma\nu} &=& \boldsymbol{h} & \text{en} \quad \Gamma_{\mathrm{N}} \end{array}$$

A su vez, introduciendo la incógnita $\boldsymbol{t} = \nabla\boldsymbol{u}$ en Ω, el sistema de ecuaciones queda dado por

$$\boldsymbol{t} = \nabla\boldsymbol{u} \qquad \text{en } \Omega \tag{5.3a}$$

$$\mu\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} \qquad \text{en } \Omega \tag{5.3b}$$

$$\mu\mathbb{K}^{-1}\boldsymbol{u} - \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \qquad \text{en } \Omega \tag{5.3c}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{en } \Gamma_{\mathrm{D}} \tag{5.3d}$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \boldsymbol{h} \qquad \text{en } \Gamma_{\mathrm{N}} \tag{5.3e}$$

$$\rho\phi - \operatorname{div}(\vartheta(\phi)\nabla\phi - \phi\boldsymbol{u} - f_{\mathrm{bk}}(\phi)\boldsymbol{g}) = 0 \qquad \text{en } \Omega \tag{5.3f}$$

$$\phi = 0 \qquad \text{en } \Gamma \tag{5.3g}$$

Testeando (5.3f) con $\psi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ resulta

$$\rho\int_\Omega \phi\psi + \int_\Omega \vartheta(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla\psi - \int_\Omega \phi\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi - \int_\Omega f_{\mathrm{bk}}(\phi)\boldsymbol{g}\cdot\nabla\psi = 0$$

Al aplicar desigualdad de Cauchy-Schwarz y luego Hölder al tercer término resulta

$$\left|\int_\Omega \phi\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi\right| \leq \|\phi\|_{0,2r;\Omega}\,\|\boldsymbol{u}\|_{0,2s;\Omega}\,|\psi|_{1,\Omega}$$

donde $r,s>1$ y $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}=1$ y donotando por $p=2s$ y $q=\dfrac{2s}{2s-1}$, interesa encontrar $\phi\in L^{2r}(\Omega)$ y $\boldsymbol{u}\in\mathbf{L}^p(\Omega)$

Suponiendo originalmente $\boldsymbol{u}\in \mathrm{H}^1(\Omega)$ y aplicando formula de integración por partes con $\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{H}(\mathbf{div}_q;\Omega)$ a (5.3a) se obtiene

$$\int_\Omega \boldsymbol{t}:\boldsymbol{\tau}=-\int_\Omega \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{u}+\langle\boldsymbol{\tau\nu},\boldsymbol{u}\rangle_{\partial\Omega}$$

Puesto que $\boldsymbol{u}=0$ en Γ_{D} entonces $\boldsymbol{\xi}=-\boldsymbol{u}\big|_{\Gamma_{\mathrm{N}}}\in\mathrm{H}^{1/2}_{00}(\Gamma_{\mathrm{N}})$ y con ello $\langle\boldsymbol{t\nu},\boldsymbol{u}\rangle_{\partial\Omega}=-\left\langle\boldsymbol{t\nu}\big|_{\Gamma_{\mathrm{N}}},\boldsymbol{\xi}\right\rangle_{\Gamma_{\mathrm{N}}}$. De esta manera se obtiene la ecuación

$$-\int_\Omega \boldsymbol{t}:\boldsymbol{\tau}-\int_\Omega \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{u}-\left\langle\boldsymbol{t\nu}\big|_{\Gamma_{\mathrm{N}}},\boldsymbol{\xi}\right\rangle_{\Gamma_{\mathrm{N}}} = 0, \qquad \forall\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{H}(\mathbf{div}_q;\Omega) \tag{5.4}$$

Por otra parte, como $\mathrm{tr}(\boldsymbol{t})=\mathrm{div}(\boldsymbol{u})=0$ entonces las ecuaciones (5.3b) y (5.3c) quedan expresadas débilmente como

$$\mu\int_\Omega \boldsymbol{t}:\boldsymbol{r}-\int_\Omega\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{r} = 0 \qquad \forall\boldsymbol{r}\in\mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) \tag{5.5}$$

$$\mu\int_\Omega \mathbb{K}^{-1}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}-\int_\Omega\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{v} = \int_\Omega\phi\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \qquad \forall\boldsymbol{v}\in\mathbf{L}^p(\Omega) \tag{5.6}$$

Cabe destacar que la última ecuación está bien planteada debido a que $p=2s,\ s>1$. Es decir $\mathbf{L}^p(\Omega)\subseteq\mathbf{L}^2(\Omega)$ y de esta forma se busca $\boldsymbol{\sigma}\in\mathbb{H}(\mathbf{div}_q;\Omega)$. Respecto a (5.3e), ésta se impone débilmente como

$$\left\langle\boldsymbol{\sigma\nu}\big|_{\Gamma_{\mathrm{N}}},\boldsymbol{\lambda}\right\rangle_{\Gamma_{\mathrm{N}}}=\left\langle\boldsymbol{h}\big|_{\Gamma_{\mathrm{N}}},\boldsymbol{\lambda}\right\rangle_{\Gamma_{\mathrm{N}}} \qquad \forall\boldsymbol{\lambda}\in\mathrm{H}^{1/2}_{00}(\Gamma_{\mathrm{N}}) \tag{5.7}$$

6. Problema de Darcy acoplado con Convección-Difusión

Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase Lipschitz Continua, nos interesa el siguiente problema

$$\begin{aligned} \mu(\varphi)\boldsymbol{u} + \nabla p &= \boldsymbol{f} \quad \text{en} \quad \Omega, && (6.1a)\\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega, && (6.1b)\\ -k\Delta\varphi + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi &= f \quad \text{en} \quad \Omega, && (6.1c)\\ \boldsymbol{u}\cdot\nu &= 0 \quad \text{en} \quad \Gamma, && (6.1d)\\ \varphi &= 0 \quad \text{en} \quad \Gamma, && (6.1e) \end{aligned}$$

donde $\mu(\varphi)$ es la viscosidad del fluido, la cual depende de la temperatura φ, $\boldsymbol{u}$ y p son la velocidad y la presión del fluido, k es el coeficiente de difusión, $\boldsymbol{f}$ es una fuerza externa sobre el medio poroso y f una fuente de calor externa.

Observación 6.1

La ecuación (6.1c) puede considerarse como

$$\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla\varphi) + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi = f \quad \text{en} \quad \Omega$$

con $\mathbb{K}$ el tensor de difusión. Para dicho caso el análisis posterior es similar.

A su vez, se supone que $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es una función uniformemente acotada y Lipschitz continua, esto es, existen constantes $\mu_1, \mu_2, L_\mu > 0$ tales que

$$\mu_1 \leq \mu(t) \leq \mu_2 \quad \text{y} \quad |\mu(t_1) - \mu(t_2)| \leq L_\mu |t_1 - t_2| \qquad \forall t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Para poder definir el problema (6.1e) en su formulación mixta si introduce la incognita

$$\boldsymbol{\sigma} := k\nabla\varphi - \varphi\boldsymbol{u}$$

de modo que, por la ecuación de incompresibilidad (6.1b), se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= \operatorname{div}(k\nabla\varphi - \varphi\boldsymbol{u})\\ &= k\Delta\varphi - \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{u} - \varphi\operatorname{div}(\boldsymbol{u})\\ &= k\Delta\varphi - \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

Así, el problema acoplado (6.1) se reduce a

$$
\begin{aligned}
\mu(\varphi)\boldsymbol{u}+\nabla p = & \boldsymbol{f} && \text{en} \quad \Omega, && (6.2a)\\
\operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = & 0 && \text{en} \quad \Omega, && (6.2b)\\
\boldsymbol{\sigma} = & k\nabla\varphi-\varphi\boldsymbol{u} && \text{en} \quad \Omega, && (6.2c)\\
\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = & -f && \text{en} \quad \Omega, && (6.2d)\\
\boldsymbol{u}\cdot\nu = & 0 && \text{en} \quad \Gamma, && (6.2e)\\
\varphi = & 0 && \text{en} \quad \Gamma, && (6.2f)
\end{aligned}
$$

6.1. Resultados previos para el análisis de solubilidad

Para demostrar el la existencia y unicidad del problema (6.2) se hará uso del siguiente lema.

Lema 6.1: Solubilidad de un problema de Neumann en $\mathrm{W}^{1,r}(\Omega)$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase Lipschitz Continua, y sean $r \in (1,\infty)$, con conjugado de Hölder s, y los datos $\boldsymbol{g} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$, $g \in L^r(\Omega)$ y $g_{\mathrm{N}} \in \mathrm{W}^{-1/r,r}(\Gamma)$, tal que g y g_{N} verifican la condición de compatibilidad

$$\int_\Omega g = \langle g_{\mathrm{N}}, 1\rangle_\Gamma$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ es la paridad dual de $\mathrm{W}^{-1/r,r}(\Gamma)$ y $\mathrm{W}^{-1/r,s}(\Gamma)$.
Entonces, para cada $r \in [4/3,4]$(en el caso $n=2$) o $r \in [3/2,3]$(en el caso $n=3$), existe un único $u \in \widetilde{\mathrm{W}}^{1,r}(\Omega) := \left\{v \in \mathrm{W}^{1,r}(\Omega) : \int_\Omega u = 0\right\}$ solución del problema de Neumann

$$
\begin{array}{rcll}
\Delta u & = & g+\operatorname{div}(\boldsymbol{g}) & \text{en} \quad \Omega,\\
\nabla u\cdot\nu & = & \boldsymbol{g}\cdot\nu+g_{\mathrm{N}} & \text{en} \quad \Gamma
\end{array}
$$

Además, existe una constante $C>0$ que depende de n, r y Ω, tal que

$$\|u\|_{1,r;\Omega} \leq C\left\{\|g\|_{0,r;\Omega}+\|\boldsymbol{g}\|_{0,r;\Omega}+\|g_{\mathrm{N}}\|_{-1/r,r;\Gamma}\right\}$$

Observación 6.2

Dado que $\boldsymbol{g} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$, entonces no necesariamente se tiene que $\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\nu} \in \mathrm{W}^{-1/r,r}(\Gamma)$. Y debido a esto el sentido correcto para el Problema de Neumann del Lema 6.1 es

$$
\begin{array}{rcll}
\operatorname{div}(\nabla u-\boldsymbol{g}) & = & g & \text{en} \quad \Omega,\\
(\nabla u-\boldsymbol{g})\cdot\nu & = & g_{\mathrm{N}} & \text{en} \quad \Gamma
\end{array}
$$

Por otro lado, para cada $t \in (1,\infty)$, se define el operador J_t que para cada $\boldsymbol{z} \in \mathbf{L}^t(\Omega)$ entonces

$$J_t(\boldsymbol{z}) := \begin{cases} |\boldsymbol{z}|^{t-2}\boldsymbol{z} & \text{si } \boldsymbol{z} \neq \theta\\ 0 & \text{si } \boldsymbol{z} = \theta\end{cases}$$

Entonces, se tiene el siguiente lema

Lema 6.2

Sean $r, s \in (1, \infty)$ conjugados de Hölder. Entonces, para dado $\boldsymbol{z} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ se tiene que $\boldsymbol{z}_s := J_r(\boldsymbol{z}) \in \mathbf{L}^s(\Omega)$ y a su vez $\boldsymbol{z} = J_s(\boldsymbol{z}_s)$. Además,

$$\int_\Omega \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{z}_s = \|\boldsymbol{z}\|_{0,r;\Omega}^r = \|\boldsymbol{z}_s\|_{0,s;\Omega}^s = \|\boldsymbol{z}\|_{0,r;\Omega} \|\boldsymbol{z}_s\|_{0,s;\Omega}$$

Demostración. Dado $\boldsymbol{z} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{z}_s &= \int_\Omega |\boldsymbol{z}|^{r-2} (\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{z}) \\ &= \int_\Omega |\boldsymbol{z}|^r \\ &= \|z\|_{0,r;\Omega}^r\end{aligned}$$

A su vez,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{z}_s\|_{o,s;\Omega}^s &= \int_\Omega |\boldsymbol{z}_s|^s \\ &= \int_\Omega |\boldsymbol{z}|^{(r-1)s} \\ &= \int_\Omega |\boldsymbol{z}|^r \\ &= \|z\|_{0,r;\Omega}^r < \infty\end{aligned}$$

es decir, $\|\boldsymbol{z}_s\|_{o,s;\Omega}^s = \|z\|_{0,r;\Omega}^r$.
Finalmente,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{z}\|_{0,r;\Omega} \|\boldsymbol{z}_s\|_{0,s;\Omega} &= \|\boldsymbol{z}\|_{0,r;\Omega} \|\boldsymbol{z}\|_{0,r;\Omega}^{r/s} \\ &= \|\boldsymbol{z}\|_{0,r;\Omega}^{1+r/s} \\ &= \|\boldsymbol{z}\|_{0,r;\Omega}^{(s+r)/s} \\ &= \|\boldsymbol{z}\|_{0,r;\Omega}\end{aligned}$$

■

6.2. Formulación variacional mixta para el problema de Convección-Difusión

Multiplicando la ecuación (6.2c) por $\boldsymbol{\tau}$ en un espacio a especificar más adelante, se obtiene

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} - k \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \varphi \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$$

Al respecto, usando desigualdad de Cauchy-Schwartz seguida de la desigualdad de Hölder con $l.j > 1$ conjugados, se obtiene

$$\left| \int_\Omega \varphi \cdot \boldsymbol{\tau} \right| \leq \|\varphi\|_{0,2l;\Omega} \|\boldsymbol{u}\|_{0,2j;\Omega} \|\boldsymbol{\tau}\|_{0;\Omega}$$

lo que dice que este término es finito si $\varphi \in L^{2l}(\Omega)$, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^{2j}(\Omega)$ y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Esto último también significa que se buscará $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.

A su vez, si se desea aplicar la Fórmula de Integración por Partes dada por el Teorema 3.3, y obtener

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\tau} = -\int_\Omega \varphi \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \langle \boldsymbol{\tau}\cdot\nu, \varphi\rangle$$

se infiere que φ debe estar en $\mathrm{H}^1(\Omega)$, y por lo tanto el Teorema 3.1 nos dice que $2l \geq 1$(para el caso $n = 2$) y $2l \in [1, 6]$(para el caso $n = 3$). Lo anterior implica que $\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})$ debe estar en $\mathbf{L}^{(2l)'}(\Omega)$, donde $(2l)'$ es el conjugado de Hölder de $2l$. Por cuanto el Lema 6.1 se aplicará más tarde a $r = 2j$ y $r = (2j)'$, siendo $(2j)'$ el conjugado de Hölder de $2j$, surgen las siguientes restricciones $2j \in [4/3, 4]$(para el caso $n = 2$) y $2j \in [3/2, 3]$(par el caso $n = 3$).

Para el caso $n = 3$, se sigue que

$$\begin{aligned} 2j \leq 3 &\Longleftrightarrow \frac{2l}{l-1} \leq 3 \\ &\Longleftrightarrow 2l \geq 6 \end{aligned}$$

es decir, se concluye que la única opción en el caso tridimensional es $2l = 6$, es decir, $l = 3$.

Para el caso $n = 2$, se tiene

$$\begin{aligned} 2j \leq 4 &\Longleftrightarrow \frac{2l}{l-1} \leq 4 \\ &\Longleftrightarrow 2l \geq 4 \end{aligned}$$

es decir, para el caso bidimensional se tiene la libertad para escoger $2l \geq 4$, es decir, $l \geq 2$. Así, por comodidad, independiente de n se escoge $2l = 6$.

De este modo para lo que sigue se define $\rho = 2l = 6$, $\varrho = (2l)' = 6/5$, $r = 2j = 3$ y $s = (2j)' = 3/2$. De modo que $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ y $\varphi \in \mathbf{L}^\rho(\Omega)$.

Por lo tanto, la ecuación que resulta de la integración por partes y de la condición de Dirichlet del problema (6.1) queda dada por

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} + k\int_\Omega \varphi \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega \varphi \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0 \qquad ,\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathrm{H}(\operatorname{div}_\varrho; \Omega) \tag{6.3}$$

Por otra parte, para la ecuación (6.2d) suponiendo que $f \in L^\varrho(\Omega)$ se obtiene

$$k\int_\Omega \psi \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = -k\int_\Omega \psi f \qquad ,\forall \psi \in \mathbf{L}^\rho(\Omega) \tag{6.4}$$

De modo que $\boldsymbol{\sigma}$ se busca en $\mathrm{H}(\operatorname{div}_\varrho; \Omega)$.

Así, de las ecuaciones (6.3) y (6.4) y dado $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$, la formulación mixta para el problema de convección-difusión se reduce a

$$\begin{aligned} &\textit{Hallar } (\boldsymbol{\sigma}, \varphi) \in H \times Q \textit{ tal que:} \\ &a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \varphi) + \int_\Omega \varphi \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau} \;=\; 0 \qquad\qquad ,\forall \boldsymbol{\tau} \in H \\ &b(\boldsymbol{\sigma}, \psi) \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; = \; -k\int_\Omega \psi f \quad ,\forall \psi \in Q \end{aligned} \tag{$P_{\text{c-d}}$}$$

donde los espacios están dados por $H := \mathrm{H}(\mathrm{div}_\varrho;\Omega)$, $Q := \mathbf{L}^\rho(\Omega)$ y las formas bilineales

$$\begin{aligned} a : H \times H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) &\longmapsto a(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) := \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b : H \times Q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{\sigma},\psi) &\longmapsto b(\boldsymbol{\sigma},\psi) := k\int_\Omega \psi\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) \end{aligned}$$

Observación 6.3

Notemos que el problema ($P_{\text{c-d}}$) presenta una formulación de punto de silla con una perturbación no lineal. La solubilidad de dicho problema se abordará con una condición *inf-sup* global la cual nos entregará la condición sobre $\boldsymbol{u}$ para la existencia y unicidad de está formulación.

6.3. Formulación variacional mixta para el problema de Darcy

Sabiendo ahora que $\boldsymbol{u}$ se buscará en $\mathbf{L}^r(\Omega)$ y notando la condición de incompresibilidad y la condición de contorno Neumann(ecuaciones (6.1b) y (6.1d), respectivamente), se sugieren como espacio para u:

$$X_2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}^r(\mathrm{div}_r;\Omega) : \boldsymbol{u}\cdot\nu = 0 \text{ en } \Gamma\}$$

Además, de la ecuación (6.1a) se sugiere el espacio de funciones test respectivo como

$$X_1 := \{\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}^s(\mathrm{div}_s;\Omega) : \boldsymbol{v}\cdot\nu = 0 \text{ en } \Gamma\}$$

Así, testeando dicha ecuación por $\boldsymbol{v} \in X_1$, y suponiendo originalmente que $p \in \mathrm{W}^{1,r}(\Omega)$, se aplica la Formula de Integración por Partes del Teorema 3.8, obteniendo

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mu(\varphi)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \int_\Omega \nabla p\cdot\boldsymbol{v} &= \int_\Omega \mu(\varphi)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} - \int_\Omega p\,\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) + \langle \boldsymbol{v}\cdot\nu, p\rangle_\Gamma \\ &= \int_\Omega \mu(\varphi)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} - \int_\Omega p\,\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

es decir, suponiendo que $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$, se tiene

$$\int_\Omega \mu(\varphi)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} - \int_\Omega p\,\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \qquad ,\forall \boldsymbol{v} \in X_1 \tag{6.5}$$

Finalmente, la condición de incompresibilidad(ecuación (6.1b)) se impone debilmente como

$$-\int_\Omega q\,\mathrm{div}(\boldsymbol{u}) = 0 \qquad ,\forall q \in L^s(\Omega) \tag{6.6}$$

Observación 6.4

Notemos que debido a la condición impuesta en la definición de X_1, no es necesario imponer la condición de la medida nula sobre $q \in L^s(\Omega)$ explícitamente en (6.6). En cambio, en la ecuación (6.5) si será necesario imponer dicha condición sobre $p \in L^r(\Omega)$.

Así, de las ecuaciones (6.5) y (6.6) y dado $\varphi \in L^\rho(\Omega)$, la formulación mixta para el problema de Darcy se reduce a

$$
\begin{array}{lcll}
\multicolumn{4}{l}{\textit{Hallar } (\boldsymbol{u}, p) \in X_2 \times M_1 \textit{ tal que:}} \\
a_\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b_1(\boldsymbol{v}, p) & = & \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} & , \forall \boldsymbol{v} \in X_1 \\
b_2(\boldsymbol{u}, q) & = & 0 & , \forall p \in M_2
\end{array}
\tag{P_{D}}
$$

donde los espacios están dados por $M_1 := L_0^r(\Omega)$, $M_2 := L_0^s(\Omega)$ y las formas bilineales

$$
\begin{array}{rcl}
a_\varphi : X_2 \times X_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) & \longmapsto & a_\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \displaystyle\int_\Omega \mu(\varphi) \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
b_i : X_i \times M_i & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
(\boldsymbol{u}, q) & \longmapsto & b_i(\boldsymbol{u}, q) := -\displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div}(\boldsymbol{u})
\end{array}
\qquad , \forall i \in \{1, 2\}
$$

6.4. Formulación variacional mixta para el problema acoplado

La formulación del problema de Darcy acoplado a Convección-Difusión se escribe como

$$
\begin{array}{lcll}
\multicolumn{4}{l}{\textit{Hallar } (\boldsymbol{\sigma}, \varphi) \in H \times Q \textit{ y } (\boldsymbol{u}, p) \in X_2 \times M_1 \textit{ tal que:}} \\
a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \varphi) + \displaystyle\int_\Omega \varphi \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\tau} & = & 0 & , \forall \boldsymbol{\tau} \in H \\
b(\boldsymbol{\sigma}, \psi) & = & -k \displaystyle\int_\Omega \psi f & , \forall \psi \in Q \\
a_\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b_1(\boldsymbol{v}, p) & = & \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} & , \forall \boldsymbol{v} \in X_1 \\
b_2(\boldsymbol{u}, q) & = & 0 & , \forall p \in M_2
\end{array}
\tag{$P_{\text{D-c-d}}$}
$$

6.5. Solubilidad para la formulación mixta para el problema de Darcy

Para la probar la solubilidad de la formulación mixta para el problema de Darcy, necesitamos el siguiente lema

Lema 6.3

Dados $r, s > 1$ conjugados de Hölder tales que satisfacen los rangos del Teorema 6.1, es decir, $r, s \in [4/3, 4]$ para el caso $n = 2$ o $r, s \in [3/2, 3]$ en el caso $n = 3$. Se tiene que existe un operador lineal y acotado $D_s : \mathbf{L}^s(\Omega) \to \mathbf{L}^s(\Omega)$ tal que para todo $\boldsymbol{w} \in \mathbf{L}^s(\Omega)$

$$\operatorname{div}(D_s(\boldsymbol{w})) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{y} \quad D_s(\boldsymbol{w}) \cdot \nu = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma$$

y para $\boldsymbol{z} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ tal que

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{z}) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{y} \quad \boldsymbol{z} \cdot \nu = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma$$

se tiene que

$$\int_\Omega \boldsymbol{z} \cdot D_s(\boldsymbol{w}) = \int_\Omega \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{w}$$

Demostración. Dado $\boldsymbol{w} \in \mathbf{L}^s(\Omega)$, sabemos del Lema 6.1(aplicación directa del lema con $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{w}, g = 0$, y $g_{\mathrm{N}} = 0$) que existe un único $u \in \widetilde{\mathrm{W}}^{1,s}(\Omega)$ tal que

$$\begin{array}{rcll} \Delta u & = & \operatorname{div}(\boldsymbol{w}) & , \text{ en } \Omega \\ \nabla u \cdot \nu & = & \boldsymbol{w} \cdot \nu & , \text{ en } \Gamma \end{array}$$

y existe una constante $C_s > 0$ tal que

$$\|u\|_{1,s;\Omega} \leq C_s \|\boldsymbol{w}\|_{0,s;\Omega}$$

Luego, definiendo

$$D_s(w) := w - \nabla u \in \mathbf{L}^s(\Omega)$$

se tiene del problema que

$$\operatorname{div}(D_s(\boldsymbol{w})) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{y} \quad D_s(\boldsymbol{w}) \cdot \nu = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma$$

Además, dado $\boldsymbol{z} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ tal que

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{z}) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{y} \quad \boldsymbol{z} \cdot \nu = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma$$

y notando que la primera de las ecuaciones anteriores implica que $\boldsymbol{z} \in \mathrm{H}^r(\operatorname{div}_r; \Omega)$, se tiene que aplicando la Fórmula de Integración por partes del Teorema 3.8 a $\boldsymbol{z} \in \mathrm{H}^r(\operatorname{div}_r; \Omega)$ y $u \in \mathrm{W}^{1,s}(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega \boldsymbol{z} \cdot D_s(\boldsymbol{w}) &= \int_\Omega \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{w} - \int_\Omega \boldsymbol{z} \cdot \nabla u \\ &= \int_\Omega \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{w} + \int_\Omega u \underbrace{\operatorname{div}(\boldsymbol{z})}_{=0} - \left\langle \underbrace{\boldsymbol{\tau} \cdot \nu}_{=0}, u \right\rangle_\Gamma \\ &= \int_\Omega \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{w} \end{aligned}$$

Por último, es claro que D_s es lineal pues el problema de Neumann a través del cual se define este operador es lineal. Además, este operador es acotado ya que

$$\begin{aligned} \|D_s(\boldsymbol{w})\|_{0,s;\Omega} &\leq \|\boldsymbol{w}\|_{0,s;\Omega} + \|\nabla u\|_{0,s;\Omega} \\ &\leq \|w\|_{0,s;\Omega} + \|u\|_{1,s;\Omega} \\ &\leq (1 + C_s) \|w\|_{0,s;\Omega} \end{aligned}$$

y por lo tanto $D_s \in \mathcal{L}(\mathbf{L}^s(\Omega), \mathbf{L}^s(\Omega))$, con lo que queda finalizada la demostración. ■

Ahora, aplicando el Teorema de Babuška-Brezzi en espacios de Banach al problema de Darcy (P_{D}), denotando $K_i := N(\mathrm{B}_i)$, donde B_i es el operador inducido por b_i se tiene que

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \{\boldsymbol{v} \in X_1 : b_1(\boldsymbol{v}, q) = 0, \forall q \in M_1\} \\
&= \left\{\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}^s(\mathrm{div}_s; \Omega) : \boldsymbol{v} \cdot \nu = 0 \text{ en } \Gamma \quad \text{y} \quad \int_\Omega q \,\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = 0, \forall q \in L_0^r(\Omega)\right\} \\
&= \{\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}^s(\mathrm{div}_s; \Omega) : \boldsymbol{v} \cdot \nu = 0 \text{ en } \Gamma \quad \text{y} \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = 0 \text{ en } \Omega\}
\end{aligned}
$$

Así, análogamente

$$
K_2 = \{\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}^r(\mathrm{div}_r; \Omega) : \boldsymbol{v} \cdot \nu = 0 \text{ en } \Gamma \quad \text{y} \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = 0 \text{ en } \Omega\}
$$

Se requiere probar que existe $\alpha > 0$ tal que

I) $\displaystyle\sup_{\boldsymbol{v} \in K_1 \setminus \{\theta\}} \frac{a_\varphi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|_{X_1}} \geq \alpha \|\boldsymbol{w}\|_{X_2} \qquad \forall \boldsymbol{w} \in K_2$

II) $\displaystyle\sup_{\boldsymbol{w} \in K_2} a_\varphi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in K_1 \setminus \{\theta\}$

Observación 6.5

Las hipótesis sobre la forma bilineal a_φ de esta versión del Teorema de Babuška-Brezzi son equivalentes a

I)' $\displaystyle\sup_{\boldsymbol{w} \in K_2 \setminus \{\theta\}} \frac{a_\varphi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{w}\|_{X_2}} \geq \alpha \|\boldsymbol{v}\|_{X_1} \qquad \forall \boldsymbol{w} \in K_1$

II)' $\displaystyle\sup_{\boldsymbol{v} \in K_1} a_\varphi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{w} \in K_2 \setminus \{\theta\}$

Para (I)), nos damos $\boldsymbol{w} \in K_2$, esto es, $\boldsymbol{w} \in \mathrm{H}^r(\mathrm{div}_r; \Omega)$ tal que

$$
\boldsymbol{w} \cdot \nu = 0 \text{ en } \Gamma \quad \text{y} \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{w}) = 0 \text{ en } \Omega
$$

Se tiene que $\boldsymbol{w}_s := J_r(\boldsymbol{w}) \in \mathbf{L}^s(\Omega)$, y por lo tanto, $D_s(\boldsymbol{w}_s) \in \mathbf{L}^s(\Omega)$, con

$$
\mathrm{div}(D_s(\boldsymbol{w}_s)) = 0 \text{ en } \Omega \quad \text{y} \quad D_s(\boldsymbol{w}_s) \cdot \nu = 0 \text{ en } \Gamma
$$

es decir, $D_s(\boldsymbol{w}_s) \in K_1$. Además,

$$
\|D_s(\boldsymbol{w}_s)\|_{0,s;\Omega} \leq \|D_s\| \, \|\boldsymbol{w}\|_{0,s;\Omega}
$$

Así, de las propiedades de los operadores J_r y D_s demostradas en los Lemas 6.2 y 6.3, se sigue que

$$
\begin{aligned}
\sup_{\boldsymbol{v}\in K_1\setminus\{\theta\}} \frac{a_\varphi(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|_{X_1}} \geq & \frac{a_\varphi(\boldsymbol{w}, D_s(\boldsymbol{w}_s))}{\|D_s(\boldsymbol{w}_s)\|_{0,s;\Omega}} \\
\geq & \mu_1 \frac{\int_\Omega \boldsymbol{w}\cdot D_s(\boldsymbol{w}_s)}{\|D_s(\boldsymbol{w}_s)\|_{0,s;\Omega}} \\
= & \mu_1 \frac{\int_\Omega \boldsymbol{w}\cdot \boldsymbol{w}_s)}{\|D_s(\boldsymbol{w}_s)\|_{0,s;\Omega}} \\
\geq & \frac{\mu_1}{\|D_s\|} \frac{\int_\Omega \boldsymbol{w}\cdot \boldsymbol{w}_s}{\|\boldsymbol{w}\|_{0,s;\Omega}} \\
= & \frac{\mu_1}{\|D_s\|} \frac{\|\boldsymbol{w}\|_{0,r;\Omega}\|\boldsymbol{w}\|_{0,s;\Omega}}{\|\boldsymbol{w}\|_{0,s;\Omega}} \\
= & \frac{\mu_1}{\|D_s\|} \|\boldsymbol{w}\|_{0,r;\Omega}
\end{aligned}
$$

Observación 6.6

Notemos que lo anterior está bien planteado para $\boldsymbol{w} \neq \theta$, pues en dicho caso $D_s(\boldsymbol{w}_s) \neq \theta$.

Para (II)), nos damos $v \in K_1 \setminus \{\theta\}$, y observamos que $\boldsymbol{v}_r := J_s(\boldsymbol{v}) \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ con lo cual $D_r(\boldsymbol{v}s_r) \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ y

$$
\operatorname{div}(D_r(\boldsymbol{v}_r)) = 0 \text{ en } \Omega \quad \text{y} \quad D_r(\boldsymbol{w}_r)\cdot\nu = 0 \text{ en } \Gamma
$$

lo cual dice que $D_r(\boldsymbol{v}_r) \in K_2$, y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\sup_{\boldsymbol{v}\in K_1} a_\varphi(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) &\geq \mu_1 \int_\Omega D_r(\boldsymbol{v}_r)\cdot\boldsymbol{v} \\
&= \mu_1 \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_r \\
&= \mu_1 \|\boldsymbol{v}\|^r_{0,r;\Omega} > 0
\end{aligned}
$$

Ya probadas las condiciones para la forma a necesitaremos el siguiente lema para las condiciones *inf-sup* para las formas b_i.

Lema 6.4: Condiciones *inf-sup* para b_1 y b_2

Existen constantes $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_2 > 0$ tales que:

$$
\sup_{v\in X_i\setminus\{\theta\}} \frac{b_i(\boldsymbol{v},q)}{\|\boldsymbol{v}\|_{X_i}} \geq \tilde{\beta}_i \|q\|_{M_i} \quad \forall\, q\in M_i, \forall\, i\in\{1,2\}
$$

Demostración. Basta probar el resultado para $i = 1$. Así, dado $q \in M_1 = L^r_0(\Omega)$, definimos $q_s := J_r(q) \in L^s(\Omega)$. Luego, denotamos por $\boldsymbol{u} \in \widetilde{W}^{1,s}(\Omega)$ la única solución del problema de Neumann auxiliar(ver Lema 6.1) con los datos $g = q_s \in L^s(\Omega)$, $\boldsymbol{g} = \mathbf{0} \in \mathbf{L}^s(\Omega)$ y $g_{\mathrm{N}} = 0 \in \mathrm{W}^{-1/r,r}(\Gamma)$, es decir,

$$\begin{array}{rclcl} \Delta u & = & q_s & \text{en} & \Omega, \\ \nabla u \cdot \nu & = & 0 & \text{en} & \Gamma \end{array}$$

Sabemos que existe $C_s > 0$ tal que,

$$\|\boldsymbol{u}\|_{1,s;\Omega} \leq C_s \|q_s\|_{0,s;\Omega}$$

Luego, definiendo $\bar{\boldsymbol{v}} := -\nabla \boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^s(\Omega)$ en Ω, se tiene que $\mathrm{div}(\bar{\boldsymbol{v}}) = -q_s \in \mathbf{L}^s(\Omega)$, y por lo tanto, $\bar{\boldsymbol{v}} \in \mathrm{H}^s(\mathrm{div}_s; \Omega)$. Además, $\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ en Γ, con lo cual $\bar{\boldsymbol{v}} \in X_1$. A su vez,

$$\begin{aligned} \|\bar{\boldsymbol{v}}\|_{X_1} &= \|\bar{\boldsymbol{v}}\|_{0,s;\Omega} + \|\mathrm{div}(\bar{\boldsymbol{v}})\|_{0,s;\Omega} \\ &= |\boldsymbol{u}|_{1,s;\Omega} + \|q_s\|_{0,s;\Omega} \end{aligned}$$

de donde,

$$\|\bar{\boldsymbol{v}}\|_{X_1} \leq (1 + C_s) \|q_s\|_{0,s;\Omega}$$

Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \sup_{v \in X_1 \setminus \{\theta\}} \frac{b_1(\boldsymbol{v}, q)}{\|\boldsymbol{v}\|_{X_1}} &\geq \frac{b_1(\bar{\boldsymbol{v}}, q)}{\|\bar{\boldsymbol{v}}\|_{X_1}} \\ &= \frac{-\int_\Omega q \,\mathrm{div}(\bar{\boldsymbol{v}})}{\|\bar{\boldsymbol{v}}\|_{X_1}} \\ &= \frac{-\int_\Omega q q_s}{\|\bar{\boldsymbol{v}}\|_{X_1}} \\ &= \frac{\|q\|_{0,r;\Omega} \|q_s\|_{0,s;\Omega}}{\|\bar{\boldsymbol{v}}\|_{X_1}} \\ &\geq (1 + C_s)^{-1} \|q\|_{0,s;\Omega} \end{aligned}$$

lo cual prueba la condición *inf-sup* para b_1 con $\tilde{\beta}_1 := (1 + C_s)^{-1}$.
El caso para b_2 es análogo, y en dicho caso se obtiene que $\tilde{\beta}_2 := (1 + C_r)^{-1}$ ■

Finalmente, aplicando el Teorema de Babuška-Brezzi para espacios de Banach, se concluye que, dado $\phi \in Q$, existe un único $(\boldsymbol{u}, p) \in X_2 \times M_1$ tal que:

$$\begin{array}{lcll} a_\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b_1(\boldsymbol{v}, p) & = & \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} & , \forall \boldsymbol{v} \in X_1 \\ b_2(\boldsymbol{u}, q) & = & 0 & , \forall p \in M_2 \end{array}$$

Además, se tiene la dependencia continua

$$\|\boldsymbol{u}\|_{X_2} \leq \frac{1}{\tilde{\alpha}} \|f\|_{0,r;\Omega} \quad \text{y} \quad \|p\|_{0,r;\Omega} \leq \frac{1}{\tilde{\beta}_1} \left(1 + \frac{\mu_2}{\tilde{\alpha}}\right) \|f\|_{0,r;\Omega} \tag{6.7}$$

El análisis anterior, induce la definición del operador $\tilde{T} : L^\rho(\Omega) \to X_2 \times M_1$ tal que a cada $\psi \in L^\rho(\Omega)$ le asigna $\tilde{T}(\psi) := (\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{p}) \in X_2 \times M_1$, única solución del problema

$$\begin{array}{lcll} a_\psi(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) + b_1(\boldsymbol{v}, \tilde{p}) & = & \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} & , \forall \boldsymbol{v} \in X_1 \\ b_2(\tilde{\boldsymbol{u}}, q) & = & 0 & , \forall p \in M_2 \end{array}$$

De acuerdo a las cotas (6.7), se tiene que,

$$\left\|\tilde{T}_1(\psi)\right\|_{X_2} \leq \frac{1}{\tilde{\alpha}} \|f\|_{0,r;\Omega} \quad \text{y} \quad \left\|\tilde{T}_2(\psi)\right\|_{0,r;\Omega} \leq \frac{1}{\tilde{\beta}_1}\left(1 + \frac{\mu_2}{\tilde{\alpha}}\right) \|f\|_{0,r;\Omega} \tag{6.8}$$

6.6. Solubilidad para la formulación mixta para el problema de Convección-Difusión

Dado $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$, nos interesa: Hallar $\boldsymbol{\sigma}, \varphi \in H \times Q$ tal que:

$$\begin{array}{lcll} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \varphi) + \int_\Omega \varphi \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\tau} & = & 0 & , \forall \boldsymbol{\tau} \in H \\ b(\boldsymbol{\sigma}, \psi) & = & -k \int_\Omega \psi f & , \forall \psi \in Q \end{array}$$

Notemos primero que, siendo B el operador inducido por la forma bilineal b, se sigue que

$$\begin{aligned} V =& N(\mathrm{B}) \\ =& \{\boldsymbol{\tau} \in H : b(\boldsymbol{\tau}, \psi) = 0, \forall \psi \in Q\} \\ =& \left\{\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{H}(\mathrm{div}_\varrho; \Omega) : \int_\Omega \psi \,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) = 0, \forall \psi \in L^\rho(\Omega)\right\} \\ =& \{\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{H}(\mathrm{div}_\varrho; \Omega) : \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0} \text{ en } \Omega\} \end{aligned}$$

Observación 6.7

La última igualdad es gracias a que $\mathbf{L}^\rho(\Omega)$ es el dual de $\mathbf{L}^\varrho(\Omega)$.

Se sigue entonces que para cada $\boldsymbol{\tau} \in V$

$$a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) = \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{0;\Omega} = \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{\mathbf{div}_{4/3};\Omega}$$

de lo cual se concluye que a verifica las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi en espacios de Banach:

$$\sup_{\boldsymbol{\tau} \in V \setminus \{\theta\}} \frac{a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathrm{div}_{4/3};\Omega}} \geq \hat{\alpha} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathrm{div}_{4/3};\Omega}, \forall \boldsymbol{\sigma} \in V \quad \text{y} \quad \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in V} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) > 0, \forall \boldsymbol{\tau} \in V \setminus \{\theta\}$$

con $\hat{\alpha} = 1$.
Por otro lado, para la condición *inf-sup* continua de la forma bilineal b se tiene el siguiente resultado.

Lema 6.5

Existe $\hat{\beta} > 0$ tal que

$$\sup_{\boldsymbol{\tau} \in H \setminus \{\theta\}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}, \psi)}{\|\boldsymbol{\tau}\|_H} \geq \hat{\beta} \|\psi\|_Q \quad \forall \psi \in Q$$

Dado $\psi \in Q := L^{\rho}(\Omega)$ se define $\psi_{\varrho} := J_{\rho}(\psi) \in L^{\varrho}(\Omega)$, el cual satisface

$$\int_{\Omega} \psi\psi_{\varrho} = \|\psi\|_{0,\rho;\Omega} \|\psi_{\varrho}\|_{0,\varrho;\Omega}$$

Luego, se considera el problema auxiliar

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \psi_{\varrho} \quad \text{en} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \end{aligned}$$

Luego, testeando con $z \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, y aplicando la Formula de Integración por partes (3.3), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi z &= -\int_{\Omega} z\Delta u \\ &= -\int_{\Omega} z \operatorname{div}(\nabla u) \\ &= \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla v - \langle \nabla v, \gamma_0(z) \rangle \\ &= \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla v \end{aligned}$$

es decir, se obtiene la formulación variacional

$$\begin{gathered} \textit{Hallar } u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \textit{ tal que:} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla z = \int_{\Omega} \psi_{\varrho} z \quad z \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \end{gathered}$$

Por cuanto la inyección $i_{\rho} : \mathrm{H}^1(\Omega) \to L^{\rho}(\Omega)$ es continua, para $\rho \geq 1$ y $\rho \in [1,6]$ en los casos bidimensional y tridimensional, respectivamente, se tiene que

$$\left| \int_{\Omega} \psi_{\varrho} z \right| \leq \|\psi_{\varrho}\|_{0,\varrho;\Omega} \|z\|_{0,\rho;\Omega} \leq \|i_{\rho}\| \|\psi_{\varrho}\|_{0,\varrho;\Omega} \|z\|_{1;\Omega}$$

y por lo tanto el lado derecho es un funcional en $\mathrm{H}_0^1(\Omega)'$. Así, por Teorema de Lax-Milgram clásico, existe un único $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ solución del problema auxiliar, y además,

$$|u|_{1,\Omega} \leq \|i_q\| \|\psi_{\varrho}\|_{0,\varrho;\Omega}$$

donde $c_p > 0$ es tal que

$$\|z\|_{1;\Omega} \leq c_p \|z\|_{1;\Omega} \quad \forall z \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$

Luego, definiendo $\hat{\tau} := -\nabla u \in L^2(\Omega)$, se tiene que $\operatorname{div}(\hat{\tau}) = \psi_{\varrho} \in L^{\varrho}(\Omega)$, lo cual prueba que $\hat{\tau} \in \mathrm{H}(\operatorname{div}_{\varrho}; \Omega)$. Además,

$$\|\hat{\tau}\|_{\operatorname{div}_{\varrho};\Omega} = \|\hat{\tau}\|_{0;\Omega} + \|\operatorname{div}(\hat{\tau})\|_{0,\varrho;\Omega} = |u|_{1;\Omega} + \|\psi_{\varrho}\|_{0,\varrho;\Omega} \leq (1 + c_p \|i_{\rho}\|) \|\psi\|_{0,\rho;\Omega}$$

Finalmente, se tiene que

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in H \setminus \{\theta\}} \frac{b(\tau,\psi)}{\|\tau\|_H} &\geq \frac{b(\hat{\tau},\psi)}{\|\hat{\tau}\|_{\operatorname{div}_{\varrho};\Omega}} \\ &= \frac{\int_{\Omega} \psi \operatorname{div}(\hat{\tau})}{\|\hat{\tau}\|_{\operatorname{div}_{\varrho};\Omega}} \\ &= \frac{\int_{\Omega} \psi\psi_{\varrho}}{\|\hat{\tau}\|_{\operatorname{div}_{\varrho};\Omega}} \\ &\geq \hat{\beta} \|\psi\|_{0,\rho;\Omega} \end{aligned}$$

con $\hat{\beta} = (1 + c_p \|i_\rho\|)^{-1}$.

´ Definimos ahora la forma bilineal

$$\begin{array}{rcl} A : (H \times Q) \times (H \times Q) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((\boldsymbol{\sigma}, \varphi), (\boldsymbol{\tau}, \psi)) & \longmapsto & A((\boldsymbol{\sigma}, \varphi), (\boldsymbol{\tau}, \psi)) := a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \varphi) + b(\boldsymbol{\sigma}, \psi) \end{array}$$

Por cuanto a y b verifican las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi en espacios de Banach, se deduce que el operador $\mathbb{A} \in \mathcal{L}((H \times Q), (H \times Q)')$ inducido por A es biyectivo. Más aún, existe una constante $\alpha_{\hat{T}} > 0$, que depende de $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\|a\|$, tal que

$$\sup_{(\boldsymbol{\tau},\psi) \in (H \times Q) \setminus \{\theta\}} \frac{A((\boldsymbol{\zeta}, \phi), (\boldsymbol{\tau}, \psi))}{\|(\boldsymbol{\tau}, \psi)\|_{H \times Q}} \geq \alpha_{\hat{T}} \|(\boldsymbol{\zeta}, \psi)\|_{H \times Q}$$

Ahora, dado $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ consideramos la forma bilineal

$$\begin{array}{rcl} A_{\boldsymbol{w}} : (H \times Q) \times (H \times Q) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((\boldsymbol{\sigma}, \varphi), (\boldsymbol{\tau}, \psi)) & \longmapsto & A_{\boldsymbol{w}}((\boldsymbol{\sigma}, \varphi), (\boldsymbol{\tau}, \psi)) := A((\boldsymbol{\sigma}, \varphi), (\boldsymbol{\tau}, \psi)) + \displaystyle\int_\Omega \varphi \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\tau} \end{array}$$

Con esta notación, el problema ($P_{\text{c-d}}$), se reescribe como: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) \in H \times Q$ tal que:

$$A_{\boldsymbol{u}}((\boldsymbol{\sigma}, \varphi), (\boldsymbol{\tau}, \psi)) = G(\boldsymbol{\tau}, \psi) \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \psi) \in H \times Q$$

donde el funcional $G(\boldsymbol{\tau}, \psi) \in (H \times Q)'$ se define como:

$$G(\boldsymbol{\tau}, \psi) := -k \int_\Omega \psi f$$

Se sigue, que dado $(\boldsymbol{\zeta}, \phi) \in H \times Q$, entonces,

$$\begin{aligned} \sup_{(\boldsymbol{\tau},\psi) \in (H \times Q) \setminus \{\theta\}} \frac{A_{\boldsymbol{u}}((\boldsymbol{\zeta}, \phi), (\boldsymbol{\tau}, \psi))}{\|(\boldsymbol{\tau}, \psi)\|_{H \times Q}} \geq & \sup_{(\boldsymbol{\tau},\psi) \in (H \times Q) \setminus \{\theta\}} \frac{A((\boldsymbol{\zeta}, \phi), (\boldsymbol{\tau}, \psi))}{\|(\boldsymbol{\tau}, \psi)\|_{H \times Q}} + \frac{\int_\Omega \varphi \boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}}{\left\|(\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\psi})\right\|_{H \times Q}} \\ \geq & \alpha_{\hat{T}} \|(\boldsymbol{\zeta}, \psi)\|_{H \times Q} - \frac{\left|\int_\Omega \varphi \boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}\right|}{\left\|(\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\psi})\right\|_{H \times Q}} \\ \geq & \alpha_{\hat{T}} \|(\boldsymbol{\zeta}, \psi)\|_{H \times Q} - \frac{\|\phi\|_{0,r;\Omega} \|\boldsymbol{u}\|_{0,\rho;\Omega} \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{0;\Omega}}{\left\|(\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\psi})\right\|_{H \times Q}} \\ \geq & \alpha_{\hat{T}} \|(\boldsymbol{\zeta}, \psi)\|_{H \times Q} - \|\boldsymbol{u}\|_{0,\rho;\Omega} \|(\boldsymbol{\zeta}, \phi)\|_{H \times Q} \\ = & (\alpha_{\hat{T}} - \|\boldsymbol{u}\|_{0,\rho;\Omega}) \|(\boldsymbol{\zeta}, \psi)\|_{H \times Q} \end{aligned}$$

Así, dado $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ tal que $\|\boldsymbol{u}\|_{0,r;\Omega} < \frac{\alpha_{\hat{T}}}{2}$ se tiene la *inf-sup* global,

$$\sup_{(\boldsymbol{\tau},\psi) \in (Q \times Q) \setminus \{\theta\}} \frac{A_{\boldsymbol{u}}((\boldsymbol{\zeta}, \phi), (\boldsymbol{\tau}, \psi))}{\|(\boldsymbol{\tau}, \psi)\|_{H \times Q}} \geq \frac{\alpha_{\hat{T}}}{2} \|(\boldsymbol{\zeta}, \psi)\|_{H \times Q} \tag{6.9}$$

Observación 6.8

La cota para la norma $\|\boldsymbol{u}\|_{0,r;\Omega}$ es posible escogerla como $(1-\delta)\alpha_{\hat{T}}$ con $\delta\in]0,1[$. Se suele escoger $\delta=0{,}5$ para maximizar el radio de la bola para escoger $\boldsymbol{u}$ junto con el valor de $(1-\delta)\alpha_{\hat{T}}$.

A su vez, puesto que $A_{\boldsymbol{w}}$ no es simétrica, pero A si lo es, se prueba también que, dado $(\boldsymbol{\tau},\psi)\in H\times Q$,

$$\begin{aligned}\sup_{(\boldsymbol{\zeta},\phi)\in(H\times Q)\setminus\{\theta\}}\frac{A_{\boldsymbol{u}}((\boldsymbol{\zeta},\phi),(\boldsymbol{\tau},\psi))}{\|(\boldsymbol{\zeta},\phi)\|_{H\times Q}}\geq&\sup_{(\boldsymbol{\zeta},\phi)\in(H\times Q)\setminus\{\theta\}}\frac{A((\boldsymbol{\zeta},\phi),(\boldsymbol{\tau},\psi))}{\|(\boldsymbol{\zeta},\phi)\|_{H\times Q}}+\frac{\int_\Omega\hat{\varphi}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau}}{\left\|(\hat{\boldsymbol{\zeta}},\hat{\phi})\right\|_{H\times Q}}\\ \geq&\alpha_{\hat{T}}\|(\boldsymbol{\tau},\psi)\|_{H\times Q}-\frac{\left|\int_\Omega\hat{\varphi}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau}\right|}{\left\|(\hat{\boldsymbol{\zeta}},\hat{\phi})\right\|_{H\times Q}}\\ \geq&\alpha_{\hat{T}}\|(\boldsymbol{\tau},\psi)\|_{H\times Q}-\frac{\left\|\hat{\phi}\right\|_{0,r;\Omega}\|\boldsymbol{u}\|_{0,\rho;\Omega}\|\boldsymbol{\tau}\|_{0;\Omega}}{\left\|(\hat{\boldsymbol{\zeta}},\hat{\phi})\right\|_{H\times Q}}\\ \geq&\alpha_{\hat{T}}\|(\boldsymbol{\tau},\psi)\|_{H\times Q}-\|\boldsymbol{u}\|_{0,\rho;\Omega}\|(\boldsymbol{\zeta},\phi)\|_{H\times Q}\\ =&(\alpha_{\hat{T}}-\|\boldsymbol{u}\|_{0,\rho;\Omega})\|(\boldsymbol{\tau},\psi)\|_{H\times Q}\end{aligned}$$

lo cual no agrega condiciones extras para $\boldsymbol{u}$.

Así, aplicando el Teorema de Lax-Milgram caso general en espacios de Banach, se tiene que dado $\boldsymbol{u}\in\mathbf{L}^r(\Omega)$ tal que $\|\boldsymbol{u}\|_{0,r;\Omega}\leq\frac{\alpha_{\hat{T}}}{2}$, se tiene que existe un único $(\boldsymbol{\sigma},\varphi)$ tal que

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau})+b(\boldsymbol{\tau},\varphi)+\int_\Omega\varphi\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau}&=0&&,\forall\boldsymbol{\tau}\in H\\ b(\boldsymbol{\sigma},\psi)&=-k\int_\Omega\psi f&&,\forall\psi\in Q\end{aligned}$$

Más aún, se tiene que

$$\|(\boldsymbol{\sigma},\varphi)\|_{H\times Q}\leq\frac{2}{\alpha_{\hat{T}}}|k|\,\|f\|_{0,\varrho;\Omega}\tag{6.10}$$

El análisis anterior, induce la definición del operador $\hat{T}:\overline{B(\theta,\alpha_{\hat{T}}/2)}\subset\mathbf{L}^r(\Omega)\to H\times Q$ tal que a cada $\boldsymbol{v}\in\mathbf{L}^r(\Omega)$ le asigna $\hat{T}(\boldsymbol{v}):=(\hat{\boldsymbol{\sigma}},\hat{\varphi})\in H\times Q$, única solución del problema

$$\begin{aligned}a(\hat{\boldsymbol{\sigma}},\boldsymbol{\tau})+b(\boldsymbol{\tau},\hat{\varphi})+\int_\Omega\hat{\varphi}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau}&=0&&,\forall\boldsymbol{\tau}\in H\\ b(\hat{\boldsymbol{\sigma}},\psi)&=-k\int_\Omega\psi f&&,\forall\psi\in Q\end{aligned}$$

De acuerdo a las cotas (6.10), se tiene que,

$$\left\|\hat{T}(\boldsymbol{u})\right\|_{H\times Q}\leq\frac{2}{\alpha_{\hat{T}}}|k|\,\|f\|_{0,\varrho;\Omega}\tag{6.11}$$

6.7. Formulación de punto fijo

De las definiciones del operadores solución $\tilde{T}$ y $\hat{T}$, para los problemas (P_{D}) y ($P_{\text{c-d}}$), respectivamente, se define el operador de punto fijo,

$$\begin{aligned}T:\overline{B(\theta,\alpha_{\hat{T}}/2)}\subset\mathbf{L}^r(\Omega)&\longrightarrow\mathbf{L}^r(\Omega)\\ \boldsymbol{w}&\longmapsto T(\boldsymbol{w}):=\tilde{T}_1(\hat{T}_2(\boldsymbol{w}))\end{aligned}$$

Así, el problema acoplado se reduce a:

$$\begin{aligned}&\textit{Hallar } \boldsymbol{u} \in \overline{B(\theta, \alpha_{\hat{T}}/2)} \subset \mathbf{L}^r(\Omega) \textit{ tal que:}\\ &T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{PPF}$$

Observación 6.9

El operador de punto fijo puede definirse como:

$$\begin{aligned} T : L^\rho(\Omega) &\longrightarrow L^\rho(\Omega)\\ \psi &\longmapsto T(\psi) := \hat{T}_2(\tilde{T}_1(\boldsymbol{w}))\end{aligned}$$

6.8. Solubilidad de la formulación de punto fijo

Ahora dado $\boldsymbol{w} \in \overline{B(\theta, \alpha_{\hat{T}}/2)} \subset \mathbf{L}^r(\Omega)$, así $\tilde{T}_2(\boldsymbol{w})$ y por lo tanto $T(\boldsymbol{w})$ está bien definido, se tiene que

$$\|T(\boldsymbol{w})\|_{0,r;\Omega} = \left\|\tilde{T}_1(\hat{T}_2(\boldsymbol{w}))\right\|_{0,r;\Omega} \leq \frac{1}{\tilde{\alpha}} \|\boldsymbol{f}\|_{0,r;\Omega}$$

de modo que se quiere que T lleve S a sí mismo, donde

$$S := \left\{\boldsymbol{w} \in \mathbf{L}^r(\Omega) \,:\, \|\boldsymbol{w}\|_{0,r;\Omega} < \frac{\alpha_{\hat{T}}}{2}\right\}$$

se requiere que el dato f satisfaga que

$$\|f\|_{0,r;\Omega} \leq \frac{\tilde{\alpha}\hat{\alpha}_T}{2}$$

Lema 6.6: Lipchitz continuidad del operador $\hat{T}$

Existe una constante $L_{\hat{T}} > 0$, que depende de $\hat{\alpha}_T$

$$\left\|\hat{T}(\boldsymbol{w}) - \hat{T}(\boldsymbol{z})\right\|_{0,r;\Omega} \leq L_{\hat{T}}\,|k|\,|f|_{0,\varrho;\Omega}\,\|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{z}\|_{0,r;\Omega} \quad \forall\, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in S$$

Demostración. Dados $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in S$, denotamos $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\varphi}) = \hat{T}(\boldsymbol{w}) \in H \times Q$ y $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\varphi}) = \hat{T}(\boldsymbol{z}) \in H \times Q$, es decir,

$$\begin{aligned} a(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \hat{\varphi}) + \int_\Omega \hat{\varphi}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\tau} &= 0 & ,\forall \boldsymbol{\tau} \in H\\ b(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \psi) &= -k\int_\Omega \psi f & ,\forall \psi \in Q\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \tilde{\varphi}) + \int_\Omega \tilde{\varphi}\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{\tau} &= 0 & ,\forall \boldsymbol{\tau} \in H\\ b(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \psi) &= -k\int_\Omega \psi f & ,\forall \psi \in Q\end{aligned}$$

respectivamente. Al restar las segundas ecuaciones se tiene:

$$b(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in Q$$

y restando las primeras ecuaciones, se sigue

$$a(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \hat{\varphi} - \tilde{\varphi}) = \int_\Omega (\tilde{\varphi}\boldsymbol{z} - \hat{\varphi}\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{\tau} \quad \boldsymbol{\tau} \in H$$

Se sigue, usando las formas bilineales A y $A_{\boldsymbol{w}}$, que

$$A((\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\varphi} - \hat{\varphi}), (\boldsymbol{\tau}, \psi)) = \int_\Omega (\tilde{\varphi}\boldsymbol{z} - \hat{\varphi}\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \psi) \in H \times Q$$

y

$$A_{\boldsymbol{w}}((\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\varphi} - \hat{\varphi}), (\boldsymbol{\tau}, \psi)) = \int_\Omega \tilde{\varphi}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \psi) \in H \times Q$$

Luego, aplicando la condición *inf-sup* global para $A_{\boldsymbol{w}}$ a $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\varphi}) - (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\varphi}) \in H \times Q$, resulta

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_{\hat{T}}}{2} \left\| (\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\varphi}) - (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\varphi}) \right\|_{H\times Q} &\leq \sup_{(\boldsymbol{\zeta},\phi)\in(H\times Q)\setminus\{\theta\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega (\tilde{\varphi}\boldsymbol{z} - \hat{\varphi}\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{\tau}}{\|(\boldsymbol{\tau}, \psi)\|_{H\times Q}} \\
&\leq \|\tilde{\varphi}\|_{0,\rho;\Omega} \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{w}\|_{0,r;\Omega}
\end{aligned}$$

Hemos probado así que:

$$\left\| \hat{T}(\boldsymbol{w}) - \hat{T}(\boldsymbol{z}) \right\|_{H\times Q} \leq \frac{2}{\alpha_{\hat{T}}} \|\tilde{\varphi}\|_{0,\rho;\Omega} \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{z}\|_{0,r;\Omega}$$

Por otro lado, para $\tilde{\varphi} = \hat{T}_2(\boldsymbol{z})$, se tiene que,

$$\|\tilde{\varphi}\|_{0,\rho;\Omega} = \left\| \hat{T}_2(\boldsymbol{z}) \right\|_{0,\rho;\Omega} \leq \left\| \hat{T}(\boldsymbol{z}) \right\| \leq \frac{2}{\alpha_{\hat{T}}} |k| \|f\|_{0,\varrho;\Omega}$$

con lo cual

$$\left\| \hat{T}(\boldsymbol{w}) - \hat{T}(\boldsymbol{z}) \right\|_{H\times Q} \leq L_{\hat{T}} |k| \|f\|_{0,\varrho;\Omega} \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{z}\|_{0,r;\Omega} \quad \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in S$$

con $L_{\hat{T}} := \dfrac{4}{\alpha_{\hat{T}}^2}$. ■

6.8.1. Supuestos de regularidad para $\tilde{T}$ y $\hat{T}$

En lo que sigue supondremos que existe $\epsilon > 1/3$ para el caso bidimensional o $\epsilon > 1/2$ para el tridimensional y constante $\hat{c}_\epsilon$ y $\tilde{c}_\epsilon$ positivas tales que:

H1) Para cada $\boldsymbol{w} \in S$,

$$\hat{T}(\boldsymbol{w}) := (\hat{T}_1(\boldsymbol{w}), \hat{T}_2(\boldsymbol{w})) \in (H^\epsilon(\Omega) \cap H) \times \mathrm{W}^{\epsilon,\rho}(\Omega)$$

y

$$\left\| \hat{T}_1(\boldsymbol{w}) \right\|_{\epsilon;\Omega} + \left\| \hat{T}_2(\boldsymbol{w}) \right\|_{\epsilon,\rho;\Omega} \leq \hat{c}_\epsilon |k| \|f\|_{0,\varrho;\Omega}$$

H2) Para cada $\psi \in \mathrm{W}^{\epsilon,\rho}(\Omega)$ se tiene que

$$\tilde{T}(\psi) := (\tilde{T}_1(\psi), \tilde{T}_2(\psi)) \in (\mathrm{W}^{\epsilon,r}(\Omega) \cap X_2) \times (\mathrm{W}^{\epsilon,r}(\Omega) \cap M_1)$$

y

$$\left\| \tilde{T}_1(\psi) \right\|_{\epsilon,r;\Omega} + \left\| \tilde{T}_2(\psi) \right\|_{\epsilon,r;\Omega} \leq \tilde{c}_\epsilon \|\boldsymbol{f}\|_{0,r;\Omega}$$

Por otro lado, recordemos que para $r\epsilon < n$ se tiene que:

$$i_\epsilon : \mathrm{W}^{\epsilon,r}(\Omega) \longrightarrow L^{\epsilon *}(\Omega)$$

es continua, donde $\epsilon * = \frac{nr}{n-r\epsilon}$(ver Teorema 3.1).

Lema 6.7: Lipchitz continuidad del operador $\tilde{T}$

Existe $L_{\tilde{T}} > 0$, que depende de $\tilde{\alpha}$, L_μ, $\|i_\epsilon\|$, $\tilde{c}_\epsilon$, $|\Omega|$, n y ϵ tal que:

$$\left\|\tilde{T}_1(\psi) - \tilde{T}_1(\varphi)\right\| \leq L_{\hat{T}} \|f\|_{0,r;\Omega} \|\psi - \varphi\|_{0,\rho;\Omega} \quad \forall \psi, \varphi \in \mathrm{W}^{\epsilon,\rho}(\Omega)$$

Demostración. Dados $\psi, \varphi \in \mathrm{W}^{\epsilon,\rho}(\Omega)$ denotamos $\tilde{T}(\psi) := (\tilde{T}_1(\psi), \tilde{T}_2(\psi)) = (\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{p}) \in X_2 \times M_1$ y $\tilde{T}(\varphi) := (\tilde{T}_1(\varphi), \tilde{T}_2(\varphi)) = (\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{p}) \in X_2 \times M_1$ De las segundas ecuaciones que definen $\tilde{T}(\psi)$ y $\tilde{T}(\varphi)$ se tiene

$$b_2(\tilde{\boldsymbol{u}}, q) = 0 \quad \text{y} \quad b_2(\tilde{\boldsymbol{u}}, q) = 0 \quad \forall q \in M_2 = L^s_0(\Omega)$$

y por lo tanto,

$$b_2(\tilde{\boldsymbol{u}} - \bar{\boldsymbol{u}}, q) = 0 \quad \forall q \in M_2$$

lo cual prueba que $\tilde{\boldsymbol{u}} - \bar{\boldsymbol{u}} \in K_2 = N(\mathrm{B}_2)$, donde B_2 es el operador inducido por b_2. Así, aplicando la condición *inf-sup* continua para a_ψ a $\tilde{u} - \bar{u} \in K_2$, se tiene:

$$\tilde{\alpha} \|\tilde{\boldsymbol{u}} - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{X_2} \leq \sup_{\boldsymbol{v} \in K_1 \setminus \{\theta\}} \frac{a_\psi(\tilde{\boldsymbol{u}} - \bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|_{X_1}}$$

Ahora, de las primeras ecuaciones que definen los operadores $\tilde{T}(\psi)$ y $\tilde{T}(\varphi)$, se tiene:

$$a_\psi(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) + b_1(\boldsymbol{v}, \tilde{p}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \quad \text{y} \quad a_\varphi(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) + b_1(\boldsymbol{v}, \tilde{p}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \quad \forall \boldsymbol{v} \in X_1$$

de donde, dado $\boldsymbol{v} \in K_1$

$$\begin{aligned} a_\psi(\tilde{\boldsymbol{u}} - \bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) &= a_\psi(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) - a_\psi(\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) \\ &= \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} - a_\psi(\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) \\ &= a_\varphi(\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) - a_\psi(\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) \\ &= \int_\Omega (\mu(\varphi) - \mu(\psi))\, \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} |a_\psi(\tilde{\boldsymbol{u}} - \bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v})| &= \left| \int_\Omega (\mu(\varphi) - \mu(\psi))\, \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v} \right| \\ &\leq L_\mu \int_\Omega |\varphi - \psi| \, \|\bar{\boldsymbol{u}}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \\ &\leq L_\mu \, \||\varphi - \psi| \, \|\bar{\boldsymbol{u}}\|\|_{0,r;\Omega} \, \|\boldsymbol{v}\|_{0,s;\Omega} \\ &\leq L_\mu \, \|\varphi - \psi\|_{0,rj;\Omega} \, \|\bar{\boldsymbol{u}}\|_{0,rl;\Omega} \, \|\boldsymbol{v}\|_{0,s;\Omega} \end{aligned}$$

donde $l, j > 1$ son conjugados de Hölder. Y por lo tanto, volviendo a la condición *inf-sup* para a_ψ, se deduce que:

$$\tilde{\alpha} \|\tilde{\boldsymbol{u}} - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{0,r;\Omega} \leq L_\mu \|\varphi - \psi\|_{0,rj;\Omega} \|\bar{\boldsymbol{u}}\|_{0,rl;\Omega}$$

A continuación elegimos l tal que $rl = \epsilon*$, es decir, $l = \frac{n}{n-r\epsilon}$, y por lo tanto, $j = \frac{n}{r\epsilon}$, con lo cual $rj = \frac{n}{\epsilon}$. Se sigue así que

$$\tilde{\alpha}\, \|\tilde{\boldsymbol{u}} - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{0,r;\Omega} \leq L_\mu\, \|\varphi - \psi\|_{0,n/\epsilon;\Omega}\, \|\bar{\boldsymbol{u}}\|_{0,\epsilon*;\Omega}$$

A su vez,

$$\begin{aligned} \|\bar{\boldsymbol{u}}\|_{0,\epsilon*;\Omega} &= \left\|\tilde{T}_1(\varphi)\right\|_{0,\epsilon*;\Omega} \\ &\leq \|i_\epsilon\| \left\|\tilde{T}_1(\varphi)\right\|_{\epsilon,r;\Omega} \\ &\leq \|i_\epsilon\|\, \tilde{c}_\epsilon\, \|\boldsymbol{f}\|_{0,r;\Omega} \end{aligned}$$

con lo cual

$$\tilde{\alpha}\, \|\tilde{\boldsymbol{u}} - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{0,r;\Omega} \leq L_\mu\, \|i_\epsilon\|\, \tilde{c}_\epsilon\, \|\boldsymbol{f}\|_{0,r;\Omega}\, \|\varphi - \psi\|_{0,n/\epsilon;\Omega}$$

Finalmente, para recuperar $\|\psi - \varphi\|_{0,\rho;\Omega}$ imponemos que $i : L^\rho(\Omega) \to L^{n/\epsilon}(\Omega)$ sea continua, lo cual se asegura para $\rho \geq n/\epsilon$. Así, se obtiene

$$\left\|\tilde{T}_1(\psi) - \tilde{T}_1(\varphi)\right\|_{0,r;\Omega} \leq L_\mu\, \|i_\epsilon\|\, \tilde{c}_\epsilon\, \|i\|\, \|\boldsymbol{f}\|_{0,r;\Omega}\, \|\psi - \varphi\|_{0,\rho;\Omega}$$

donde $\|i\| = |\Omega|^{\frac{\epsilon\rho - n}{n\rho}}$, y por lo tanto,

$$\left\|\tilde{T}_1(\psi) - \tilde{T}_1(\varphi)\right\|_{0,r;\Omega} \leq L_{\tilde{T}}\, \|\boldsymbol{f}\|_{0,r;\Omega}\, \|\psi - \varphi\|_{\epsilon,\rho;\Omega}$$

con $L_{\tilde{T}} := L_\mu\, \|i_\epsilon\|\, \tilde{c}_\epsilon\, \|i\| > 0$. ■

Observación 6.10

1) Es posible, eventualmente, mejorar esta cota buscando condiciones bajo las cuales la inyección $\tilde{i}_\epsilon : \mathrm{W}^{\epsilon,r}(\Omega) \to L^{n/\epsilon}(\Omega)$ es continua.

2) $\rho \geq n/\epsilon$ si y sólo si

$$\epsilon \geq \frac{n}{\rho} = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & \text{si } n = 2 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } n = 3 \end{cases}$$

Lema 6.8: Lipchitz continuidad del operador de punto fijo T

Existe una constante $L_T > 0$, que depende de $L_{\hat{T}}$ y $L_{\tilde{T}}$, tal que,

$$\|T(\boldsymbol{w}) - T(\boldsymbol{z})\|_{0,r;\Omega} \leq L_T\, \|\boldsymbol{f}\|_{0,r;\Omega}\, |k|\, \|f\|_{0,\varrho;\Omega}\, \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{z}\|_{0,\rho;\Omega}$$

Demostración. Dados $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in S$ se tiene por (H1)) que $\hat{T}_2(\boldsymbol{w}), \hat{T}_2(\boldsymbol{w}) \in \mathrm{W}^{\epsilon,\rho}(\Omega)$. Luego, usando la

Lipschitz-continuidad de $\hat{T}$(ver Lema (6.6)) y $\tilde{T}$(ver Lema (6.7)), se tiene que

$$\begin{aligned}\|T(\boldsymbol{w})-T(\boldsymbol{z})\|_{0,r;\Omega}=&\left\|\tilde{T}_1(\hat{T}_2(\boldsymbol{w}))-\tilde{T}_1(\hat{T}_2(\boldsymbol{z}))\right\|_{0,r;\Omega}\\ \leq& L_{\tilde{T}}\|\boldsymbol{f}\|_{0,r;\Omega}\left\|\hat{T}_2(\boldsymbol{w})-\hat{T}_2(\boldsymbol{z})\right\|_{\epsilon,\rho;\Omega}\\ \leq& L_{\tilde{T}}\|\boldsymbol{f}\|_{0,r;\Omega}L_{\hat{T}}|k|\,\|f\|_{0,\varrho;\Omega}\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{z}\|_{0,r;\Omega}\\ =& L_T\|\boldsymbol{f}\|_{0,r;\Omega}|k|\,\|f\|_{0,\varrho;\Omega}\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{z}\|_{0,r;\Omega}\end{aligned}$$

donde $L_T := L_{\hat{T}}L_{\tilde{T}}$. ■

Teorema 6.1

Supongamos que los datos verifican

$$\|\boldsymbol{f}\|_{0,r;\Omega}\leq\frac{\tilde{\alpha}\alpha_{\hat{T}}}{2}\quad\text{y}\quad L_T\|\boldsymbol{f}\|_{0,r;\Omega}|k|\,\|f\|_{0,\varrho;\Omega}<1$$

Entonces, nuestro problema de acoplado original ($P_{\text{D-c-d}}$), tiene una única solución $(\boldsymbol{\sigma},\varphi)\in H\times Q$ y $(\boldsymbol{u},p)\in X_2\times M_1$, con $\boldsymbol{u}\in X_2\cap S$. Además, se tienen las cotas a priori

$$\|(\boldsymbol{\sigma},\varphi)\|_{H\times Q}=\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathrm{div}_\varrho;\Omega}+\|\varphi\|_{0,\rho;\Omega}\leq\frac{2}{\alpha_{\hat{T}}}|k|\,\|f\|_{0,\varrho;\Omega}$$

$$\|\boldsymbol{u}\|_{X_2}\leq\frac{1}{\tilde{\alpha}}\|\boldsymbol{f}\|_{0,r;\Omega}\quad\text{y}\quad\|p\|_{M_1}\leq\frac{1}{\tilde{\beta}_1}\left(1+\frac{\mu_2}{\tilde{\alpha}}\right)\|\boldsymbol{f}\|_{0,r;\Omega}$$

Demostración. Se aplica el Teorema de Punto Fijo de Banach al problema (PPF), y las cotas a priori para los operadores $\hat{T}$ y $\tilde{T}$. ■

6.9. Análisis discreto

Dado un entero $k\geq 0$, definimos los espacios:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_k(\mathcal{T}_h)&:=\{q_h\in L^2(\Omega):q_h|_K\in\mathcal{P}_k(K),\forall K\in\mathcal{T}_h\}\\ RT_k(\mathcal{T}_h)&:=\{\boldsymbol{\tau}_h\in\mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega):\boldsymbol{\tau}_h|_K\in RT_k(K),\forall K\in\mathcal{T}_h\}\\ \mathcal{P}_{k+1,C}(\mathcal{T}_h)&:=\{\phi_h\in\mathrm{H}_0^1(\Omega):\phi_h|_K\in\mathcal{P}_{k+1}(K),\forall K\in\mathcal{T}_h\}\end{aligned}$$

Para el problema en cuestión, se definen los siguientes subespacios

$$\begin{aligned}H_h&:=\mathrm{H}(\mathrm{div}_\varrho;\Omega)\bigcap RT_k(\mathcal{T}_h)\\ Q_h&:=L^\rho(\Omega)\bigcap\mathcal{P}_k(\mathcal{T}_h)\\ X_{1,h}&:=\mathrm{H}_0^s(\mathrm{div}_s;\Omega)\bigcap RT_k(\mathcal{T}_h)\\ X_{2,h}&:=\mathrm{H}_0^r(\mathrm{div}_r;\Omega)\bigcap RT_k(\mathcal{T}_h)\\ M_{1,h}&:=L_0^r(\Omega)\bigcap\mathcal{P}_k(\mathcal{T}_h)\\ M_{2,h}&:=L_0^s(\Omega)\bigcap\mathcal{P}_k(\mathcal{T}_h)\end{aligned}$$

donde $\mathrm{H}_0^r(\mathrm{div}_r;\Omega):=\{\boldsymbol{w}\in\mathrm{H}^r(\mathrm{div}_r;\Omega):\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\nu}=0\text{ en }\partial\Omega\}$. Con respecto a las formas bilineales b, b_1 y b_2, se tiene que las formas bilineales discretas están dadas por

$$K_{1,h} := \{\boldsymbol{v}_h \in X_{1,h} : \int_\Omega q_h \operatorname{div}(\boldsymbol{v}_h) = 0, \forall q_h \in M_{1,h}\} = \{\boldsymbol{v}_h \in X_{1,h} : \operatorname{div}(\boldsymbol{v}_h) = 0\}$$
$$K_{2,h} := \{\boldsymbol{w}_h \in X_{2,h} : \int_\Omega q_h \operatorname{div}(\boldsymbol{w}_h) = 0, \forall q_h \in M_{2,h}\} = \{\boldsymbol{w}_h \in X_{2,h} : \operatorname{div}(\boldsymbol{w}_h) = 0\}$$

Luego, en vez de $K_{1,h}$ y $K_{2,h}$, definimos

$$K_h := \{\boldsymbol{v}_h \in RT_k(\mathcal{T}_h) : \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma \text{ y } \operatorname{div}(\boldsymbol{v}_h) = 0 \text{ en } \Omega\}$$

Luego, se introduce el proyector "ortogonal" $\Theta_h^k : \mathbf{L}^1(\Omega) \to K_h$, que a cada $\boldsymbol{w} \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ le asigna un único elemento $\Theta_h^k(\boldsymbol{w}) \in K_h$ tal que

$$\int_\Omega \Theta_h^k(\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{v}_h = \int_\Omega \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_h \qquad , \forall \boldsymbol{v}_h \in K_h \tag{6.12}$$

Observación 6.11

La demostración de la condición *inf-sup* discreta para a_φ depende de las propiedades de estabilidad de Θ_h^k en $\mathbf{L}^t(\Omega)$ con $t \in (1 + \infty)$.

Al respecto, tomando $\boldsymbol{v}_h = \Theta_h^k(\boldsymbol{w})$ en (6.12), resulta

$$\left\|\Theta_h^k(\boldsymbol{w})\right\|_{0;\Omega}^2 = \int_\Omega \boldsymbol{w} \cdot \Theta_h^k(\boldsymbol{w}) \leq \|\boldsymbol{w}\|_{0;\Omega} \left\|\Theta_h^k(\boldsymbol{w})\right\|_{0;\Omega}$$

de donde

$$\left\|\Theta_h^k(\boldsymbol{w})\right\|_{0;\Omega} \leq \|\boldsymbol{w}\|_{0;\Omega} \qquad \forall \boldsymbol{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$$

Para obtener las cotas de estabilidad de Θ_h^k en norma $\mathbf{L}^t(\Omega)$ con $t \in]1, \infty[\setminus \{2\}$, se necesita introducir el proyector de Ritz $R_h^k : \mathrm{H}_0^1(\Omega) :\longrightarrow \mathcal{P}_{k+1,c}(\mathcal{T}_h)$, que a cada $\phi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ le asigna el único $\mathbb{R}_h^k(\phi) \in \mathcal{P}_{k+1,C}(\mathcal{T}_h)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla R_h^k(\phi) \cdot \nabla \phi_h = \int_\Omega \nabla \phi \cdot \nabla \phi_h \qquad , \forall \phi_h \in \mathcal{P}_{k+1,C}(\mathcal{T}_h) \tag{6.13}$$

Análogamente a lo dicho para Θ_h^k, se obtiene que

$$\left\|\nabla \mathbb{R}_h^k(\phi)\right\|_{0;\Omega} \leq \|\nabla \phi\|_{0;\Omega} \qquad , \forall \phi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$

Para la estabilidad de ∇R_h^k en normas $\mathbf{L}^t(\Omega)$ con $t \in]1, \infty[\setminus \{2\}$ se tienen los siguientes resultados en la literatura

1) Dado un entero $k \geq 0$ y Ω un poliedro convexo, se tiene que para cada $t \in]1, \infty[$, existe $C_t^k > 0$, independiente de h, tal que

$$\left\|\nabla R_h^k(\phi)\right\|_{0,t;\Omega} \leq C_t^k \|\phi\|_{0,t;\Omega} \qquad , \forall \phi \in \mathrm{W}_0^{1,t}(\Omega)$$

2) Dado un entero $k \geq 0$ y Ω póliedro, no necesariamente convexo, se tiene entonces que para cada $t \in]1, \infty[$, existe $C_t^k > 0$, independiente de h, tal que

$$\left\|\nabla R_h^k(\phi)\right\|_{0,t;\Omega} \leq C_t^k \{-\log(h)\}^{r(k)|1-2/t|} \|\phi\|_{0,t;\Omega} \qquad , \forall \phi \in \mathrm{W}_0^{1,t}(\Omega)$$

donde

$$r(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

En lo que sigue mostraremos la estabilidad de Θ_h^k en el caso $n = 2$ en el espacio

$$\tilde{\mathrm{H}}_0^t(\operatorname{div}_t; \Omega) := \left\{\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}^t(\operatorname{div}_t; \Omega) : \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = 0\right\}$$

para $t \in]1, \infty[$.

Lema 6.9

Sea $\mathcal{T}_h$ una triangularización de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, entonces

$$K_h^k := \{\boldsymbol{v}_h \in RT_k(\mathcal{T}_h) : \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma \text{ y } \operatorname{div}(\boldsymbol{v}_h) = 0 \text{ en } \Omega\} = \operatorname{curl}(\mathcal{P}_{k+1,C}(\mathcal{T}_h))$$

Demostración. Sea $\boldsymbol{v}_h \in K_h^k$. Se sigue que $\boldsymbol{v}_h \in RT_k(\mathcal{T}_h)$, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ en Γ y $\operatorname{div}(\boldsymbol{v}_h) = 0$ en Ω. Luego, existe $\phi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$\boldsymbol{v}_h = \operatorname{curl}(\phi) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right)$$

Por cuanto la divergencia de v_h es 0 en Ω y $\boldsymbol{v}_h \in RT_k(K)$, se prueba que $\boldsymbol{v}_h|_K \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h$, con lo cual $\phi_K \in \mathcal{P}_{k+1}(K), \forall K \in \mathcal{T}_h$ y por lo tanto, $\phi \in \mathcal{P}_{k+1,C}(\mathcal{T}_h)$, de donde $\boldsymbol{v}_h \in \operatorname{curl}(\mathcal{P}_{k+1,C}(\mathcal{T}_h))$.
Recíprocamente, sea $\boldsymbol{v}_h \in \operatorname{curl}(\mathcal{P}_{k+1,C}(\mathcal{T}_h))$, esto es, $\boldsymbol{v}_h = \operatorname{curl}(\phi_h)$ con $\phi_h \in \mathcal{P}_{k+1,C}(\mathcal{T}_h)$. Se sigue entonces que $\boldsymbol{v}_h|_K = \operatorname{curl}(\phi_h)|_K \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K) \subset RT_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h$, con lo cual $\boldsymbol{v}_h \in RT_k(\mathcal{T}_h)$. Además, es claro que $\operatorname{div}(\boldsymbol{v}_h) = 0$ en Ω, y $\boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{\nu} = \operatorname{curl}(\phi_h) \cdot \boldsymbol{\nu} = \dfrac{d\phi_h}{ds} = 0$ en Γ, y así $\boldsymbol{v}_h \in K_h^k$. De donde se concluye la igualdad de conjuntos. ■

Lema 6.10

Dados $t \in]1, \infty[$, k entero no negativo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\left\|\Theta_h^k(\boldsymbol{w})\right\|_{0,t;\Omega} \leq c_t^k \|\boldsymbol{w}\|_{0,t;\Omega} \qquad ,\forall \boldsymbol{w} \in \tilde{\mathrm{H}}_0^t(\operatorname{div}_t; \Omega)$$

donde

$$c_t^k := \begin{cases} C_t^k & \text{si } \Omega \text{ es convexo.} \\ C_t^k \{-\log(h)\}^{r(k)|1-2/t|} & \text{si } \Omega \text{ no es convexo y } k = 0. \\ C_t^k & \text{si } \Omega \text{ no es convexo y } k \geq 0. \end{cases}$$

Demostración. Dado $\boldsymbol{w} \in \tilde{\mathrm{H}}_0^t(\operatorname{div}_t; \Omega)$, se tiene que $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ en Γ y $\operatorname{div}(\boldsymbol{w}) = 0$ en Ω, con lo cual existe $\phi \in \mathrm{W}_0^{1,t}(\Omega)$ tal que $\boldsymbol{w} = \operatorname{curl}(\phi)$ en Ω.
Por cuanto $\Theta_h^k(\boldsymbol{w}) \in K_h^k = \operatorname{curl}(\mathcal{P}_{k+1,C}(Tau_h))$, se deduce que existe $\phi_h \in \mathcal{P}_{k+1,C}(\mathcal{T}_h)$ tal que $\Theta_h^k(\boldsymbol{w}) = \operatorname{curl}(\phi_h)$. Así, de acuerdo a la definición de el proyector Θ_h^k, se tiene

$$\int_\Omega \Theta_h^k(\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{v}_h = \int_\Omega \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_h \qquad ,\forall \boldsymbol{v}_h \in K_h^k$$

lo que es equivalente a

$$\int_\Omega \operatorname{curl}(\phi_h) \cdot \boldsymbol{v}_h = \int_\Omega \operatorname{curl}(\phi) \cdot \boldsymbol{v}_h \qquad ,\forall \boldsymbol{v}_h \in K_h^k$$

y dado al lema anterior,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{curl}(\phi_h) \cdot \operatorname{curl}(\varphi_h) &= \int_\Omega \operatorname{curl}(\phi) \cdot \operatorname{curl}(\varphi_h) \\ &= \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\varphi_h \qquad ,\forall \varphi_h \in \mathcal{P}_{k+1,C}(\mathcal{T}_h) \end{aligned}$$

lo cual dice que $\phi_h = R_h^k(\phi)$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left\|\Theta_h^k(\boldsymbol{w})\right\|_{0,t;\Omega} &= \|\text{curl}(\phi_h)\|_{0,t;\Omega}\\ &= \|\nabla\phi_h\|_{0,t;\Omega}\\ &= \left\|\nabla R_h^k(\phi)\right\|_{0,t;\Omega}\\ &\leq c_t^k \|\nabla\phi\|_{0,t;\Omega}\\ &= c_t^k \|\text{curl}(\phi)\|_{0,t;\Omega}\\ &= c_t^k \|\boldsymbol{w}\|_{0,t;\Omega}\end{aligned}$$

De donde se concluye la demostración. ■

Observación 6.12

Dado que

$$\text{curl}(\phi)\cdot\text{curl}(\varphi) = \nabla\phi\cdot\nabla\varphi$$

es sólo cierto en $\mathbb{R}^2$, el lema anterior no es aplicable para $\mathbb{R}^3$.

6.10. Condición *inf-sup* discreta para la forma bilineal a_φ

Lema 6.11

Para cada $\psi_h \in Q_h$, se tiene que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{v}_h\in K_h^k\\ \boldsymbol{v}_h\neq\boldsymbol{0}}} \frac{a_{\psi_h}(\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{v}_h)}{\|\boldsymbol{v}_h\|_{X_1}} \geq \tilde{\alpha}_d \|\boldsymbol{w}_h\|_{X_2} \qquad ,\forall\boldsymbol{w}\in K_h^k \tag{6.14}$$

donde $\tilde{\alpha}_d = \dfrac{\mu_1}{c_s^k \|D_s\|}$, y

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{v}_h\in K_h^k\\ \boldsymbol{v}_h\neq\boldsymbol{0}}} a(\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{v}_h) > 0 \qquad ,\forall\boldsymbol{v}_h\in K_h^k\setminus\{\theta\} \tag{6.15}$$

Demostración. Dados $\psi_h \in Q_h$ y $\boldsymbol{w}_h \in K_h^k$, $\boldsymbol{w}_h \neq \boldsymbol{0}$, se definen $\boldsymbol{w}_{h,s} = J_r(\boldsymbol{w}_h) \in \mathbf{L}^s(\Omega)$ y $\bar{\boldsymbol{v}}_h := \Theta_h^k(D_s(\boldsymbol{w}_{h,s})) \in K_h^k$. Se sigue,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{w}_h\cdot\bar{\boldsymbol{v}}_h &= \int_\Omega \boldsymbol{w}_h\cdot\Theta_h^k(D_s(\boldsymbol{w}_{h,s}))\\ &= \int_\Omega \boldsymbol{w}_h\cdot D_s(\boldsymbol{w}_{h,s})\\ &= \|\boldsymbol{w}_h\|_{0,r;\Omega}\|\boldsymbol{w}_{h,s}\|_{0,r;\Omega}\end{aligned}$$

Además,

$$\|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|_{0,s;\Omega} = \left\|\Theta_h^k(D_s(\boldsymbol{w}_{h,s}))\right\|_{0,s;\Omega}$$
$$\leq c_s^h \|D_s(\boldsymbol{w}_{h,s})\|_{0,s;\Omega}$$
$$\leq c_s^k \|D_s\| \, \|\boldsymbol{w}_{h,s}\|_{0,s;\Omega}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\boldsymbol{v}_h \in K_h^k \\ \boldsymbol{v}_h \neq \boldsymbol{0}}} \frac{a_{\psi_h}(\boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{v}_h)}{\|\boldsymbol{v}_h\|_{X_1}} &\geq \frac{a_{\psi_h}(\boldsymbol{w}_h, \bar{\boldsymbol{v}}_h)}{\|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|_{0,s;\Omega}} \\
&\geq \frac{\mu_1 \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot \bar{\boldsymbol{v}}_h}{\|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|_{0,s;\Omega}} \\
&= \mu_1 \frac{\|\boldsymbol{w}_h\|_{0,r;\Omega} \|\boldsymbol{w}_{h,s}\|_{0,s;\Omega}}{\|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|_{0,s;\Omega}} \\
&\geq \frac{\mu_1}{c_s^k \|D_s\|} \|\boldsymbol{w}_h\|_{X_2}
\end{aligned}$$

lo cual prueba (6.14). Además, dado $\boldsymbol{v}_h \in K_h^k$, $\boldsymbol{v}_h \neq \boldsymbol{0}$, se definen $\boldsymbol{v}_{h,r} := J_s(\boldsymbol{v}_h) \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ y $\bar{\boldsymbol{w}}_h := \Theta_h^k(D_r(\boldsymbol{v}_{h,r})) \in K_h^k$, con lo cual

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{v}_h \in K_h^k \\ \boldsymbol{v}_h \neq \boldsymbol{0}}} a_{\psi_h}(\boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{v}_h) \geq \mu_1 \int_\Omega \bar{\boldsymbol{w}}_h \cdot \boldsymbol{v}_h = \mu_1 \|\boldsymbol{v}_h\|_{0,s;\Omega}^s > 0$$

■

6.11. Condiciones *inf-sup* discretas para las formas bilineales b_1 y b_2

Se necesitan algunos resultados previos.

Sea $\mathcal{N} : \tilde{\mathrm{H}}^1(\Omega)' \to \tilde{\mathrm{H}}^1(\Omega)$, con $\tilde{\mathrm{H}}^1(\Omega) := \left\{ v \in \mathrm{H}^1(\Omega) : \int_\Omega v = 0 \right\}$, el operador lineal y acotado que a cada $f \in \tilde{\mathrm{H}}^1(\Omega)'$ le asigna $u_f \in \tilde{\mathrm{H}}^1(\Omega)$ del problema

$$\int_\Omega \nabla u_f \cdot \nabla v = f(v) \qquad , \forall v \in \tilde{\mathrm{H}}^1(\Omega)$$

Nos interesa ver bajo que condiciones se puede extender $\mathcal{N}$ de modo que sea acotado entre $L_0^t(\Omega)$ y $\mathrm{W}^{1+\delta,t}(\Omega)$, con $t \in]1, \infty[$ y $\delta > 0$. Notar que esto significa que para cada $f \in L_0^t(\Omega)$, existe una única solución $\mathrm{W}^{1+\delta,t}(\Omega) \bigcap \tilde{\mathrm{W}}^{1,t}(\Omega)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & f & \text{en } \Omega \\ \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} & = & 0 & \text{en } \Gamma \\ \int_\Omega u & = & 0 & \end{array} \right.$$

y existe $c > 0$ tal que

$$\|u\|_{1+\delta,t;\Omega} \leq c \|f\|_{0,t;\Omega}$$

Para esto, recordemos que $\mathcal{N} : \mathrm{H}^{s-1}(\Omega) \to \mathrm{H}^{s+1}(\Omega)$ es acotado para cada $s \in [0, \frac{\pi}{\omega}[$ donnde ω es el ángulo interior de más grande de Ω(cf. [6]).

Lema 6.12

Suponga que $t \in]1, \infty[$ es tal que

$$\frac{\pi}{\omega} > \begin{cases} 1 - \frac{2}{t} & \text{si } t \geq 2 \\ 2 - \frac{2}{t} & \text{si } t \in]1, 2[\end{cases}$$

y definamos

$$\delta_0 := \begin{cases} \frac{\pi}{\omega} + \frac{2}{t} - 1 & \text{si } t \geq 2 \\ \frac{\pi}{\omega} & \text{si } t \in]1, 2[\end{cases}$$

Entonces el operador $\mathcal{N} : L^t_0(\Omega) \to \mathrm{W}^{1+\delta,t}(\Omega)$ es continuo para cada $\delta_0 \in]0, \delta_0[$.

Con lo anterior, y los resultados de la sección 2.6, podemos demostrar las condiciones *inf-sup* de las formas bilineales b_1 y b_2.

Lema 6.13: Condiciones *inf-sup* para las formas bilineales b_1 y b_2

Existen constantes $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2 > 0$, independientes de h, tales que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{v}_h \in X_{i,h} \\ \boldsymbol{v}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{b_i(\boldsymbol{v}_h, q_h)}{\|\boldsymbol{v}_h\|_{X_i}} \geq \tilde{\beta}_i \|q_h\|_{M_i} \qquad , \forall q_i \in M_{i,h} \tag{6.16}$$

para $i \in \{1, 2\}$.

Demostración. Para $i = 1$, dado $q_h \in M_{1,h} \subset M_1 := L^r_0(\Omega)$, y definimos $q_{h,s} := J_r(q_h) \in L^s(\Omega)$ y

$$q^0_{h,s} := q_{h,s} - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega q_{h,s} \in L^s_0(\Omega)$$

Luego, denotamos por $u \in \tilde{\mathrm{W}}^{1,s}(\Omega)$ la única solución del problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u &= q^0_{h,s} & \text{en } \Omega \\ \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} &= 0 & \text{en } \Gamma \\ \int_\Omega u &= 0 \end{cases}$$

Notemos que si Ω es convexo, entonces $u \in \mathrm{W}^{2,s}(\Omega) \bigcap \tilde{\mathrm{W}}^{1,s}(\Omega)$, y existe $c > 0$ tal que

$$\|u\|_{2,s;\Omega} \leq c \left\|q^0_{h,s}\right\|_{0,s;\Omega}$$

Luego, definiendo $\bar{\boldsymbol{v}} = -\nabla u$ en Ω, se tiene $\bar{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{W}^{1,s}(\Omega)$, $\mathrm{div}(\bar{\boldsymbol{v}}) = -q^0_{h,s}$ en Ω, $\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ en Γ, y

$$\|\bar{\boldsymbol{v}}\|_{1,s;\Omega} \leq \|u\|_{2,s;\Omega} \leq c \left\|q^0_{h,s}\right\|_{0,s;\Omega}$$

Ahora, definiendo $\bar{\boldsymbol{v}}_h := \Pi^k_h(\bar{\boldsymbol{v}})$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\bar{\boldsymbol{v}}_h) &= \mathrm{div}(\Pi^k_h(\bar{\boldsymbol{v}})) \\ &= P^k_h(\mathrm{div}(\bar{\boldsymbol{v}})) \\ &= P^k_h(-q^0_{h,s}) \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{v}}_h \cdot \boldsymbol{\nu} =& \Pi_h^k(\bar{\boldsymbol{v}}) \cdot \boldsymbol{\nu}\\ =& Q_h^k(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\nu})\end{aligned}$$

donde $Q_h^k : L^1(\Gamma) \to \mathcal{P}_k(\Gamma_h)$ es el proyector con respecto al producto interior de $L^2(\Gamma)$. Se tiene así que $\bar{\boldsymbol{v}}_h \in X_{1,h}$. Además, aplicando las propiedades de estabilidad de Π_h^k y P_h^k, se tiene que

$$\begin{aligned}\|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|_{0,s;\Omega} =& \left\|\Pi_h^k(\bar{\boldsymbol{v}})\right\|_{0,s;\Omega}\\ \leq& c\,\|\bar{\boldsymbol{v}}\|_{1,s;\Omega}\\ \leq& \tilde{c}\left\|q_{h,s}^0\right\|_{0,s;\Omega}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\|\operatorname{div}(\bar{\boldsymbol{v}}_h)\|_{0,s;\Omega} =& \left\|P_h^k(-q_{h,s})^0\right\|_{0,s;\Omega}\\ \leq& \bar{c}\left\|q_{h,s}^0\right\|_{0,s;\Omega}\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|_{X_1} =& \|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|_{s,\operatorname{div}_s;\Omega}\\ \leq& c\left\|q_{h,s}^0\right\|_{0,s;\Omega}\\ \leq& c\,\|q_{h,s}\|_{0,s;\Omega}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{\boldsymbol{v}_h\in X_{1,h}\\ \boldsymbol{v}_h\neq\boldsymbol{0}}} \frac{b_1(\boldsymbol{v}_h, q_h)}{\|\boldsymbol{v}_h\|_{X_1}} \geq& \frac{-\displaystyle\int_\Omega q_{0,s}^0 \operatorname{div}(\bar{\boldsymbol{v}}_h)}{\|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|_{X_1}}\\ =& \frac{-\displaystyle\int_\Omega q_{0,s}^0 P - h^k(q_{h,s}^0)}{\|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|_{X_1}}\\ =& \frac{\displaystyle\int_\Omega q_h q_{h,s}^0}{\|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|_{X_1}}\\ =& \frac{\displaystyle\int_\Omega q_h q_{h,s}}{\|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|_{X_1}}\\ =& \frac{\|q_h\|_{0,r;\Omega}\,\|q_{h,s}\|_{0,s;\Omega}}{\|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|_{X_1}}\\ \geq& \tilde{\beta}_1\,\|q_h\|_{M_1}\end{aligned}$$

Supongamos ahora que Ω no es convexo. Entonces, para poder aplicar la regularidad de $\mathcal{N}$ a $t = s = 3/2$ se requiere que $\pi/\omega > 2 - 2/(3/2) = 2/3$, es decir, $\omega < 3\pi/2$. Así, imponiendo que $\omega < 3\pi/2$, el resultado de regularidad nos que $\mathcal{N} : L_0^s(\Omega) \to \mathrm{W}^{1+\delta,s}(\Omega)$ es continuo para todo $\delta \in]0, \pi/\omega[$, y dado que $\pi/\Omega > 3/2$, se tiene que $\mathcal{N} : L^s_0(\Omega) \to \mathrm{W}^{1+\delta,s}(\Omega)$ es continuo para todo $\delta \in]2/3, \pi/\omega[$. Así, se tiene que existe un único $u \in \mathrm{W}^{1+\delta,s}(\Omega) \bigcap \tilde{\mathrm{W}}^{1,s}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u &=& q^0_{h,s} & \text{en } \Omega \\ \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} &=& 0 & \text{en } \Gamma \\ \int_\Omega u &=& 0 & \end{cases}$$

y

$$\|u\|_{1+\delta,s;\Omega} \leq c \left\| q^0_{h,s} \right\|_{0,s;\Omega}$$

Luego, se define $\bar{\boldsymbol{v}} := -\nabla u \in \mathrm{W}^{\delta,s}(\Omega)$ y observamos que $\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ en Γ y $\mathrm{div}(\bar{\boldsymbol{v}}) = P^k_h(-q^0_{h,s})$ en Ω. Luego, definiendo $\bar{\boldsymbol{v}}_h := \Pi^k_h(\bar{\boldsymbol{v}})$ se tiene $\bar{\boldsymbol{v}}_k \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ en Γ, $\mathrm{div}(\bar{\boldsymbol{v}}_h) = P^k_h(-q^0_{h,s})$ en Ω, y

$$\begin{aligned} \|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|_{0,s;\Omega} &= \left\| \Pi^k_h(\bar{\boldsymbol{v}}) \right\|_{0,s;\Omega} \\ &\leq c \left\{ \|\bar{\boldsymbol{v}}\|_{\delta,s;\Omega} + h^\delta \|\mathrm{div}(\bar{\boldsymbol{v}})\|_{0,s;\Omega} \right\} \\ &\leq C \left\{ \|\bar{\boldsymbol{v}}\|_{\delta,s;\Omega} + \|\mathrm{div}(\bar{\boldsymbol{v}})\|_{0,s,\Omega} \right\} \\ &\leq \bar{C} \left\| q^0_{h,s} \right\|_{0,s;\Omega} \\ &\leq \tilde{C} \|q_{h,s}\|_{0,s;\Omega} \end{aligned}$$

y

$$\|\mathrm{div}(\bar{\boldsymbol{v}}_h)\|_{0,s;\Omega} \leq C \|q_{h,s}\|_{0,s;\Omega}$$

de modo que nos queda

$$\|\bar{\boldsymbol{v}}_h\|_{X_1} \leq C \|q_{h,s}\|_{0,s;\Omega}$$

el resto del caso no convexo es análogo al caso convexo. De igual modo, el caso $i = 2$, es análogo al caso $i = 1$, pero con $t = r = 3$. ■

7. Problema de Boussinesq[4]

Las ecuaciones que rigen el modelo, bajo los supuestos de [5], son

$$-\operatorname{div}(2\mu(\varphi)\mathbf{e}(\boldsymbol{u}))+(\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+\nabla p=\varphi\boldsymbol{g} \quad \text{en} \quad \Omega \tag{7.1a}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u})=0 \quad \text{en} \quad \Omega \tag{7.1b}$$

$$-\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla\varphi)+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi=0 \quad \text{en} \quad \Omega \tag{7.1c}$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \quad \text{en} \quad \Gamma \tag{7.1d}$$

$$\varphi=\varphi_{\mathrm{D}} \quad \text{en} \quad \Gamma \tag{7.1e}$$

donde $\mathbf{e}(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{t}})$, $\mathbb{K}$ es la matriz de difusión térmica, $\varphi\boldsymbol{g}$ el término de flotabilidad y μ la función de viscosidad.

Se introducen las siguientes incógnitas auxiliares:

$$\boldsymbol{t}=\nabla\boldsymbol{u} \quad \text{en} \quad \Omega \tag{7.2a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=2\mu(\varphi)\mathbf{e}(\boldsymbol{u})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})-p\mathbb{I} \quad \text{en} \quad \Omega \tag{7.2b}$$

De lo anterior, se puede notar que

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})=(\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} \tag{7.3}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\mathbf{div}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})_i &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\boldsymbol{u}_i\frac{\partial\boldsymbol{u}_j}{\partial x_j}+\boldsymbol{u}_j\frac{\partial\boldsymbol{u}_i}{\partial x_j}\right)\\ &= \boldsymbol{u}_i\operatorname{div}(\boldsymbol{u})+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{u}_j\frac{\partial\boldsymbol{u}_i}{\partial x_j}\end{aligned}$$

Luego, de la condición de incompresibilidad (7.1b), se sigue que

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})_i=\nabla\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}$$

y por lo tanto, se tiene (7.3). Así, aplicando la propiedad anterior, se sigue de (7.2) que

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})=\mathbf{div}(2\mu(\varphi)\boldsymbol{t}_{\mathrm{sym}})-\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}-\nabla p$$

donde $\boldsymbol{t}_{\mathrm{sym}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}^{\mathrm{t}})$. Así, la ecuación de Navier-Stokes (7.1a), se escribe

$$-\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})+\frac{1}{2}\boldsymbol{t}\boldsymbol{u}-\varphi\boldsymbol{g}=0 \quad \text{en} \quad \Omega \tag{7.4}$$

Aplicando el operador traza a la ecuación (7.2b), y notando que la condición de incompresibilidad se traduce a $\operatorname{tr}(\boldsymbol{t})=\operatorname{div}(\boldsymbol{u})=0$ en Ω, resulta

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma})=-\operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\right)-np$$

[4] Problema abordado en el proyecto de tesis de Sebastian Moraga [5]

de donde

$$p = -\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\right) \tag{7.5}$$

A su vez, tomando desviador en la misma ecuación (7.2b), se obtiene,

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathtt{d}} = 2\mu(\varphi)\boldsymbol{t}_{\mathrm{sym}} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})^{\mathtt{d}} \tag{7.6}$$

Notar desde ya que $\boldsymbol{t}$ se buscará en $\mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) := \{\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{L}^2(\Omega)\,:\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}) = 0\}$.

Análogamente, para la ecuación del calor (7.1c), se definen las variables auxiliares

$$\tilde{\boldsymbol{t}} = \nabla\varphi \qquad \text{en} \quad \Omega \tag{7.7a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{K}\nabla\varphi - \frac{1}{2}\varphi\boldsymbol{u} \quad \text{en} \quad \Omega \tag{7.7b}$$

Se sigue entonces que,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{u}) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi\boldsymbol{u})\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\varphi\frac{\partial \boldsymbol{u}_j}{\partial x_j} + \boldsymbol{u}_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)\\
&= \varphi\,\mathrm{div}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi
\end{aligned}$$

y por la condición de incompresibilidad (7.1b), entonces se tiene,

$$\mathrm{div}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathrm{div}(\mathbb{K}\nabla\varphi) - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi \tag{7.8}$$

con lo cual la ecuación del calor (7.1c), se reescribe

$$-\,\mathrm{div}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\tilde{\boldsymbol{t}} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \tag{7.9}$$

De esta forma, se llega a una formulación mixta para el problema de boussinesq (7.1), dada por

$$\boldsymbol{t} = \nabla\boldsymbol{u} \qquad \text{en} \quad \Omega \tag{7.10a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathtt{d}} = 2\mu(\varphi)\boldsymbol{t}_{\mathrm{sym}} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})^{\mathtt{d}} \qquad \text{en} \quad \Omega \tag{7.10b}$$

$$-\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{t}\boldsymbol{u} - \varphi\boldsymbol{g} = 0 \qquad \text{en} \quad \Omega \tag{7.10c}$$

$$\tilde{\boldsymbol{t}} = \nabla\varphi \qquad \text{en} \quad \Omega \tag{7.10d}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{K}\nabla\varphi - \frac{1}{2}\varphi\boldsymbol{u} \qquad \text{en} \quad \Omega \tag{7.10e}$$

$$-\,\mathrm{div}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\tilde{\boldsymbol{t}} = 0 \qquad \text{en} \quad \Omega \tag{7.10f}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \qquad \text{en} \quad \Gamma \tag{7.10g}$$

$$\varphi = \varphi_{\mathrm{D}} \qquad \text{en} \quad \Gamma \tag{7.10h}$$

$$\int_\Omega \mathrm{tr}\,(2\boldsymbol{\sigma} + (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})) = 0 \tag{7.10i}$$

Observación 7.1

Notemos que la ecuación (7.10i) es para imponer la unicidad para la presión expresada en función de $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{u}$.

7.1. Formulación variacional mixta para el problema de Boussinesq

Aplicando la formula de integración por partes del Teorema 3.3 con $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega)$ a la ecuación (7.10a), se obtiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{t} : \boldsymbol{\tau} &= \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \boldsymbol{\tau} \\ &= -\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) + \langle \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{u}\rangle_\Gamma\end{aligned}$$

es decir, aplicando la condición de contorno para $\boldsymbol{u}$ (7.10g), se tiene

$$\int_\Omega \boldsymbol{t} : \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) = \langle \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\rangle_\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega) \tag{7.11}$$

y $\boldsymbol{u}$ se busca en $\mathbf{L}^4(\Omega)$. A su vez, la ecuación de equilibrio (7.10c), se reduce a

$$-\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} - \int_\Omega \varphi \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^4(\Omega) \tag{7.12}$$

A su vez, la ecuación constitutiva para $\boldsymbol{\sigma}$ (7.10b) se reescribe

$$\int_\Omega 2\mu(\varphi)\boldsymbol{t}_{\mathrm{sym}} : \boldsymbol{s} - \frac{1}{2}\int_\Omega (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})^{\mathrm{d}} : s = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : s \quad \forall \boldsymbol{s} \in \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) \tag{7.13}$$

Análogamente, para la ecuación del calor se llega a:

$$\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{t}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \int_\Omega \varphi \operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \varphi_{\mathrm{D}}\rangle \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathrm{H}(\operatorname{div}_{4/3};\Omega) \tag{7.14}$$

y se busca $\varphi \in L^4(\Omega)$. A su vez, la ecuación (7.10e) se reescribe como

$$-\int_\Omega \psi \operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{1}{2}\int_\Omega \psi \boldsymbol{u} \cdot \tilde{\boldsymbol{t}} = 0 \quad \forall \psi \in L^4(\Omega) \tag{7.15}$$

y por último la ecuación constitutiva para la ecuación del calor queda dado por,

$$\int_\Omega \mathbb{K}\tilde{\boldsymbol{t}} \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} - \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi \boldsymbol{u} \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} = \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} \quad \forall \tilde{\boldsymbol{s}} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \tag{7.16}$$

Así, se llega a la formulación variacional mixta: Hallar $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathbf{L}^4(\Omega)\times\mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega)\times\mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega)$ y $(\varphi, \tilde{\boldsymbol{t}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \in L^4(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathrm{H}(\operatorname{div}_{4/3};\Omega)$ tal que:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega 2\mu(\varphi)\boldsymbol{t}_{\mathrm{sym}} : \boldsymbol{s} - \frac{1}{2}\int_\Omega (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})^{\mathrm{d}} : s - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : s &= 0 && \forall \boldsymbol{s} \in \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) && \text{(7.17a)}\\
\int_\Omega \boldsymbol{t} : \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) &= \langle \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\rangle_\Gamma && \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega) && \text{(7.17b)}\\
-\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= \int_\Omega \varphi \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v} && \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^4(\Omega) && \text{(7.17c)}\\
\int_\Omega \mathbb{K}\tilde{\boldsymbol{t}} \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} - \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi \boldsymbol{u} \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} - \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} &= 0 && \forall \tilde{\boldsymbol{s}} \in \mathbf{L}^2(\Omega) && \text{(7.17d)}\\
-\int_\Omega \psi \operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{1}{2}\int_\Omega \psi \boldsymbol{u} \cdot \tilde{\boldsymbol{t}} &= 0 && \forall \psi \in L^4(\Omega) && \text{(7.17e)}\\
\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{t}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \int_\Omega \varphi \operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) &= \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \varphi_{\mathrm{D}}\rangle && \tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathrm{H}(\operatorname{div}_{4/3};\Omega) && \text{(7.17f)}
\end{aligned}$$

A continuación, consideramos la descomposición

$$\mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega) = \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3};\Omega) \oplus \mathbb{R}\mathbb{I} \tag{7.18}$$

donde $\mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3};\Omega) := \left\{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega) : \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}) = 0\right\}$. Y notemos que si $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + c\mathbb{I}$, con $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3};\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces las ecuaciones (7.17a) y (7.17b), siguen siendo válidos con $\boldsymbol{\sigma}_0$ en vez de $\boldsymbol{\sigma}$, y se tiene que

$$c = \frac{1}{n\,|\Omega|}\int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})$$

y de la condición de unicidad de p (7.10i), entonces se tiene,

$$c = \frac{1}{2n\,|\Omega|}\int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) \tag{7.19}$$

A su vez, imponiendo la condición de compatibilidad

$$\int_\Gamma \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\boldsymbol{\nu} = 0 \tag{7.20}$$

la que surge de la incompresibilidad (7.1b), se sigue que (7.17c) es equivalente a imponerla para $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3};\Omega)$. Así, sumando las ecuaciones (7.17a) y (7.17b), lo mismo con (7.17d) y (7.17f), y denotando $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{t})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})$, $\vec{\boldsymbol{u}}_0 = (\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{t}_0) \in \mathbf{L}^4(\Omega)\times\mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega)$ y $\vec{\varphi} = (\varphi,\tilde{\boldsymbol{t}})$, $\vec{\psi} = (\psi,\tilde{\boldsymbol{s}}) \in L^4(\Omega)\times\mathbf{L}^2(\Omega)$, se llega a la siguiente formulación variacional mixta para el problema (7.1): Hallar $(\vec{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{\sigma}) \in (\mathbf{L}^4(\Omega)\times\mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega))\times\mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3};\Omega)$ y $(\vec{\varphi},\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \in (L^4(\Omega)\times\mathbf{L}^2(\Omega))\times\mathrm{H}(\mathrm{div}_{4/3};\Omega)$ tal que:

$$\begin{array}{lcll}
a_\varphi(\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}) + c(\boldsymbol{u};\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}) + b(\vec{\boldsymbol{v}},\boldsymbol{\sigma}) & = & F_\varphi(\vec{\boldsymbol{v}}) & \forall\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{L}^4(\Omega)\times\mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) \\
b(\vec{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{\tau}) & = & G(\boldsymbol{\tau}) & \forall\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3};\Omega) \\
\tilde{a}(\vec{\varphi},\vec{\psi}) + \tilde{c}_{\boldsymbol{u}}(\vec{\varphi},\vec{\psi}) + \tilde{b}(\vec{\psi},\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) & = & 0 & \forall\vec{\psi} \in L^4(\Omega)\times\mathbf{L}^2(\Omega) \\
\tilde{b}(\vec{\varphi},\tilde{\boldsymbol{\tau}}) & = & \tilde{G}(\boldsymbol{\tau}) & \forall\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathrm{H}(\mathrm{div}_{4/3};\Omega)
\end{array} \tag{7.21}$$

donde las formas bilineales y trilineales quedan dadas por

$$a_\varphi(\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}) := \int_\Omega 2\mu(\varphi)\boldsymbol{t}_{\mathrm{sym}} : \boldsymbol{s} \quad \text{y} \quad b(\vec{v},\boldsymbol{\tau}) := -\int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{s} - \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})$$

$$c(\boldsymbol{w};\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}) := \frac{1}{2}\int_\Omega \{\boldsymbol{t}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{w}) : \boldsymbol{s}\}$$

$$\tilde{a}(\vec{\varphi},\vec{\psi}) := \int_\Omega \mathbb{K}\tilde{\boldsymbol{t}}\cdot\tilde{\boldsymbol{s}} \quad \text{y} \quad \tilde{b} := -\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \tilde{\boldsymbol{s}} - \int_\Omega \psi\,\mathrm{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}})$$

$$\tilde{c}_{\boldsymbol{w}}(\vec{\varphi},\vec{\psi}) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{\psi\boldsymbol{w}\cdot\tilde{t} - \varphi\boldsymbol{w}\cdot\tilde{\boldsymbol{s}}\right\}$$

y los funcionales

$$F_\varphi(\vec{v}) := \int_\Omega \varphi\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v} \quad \text{y} \quad G(\boldsymbol{\tau}) := -\langle\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\rangle_\Gamma$$

$$\tilde{G}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) := -\langle\tilde{\boldsymbol{\tau}}\cdot\boldsymbol{\nu},\varphi_{\mathrm{D}}\rangle_\Gamma$$

7.2. Esquema de punto fijo

Definamos el operador $S : \mathbf{L}^4(\Omega)\times L^4(\Omega) \to \mathbf{L}^4(\Omega)\times\mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega)$ tal que a cada $(\boldsymbol{w},\psi) \in \mathbf{L}^4(\Omega)\times L^4(\Omega)$ le asigna $S(\boldsymbol{w},\phi) = (S_1(\boldsymbol{w},\phi), S_2(\boldsymbol{w},\phi)) = \vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega)$, donde $(\vec{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{\sigma}) \in (\mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega)) \times \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3};\Omega)$ es la única solución(por ser demostrado) de

$$\begin{array}{lcll} a_\psi(\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}) + c(\boldsymbol{w};\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}) + b(\vec{\boldsymbol{v}},\boldsymbol{\sigma}) & = & F_\phi(\vec{\boldsymbol{v}}) & \forall\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) \\ b(\vec{\boldsymbol{v}},\boldsymbol{\tau}) & = & G(\boldsymbol{\tau}) & \forall\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3};\Omega) \end{array} \tag{7.22}$$

De manera análoga, se define el operador $\tilde{S} : \mathbf{L}^4(\Omega) \to \mathbf{L}^4(\Omega) \times L^2(\Omega)$ que a cada $\boldsymbol{w} \in \mathbf{L}^4(\Omega)$ le asigna $\tilde{S}(\boldsymbol{w}) := (\tilde{S}_1(\boldsymbol{w}),\tilde{S}_2(\boldsymbol{w})) = \vec{\varphi}$, donde $(\vec{\varphi},\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \in (L^4(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)) \times \mathrm{H}(\mathrm{div}_{4/3};\Omega)$ es la única solución(a ser demostrado) de

$$\begin{array}{lcll} \tilde{a}(\vec{\varphi},\vec{\psi}) + \tilde{c}_{\boldsymbol{w}}(\vec{\varphi},\vec{\psi}) + \tilde{b}(\vec{\psi},\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) & = & 0 & \forall\vec{\psi} \in L^4(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \\ \tilde{b}(\vec{\varphi},\tilde{\boldsymbol{\tau}}) & = & \tilde{G}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) & \forall\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathrm{H}(\mathrm{div}_{4/3};\Omega) \end{array} \tag{7.23}$$

Finalmente, se define el operador de punto fijo

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbf{L}^4(\Omega) \times L^4(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{L}^4(\Omega) \times L^4(\Omega) \\ (\boldsymbol{w},\phi) & \longmapsto & T(\boldsymbol{w},\phi) := (S_1(\boldsymbol{w},\phi), \tilde{S}_1(S_1(\boldsymbol{w},\phi))) \end{array} \tag{7.24}$$

Y observamos que el problema original (7.1) se reduce a resolver:

$$\begin{array}{l} \textit{Hallar } (\boldsymbol{u},\varphi) \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times L^4(\Omega) \textit{ tal que:} \\ T(\boldsymbol{u},\varphi) = (\boldsymbol{u},\varphi) \end{array} \tag{7.25}$$

7.3. Solubilidad de la formulación de punto fijo

Denotemos V y $\tilde{V}$ los kernel de las formas bilineales b y $\tilde{b}$, respectivamente, esto es

$$V = \left\{\vec{v} := (\boldsymbol{v},\boldsymbol{s}) \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) \ : \ \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{s} + \int_\Omega v \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) = 0, \forall\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3};\Omega)\right\}$$

$$\tilde{V} = \left\{\vec{\varphi} := (\varphi,\tilde{\boldsymbol{s}}) \in L^4(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \ : \ \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \tilde{\boldsymbol{s}} + \int_\Omega \varphi\, \mathrm{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = 0, \forall\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathrm{H}(\mathrm{div}_{4/3};\Omega)\right\}$$

Observación 7.2

Notar que la restricción que define V es equivalente a pedirla para todo $\tau \in \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega)$, pues,

$$\int_\Omega \mathbb{I} : \boldsymbol{s} + \int_\Omega v \cdot \mathbf{div}(\mathbb{I}) = 0 \quad \forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s}) \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega)$$

Dada a la observación anterior, es posible tomar $\boldsymbol{\tau} \in [\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)]^{n\times n}$ en la restricción que define V, y se obtiene que,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{s} + \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) \\ &= \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{s} - \langle \nabla\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}\rangle_{[\mathcal{D}'(\Omega)]^{n\times n}\times[\mathcal{D}(\Omega)]^{n\times n}} \\ &= \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\tau}\rangle_{[\mathcal{D}'(\Omega)]^{n\times n}\times[\mathcal{D}(\Omega)]^{n\times n}} - \langle \nabla\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}\rangle_{[\mathcal{D}'(\Omega)]^{n\times n}\times[\mathcal{D}(\Omega)]^{n\times n}} \\ &= \langle \boldsymbol{s} - \nabla\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}\rangle_{[\mathcal{D}'(\Omega)]^{n\times n}\times[\mathcal{D}(\Omega)]^{n\times n}} \quad \forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s}) \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) \end{aligned}$$

es decir, $\nabla \boldsymbol{v} = s$ en $[\mathcal{D}'(\Omega)]^{n\times n}$, por lo tanto $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, pues $\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^4(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\nabla \boldsymbol{v} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$. Ahora, integrando por partes con $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3}; \Omega)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{s} + \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) \\
&= \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{s} - \int -\Omega \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \langle \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{v} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{v} \rangle
\end{aligned}$$

para todo $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3}; \Omega)$. Luego, como el operador $\gamma_{\boldsymbol{\nu}} : \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3}; \Omega) \to \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ es sobreyectivo, se deduce que

$$\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma$$

con lo cual $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. De esta forma se ha probado que si $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{s}) \in V$, entonces

$$\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad \text{y} \quad \nabla \boldsymbol{v} = \boldsymbol{s} \quad \text{en} \quad \mathbb{L}^2(\Omega)$$

A su vez, es fácil ver que si $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{s}) \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega)$ tal que cumplen las condiciones anteriores, entonces

$$b(\vec{v}, \boldsymbol{\tau}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3}; \Omega)$$

y por lo tanto,

$$V = \left\{ \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{s}) \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) \,:\, \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad \text{y} \quad \nabla \boldsymbol{v} = \boldsymbol{s} \quad \text{en} \quad \mathbb{L}^2(\Omega) \right\} \tag{7.26}$$

Análogamente a lo realizado en el cálculo del kernel de b, se prueba que

$$\tilde{V} = \left\{ \vec{\psi} = (\psi, \tilde{\boldsymbol{s}}) \in L^4(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \,:\, \psi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \quad \text{y} \quad \nabla \psi = \tilde{\boldsymbol{s}} \quad \text{en} \quad \mathbf{L}^4(\Omega) \right\} \tag{7.27}$$

Lema 7.1: Elipticidad de las formas bilineales a_ϕ y $\tilde{a}$

Existen constantes $\alpha, \tilde{\alpha} > 0$ tales que

$$a_\psi(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{v}}) \geq \alpha \left\| \vec{\boldsymbol{v}} \right\|^2 \quad \forall \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{s}) \in V \tag{7.28}$$

$$\tilde{a}(\vec{\phi}, \vec{\phi}) \geq \alpha \left\| \vec{\phi} \right\|^2 \quad \forall \vec{\phi} = (\phi, \tilde{\boldsymbol{s}}) \in \tilde{V} \tag{7.29}$$

Demostración. Dado $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{s}) \in V$, se tiene que $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ y $\nabla \boldsymbol{v} = \boldsymbol{s}$ en $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Luego, usando que existen constantes $\mu_1, \mu_2 > 0$ tal que

$$\mu_1 \leq \mu(\phi) \leq \mu_2 \quad \forall \phi \in \mathbb{R} \tag{7.30}$$

se tiene que

$$
\begin{aligned}
a_\phi(\vec{\phi},\vec{\phi}) &= \int_\Omega 2\mu(\phi)\boldsymbol{s}_{\text{sym}} : \boldsymbol{s}\\
&= \int_\Omega 2\mu(\phi)\boldsymbol{s}_{\text{sym}} : \boldsymbol{s}_{\text{sym}}\\
&\geq 2\mu_1 \left\|\boldsymbol{s}_{\text{sym}}\right\|_{0;\Omega}\\
&= 2\mu_1 \left\|\mathbf{e}(\boldsymbol{u})\right\|^2_{o;\Omega}\\
&\geq \mu_1 \left|v\right|^2_{1,\Omega} \qquad \text{(Desigualdad de Korn)}\\
&= \frac{\mu_1}{2}\left|v\right|^2_{1;\Omega} + \frac{\mu_1}{2}\left|v\right|^2_{1;\Omega}\\
&= \frac{\mu_1}{2}\left\|\boldsymbol{s}\right\|^2_{0;\Omega} + \frac{\mu_1}{2}\left|v\right|^2_{1;\Omega}\\
&\geq \frac{\mu_1}{2}\left\|\boldsymbol{s}\right\|^2_{0;\Omega} + \frac{\mu_1 c_p^2}{2}\left\|v\right\|^2_{1;\Omega}
\end{aligned}
$$

donde $c_p > 0$ es la constante de la desigualdad de Poincaré en $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$. Finalmente usando la inyección continua $i_4 : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{L}^4(\Omega)$, se tiene que

$$
\|\boldsymbol{v}\|_{0,4;\Omega} \leq \|i_4\| \, \|\boldsymbol{v}\| \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)
$$

y por lo tanto

$$
a_\phi(\vec{\phi},\vec{\phi}) \geq \frac{\mu_1}{2}\left\|\boldsymbol{s}\right\|^2_{0;\Omega} + \frac{\mu_1 c_p^2}{2\left\|i_4\right\|^2}\left\|v\right\|^2_{0,4;\Omega}
$$

de donde queda probada la V-elipticidad de a_ϕ dado $\phi \in L^4(\Omega)$ (7.28) con $\alpha = \frac{\mu_1}{2}\,\text{mín}\left\{1, \frac{c_p^2}{\|i_4\|^2}\right\}$.
Por otro lado, dado $\vec{\phi} = (\phi, \tilde{\boldsymbol{s}}) \in \tilde{V}$, es decir, $\phi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ y $\nabla\phi = \tilde{\boldsymbol{s}}$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$, y de los supuestos de $\mathbb{K}$ considerados en [5], se tiene que

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}(\vec{\psi},\vec{\psi}) &= \int_\Omega \mathbb{K}\tilde{s}\cdot\tilde{s}\\
&= \frac{k_1}{2}\left\|\tilde{s}\right\|^2_{0;\Omega}\\
&= \frac{k_1}{2}\left\|\tilde{s}\right\|^2_{0;\Omega} + \frac{k_1}{2}\left\|\tilde{s}\right\|^2_{0;\Omega}\\
&= \frac{k_1}{2}\left|\varphi\right|^2_{1,\Omega} + \frac{k_1}{2}\left\|\tilde{s}\right\|^2_{0;\Omega}\\
&\geq \frac{k_1 c_p^2}{2}\left\|\varphi\right\|^2_{1,\Omega} + \frac{k_1}{2}\left\|\tilde{s}\right\|^2_{0;\Omega}\\
&\geq \frac{k_1 c_p^2}{2\left\|i_4\right\|^2}\left\|\varphi\right\|^2_{0,4,\Omega} + \frac{k_1}{2}\left\|\tilde{s}\right\|^2_{0;\Omega}
\end{aligned}
$$

donde $c_p > 0$ es la constante de la desigualdad de Poincaré en $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e $i_4 : \mathrm{H}^1(\Omega) \to L^4(\Omega)$ inyección continua. Así, queda demostrada la $\tilde{V}$-elipticidad de la forma bilineal $\tilde{a}$ (7.29) con constante $\tilde{\alpha} = \frac{k_1}{2}\,\text{mín}\left\{1, \frac{c_p^2}{\|i_4\|^2}\right\}$ ■

Para probar las condiciones *inf-sup* para las formas bilineales b y $\tilde{b}$ se usará el siguiente lema.

Lema 7.2

Existe una constante $c_1 > 0$, tal que

$$\left\|\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}}\right\|_{0;\Omega}^2 + \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,4/3;\Omega}^2 \geq c_1 \|\boldsymbol{\tau}\|_{0;\Omega} \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3};\Omega) \tag{7.31}$$

Demostración. Se usa que div : $V \to \mathbf{L}_0^2(\Omega)$ es un isofomorfismo, donde $V := W^{\perp} \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ y $W := \{v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = 0\}$, de modo que

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) = W \oplus V$$

Luego, dado $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3};\Omega)$, se tiene que $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}) \in L_0^2(\Omega)$, y por lo tanto, existe un único $\boldsymbol{z} \in V \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tal que $\mathrm{div}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})$ y

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{1;\Omega} \leq C_d \|\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\|_{0;\Omega}$$

donde $C_d = \left\|\mathrm{div}^{-1}\right\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)'}$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\|_{0;\Omega}^2 &= \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{z})\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}) \\
&= \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{z})\,(\boldsymbol{\tau} : \mathbb{I}) \\
&= \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : (\mathrm{div}(\boldsymbol{z})\mathbb{I}) \\
&= \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : (\mathrm{tr}(\nabla \boldsymbol{z})\mathbb{I}) \\
&= n \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \left(\nabla \boldsymbol{z} - \nabla \boldsymbol{z}^{\mathrm{d}}\right) \\
&= n \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \nabla \boldsymbol{z} - n \int_\Omega \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}} : \nabla \boldsymbol{z} \\
&= -n \int_\Omega z \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) + \langle \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{z}\rangle_\Gamma - n \int_\Omega \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}} : \nabla \boldsymbol{z}
\end{aligned}$$

Así, se tiene que

$$\|\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\|_{0;\Omega}^2 = -n \int_\Omega z \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) - n \int_\Omega \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}} : \nabla \boldsymbol{z}$$

Luego, aplicando desigualdad de Hölder, con $p, q > 1$ conjugados, y Cauchy-Schwartz, para el primer y segundo término, respectivamente, se tiene,

$$\|\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\|_{0;\Omega}^2 \leq n \|\boldsymbol{z}\|_{0,p;\Omega} \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,q;\Omega} + n \left\|\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}}\right\|_{0;\Omega} |z|_{1;\Omega}$$

Usando el hecho que $i : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{L}^r(\Omega)$ es continua para $r \geq 1$, en el caso bidimensional y $r \in [1,6]$, en el caso tridimensional, se tiene que

$$\|\boldsymbol{z}\|_{0,p;\Omega} \leq \|i_p\| \|\boldsymbol{z}\|_{1;\Omega}$$

para todo $p, q \geq 1$, si $n = 2$, para todo $p \in [1,6]$ y $q \geq 6/5$, si $n = 3$. Luego, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\|_{0;\Omega}^2 &\leq n \|i_p\| \|\boldsymbol{z}\|_{1;\Omega} \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,q;\Omega} + n \left\|\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}}\right\|_{0;\Omega} \|\boldsymbol{z}\|_{1;\Omega} \\
&= n \max\{1, \|i_p\|\} \|\boldsymbol{z}\|_{1;\Omega} \left(\left\|\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}}\right\|_{0;\Omega} + \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,q;\Omega}\right)
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\|\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\|_{0;\Omega}^2 \leq C(n,q)\left(\left\|\boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}}\right\|_{0;\Omega} + \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,q;\Omega}\right) C_d \|\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\|_{0;\Omega}$$

de donde,

$$\|\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\|_{0;\Omega} \leq C_d C(n,q)\left(\left\|\boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}}\right\|_{0;\Omega} + \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,q;\Omega}\right)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\tau}\|_{0;\Omega}^2 &= \left\|\boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}} + \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\mathbb{I}\right\|_{0;\Omega}^2 \\
&= \left\|\boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}}\right\|_{0;\Omega}^2 + \frac{1}{n}\,\|\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\mathbb{I}\|_{0;\Omega}^2 \\
&\leq \tilde{C}(q)\left\{\left\|\boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}}\right\|_{0;\Omega}^2 + \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,q;\Omega}^2\right\}
\end{aligned}$$

para todo $q \geq 1$ en $\mathbb{R}^2$ o para todo $q \geq 6/5$ en $\mathbb{R}^3$. ■

Lema 7.3: Condiciones inf-sup para las formas bilineales b y $\tilde{b}$

Existen constantes $\beta, \tilde{\beta} > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{L}^4(\Omega)\times\mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) \\ \vec{\boldsymbol{v}} \neq 0}} \frac{b(\vec{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{\tau})}{\|\vec{\boldsymbol{v}}\|} \geq \beta \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div}_{4/3};\Omega} \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3};\Omega) \tag{7.32}$$

$$\sup_{\substack{\vec{\psi} \in L^4(\Omega)\times\mathbf{L}^2(\Omega) \\ \vec{\psi} \neq 0}} \frac{\tilde{b}(\vec{\psi}, \tilde{\boldsymbol{\tau}})}{\left\|\vec{\psi}\right\|} \geq \tilde{\beta} \|\tilde{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathrm{div}_{4/3};\Omega} \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathrm{H}(\mathrm{div}_{4/3};\Omega) \tag{7.33}$$

Demostración. Dado $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3};\Omega)$, denotamos

$$S(\boldsymbol{\tau}) := \sup_{\substack{\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{L}^4(\Omega)\times\mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) \\ \vec{\boldsymbol{v}} \neq 0}} \frac{b(\vec{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{\tau})}{\|\vec{\boldsymbol{v}}\|} \geq \beta \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div}_{4/3};\Omega}$$

Definiendo $\vec{\boldsymbol{w}}^{(2)} := (0, -\boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}}) \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega)$, se tiene que

$$b(\vec{\boldsymbol{w}}^{(2)}, \boldsymbol{\tau}) = -\int_\Omega \boldsymbol{\tau} : (-\boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}}) - \int_\Omega \mathbf{0} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) = \left\|\boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}}\right\|_{0;\Omega}^2$$

y por lo tanto,

$$S(\boldsymbol{\tau}) \geq \frac{b(\vec{\boldsymbol{w}}^{(2)}, \boldsymbol{\tau})}{\|\vec{\boldsymbol{w}}^{(2)}\|} = \left\|\boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}}\right\|_{0;\Omega} \tag{7.34}$$

Por otro lado, definiendo $\vec{\boldsymbol{w}}^{(1)} = (\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_n), 0) \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega)$, con $\boldsymbol{w}_j = -\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}_j)^{1/3}$, con $j \in \{1, ..., n\}$. Por cuanto $\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \in \mathbf{L}^{4/3}(\Omega)$, se tiene que $\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}_j) \in L^{4/3}(\Omega)$, y por lo tanto,

$$\int_\Omega |\boldsymbol{w}_j|^4 = \int_\Omega |\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}_j)|^{4/3} < \infty \qquad \forall j \in \{1, ..., n\}$$

con lo cual, $\boldsymbol{w}_j \in L^4(\Omega)$ para todo j. Así resulta

$$
\begin{aligned}
b(\vec{\boldsymbol{w}}^{(1)}, \boldsymbol{\tau}) &= -\int_\Omega \boldsymbol{w} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \boldsymbol{w}_j \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_j) \\
&= \sum_{j=10}^{n} \int_\Omega (\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_j))^{4/3} \\
&= \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,4/3;\Omega}^{4/3}
\end{aligned}
$$

y además,

$$
\begin{aligned}
\left\|\vec{\boldsymbol{w}}^{(1)}\right\| &= \|\boldsymbol{w}\|_{0,4;\Omega} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega |\boldsymbol{w}_j|^4\right)^{1/4} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega |\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_j)|^{4/3}\right)^{1/4} \\
&= \left(\|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,4/3;\Omega}^{4/3}\right)^{1/4} \\
&= \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,4/3;\Omega}^{1/3}
\end{aligned}
$$

Luego se sigue que

$$
S(\boldsymbol{\tau}) \geq \frac{b(\vec{\boldsymbol{w}}^{(1)}, \boldsymbol{\tau})}{\|\vec{\boldsymbol{w}}^{(1)}\|} = \frac{\|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,4/3;\Omega}^{4/3}}{\|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,4/3;\Omega}^{1/3}} = \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,4/3;\Omega} \tag{7.35}
$$

Así, de (7.34) y (7.35), se tiene

$$
\begin{aligned}
S(\boldsymbol{\tau}) \geq & \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}}\right\|_{0;\Omega} + \frac{1}{2}\|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,4/3;\Omega} \\
\geq & \frac{1}{4}\left(\left\|\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}}\right\|_{0;\Omega} + \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,4/3;\Omega}\right) + \frac{1}{4}\|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,4/3;\Omega}
\end{aligned}
$$

Luego, por el Lema (7.2), se tiene que

$$
S(\boldsymbol{\tau}) \geq C_b \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div}_{4/3};\Omega}
$$

con $C_b = C_b(c_1) > 0$, de donde se concluye (7.32). Luego, de manera análoga se concluye (7.33). ∎

7.3.1. Propiedades adicionales de las formas involucradas

Las formas $a_\varphi, b, \tilde{a}, \tilde{b}$ y los funcionales F_ϕ y G son acotadas, esto es,

$$|a_\varphi(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})| \le 2\mu_2 \|\vec{\boldsymbol{u}}\| \|\vec{\boldsymbol{v}}\| \tag{7.36a}$$
$$|b(\vec{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{\tau})| \le \|\vec{\boldsymbol{v}}\| \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div}_{4/3};\Omega} \tag{7.36b}$$
$$\left|\tilde{a}(\vec{\varphi}, \vec{\psi})\right| \le \|\mathbb{K}\|_{\infty;\Omega} \|\vec{\varphi}\| \left\|\vec{\psi}\right\| \tag{7.36c}$$
$$\left|\tilde{b}(\vec{\psi}, \tilde{\boldsymbol{\tau}})\right| \le \left\|\vec{\psi}\right\| \|\tilde{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathrm{div}_{4/3};\Omega} \tag{7.36d}$$
$$\|F_\phi\| \le c(\Omega) \|g\|_{\infty;\Omega} \|\phi\|_{0,4;\Omega} \tag{7.36e}$$
$$\|G\| \le \|\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\|_{1/2;\Gamma} \tag{7.36f}$$

para todo $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega)$, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3}; \Omega)$, $\vec{\varphi}, \vec{\psi} \in L^4(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathrm{H}(\mathrm{div}_{4/3}; \Omega)$. Además, con respecto a las formas c y $\tilde{c}_{\boldsymbol{w}}$, primero notamos que

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w}) : \boldsymbol{s} &= \sum_{i,j=1}^{n} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{w}_j \boldsymbol{s}_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_{i,j} \boldsymbol{w}_j \right) \boldsymbol{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{s}\boldsymbol{w})_i \boldsymbol{v}_i \\ &= (\boldsymbol{s}\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{v}\end{aligned}$$

y por lo tanto, para todo $\vec{\boldsymbol{u}} := (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}), \vec{\boldsymbol{v}} := (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{s}) \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega)$ y para todo $\boldsymbol{w} \in \mathbf{L}^4(\Omega)$

$$c(\boldsymbol{w}; \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) := \frac{1}{2} \left\{ \int_\Omega t\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} - \int_\Omega (\boldsymbol{s}\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{v} \right\}$$

de donde

$$c(\boldsymbol{w}; \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{v}}) = 0 \qquad \forall \vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega), \forall \boldsymbol{w} \in \mathbf{L}^4(\Omega) \tag{7.37}$$

y análogamente,

$$\tilde{c}_{\boldsymbol{w}}(\vec{\psi}, \vec{\psi}) = 0 \qquad \forall \vec{\psi} \in L^4(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega), \forall \boldsymbol{w} \in \mathbf{L}^4(\Omega) \tag{7.38}$$

A continuación probaremos la Lipschitz continuidad de las formas c y $\tilde{c}_{\boldsymbol{w}}$.

Lema 7.4: Lipschitz continuidad de las formas c y $\tilde{c}_{\boldsymbol{w}}$

Dado $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in \mathbf{L}^4(\Omega)$ y $\vec{\boldsymbol{u}} := (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}), \vec{\boldsymbol{v}} := (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}) \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega)$ y $\vec{\phi} := (\phi, \tilde{\boldsymbol{r}}), \vec{\varphi} := (\varphi, \tilde{\boldsymbol{t}}), \vec{\psi} := (\psi, \tilde{\boldsymbol{s}}) \in L^4(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$, entonces

$$|c(\boldsymbol{w}; \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) - c(\boldsymbol{z}; \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})| \le \|\vec{\boldsymbol{u}}\| \|\vec{\boldsymbol{v}}\| \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{z}\|_{0,4;\Omega} \tag{7.39a}$$
$$\left|\tilde{c}_{\boldsymbol{w}}(\vec{\phi}, \vec{\psi}) - \tilde{c}_{\boldsymbol{w}}(\vec{\varphi}, \vec{\psi})\right| \le \|\boldsymbol{w}\|_{0,4;\Omega} \left\|\vec{\psi}\right\| \left\|\vec{\phi} - \vec{\varphi}\right\| \tag{7.39b}$$
$$\left|\tilde{c}_{\boldsymbol{w}}(\vec{\varphi}, \vec{\psi}) - \tilde{c}_{\boldsymbol{z}}(\vec{\varphi}, \vec{\psi})\right| \le \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{z}\|_{0,4;\Omega} \|\vec{\varphi}\| \left\|\vec{\psi}\right\| \tag{7.39c}$$

Demostración. Primero, consideramos $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in \mathbf{L}^4(\Omega)$ y $\vec{\boldsymbol{u}} := (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}), \vec{\boldsymbol{v}} := (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}) \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega)$, y por la definición de c se sigue que

$$
\begin{aligned}
|c(\boldsymbol{w}; \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) - c(\boldsymbol{z}; \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})| =& \frac{1}{2} \left| \int_\Omega \boldsymbol{t}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{v} - \int_\Omega (\boldsymbol{u} \otimes (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{z})) : s \right| \\
\leq& \frac{1}{2} \left\{ \|\boldsymbol{t}\|_{0;\Omega} \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{z}\|_{0,4;\Omega} \|\boldsymbol{v}\|_{0,4;\Omega} + \|\boldsymbol{s}\|_{0;\Omega} \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{z}\|_{0,4;\Omega} \|\boldsymbol{u}\|_{0,4;\Omega} \right\} \\
\leq& \|\vec{\boldsymbol{u}}\| \, \|\vec{\boldsymbol{v}}\| \, \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{z}\|_{0,4;\Omega}
\end{aligned}
$$

Análogamente, dados $\vec{\phi} := (\phi, \tilde{\boldsymbol{r}}), \vec{\varphi} := (\varphi, \tilde{\boldsymbol{t}}), \vec{\psi} := (\psi, \tilde{\boldsymbol{s}}) \in L^4(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$, se tiene,

$$
\begin{aligned}
\left| \tilde{c}_{\boldsymbol{w}}(\vec{\phi}, \vec{\psi}) - \tilde{c}_{\boldsymbol{w}}(\vec{\varphi}, \vec{\psi}) \right| =& \frac{1}{2} \left| \int_\Omega \psi \boldsymbol{w} \cdot (\tilde{\boldsymbol{r}} - \tilde{\boldsymbol{t}}) + \int_\Omega (\phi - \psi) \boldsymbol{w} \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} \right| \\
\leq& \frac{1}{2} \left\{ \|\psi\|_{0,4;\Omega} \|\boldsymbol{w}\|_{0,4;\Omega} \left\| \tilde{\boldsymbol{t}} - \tilde{\boldsymbol{r}} \right\|_{0;\Omega} + \|\phi - \varphi\|_{0,4;\Omega} \|\boldsymbol{w}\|_{0,4;\Omega} \|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_{0;\Omega} \right\} \\
\leq& \|\boldsymbol{w}\|_{0,4;\Omega} \left\| \vec{\psi} \right\| \left\| \vec{\phi} - \vec{\varphi} \right\|
\end{aligned}
$$

Por último, y análogamente a lo anterior, es directo que se cumple (7.39c). ■

7.3.2. Análisis de solubilidad de S y $\tilde{S}$

Dado $(\boldsymbol{w}, \phi) \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times L^4(\Omega)$, se introduce la forma bilineal

$$
A_{\boldsymbol{w},\phi}(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) := a_\phi(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) + c(\boldsymbol{w}; \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) \tag{7.40}
$$

de modo que el problema que define el operador $S(\boldsymbol{w}, \phi)$(cf. (7.22)) queda dado por

$$
\begin{array}{lcll}
A_{\boldsymbol{w},\phi}(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) + b(\vec{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{\sigma}) & = & F_\phi(\vec{\boldsymbol{v}}) & \forall \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) \\
b(\vec{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{\tau}) & = & G(\boldsymbol{\tau}) & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3}; \Omega)
\end{array} \tag{7.41}
$$

Notar que dado $\vec{\boldsymbol{v}} \in V$, se tiene, gracias a (7.28), que

$$
A_{\boldsymbol{w},\phi}(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{v}}) = a_\phi(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) + c(\boldsymbol{w}; \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) = a_\phi(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) \geq \alpha \|\vec{\boldsymbol{v}}\|^2 \tag{7.42}
$$

lo cual implica que

$$
\sup_{\substack{\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) \\ \vec{\boldsymbol{v}} \neq \mathbf{0}}} \frac{A_{\boldsymbol{w},\phi}(\vec{\boldsymbol{w}}, \vec{\boldsymbol{v}})}{\|\boldsymbol{v}\|} \geq \alpha \|\vec{\boldsymbol{w}}\| \qquad \forall \vec{\boldsymbol{w}} \in V \tag{7.43}
$$

y

$$
\sup_{\substack{\vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) \\ \vec{\boldsymbol{w}} \neq \mathbf{0}}} A_{\boldsymbol{w},\phi}(\vec{\boldsymbol{w}}, \boldsymbol{v}) > 0 \qquad \forall \vec{\boldsymbol{v}} \in V, \vec{\boldsymbol{v}} \neq \mathbf{0} \tag{7.44}
$$

además,

$$
|A_{\boldsymbol{w},\phi}(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})| \leq \left(2\mu_2 + \|\boldsymbol{w}\|_{0,4;\Omega} \right) \|\vec{\boldsymbol{u}}\| \, \|\vec{\boldsymbol{v}}\| \tag{7.45}
$$

es decir, $A_{\boldsymbol{w},\phi}$ es acotada con

$$
\|A_{\boldsymbol{w},\phi}\| \leq 2\mu_2 + \|\boldsymbol{w}\|_{0,4;\Omega} \tag{7.46}
$$

Así, aplicando el Teorema de Babuška-Brezzi en espacios de Banach, dado que $A_{\boldsymbol{w},\phi}$, b, F_ϕ y G satisfacen las hipótesis, se deduce que existe un único $(\vec{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\sigma}) \in (\mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega)) \times \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3}; \Omega)$ solución de (7.22), y se tiene la dependencia continua

$$\|\vec{\boldsymbol{u}}\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F_\phi\| + \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\|A_{\boldsymbol{w},\phi}\|}{\alpha}\right) \|G\|$$

esto es,

$$\|S(\boldsymbol{w}, \phi)\| \leq \frac{c(\Omega)}{\alpha} \|g\|_{\infty;\Omega} \|\phi\|_{0,4;\Omega} + \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{2\mu_2 + \|\boldsymbol{w}\|_{0,4;\Omega}}{\alpha}\right) \|u_{\mathrm{D}}\|_{1/2;\Gamma} \tag{7.47}$$

Por otra parte, $\tilde{S} : \mathbf{L}^4(\Omega) \to L^4(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$, asigna a cada $\boldsymbol{w} \in \mathbf{L}^4(\Omega)$, $\tilde{S})(\boldsymbol{w}) = \vec{\varphi} := (\varphi, \tilde{\boldsymbol{t}}) = (\tilde{S}_1(\boldsymbol{w}), \tilde{S}_2(\boldsymbol{w}))$, donde $(\vec{\varphi}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \in (L^4(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)) \times \mathrm{H}(\mathrm{div}_{4/3}; \Omega)$ es la única solución de

$$\begin{array}{lcll} \tilde{A}_{\boldsymbol{w}}(\vec{\varphi}, \vec{\psi}) + \tilde{b}(\vec{\psi}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) & = & 0 & \forall \vec{\psi} \in L^4(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \\ \tilde{b}(\vec{\varphi}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}) & = & \tilde{G}(\boldsymbol{\tau}) & \forall \tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathrm{H}(\mathrm{div}_{4/3}; \Omega) \end{array} \tag{7.48}$$

donde

$$\tilde{A}_{\boldsymbol{w}}(\vec{\varphi}, \vec{\psi}) := \tilde{a}(\vec{\varphi}, \vec{\psi}) + \tilde{c}_{\boldsymbol{w}}(\vec{\varphi}, \vec{\psi}) \tag{7.49}$$

Luego, para cada $\vec{\psi} \in \tilde{V}$, se tiene que, gracias (7.29), que

$$\tilde{A}_{\boldsymbol{w}}(\vec{\psi}, \vec{\psi}) = \tilde{a}(\vec{\psi}, \vec{\psi}) + \tilde{c}_{\boldsymbol{w}}(\vec{\psi}, \vec{\psi}) = \tilde{a}_\phi(\vec{\psi}, \vec{\psi}) \geq \tilde{\alpha} \left\|\vec{\phi}\right\|^2 \tag{7.50}$$

y es claro que es acotado, ya que las formas $\tilde{a}$ y $\tilde{c}_{\boldsymbol{w}}$ lo son. Así, aplicando el Teorema de Babuška-Brezzi en espacios de Banach, dado que $\tilde{A}_{\boldsymbol{w}}$, $\tilde{b}$ y $\tilde{G}$ satisfacen las hipótesis, se tiene que existe un único $(\vec{\varphi}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \in (L^4(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)) \times \mathrm{H}(\mathrm{div}_{4/3}; \Omega)$ solución del problema (7.23), y se tiene la dependencia continua

$$\|(\vec{\varphi}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}})\| \leq \frac{1}{\tilde{\beta}} \left(1 + \frac{\left\|\tilde{A}_{\boldsymbol{w}}\right\|}{\tilde{\alpha}}\right) \left\|\tilde{G}\right\|$$

esto es,

$$\left\|\tilde{S}(\boldsymbol{w})\right\| \leq \frac{1}{\tilde{\beta}} \left(1 + \frac{\|\mathbb{K}\|_{\infty;\Omega} + \|\boldsymbol{w}\|_{0,4;\Omega}}{\tilde{\alpha}}\right) \|\varphi_{\mathrm{D}}\|_{1/2;\Gamma} \tag{7.51}$$

7.4. Esquema de Galerkin

Consideremos espacios de elementos finitos arbitrarior

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_h^{\boldsymbol{u}} &\subset \mathbf{L}^4(\Omega) \\ \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{t}} &\subset \mathbb{L}^2_{\mathrm{tr}}(\Omega) \\ \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} &\subset \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3}; \Omega) \\ \mathrm{H}_h^{\varphi} &\subset L^4(\Omega) \\ \mathbf{H}_h^{\tilde{\boldsymbol{t}}} &\subset \mathbf{L}^2(\Omega) \\ \mathbf{H}_h^{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} &\subset \mathrm{H}(\mathrm{div}_{4/3}; \Omega) \end{aligned}$$

Se definen además

$$\vec{\boldsymbol{u}}_h := (\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{t}_h)$$
$$\vec{\boldsymbol{v}}_h := (\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{s}_h)$$
$$\vec{\boldsymbol{u}}_{0,h} := (\boldsymbol{u}_{0,h}, \boldsymbol{t}_{0,h})$$
$$\vec{\varphi}_h := (\varphi_h, \tilde{\boldsymbol{t}}_h)$$
$$\vec{\psi}_h := (\psi_h, \tilde{\boldsymbol{s}}_h)$$

donde $\vec{\boldsymbol{u}}_h, \vec{\boldsymbol{v}}_h, \vec{\boldsymbol{u}}_{0,h} \in \mathbf{H}_h := \mathbf{H}_h^{\boldsymbol{u}} \times \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{t}}$. A su vez, dado $s_h \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{t}}$, se define su parte simétrica y antisimétrica como sigue

$$\boldsymbol{s}_{h,\text{sym}} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{s}_h + \boldsymbol{s}_h^t) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{s}_{h,\text{skew}} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{s}_h - \boldsymbol{s}_h^t)$$

de modo que

$$\boldsymbol{s}_h = \boldsymbol{s}_{h,\text{sym}} + \boldsymbol{s}_{h,\text{skew}}$$

y

$$\|\boldsymbol{s}_h\|_{0;\Omega}^2 = \|\boldsymbol{s}_{h,\text{sym}}\|_{0;\Omega}^2 + \|\boldsymbol{s}_{h,\text{skew}}\|_{0;\Omega}^2$$

7.4.1. Operadores discretos de punto fijo

Se define el operador $S_h : \mathbf{H}_h^{\boldsymbol{u}} \times \mathrm{H}_h^{\varphi} \to \mathbf{H}_h$ que a cada $(\boldsymbol{w}_h, \phi_h) \in \mathbf{H}_h^{\boldsymbol{u}} \times \mathrm{H}_h^{\varphi}$ le asigna $S_h(\boldsymbol{w}_h, \phi_h) := \vec{\boldsymbol{u}}_h \in \mathbf{H}_h$ donde $(\vec{\boldsymbol{u}}_h, \boldsymbol{\sigma}_h) \in \mathbf{H}_h \times \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}}$ es la solución del problema

$$\begin{array}{lcll} a_{\phi_h}(\vec{\boldsymbol{u}}_h, \vec{\boldsymbol{v}}_h) + c(\boldsymbol{w}_h; \vec{\boldsymbol{u}}_h, \vec{\boldsymbol{v}}_h) + b(\vec{\boldsymbol{v}}_h, \boldsymbol{\sigma}_h) & = & F_{\phi_h}(\vec{\boldsymbol{v}}_h) & \forall \vec{\boldsymbol{v}}_h \in \mathbf{H}_h \\ b(\vec{\boldsymbol{v}}_h, \boldsymbol{\tau}_h) & = & G(\boldsymbol{\tau}_h) & \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} \end{array} \tag{7.52}$$

Además se define el operador $\tilde{S}_h : \mathbf{H}_h^{\boldsymbol{u}} \to \tilde{\mathbf{H}}_h$ que a cada $\boldsymbol{w}_h \in \mathbf{H}_h^{\boldsymbol{u}}$ le asigna $\tilde{S}_h(\boldsymbol{w}_h) = \vec{\varphi}_h$ donde $(\vec{\varphi}_h, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h) \in \tilde{\mathbf{H}}_h \times \mathbf{H}_h^{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}$ es solución del problema

$$\begin{array}{lcll} \tilde{a}(\vec{\varphi}_h, \vec{\psi}_h) + \tilde{c}_{\boldsymbol{w}_h}(\vec{\varphi}_h, \vec{\psi}_h) + \tilde{b}(\vec{\psi}_h, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h) & = & 0 & \forall \vec{\psi}_h \in \tilde{\mathbf{H}}_h \\ \tilde{b}(\vec{\varphi}_h, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h) & = & \tilde{G}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h) & \forall \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \mathbf{H}_h^{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \end{array} \tag{7.53}$$

7.4.2. Solubilidad del problema de punto fijo discreto para la ecuación del fluido

En este caso se tiene que el Kernel discreto de la forma bilineal b está dado por:

$$V_h := \{\vec{\boldsymbol{v}}_h := (\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{s}_h) \in \mathbf{H}_h : b(\vec{\boldsymbol{v}}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}}\}$$

es decir,

$$V_h := \left\{\vec{\boldsymbol{v}}_h := (\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{s}_h) \in \mathbf{H}_h : \int_\Omega \boldsymbol{\tau}_h \cdot \boldsymbol{s}_h + \int_\Omega \boldsymbol{v}_h \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}}\right\}$$

Hacemos ahora el primer supuesto sobre nuestro espacio discreto

H1) $\exists c_d > 0$ independiente de h tal que,

$$\|\boldsymbol{s}_{h,\text{sym}}\|_{0;\Omega} \geq c_d \|(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{s}_{h,\text{skew}})\| \quad \forall \vec{v}_h := (\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{s}_h) \in V_h \tag{7.54}$$

En tal caso, al definir

$$A_{\boldsymbol{w}_h,\phi_h}(\vec{\boldsymbol{u}}_h,\vec{\boldsymbol{v}}_h) := a_{\phi_h}(\vec{\boldsymbol{u}}_h,\vec{\boldsymbol{v}}_h) + c(\boldsymbol{w}_h;\vec{\boldsymbol{u}}_h,\vec{\boldsymbol{v}}_h)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
A_{\boldsymbol{w}_h,\phi_h}(\vec{\boldsymbol{v}}_h,\vec{\boldsymbol{v}}_h) &= a_{\phi_h}(\vec{\boldsymbol{u}}_h,\vec{\boldsymbol{v}}_h)\\
&= 2\int_\Omega \mu(\phi_h)\boldsymbol{s}_{h,\mathrm{sym}} : \boldsymbol{s}_{h,\mathrm{sym}}\\
&\geq 2\mu_1 \left\|\boldsymbol{s}_{h,\mathrm{sym}}\right\|_{0;\Omega}^2\\
&= \mu_1 \left\|\boldsymbol{s}_{h,\mathrm{sym}}\right\|_{0;\Omega}^2 + \mu_1 \left\|\boldsymbol{s}_{h,\mathrm{sym}}\right\|_{0;\Omega}^2\\
&\geq \mu_1 \left\|\boldsymbol{s}_{h,\mathrm{sym}}\right\|_{0;\Omega}^2 + \mu_1 c_d^2 \left\{\left\|\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,4;\Omega} + \left\|\boldsymbol{s}_{h,\mathrm{skew}}\right\|_{0;\Omega}^2\right\}\\
&\geq \mu_1 \operatorname{mín}\left\{1, c_d^2\right\}\left\{\left\|\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,4;\Omega} + \left\|\boldsymbol{s}_h\right\|_{0;\Omega}^2\right\}\\
&= \mu_1 \operatorname{mín}\left\{1, c_d^2\right\}\left\|\vec{\boldsymbol{v}}_h\right\|
\end{aligned}$$

lo cual prueba la V_h-elipticidad de $A_{\boldsymbol{w}_h,\phi_h}$.
Nuestra segunda hipótesis es,

H2) $\exists \beta_d > 0$ independiente de h tal que,

$$\sup_{\substack{\vec{\boldsymbol{v}}_h \in \mathbf{H}_h\\ \vec{\boldsymbol{v}}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{b(\vec{\boldsymbol{v}}_h,\boldsymbol{\tau}_h)}{\|\vec{\boldsymbol{v}}_h\|} \geq \beta_d \left\|\boldsymbol{\tau}_h\right\|_{\mathbf{div}_{4/3};\Omega} \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} \tag{7.55}$$

Así, el problema que define el operador S_h está bien definido.

7.4.3. Solubilidad del problema de punto fijo discreto para la ecuación del calor

En este caso, el kernel discreto de $\tilde{b}$ está dado por

$$\tilde{V}_h := \left\{\vec{\psi}_h := (\psi_h,\tilde{\boldsymbol{s}}_h) \in \tilde{\mathbf{H}}_h : \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \cdot \tilde{\boldsymbol{s}}_h + \int_\Omega \psi_h \operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h) = 0 \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \mathbf{H}_h^{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}\right\}$$

Luego, se hace el siguiente supuesto,

H3) $\exists \tilde{c}_d > 0$, independiente de h, tal que

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{s}}_h\right\|_{0,\Omega} \geq \tilde{c}_d \left\|\psi_h\right\|_{0,4;\Omega} \qquad ,\forall \vec{\psi}_h := (\psi_h,\tilde{\boldsymbol{s}}_h) \in \tilde{V}_h$$

En tal caso, al definir

$$\tilde{A}_{\boldsymbol{w}_h}(\vec{\varphi}_h,\vec{\psi}_h) := \tilde{a}(\vec{\varphi}_h,\vec{\psi}_h + \tilde{c}_{\boldsymbol{w}_h}(\vec{\varphi}_h,\vec{\psi}_h$$

se tiene para cada $\vec{\psi}_h := (\psi_h, \tilde{\boldsymbol{s}}_h) \in \tilde{V}_h$ que

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{\boldsymbol{w}_h}(\vec{\psi}_h, \vec{\psi}_h) =& \int_\Omega \mathbb{K}\tilde{\boldsymbol{s}}_h : \tilde{\boldsymbol{s}}_h \\ \geq& k \left\| \tilde{\boldsymbol{s}}_h \right\|_{0;\Omega}^2 \\ =& \frac{k}{2} \left\| \tilde{\boldsymbol{s}}_h \right\|_{0;\Omega}^2 + \frac{k}{2} \left\| \tilde{\boldsymbol{s}}_h \right\|_{0;\Omega}^2 \\ \geq& \frac{k}{2} \left\| \tilde{\boldsymbol{s}}_h \right\|_{0;\Omega}^2 + \frac{k}{2} \tilde{c}_d \left\| \psi_h \right\|_{0;\Omega}^2 \\ \geq& \frac{k}{2} \min\left\{1, \tilde{c}_d^2\right\} \left\| \vec{\psi}_h \right\|^2\end{aligned}$$

lo cual prueba la $\tilde{V}_h$-elipticidad de $\tilde{A}_{\boldsymbol{w}_h}$.

Finalmente, se asume

H4) $\exists \tilde{\beta}_d > 0$, independiente de h, tal que

$$\sup_{\substack{\vec{\psi}_h \in \tilde{V}_h \\ \vec{\psi}_h \neq \boldsymbol{0}}} \frac{\tilde{b}(\vec{\psi}_h, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h)}{\left\| \vec{\psi}_h \right\|} \geq \tilde{\beta}_h \left\| \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \right\|_{\mathbf{div}_{4/3}} \qquad , \forall \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \mathbf{H}_h^{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}$$

Así, el problema que define el operador $\tilde{S}_h$ está bien propuesto.

7.4.4. Detalles sobre las hipótesis discretas

Se tienen los siguientes resultados abstractos sobre las condiciones *inf-sup*.

Lema 7.5

Sean X, Y, Y_1, Y_2 y Z espacios de Banach reflexivos con Y_1 e Y_2 subespacios cerrados de Y tal que $Y = Y_1 \oplus Y_2$. Supongamos además que la norma de Y se puede redefinir equivalentemente, pero con constantes independientes de Y_1 e Y_2 como

$$\|\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}_1\| + \|\boldsymbol{y}_2\| \qquad , \forall \boldsymbol{y} := \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in Y := Y_1 \oplus Y_2$$

Además, sea $b : (X \times Y) \times Z \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y definamos los siguientes espacios

$$V := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X \times Y : b((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{z} \in Z\}$$

$$Z_0 := \{\boldsymbol{z} \in Z : b((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2), \boldsymbol{z}) = 0 \quad \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) \in X \times Y_2\}$$

Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes

I) Existen constantes $\beta_1, \beta_2 > 0$ tales que

$$\sup_{\substack{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in X \times Y \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq \boldsymbol{0}}} \frac{b((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{z})}{\|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\|} \geq \beta_1 \|\boldsymbol{z}\| \qquad , \forall \boldsymbol{z} \in Z \tag{7.56}$$

y

$$\|\boldsymbol{y}_1\| \geq \beta_2 \|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)\| \qquad , \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) \in V \tag{7.57}$$

II) Existen $\beta_3, \beta_4 > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{z}\in Z\\ \boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0}}} \frac{b((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2),\boldsymbol{z})}{\|\boldsymbol{z}\|} \geq \beta_3 \|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)\| \qquad ,\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)\in X\times Y_2 \tag{7.58}$$

y

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{y}_1\in Y_1\\ \boldsymbol{y}_1\neq\boldsymbol{0}}} \frac{b((\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}_1),\boldsymbol{z})}{\|\boldsymbol{y}_1\|} \geq \beta_4 \|\boldsymbol{z}\| \qquad ,\forall\boldsymbol{z}\in Z_0 \tag{7.59}$$

Observación 7.3

Lo que necesitaremos a nivel discreto es (7.56) y (7.57), para lo cual se probará (7.58) y (7.59). Sin embargo, el lema siguiente nos da condiciones suficientes para (7.58)

Lema 7.6

Además de las notaciones y definiciones del Lema 7.5, se introduce el espacio

$$Z_1 := \{\boldsymbol{z}\in Z : b((\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}),\boldsymbol{z})\}$$

Supongamos además que existen constantes $\beta_5, \beta_6 > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{z}\in Z\\ \boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0}}} \frac{b(((\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}),\boldsymbol{z})}{\|\boldsymbol{z}\|} \geq \beta_5 \|\boldsymbol{x}\| \qquad ,\forall\boldsymbol{x}\in X \tag{7.60}$$

y

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{z}\in Z_1\\ \boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0}}} \frac{b(((\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}_2),\boldsymbol{z})}{\|\boldsymbol{z}\|} \geq \beta_6 \|\boldsymbol{y}_2\| \qquad ,\forall\boldsymbol{y}_2\in Y_2 \tag{7.61}$$

Entonces, se verifica (7.58).

Observación 7.4

Lo anterior indica que para efectos de obtener (7.56) y (7.57), basta probar (7.59), (7.60) y (7.61).

Observación 7.5

Las demostraciones de los Lemas 7.5 y 7.6 se encuentran en la versión pre-print de [5], disponible en `https://ci2ma.udec.cl/pdf/pre-publicaciones2/2019/pp19-04.pdf`.

7.4.5. Condiciones *inf-sup* discretas para la forma bilineal b

Descomponemos primero

$$\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{t}} = \mathbb{H}_{h,\mathrm{sym}}^{\boldsymbol{t}} \oplus \mathbb{H}_{h,\mathrm{skew}}^{\boldsymbol{t}}$$

donde

$$\mathbb{H}_{h,\mathrm{sym}}^{\boldsymbol{t}} := \left\{\boldsymbol{s}_h\in\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{t}} : \boldsymbol{s}_h = \boldsymbol{s}_h^t\right\}$$

y

$$\mathbb{H}_{h,\mathrm{skew}}^{\boldsymbol{t}} := \left\{\boldsymbol{s}_h\in\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{t}} : \boldsymbol{s}_h = -\boldsymbol{s}_h^t\right\}$$

y observemos que, dado $\boldsymbol{s}_h \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{t}}$, se tiene

$$\boldsymbol{s}_h = \boldsymbol{s}_{h,\text{sym}} + \boldsymbol{s}_{h,\text{skew}} \quad \text{y} \quad \|\boldsymbol{s}_h\|_{0;\Omega}^2 = \|\boldsymbol{s}_{h,\text{sym}}\|_{0;\Omega}^2 + \|\boldsymbol{s}_{h,\text{skew}}\|_{0;\Omega}^2$$

de donde

$$\|\boldsymbol{s}_h\|_{0;\Omega} \leq \|\boldsymbol{s}_{h,\text{sym}}\|_{0;\Omega} + \|\boldsymbol{s}_{h,\text{skew}}\|_{0;\Omega}$$

y

$$\|\boldsymbol{s}_h\|_{0;\Omega} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|\boldsymbol{s}_{h,\text{sym}}\|_{0;\Omega} + \|\boldsymbol{s}_{h,\text{skew}}\|_{0;\Omega}\right)$$

A continuación aplicamos nuestras implicaciones lógicas dadas por la Observación 7.4, a los espacios

$$X = \mathbf{H}_h^{\boldsymbol{u}}, \quad Y = \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{t}}, \quad Y_1 = \mathbb{H}_{h,\text{sym}}^{\boldsymbol{t}}, \quad Y_2 = \mathbb{H}_{h,\text{skew}}^{\boldsymbol{t}}, \quad Z = \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}}$$

De acuerdo a ello, para obtener (7.56) y (7.57), esto es, (7.4.2) y (7.4.2), respectivamente, se necesita demostrar (7.59), (7.60) y (7.61), esto es

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{s}_{h,\text{sym}} \in \mathbb{H}_{h,\text{sym}}^{\boldsymbol{t}} \\ \boldsymbol{s}_{h,\text{sym}} \neq \mathbf{0}}} \frac{b((\mathbf{0}, \boldsymbol{s}_{h,\text{sym}}), \boldsymbol{\tau}_h)}{\|\boldsymbol{s}_{h,\text{sym}}\|_{0;\Omega}} = \sup_{\substack{\boldsymbol{s}_{h,\text{sym}} \in \mathbb{H}_{h,\text{sym}}^{\boldsymbol{t}} \\ \boldsymbol{s}_{h,\text{sym}} \neq \mathbf{0}}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{s}_{h,\text{sym}} : \boldsymbol{\tau}_h}{\|\boldsymbol{s}_{h,\text{sym}}\|_{0;\Omega}} \geq \beta_4 \|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbf{div}_{4/3};\Omega} \qquad , \forall \boldsymbol{\tau}_h \in Z_{0,h} \tag{7.62}$$

donde

$$Z_{0,h} := \left\{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} : b((\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{s}_{h,\text{skew}}), \boldsymbol{\tau}_h) = 0 \quad \forall (\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{s}_{h,\text{skew}}) \in \mathbf{H}_h^{\boldsymbol{u}} \times \mathbb{H}_{h,\text{skew}}^{\boldsymbol{t}}\right\}$$

es decir,

$$Z_{0,h} := \left\{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} : \int_\Omega \boldsymbol{v}_h \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_h) = 0, \forall \boldsymbol{v}_h \in \mathbf{H}_h^{\boldsymbol{u}} \quad \text{y} \quad \int_\Omega \boldsymbol{\tau}_h : \boldsymbol{s}_{h,\text{skew}} = 0, \forall \boldsymbol{s}_{h,\text{skew}} \in \mathbb{H}_{h,\text{skew}}^{\boldsymbol{t}}\right\}$$

junto con

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} \\ \boldsymbol{\tau}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{b((\boldsymbol{v}_h, \mathbf{0}), \boldsymbol{\tau}_h)}{\|\boldsymbol{s}_{h,\text{sym}}\|_{0;\Omega}} = \sup_{\substack{\boldsymbol{s}_{h,\text{sym}} \in \mathbb{H}_{h,\text{sym}}^{\boldsymbol{t}} \\ \boldsymbol{s}_{h,\text{sym}} \neq \mathbf{0}}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{v}_h \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_h)}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbf{div}_{4/3};\Omega}} \geq \beta_5 \|\boldsymbol{v}_h\|_{0,4;\Omega} \qquad , \forall \boldsymbol{v}_h \in \mathbf{H}_h^{\boldsymbol{u}} \tag{7.63}$$

Finalmente,

$$\sup_{\substack{h \in Z_{1,h} \\ \boldsymbol{\tau}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{b((\mathbf{0}, \boldsymbol{s}_{h,\text{skew}}), \boldsymbol{\tau}_h)}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbf{div}_{4/3};\Omega}} = \sup_{\substack{h \in Z_{1,h} \\ \boldsymbol{\tau}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\tau}_h : \boldsymbol{s}_{h,\text{skew}}}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbf{div}_{4/3};\Omega}} \geq \beta_6 \|\boldsymbol{s}_{h,\text{skew}}\|_{0;\Omega} \qquad , \forall \boldsymbol{s}_{h,\text{skew}} \in \mathbb{H}_{h,\text{skew}}^{\boldsymbol{t}} \tag{7.64}$$

donde

$$Z_{1,h} := \left\{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} : \int_\Omega \boldsymbol{v}_h \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \mathbf{H}_h^{\boldsymbol{u}}\right\}$$

Así, partimos demostrando (7.64). En tal caso, si suponemos que $\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} \subset \mathbf{H}_h^{\boldsymbol{u}}$, entonces

$$Z_{1,h} = \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_h) = \mathbf{0}\}$$

Para probar (7.64) utilizamos un par de elementos finitos estables para formulación primal de Stokes, Más precisamente, sean U_h subespacio de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ y $\hat{Q}_h$ subespacio de $L^2(\Omega)$, de modo que definimos

$Q_h := L_0^2(\Omega) \bigcap \hat{Q}_H$ y tal que (U_h, Q_h) es estable para el problema de Stokes. Es decir, para cada par de funcionales $(f, g) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)' \times L_0^2(\Omega)'$, existe un único par $(\boldsymbol{z}_h, p_h) \in U_h \times Q_h$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \boldsymbol{z}_h : \nabla \boldsymbol{w}_h + \int_\Omega p_h \operatorname{div}(\boldsymbol{w}_h) &= f(\boldsymbol{w}_h) \qquad \forall \boldsymbol{w}_h \in U_h \\ \int_\Omega q_h \operatorname{div}(\boldsymbol{z}_h) &= g(q_h) \qquad \forall q_h \in Q_h \end{aligned} \tag{7.65}$$

Además, existe $c > 0$, independiente de h tal que,

$$\|\boldsymbol{z}_h\|_{1;\Omega} + \|p_h\|_{0;\Omega} \leq c \{\|f\| + \|g\|\}$$

En particular, consideramos $f \equiv 0$ y $g(q_h) = \int_\Omega \hat{q}_h q_h$ donde $\hat{q}_h \in \hat{Q}_h$. Supongamos que $\boldsymbol{\mathcal{P}}_1(\Omega) \subset U_h$, y tomamos en particular $\boldsymbol{w}_h(\boldsymbol{x}) = (-x_2, x_1), \forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$, se sigue de la primera de (7.65) que

$$0 = \int_\Omega \left\{ -\frac{\partial \boldsymbol{z}_{h,1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \boldsymbol{z}_{h,2}}{\partial x_1} \right\}$$

Supongamos además que $\mathbb{P}_0(\Omega) \subset \hat{\mathbb{H}}_h^{\boldsymbol{\sigma}}$ es un subespacio de $\mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3}; \Omega)$,y definamos $\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} := \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_{4/3}; \Omega) \bigcap \hat{\mathbb{H}}_h^{\boldsymbol{\sigma}}$. Por otro lado entonces, se considera

$$c_h = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \hat{q}_h \quad \text{y} \quad \operatorname{curl}(\boldsymbol{z}_h) := \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial \boldsymbol{z}_{h,1}}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \boldsymbol{z}_{h,1}}{\partial x_1} \\ -\dfrac{\partial \boldsymbol{z}_{h,2}}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \boldsymbol{z}_{h,2}}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

y se define

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h = \operatorname{curl}(\boldsymbol{z}_h) + c_h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es claro que $\operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h) = 0$ en Ω. Además, $\operatorname{tr}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h) = -\dfrac{\partial \boldsymbol{z}_{h,1}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \boldsymbol{z}_{h,2}}{\partial x_1}$, y por lo tanto,

$$\int_\Omega \operatorname{tr}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h) = 0$$

Luego, suponiendo que $\operatorname{curl}(U_h) + \mathbb{P}_0(\Omega) \subset \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}}$, se tiene que $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in Z_{1,h}$. Por otro lado, notando que $\hat{q}_h - c_h \in L_0^2(\Omega)$ y suponiendo que $\mathcal{P}_0(\Omega) \subset \hat{Q}_h$, se tiene que $\hat{q} - c_h \in Q_h = \hat{Q}_h \subset L_0^2(\Omega)$. De esta forma, de la segunda ecuación de (7.65) aplicada a $q_h = \hat{q}_h - c_h \in Q_h$, se obtiene,

$$\int_\Omega (\hat{q}_h - c_h) \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_h) = \int_\Omega \hat{q}_h (\hat{q}_h - c_h)$$

es decir,

$$\int_\Omega (\hat{q}_h - c_h) \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_h) = \|\hat{q}_h\|_{0;\Omega}^2 - |\Omega| \, c_h^2$$

o bien,

$$\int_\Omega (\hat{q}_h - c_h) \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_h) + |\Omega| \, c_h^2 = \|\hat{q}_h\|_{0;\Omega}^2$$

Además,

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{\mathrm{div}_{4/3};\Omega} &= \|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{0;\Omega} \\
&= \left\| \mathrm{curl}(\boldsymbol{z}_h) + c_h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{0;\Omega} \\
&\leq \|\mathrm{curl}(\boldsymbol{z}_h)\|_{0;\Omega} + \left\| \begin{pmatrix} 0 & c_h \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{0;\Omega} \\
&= |\boldsymbol{z}_h|_{1;\Omega} + \|c_h\| \, |\Omega| \\
&\leq \|\boldsymbol{z}_h\|_{1;\Omega} + \left| \int_\Omega \hat{q}_h \right| \\
&\leq \|\boldsymbol{z}_h\|_{1;\Omega} + |\Omega|^{1/2} \, \|\hat{q}_h\|_{0;\Omega}
\end{aligned}
$$

y dada la dependencia continua del problema de Stokes (7.65), se tiene que

$$
\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{\mathrm{div}_{4/3};\Omega} \leq c_0 \, \|\hat{q}_h\|_{0;\Omega}
$$

Finalmente, dado $\boldsymbol{s}_{h,\mathrm{skew}} \in \mathbb{H}^{\boldsymbol{t}}_{h,\mathrm{skew}}$, se tiene que

$$
\sup_{\substack{h \in Z_{1,h} \\ \boldsymbol{\tau}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\tau}_h : \boldsymbol{s}_{h,\mathrm{skew}}}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbf{div}_{4/3};\Omega}} \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h : \boldsymbol{s}_{h,\mathrm{skew}}}{\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{\mathbf{div}_{4/3};\Omega}}
$$

De aquí, definiendo $\mathbb{H}^{\boldsymbol{t}}_{h,\mathrm{skew}} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \hat{q}_h \\ -\hat{q}_h & 0 \end{pmatrix} : \hat{q}_h \in \hat{Q} \right\}$, luego, se tiene que $\boldsymbol{s}_{h,\mathrm{skew}} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{q}_h \\ -\hat{q}_h & 0 \end{pmatrix}$, y luego

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \hat{\boldsymbol{\tau}}_h = \int_\Omega \left\{ \mathrm{curl}(\boldsymbol{z}_h) + c_h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} &: \begin{pmatrix} 0 & \hat{q}_h \\ -\hat{q}_h & 0 \end{pmatrix} \\
&= \int_\Omega \hat{q}_h \, \mathrm{div}(\boldsymbol{z}_h) + \int_\Omega c_h \hat{q}_h \\
&= \int_\Omega \hat{q}_h \, \mathrm{div}(\boldsymbol{z}_h) + |\Omega| \, c_h^2 \\
&= \|\hat{q}_h\|^2_{0;\Omega}
\end{aligned}
$$

Así, resulta

$$
\begin{aligned}
\sup_{\substack{h \in Z_{1,h} \\ \boldsymbol{\tau}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\tau}_h : \boldsymbol{s}_{h,\mathrm{skew}}}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbf{div}_{4/3};\Omega}} &\geq \frac{\displaystyle\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h : \boldsymbol{s}_{h,\mathrm{skew}}}{\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{\mathbf{div}_{4/3};\Omega}} \\
&= \frac{\|\hat{q}_h\|^2_{0;\Omega}}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbf{div}_{4/3};\Omega}} \\
&\geq \frac{1}{c_0} \, \|\hat{q}_h\|_{0;\Omega} \\
&= \frac{1}{c_0 \sqrt{2}} \, \|\boldsymbol{s}_{h,\mathrm{skew}}\|_{0;\Omega}
\end{aligned}
$$

Con lo que queda probado (7.64) con $\beta_6 = \dfrac{1}{c_0 \sqrt{2}}$.

Observación 7.6: Supuestos para (7.64)

Se ha probado (7.64) bajo los siguientes supuestos sobre los espacios discretos

I) $\mathcal{P}_0(\Omega) \subset \hat{Q}_h \subset L^2(\Omega)$.

II) $\boldsymbol{\mathcal{P}}_1(\Omega) \subset U_h$.

III) $\mathbb{P}_0(\Omega) \subset \hat{\mathbb{H}}_h^{\boldsymbol{\sigma}} \subset \mathbb{H}(\mathbf{div}_{4/3};\Omega)$.

IV) $\mathbf{div}(\hat{\mathbb{H}}_h^{\boldsymbol{\sigma}}) \subset \mathbf{H}_h^{\boldsymbol{u}}$.

V) $\operatorname{curl}(U_h) \subset \hat{\mathbb{H}}_h^{\boldsymbol{\sigma}}$.

VI) $\mathbb{H}_{h,\text{skew}}^{\boldsymbol{t}} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & \hat{q}_h \\ -\hat{q}_h & 0 \end{pmatrix} : \hat{q}_h \in \hat{Q}\right\}$, lo que a su vez dice que $\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{t}} = \left\{\begin{pmatrix} \hat{q}_h & \hat{p}_h \\ \hat{r}_h & -\hat{q}_h \end{pmatrix} : \hat{p}_h, \hat{q}_h, \hat{r}_h \in \hat{Q}\right\}$

donde (U_h, Q_h) forman un par estable de espacio de elementos finitos para el problema de Stokes (7.65).

En la siguiente observación se definen los espacios de Scott-Vogelius y un ejemplo de como se definen a partir de dichos espacios, los cuales son estables para el problema de Stokes, los espacios discretos de forma que corroboren los supuestos de la observación 7.6.

Observación 7.7: Espacios de Scott-Vogelius

Se considera $\mathcal{T}_h^b$ una triangularización baricéntrica, es decir, se genera a partir de un refinamiento por el baricentro de una malla dada. Luego, el par de espacios de elementos finitos estables $(U_h, Q_h := \hat{Q}_h \bigcap L_0^2(\Omega))$ para el problema de Stokes (7.65) queda definido, para $k+1 > n$, como

$$U_h := \left\{\boldsymbol{w}_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : \boldsymbol{w}_h|_K \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_{k-1}(K), \forall K \in \mathcal{T}_h^b \quad \text{y} \quad \boldsymbol{w}_h \equiv \mathbf{0} \text{ en } \Omega\right\}$$

$$\hat{Q}_h := \left\{q_h \in L^2(\Omega) : q_h|_K \in \mathcal{P}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h^b\right\}$$

y se denominan Espacios de Scott-Vogelius. Notar que, $\operatorname{curl}(U_h)|_K \in \mathbb{P}_k(K)$, y luego se tiene que

$$\operatorname{curl}(U_h) \subset \left\{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega) : \boldsymbol{\tau}_h|_K \in \mathbb{P}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h^b\right\}$$

lo cual sugiere considerar

$$\hat{\mathbb{H}}_h^{\boldsymbol{\sigma}} := \left\{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega) : \boldsymbol{\tau}_h|_K \in RT_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h^b\right\}$$

En tal caso, es claro que $\mathbb{P}_0(\Omega) \subset \hat{\mathbb{H}}_h^{\boldsymbol{\sigma}}$, y luego

$$\operatorname{curl}(U_h) + \mathbb{P}_0(\Omega) \subset \hat{\mathbb{H}}_h^{\boldsymbol{\sigma}}$$

A su vez, se tiene que

$$\mathcal{P}_o(\Omega) \subset \hat{Q}_h \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\mathcal{P}}_1(\Omega) \subset U_h$$

Por último dado que,

$$\operatorname{div}(\hat{\mathbb{H}}_h^{\boldsymbol{\sigma}}) \subset \left\{\boldsymbol{v}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \boldsymbol{v}_k|_K \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h^b\right\}$$

Con lo cual, para satisfacer la condición $\operatorname{div}(\hat{\mathbb{H}}_h^{\boldsymbol{\sigma}}) \subset \mathbf{H}_h^{\boldsymbol{u}}$, se sugiere definir

$$\mathbf{H}_h^{\boldsymbol{u}} := \left\{\boldsymbol{v}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \boldsymbol{v}_k|_K \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h^b\right\}$$

Por último, de acuerdo a las restricciones suficientes, se define

$$\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{t}} := \left\{\boldsymbol{s} \in \mathbb{L}_{\text{tr}}^2(\Omega) : \boldsymbol{s}|_K \in \mathbb{P}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\right\}$$

Ahora, procederemos a probar (7.62), por cuanto $\operatorname{div}(\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}}) \subset \mathbf{H}_h^{\boldsymbol{v}}$, se deduce que, dado $\boldsymbol{\tau}_h \in Z_{0,h}$, resulta $\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_h) = \mathbf{0}$ en Ω. En tal caso, se sigue que $\boldsymbol{\tau}_h|_K \in \mathbb{P}_k(K)$ para todo elemento en $K \in \mathcal{T}_h$. Luego, la condición

$$0 = \int_\Omega \boldsymbol{\tau}_h : \boldsymbol{s}_{h,\text{skew}} \qquad , \forall \boldsymbol{s}_{h,\text{skew}} \in \mathbb{H}_{h,\text{skew}}^{\boldsymbol{t}}$$

se traduce en que, para todo $q_h \in L^2(\Omega)$ tal que $q_h|_K \in \mathcal{P}_k(K)$, entonces

$$0 = \int_\Omega \begin{pmatrix} \tau_{h,11} & \tau_{h,12} \\ \tau_{h,21} & \tau_{h,22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & q_h \\ -q_h & 0 \end{pmatrix} = \int_\Omega q_h(\tau_{h,11} - \tau_{h,22})$$

para todo $q_h \in L^2(\Omega)$ tal que $q_h|_K \in \mathcal{P}_k(K)$, de donde se concluye que $\boldsymbol{\tau}_h$ es simétrico, y por lo tanto $\boldsymbol{\tau}_h^{\mathtt{d}} \in \mathbb{H}_{h,\text{sym}}^{\boldsymbol{t}}$. Así, para este $\boldsymbol{\tau}_h^{\mathtt{d}} \in Z_{0,h}$, resulta

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\boldsymbol{s}_{h,\text{sym}} \in \mathbb{H}_{h,\text{sym}}^{\boldsymbol{t}} \\ \boldsymbol{s}_{h,\text{sym}} \neq \mathbf{0}}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{s}_{h,\text{sym}} : \boldsymbol{\tau}_h}{\|\boldsymbol{s}_{h,\text{sym}}\|_{0;\Omega}} &\geq \frac{\|\boldsymbol{\tau}_h^{\mathtt{d}}\|_{0;\Omega}^2}{\|\boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}}\|_{0;\Omega}} \\
&= \left\|\boldsymbol{\tau}_h^{\mathtt{d}}\right\|_{0;\Omega} \\
&\geq \sqrt{c_1}\,\|\boldsymbol{\tau}\|_{0;\Omega} \\
&= \sqrt{c_1}\,\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div}_{4/3};\Omega}
\end{aligned}$$

donde c_1 es la constante de la desigualdad de Korn, de donde queda demostrada (7.62).

Antes de probar (7.63), probaremos una condición *inf-sup* genérica, para ello, consideramos t y t' conjugados de Hölder.

Lema 7.7

Existe $\beta > 0$ independiente de h tal que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbf{H}_h \\ \boldsymbol{\tau}_h}} \frac{\displaystyle\int_\Omega v_h \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_h)}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\operatorname{div}_t;\Omega}} \geq \beta\,\|v_h\|_{0,t';\Omega} \qquad , \forall v_h \in Q_h$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_h &:= \{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathrm{H}(\operatorname{div}_t;\Omega) : \boldsymbol{\tau}_h|_K \in RT_k(K), \forall K \in \tau_h\} \\
Q_h &:= \left\{v_h \in L^{t'}(\Omega) : v_h|_K \in \mathcal{P}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\right\}
\end{aligned}$$

Demostración. Dado $v_h \in Q_h$, consideramos un dominio convexo D tal que $\overline{\Omega} \subset D$ y el problema auxiliar

$$\begin{array}{l}
\textit{Hallar } z \in \mathrm{W}^{1,t}(\Omega) \textit{ tal que:} \\
\begin{array}{rcll} \Delta z &=& g & \text{en } D \\ z &=& 0 & \text{en } \partial D \end{array}
\end{array}$$

donde

$$g = \begin{cases} |v_h|^{t'-2} v_h & \text{en } \Omega \\ 0 & \text{en } D \backslash \overline{D} \end{cases}$$

El resultado de regularidad de este problema(ver Lema 6.1) nos dice que $z \in \mathrm{W}^{2,t}(\Omega) \bigcap \mathrm{W}_0^{1,t}(\Omega)$ y

$$\|z\|_{2,t;D} \leq c\,\|g\|_{0,t;D} \tag{7.66}$$

Notar que

$$\begin{aligned}
\|g\|_{0,t;D} &= \left(\int_\Omega \left(|v_h|^{t'-1}\right)^t\right)^{1/t} \\
&= \left(\int_\Omega |v_h|^{t'}\right)^{1/t} \\
&= \left(\|v_h\|_{0,t';\Omega}^{t'}\right)^{1/t} \\
&= \|v_h\|_{0,t';\Omega}^{t'/t} \\
&= \|v_h\|_{0,t';\Omega}^{t'-1}
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\|z\|_{2,t;D} \leq c\,\|v_h\|_{0,t';\Omega}^{t'-1}$$

Luego, definiendo

$$\boldsymbol{\zeta} := \nabla z|_\Omega \in \mathrm{W}^{1,t}(\Omega)$$

observamos que

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{\zeta}) = |v_h|^{t'-2}\, v_h \text{ en } \Omega \quad \text{y} \quad \|\boldsymbol{\zeta}\|_{1,t;\Omega} \leq \|z\|_{2,t;\Omega} \leq c\,|v_h|_{0,t';\Omega}^{t'-1}$$

Luego, definiendo $\boldsymbol{\zeta}_h := \Pi_h^k(\boldsymbol{\zeta}) \in \mathbf{H}_h$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\zeta}_h\|_{0;\Omega} &= \left\|\Pi_h^k(\boldsymbol{\zeta})\right\|_{0;\Omega} \\
&\leq \left\|\boldsymbol{\zeta} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\zeta})\right\|_{0;\Omega} + \|\boldsymbol{\zeta}\|_{0;\Omega}
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 2.5 con $l = 1$ y $n = 2$, se tiene

$$\left\|\boldsymbol{\zeta} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\zeta})\right\|_{0;\Omega} \leq C h^{2(1-1/t)}\,|\boldsymbol{\zeta}|_{1,t;\Omega}$$

y usando la inyección continua de $\mathbf{W}^{1,t}(\Omega)$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$, con $t \geq 2n/(2+n)$, se tiene

$$\|\boldsymbol{\zeta}\|_{0;\Omega} \leq C\,\|\boldsymbol{\zeta}\|_{1,t;\Omega}$$

Se sigue así que

$$\|\boldsymbol{\zeta}_h\|_{0;\Omega} \leq c\,\|\boldsymbol{\zeta}\|_{1,t;\Omega} \leq c\,\|v_h\|_{0,t';\Omega}^{t'-1}$$

Por otro lado,

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{\zeta}_h) = \mathrm{div}(\Pi_h^k(\boldsymbol{\zeta})) = P_h^k(\mathrm{div}(\boldsymbol{\zeta})) = P_h^k(|v_h|^{t'-2}\, v_h)$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{div}(\boldsymbol{\zeta}_h)\|_{0,t;\Omega} &= \left\|P_h^k(|v_h|^{t'-2}\, v_h)\right\|_{0,t;\Omega} \\
&\leq C\left\||v_h|^{t'-2}\, v_h\right\|_{0,t;\Omega} \\
&= C\,\|v_h\|_{0,t';\Omega}^{t'-1}
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\|\boldsymbol{\zeta}_h\|_{\mathrm{div}_t;\Omega} \leq \bar{C}\,\|v_h\|_{0,t';\Omega}^{t'-1}$$

Finalmente

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h\in\mathbf{H}_h\\ \boldsymbol{\tau}_h}} \frac{\displaystyle\int_\Omega v_h \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_h)}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\operatorname{div}_t;\Omega}} \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega v_h \operatorname{div}(\boldsymbol{\zeta}_h)}{\|\boldsymbol{\zeta}_h\|_{\operatorname{div}_t;\Omega}}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_\Omega v_h P_h^k(|v_h|^{t'-2} v_h)}{\|\boldsymbol{\zeta}_h\|_{\operatorname{div}_t;\Omega}}$$

$$\geq \frac{\displaystyle\int_\Omega |v_h|^{t'}}{\|\boldsymbol{\zeta}_h\|_{\operatorname{div}_t;\Omega}}$$

$$= \frac{\|v_h\|_{0,t';\Omega}^{t'}}{\|\boldsymbol{\zeta}_h\|_{\operatorname{div}_t;\Omega}}$$

$$\geq \frac{1}{\bar{C}} \|v_h\|_{0,t';\Omega} \qquad ,\forall v_h \in Q_h$$

con lo que queda probado el resultado. ■

7.4.6. Condiciones *inf-sup* discretas para la forma bilineal $\tilde{b}$

Aplicando el Lema 7.5, deduce que probar la condición *inf-sup* discreta para la forma bilineal $\tilde{b}$ equivale a probar que existen constantes $\tilde{\beta}_3, \tilde{\beta}_4 > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\in\mathbf{H}_h^{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}\\ \tilde{\boldsymbol{\tau}}\neq\mathbf{0}}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \psi_h \operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h)}{\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{\operatorname{div}_{4/3};\Omega}} \geq \tilde{\beta}_3 \|\psi_h\|_{0,4;\Omega} \qquad ,\forall \psi_h \in \mathrm{H}_h^{\varphi} \tag{7.67}$$

y

$$\sup_{\substack{\tilde{\boldsymbol{s}}_h\in\mathbf{H}_h^{\tilde{\boldsymbol{t}}}\\ \tilde{\boldsymbol{s}}_h\neq\mathbf{0}}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{s}}_h \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h}{\|\tilde{\boldsymbol{s}}_h\|_{0;\Omega}} \geq \tilde{\beta}_4 \|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{\operatorname{div}_{4/3};\Omega} \qquad ,\forall \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \tilde{Z}_{0,h} \tag{7.68}$$

donde $\tilde{Z}_{0,h} := \left\{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \mathbf{H}_h^{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} : \int_\Omega \psi_h \operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h) = 0, \forall \psi_h \in \mathrm{H}_h^{\varphi}\right\}$.

Observación 7.8

En este caso no es necesario recurrir a espacios de elementos finitos estables para el problema de Stokes.

Definimos nuestros espacios como sigue

$$\mathbf{H}_h^{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} := \left\{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \mathrm{H}(\operatorname{div}_{4/3};\Omega) : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h|_K \in RT_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\right\}$$
$$\mathrm{H}_h^{\varphi} := \{\psi_h \in L^2(\Omega) : \psi_h|_K \in \mathcal{P}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$
$$\mathbf{H}_h^{\tilde{\boldsymbol{t}}} := \left\{\tilde{\boldsymbol{s}} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \tilde{\boldsymbol{t}}|_K \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\right\}$$

En tal caso, se tiene que

$$\tilde{Z}_{0,h} := \left\{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \tilde{\mathbf{H}}_h^{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} : \operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = 0\right\}$$

y por lo tanto, usando el mismo argumento que en el caso de la forma bilineal b, se tiene que $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h|_K \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_k(K)$, es decir, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \mathbf{H}_h^{\tilde{\boldsymbol{t}}}$, para todo $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \tilde{Z}_{0,h}$. En consecuencia, dado $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \tilde{Z}_{0,h}$, se tiene

$$\sup_{\substack{\tilde{\boldsymbol{s}}_h \in \mathbf{H}_h^{\tilde{\boldsymbol{t}}} \\ \tilde{\boldsymbol{s}}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{s}}_h \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h}{\|\tilde{\boldsymbol{s}}_h\|_{0;\Omega}} \geq \|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{0;\Omega} = \|\tilde{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathrm{div}_{4/3};\Omega}$$

con lo que queda probado (7.68). Por otro lado, (7.67) es un caso particular del Lema 7.7.

Referencias

[1] G. N. Gatica, *Introducción al Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*. Reverte Ediciones, 2014.

[2] G. N. Gatica, *A Simple Introduction to the Mixed Finite Element Method : Theory and Applications*. Springer Briefs in Mathematics. Springer, Cham, 2014.

[3] M. Alvarez, G. N. Gatica, B. Gomez-Vargas and R. Ruiz-Baier, *New mixed finite element methods for natural convection with phase-change in porous media*. J Sci Comput 80, 141–174 (2019).

[4] M. Alvarez, G. N. Gatica and R. Ruiz-Baier, *A mixed-primal finite element method for the coupling of Brinkman–Darcy flow and nonlinear transport*. IMA Journal of Numerical Analysis 00, 1–31 (2020)

[5] E. Colmenares, G.N. Gatica and S. Moraga, *A Banach spaces-based analysis of a new fullymixed finite element method for the Boussinesq problem*. ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 54 (2020), no. 5, 1525–1568.

[6] P. Grisvard,*Elliptic problems in nonsmooth domains*. Boston: Pitman Advanced Pub. Program (1985).

[7] R. C. Rogers, M. Renardy, *An introduction to partial differential equations*. Springer-Verlag (1993).

[8] P. G. Ciarlet, *Linear and nonlinear functional analysis with applications*. Siam Vol. 130, 2013.

Última actualización: 29 de diciembre de 2021