

P R U E B A 2
MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS (525539)

Viernes 7 de Enero de 2022

Prof. Gabriel N. Gatica.

1. Sean H y Q espacios de Banach reflexivos, y sean $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, $b : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ y $c : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas con constantes correspondientes $\|a\|$, $\|b\|$, y $\|c\|$, tales que a y c son simétricas y semi-definidas positivas, esto es

$$a(\tau, \tau) \geq 0 \quad \forall \tau \in H \quad y \quad c(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in Q.$$

A su vez, sean $\{H_h\}_{h>0}$ y $\{Q_h\}_{h>0}$ familias de subespacios de dimensión finita de H y Q , respectivamente, denote por V_h el espacio nulo del operador inducido por $b|_{H_h \times Q_h}$, y suponga que:

- i) existe una constante $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de h , tal que

$$\sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\zeta_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \geq \tilde{\alpha} \|\zeta_h\|_H \quad \forall \zeta_h \in V_h,$$

- ii) existe una constante $\tilde{\beta} > 0$, independiente de h , tal que

$$\sup_{\substack{\tau_h \in H_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{b(\tau_h, v_h)}{\|\tau_h\|_H} \geq \tilde{\beta} \|v_h\|_Q \quad \forall v_h \in Q_h.$$

- a) Use las ideas del problema 3 de la Evaluación 1 (y más precisamente del trabajo conjunto con Claudio Correa entregado en dicha prueba) para probar que para cada $(f, g) \in H' \times Q'$ existe un único $(\sigma_h, u_h) \in H_h \times Q_h$ tal que

$$\begin{aligned} a(\sigma_h, \tau_h) + b(\tau_h, u_h) &= f(\tau_h) & \forall \tau_h \in H_h, \\ b(\sigma_h, v_h) - c(u_h, v_h) &= g(v_h) & \forall v_h \in Q_h, \end{aligned} \tag{1}$$

y

$$\|\sigma_h\|_H + \|u_h\|_Q \leq \tilde{C} \left\{ \|f\|_{H'} + \|g\|_{Q'} \right\},$$

donde \tilde{C} es una constante positiva que depende sólo de $\|a\|$, $\|c\|$, $\tilde{\alpha}$, y $\tilde{\beta}$.

- b) Suponga que el problema continuo asociado a (1) tiene una única solución $(\sigma, u) \in H \times Q$, y demuestre la estimación de Céa correspondiente, esto es que existe una constante $\hat{C} > 0$, que depende sólo de $\|a\|$, $\|b\|$, $\|c\|$, $\tilde{\alpha}$, y $\tilde{\beta}$, tal que

$$\|\sigma - \sigma_h\|_H + \|u - u_h\|_Q \leq \hat{C} \left\{ \text{dist}(\sigma, H_h) + \text{dist}(u, Q_h) \right\}.$$

2. En el mismo contexto del problema 4 de la Evaluación 1, suponga ahora que Ω es convexo y considere el esquema de Galerkin: Hallar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_{2,h} \times M_{1,h}$ tal que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_1(\mathbf{v}_h, p_h) &= F(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in X_{1,h}, \\ b_2(\mathbf{u}_h, q_h) &= G(q_h) & \forall q_h \in M_{2,h}, \end{aligned} \quad (2)$$

donde, dados un entero $k \geq 0$ y una triangularización \mathcal{T}_h de $\bar{\Omega}$, se definen¹:

$$\begin{aligned} \mathbf{RT}_k(\mathcal{T}_h) &:= \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega) : \mathbf{v}_h|_K \in \mathbf{RT}_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ P_k(\mathcal{T}_h) &:= \left\{ q_h \in L^2(\Omega) : q_h|_K \in P_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ X_{2,h} &:= \mathbf{H}_0^r(\text{div}_r; \Omega) \cap \mathbf{RT}_k(\mathcal{T}_h), \quad M_{1,h} := L_0^r(\Omega) \cap P_k(\mathcal{T}_h), \\ X_{1,h} &:= \mathbf{H}_0^s(\text{div}_s; \Omega) \cap \mathbf{RT}_k(\mathcal{T}_h), \quad M_{2,h} := L_0^s(\Omega) \cap P_k(\mathcal{T}_h), \\ \tilde{P}_{k+1}(\mathcal{T}_h) &:= \left\{ \phi_h \in H_0^1(\Omega) : \phi_h|_K \in P_{k+1}(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}. \end{aligned}$$

A su vez, sea $\mathcal{R}_h^k : H_0^1(\Omega) \rightarrow \tilde{P}_{k+1}(\mathcal{T}_h)$ el proyector que a cada $\phi \in H_0^1(\Omega)$ le asigna el único $\mathcal{R}_h^k(\phi) \in \tilde{P}_{k+1}(\mathcal{T}_h)$ tal que $\int_{\Omega} \nabla \mathcal{R}_h^k(\phi) \cdot \nabla \phi_h = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \phi_h \quad \forall \phi_h \in \tilde{P}_{k+1}(\mathcal{T}_h)$.

- a) Demuestre que los espacios nulos discretos de los operadores inducidos por b_1 y b_2 están dados por

$$\mathcal{K}_h^k := \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{RT}_k(\mathcal{T}_h) : \mathbf{v}_h \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma \text{ y } \text{div}(\mathbf{v}_h) = 0 \text{ en } \Omega \right\},$$

y deduzca que $\mathcal{K}_h^k = \text{curl}(\tilde{P}_{k+1}(\mathcal{T}_h))$.

- b) Sea $\Theta_h^k : \mathbf{L}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{K}_h^k$ el proyector que a cada $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ le asigna el único $\Theta_h^k(\mathbf{w}) \in \mathcal{K}_h^k$ tal que $\int_{\Omega} \Theta_h^k(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}_h = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{K}_h^k$, suponga que para cada $t \in (1, +\infty)$ existe una constante positiva C_t^k , independiente de h , tal que $\|\nabla \mathcal{R}_h^k(\phi)\|_{0,t;\Omega} \leq C_t^k \|\nabla \phi\|_{0,t;\Omega} \quad \forall \phi \in W_0^{1,t}(\Omega)$, y utilice a) para demostrar que $\|\Theta_h^k(\mathbf{w})\|_{0,t;\Omega} \leq C_t^k \|\mathbf{w}\|_{0,t;\Omega} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^t(\text{div}_t; \Omega)$ tal que $\text{div}(\mathbf{w}) = 0$ en Ω .
- c) Use el operador $D_s : \mathbf{L}^s(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^s(\Omega)$ y b) para probar que existe una constante $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de h , tal que $\sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathcal{K}_h^k \\ \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{a(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{X_1}} \geq \tilde{\alpha} \|\mathbf{w}_h\|_{X_2} \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{K}_h^k$.

- d) De manera análoga a c) pruebe que $\sup_{\mathbf{w}_h \in \mathcal{K}_h^k} a(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) > 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{K}_h^k, \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}$.

- e) Suponga que para cada $g \in M_2$ (resp. $g \in M_1$) hay un único $z \in W^{2,s}(\Omega)$ (resp. $z \in W^{2,r}(\Omega)$) tal que $\Delta z = g$ en Ω , $\nabla z \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ en Γ y $\int_{\Omega} z = 0$, para el cual se tiene $\|z\|_{2,s;\Omega} \leq C_s \|g\|_{0,s;\Omega}$ (resp. $\|z\|_{2,r;\Omega} \leq C_r \|g\|_{0,r;\Omega}$) con constantes $C_s, C_r > 0$, independientes de g y z , y pruebe las condiciones inf-sup discretas de b_1 y b_2 .

- f) Aplique el caso general del Teorema de Babuška-Brezzi discreto en espacios de Banach y concluya la solubilidad y dependencia continua de (2). Establezca, además, la estimación de Céa y las razones de convergencia respectivas.

¹ $\mathbf{H}_0^t(\text{div}_t; \Omega) := \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^t(\text{div}_t; \Omega) : \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma \right\}$, $L_0^t(\Omega) := \left\{ q \in L^t(\Omega) : \int_{\Omega} q = 0 \right\}$

3. En la formulación mixta del problema de elasticidad lineal en \mathbb{R}^2 con condiciones de contorno de Dirichlet aparece la forma bilineal $b : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \eta)) := \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \eta \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \eta)) \in H \times Q,$$

donde $H := H(\operatorname{div}; \Omega)$ y $Q := Q_1 \times Q_2$, con $Q_1 := \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $Q_2 := \mathbb{L}^2(\Omega)_{\text{asim}}$. Notar que b puede descomponerse como $b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \eta)) = b_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) + b_2(\boldsymbol{\tau}, \eta)$, donde $b_1 : H \times Q_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $b_2 : H \times Q_2 \rightarrow \mathbb{R}$ están dadas por

$$b_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \quad \text{y} \quad b_2(\boldsymbol{\tau}, \eta) := \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \eta.$$

- a) Sean H_h , $Q_{1,h}$ y $Q_{2,h}$ subespacios de elementos finitos de H , Q_1 y Q_2 , respectivamente, y suponga que existen operadores $\Pi_{i,h} : H \rightarrow H_h$, $i \in \{1, 2\}$, uniformemente acotados (con respecto a h), tales que para todo $\boldsymbol{\tau} \in H$:

- i) $b_1(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in Q_{1,h}$,
- ii) $b_1(\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in Q_{1,h}$,
- iii) $b_2(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}) - \Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), \eta_h) = 0 \quad \forall \eta_h \in Q_{2,h}$.

Demuestre que existe $\beta > 0$, independiente de h , tal que

$$\sup_{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}_h, (\mathbf{v}_h, \eta_h))}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_H} \geq \beta \|(\mathbf{v}_h, \eta_h)\|_Q \quad \forall (\mathbf{v}_h, \eta_h) \in Q_h := Q_{1,h} \times Q_{2,h}.$$

- b) Sean H_h y $Q_{1,h}$ subespacios dados, y $\Pi_{1,h} : H \rightarrow H_h$ un operador específico, uniformemente acotado, tales que la parte i) de a) se verifica. A su vez, sean X_h y M_h subespacios de elementos finitos de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ y $L_0^2(\Omega)$, respectivamente, y suponga que para cada par $(F_h, G_h) \in X'_h \times M'_h$, el siguiente esquema verifica, uniformemente con respecto a h , las hipótesis de la teoría de Babuška-Brezzi discreta: Hallar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{w}_h + \int_{\Omega} p_h \operatorname{div} \mathbf{w}_h &= F_h(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_h, \\ \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h &= G_h(q_h) \quad \forall q_h \in M_h. \end{aligned} \tag{3}$$

En particular, dado $\boldsymbol{\tau} \in H$, considere $F_h \equiv 0$ y

$$G_h(q_h) := \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})) : S(q_h), \quad \text{con} \quad S(q_h) := \begin{pmatrix} 0 & q_h \\ -q_h & 0 \end{pmatrix} \in Q_2,$$

y, bajo el supuesto que H_h contiene a $\operatorname{curl} X_h$, defina $\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}) := \operatorname{curl} \mathbf{u}_h$. Demuestre entonces que $\Pi_{2,h} : H \rightarrow H_h$ es uniformemente acotado y satisface ii) de la parte a). Además, suponga que $Q_{2,h}$ está contenido en $S(M_h)$, y demuestre, integrando por partes en la segunda ecuación de (3), que la parte iii) de a) también se verifica.

- c) Comenzando con H_h y $Q_{1,h}$ dados por el espacio global de Raviart-Thomas de orden k y el espacio de funciones polinomiales discontinuas de grado $\leq k$ en cada elemento, respectivamente, aplique lo deducido en b) al caso de X_h y M_h dados por el mini-elemento estable para Stokes, y deduzca los subespacios H_h , $Q_{1,h}$ y $Q_{2,h}$ resultantes que prueban la inf-sup discreta para b .

4. El propósito de este ejercicio es demostrar las propiedades de aproximación del interpolante local Π_K^k (resp. global Π_h^k) de Raviart-Thomas con respecto a la norma $\|\cdot\|_{0,K}$ (resp. $\|\cdot\|_{0,\Omega}$) y la seminorma del espacio de Sobolev $W^{\ell,p}(K)$ (resp. $W^{\ell,p}(\Omega)$), donde ℓ es un entero tal que $1 \leq \ell \leq k + 1$. Más precisamente, se pide lo que se indica a continuación.

- a) Dado $K \in \mathcal{T}_h$, use escalamiento con respecto a la composición con la aplicación afín T_K , la inyección continua $i : W^{1,p}(\hat{K}) \longrightarrow L^2(\hat{K})$ para todo $p \geq \frac{2n}{n+2}$, lo cual significa que existe una constante $\hat{c} > 0$ tal que

$$\|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{1,p;\hat{K}} \quad \forall \hat{\boldsymbol{\tau}} \in W^{1,p}(\hat{K}),$$

las propiedades de aproximación ya conocidas de Π_K^k , y las desigualdades geométricas asociadas a T_K , para probar que existe una constante $\tilde{C} > 0$, independiente de K , tal que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,K} \leq \tilde{C} h_K^{\ell-n(2-p)/(2p)} |\boldsymbol{\tau}|_{\ell,p;K} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in W^{\ell,p}(K). \quad (4)$$

- b) En el caso $p \in (\frac{2n}{n+2}, 2]$, aplique la propiedad sub-aditiva, la cual establece que, dados n escalares no negativos a_j , $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, y $r \in (0, 1)$, se tiene que

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j \right)^r \leq \sum_{j=1}^n a_j^r,$$

para demostrar, a partir de (4), que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega} \leq \tilde{C} h^{\ell-n(2-p)/(2p)} |\boldsymbol{\tau}|_{\ell,p;\Omega} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in W^{\ell,p}(\Omega). \quad (5)$$

- c) En el caso $p \in (2, +\infty)$, use la desigualdad de Hölder discreta para probar, a partir de (4), que existe una constante $\bar{C} > 0$, que depende de \tilde{C} y $|\Omega|$, tal que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega} \leq \bar{C} h^{\ell-n/(2p)} |\boldsymbol{\tau}|_{\ell,p;\Omega} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in W^{\ell,p}(\Omega). \quad (6)$$

- d) Ilustre la aplicabilidad de (5) y (6) con la demostración de alguna condición inf-sup discreta que Ud. conozca.