Análisis Numérico II: Álgebra Lineal Numérica (525441), S1-2025
Listado **5**
Profesora: Mónica Selva
DIM - CFM

Listado 5: Descomposición de Cholesky de una matriz hermitiana y definida positiva.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía.
Los problemas en la sección **Test <número>**, si existe, deben ser entregados en Canvas, tenga en cuenta que hay una fecha tope para ello. Los tests deben resolverse de manera individual, no es obligatorio entregarlos.

1. Problemas

1. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermitiana y definida positiva. Demuestre que la descomposición de Cholesky de A es única.

   Sugerencia: Para realizar esta demostración puede proceder de distintas maneras:

   (a) En clase demostramos de dos modos la existencia de la descomposición de Cholesky de A, partiendo de la descomposición LU de A y escribiendo a A como una matriz en bloque y calculando su descomposición de Cholesky de manera recursiva (equivalente a utilizar inducción). Puede modificar una de estas dos demostraciones para demostrar unicidad de la descomposición de Cholesky.

   (b) También puede suponer que existen matrices triangulares inferiores $L_1, L_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con elementos reales positivos en diagonal principal que satisfacen $A = L_1L_1^* = L_2L_2^*$ y demostrar, utilizando propiedades de las matrices L_1 y L_2 y sus inversas, que ellas tienen que ser iguales.

2. (*Descomposición de Cholesky*)

   Encuentre la factorización (o descomposición) de Cholesky de la matriz

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. (*Descomposición de Cholesky*)

   Considere

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

   (a) Demuestre que A es simétrica y definida positiva.

   (b) Determine la descomposición de Cholesky de A.

   (c) Compruebe su resultado con el que se obtiene con el comando `chol(A)` en MATLAB.

4. (*Descomposición de Cholesky*)

   Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica, definida positiva y tridiagonal. Demuestre que si LL^{T} es la factorización de Cholesky de A, la matriz L también es tridiagonal.

5. **(A)** (*Descomposición de Cholesky*)

   (a) Sea $E = I + uu^{\mathrm{T}}$, donde I es la matriz identidad de orden n y $u \in \mathbb{R}^n - \{\theta\}$. Demuestre que E es simétrica y definida positiva y determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que

$$I + \alpha\, uu^{\mathrm{T}} = E^{-1}.$$

(b) Sean $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y definida positiva y $A = B + ww^{\mathrm{T}}$ con $w \in \mathbb{R}^n - \{\theta\}$. Suponga que LL^{T} es la descomposición de Cholesky de B. Determine para qué vector $v \in \mathbb{R}^n$ A puede escribirse como

$$L(I + vv^{\mathrm{T}})L^{\mathrm{T}}.$$

(c) Sea $b \in \mathbb{R}^n$. Se desea resolver el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, siendo A la matriz del ítem anterior. Proponga un algoritmo para determinar x conociendo la matriz L de la descomposición de Cholesky de B y sin calcular una nueva factorización de A, sino utilizando la estructura de A del ítem anterior.

6. **(A)** (*Descomposición de Cholesky*)

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y definida positiva. Suponga que $A = LL^{\mathrm{T}}$ es la descomposición de Cholesky de A. Sean además $a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tales que la matriz

$$A_+ = \begin{pmatrix} A & a \\ a^{\mathrm{T}} & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

es definida positiva.

(a) Demuestre que $\alpha > \|L^{-1}a\|_2^2$.

(b) Determine la descomposición de Cholesky de A_+, es decir, determine una matriz L_+, triangular inferior tal que $L_+L_+^{\mathrm{T}} = A_+$.

(c) Explique cómo determinar L_+ después de calcular L.

2. Test 5:

Para terminar la demostración de la existencia de la descomposición de Cholesky para una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitiana y definida positiva de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & w^* \\ w & B \end{pmatrix},$$

necesitamos demostrar que si A es hermitiana y definida positiva, la matriz

$$B - \frac{1}{\alpha}(ww^*)$$

también lo es. Un resultado similar se demostró en la ayudantía del 8 de abril. Deben adaptar esa demostración al caso en que los coeficientes de A son números complejos.

Forma de entrega: cargando archivos a tarea con nombre **Test 5** en Canvas.

Fecha de entrega: domingo 20 de abril, 23:59 hrs.