

7

Universidad de Concepción
 Doctorado en Ciencias Aplicadas con Mención en Ingeniería Matemática
 Centro de Investigaciones en Ingeniería Matemática
 Curso: Tópicos de Elementos Finitos I
 Prof: Gabriel Gatica
 Estudiante: Isaac Bermúdez Montiel
 II Ciclo 2022
Solución de Tarea #4

Lemma 1. Dado un entero $m \geq 0$ y $t \in (1, +\infty)$:

i) $v \in W^{m,t}(K) \Rightarrow \hat{v} := v \circ T_K \in W^{m,t}(\hat{K})$ y

$$|\hat{v}|_{m,t;\hat{K}} \leq \hat{C} \|B_K\|^m |\det B_K|^{-1/t} |v|_{m,t;K} \quad (0.1)$$

con \hat{C} independiente de K .

ii) $\hat{v} \in W^{m,t}(\hat{K}) \Rightarrow v := \hat{v} \circ T_K^{-1} \in W^{m,t}(K)$ y

$$|v|_{m,t;K} \leq C \|B_K^{-1}\|^m |\det B_K|^{1/t} |\hat{v}|_{m,t;\hat{K}} \quad (0.2)$$

con C independiente de K .

Proof. Recordemos que $W^{m,t}(\Omega) = \{z \in L^t(\Omega) : \partial^\alpha z \in L^t(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| = m\}$.

Se usará que $C^m(\bar{K})$ es denso en $W^{m,t}(K)$. Entonces, dado un $v \in C^m(\bar{K})$ y un multi-índice α , $|\alpha| = m$, tenemos que $\hat{v} := v \circ T_K \in C^m(\hat{K})$ y además,

$$\partial^\alpha \hat{v}(\hat{x}) = D^m \hat{v}(\hat{x})(e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_m}) \quad \forall \hat{x} \in \hat{K}.$$

donde $\{e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_m}\} \subseteq \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, la base canónica de \mathbb{R}^n .

Se sigue que

$$|\partial^\alpha \hat{v}(\hat{x})| = |D^m \hat{v}(\hat{x})(e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_m})| \leq \sup_{\substack{\|\xi_i\| \leq 1 \\ i \in \{1, \dots, m\}}} |D^m \hat{v}(\hat{x})(\xi_1, \dots, \xi_m)| := \|D^m \hat{v}(\hat{x})\|.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |\hat{v}|_{m,t;\hat{K}}^t &= \int_{\hat{K}} |\partial^\alpha \hat{v}(\hat{x})|^t d\hat{x} \\ &\leq \sum_{|\alpha|=m} \int_{\hat{K}} \|D^m \hat{v}(\hat{x})\|^t d\hat{x} \\ &\leq C(m, n) \int_{\hat{K}} \|D^m \hat{v}(\hat{x})\|^t d\hat{x} \end{aligned} \quad (0.3)$$

donde $C(m, n) := \text{card } \{\alpha : |\alpha| = m\}$.

Ahora, puesto que $\hat{v} = v \circ T_K$ y $D T_K(\hat{x}) = B_K$, $\forall \hat{x} \in \mathbb{R}^n$, por regla de la cadena, para todo $(\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$

$$D^m \hat{v}(\hat{x})(\xi_1, \dots, \xi_m) = D^m v(T_K(\hat{x}))(B_K \xi_1, \dots, B_K \xi_m),$$

denotando $x = T_K(\hat{x})$

$$\begin{aligned} \|D^m \hat{v}(\hat{x})\| &= \sup_{\substack{\|\xi_i\| \leq 1 \\ i \in \{1, \dots, m\}}} |D^m \hat{v}(\hat{x})(\xi_1, \dots, \xi_m)| \\ &= \sup_{\substack{\|\xi_i\| \leq 1 \\ i \in \{1, \dots, m\}}} |D^m v(x)(B_K \xi_1, \dots, B_K \xi_m)| \\ &= \|B_K\|^m \sup_{\substack{\|\xi_i\| \leq 1 \\ i \in \{1, \dots, m\}}} |D^m v(x)\left(\frac{B_K}{\|B_K\|} \xi_1, \dots, \frac{B_K}{\|B_K\|} \xi_m\right)| \end{aligned}$$

notando que $h_i = \frac{B_K}{\|B_K\|} \xi_i$ es tal que $\|h_i\| \leq 1$ obtenemos que

$$\|D^m \hat{v}(\hat{x})\| \leq \|B_K\|^m \sup_{\substack{\|h_i\| \leq 1 \\ i \in \{1, \dots, m\}}} |D^m v(x)(h_1, \dots, h_m)| = \|B_K\|^m \|D^m v(x)\| \quad (0.4)$$

De (0.3) y (0.4) se tiene que

$$\begin{aligned} |\hat{v}|_{m,t;\hat{K}}^t &\leq C(m,n) \|B_K\|^{tm} \int_{\hat{K}} \|D^m \hat{v}(\hat{x})\|^t d\hat{x} \\ &= C(m,n) \|B_K\|^{tm} |\det B_K|^{-1} \int_K \|D^m v(x)\|^t dx \end{aligned}$$

Por último,

$$\|D^m v(x)\| = \sup_{\substack{\|h_i\| \leq 1 \\ i \in \{1, \dots, m\}}} |D^m v(x)(h_1, \dots, h_m)|$$

$$\text{con } h_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \vec{e}_j$$

$$\begin{aligned} |D^m v(x)(h_1, \dots, h_m)| &= \left| D^m v(x) \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \vec{e}_j, \dots, \sum_{j=1}^n \alpha_{mj} \vec{e}_j \right) \right| \\ &\leq \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_m=1}^n |D^m v(x)(\vec{e}_{j_1}, \dots, \vec{e}_{j_m})| \\ &\leq \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_m=1}^n \left(\max_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)| \right) \\ &= n^m \max_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)| \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\hat{v}|_{m,t;\hat{K}}^t &\leq C(m,n) \|B_K\|^{tm} |\det B_K|^{-1} \int_K n^{tm} \max_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)|^t dx \\ &\leq C(m,n) n^{tm} \|B_K\|^{tm} |\det B_K|^{-1} \int_K \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)|^t dx \end{aligned}$$

con lo cual se concluye que

$$|\hat{v}|_{m,t;\hat{K}} \leq C_1(m,n) \|B_K\|^m |\det B_K|^{-1/t} |v|_{m,t;K} \quad \forall v \in C^m(\bar{K}), \quad (0.5)$$

con C_1 independiente de K .

Análogamente, invirtiendo los roles de K y \hat{K} y usando que T_K^{-1} en vez de T_K se demuestra

$$|v|_{m,t;K} \leq C_2(m,n) \|B_K^{-1}\|^m |\det B_K|^{1/t} |\hat{v}|_{m,t;\hat{K}} \quad \forall \hat{v} \in C^m(\bar{\hat{K}}). \quad (0.6)$$

Similarmente, para cada $p \leq m$ se satisface que

$$|\hat{v}|_{p,t;\hat{K}} \leq C_1(p,n) \|B_K\|^p |\det B_K|^{-1/t} |v|_{p,t;K}$$

y

$$|v|_{p,t;K} \leq C_2(p,n) \|B_K^{-1}\|^p |\det B_K|^{1/t} |\hat{v}|_{p,t;\hat{K}},$$

$\forall v \in C^p(\bar{K})$ con $\hat{v} := v \circ T_K \in C^p(\hat{K})$.
Se sigue que existen constantes $C_i(m, n, B_K)$, $i \in \{1, 2\}$, tales que

$$C_1 \|\hat{v}\|_{m,t;\hat{K}} \leq \|v\|_{m,t;K} \leq C_2 \|\hat{v}\|_{m,t;\hat{K}} \quad \forall v \in C^m(\bar{K}). \quad (0.7)$$

Ahora, dado $v \in W^{m,t}(K)$, existe $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq C^m(\bar{K})$ tal que

$$\|v_j - v\|_{m,t;K} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. \quad (0.8)$$

Así, por (0.7),

$$\|\hat{v}_j - \hat{v}\|_{m,t;\hat{K}} \leq \|v_j - v\|_{m,t;K} \quad (0.9)$$

y por lo tanto, existe $\hat{v} \in W^{m,t}(\hat{K})$ tal que $\|\hat{v}_j - \hat{v}\|_{m,t;\hat{K}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

Más aún, veamos que \hat{v} es independiente de la sucesión $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. En efecto, sea $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ otra sucesión en $C^m(\bar{K})$ tal que $\|w_j - v\|_{m,t;K} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

Se sigue por (0.7) y (0.8) que

$$\begin{aligned} \|\hat{w}_j - \hat{v}\|_{m,t;\hat{K}} &\leq C_1^{-1} \|w_j - v\|_{m,t;K} \\ &\leq C_1^{-1} \|w_j - v\|_{m,t;K} + \|v - v_j\|_{m,t;K} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \hat{w}_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{v}_j = \hat{v} \text{ en } W^{m,t}(\hat{K})$$

Lo anterior define la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} W^{m,t}(K) &\longrightarrow W^{m,t}(\hat{K}) \\ v &\longrightarrow \hat{v} := v \circ T_K. \end{aligned}$$

Por último, tomando límite en la desigualdad (0.5) con $v = v_j$, esto es,

$$|\hat{v}_j|_{m,t;\hat{K}} \leq C_1(m, n) \|B_K\|^m |\det B_K|^{-1/t} |v_j|_{m,t;K} \quad \forall v \in C^m(\bar{K}), \quad (0.10)$$

se concluye que

$$|\hat{v}|_{m,t;\hat{K}} \leq \hat{C} \|B_K\|^m |\det B_K|^{-1/t} |v|_{m,t;K} \quad \forall v \in W^{m,t}(K). \quad (0.11)$$

De forma totalmente análoga se procede para concluir ii) para todo $\hat{v} \in W^{m,t}(\hat{K})$. □

Lemma 2. Dado un entero $m \geq 0$ y $t \in (1, +\infty)$:

i) $\tau \in W^{m,t}(K) \Rightarrow \hat{\tau} := |\det B_K| B_K^{-1} \tau \circ T_K \in W^{m,t}(\hat{K})$ y

$$|\hat{\tau}|_{m,t;\hat{K}} \leq \hat{C} \|B_K\|^m |\det B_K|^{1-t} |\tau|_{m,t;K} \quad (0.12)$$

con \hat{C} independiente de K .

ii) $\hat{\tau} \in W^{m,t}(\hat{K}) \Rightarrow \tau := |\det B_K|^{-1} B_K \hat{\tau} \circ T_K^{-1} \in W^{m,t}(K)$ y

$$|\tau|_{m,t;K} \leq C \|B_K\| \|B_K^{-1}\|^m |\det B_K|^{1/t-1} |\hat{\tau}|_{m,t;\hat{K}} \quad (0.13)$$

con C independiente de K .

Proof. Procediendo como en el Lema 1, se prueba para $\tau \in C^m(\bar{K})$, y luego se usa el mismo argumento de densidad pero ahora en el caso vectorial. En efecto, notar primer que para todo α se satisface que

$$\partial^\alpha \hat{\tau}(\hat{x}) = |\det B_K| B_K^{-1} \partial^\alpha (\tau \circ T_K)(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in \hat{K},$$

lo que da como resultado,

$$\|\partial^\alpha \hat{\tau}\|_{0,t;\hat{K}} \leq |\det B_K| \|B_K^{-1}\| \|\partial^\alpha (\tau \circ T_K)\|_{0,t;\hat{K}}$$

por lo tanto, sumando sobre todos los multi-índices α con $|\alpha| = m$ obtenemos que

$$|\hat{\tau}|_{m,t;\hat{K}} \leq |\det B_K| \|B_K^{-1}\| |\tau \circ T_K|_{m,t;\hat{K}}$$

y aplicando la estimación probada en el lema 1 a cada una de las componentes de $\tau \circ T_K$ se deduce que

$$\begin{aligned} |\hat{\tau}|_{m,t;\hat{K}} &\leq |\det B_K| \|B_K^{-1}\| \hat{C} \|B_K\|^m |\det B_K|^{-1/t} |\tau|_{m,t;K} \\ &= \hat{C} \|B_K^{-1}\| \|B_K\|^m |\det B_K|^{1-1/t} |\tau|_{m,t;K} \end{aligned} \quad (0.14)$$

lo cual prueba (0.13) para $\tau \in C^m(\bar{K})$. Análogamente, pero ahora invirtiendo los roles de K y \hat{K} y usando T_K^{-1} en vez de T_K se demuestra

$$|\tau|_{m,t;K} \leq C \|B_K\| \|B_K^{-1}\|^m |\det B_K|^{1/t-1} |\hat{\tau}|_{m,t;\hat{K}} \quad \forall \hat{\tau} \in C^m(\bar{K}) \quad (0.15)$$

Luego, al igual que la demostración para el lema 1, Similarmente, para cada $p \leq m$ se satisface que

$$|\hat{\tau}|_{p,t;\hat{K}} \leq \hat{C} \|B_K^{-1}\| \|B_K\|^p |\det B_K|^{1-1/t} |\tau|_{p,t;K}$$

y

$$|\tau|_{p,t;K} \leq C \|B_K\| \|B_K^{-1}\|^p |\det B_K|^{1/t-1} |\hat{\tau}|_{p,t;\hat{K}} \quad (0.16)$$

$\forall \tau \in C^p(\bar{K})$ con $\hat{\tau} := \tau \circ T_K \in C^p(\bar{K})$.

Se sigue que existen constantes $C_i(p, n, B_K)$, $i \in \{1, 2\}$, tales que

$$C_1 \|\hat{\tau}\|_{m,t;\hat{K}} \leq \|\tau\|_{m,t;K} \leq C_2 \|\hat{\tau}\|_{m,t;\hat{K}} \quad \forall \tau \in C^m(\bar{K}). \quad (0.17)$$

Ahora, dado $\tau \in W^{m,t}(K)$, existe $\{\tau_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq C^m(\bar{K})$ tal que

$$\|\tau_j - \tau\|_{m,t;K} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. \quad (0.18)$$

Así, por (0.17),

$$\|\hat{\tau}_j - \hat{\tau}\|_{m,t;\hat{K}} \leq \|\tau_j - \tau\|_{m,t;K} \quad (0.19)$$

y por lo tanto, existe $\hat{\tau} \in W^{m,t}(\hat{K})$ tal que $\|\hat{\tau}_j - \hat{\tau}\|_{m,t;\hat{K}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

Más aún, veamos que $\hat{\tau}$ es independiente de la sucesión $\{\tau_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. En efecto, sea $\{\sigma_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ otra sucesión en $C^m(\bar{K})$ tal que $\|\sigma_j - \tau\|_{m,t;K} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

Se sigue por (0.17) y (0.18) que

$$\begin{aligned} \|\hat{\sigma}_j - \hat{\tau}_j\|_{m,t;\hat{K}} &\leq C_1^{-1} \|\sigma_j - \tau_j\|_{m,t;K} \\ &\leq C_1^{-1} \|\sigma_j - \tau\|_{m,t;K} + \|\tau - \tau_j\|_{m,t;K} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{\tau}_j = \hat{\tau} \text{ en } W^{m,t}(\hat{K})$$

Lo anterior define la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}^{m,t}(K) &\longrightarrow \mathbf{W}^{m,t}(\hat{K}) \\ \tau &\longrightarrow \hat{\tau} := |\det B_K|^{-1} B_K \tau \circ T_K^{-1}.\end{aligned}$$

Por último, tomando límite en la desigualdad (0.20) con $\tau = \tau_j$, esto es,

$$|\hat{\tau}_j|_{m,t;\hat{K}} \leq \hat{C} \|B_K^{-1}\| \|B_K\|^m |\det B_K|^{1-1/t} |\tau_j|_{m,t;K} \quad (0.20)$$

se concluye que

$$|\hat{\tau}|_{m,t;\hat{K}} \leq \hat{C} \|B_K^{-1}\| \|B_K\|^m |\det B_K|^{1-1/t} |\tau|_{m,t;K} \quad \forall \tau \in \mathbf{W}^{m,t}(K). \quad (0.21)$$

De forma totalmente análoga se procede para concluir *ii)* para todo $\hat{\tau} \in \mathbf{W}^{m,t}(\hat{K})$. ✓ □

Theorem 1. Dados $\tau \in \mathbf{W}^{1,t}(K)$ y $\psi \in W^{1,t'}(K)$ con $t, t' \in (1, +\infty)$ se tiene

a)

$$\int_{\hat{K}} \hat{\tau} \cdot \nabla \hat{\psi} = \int_K \tau \cdot \nabla \psi, \quad (0.22)$$

b)

$$\int_{\hat{K}} \hat{\psi} \operatorname{div}(\hat{\tau}) = \int_K \psi \operatorname{div}(\tau) \quad (0.23)$$

c)

$$\int_{\partial \hat{K}} \hat{\psi} \hat{\tau} \cdot \nu_K = \int_{\partial K} \psi \tau \cdot \nu_K \quad (0.24)$$

Proof. Notar primero que, usando la regla de la cadena,

$$D\psi(\hat{x})(\hat{y}) = D\psi(T_K(\hat{x}))(B_K \hat{y}),$$

y luego,

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}_j}(\hat{x}) := D\psi(\hat{x})(\vec{e}_j) = D\psi(T_K(\hat{x}))(b_{K,j}),$$

donde $b_{K,j}$ es la j-ésima columna de B_K . Se sigue que

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}_j}(\hat{x}) = \nabla \psi(T_K(\hat{x})) \cdot b_{K,j} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

esto es,

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}_j}(\hat{x}) = b_{K,j}^t \nabla \psi(T_K(\hat{x})) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

de donde

$$\nabla \hat{\psi}(\hat{x}) = B_K^t \nabla \psi(T_K(\hat{x})) \quad \forall \hat{x} \in \hat{K}. \quad \text{spanish}$$

Así, empleando la fórmula de cambio de variable obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{K}} \hat{\tau} \cdot \nabla \hat{\psi} &= \int_{\hat{K}} |\det B_K| B_K^{-1} \tau \circ T_K \cdot B_K^t \nabla \psi \circ T_K \\
&= \int_K B_K^{-1} \tau \cdot B_K^t \nabla \psi \\
&= \int_K (\nabla \psi)^t B_K B_K^{-1} \tau \\
&= \int_K (\nabla \psi)^t \tau \\
&= \int_K \tau \cdot \nabla \psi,
\end{aligned}$$

lo cual prueba a).

Por otro lado, de la regla de la cadena, encontramos para $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ que

$$D\hat{\tau}(\hat{x})(\hat{y}) = |\det B_K| B_K^{-1} D\tau(T_K(\hat{x}))(DT_K(\hat{x})(\hat{y})),$$

En particular, si $\hat{y} = \vec{e}_j$, entonces obtenemos

$$\frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \hat{x}_j}(\hat{x}) := |\det B_K| B_K^{-1} \nabla \tau(T_K(\hat{x})) b_{K,j}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\},$$

donde $b_{K,j}$ es la j-ésima columna de B_K . Obtenemos que

$$\nabla \hat{\tau}(\hat{x}) = |\det B_K| B_K^{-1} \nabla \tau(T_K(\hat{x})) B_K$$

Por tanto, usando que $\text{tr}(B_K^{-1} T B_K) = \text{tr}(T)$, se deduce que

$$\begin{aligned}
\text{div } \hat{\tau}(\hat{x}) &= \text{tr } \nabla \hat{\tau}(\hat{x}) = |\det B_K| \text{tr } \nabla \tau(T_K(\hat{x})) \\
&= |\det B_K| \text{div } \tau(T_K(\hat{x})) \quad \forall \hat{x} \in \hat{K},
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\text{div } \hat{\tau} = |\det B_K| \text{div } \tau \circ T_K \in \hat{K},$$

De este modo, usando nuevamente la fórmula de cambio de variable encontramos que

$$\int_{\hat{K}} \hat{\psi} \text{div}(\hat{\tau}) = \int_{\hat{K}} \psi \circ T_K |\det B_K| \text{div } \tau \circ T_K = \int_K \psi \text{div}(\tau), \tag{0.25}$$

esto prueba b).

Finalmente, integrando por partes y utilizando a) y b) se concluye que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial \hat{K}} \hat{\psi} \hat{\tau} \cdot \nu_K &= \int_{\hat{K}} \hat{\tau} \cdot \nabla \hat{\psi} + \int_{\hat{K}} \hat{\psi} \text{div}(\hat{\tau}) \\
&= \int_K \tau \cdot \nabla \psi + \int_K \psi \text{div}(\tau) \\
&= \int_{\partial K} \psi \tau \cdot \nu_K,
\end{aligned}$$

lo que completa la prueba. □

Lemma 3. Sea $\tau \in \mathbf{W}^{1,t}(K)$ y $\psi \in L^{t'}(\partial K)$. Entonces

$$\int_{\partial \hat{K}} \hat{\psi} \hat{\tau} \cdot \nu_K = \int_{\partial K} \psi \tau \cdot \nu_K$$

Proof. Recordemos que para todo $\varphi \in W^{1-1/t', t'}(\partial K)$ (espacio de trazas de $W^{1, t'}(K)$) existe $w \in W^{1, t'}(K)$ tal que $\gamma_{t'}(w) = \varphi$ en ∂K . Por lo tanto, usando la fórmula de Green en K ,

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \varphi \tau \cdot \nu_K &= \int_K \nabla w \cdot \tau + \int_K w \operatorname{div}(\tau) \quad \forall \tau \in \mathbf{W}^{1,t}(K), \\ &= \int_{\hat{K}} \nabla \hat{w} \cdot \hat{\tau} + \int_{\hat{K}} \hat{w} \operatorname{div}(\hat{\tau}) \quad (\text{Por a) y b) del Lemma anterior}), \\ &= \int_{\partial \hat{K}} \hat{\varphi} \hat{\tau} \cdot \nu_K \quad \forall \hat{\tau} \in \mathbf{W}^{1,t}(\hat{K}), (\text{Por Green en } \hat{K}), \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esto, dado $\psi \in L^{t'}(\partial K)$, por densidad, existe $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq W^{1-1/t', t'}(\partial K)$ tal que $\|\psi_j - \psi\|_{0, t'; \partial K} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

Por lo cual, usando esto y la identidad anterior se tiene que

$$\int_{\partial K} \psi \tau \cdot \nu_K = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\partial K} \psi_j \tau \cdot \nu_K = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\partial \hat{K}} \hat{\psi}_j \hat{\tau} \cdot \nu_K = \int_{\partial \hat{K}} \hat{\psi} \hat{\tau} \cdot \nu_K$$

lo cual demuestra la igualdad para todo $\psi \in L^{t'}(\partial K)$ y $\tau \in \mathbf{W}^{1,t}(K)$. □