cerrado. Entonces $R(A)$ es cerrado en Y si y sólo si existe $C > 0$ tal que:

$$\operatorname{dist}(u, N(A)) \leq C \, \| A(u) \| \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A). \tag{3.20}$$

Notar que si $N(A) = \{\theta\}$ entonces $\operatorname{dist}(u, N(A)) = \| u \|$, y en tal caso (3.20) se convierte en la caracterización particular dada por el Teorema 3.15.

Otro resultado de caracterización de operadores con rango cerrado, el cual se sigue del Teorema 3.17 y del Teorema de la Aplicación Abierta (cf. Teorema 3.9), está dado por el siguiente lema.

Lema 3.25 *Sean X e Y espacios de Banach y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *$R(A)$ es cerrado.*

ii) *existe $\alpha > 0$ tal que para cada $y \in R(A)$ existe $z \in X$ tal que*

$$y = A(z) \qquad y \qquad \alpha \, \|z\| \, \leq \, \|y\| \, .$$

Demostración. Supongamos que i) es válido. Puesto que Y es Banach, se tiene que $R(A)$ también lo es, y por lo tanto podemos aplicar el Teorema 3.9 al operador $A \in \mathcal{L}\big(X, R(A)\big)$. Se sigue de ello que existe $r > 0$ tal que $B_Y(\theta, r) \subseteq A\big(B_X(\theta, 1)\big)$. Luego, dados $y \in R(A)$, $y \neq \theta$, se tiene claramente que $\frac{r}{2} \frac{y}{\|y\|} \in B_Y(\theta, r)$, de modo que utilizando la inclusión anterior se deduce que existe $x \in B_X(\theta, 1)$ tal que $A(x) = \frac{r}{2} \frac{y}{\|y\|}$. Así, denotando $z = \frac{2\|y\|}{r} x$, resulta $A(z) = y$ y $\|z\| \leq \frac{2}{r} \|y\|$, lo cual prueba i) con $\alpha = \frac{r}{2}$. Recíprocamente, supongamos ii) válido. Entonces, dado $x \in X$ tal que $A(x) \neq \theta$, se tiene por hipótesis que existe $z \in X$ tal que $A(x) = A(z)$ y $\alpha \, \|z\| \leq \|A(x)\|$. Luego, usando que $x - z \in N(A)$, se sigue que

$$\|A(x)\| \, \geq \, \alpha \, \|z\| \, = \, \alpha \, \|x - (x - z)\| \, \geq \, \alpha \operatorname{dist}\big(x, N(A)\big) \, ,$$

lo cual, gracias al Teorema 3.17, implica que $R(A)$ es cerrado. □

El siguiente lema, relacionado con el anterior, hace uso del concepto de espacio de Banach reflexivo, para lo cual referimos a la Sección 6.1 y al operador $\mathcal{J}$ que se define allí. Alternativamente, la definición de reflexividad también se explica un poco más adelante en la Sección 3.12.1.

Lema 3.26 *Sean X e Y espacios de Banach y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ sobreyectivo. Entonces existe $\alpha > 0$ tal que*

i) *para cada $y \in R(A) = Y$ existe $z \in X$ tal que $A(z) = y$ y $\alpha \, \|z\| \, \leq \, \|y\|$, lo cual implica que*

ii) $\|A'(G)\|_{X'} \, \geq \, \alpha \, \|G\|_{Y'} \qquad \forall\, G \in Y'$.

Recíprocamente, si X es reflexivo, i) *se sigue de* ii) *con la misma constante α.*

Demostración. La sobreyección de A garantiza obviamente que $R(A)$ es cerrado, de modo que aplicando Lemma 3.25 se deduce la existencia de una constante $\alpha > 0$ con la cual se verifica i). Luego, para cada $y \in Y$, $y \neq \theta$, se tiene que existe $z \in X$ tal que $A(z) = y$ y $\alpha \|z\| \leq \|y\|$, gracias a lo cual, dado $G \in Y'$, se obtiene

$$\frac{|G(y)|}{\|y\|} = \frac{|G\big(A(z)\big)|}{\|y\|} = \frac{|A'(G)(z)|}{\|y\|} \leq \frac{1}{\alpha} \|A'(G)\| ,$$

y por lo tanto se concluye fácilmente que

$$\|G\| = \sup_{\substack{y \in Y \\ y \neq \theta}} \frac{|G(y)|}{\|y\|} \leq \frac{1}{\alpha} \|A'(G)\| ,$$

lo cual prueba ii). Recíprocamente, supongamos que X es reflexivo y que ii) es válido con una constante $\alpha > 0$. Equivalentemente, ello significa, en virtud del Teorema 3.15, que $A' \in \mathcal{L}(Y', X')$ es inyectivo y de rango cerrado, y en consecuencia $R(A') = N(A)^\circ$. Se sigue de esta identidad y de ii) que $A' : Y' \longrightarrow N(A)^\circ$ es biyectivo y que $\|(A')^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$. Además, $A'' : \big(N(A)^\circ\big)' \longrightarrow Y''$ también es biyectivo y

$$\|(A'')^{-1}\| = \|\big((A')^{-1}\big)'\| = \|(A')^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha} .$$

Ahora, dado $y \in Y$, consideramos $\mathcal{J}_Y(y) \in Y''$, para el cual existe $\mathcal{F}_0 \in \big(N(A)^\circ\big)'$ tal que $A''(\mathcal{F}_0) = \mathcal{J}_Y(y)$. Puesto que $N(A)^\circ$ es un subespacio cerrado de X', el Teorema de Hahn-Banach para espacios normados (cf. Teorema 2.6) garantiza que existe $\mathcal{F} \in X''$ tal que $\mathcal{F}\big|_{N(A)^\circ} = \mathcal{F}_0$ y $\|\mathcal{F}\|_{X''} = \|\mathcal{F}_0\|_{(N(A)^\circ)'}$. Entonces, denotando $z = J_X^{-1}(\mathcal{F}) \in X$, se tiene para cada $G \in Y'$

$$\begin{aligned} G(y) &= \mathcal{J}_Y(y)(G) = A''(\mathcal{F}_0)(G) = (A')'(\mathcal{F}_0)(G) = \mathcal{F}_0(A'(G)) \\ &= \mathcal{F}(A'(G)) = \mathcal{J}_X(z)(A'(G)) = A'(G)(z) = G(A(z)) , \end{aligned}$$

de donde se sigue, gracias a la consecuencia del Teorema de Hahn-Banach dada por Lema 2.3, que $y = A(z)$. Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned} \|z\| &= \|\mathcal{J}_X(z)\| = \|\mathcal{F}\|_{X''} = \|\mathcal{F}_0\|_{(N(A)^\circ)'} \\ &= \|(A'')^{-1}(\mathcal{J}_Y(y))\|_{(N(A)^\circ)'} \leq \|(A'')^{-1}\| \, \|y\| \leq \frac{1}{\alpha} \|y\| , \end{aligned}$$

lo cual completa i) y termina la demostración. $\square$

Dentro del contexto de operadores con rango cerrado es importante establecer también que esta propiedad se traspasa al adjunto de un operador. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado.