

Syllabus:  
Unidad Académica Responsable:  
Carrera a la que se imparte:  
Módulo:

## METODOS DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS

Departamento de Ingeniería Matemática  
Ingeniería Civil Matemática  
No aplica

### IDENTIFICACION

Nombre: Métodos de Elementos Finitos Mixtos		
Código: 525539	Créditos: 4	Créditos SCT:
Prerequisitos: 525401, 525537		
Modalidad: Presencial	Calidad: Electiva	Duración: Semestral
Trabajo Académico		
Horas Teóricas: 4	Horas Prácticas: 2	Horas Laboratorio: 0
Horas de otras actividades: 6		

Docente Responsable	Gabriel N. Gatica
Docente Colaborador	
Comisión Evaluación	
Duración	17 semanas
Fecha: 8 de Agosto de 2023	Aprobado por:

### DESCRIPCIÓN

Asignatura de especialización en la cual se introducen y analizan los métodos de elementos finitos mixtos en un marco matemático riguroso, y se estudian sus aplicaciones a diversos problemas en mecánica de medios continuos.

Esta asignatura contribuye a las siguientes competencias del perfil de egreso del Ingeniero Civil Matemático: *Modelar numéricamente problemas en mecánica de medios continuos, y aplicar conocimientos de análisis funcional y ecuaciones diferenciales parciales en la resolución de éstos.*

### RESULTADOS DE APRENDIZAJE ESPERADOS

Al completar en forma exitosa esta asignatura, los estudiantes serán capaces de conocer, comprender y aplicar los métodos de elementos finitos mixtos. En particular, ellos deberán:

- conocer el origen y la necesidad de las formulaciones variacionales mixtas, apreciar sus ventajas y desventajas, y ser capaz de aplicarlas a diversos problemas de valores de contornos lineales y no-lineales.
- adquirir una comprensión cabal de los aspectos matemáticos y numéricos involucrados en la definición, análisis y aplicación de los métodos de elementos finitos mixtos.

## CONTENIDOS

1. **Introducción:** Ejemplos de motivación; Trazas e identidades de Green; Formulaciones variacionales mixtas en espacios de Hilbert de problemas clásicos en mecánica de medios continuos; Métodos duales y primales; Formulaciones aumentadas; Formulaciones en espacios de Banach de modelos no-lineales.
2. **Teoría abstracta:** Existencia y unicidad de solución de formulaciones variacionales mixtas en espacios de Hilbert y de Banach; condiciones inf-sup continuas; Aplicaciones a problemas clásicos en mecánica de medios continuos; Existencia y unicidad de solución de formulaciones variacionales mixtas discretas; condiciones inf-sup discretas; Lema de Fortin; Análisis de error a-priori; Esquemas no-conformes y Lemas de Strang.
3. **Teoría de interpolación:** Interpolación de funciones vectoriales; Aproximaciones simpliciales de  $H(\text{div}; \Omega)$ ; Espacios de Raviart-Thomas.
4. **Métodos de elementos finitos mixtos:** Subespacios de elementos finitos mixtos; Estabilidad de los esquemas discretos; razones de convergencia; Estimaciones de error en espacios de interpolación; Condiciones de contorno de Dirichlet, Neumann y mixtas; Aplicaciones a los sistemas de Laplace, Lamé, Stokes y otros.
5. **Otros topicos (al menos uno de los siguientes):** Métodos mixtos para problemas acoplados (Stokes-Darcy); Metodos mixtos para problemas no-lineales (Navier-Stokes, Boussinesq, Transporte); Análisis de error a posteriori; Métodos mixtos para problemas evolutivos; Métodos de Galerkin discontinuos; Aplicaciones en elasticidad y mecánica de fluidos.

## METODOLOGÍA

Cuatro horas de clases teóricas, listado de ejercicios y tareas. Atención de alumnos por email, al final de las clases, o en la oficina (con cita agendada previamente).

## EVALUACIÓN

Las evaluaciones se regirán de acuerdo al Reglamento de Docencia de Pregrado de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Se realizarán dos evaluaciones escritas (**30%** cada una), tareas (**20%**) y exposiciones (**20%**). Una evaluación de recuperación que modifica, a lo más, una de las evaluaciones escritas.

## BIBLIOGRAFIA Y MATERIAL DE APOYO

### Material básico u obligatorio:

- **Braess, D.:** Finite Elements. Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics. Springer-Verlag, 1997.
- **Brezzi, F. and Fortin, M.:** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer-Verlag, 1991.
- **Ern, A. and Guermond, J.-L.:** Theory and Practice of Finite Elements. Applied Mathematical Sciences, 159. Springer-Verlag, New York, 2004.
- **Gatica, G.N.:** A Simple Introduction to the Mixed Finite Element Method. Theory and Applications. SpringerBriefs in Mathematics, Springer, 2014.
- **Girault, V. and Raviart, P.-A.:** Finite Element Methods for Navier Stokes Equations. Springer Verlag, 1986.

- **Quarteroni, A. and Valli, A.:** Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer-Verlag, 1994.
- **Roberts, J.E. and Thomas, J.-M.:** Mixed and Hybrid Methods. Handbook of Numerical Analysis, vol. II, P.G. Ciarlet, J.L. Lions, editors. North-Holland, 1991.

**Material complementario: (ex-tesistas de ICM destacados en azul)**

- **Almonacid, J.A. and Gatica, G.N.:** *A fully-mixed finite element method for the  $n$ -dimensional Boussinesq problem with temperature-dependent parameters.* Computational Methods in Applied Mathematics, vol. 20, 2, pp. 187-213, (2020).
- **Almonacid, J.A., Gatica, G.N., Oyarzúa, R. and Ruiz-Baier, R.:** *A new mixed finite element method for the  $n$ -dimensional Boussinesq problem with temperature-dependent viscosity.* Networks and Heterogeneous Media, vol. 15, 2, pp. 215-245, (2020).
- **Babuska, I. and Gatica, G. N.:** *On the mixed finite element method with Lagrange multipliers.* Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 19(2), pp. 192-210, (2003).
- **Babuska, I. and Gatica, G. N.:** *A residual-based a posteriori error estimator for the Stokes-Darcy coupled problem.* SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 48, 2, pp. 498-523, (2010).
- **Benavides, G.A., Caucao, S., Gatica, G.N., and Hopper, A.A.:** *A Banach spaces-based analysis of a new mixed-primal finite element method for a coupled flow-transport problem.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 371, Art. Num. 113285, (2020).
- **Benavides, G.A., Caucao, S., Gatica, G.N., and Hopper, A.A.:** *A new non augmented and momentum-conserving fully-mixed finite element method for a coupled flow-transport problem.* Calcolo, vol. 59, 1, article: 6, (2022).
- **Caucao, S., Gatica, G.N. and Sandoval, F.:** *A fully-mixed finite element method for the coupling of the Navier-Stokes and Darcy-Forchheimer equations.* Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 37, 3, pp. 2550-2587, (2021).
- **Colmenares, E., Gatica, G.N. and Moraga, S.:** *A Banach spaces-based analysis of a new fully-mixed finite element method for the Boussinesq problem.* ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 54, 5, pp. 1525-1568, (2020).
- **Colmenares, E., Gatica, G.N. and Rojas, J.C.:** *A Banach spaces-based mixed-primal finite element method for the coupling of Brinkman flow and nonlinear transport.* Calcolo, vol. 59, 4, article: 51, (2022).
- **Correa, C.I. and Gatica, G.N.:** *On the continuous and discrete well-posedness of perturbed saddle-point formulations in Banach spaces.* Computers & Mathematics with Applications, vol. 117, pp. 14-23, (2022).
- **Correa, C.I., Gatica, G.N. and Ruiz-Baier, R.:** *New mixed finite element methods for the coupled Stokes and Poisson-Nernst-Planck equations in Banach spaces.* ESAIM Mathematical Modeling and Numerical Analysis, vo. 57, 3, pp. 1511-1551, (2023).

- **Gatica, G.N. and Inzunza, C.**: *An augmented fully-mixed finite element method for a coupled flow-transport problem*. Calcolo, vol. 57, 1, article:8, (2020).
- **Gatica, G.N., Marquez, A. and Meddahi, S.**: *Analysis of the coupling of primal and dual-mixed finite element methods for a two-dimensional fluid-solid interaction problem*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 45, 5, pp. 2072-2097, (2007).
- **Gatica, G.N., Marquez, A. and Sanchez, M.A.**: *Analysis of a velocity-pressure-pseudostress formulation for the stationary Stokes equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 199, 17-20, pp. 1064-1079, (2010).
- **Gatica, G.N., Marquez, A. and Sanchez, M.A.**: *A priori and a posteriori error analysis of a velocity-pseudostress formulation for a class of quasi-Newtonian Stokes flows*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 200, 17-20, pp. 1619-1636, (2011).
- **Gatica, G.N., Meddahi, S. and Oyarzua, R.**: *A conforming mixed finite-element method for the coupling of fluid flow with porous media flow*. IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 29, 1, pp. 86-108, (2009).
- **Gatica, G.N., Nuñez, N. and Ruiz-Baier, R.**: *New non-augmented mixed finite element methods for the Navier-Stokes-Brinkman equations using Banach spaces*. Journal of Numerical Mathematics, to appear <https://doi.org/10.1515/jnma-2022-0073>.
- **Gatica, G.N., Nuñez, N. and Ruiz-Baier, R.**: *Mixed-primal methods for natural convection driven phase change with Navier-Stokes-Brinkman equations*. Journal of Scientific Computing, vol. 95, 3, article: 79, (2023).
- **Gatica, G.N., Oyarzua, R. and Sayas, F.-J.**: *Convergence of a family of Galerkin discretizations for the Stokes-Darcy coupled problem*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 27, 3, pp. 721-748, (2011).
- **Gatica, G.N., Oyarzua, R. and Sayas, F.-J.**: *Analysis of fully-mixed finite element methods for the Stokes-Darcy coupled problem*. Mathematics of Computation, vol. 80, 276, pp. 1911-1948, (2011).
- **Gatica, G.N., Oyarzua, R. and Sayas, F.-J.**: *A twofold saddle point approach for the coupling of fluid flow with nonlinear porous media flow*. IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 32, 3, pp. 845-887, (2012).
- **Gatica, G.N. and Sayas, F.-J.**: *Characterizing the inf-sup condition on product spaces*. Numerische Mathematik, vol. 109, 2, pp. 209-231, (2008).

Fecha de esta actualización: Agosto 2023
Fecha próxima actualización: 2024

### VIII. PLANIFICACIÓN

<b>Semana</b>	<b>Actividad</b>	<b>Responsable</b>	<b>Trabajo académico</b>
1	Ejemplos de motivación: un modelo unidimensional; un modelo n-dimensional. Métodos duales y primales. Conexión con el tipo de condiciones de contorno.	Alumno	4 horas
2	Trazas e identidades de Green.	Docente	4 horas
3	Formulaciones variacionales mixtas de problemas en mecánica de medios continuos. Métodos duales y primales. Formulaciones aumentadas.	Docente	4 horas
4	Formulaciones variacionales mixtas de problemas en mecánica de medios continuos. Métodos duales y primales. Formulaciones aumentadas.	Docente	2 horas
4	Existencia y unicidad de solución de formulaciones variacionales mixtas continuas: Teoría de Babuska-Brezzi; condición inf-sup continua; casos particulares de la teoría.	Docente	2 horas
5	Aplicaciones de la Teoría de Babuska-Brezzi: Laplace, Lame, otros.	Docente	4 horas
6	Existencia y unicidad de solución de formulaciones variacionales mixtas discretas: Teoría de Babuska-Brezzi; condición inf-sup discreta; Lema de Fortin.	Docente	2 horas
6	Analisis de error a priori abstracto: proyector de Galerkin; estimación de Cea; estimaciones separadas para cada incógnita.	Docente	2 horas
7	Esquemas de Galerkin no-conformes y Lemas de Strang.	Docente/Alumno	2 horas.
7	<b>Evaluación I</b>	Alumno	3 horas
8	Interpolación de funciones vectoriales: resultados preliminares.	Docente	2 horas
8	Espacios de Raviart-Thomas: unisolvencia; funciones base; operadores de interpolación local y global.	Docente	2 horas
9	Espacios de Raviart-Thomas: errores de interpolación local y global; transformación de Piola.	Docente	4 horas
10	Operadores de proyección. Desigualdades inversas.	Docente	2 horas
10	Métodos de elementos finitos mixtos: aplicación a un problema de segundo orden en forma de divergencia.	Docente	2 horas
11	Métodos de elementos finitos mixtos: aplicación a un problema de segundo orden en forma de divergencia con condiciones de contorno mixtas. Levantamiento discreto estable.	Docente	2 horas
11	Estimaciones de error en espacios de interpolación.	Docente	2 horas
12	Métodos de elementos finitos mixtos: aplicación al sistema de Lame.	Docente	4 horas
13	Métodos de elementos finitos mixtos: aplicación a una formulación en velocidad, presión y pseudoesfuerzo del sistema de Stokes.	Docente	2 horas

13	Análisis de error a posteriori de la formulación en velocidad, presión y pseudoesfuerzo del sistema de Stokes.	Docente	2 horas
14	Análisis de error a posteriori de la formulación en velocidad, presión y pseudoesfuerzo del sistema de Stokes.	Docente	2 horas
15	Métodos de elementos finitos mixtos para un problema de transmisión: Stokes-Darcy o Helmholtz-Lame.	Docente	4 horas
16	<b>Evaluación II</b>	Alumno	3 horas

## OTROS

Docente: Gabriel N. Gatica  
 Oficina: Centro CI<sup>2</sup>MA, ex-Cabina 6  
 Fono: 2661556  
 Horario de Clases: Martes de 10.15 a 12.00 hrs. y Jueves de 17.15 a 19.00 hrs.  
 Horario de Práctica: a convenir  
 E-mail del profesor: ggatica@ci2ma.udec.cl

**ATENCIÓN DE ALUMNOS:** Atención de alumnos por email, al final de las clases, o en la oficina (con cita agendada previamente).

Agosto 7, 2023  
GNG/gng