Profesor: Fernando Roldán
Ayudantes: Cristofer Mamani y Fernando Muñoz
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Certamen Recuperativo – Optimización II (5225565)

Fecha: Viernes 12 de Diciembre de 2025.

P1) Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos convexos, pruebe que

(i) **(5 puntos)** $A \cap B$ es convexo.

(ii) **(5 puntos)** $\overline{A}$ es convexo.

Solución

(i) Sean x_1 y x_2 en $A \cap B$ y $\lambda \in [0,1]$ como A es convexo, entonces $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$. Análogamente, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in B$. Entonces, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A \cap B$.

(ii) Sea $x, y \in \overline{A}$ y $\lambda \in [0,1]$. Podemos tomar sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en C tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$ por convexidad de A,

$$\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \in A$$

Y además,

$$\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \to \lambda x + (1-\lambda)y$$

Entonces, $\lambda x + (1-\lambda)y \in \overline{A}$.

P2) **(10 puntos)** Verifique que la función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z+1)^2 + 2e^{-z}$ es convexa.

Solución El gradiente de f es $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2(z+1) - 2e^{-z})$. Calculando el hessiano de f obtenemos la matriz

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2e^{-z} \end{pmatrix}.$$

Para verificar que $\nabla^2 f(x,y,z)$ es semidefinida positiva basta evaluar la forma cuadrática asociada a un vector $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$:

$$(u,v,w)^\top \nabla^2 f(x,y,z)(u,v,w) = 2u^2 + 2v^2 + (2+2e^{-z})w^2 \geq 0.$$

Así, $\nabla^2 f(x,y,z)$ es semidefinida positiva para todo (x,y,z), y por el criterio del hessiano f es convexa en $\mathbb{R}^3$.

P3) **(10 puntos)** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto e^x$. Calcule f^*.

Solución

$$f^*(y) = \begin{cases} y\ln(y) - y, & y > 0, \\ 0, & y = 0, \\ +\infty, & y < 0. \end{cases}$$

P4) Dada $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y $x \in \mathbb{R}^n$ se define el operador proximal por

$$\operatorname{prox}_f(x) = \arg\min_{y\in\mathbb{R}} f(y) + \frac{1}{2}\|y-x\|^2.$$

Ya hemos estudiando que $\operatorname{prox}_f(x)$ está bien definido (existe y es único).

(i) **(5 puntos)** Demuestre que $\operatorname{prox}_{\gamma f}(x) = (\mathrm{Id} + \gamma\partial f)^{-1}(x)$.

(ii) **(10 puntos)** Sea $b \in \mathbb{R}^n$ y $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}\|x-b\|^2$. Pruebe que para $\gamma \in]0,+\infty[$ se tiene

$$\operatorname{prox}_{\gamma g}(x) = \operatorname{prox}_{\frac{\gamma}{1+\gamma} f}\left(\frac{x+\gamma b}{1+\gamma}\right).$$

Solución

(i) Por la regla de Fermat se tiene que

$$\begin{aligned} p = \operatorname{prox}_{\gamma f}(x) &\Leftrightarrow 0 \in \gamma\partial f(p) + p - x \\ &\Leftrightarrow x \in (\mathrm{Id} + \gamma\partial f)(p) \\ &\Leftrightarrow p = (\mathrm{Id} + \gamma\partial f)^{-1}(x), \end{aligned}$$

donde la ultima igualdad se sigue del hecho que p es único.

(ii) Se tiene que

$$\begin{aligned} p = \operatorname{prox}_{\gamma g}(x) &\Leftrightarrow p = (\mathrm{Id} + \gamma\partial g)^{-1}(x) \\ &\Leftrightarrow x \in (\mathrm{Id} + \gamma(\mathrm{Id} - b) + \gamma\partial f)(p) \\ &\Leftrightarrow x + \gamma b \in ((1+\gamma)\mathrm{Id} + \gamma\partial f)(p) \\ &\Leftrightarrow \frac{x+\gamma b}{1+\gamma} \in \left(\mathrm{Id} + \frac{\gamma}{1+\gamma}\partial f\right)(p) \\ &\Leftrightarrow p = \operatorname{prox}_{\frac{\gamma}{1+\gamma} f}\left(\frac{x+\gamma b}{1+\gamma}\right). \end{aligned}$$

P5) **(15 puntos)** Encuentre la solución del problema

$$\begin{aligned} \min_{(x,y,z)\in\ \mathbb{R}^3} \quad & x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{s.a.} \quad & x + y + z = 1 \\ & z \le 0. \end{aligned}$$

Solución: Definamos

$$\begin{aligned} f&\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 \\ h&\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x + y + z - 1 \\ g&\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto z. \end{aligned}$$

Se sigue que f es fuertemente convexa (note que $f = \|\cdot\|^2_{\mathbb{R}^3})$), g es convexa, y h es afín. Adicionalmente, el problema se puede escribir como

$$\begin{aligned} \min_{(x,y,z)\in\ \mathbb{R}^3} \quad & f(x,y,z) \\ \text{s.a.} \quad & h(x,y,z) = 0 \\ & g(x,y,z) \le 0. \end{aligned}$$

Notemos que $(0,1,-1)$ no cumple la condición de Slater ya que $0+1-1 \neq 1$. Sin embargo, es sencillo encontrar uno que si la cumpla, por ejemplo el vector $(x_0, y_0, z_0) = (0, 2, -1)$. Por lo tanto, debido a que f y g son convexas y diferenciables en $\mathbb{R}^3$ y h es afín, un vector (x, y, z) es solución del problema, si y solo si, satisface las condiciones de KKT, es decir existe $\lambda \geq 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned}
(0,0,0) &= (2x, 2y, 2z) + \lambda(0,0,1) + \mu(1,1,1) \\
0 &\geq z \\
0 &= \lambda \cdot z \\
0 &\leq \lambda \\
0 &= x + y + z - 1.
\end{aligned}$$

Se sigue que $x = y = -\mu/2$ y $z = -(\lambda + \mu)/2$. Ahora,

$$\begin{aligned}
x + y + z - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\mu + \frac{\lambda}{2} = -1 \Leftrightarrow \mu = -\frac{\lambda+2}{3} \\
\Rightarrow x = y = \frac{\lambda+2}{6} \quad \text{y} \quad z = \frac{1-\lambda}{3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, necesitamos que

$$\frac{1-\lambda}{3} \leq 0.$$

- Esta última desigualdad impide que $\lambda = 0$.
- Si $\lambda > 0$, se tiene que $0 = z = \frac{1-\lambda}{3} \Leftrightarrow \lambda = 1$. Se sigue que $\mu = -1$ y $(x, y, z) = (1/2, 1/2, 0)$. De donde se tiene que $f(1/2, 1/2, 0) = 1/2$ es el valor óptimo.