UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Ayudantía N°9
Optimización I, 525351 (2024-1)

1. Considere los problemas siguientes:

$$(P_0)\quad \begin{cases} \text{mín} & f(x) \\ \text{s.a.} & x \in K. \end{cases} \qquad (P_1)\quad \begin{cases} \text{mín} & z \\ \text{s.a.} & f(x) \le z, \\ & x \in K. \end{cases}$$

donde $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto no vacío, y $f : K \to \mathbb{R}$ es cualquier función. Dado $\overline{x} \in K$, demostrar que:

   a) Si $\overline{x}$ es solucion optima de (P_0), entonces $\big(\overline{x}, f(\overline{x})\big)$ es solución óptima de (P_1).

   b) Si $\big(\overline{x}, \overline{z}\big)$ es solucion optima de (P_1), entonces $\overline{z} = f(\overline{x})$, y asi $\overline{x}$ es solución óptima de (P_0).

2. Usando el resultado de problema anterior, escribir la formulación canónica y estándar del problema

$$\text{mín}\left\{|3x_1 + 4x_2 - 7| :\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

También escribir su problema dual.

3. Resolver el problema siguiente

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{máx} & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 21x_3 & & \\ \text{s.a.} & 6x_1 & + & 9x_2 & + & 25x_3 & \le & 25 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 25x_3 & \le & 20 \\ & & & x_1, & x_2, & x_3 & \ge & 0. \end{array}$$

4. Supongamos que una partícula puede estar en un estado u otro, los que son enumerados por $i = 1, \ldots, n$. Sea p_{ij} la probabilidad de transición del estado j al i. Se impone que

$$p_{ij} \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

En un cierto instante, sea x_j la probabilidad que la partícula esté en el estado j. Entonces,

$$x_j \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_j = 1.$$

El vector $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ recibe el nombre de vector *estado* (de probabilidad). Después de una transición la partícula estará en el estado i con probabilidad

$$y_i = p_{i1}x_1 + \cdots + p_{in}x_n, \quad i = 1, \ldots, n.$$

De donde $y_j \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} x_j = 1$. Se observa que el nuevo vector de estado verifica $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{x}$, donde $\boldsymbol{P}$ es la matriz de transición de probabilidades $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$.

Un estado de equilibrio es un vector de estado que satisface

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{x}, \quad x_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_j = 1.$$

Por ejemplo, si la matriz $\boldsymbol{P}$ es simétrica, el estado de equilibrio es

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{n}\,\mathbf{1}\,.$$

Pero si la matriz de Markov no es simétrica, no es fácil probar la existencia del estado de equilibrio.

En este problema se pide:

a) Probar la afirmación siguiente usando el lema de Farkas: *Cualquier matriz de Markov $\boldsymbol{P}$ admite un estado de equilibrio.*

b) Encontrar el estado de equilibrio para la matriz

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$