Problema 2

$\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ ... (P)

$\max\{b^T y : A^T y \leq c\}$ ... (D)

(P) tiene solución óptima (obviamente con valor óptimo finito. Por dualidad fuerte, (D) también posee solución óptima, digamos $\bar{y}$, con valor óptimo $\max(D) \in \mathbb{R}$.

Se consideran:

$\min\{c^T x : Ax = b', x \geq 0\}$ ... (P')

$\max\{(b')^T y : A^T y \leq c\}$ ... (D')

Observar q' los conjuntos factibles de (D) y (D') coinciden. Por dualidad débil se tiene:

x factible para (P') implica $c^T x \geq (b')^T \bar{y} > -\infty$

pues $\bar{y}$ es factible de (D')

$\therefore\ c^T x \geq (b')^T \bar{y} \quad \forall\, x$ factible para (P')

es decir $\min\{c^T x : Ax = b', x \geq 0\} \geq (b')^T \bar{y} > -\infty$

Problema 4.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min } Cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} (PV)$$

Dado $\omega > 0$, $\min\{\omega^T C x = (C^T \omega)^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$

$\max\{ b^T y : A^T y \leq C^T \omega , y \geq 0\}$

$\bar{x} = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$ es eficiente para (PV)

$$3y_1 + y_2 + y_3 = 5\omega_1 + \omega_2 \quad y_i \geq 0 \quad \cdots (1)$$

De $\bar{x}^T (A^T y - C^T \omega) = 0 \Rightarrow$

$$y_1 + y_2 + 3y_3 = \omega_1 + 2\omega_2 \quad \cdots (2)$$

De $\bar{\omega}^T C \bar{x} = b^T y \Rightarrow 7\omega_1 + \frac{19}{2}\omega_2 = 6y_1 + 4y_2 + 6y_3 \quad \cdots (3)$

$(1)-(2) \Rightarrow 2y_1 - 2y_3 = 4\omega_1 - \omega_2 \quad \cdots (4)$

$4.(2) \Rightarrow 4y_1 + 4y_2 + 12y_3 = 4\omega_1 + 8\omega_2 \quad \cdots (5)$

$(6)-(5) \Rightarrow 2y_1 - 6y_3 = 3\omega_1 + \frac{3}{2}\omega_2 \quad \cdots (6)$

$(4)-(6) \Rightarrow 4y_3 = \omega_1 - \frac{5}{2}\omega_2 \geq 0 \Rightarrow 2\omega_1 \geq 5\omega_2 \quad \cdots (7)$

$(4) \Rightarrow 2y_1 = 4\omega_1 - \omega_2 + \frac{1}{2}\omega_1 - \frac{5}{4}\omega_2 = \frac{9}{2}\omega_1 - \frac{9}{4}\omega_2 \Rightarrow 2\omega_1 \geq \omega_2$

$(2) \Rightarrow y_2 = \omega_1 + 2\omega_2 - y_1 - 3y_3 = \omega_1 + 2\omega_2 - \frac{9}{4}\omega_1 + \frac{9}{8}\omega_2 - 3\left(\frac{1}{4}\omega_1 - \frac{5}{8}\omega_2\right)$

$\Rightarrow y_2 = -2\omega_1 + 5\omega_2 \geq 0 \Rightarrow 5\omega_2 \geq 2\omega_1 \quad \cdots (8)$

$(7) \,\&\, (8) \Rightarrow 2\omega_1 = 5\omega_2$

En consecuencia

Los pesos asociados a $\bar{x} = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$ son:

$$\{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : \omega_1 > 0, \omega_2 > 0, 2\omega_1 = 5\omega_2\}$$