UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Tarea, curso electivo "Tópicos en información cuántica", 2023-2

En todos los problemas a continuación se supone que la dimensión del espacio de Hilbert del sistema es finita.

PROBLEMA 1. *Entrelazamiento de los estados de Werner.* [8 puntos]

El estado de Werner de 2 qubits está definido por

$$\rho_{\mathrm{W}} = p\,|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| + \frac{1-p}{4}\,\mathbb{1}\ ,$$

donde $p \in [0,1]$ y $|\Phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle - |10\rangle\big)$ es un estado de Bell.

1. Muestre que ρ_{W} es un operador densidad y calcule su pureza $\mathrm{tr}(\rho_{\mathrm{W}}^2)$.
2. Use el criterio de Peres-Horodecki para hallar una condición necesaria y suficiente sobre el parámetro p para que ρ_{W} sea un estado entrelazado.

PROBLEMA 2. *La transposición no es un canal cuántico.* [5 puntos]

Muestre que la aplicación transposición en la base canónica $\{|i\rangle\}_{i=0}^{1}$ de $\mathbb{C}^2$,

$$A \ \mapsto\ A^T = \sum_{i,j=0}^{1} \langle j|A|i\rangle |i\rangle\langle j|\ ,$$

es una aplicación positiva $\mathcal{B}(\mathbb{C}^2) \to \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$, pero que no es un canal cuántico.
Indicación: usar el ejemplo del Problema 1 para mostrar que la aplicación transposición no es 2-positiva.

PROBLEMA 3. *Propiedad del número de Schmidt.* [8 puntos]

(Problema 2.2 del libro de Nielsen & Chuang).

1. Muestre que el número de Schmidt de un estado puro $|\Psi\rangle$ de un sistema compuesto AB es igual al rango de la matriz densidad reducida $\rho_{\mathrm{A}} = \mathrm{tr}_{\mathrm{B}}\,|\Psi\rangle\langle\Psi|$.
2. Muestre que si
$$|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{m} c_j |\psi_j\rangle|\phi_j\rangle\ ,$$
donde $\{|\psi_j\rangle\}_{j=1}^{m}$ y $\{|\phi_j\rangle\}_{j=1}^{m}$ son familias (no necesariamente ortogonales) de vectores de $\mathcal{H}_{\mathrm{A}}$ y $\mathcal{H}_{\mathrm{B}}$ y $c_j \in \mathbb{C}$, $c_j \neq 0$, luego m es igual o mayor al número de Schmidt de $|\Psi\rangle$.
3. Suponga que $|\Psi\rangle = c_1|\Phi_1\rangle + c_2|\Phi_2\rangle$, donde $|\Phi_1\rangle$ y $|\Phi_2\rangle$ son estados puros de AB y $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$. Muestre que los números de Schmidt q_1, q_2, y q de $|\Phi_1\rangle$, $|\Phi_2\rangle$, y $|\Psi\rangle$, respectivamente, satisfacen la desigualdad $q \geqslant |q_1 - q_2|$.

PROBLEMA 4. *Conjunto de estados puros minimal de un operador densidad* [10 puntos] (Ejercicio 2.72 del libro de Nielsen & Chuang).

Decimos que un conjunto de estados puros $\{|\psi_i\rangle, p_i\}_{i=1}^r$ es minimal para el operador densidad ρ si $\rho = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ con $p_i > 0 \ \forall \ i = 1, \dots, r$ y el número r de estados del conjunto es igual al rango de ρ.

1. Muestre que los estados propios normalizados de ρ asociados a valores propios non nulos forman un conjunto minimal para ρ.

2. Sea $|\psi_1\rangle \in \mathrm{supp}(\rho)$, $\|\psi_1\| = 1$, donde $\mathrm{supp}(\rho)$ es el subespacio imagen de $\mathcal{H}$ por ρ. Considere los operadores
$$A_p = \rho - p\,|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$$
con $0 \leqslant p \leqslant 1$.

   (a) Muestre que existe un único $p \in]0, 1]$ y un único vector normalizado $|\phi\rangle \in \mathrm{supp}(\rho)$ módulo un factor de fase tales que $A_p|\phi\rangle = 0$. Muestre que estos p y $|\phi\rangle$ estan dados por
   $$p = p_1 = \langle\psi_1|\rho^{-1}|\psi_1\rangle^{-1} \quad , \quad |\phi\rangle = c\rho^{-1}|\psi_1\rangle \, ,$$
   donde c es una constante de normalización y se define ρ^{-1} como el inverso del operador ρ restringido a $\mathrm{supp}(\rho)$ (este inverso está definido también si ρ tiene valores propios nulos).

   (b) Muestre que A_p es un operador no negativo para todo $p \in [0, p_1]$.
   Indicación: Usar la equivalencia $A_p \geqslant 0 \Leftrightarrow \rho^{-1/2} A_p\, \rho^{-1/2} \geqslant 0$.
   ¿ Cual es el rango de A_{p_1} ?

   (c) Deduzca de las preguntas anteriores que existe un conjunto de estados puros minimal para ρ que contiene $|\psi_1\rangle$, en el cual la probabilidad asociada a $|\psi_1\rangle$ es igual a p_1.

PROBLEMA 5. *Purificación del estado de salida de un canal cuántico.* [5 puntos]

Sea ρ_{S} un operador densidad sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathrm{S}}$ y $\mathcal{M} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathrm{S}}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathrm{S}})$ un canal cuántico. Sea $|\Psi_{\mathrm{SA}}\rangle$ una purificación de ρ_{S} sobre $\mathcal{H}_{\mathrm{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{A}}$. Sea $\mathcal{H}_{\mathrm{E}}$ el espacio de Hilbert, U_{SE} el unitario sobre $\mathcal{H}_{\mathrm{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{E}}$ y $|\epsilon_0\rangle \in \mathcal{H}_{\mathrm{E}}$ el estado puro en la dilatación de Stinespring de $\mathcal{M}$,
$$\mathcal{M}(\rho_{\mathrm{S}}) = \mathrm{tr}_{\mathrm{E}}(U_{\mathrm{SE}}\, \rho_{\mathrm{S}} \otimes |\epsilon_0\rangle\langle\epsilon_0|\, U_{\mathrm{SE}}^\dagger) \, .$$

1. Muestre que
$$|\Psi_{\mathrm{SAE}}^{\mathcal{M}}\rangle = U_{\mathrm{SE}} \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{A}} |\Psi_{\mathrm{SA}}\rangle|\epsilon_0\rangle$$
es una purificación de $\mathcal{M}(\rho_{\mathrm{S}})$ sobre $\mathcal{H}_{\mathrm{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{E}}$.

2. Sea $\rho_{\mathrm{S}} = \sum_k \mu_k|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$ la descomposición espectral de ρ_{S} y $\{A_i\}$ una familia de operadores de Kraus para $\mathcal{M}$. Muestre que
$$|\Psi_{\mathrm{SAE}}^{\mathcal{M}}\rangle = \sum_k \sum_i \sqrt{\mu_k} A_i|\varphi_k\rangle|\alpha_k\rangle|\epsilon_i\rangle$$
es una purificación de $\mathcal{M}(\rho_{\mathrm{S}})$ sobre $\mathcal{H}_{\mathrm{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{E}}$, donde $\{|\alpha_k\rangle\}$ y $\{|\epsilon_i\rangle\}$ son familias ortonormales arbitarias de $\mathcal{H}_{\mathrm{A}}$ y $\mathcal{H}_{\mathrm{E}}$, respectivamente.

PROBLEMA 6. *Discriminación ambigua de 2 estados.* [11 puntos]

Suponga que Alice prepara un sistema cuántico en uno de los dos estados ρ_1 o ρ_2 con probabilidades p_1 y $p_2 = 1 - p_1$. Luego ella transmite el sistema a Bob. Con el fin de determinar cual de los dos estados ha sido preparado por Alice, Bob realiza una medición generalizada sobre el sistema, descrita por un POVM $\{M_1, M_2\}$. El decide que el estado es ρ_1 si el resultado de la medición es "1" y es ρ_2 si el resultado de la medición es "2". El propósito de la discriminación ambigua de estados (o *discriminación con error mínimo*) es hallar la medición óptima que minimiza la probabilidad de equivocación de Bob. Esta probabilidad está dada por

$$P_{\mathrm{err}} = 1 - \sum_{i=1}^{2} p_i \mathrm{Proba}(i|i) \ ,$$

donde $\mathrm{Proba}(i|i) = \mathrm{tr}(M_i \rho_i)$ es la probabilidad del resultado i sabiendo que el estado es ρ_i.

1. Muestre que $P_{\mathrm{err}} = p_1 - \mathrm{tr}(M_1 \Lambda)$ con $\Lambda = p_1 \rho_1 - p_2 \rho_2$.

2. Deduzca que la probabilidad de error mínima está dada por

$$P_{\mathrm{err}} = \frac{1}{2}\Big(1 - \mathrm{tr}\,|\Lambda|\Big)$$

y que la medición óptima es $\{M_1^{\mathrm{opt}} = \Pi_+, M_2^{\mathrm{opt}} = \mathbb{1} - \Pi_+\}$, donde Π_+ es la proyección sobre el subespacio generado por los vectores propios de Λ con valores propios positivos. *Indicación:* para maximizar $\mathrm{tr}(M_1 \Lambda)$, descomponer Λ en sus partes positiva y negativa,

$$\Lambda = \Lambda_+ - \Lambda_- \quad \text{con} \quad \Lambda_\pm = \frac{|\Lambda| \pm \Lambda}{2} \ \geqslant\ 0 \ .$$

Luego mostrar que $\mathrm{tr}(M_1 \Lambda)$ es máximo cuando $\mathrm{tr}(M_1 \Lambda_-) = 0$ y $\mathrm{tr}(M_1 \Lambda_+) = \mathrm{tr}(\Lambda_+)$, es decir, para $M_1 = \Pi_+$.

3. Muestre que en el caso de dos estados puros equiprobables, $\rho_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ con $p_i = 1/2$, $i = 1, 2$, donde $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ no son ortogonales entre sí,

$$P_{\mathrm{err}} = \frac{1}{2}\Big(1 - \sqrt{1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2}\Big) \ .$$

Determine la base de medición optimal $\{|\phi_1^{\mathrm{opt}}\rangle, |\phi_2^{\mathrm{opt}}\rangle\}$ en función de $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ y represente gráficamente en el plano los vectores $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $|\phi_1^{\mathrm{opt}}\rangle$ y $|\phi_2^{\mathrm{opt}}\rangle$.

PROBLEMA 7. *Discriminación no ambigua de 2 estados puros.* [13 puntos]

Una estrategía alternativa a la contemplada en el problema anterior para discriminar estados consiste en tratar de identificar con certeza el estado preparado por Alice a costa de tener un resultado inconclusivo. Más precisamente, Bob hace una medición con 3 resultados, descrita por un POVM $\{M_j\}_{j=0}^2$. Si el obtiene el resultado "1", el estado es con certeza ρ_1, si el obtiene "2" el estado es con certeza ρ_2, y si el obtiene "0" no se sabe. Queremos hallar una medición óptima que minimiza la probabilidad Q_0 del resultado inconclusivo "0",

$$Q_0 = \sum_{i=1}^{2} p_i P_{0|i} \ ,$$

donde $P_{0|i} = \mathrm{tr}(M_0\rho_i)$ es la probabilidad del resultado "0" sabiendo que el estado es ρ_i. La condición de no ambigüedad se escribe $P_{j|i} = \mathrm{tr}(M_j\rho_i) = 0$ si $i \neq j$, $i,j = 1,2$. En este problema suponemos que Alice prepara estados puros $\rho_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ con probabilidad p_i, $i = 1,2$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que el espacio de Hilbert tiene dimensión 2, esto es, $\mathcal{H} = \mathrm{span}\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$.

1. Muestre que la condición de no ambigüedad implica que

$$M_i = P_{i|i}\,|\widetilde{\psi}_i^*\rangle\langle\widetilde{\psi}_i^*| \quad , \quad i = 1,2 \ ,$$

donde $\{|\widetilde{\psi}_i^*\rangle\}_{i=1}^2$ es la base dual de $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^2$ (base de $\mathcal{H}$ tal que $\langle\psi_i^*|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$)[1] y $P_{i|i} = 1 - P_{0|i} > 0$ es la probabilidad del resultado i sabiendo que el estado es $|\psi_i\rangle$. Deduzca que para que la discriminación no ambigua sea posible, $P_{1|1}$ y $P_{2|2}$ deben ser tales que

$$\sum_{i=1}^{2} P_{i|i}|\widetilde{\psi}_i^*\rangle\langle\widetilde{\psi}_i^*| \leqslant \mathbb{1} \ .$$

¿ El POVM $\{M_j\}_{j=1}^2$ puede ser asociado a una medición de von Neumann?

2. En lo que sigue consideramos una medición generalizada $\{A_j\}_{j=0}^2$ asociada a $\{M_j\}_{j=0}^2$. Denotamos por U_{SA}, $\{|\alpha_j\rangle\}_{j=0}^2$, y $|0\rangle$ el operador unitario sobre $\mathcal{H}_{\mathrm{SA}}$, la base ortonormal de medición sobre el ancilla A, y el estado inicial de A asociados a $\{A_j\}_{j=0}^2$ en el teorema de extensión de Neumark. Sea

$$|\Psi_i^{\mathrm{SA}}\rangle = U_{\mathrm{SA}}|\psi_i\rangle|0\rangle \quad , \quad \langle\alpha_j|\Psi_i^{\mathrm{SA}}\rangle = C_{ji}|\varphi_{j|i}\rangle \ ,$$

donde $|\varphi_{j|i}\rangle$ es un vector normalizado del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathrm{S}}$ del sistema y $C_{ji} \geqslant 0$.

   (a) Muestre que $C_{ji}^2 = P_{j|i}$ y que $|\varphi_{j|i}\rangle$ es el estado del sistema después de la medición con el resultado j sabiendo que el estado inicial es $|\psi_i\rangle$.

   (b) Usando la condición de no ambigüedad $P_{1|2} = P_{2|1} = 0$, muestre que

$$\langle\Psi_1^{\mathrm{SA}}|\Psi_2^{\mathrm{SA}}\rangle = \sqrt{P_{0|1}P_{0|2}}\,\langle\varphi_{0|1}|\varphi_{0|2}\rangle \ .$$

   (c) Deduzca que

$$P_{0|1}P_{0|2} \geqslant \cos^2\theta \quad \text{con} \quad \cos\theta = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle| \ ,$$

   y que la desigualdad es una igualdad si y sólo si $|\varphi_{0|2}\rangle$ coincide con $|\varphi_{0|1}\rangle$ módulo un factor de fase.

3. Muestre que si $\sqrt{p_2/p_1}\cos\theta \leqslant 1$ y $\sqrt{p_1/p_2}\cos\theta \leqslant 1$, luego la probabilidad mínima del resultado inconclusivo está dada por

$$Q_0^{\mathrm{opt}} = \min_{P_{0|1}\in[\cos^2\theta,1]}\left\{p_1P_{0|1} + p_2\frac{\cos^2\theta}{P_{0|1}}\right\} = 2\sqrt{p_1p_2}\,|\langle\psi_1|\psi_2\rangle| \ .$$

4. Similarmente, halle el mínimo de Q_0 en los casos $\sqrt{p_2/p_1}\cos\theta \leqslant 1$ y $\sqrt{p_1/p_2}\cos\theta \leqslant 1$.

[1] Cabe notar que los $|\widetilde{\psi}_i^*\rangle$ de norma 1 en general.