Profesor: Fernando Roldán
Ayudantes: Cristofer Mamani y Fernando Muñoz
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Certamen 2 – Optimización II (5225565)

Fecha: Lunes 01 de diciembre de 2025.

Cada respuesta debe ser justificada utilizando la materia vista en clases, ayudantías o tareas.

P1) 25 Puntos *(color azul un punto, color rojo dos puntos).* Se enuncia el siguiente teorema y su demostración de manera incompleta y con errores. Complete y corrija el enunciado y su demostración. Para ello, traspase todo el enunciado y el desarrollo en otra hoja.

Teorema 1. *Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Suponga que f es propia y convexa. Para $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$, $\partial f(x_0)$ es no vacío.*

Proof. Sea $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$. Existe $\delta > 0$, tal que $B(x_0, \delta) \subset \operatorname{dom}(f)$. Como f es convexa, es continua en $\operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe δ_1 tal que si $y \in B(x_0, \delta_1)$, entonces $|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$, en particular, $f(y) < f(x_0) + \varepsilon$. Se sigue entonces que para $\delta_2 = \min\{\delta, \delta_1\}$, $B(x_0, \delta_2) \times]f(x_0) + \varepsilon, +\infty[\subset \operatorname{epi}(f)$. Por lo tanto $\operatorname{int}(\operatorname{epi}(f)) \neq \varnothing$. Más aún, $\operatorname{int}(\operatorname{epi}(f))$ es convexo y $(x_0, f(x_0)) \notin \operatorname{int}(\operatorname{epi}(f))$. Por el teorema de separación, podemos encontrar $(p, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ con $(p, t) \neq (0, 0)$ que separe $\{(x_0, f(x_0))\}$ e $\operatorname{int}(\operatorname{epi}(f))$. Es decir,

$$(\forall y \in \operatorname{dom}(f))\,(\forall \lambda > f(y)) \quad p^\top x_0 + t f(x_0) \leq p^\top y + t\lambda. \tag{1}$$

Tomando $y = x_0$, se tiene que para todo $\lambda > f(x_0)$, $t f(x_0) \leq t\lambda$. Debido a que $f(x_0) < \lambda$, se concluye que $t \geq 0$. Si $t = 0$, de (1) se tiene que para todo $y \in \operatorname{dom}(f)$,

$$p^\top (x_0 - y) \leq 0. \tag{2}$$

Ahora, como para todo $d \in B(0, 1)$, $y = x_0 + \delta \cdot d \in \operatorname{dom}(f)$. Tomando y de esta forma en (2) se sigue que

$$p^\top (x_0 - (x_0 + \delta d)) = -\delta p^\top d \leq 0.$$

Eligiendo $d = p/(2\|p\|)$ y $d = -p/(2\|p\|)$ se concluye que $p = 0$ lo que es una contradicción, ya que $(p, t) \neq (0, 0)$. Concluimos que $t > 0$. Haciendo $\lambda \to f(y)$ y dividiendo por t en (1), se tiene que

$$(\forall y \in \operatorname{dom}(f)) \quad \frac{-p^\top}{t}(y - x_0) + f(x_0) \leq f(y),$$

de donde se deduce que $-\frac{p}{t} \in \partial f(x_0)$. □

P2) 15 Puntos *(5 puntos cada una)* Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Para $x \in \mathbb{R}$ calcule:

(i) $\partial f(x)$.

(ii) $f^*(x)$.

(iii) $\operatorname{prox}_f(x) = \arg\min_{y \in \mathbb{R}} f(y) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2$.

Solución

(i) Notemos que si $x \neq 0$, f es diferenciable y $f'(x) = \operatorname{sgn}(x)$. Por otro lado, si $x = 0$, para $u \in \partial f(x)$ se tiene

$$\begin{aligned}(\forall y \in \mathbb{R}) \quad u(y-x) + f(x) \leq f(y) &\Leftrightarrow (\forall y \in \mathbb{R}) \quad u \cdot y \leq |y| \\ &\Leftrightarrow (\forall y \in \mathbb{R}) \quad u \cdot y - |y| \leq 0.\end{aligned}$$

Si $y \geq 0$ se sigue que $u \leq 1$ mientras que si $y < 0$ se tiene que $u \geq -1$. Así, se tiene que

$$\partial f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ [-1,1] & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

(ii) Se tiene que $f^*(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}} y \cdot x - f(y) = \sup_{y\in\mathbb{R}} y \cdot x - |y|$. Ahora, $\sup_{y\in\mathbb{R}} y \cdot x - |y| = -\inf_{y\in\mathbb{R}} |y| - y \cdot x$, que es un problema convexo donde su solución, de existir, está caracterizada por

$$0 \in \partial(|\cdot|)(y) - x. \tag{3}$$

Esta inclusión tiene solución solo para $x \in [-1,1]$ y en ese caso, tomando $y \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sgn}(y) = \operatorname{sgn}(x)$, se tiene $f^*(x) = 0$. Por otro lado, si $x \notin [-1,1]$, tomando $y \to \operatorname{sgn}(x)\infty$ se tiene que $f^*(x) = +\infty$. En resumen, $f^*(x) = \iota_{[-1,1]}(x)$.

(iii) Sea $p = \operatorname{prox}_f(x)$, entonces

$$\begin{aligned}0 \in \partial f(p) + p - x \Leftrightarrow x - p &= \begin{cases} -1 & \text{si } p < 0 \\ [-1,1] & \text{si } p = 0 \\ 1 & \text{si } p > 0. \end{cases} \\ \Leftrightarrow p &= \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1,1] \\ x-1 & \text{si } x > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

P3) Considere el problema

$$\begin{aligned} \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \quad & -x \cdot y \\ \text{s.a.} \quad & x + y^2 \leq 2, \\ & x \geq 0, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

(i) **(2)** Justifique la existencia de la solución.

(ii) **(6)** Escriba las condiciones de KKT para este problema.

(iii) **(6)** Encuentre el o los vectores que satisfacen la condiciones de KKT en el caso que $y \neq 0$ y $x \neq 0$.

(iv) **(3)** Justifique que el vector encontrado en el ítem anterior con menor valor en la función objetivo es efectivamente la solución del problema.

(v) **(3)** El óptimo encontrado, ¿satisface alguna condición de calificación vista en clases?

Solución

(i) La existencia de la solución se sigue por el teorema de Weierstrass debido a que la función objetivo es continua y el conjunto de restricciones es compacto (cerrado y acotado).

(ii) Dados λ_1, λ_2, λ_3 en $\mathbb{R}$, las condiciones de KKT en este caso son:

$$\begin{aligned}
(0,0) &= (-y+\lambda_1-\lambda_2, -x+2y\lambda_1-\lambda 3)\\
0 &= \lambda_1(x+y^2-2)\\
0 &= \lambda_2 x\\
0 &= \lambda_3 y\\
0 &\geq x+y^2-2\\
0 &\leq x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3.
\end{aligned}$$

(iii) En el caso que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, necesariamente $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ de donde se deduce $y = \lambda_1$ y $x = 2y^2$. Como $\lambda_1 \neq 0$, se tiene que $x + y^2 - 2 = 3y^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{2/3}$ y por lo tanto $x = 4/3$.

(iv) Si $x = 0$ o $y = 0$, la función objetivo toma valor 0 por lo que el óptimo está en $f(4/3, \sqrt{2/3}) = -4\sqrt{2}/(3\sqrt{3})$.

(v) En este caso, tenemos que $x \neq 0$ e $y \neq 0$ por lo tanto la única restricción activa es $x + y^2 - 2 \leq 0$. Al ser una única restricción y el problema tener dos dimensiones, se sigue que se cumple la restricción de independencia lineal de los gradiente activos (ILGA).