Listado 1: Normas en espacios vectoriales.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía.
Los problemas en la sección **Test <número>**, si existe, deben ser entregados en Canvas, tenga en cuenta que hay una fecha tope para ello. Los tests deben resolverse de manera individual, no es obligatorio entregarlos.

1. Problemas

1. Sean $p \in [1, +\infty[$ y $x \in \mathbb{C}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

   Demuestre que

   $$x \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

   es una norma en $\mathbb{C}^n$.

   Observación: La función definida es la norma p de un vector de $\mathbb{C}^n$ y se denota por $\| \cdot \|_p$. Demostrar que esta función satisface la desigualdad triangular, $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, no es sencillo, pueden revisar la demostración en libro de T. Lyche (ver syllabus del curso), sección 8.4, páginas 185 a 188.

2. **(A)** En clase se demostró que cualquier norma de $\mathbb{C}^n$ es equivalente a $\| \cdot \|_\infty$ (norma infinito en $\mathbb{C}^n$). Demuestre que este resultado permite concluir que cualquier par de normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes.

3. Demuestre que si V es un espacio vectorial normado con dimensión finita, entonces todas las normas en V son equivalentes.

4. Demuestre que para todo $x \in \mathbb{C}^n$:

   (a) **(A)** $\|x\|_2 \leq \sqrt{\|x\|_1 \|x\|_\infty}$.

   (b) **(A)** $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$.

   (c) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$.

   (d) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.

5. **(A)** Sea $x \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que

   $$\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

6. Calcule $\|A\|_F$ y $\|A\|_p$ con $p \in \{1, 2, \infty\}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}$.

7. Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ con $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Demuestre que:

   (a) La norma matricial $\|A\|_S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ es consistente.

   (b) La norma matricial $\|A\|_M = \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \{|a_{ij}|\}$ no es consistente.

   (c) La norma matricial $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ es consistente.

   Observación: Para demostrar que $\|\cdot\|_M$ no es consistente puede buscar matrices A, B tales que $\|AB\|_M > \|A\|_M \|B\|_M$.

8. Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ tal que
$$\forall\, z \in \mathbb{C}^n \;:\; f(z) = \|Az\|,$$
siendo A una matriz con m filas, n columnas y coeficientes complejos y $\|\cdot\|$, una norma en $\mathbb{C}^m$. Muestre que f es continua en $\mathbb{C}^n$.

9. Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Demuestre que
$$\|A\|_p = \max_{x\in\mathbb{C}^n, \|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$
cumple las propiedades de una norma.

10. Sean $a \in \mathbb{C}^m$, $b \in \mathbb{C}^n$. Calcule $\|ab^*\|_1$, $\|ab^*\|_\infty$, $\|ab^*\|_2$. Cada uno de estos valores puede expresarse en términos de normas de a y b.

11. **(A)** Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Demuestre que
$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

12. Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, no singular y $\|\cdot\|$ una norma matricial inducida por una norma vectorial. Demuestre que
$$\left\|A^{-1}\right\| = \frac{1}{\min_{x\neq\theta} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}}.$$

13. Sean $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices unitarias. Demuestre que
    (a) $\|U\|_2 = 1$.
    (b) Para todo $x \in \mathbb{C}^m$, $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$.
    (c) Para toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se cumple que $\|UA\|_2 = \|AV\|_2 = \|A\|_2$.
    (d) Para toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se cumple que
$$\|UA\|_F = \|AV\|_F = \|A\|_F.$$

    Observación: Una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es unitaria si satisface $U^*U = I$, donde U^* es la conjugada transpuesta de U.

    Las propiedades $13c$ y $13d$ indican que las normas matriciales 2 y Frobenius son *unitariamente invariantes*. Una norma matricial $\|\cdot\|$ es unitariamente invariante si para toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ocurre que $\|A\|$ no cambia al pre- o post-multiplicar A por matrices unitarias.

14. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Demuestre que
    (a) $\|A\|_1 = \|A^*\|_\infty$.
    (b) **(A)** $\|A\|_F = (\operatorname{tr}(A^*A))^{\frac{1}{2}}$.
    (c) **(A)** para todo $x \in \mathbb{C}^n$ se cumple que $\|Ax\|_2 \le \sqrt{mn}\|A\|_M\|x\|_2$.
    (d) $\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{mn}\|A\|_M$.
    (e) si $m = n$, entonces para todo $p \in [1, +\infty[$ se cumple que $n^{-\frac{1}{p}}\|A\|_\infty \le \|A\|_p \le n^{\frac{1}{p}}\|A\|_\infty$.
    (f) si $m = n$, $n^{-\frac{1}{2}}\|A\|_2 \le \|A\|_1 \le n^{\frac{1}{2}}\|A\|_2$.

    Observación: $\|\cdot\|_M$ es la norma que definimos en clases a partir de la norma infinito de vectores
$$\|A\|_M = \max_{i,j} |a_{ij}|$$
    si $A = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$.

15. **(A)** Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Considere las siguientes normas en $\mathbb{C}^{m\times n}$,

$$\|A\|_M = \max_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} |a_{ij}|, \qquad \|A\|_S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

   (a) Determine constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$ de modo que para cualquier $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se cumpla

$$C_1\|A\|_M \leq \|A\|_S \leq C_2\|A\|_M.$$

   (b) En un problema anterior se demostró que $\|\cdot\|_S$ es consistente y $\|\cdot\|_M$ no lo es. Determine $\kappa \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\|A\|_* = \kappa\|A\|_M$$

   sea una norma matricial consistente.

16. **(A)** Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

   (a) Demuestre que si $m = n$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ es valor propio de A, entonces $\|A\| \geq |\lambda|$, siendo $\|\cdot\|$ una norma matricial inducida por una norma vectorial.

   (b) Argumente por qué si $m = n$ y $\|\cdot\|$ es una norma matricial inducida por una norma vectorial podemos asegurar $\|A\| \geq \rho(A)$.

   (c) Demuestre que $\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1\|A\|_\infty$.

   Observación: Para todo matriz cuadrada A,

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \,:\, \lambda \text{ es valor propio de } A\}.$$

17. **(A)** Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz diagonal, entonces para todo número real $p \in [1, +\infty[$ se cumple que $\|A\|_p = \rho(A)$, donde $\rho(A)$ es el radio espectral de A.

2. Test 1

Forma de entrega: cargando archivos MATLAB a tarea con nombre **Test 1** en Canvas.
Fecha de entrega: domingo 23 de marzo, 23:59 hrs.

1. Escriba un programa en MATLAB (o PYHTON o JULIA) que muestre los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{S}_p := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|x\|_p = 1\right\}, \qquad p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \infty\}.$$

   - No grafique los elementos de S_p como vectores de $\mathbb{R}^2$, sino como puntos.
   - Los conjuntos deben mostrarse en la misma ventana, con colores distintos.
   - Se debe mostrar una leyenda para diferenciarlos.
   - Los gráficos no se deben ver distorsionados, por ejemplo, S_2 debe verse como una circunferencia.

2. Escriba un segundo programa en el que, dada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

   (a) grafique, en una ventana distinta cada conjunto, los conjuntos

$$\mathcal{C}_1 = \{Ax \,:\, x \in S_1\} \cup S_1, \quad \mathcal{C}_2 = \{Ax \,:\, x \in S_2\} \cup S_2, \quad \mathcal{C}_\infty = \{Ax \,:\, x \in S_\infty\} \cup S_\infty.$$

   (b) ¿Cómo relaciona estos gráficos con las normas 1, 2 e infinito de A?