TAREA 1 DE 525501 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES Y APLICACIONES I (2023-II)

LEONARDO E. FIGUEROA

Fecha: Viernes 13/oct/2023.

Problema A (Teoremas de valor medio para funciones biarmónicas)**.** Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea u una función *biarmónica*; esto es, $u \in \mathrm{C}^4(U)$ y

$$\Delta\Delta u = 0.$$

A.1. Sea $x \in U$ y sea $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$. Pruebe que

$$u(x) + \frac{r^2}{2n}\Delta u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}S(y).$$

A.2. Bajo las mismas condiciones de la parte anterior, pruebe que

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}S(y) - \frac{1}{2}\fint_{\partial B(x,r)} Du(y)\cdot(y-x)\,\mathrm{d}S(y).$$

Para los problemas B y C asuma que las funciones involucradas gozan de toda la regularidad que necesite (indicación genérica sobre los problemas del capítulo 2 del libro de Evans).

Problema B (Problema 2.14 del libro de Evans)**.** Dé una fórmula explícita para una solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \qquad\qquad u = g \text{ sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

donde $c \in \mathbb{R}$.

Problema C (Problema 2.24 del libro de Evans, equipartición de la energía)**.** Sea u una solución del problema de valores iniciales para la ecuación de la onda unidimensional

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ en } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u = g,\ u_t = h \text{ sobre } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Suponga que g y h tienen soporte compacto. La *energía cinética* es $k(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t)\,\mathrm{d}x$ y la *energía potencial* es $p(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,y)\,\mathrm{d}x$. Pruebe que

C.1. $k(t) + p(t)$ es constante respecto a t, y que

C.2. $k(t) = p(t)$ para todos los tiempos t suficientemente grandes.