

Problema 3

Victor Cartes

10 de enero de 2022

Problema 3

1 Introducción

- Motivación
- Pequeño recordatorio

2 Las preguntas

- Pregunta a)
- Pregunta b)
- Pregunta c)

Motivación

Este problema tiene como objetivo mostrar una deducción de los subespacios de elementos finitos que garantizan la verificación de la inf-sup discreta para la forma bilineal b de la formulación mixta del problema de elasticidad.

Formulación mixta del problema de elasticidad

Recordemos que la formulación mixta del problema de elasticidad lineal en \mathbb{R}^2 es: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \rho)) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \rho)) &= F(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H \\ b(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{v}, \eta)) &= G(\mathbf{v}, \eta) \quad \forall (\mathbf{v}, \eta) \in Q \end{aligned}$$

donde $H = \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega)$ y $Q := Q_1 \times Q_2$, con $Q_1 := \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $Q_2 := \mathbb{L}_{\text{asim}}^2(\Omega)$. Los funcionales $F \in H'$ y $G \in Q'$ están dados por:

$$F(\boldsymbol{\tau}) := 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H, \quad G(\mathbf{v}, \eta) := - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall (\mathbf{v}, \eta) \in Q$$

con $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.

Formulación mixta del problema de elasticidad

Las formas bilineales $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ estas definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \int_{\Omega} \mathcal{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \quad \forall (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) \in H \times H$$

y

$$b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})) := \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\eta} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})) \in H \times Q$$

donde \mathcal{C} denota al operador de Hooke.

Formulación mixta del problema de elasticidad

Notamos que b puede descomponerse como

$$b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})) = b_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) + b_2(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta})$$

donde $b_1 : H \times Q_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $b_2 : H \times Q_2 \rightarrow \mathbb{R}$ están dadas por:

$$b_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in H \times Q_1$$

y

$$b_2(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) := \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\eta} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) \in H \times Q_2$$

Pregunta a): Enunciado

Sean H_h , $Q_{1,h}$ y $Q_{2,h}$ subespacios de elementos finitos de H , Q_1 y Q_2 , respectivamente, y suponga que existen operadores $\Pi_{i,h} : H \rightarrow H_h$, $i \in \{1, 2\}$, uniformemente acotados (con respecto a h), tales que para todo $\tau \in H$:

- i) $b_1(\tau - \Pi_{1,h}(\tau), \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in Q_{1,h}$
- ii) $b_1(\Pi_{2,h}(\tau), \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in Q_{1,h}$
- iii) $b_2(\tau - \Pi_{1,h}(\tau) - \Pi_{2,h}(\tau), \boldsymbol{\eta}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in Q_{2,h}$

Demuestre que existe $\beta > 0$, independiente de h , tal que

$$\sup_{\substack{\tau_h \in H_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{b(\tau_h, (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h))}{\|\tau_h\|_H} \geq \beta \|(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h)\|_Q \quad (1)$$

para todo $(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h) \in Q_h := Q_{1,h} \times Q_{2,h}$.

Pregunta a): Respuesta

- Para demostrar lo pedido haremos uso del lema de Fortin, pero para poder usarlo debemos mostrar lo siguiente:

$$b(\tau - \Pi_h(\tau), (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h)) = 0 \quad \forall \tau \in H, \quad \forall (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h) \in Q_h \quad (2)$$

$$\text{donde } \Pi_h(\tau) := \Pi_{1,h}(\tau) + \Pi_{2,h}(\tau) \quad \forall \tau \in H.$$

Pregunta a): Respuesta

- Para demostrar lo pedido haremos uso del lema de Fortin, pero para poder usarlo debemos mostrar lo siguiente:

$$b(\tau - \Pi_h(\tau), (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h)) = 0 \quad \forall \tau \in H, \quad \forall (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h) \in Q_h \quad (2)$$

donde $\Pi_h(\tau) := \Pi_{1,h}(\tau) + \Pi_{2,h}(\tau) \quad \forall \tau \in H$.

- Observamos que (2) es equivalente a:

$$b_1(\tau - \Pi_h(\tau), \mathbf{v}_h) + b_2(\tau - \Pi_h(\tau), \boldsymbol{\eta}_h) = 0$$

para todo $\tau \in H$, $\mathbf{v}_h \in Q_{1,h}$ y $\boldsymbol{\eta}_h \in Q_{2,h}$.

Pregunta a): Respuesta

Sean $\tau \in H$, $\mathbf{v}_h \in Q_{1,h}$, $\eta_h \in Q_{2,h}$, al sumar *i*) a *iii*) y restar *ii*), obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= b_1(\tau - \Pi_{1,h}(\tau), \mathbf{v}_h) - b_1(\Pi_{2,h}(\tau), \mathbf{v}_h) \\ &\quad + b_2(\tau - \Pi_{1,h}(\tau) - \Pi_{2,h}(\tau), \eta_h) \\ &= b_1(\tau - \Pi_{1,h}(\tau), \mathbf{v}_h) + b_1(-\Pi_{2,h}(\tau), \mathbf{v}_h) + b_2(\tau - \Pi_h(\tau), \eta_h) \\ &= b_1(\tau - \Pi_{1,h}(\tau) - \Pi_{2,h}(\tau), \mathbf{v}_h) + b_2(\tau - \Pi_h(\tau), \eta_h) \\ &= b_1(\tau - \Pi_h(\tau), \mathbf{v}_h) + b_2(\tau - \Pi_h(\tau), \eta_h) \end{aligned}$$

lo cual demuestra (2).

Pregunta a): Respuesta

- Ahora probaremos que $\{\Pi_h\}_{h>0}$ son uniformemente acotado. Sea $\tau \in H$, se sigue del acotamiento uniforme de los $\Pi_{1,h}$ y $\Pi_{2,h}$, y de la desigualdad triangular que

$$\begin{aligned}\|\Pi_h(\tau)\|_{\text{div};\Omega} &\leq \|\Pi_{1,h}(\tau)\|_{\text{div};\Omega} + \|\Pi_{2,h}(\tau)\|_{\text{div};\Omega} \\ &\leq \{\|\Pi_{1,h}\| + \|\Pi_{2,h}\|\} \|\tau\|_{\text{div};\Omega} \\ &\leq \{M_1 + M_2\} \|\tau\|_{\text{div};\Omega} \quad \forall \tau \in H\end{aligned}$$

con $M_1, M_2 > 0$ las constantes que acotan uniformemente a $\Pi_{1,h}$ y $\Pi_{2,h}$, respectivamente. Con esto hemos demostrado que $\{\Pi_h\}_{h>0}$ son uniformemente acotado

Pregunta a): Respuesta

- Ahora probaremos que $\{\Pi_h\}_{h>0}$ son uniformemente acotado. Sea $\tau \in H$, se sigue del acotamiento uniforme de los $\Pi_{1,h}$ y $\Pi_{2,h}$, y de la desigualdad triangular que

$$\begin{aligned}\|\Pi_h(\tau)\|_{\text{div};\Omega} &\leq \|\Pi_{1,h}(\tau)\|_{\text{div};\Omega} + \|\Pi_{2,h}(\tau)\|_{\text{div};\Omega} \\ &\leq \{\|\Pi_{1,h}\| + \|\Pi_{2,h}\|\} \|\tau\|_{\text{div};\Omega} \\ &\leq \{M_1 + M_2\} \|\tau\|_{\text{div};\Omega} \quad \forall \tau \in H\end{aligned}$$

con $M_1, M_2 > 0$ las constantes que acotan uniformemente a $\Pi_{1,h}$ y $\Pi_{2,h}$, respectivamente. Con esto hemos demostrado que $\{\Pi_h\}_{h>0}$ son uniformemente acotado

- Luego el lema de Fortin nos asegura que existe una constante $\beta > 0$ independiente de h tal que se satisface la condición inf-sup (1)

Pregunta b): Enunciado

Sean H_h y $Q_{1,h}$ subespacios dados, y $\Pi_{1,h} : H \rightarrow H_h$ un operador específico, uniformemente acotado, tales que la parte i) de a) se verifica. A su vez, sean X_h y M_h subespacios de elementos finitos de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ y $L_0^2(\Omega)$, respectivamente, y suponga que para cada par $(F_h, G_h) \in X'_h \times M'_h$, el siguiente esquema verifica, uniformemente con respecto a h , las hipótesis del teorema de Babuska-Brezzi discreta: Hallar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{w}_h + \int_{\Omega} p_h \operatorname{div} \mathbf{w}_h &= F_h(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_h \\ \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h &= G_h(q_h) \quad \forall q_h \in M_h \end{aligned} \tag{3}$$

Pregunta b): Enunciado

En particular, dado $\tau \in H$, considere $F_h \equiv 0$ y

$$G_h(q_h) := \int_{\Omega} (\tau - \Pi_{1,h}(\tau)) : S(q_h)$$

$$\text{con } S(q_h) := \begin{pmatrix} 0 & q_h \\ -q_h & 0 \end{pmatrix} \in Q_2.$$

Bajo el supuesto que H_h contiene a $\text{curl}(X_h)$, defina $\Pi_{2,h}(\tau) := \text{curl } \mathbf{u}_h$. Demuestre entonces que $\Pi_{2,h} : H \rightarrow H_h$ es uniformemente acotado y satisface *ii)* de la parte *a)*. Además, suponga que $Q_{2,h}$ está contenido en $S(M_h)$, y demuestre, integrando por partes en la segunda ecuación de (3), que la parte *iii)* de *a)* también se verifica.

Pregunta b): Respuesta

Consideremos a $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ como las soluciones de (3). Es claro que

$$\mathbf{div} \operatorname{curl} \mathbf{u}_h = \mathbf{0} \iff \mathbf{div} \Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0}$$

Implicando que

$$0 = \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{div} \Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}) = b_1(\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in Q_{1,h}$$

Lo cual demuestra que $\Pi_{2,h}$ cumple ii) de la pregunta a).

Pregunta b): Respuesta

- Ahora mostraremos que $\Pi_{2,h}$ cumple *iii)* de la pregunta a).
Sea $q_h \in M_h$, empecemos por notar que

$$\begin{aligned} q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h &= q_h \left(\frac{\partial u_{1,h}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2,h}}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{\partial u_{1,h}}{\partial x_1} q_h + \left(-\frac{\partial u_{2,h}}{\partial x_2} \right) (-q_h) \\ &= \begin{pmatrix} Z_1 & \frac{\partial u_{1,h}}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial u_{2,h}}{\partial x_2} & Z_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & q_h \\ -q_h & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con $\mathbf{u}_h := (u_{1,h}, u_{2,h})^t$.

Pregunta b): Respuesta

- Ahora mostraremos que $\Pi_{2,h}$ cumple *iii)* de la pregunta a).
Sea $q_h \in M_h$, empecemos por notar que

$$\begin{aligned} q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h &= q_h \left(\frac{\partial u_{1,h}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2,h}}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{\partial u_{1,h}}{\partial x_1} q_h + \left(-\frac{\partial u_{2,h}}{\partial x_2} \right) (-q_h) \\ &= \begin{pmatrix} Z_1 & \frac{\partial u_{1,h}}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial u_{2,h}}{\partial x_2} & Z_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & q_h \\ -q_h & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con $\mathbf{u}_h := (u_{1,h}, u_{2,h})^t$.

- Eligiendo a $Z_1 = -\frac{\partial u_{1,h}}{\partial x_2}$ y $Z_2 = \frac{\partial u_{2,h}}{\partial x_1}$, obtenemos que
 $q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h = \operatorname{curl} \mathbf{u}_h : S(q_h)$.

Pregunta b): Respuesta

- Con esta información la segunda ecuación de (3) nos queda así:

$$\int_{\Omega} \operatorname{curl} \mathbf{u}_h : S(q_h) = \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})) : S(q_h)$$

Pregunta b): Respuesta

- Con esta información la segunda ecuación de (3) nos queda así:

$$\int_{\Omega} \operatorname{curl} \mathbf{u}_h : S(q_h) = \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})) : S(q_h)$$

- o bien,

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}) - \operatorname{curl} \mathbf{u}_h) : S(q_h) = 0 \quad \forall q_h \in M_h$$

Es decir,

$$b_2(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}) - \Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), S(q_h)) = 0 \quad \forall q_h \in M_h$$

Pregunta b): Respuesta

- Con esta información la segunda ecuación de (3) nos queda así:

$$\int_{\Omega} \operatorname{curl} \mathbf{u}_h : S(q_h) = \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})) : S(q_h)$$

- o bien,

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}) - \operatorname{curl} \mathbf{u}_h) : S(q_h) = 0 \quad \forall q_h \in M_h$$

Es decir,

$$b_2(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}) - \Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), S(q_h)) = 0 \quad \forall q_h \in M_h$$

- Como $Q_{2,h} \subseteq S(M_h)$, podemos inferir de la igualdad anterior que $\Pi_{2,h}$ cumple *iii)* de la pregunta a).

Pregunta b): Respuesta

Finalizaremos mostrando que $\{\Pi_{2,h}\}_{h>0}$ es uniformemente acotada. Notamos que

$$\|\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau})\|_{\text{div};\Omega} = \|\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega} = \|\text{curl } \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq \|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$$

Gracias a la estabilidad de (3) tenemos la desigualdad:

$$\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|p_h\|_{0,\Omega} \leq C\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega}$$

con la constante $C > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau})\|_{\text{div};\Omega} &\leq \|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \leq C\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega} \\ &\leq C\{\|\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega} + \|\Pi_{1,h}\|\|\boldsymbol{\tau}\|_{\text{div};\Omega}\} \\ &\leq C\{1 + M_1\}\|\boldsymbol{\tau}\|_{\text{div};\Omega}\end{aligned}$$

Dado que $C\{1 + M_1\}$ es independiente a h , hemos probado que $\{\Pi_{2,h}\}_{h>0}$ son uniformemente acotado respecto a h .

Pregunta c): Enunciado

Comenzando con H_h y $Q_{1,h}$ dados por el espacio global de Raviart-Thomas de orden k y el espacio de funciones polinomiales discontinuas de grado $\leq k$ en cada elemento, respectivamente, aplique lo deducido en b) al caso de X_h y M_h dados por el mini-elemento estable para Stokes, y deduzca los subespacios H_h , $Q_{1,h}$ y $Q_{2,h}$ resultantes que prueban la inf-sup discreta para b .

Pregunta c): Respuesta

- Recordemos que en el enunciado de la pregunta *b)* tuvimos que asumir las siguiente hipótesis sobre los espacios H_h y $Q_{2,h}$:
 1. H_h contiene a $\text{curl}(X_h)$
 2. $Q_{2,h}$ esta contenido en $S(M_h)$

Pregunta c): Respuesta

- Recordemos que en el enunciado de la pregunta b) tuvimos que asumir las siguiente hipótesis sobre los espacios H_h y $Q_{2,h}$:
 - H_h contiene a $\text{curl}(X_h)$
 - $Q_{2,h}$ esta contenido en $S(M_h)$
- Para que se cumple 1., podemos re-definir a H_h de esta manera:

$$H_h := \left\{ \tau_h \in H : \tau_{h,i} \Big|_K \in RT_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} + \text{curl}(X_h)$$

Pregunta c): Respuesta

- Recordemos que en el enunciado de la pregunta b) tuvimos que asumir las siguiente hipótesis sobre los espacios H_h y $Q_{2,h}$:
 1. H_h contiene a $\text{curl}(X_h)$
 2. $Q_{2,h}$ esta contenido en $S(M_h)$
- Para que se cumple 1., podemos re-definir a H_h de esta manera:

$$H_h := \left\{ \tau_h \in H : \tau_{h,i} \Big|_K \in RT_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} + \text{curl}(X_h)$$

- Para satisfacer 2., podemos definir a $Q_{2,h} := S(M_h)$.

Pregunta c): Respuesta

En particular, los espacios X_h y M_h dados por el mini-elementos estables para el problema de Stokes¹ son:

$$X_h := \left\{ \mathbf{w}_h \in [C(\Omega)]^2 : \mathbf{w}_h|_K \in [\mathbb{P}_1(K) \oplus \langle b_K \rangle]^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$

$$M_h := \left\{ q_h \in C(\Omega) : q_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$

donde b_K es la funciones burbuja en el triangulo K .

¹Ver archivo adjunto al problema 3.

Pregunta c): Respuesta

Luego los espacios H_h , $Q_{1,h}$ y $Q_{2,h}$ (con $k = 0$) estarían dados por:

$$H_h = \left\{ \boldsymbol{\tau}_h \in \boldsymbol{H} : \boldsymbol{\tau}_{h,i} \Big|_K \in RT_0(K) + \langle \text{curl } \boldsymbol{b}_k \rangle \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$

$$Q_{1,h} = \left\{ \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) : \boldsymbol{v}_h \Big|_K \in [\mathbb{P}_0(K)]^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$

$$Q_{2,h} = \left\{ \boldsymbol{\eta}_h := \begin{pmatrix} 0 & q_h \\ -q_h & 0 \end{pmatrix} : q_h \in C(\Omega) \text{ y } q_h \Big|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$