Análisis Numérico II: Álgebra Lineal Numérica (525441), S1-2025
Listado **3**
Profesora: Mónica Selva
DIM - CFM

Listado 3: Descomposición LU para sistemas de ecuaciones lineales.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía.
Los problemas en la sección **Test <número>**, si existe, deben ser entregados en Canvas, tenga en cuenta que hay una fecha tope para ello. Los tests deben resolverse de manera individual, no es obligatorio entregarlos.

1. Demostración pendiente de clase de martes 25 de marzo: interpretación de número de condición de una matriz.

Sea A una matriz invertible. La cantidad $\dfrac{1}{\kappa(A)}$ es una medida de la distancia (relativa) de A al conjunto de matrices no invertibles.
Ya en clase se demostró que para cualquier matriz invertible A, si $\delta_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es tal que $A+\delta_A$ no es invertible, entonces $\|A^{-1}\delta_A\| \geq 1 \Rightarrow \dfrac{\|A+\delta_A - A\|}{\|A\|} \geq \dfrac{1}{\kappa(A)}$.
Nuestra intención es ahora, dada una matriz A, encontrar δ_A de modo que la cota anterior se cumpla en la igualdad, es decir, dada una matriz invertible A, deseamos determinar δ_A de modo que

1. $A+\delta_A$ sea no invertible y
2. $\dfrac{\|A+\delta_A - A\|}{\|A\|} = \dfrac{1}{\kappa(A)}$, lo que es equivalente a que δ_A deba ser tal que $\|\delta_A\| = \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$.

Debemos entonces, dada una matriz invertible A, determinar una matriz δ_A que cumpla

$$\begin{aligned} \|\delta_A\| &= \frac{1}{\|A^{-1}\|}, \\ \exists\, z \in \mathbb{C}^n \,:\, (A+\delta_A)z &= \theta. \end{aligned}$$

En el listado 1 se vió que la norma 2 de una matriz de rango 1 es el producto de las normas 2 de los vectores que constituyen la matriz (problema 10).
Supongamos que $\delta_A = \alpha a b^*$ y determinemos $\alpha \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{C}^n$ de modo que

$$\begin{aligned} \|\delta_A\|_2 = |\alpha|\|a\|_2\|b\|_2 &= \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}, \\ \exists\, z \in \mathbb{C}^n \,:\, \theta = (A+\delta_A)z &= Az + (\alpha a b^*)\, z = \alpha(b^* z)a. \end{aligned}$$

Hay distinas maneras de lograr que las condiciones anteriores se cumplan. Una de ellas es haciendo $\alpha = -\dfrac{1}{\|A^{-1}\|_2}$ y determinando a y b con $\|a\|_2 = \|b\|_2 = 1$ tales que

$$\exists\, z \in \mathbb{C}^n \,:\, Az - \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}(b^* z)a = \theta.$$

Hagamos $z = b$, entonces $b^* z = \|b\|_2 = 1$ y

$$(A+\delta_A)z = Ab - \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}a.$$

Sea x, por el momento, un vector cualquiera de $\mathbb{C}^n$ distinto del vector nulo, escogiendo $b = \dfrac{1}{\|A^{-1}x\|_2}A^{-1}x$ (con esta selección la norma 2 de b es 1) y $a = x$, la igualdad anterior se reduce a

$$Ab - \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}a = \frac{1}{\|A^{-1}x\|_2}x - \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}x = \left(\frac{1}{\|A^{-1}x\|_2} - \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}\right)x. \tag{1}$$

Solo nos queda averiguar si es posible encontrar $x \in \mathbb{C}^n$ con las propiedades

1. $\|x\|_2 = 1$ (porque $a = x$ y es una condición que impusimos a a) y
2. $\|A^{-1}x\|_2 = \|A^{-1}\|_2$ (para que el vector en (1) sea igual al vector nulo).

Y esto sí es posible pues
$$\|A^{-1}\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|A^{-1}x\|_2,$$
y existe $\hat{x} \in \mathbb{C}^n$ con $\|\hat{x}\|_2 = 1$ tal que $\|A^{-1}\hat{x}\|_2 = \|A^{-1}\|_2$.
En resumen, si $x = \hat{x}$, $a = \hat{x}$, $b = \dfrac{1}{\|A^{-1}\hat{x}\|_2} A^{-1}\hat{x}$ y $\delta_A = -\dfrac{1}{\|A^{-1}\|_2} ab^*$, se tiene que $A + \delta_A$ es no invertible y $\dfrac{\|\delta_A\|_2}{\|A\|_2} = \dfrac{1}{\kappa_2(A)}$.

2. Problemas

1. (*Costo operacional de la sustitución progresiva*)

   Sea $b \in \mathbb{C}^n$. En clase vimos que para resolver un sistema de la forma $Ax = b$ con $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz invertible triangular superior utilizando *sustitución regresiva* son necesarias n^2 operaciones aritméticas. ¿Cuántas operaciones aritméticas son necesarias para resolver $Ax = b$ por *sustitución progresiva* si A es triangular inferior y los elementos en diagonal principal de A son iguales a 1?

   Observación: En el test 3 se propone un nuevo algoritmo para resolver sistemas de ecuaciones lineales con matriz triangular. En el test usted debe averiguar si este nuevo algoritmo requiere más o menos operaciones aritméticas que las sustituciones progresiva y regresiva.

2. **(A)** (*Tipo especial de matrices que admite descomposición LU*)

   Demuestre que si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es estrictamente diagonal dominante por filas (o por columnas), entonces ella tiene una única descomposición LU, es decir, si A es estrictamente diagonal dominante, es posible encontrar matrices L, triangular inferior con elementos en diagonal principal iguales a 1, y U, triangular superior con la propiedad $A = LU$ y L y U son únicas.

   Sugerencia: Puede demostrar que si A es estrictamente diagonal dominante, por filas o por columnas, entonces los menores principales de A de órdenes 1 hasta $n-1$ son distintos de cero, es decir, si $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ es estrictamente diagonal dominante, por filas o por columnas, entonces
   $$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \ : \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ii} \end{vmatrix} \neq 0.$$

3. (*Tipo especial de matrices que admite descomposición LU*)

   Demuestre que si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es hermitiana y definida positiva, entonces ella tiene descomposición LU.

4. (*Propiedades de las matrices triangulares*)

   Sean $L, L_1, L_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices triangulares inferiores, L_1 y L_2 satisfacen además que todos los elementos en sus diagonales principales son iguales a 1. Demuestre que:

   (a) L_1L_2 es triangular inferior y los elementos en su diagonal principal son iguales a 1.

   (b) $L = (l_{ij})_{1\le i,j\le n}$ es invertible si y solo si $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se cumple que $l_{ii} \neq 0$ y, si es invertible, L^{-1} también es triangular inferior.

   (c) L_1 es invertible y L_1^{-1} también es una matriz triangular inferior cuyos elementos en diagonal principal son iguales a 1.

   Observación: Resultados similares pueden demostrarse para matrices triangulares superiores.

5. (*Forma matricial de eliminación gaussiana*)

   Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que los menores principales de órdenes $1, 2, \ldots, n-1$ son distintos de cero. Esto significa que es posible calcular la (única) descomposición LU de A con el método de eliminación gaussiana.

   Sea $A^{(k)}$ la matriz que se obtiene después de $k-1$ pasos del método de eliminación gaussiana a $A^{(1)} = A$.

   En clase llamamos T_{jk} con $j \in \{k+1, k+2, \ldots, n\}$ a la matriz asociada a la transformación lineal que realiza la operación elemental $f_j \to f_j - \dfrac{a_{j,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} f_k$ a la matriz $A^{(k)}$.

   Además, llamamos L_k a la matriz $T_{n,k} T_{k+2,k} \cdots T_{k+1,k}$, que es la asociada a la transformación lineal que hace ceros las componentes en las filas $k+1, \ldots, n$ de la columna k de $A^{(k)}$.

   (a) Muestre que
   $$T_{jk} = I - m_{jk} e_j e_k^{\mathrm{T}},$$
   si $m_{jk} = \dfrac{a_{j,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$ y e_j es el j-ésimo vector canónico.

   (b) Muestre que
   $$L_k = \prod_{j=k+1}^{n} T_{jk} = \prod_{j=k+1}^{n} \left(I - m_{jk} e_j e_k^{\mathrm{T}}\right) = I - \sum_{j=k+1}^{n} m_{jk} e_j e_k^{\mathrm{T}}.$$

   (c) Muestre que $L_k^{-1} = I + \sum_{j=k+1}^{n} m_{jk} e_j e_k^{\mathrm{T}}$.

   (d) Muestre que $L = L_{n-1}^{-1} L_{n-2}^{-1} \cdots L_1^{-1}$ tiene la forma
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & m_{n-1,3} & \ldots & 1 & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \ldots & m_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (*A y A^2*) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

   (a) Si A^2 es invertible, ¿es A invertible?

   (b) Si A^2 tiene descomposición LU, ¿podemos asegurar que también la tiene A?

   (c) Si las matrices L y U forman una descomposición LU de A^2, ¿cómo podría utilizarlas para resolver el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$?

7. **(A)** (*Matrices irreducible-diagonal dominantes*)

   Considere
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Demuestre que A es irreducible y que B es reducible.

   Observación: Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es *reducible* si y solo si existen conjuntos $J, K \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ con la propiedad:
   $$J \cup K = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad J \cap K = \emptyset, \quad J \neq \emptyset, \quad K \neq \emptyset$$
   y
   $$\forall\, j \in J \,:\, \forall k \in K \,:\, a_{jk} = 0.$$

Es decir, una matriz es reducible si podemos encontrar una partición, dada por J, K, de $\{1, 2, \dots, n\}$ de modo que para cualquier par de índices $j \in J, k \in K$, el elemento a_{jk} es cero.

Una clase importante de matrices irreducibles es la de las matrices *irreducible-diagonal dominantes*. Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es *irreducible-diagonal dominante* si y solo si ella es irreducible y

- para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se cumple que

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,$$

- existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que

$$|a_{kk}| > \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|.$$

Más adelante continuaremos trabajando con este tipo de matrices. Por el momento, necesitamos dos resultados importantes sobre ellas (que demostraremos en clase más adelante):

(a) Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz tridiagonal con la propiedad de que todos los elementos en las diagonales secundarias (encima y debajo de diagonal principal) de A son distintos de cero, entonces A es irreducible.

(b) Si A es tridiagonal e irreducible, todos los elementos en las diagonales secundarias (encima y debajo de diagonal principal) de A son distintos de cero.

(c) Si una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es irreducible-diagonal dominante, ella es invertible.

8. **(A)** (*Ejemplo particular de matriz irreducible diagonal dominante y su descomposición LU.*)

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ la siguiente matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

cuyos elementos satisfacen

$$\begin{aligned} |a_1| &> |b_1| > 0, \\ |a_i| &\geq |b_i| + |c_i|, \quad \text{con } b_i \neq 0 \wedge c_i \neq 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ |a_n| &\geq |b_n| > 0. \end{aligned}$$

(a) Demuestre que A es invertible.

(b) Demuestre que A tiene una única descomposición LU y que ésta puede calculare con el método de eliminación gaussiana.

(c) Aplique eliminación gaussiana a A y muestre que las matrices L y U que forman su descomposición LU son de la forma

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_n & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}$$

con

$$u_1 = a_1,$$
$$l_j = \frac{b_j}{u_{j-1}},\ u_j = a_j - l_j c_{j-1}, \quad j = 2, 3, \ldots, n$$

Observación: Este algoritmo recibe el nombre de algoritmo de Thomas.

9. **(A)** (*Problema de certamen y otra manera de acotar número de condición*)
Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, invertible, tiene descomposición LU, entonces

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

y

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \leq \|L\|\|U\|\|U^{-1}\|\|L^{-1}\| = \kappa(L)\kappa(U).$$

Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

(a) Determine las matrices L y U que forman descomposición LU de A.
(b) Determine $\kappa_\infty(L)$ y $\kappa_\infty(U)$.
(c) ¿Cuál aproximación obtiene a $\kappa_\infty(A)$?
(d) Sean x y $\tilde{x}$ tales que a $Ax = b$ y $A\tilde{x} = b + \delta_b$. ¿Cuán grande puede ser n para que, sabiendo que $\dfrac{\|\delta_b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq 10^{-10}$, podamos asegurar que $\dfrac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 10^{-6}$?

Observación: Note que A es una matriz tridiagonal. Las matrices L y U son sencillas de calcular.
Además, para calcular $\kappa_\infty(L)$ y $\kappa_\infty(U)$ puede serle útil la siguiente propiedad: si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \end{pmatrix},$$

entonces $M^{-1} = (\hat{m}_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ es tal que

$$\hat{m}_{ij} = \begin{cases} (-a)^{i-j}, & \text{si } i \geq j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Recuerde también que para toda matriz invertible $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se cumple que $(B^{\mathrm{T}})^{-1} = (B^{-1})^{\mathrm{T}}$.

3. Test 3: Nuevo algoritmo para resolver sistema con matriz triangular superior.

Forma de entrega: cargando archivos a tarea con nombre **Test 3** en Canvas. Deben entregarse dos archivos: un archivo *.m* (si se escoge MATLAB para trabajar) y un archivo pdf con respuesta a restantes preguntas del test. Este archivo pdf debe ser el resultado de escanear un documento escrito a mano.
Fecha de entrega: domingo 6 de abril, 23:59 hrs.

Suponga que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz invertible triangular superior. Deseamos derivar un nuevo algoritmo para la solución de $Ax = b$ siendo b un vector de $\mathbb{C}^n$.
Para una mejor comprensión, ilustraremos el algoritmo en una matriz de orden 3 y, posteriormente, lo describiremos para una matriz de orden n.
Suponga que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

El problema de determinar $x \in \mathbb{C}^3$ de modo que $Ax = b$ también puede describirse como: encontrar $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ de modo que

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema podemos proceder de la siguiente forma:
Paso 1: Determinar x_3 mediante $x_3 = \dfrac{b_3}{a_{33}}$.
Conociendo x_3 debemos determinar x_1, x_2 de modo que

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix},$$

que es equivalente a determinar x_1, x_2 tales que

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}.$$

Paso 2: Actualizar parte derecha.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}.$$

Paso 3: Hacer $x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}}$.
Paso 4: Actualizar parte derecha: $b_1 = b_1 - x_2 a_{12}$.
Paso 5: Hacer $x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$.

Extendiendo este algoritmo para matrices de tamaño n obtenemos la siguiente forma de calcular $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$:

$$\text{Para cada } k \in \{n, n-1, n-2, \ldots, 2\} : \tag{2a}$$

$$x_k = \frac{b_k}{a_{kk}}. \tag{2b}$$

$$b(1:k-1) = b(1:k-1) - x_k\, A(1:k-1, k). \tag{2c}$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}. \tag{2d}$$

donde $b(1:k-1)$ son las componentes 1 a $k-1$ de b y $A(1:k-1,k)$ son las componentes 1 a $k-1$ es la columna k de A.

1. Escriba (en papel) un algoritmo similar a (2) para el caso en que A sea una matriz triangular inferior con todos los elementos en su diagonal principal iguales a 1.

2. Determine el número de operaciones aritméticas requeridas para resolver un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ con A triangular superior y utilizando el algoritmo en 2.

3. Determine el número de operaciones aritméticas requeridas para resolver $Ax = b$ con A triangular inferior y elementos en diagonal principal iguales a 1 con el algoritmo propuesto en el item 1.

4. ¿Requieren los nuevos algoritmos más o menos operaciones aritméticas que los algoritmos de sustituciones regresiva y progresiva?

5. Escriba una función MATLAB (O PYTHON O JULIA) que, dada una matriz A triangular inferior con elementos en diagonal principal iguales a 1 y un vector b, devuelva el vector x solución al sistema $Ax = b$ con el algoritmo propuesto por usted.