Elementos Finitos Mixtos

Tarea 1

Juan Pablo Silva Gutiérrez

2.23

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave Γ, y sean:

$$H = \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega) := \{\tau \in [L^2(\Omega)]^{N\times N} : \mathbf{div}\,\tau \in [L^2(\Omega)]^N\} \text{ y } Q := [L^2(\Omega)]^N,$$

los espacios de Hilbert con productos interiores y normas inducidas dentoadas, respectivamente, por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{div},\Omega}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{0,\Omega}$. Considere el operador $P(\sigma) = \bar{\sigma}$ donde $(\bar{\sigma}, u) \in H \times Q$ es solución del problema:

$$\begin{array}{rll} \int_\Omega \bar{\sigma} : \tau + \int_\Omega \bar{u}\cdot \mathbf{div}\,\tau & = 0 & \forall \tau \in H \\ \int_\Omega v \cdot \mathbf{div}\bar{\sigma} & = \int_\Omega v\cdot \mathbf{div}\sigma & \forall v \in Q \end{array}$$

- a) Aplique la teoria de Babuška-Brezzi para demostrar que P esta bien definido y que $P \in \mathcal{L}(X)$:

  Solución:
  Para aplicar el teorema definimos los operadores:

  $$a(\sigma,\tau) := \int_\Omega \sigma : \tau$$
  $$b(\sigma, v) := \int_\Omega \mathbf{div}\,\sigma \cdot v$$
  $$F(v) := \int_\Omega v \cdot \mathbf{div}\,\sigma$$

  Con esto decimos que $\bar{\sigma}$ es solución del problema:

  $$\begin{array}{rcrll} a(\bar{\sigma},\tau) & + & b(\tau,\bar{u}) & = 0 & \forall \tau \in H \\ & & b(\bar{\sigma}, v) & = F(v) & \forall v \in Q \end{array} \tag{1}$$

  Con esto buscamos el operador inducido por b, esto es $\mathbb{B} : H \to Q$, tal que, siendo $z \in H$ y $w \in Q$, se tiene que $\langle \mathbb{B}(z), w\rangle = b(z,w)$, entonces:

  $$\langle \mathbb{B}(z), w\rangle = b(z,w) = \int_\Omega \mathbf{div}\,z \cdot w = \langle \mathbf{div}\,z, w\rangle$$

  Es decir $\mathbb{B} = \mathbf{div}$ y $V := N(\mathbb{B}) = \{\tau \in H : \mathbf{div}\,\tau = 0\}$. Con esto ahora probaremos la "V-elipticidad"del operador a, sea $x \in V$, entonces:

  $$a(x,x) = \int_\Omega x : x = ||x||_{0,\Omega}$$

  Como $\mathbf{div}\,x = 0$, entonces $||\mathbf{div}\,x||_{0,\Omega} = 0$, entonces:

  $$||x||_{0,\Omega} = ||x||_{0,\Omega} + ||\mathbf{div}\,x||_{0,\Omega} = ||x||_{\mathbf{div};\Omega}$$

  Por lo tanto:

  $$a(x,x) \geq ||x||_{\mathbf{div};\Omega} \qquad \text{(En particular es igual)}$$

Es decir que a es "V-elíptica" con constante de elipiticidad igual a 1. Esto prueba la primera hipótesis necesaria aplicar el Teorema de Babuška-Brezzi (TBB).

Continuando con esto basta probar la sobreyectividad de $\mathbb{B}$. Como cada componente de el operador **div** es sobreyectivo, entonces $\mathbb{B}$ es sobreyectivo.

Por lo cual por TBB existe una unica solución del problema planteado, entonces para todo $\sigma \in H$, existe un unico $\bar{\sigma} \in H$, tal que $\bar{\sigma}$ resuelve el problema, por lo cual el operador P esta bien definido.

Siguiendo con el problema, probaremos que P es lineal:
Para esto sean $x, y \in H$ con $P(x) = \bar{x} \quad \wedge \quad P(y) = \bar{y} \quad$ y $\quad (\bar{x}, f), (\bar{y}, g) \in H \times Q$ solución del problema (1), si sumamos las primeras y las segundas ecuaciones, tenemos que:

$$\begin{array}{rcll} a(\bar{x}+\bar{y}, \tau) & + & b(\tau, f+g) & = 0 & \forall \tau \in H \\ & & b(\bar{x}+\bar{y}, v) & = \int_\Omega v \cdot \mathbf{div}(x+y) & \forall v \in Q \end{array}$$

Es decir que $\bar{x}+\bar{y}$ es solución de este problema y $P(x+y) = \bar{x}+\bar{y}$ entonces $P(x+y) = P(x+y)$. Si ahora tenemos $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces si multiplicamos las ecuaciones por λ tenemos que:

$$\begin{array}{rcll} a(\lambda\bar{x}, \tau) & + & b(\tau,) & = 0 & \forall \tau \in H \\ & & b(\lambda\bar{x}, v) & = \int_\Omega v \cdot \mathbf{div}(\lambda x) & \forall v \in Q \end{array}$$

Es decir que $P(\lambda x) = \lambda \bar{x} = \lambda P(x)$. Con lo cual podemos decir que el operador P es lineal.

Por otro lado por consecuencia del TBB tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$||P(\sigma)||_{\mathbf{div};\Omega} = ||\bar{\sigma}||_{\mathbf{div};\Omega} \leq C||\sigma||_{\mathbf{div};\Omega}$$

- b) Defina el subespacio cerrado de H dado por

$$V := \{\tau \in H : \mathbf{div}\tau = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\}$$

y pruebe que $V = N(P), \quad P^2 = P$, y $H = V \oplus R(P)$

Solución:
Sea $\sigma \in V$, entonces si planteamos el problema asociado, con $P(\sigma) = \bar{\sigma}$ al operador P tenemos que:

$$\begin{array}{rll} \int_\Omega \bar{\sigma} : \tau + \int_\Omega \bar{u} \cdot \mathbf{div}\,\tau & = 0 & \forall \tau \in H \\ \int_\Omega v \cdot \mathbf{div}\bar{\sigma} & = \int_\Omega v \cdot \mathbf{div}\sigma & \forall v \in Q \end{array}$$

Como $\mathbf{div}\,\sigma = 0$ entonces se tiene el problema:

$$\begin{array}{rll} \int_\Omega \bar{\sigma} : \tau + \int_\Omega \bar{u} \cdot \mathbf{div}\,\tau & = 0 & \forall \tau \in H \\ \int_\Omega v \cdot \mathbf{div}\bar{\sigma} & = 0 & \forall v \in Q \end{array}$$

una solución es tomar $(\bar{\sigma}, \bar{u}) = (0, 0)$ y como la solución es única, $P(\sigma) = 0$, lo que implica que $\sigma \in N(P)$, por lo cual $V \subset N(P)$.

Por otro lado, sea $\sigma \in N(P)$, luego $P(\sigma) = 0$, de la segunda ecuación tenemos que:

$$\int_\Omega v \cdot \mathbf{div}\,\sigma = 0 \qquad \forall v \in Q$$

Lo cual indica que $\mathbf{div}\,\sigma = 0$, entonces $N(P) \subset V$. Junto con lo anterior concluimos que $V = N(P)$.

Probemos ahora que $P = P^2$ para esto sean $\sigma \in H$, $P(\sigma) = \bar{\sigma}$, $P(\bar{\sigma}) = \tilde{\sigma}$, con $(\bar{\sigma}, \bar{u}), (\tilde{\sigma}, \tilde{u}) \in H \times Q$ soluciones del problema asociado al operador, de esto tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \tilde{\sigma} : \tau + \int_\Omega \tilde{u} \cdot \mathbf{div}\, \tau &= 0 & \forall \tau \in H \\ \int_\Omega v \cdot \mathbf{div} \tilde{\sigma} &= \int_\Omega v \cdot \mathbf{div} \bar{\sigma} & \forall v \in Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \bar{\sigma} : \tau + \int_\Omega \bar{u} \cdot \mathbf{div}\, \tau &= 0 & \forall \tau \in H \\ \int_\Omega v \cdot \mathbf{div} \bar{\sigma} &= \int_\Omega v \cdot \mathbf{div} \sigma & \forall v \in Q \end{aligned}$$

Ocupando la ecuación $\int_\Omega v \cdot \mathbf{div} \bar{\sigma} = \int_\Omega v \cdot \mathbf{div} \sigma$ en el primer sistema tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \tilde{\sigma} : \tau + \int_\Omega \tilde{u} \cdot \mathbf{div}\, \tau &= 0 & \forall \tau \in H \\ \int_\Omega v \cdot \mathbf{div} \tilde{\sigma} &= \int_\Omega v \cdot \mathbf{div} \sigma & \forall v \in Q \end{aligned}$$

Por lo cual $P(\sigma) = \tilde{\sigma} = P(P(\sigma))$, lo que nos indica que $P = P^2$.

Para probar la ultima parte del ítem probaremos que $N(B) = R(B)$, para esto sean $x \in N(P)$ y $y \in R(B)$ luego:

$$\langle x, y \rangle_{\mathbf{div};\Omega} = \int_\Omega x : y + \int_\Omega \mathbf{div}\, x \cdot \mathbf{div}\, y$$

Como $x \in N(B)$, entonces se cumple que

$$\int_\Omega \mathbf{div}\, x \cdot v = 0 \qquad \forall v \in Q \tag{2}$$

En especifico si tomamos $v = \mathbf{div}\, y$

$$\int_\Omega \mathbf{div}\, x \cdot \mathbf{div}\, y = 0$$

Luego como $P(y) = y$, entonces existe un único $u \in Q$ tal que se cumple la ecuación

$$\int_\Omega y : \tau + \int_\Omega u \cdot \mathbf{div}\, \tau = 0 \qquad \forall \tau \in H$$

En particular tenemos que

$$\int_\Omega x : y = -\int_\Omega u \mathbf{div}\, x$$

Pero de la misma forma que antes, como x cumple la ecuación (2), porque esta en la nulidad de P, entonces

$$\int_\Omega u \mathbf{div}\, x = 0$$

y concluimos que

$$\langle x, y \rangle_{\mathbf{div};\Omega} = \int_\Omega x : y + \int_\Omega \mathbf{div}\, x \cdot \mathbf{div}\, y = 0$$

Para todo $x \in N(P)$ y $y \in R(P)$, entonces $R(P) = N(P)^\perp$ y $N(P) = R(P)^\perp$

y por teorema de descomposición ortogonal, $H = N(P) \oplus R(P) = V \oplus R(P)$.

- c) Deduzca a partir de b) que $V^{\perp} = R(P)$, y muestre que exites una constante $C \geq 1$ tal que

$$||\tau||_{\mathbf{div};\Omega} \leq ||\mathbf{div}\,\tau||_{0,\Omega} \qquad \forall \tau \in V^{\perp}$$

Concluyendo asi que $||\cdot||_{\mathbf{div},\Omega}$ y $||\mathbf{div}\,\cdot||_{0,\Omega}$ son equivalentes en $V^{\perp}$

Solución:
De b) tenemos que $V^{\perp} = R(P)$. Ahora sea $P(\sigma) = \bar{\sigma}$, es decir, $\bar{\sigma} \in R(P)$, con $(\bar{\sigma}, \bar{u}) \in H \times Q$ solución de

$$\begin{array}{rll} \int_{\Omega} \bar{\sigma} : \tau + \int_{\Omega} \bar{u} \cdot \mathbf{div}\,\tau & = 0 & \forall \tau \in H \\ \int_{\Omega} v \cdot \mathbf{div}\bar{\sigma} & = \int_{\Omega} v \cdot \mathbf{div}\sigma & \forall v \in Q \end{array}$$

Como la primera ecuación ocurre para todo elemento de H, tomando $\tau = \bar{\sigma}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{\sigma} : \bar{\sigma} + \int_{\Omega} \bar{u} \cdot \mathbf{div}\,\bar{\sigma} = \ 0 \\ ||\bar{\sigma}||_{0,\Omega}^2 = -\int_{\Omega} \bar{u} \cdot \mathbf{div}\,\bar{\sigma} \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$||\bar{\sigma}||_{0,\Omega}^2 \leq ||\bar{u}||_{0,\Omega} ||\mathbf{div}\,\bar{\sigma}||_{0,\Omega}$$

Ahora ocupamos una consecuencia del TBB que nos da una cota sobre $\bar{u}$, en la cual existe una constante $C_Q > 0$ tal que

$$||\bar{u}||_{0,\Omega} \leq C_Q ||\mathbf{div}\,\sigma||_{0,\Omega}$$

de la segunda ecuación tenemos que $\mathbf{div}\,\sigma = \mathbf{div}\,\bar{\sigma}$ distribucionalmente, por lo cual $||\mathbf{div}\,\sigma||_{0,\Omega} = ||\mathbf{div}\,\bar{\sigma}||_{0,\Omega}$, con lo cual se sigue que:

$$\begin{aligned} ||\bar{\sigma}||_{0,\Omega}^2 &\leq ||\bar{u}||_{0,\Omega} ||\mathbf{div}\,\bar{\sigma}||_{0,\Omega} \\ &\leq C_Q ||\mathbf{div}\,\bar{\sigma}||_{0,\Omega}^2 \end{aligned}$$

Siendo $C_q := C_Q^{1/2}$ entonces

$$||\bar{\sigma}||_{0,\Omega} \leq C_q ||\mathbf{div}\,\bar{\sigma}||_{0,\Omega}$$

Si ahora sumamos $||\mathbf{div}\,\bar{\sigma}||_{0,\Omega}$ tenemos

$$||\bar{\sigma}||_{\mathbf{div};\Omega} \leq (1 + C_q) ||\mathbf{div}\,\bar{\sigma}||_{0,\Omega}$$

Siendo $C := 1 + C_q$ entonces $C > 1$ y

$$||\tau||_{\mathbf{div};\Omega} \leq ||\mathbf{div}\,\tau||_{0,\Omega} \qquad \forall \tau \in V^{\perp}$$

Concluyendo el ejercicio.

2.28

Sean X e Y espacios de Banach reales, y sean $A \in \mathcal{L}(X, X')$ y $B \in \mathcal{L}(X, Y)$, de modo que $B' \in \mathcal{L}(Y', X')$. A su vez, sea Z el espacio nulo de B, defina el operador $\Pi A : Z \to Z'$ es una biyección lineal, y que B es sobreyectivo. Pruebe que para cada par $(F, y) \in X' \times Y$ existe un único $(\sigma, U) \in X \times Y'$ tal que

$$\begin{aligned} A(\sigma) + B'(U) &= F \\ B(\sigma) &= y \end{aligned}$$

Como B es sobreyectivo se tiene que,

$$\exists \beta > 0 : \forall y \in Y, \exists \sigma_y \in X : B(\sigma_y) = y \quad \wedge \quad \beta ||\sigma_y||_X \leq ||y||_Y$$

Luego como $A(\sigma_y), F \in X'$, entonces $F - A(\sigma_y) \in X'$ si los restringimos a Z, $(F - A(\sigma_y))|_Z \in Z'$. Si tomamos en cuenta el operador

$$\begin{aligned} \Pi A : Z &\longrightarrow Z' \\ \tau &\longmapsto \Pi A(\tau) \\ \Pi A(\tau)(\eta) &= A(\tau)(\eta) \qquad \forall \tau, \eta \in Z \end{aligned}$$

Sabemos que este operador es biyectivo, por lo cual para $(F - A(\sigma_y))|_Z \in Z'$, existe un único elemento σ_0 en Z tal que:

$$\Pi A(\sigma_0) = (F - A(\sigma_y))|_Z$$

Ademá como $\Pi A \in \mathcal{L}(X, X')$ y biyectivo, podemos ocupara el teorema de la inversa acotada, obteniendo que:

$$\begin{aligned} ||\sigma_0||_X &= ||(\Pi A)^{-1}(F - A(\sigma_y))|_Z||_X \\ &\leq ||(\Pi A)^{-1}|| \; ||(F - A(\sigma_y))||_{X'} \\ &\leq ||(\Pi A)^{-1}|| \; (||F||_{X'} + ||A(\sigma_y)||_{X'} \\ &\leq ||(\Pi A)^{-1}|| \; (||F||_{X'} + ||A|| \; ||\sigma_y||_X) \end{aligned}$$

Por otro lado como B es sobreyectivo $R(B) = Y$ y como Y es cerrado, B tiene rango cerrado, con lo cual $\exists U \in Y' : B'(U) = F - A(\sigma_0 + \sigma_y)$,

Luego tenemos que $(\sigma, U) \in X \times Y$ cumple el problema

$$\begin{aligned} A(\sigma) + B'(U) &= F \\ B(\sigma) &= y \end{aligned}$$

Por lo cual existe solución, ahora resta probar que la solución es única. Este problema tiene única solución si y solo si el problema homogéneo

$$
\begin{aligned}
A(\tilde{\sigma}) + B'(\tilde{U}) &= 0 \\
B(\tilde{\sigma}) &= 0
\end{aligned}
$$

Tiene como única solución el nulo. En efecto sea $(\tilde{\sigma}, \tilde{U}) \in X \times Y'$ solución del problema homogéneo, de la primera ecuación tenemos

$$
\begin{aligned}
&A(\tilde{\sigma}) + B'(\tilde{U}) = 0 \\
\Longrightarrow &A(\tilde{\sigma})(\tau) + B'(\tilde{U})(\tau) = 0 \qquad \forall \tau \in X
\end{aligned}
$$

En especifico se cumple para todo $\tau \in Z$, así

$$A(\tilde{\sigma})(\tau) + B'(\tilde{U})(\tau) = 0 \qquad \forall \tau \in Z$$

Como τ esta en el espacio nulo de B entonces $B'(U)(\tau) = 0$ y nos queda

$$
\begin{aligned}
& A(\tilde{\sigma})(\tau) = 0 \qquad \forall \tau \in Z \\
\Longleftrightarrow \quad & \Pi\, A(\tilde{\sigma})(\tau) = 0 \qquad \forall \tau \in Z \\
\Longleftrightarrow \quad & \Pi\, A(\tilde{\sigma}) = \theta
\end{aligned}
$$

Como $\Pi\, A$ es inyectivo, de la ultima equivalencia se tiene que, $\tilde{\sigma} = \theta$. Reemplazando esta en la ecuación

$$
\begin{aligned}
&A(\tilde{\sigma}) + B'(\tilde{U}) = 0 \\
\Longrightarrow &A(\theta) + B'(\tilde{U}) = 0 \\
\Longrightarrow &\qquad B'(\tilde{U}) = 0
\end{aligned}
$$

Con esto tenemos que $\tilde{U} \in N(B')$, por otro lado sabemos que $N(B') = {}^{o}R(B)$, como B es sobreyectivo el rango de B es Y, entonces ${}^{o}R(B) = {}^{o}Y = \theta$, luego $\tilde{U} \in \theta$, es decir, $\tilde{U} = \theta$, por lo cual la solución del problema homogéneo es $(\tilde{\sigma}, \tilde{U}) = (\theta, \theta) \in X \times Y'$.

Por lo tanto el problema original tiene única solución concluyendo el problema