Problema 1. *Utilizando el método de características, resuelva el problema de valores de contorno*

$$x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = 2u, \quad u(x_1, 1) = g(x_1).$$

Solución. En primer lugar, el problema se puede reescribir como sigue

$$F(Du, u, \boldsymbol{x}) = 0, \quad u(x_1, 1) = g(x_1),$$

donde $F(Du, u, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot Du - 2u$. Haciendo los cambios de variable $\boldsymbol{p} = Du$ y $z = u$, se tiene que

$$F(\boldsymbol{p}, z, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p} - 2z,$$

de aquí es inmediato notar que

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{p}} F(\boldsymbol{p}, z, \boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x}, \\ D_z F(\boldsymbol{p}, z, \boldsymbol{x}) &= -2, \\ D_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{p}, z, \boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{p}. \end{aligned}$$

Por otro lado, se define la función $\boldsymbol{x}(s) = \left(x^1(s), x^2(s)\right)$ con $s \in I \subset \mathbf{R}$, esta función parametriza a la curva que une a un punto en el dominio de u con un punto en la frontera. Con lo anterior se deducen las ecuaciones características

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}}(s) &= \boldsymbol{p}(s), \\ \dot{z}(s) &= \boldsymbol{x}(s) \cdot \boldsymbol{p}(s), \\ \dot{\boldsymbol{x}}(s) &= \boldsymbol{x}(s). \end{aligned} \tag{1}$$

Ademas,

$$F(\boldsymbol{p}(s), z(s), \boldsymbol{x}(s)) \equiv 0, \tag{2}$$

para todo $s \in I$. Usando (2) se deduce que $\boldsymbol{x}(s) \cdot \boldsymbol{p}(s) = 2z(s)$ por lo que (1) se puede reescribir como sigue

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}}(s) &= \boldsymbol{p}(s), \\ \dot{z}(s) &= 2z(s), \\ \dot{\boldsymbol{x}}(s) &= \boldsymbol{x}(s), \end{aligned} \tag{3}$$

para todo $s \in I$. La tercera ecuación es un sistema de EDO's de primer orden lineal y homogéneo donde su solución es

$$\boldsymbol{x}(s) = \left(C_1 e^s, C_2 e^s\right) \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R},$$

usando el hecho que $x(0)$ es un punto en la frontera se deduce que $C_2 = 1$. Por tanto la parametrización de la curva esta dada por

$$\boldsymbol{x}(s) = \left(C_1 e^s, e^s\right).$$

Resolviendo la segunda ecuación de (3) usando el método del factor integrante se deduce que

$$z(s) = C_3 e^{2s} \quad C_3 \in \mathbf{R},$$

recordando que $z(s) = u(x(s))$ y usando la condición de contorno se tiene que

$$C_3 = z(0) = u(x(0)) = u(C_1, 1) = g(C_1),$$

de esta forma

$$u(x(s)) = z(s) = g(C_1) e^{2s} \quad C_1 \in \mathbf{R},$$

para todo $s \in I$. Tomando un punto $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ en la curva, entonces existe un $\hat{s} \in I$ tal que

$$\boldsymbol{x}(\hat{s}) = (C_1 e^{\hat{s}}, e^{\hat{s}}) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$$

de aquí se deduce que

$$\hat{s} = \ln(\hat{x}_2) \quad \wedge \quad C_1 = \frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_2},$$

y por tanto

$$u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = g\left(\frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_2}\right) \hat{x}_2^2$$

es la solución al problema de valore de contorno. □

Problema 2. *Para $i \in \{1,2\}$, sea u^i la solución del problema de valores iniciales*

$$\begin{aligned} u_t^i + H\left(Du^i\right) &= 0 \quad \text{en } \mathbf{R}^n \times (0,\infty), \\ u^i &= g^i \quad \text{en } \mathbf{R}^n \times \{t=0\}, \end{aligned}$$

que da la fórmula de Hopf-Lax. Pruebe la desigualdad de contracción

$$(\forall t > 0) \quad \sup_{\mathbf{R}^n} |u^1(\cdot,t) - u^2(\cdot,t)| \leq \sup_{\mathbf{R}^n} |g^1 - g^2|.$$

Demostración. Para $i \in \{1,2\}$. La solución u^i del problema de valores iniciales descrito en el enunciado se escribe como sigue

$$u^i(\boldsymbol{x},t) = \min_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{t}\right) + g^i(\boldsymbol{y}) \right\}. \tag{4}$$

Tomando $t > 0$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ y denotando por $\boldsymbol{y}^i$ a la solución del problema de minimización descrito en (4), se sigue que

$$\begin{aligned} |u^1(\boldsymbol{x},t) - u^2(\boldsymbol{x},t)| &= \left| tL\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^1}{t}\right) + g^1\left(\boldsymbol{y}^1\right) - tL\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^2}{t}\right) - g^2\left(\boldsymbol{y}^2\right) \right| \\ &\leq \left| tL\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^2}{t}\right) + g^1\left(\boldsymbol{y}^2\right) - tL\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^2}{t}\right) - g^2\left(\boldsymbol{y}^2\right) \right| \\ &= \left| g^1\left(\boldsymbol{y}^2\right) - g^2\left(\boldsymbol{y}^2\right) \right| \\ &\leq \sup_{\mathbf{R}^n} |g^1 - g^2| \end{aligned}$$

como lo anterior vale para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ se desprende lo pedido. □

Problema 3. *Calcule explícitamente la única solución de entropía de*

$$\begin{aligned} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x &= 0 \quad \text{en } \mathbf{R} \times (0,\infty) \\ u &= g \quad \text{en } \mathbf{R} \times \{t=0\}, \end{aligned}$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1, \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ 2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Ilustre su respuesta con un gráfico como el de la página 143 del libro de Evans; asegúrese que quede ilustrado qué sucede para tiempos t grandes.

Solución. De la condición inicial se puede ver que en $x=-1$ y $x=1$ se tiene $u_l > u_r$ lo cual implica que hay una onda de choque en aquellos puntos mientras que en $x=0$ se tiene una onda de rarefacción pues $u_l > u_r$.

La condición de Rankine-Hugoniot a lo largo de la curva de choque para $x=-1$ es

$$\sigma = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{u_l^2 - u_l^2}{2(u_l - u_r)} = \frac{u_l + u_r}{2} = \frac{1}{2}.$$

Mientras que en el caso $x=1$ se tiene

$$\sigma = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{u_l^2 - u_l^2}{2(u_l - u_r)} = \frac{u_l + u_r}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

La observación inicial junto a la condición de Rankine-Hugoniot permiten deducir la siguiente solución al problema

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 + \frac{1}{2}t, \\ 0 & \text{si } -1 + \frac{1}{2}t < x < 0, \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 < x < 2t, \\ 2 & \text{si } 2t < x < 1 + t, \\ 0 & \text{si } 1 + t < x. \end{cases}$$

Lo anterior es válido para $0 \leq t \leq 1$, pues para los casos $t = 1$ y $t = 2$ hay una colisión. Cuando $t = 1$, se tiene que $u_l = \frac{x}{t}$ y $u_r = 0$ y así por condición de Rankine-Hugoniot

$$\dot{s}(t) = \sigma = \frac{[\![F(u)]\!]}{[\![u]\!]} = \frac{s(t)}{2t},$$

usando el método del factor integrante para EDO's y que $s(1) = 2$, se llega a que

$$s(t) = 2\sqrt{t},$$

para $1 \leq t \leq 2$, de esta forma se tiene

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 + \frac{1}{2}t, \\ 0 & \text{si } -1 + \frac{1}{2}t < x < 0, \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 < x < 2\sqrt{t}, \\ 0 & \text{si } 2\sqrt{t} < x. \end{cases}$$

Cuando $t = 2$, se tiene que $u_l = -1$ y $u_r = \frac{x}{t}$ y así por condición de Rankine-Hugoniot

$$\dot{s}(t) = \sigma = \frac{[\![F(u)]\!]}{[\![u]\!]} = \frac{1 - \frac{s^2(t)}{t^2}}{2\left(1 - \frac{s(t)}{t}\right)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{s(t)}{t}\right),$$

usando el método del factor integrante para EDO's y que $s(2) = 0$, se llega a que

$$s(t) = t - \sqrt{2t},$$

de esta forma

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < t - \sqrt{2t}, \\ \frac{x}{t} & \text{si } t - \sqrt{2t} < x < 2\sqrt{t}, \\ 0 & \text{si } 2\sqrt{t} < x. \end{cases}$$

de aquí se deduce que la solución es válida para $2 \leq t \leq 6 + 4\sqrt{2}$. Ahora cuando $t = 6 + 4\sqrt{2}$ se tiene que $u_l = 1$ y $u_r = 0$ y así por condición de Rankine-Hugoniot

$$\dot{s}(t) = \sigma = \frac{[\![F(u)]\!]}{[\![u]\!]} = \frac{1}{2},$$

integrando y usando que $s\left(6 + 4\sqrt{2}\right) = 4 + 2\sqrt{2}$ se obtiene que

$$s(t) = \frac{1}{2}t + 1$$

y de esta forma

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{2}t + 1, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2}t + 1 < x. \end{cases}$$

Solución que es válida para $t \geq 6 + 4\sqrt{2}$. $\square$