Listado 6: Descomposición QR y mínimos cuadrados.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía.
Los problemas en la sección **Test <número>**, si existe, deben ser entregados en Canvas, tenga en cuenta que hay una fecha tope para ello. Los tests deben resolverse de manera individual, no es obligatorio entregarlos.

1. Problemas

1. **(A)** Sea $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, una matriz de proyección ($P^2 = P$) distinta de la matriz nula. Demuestre que para cualquier norma matricial $\|\cdot\|$, inducida por una norma vectorial, se cumple que $\|P\| \geq 1$.

2. Sea $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ un proyector ($P^2 = P$). Demuestre que P es ortogonal si y solo si $P = P^*$.

3. Sea $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ un proyector ($P^2 = P$), P distinto de la matriz nula. Demuestre que P es ortogonal si y solo si $\|P\|_2 = 1$.

   Sugerencias:

   (a) Demuestre que si P es ortogonal ($P = P^*$), entonces $\|P\|_2 = 1$.

   (b) Demuestre la implicación
   $$\|P\|_2 = 1 \Rightarrow P \text{ es ortogonal}$$
   de forma indirecta, es decir, demostrando que que si P no es ortogonal, $\|P\|_2 > 1$[1]. Para ello justifique por qué si P no es ortogonal, existen $v, w \in \mathbb{C}^m$ de modo que $v \in \mathrm{im}(P)$, $w \in \mathrm{im}(I - P) = \ker(P)$ y $\langle v; w\rangle \neq 0$. Determine entonces $\alpha \in \mathbb{C}$ de modo que $v + \alpha\, w$ satisfaga $\|P(v + \alpha\, w)\|_2 > \|v + \alpha\, w\|_2$.

4. Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, $b \in \mathbb{C}^m$. Considere el problema de mínimos cuadrados
   $$\min_{x\in\mathbb{C}^n} \|Ax - b\|_2. \tag{1}$$

   (a) Demuestre que el conjunto solución del problema (1) es igual a
   $$\mathcal{S}_1 = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \,:\, Az = \mathrm{Proy}_{\mathrm{im}(A)}(b) \right\},$$
   donde $\mathrm{Proy}_V(x)$ representa la proyección ortogonal de x sobre V.

   (b) Demuestre que el conjunto solución del problema (1) es igual a
   $$\mathcal{S}_2 = \{ z \in \mathbb{C}^n \,:\, A^*Az = A^*b \}.$$

   (c) Demuestre que si A tiene rango completo, entonces (1) tiene solución única y $A(A^*A)^{-1}A^*$ es el proyector ortogonal sobre la imagen de A.

5. **(A)** Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ de rango completo.
   Suponga que Q_1R_1 es una factorización QR reducida de A.

   (a) Demuestre que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se cumple que $\|a_i\|_2 = \|r_i\|_2$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^m$ son las columnas de A y $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{C}^n$ son las columnas de R_1.

   (b) Considere $m = n$. Demuestre que $|\det(A)| \leq \|a_1\|_2\|a_2\|_2 \cdots \|a_n\|_2$.

[1] Recuerde que solo por ser P proyector sabemos que $\|P\|_2 \geq 1$

6. **(A)** Determine la factorización QR reducida de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

con elementos positivos en diagonal principal de R. Utilice esta factorización para determinar el vector $x \in \mathbb{R}^3$ para el que $\|Ax - b\|_2$ es mínima si $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Sugerencia: Hacer el problema con papel y lápiz y comprobar el resultado que se obtiene con función a escribir en MATLAB.

7. Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, de rango completo y $b \in \mathbb{C}^m$. Explique como resolver el problema de minimizar $\|Ax - b\|_2$ si conoce una factorización (completa) QR de A.

8. Sea $v \in \mathbb{C}^n$. Demuestre que $H = I - 2\dfrac{vv^*}{\|v\|_2^2}$ es unitaria y hermitiana. ¿Es H una matriz de proyección?

9. Transforme la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a una triangular superior con ayuda de transformaciones de Householder.

10. Determine matrices de Householder $U, V \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ de modo que Ux sea un vector paralelo a e_1 (primer vector canónico de $\mathbb{R}^4$) y Vx sea un vector paralelo a e_3 siendo $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

11. Se desea determinar el polinomio de grado menor o igual que 2 que mejor ajusta, en el sentido de los mínimos cuadrados, los pares ordenados $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3, 4$ en la siguiente tabla.

i	x_i	y_i
1	-1	2
2	0	-1
3	1	1
4	2	3

   (a) Escriba el problema de mínimos cuadrados asociado, es decir, determine A y b de modo que el problema planteado sea equivalente a encontrar el vector x que minimiza $\|Ax - b\|_2$.

   (b) Determine una factorización QR (reducida o no) de A y encuentre, con ayuda de ella, una solución al problema de mínimos cuadrados. ¿Es esta solución única?

12. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Determine la factorización QR reducida de A con elementos positivos en diagonal principal de R. Utilice para ello el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

   (b) Al utilizar las transformaciones de Householder para determinar una factorización QR de una matriz no se busca que los elementos en diagonal principal de R sean positivos. Determine una factorización QR de A con transformaciones de Householder ignorando la restricción de que los elementos en diagonal principal de R deban ser números positivos.

Algorithm 8.1. Modified Gram–Schmidt

for $i = 1$ to n
    $v_i = a_i$
for $i = 1$ to n
    $r_{ii} = \|v_i\|$
    $q_i = v_i / r_{ii}$
    for $j = i+1$ to n
        $r_{ij} = q_i^* v_j$
        $v_j = v_j - r_{ij} q_i$

Figura 1: Gram-Schmidt modificado, en *Lloyd N. Trefethen, David Bau, III. Numerical Linear Algebra*

13. **(A)** Sea $m \in \mathbb{N}_0$. Determine el polinomio de grado menor o igual que cero con coeficientes reales que mejor ajusta, en normas 1, 2 e infinito, los siguientes pares ordenados

$$(t_i, y_i)\,,\ i = 0, 1, \ldots, m, \qquad \text{con} \qquad t_i = \begin{cases} 0, & \text{si } m = 0, \\ \frac{i}{m}, & \text{si } m > 0, \end{cases} \qquad y_i = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq i < m, \\ 1, & \text{si } i = m. \end{cases}$$

En otras palabras, si suponemos que el polinomio p que ajusta los pares dados es tal que $\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, p(x) = c$, debe determinar el valor de $c \in \mathbb{R}$ que minimiza las normas 1, 2 e infinito del vector

$$\begin{pmatrix} c-0 \\ c-0 \\ \vdots \\ c-0 \\ c-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

2. Test 6: Gram-Schmidt y Gram-Schmidt modificado

En la figura 1 se muestra el algoritmo de Gram-Schmidt modificado. Los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son las columnas de una matriz A, con n columnas. Los vectores $q_1, q_2, \ldots, q_n$ conforman las columnas de Q_1 y r_{ij} son las entradas de la matriz R_1, triangular superior, siendo $Q_1 R_1$, la factorización QR reducida de A con elementos positivos en diagonal principal de R.

1. Escriba una función MATLAB que, dada una matriz A, retorne la factorización QR reducida de A que se obtiene aplicando el algoritmo de ortogonalización de Gram-Schmidt a las columnas de A.

2. Escriba una función MATLAB que, dada una matriz A, retorne la factorización QR reducida de A que se obtiene aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt modificado a las columnas de A.

3. Determine matriz A y vector parte derecha b de modo que el problema de determinar los coeficientes del polinomio de grado menor o igual que 10 que mejor aproxima, en el sentido de los mínimos cuadrados los m ($m > 10$) pares ordenados

$$\left(\frac{i}{m-1}, \sin\left(\frac{i}{m-1} \pi \right) \right),\ i = 0, 2, \ldots, m-1$$

sea equivalente a determinar el vector x que minimiza $\|Ax - b\|_2$.

4. Escriba un rutero en el que para cada $m \in \{15, 20, 25, 30, 35, 40\}$

   (a) determine el polinomio de grado menor o igual que 10 que mejor ajusta, en el sentido de los mínimos cuadrados los pares ordenados

$$\left(\frac{i}{m-1}, \sin\left(\frac{i}{m-1} \pi \right) \right),\ i = 0, 2, \ldots, m-1$$

   utilizando

1) comando \ o polyfit de MATLAB,
2) factorización QR reducida de A (matriz en ítem anterior), calculada con algoritmo de Gram-Schmidt,
3) factorización QR reducida de A, calculada con Gram-Schmidt modificado.

(b) Grafique, en un mismo gráfico, las funciones $|p_m(t) - p_{gs}(t)|$ y $|p_m(t) - p_{mgs}(t)|$, evaluadas en $0, \frac{1}{m-1}, \frac{2}{m-1}, \ldots, 1$, siendo p_m, la mejor aproximación que se obtiene con comandos MATLAB, p_{gs}, el polinomio que se obtiene con proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a A y p_{mgs}, el que se obtiene con Gram-Schmidt modificado.

(c) Responda, con comentarios en rutero: ¿Es la aproximación con Gram-Schmidt modificado siempre mejor que la que se obtiene con Gram-Schmidt o viceversa?

Forma de entrega: cargando archivos a tarea con nombre **Test 6** en Canvas.

Fecha de entrega: domingo 27 de abril, 23:59 hrs.