UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

LISTADO DE EJERCICIOS 525539
MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS

Segundo Semestre de 2023 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

Índice

1. Introducción

1.1 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal y sea $\mathcal{T}_h$ una triangularización de $\bar{\Omega}$. Dado $K \in \mathcal{T}_h$, sea $\boldsymbol{\nu}_K$ el vector normal a ∂K y denote por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial K}$ la paridad dual entre $H^{-1/2}(\partial K)$ y $H^{1/2}(\partial K)$.

1. Defina los espacios

$$X := \Big\{ v \in L^2(\Omega) : \quad v|_K \in H^1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

$$Z := \Big\{ \boldsymbol{\lambda} := (\lambda_K)_{K \in \mathcal{T}_h} \in \Pi_{K \in \mathcal{T}_h} H^{-1/2}(\partial K) : \quad \exists\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div}\,; \Omega) \\ \text{tal que} \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_K \,=\, \lambda_K \quad \text{en} \quad \partial K \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

y demuestre que

$$H_0^1(\Omega) := \Big\{ v \in X : \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \langle \lambda_K, v|_K \rangle_{\partial K} \,=\, 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\lambda} \,\in\, Z \Big\}.$$

2. Defina los espacios

$$\tilde{X} := \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \boldsymbol{\tau}|_K \in H(\mathrm{div}\,; K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

$$\tilde{Z} := \Big\{ \boldsymbol{\xi} := (\xi_K)_{K \in \mathcal{T}_h} \in \Pi_{K \in \mathcal{T}_h} H^{1/2}(\partial K) : \quad \exists\, v \in H_0^1(\Omega) \\ \text{tal que} \quad v \,=\, \xi_K \quad \text{en} \quad \partial K \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

y demuestre que

$$H(\mathrm{div}\,; \Omega) := \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in \tilde{X} : \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \langle \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_K, \xi_K \rangle_{\partial K} \,=\, 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\xi} \,\in\, \tilde{Z} \Big\}.$$

1.2 Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H, \| \cdot \|_H)$ un espacio de Hilbert real y $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada con operador inducido $\mathbf{A} \,\in\, \mathcal{L}(H, H)$. Suponga que existen operadores $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2 \,\in\, \mathcal{L}(H, H)$ y constantes α_1, $\alpha_2 \,>\, 0$ tales que

$$\langle \mathbf{S}_1^* \mathbf{A}(\tau), \tau \rangle_H \,\geq\, \alpha_1 \, \|\tau\|_H^2 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{A} \mathbf{S}_2(\tau), \tau \rangle_H \,\geq\, \alpha_2 \, \|\tau\|_H^2 \quad \forall\, \tau \,\in\, H\,.$$

a) Pruebe que para todo $F \,\in\, H'$ existe un único $\boldsymbol{\sigma} \,\in\, H$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma}, \tau) \,=\, F(\tau) \qquad \forall\, \tau \,\in\, H\,, \tag{1}$$

y deduzca la existencia de $C \,>\, 0$, independiente de F, tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_H \,\leq\, C \, \|F\|_{H'}\,.$$

b) Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de H tal que $\lim\limits_{h \to 0} \mathrm{dist}(\boldsymbol{\tau}, H_h) \,=\, 0 \;\, \forall\, \boldsymbol{\tau} \,\in\, H$, y, dado $F \in H'$, considere el esquema de Galerkin: Hallar $\boldsymbol{\sigma}_h \,\in\, H_h$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma}_h, \tau_h) \,=\, F(\tau_h) \qquad \forall\, \tau_h \,\in\, H_h\,. \tag{2}$$

Suponga que para $i = 1$ o para $i = 2$ (pero no para ambos), existen operadores inyectivos $\mathbf{S}_{i,h} \in \mathcal{L}(H_h, H_h)$ para todo $h > 0$, y constantes C_i, $\delta > 0$, independientes de h, tales que

$$\|\mathbf{S}_i(\tau_h) \,-\, \mathbf{S}_{i,h}(\tau_h)\|_H \,\leq\, C_i\, h^\delta\, \|\mathbf{S}_i(\tau_h)\|_H \quad \forall\, \tau_h \in H_h\,.$$

Demuestre que existe $h_0 > 0$ tal que para todo $h \leq h_0$ el problema (2) tiene solución única, es estable, y se verifica la estimación de Cea.

c) Qué puede decir sobre las hipótesis para a) y b) si A es simétrica ?

1.3 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ Lipschitz-continua, y considere la aplicación $|||\cdot||| : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$|||v||| \,:=\, \Big\{ |v|^2_{1,\Omega} \,+\, \|\gamma_0(v)\|^2_{0,\Gamma} \Big\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ es el operador de trazas usual. Utilice un argumento análogo al de la demostración de la desigualdad de Poincaré generalizada para probar que $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y $|||\cdot|||$ son equivalentes en $H^1(\Omega)$.

1.4 Sea Ω^- un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ, y sea Ω^+ la region anular acotada por Γ y una curva cerrada Σ cuyo interior contiene a Γ. Además, sean $\gamma_0^- : H^1(\Omega^-) \to H^{1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_0^+ : H^1(\Omega^+) \to H^{1/2}(\partial\Omega^+) \equiv H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Sigma)$ los operadores de trazas respectivos, y denote $\Omega := \Omega^- \cup \Gamma \cup \Omega^+$.

a) Demuestre que $v \in H^1(\Omega)$ si y sólo si:

$$v \in L^2(\Omega)\,,\; v|_{\Omega^-} \in H^1(\Omega^-)\,,\; v|_{\Omega^+} \in H^1(\Omega^+)\,,\; \text{y}\;\; \gamma_0^-(v|_{\Omega^-}) = \gamma_0^+(v|_{\Omega^+}) \text{ en } \Gamma\,.$$

Dados $f^- \in L^2(\Omega^-)$, $f^+ \in L^2(\Omega^+)$, $g_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y $g_\Sigma \in H^{-1/2}(\Sigma)$, considere el problema de transmisión: Hallar $(u^-, u^+) \in H^1(\Omega^-) \times H^1(\Omega^+)$ tales que

$$\begin{gathered}
-\,\Delta u^- \,=\, f^- \quad \text{en} \quad \Omega^-\,, \quad -\,\Delta u^+ \,=\, f^+ \quad \text{en} \quad \Omega^+\,,\\
\gamma_0^-(u^-) = \gamma_0^+(u^+) \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^-(\nabla u^-) \,-\, \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+(\nabla u^+) \,=\, g_\Gamma \quad \text{en} \quad \Gamma\,,\\
\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+(\nabla u^+) \,=\, g_\Sigma \quad \text{en} \quad \Sigma\,, \quad \text{y} \quad \int_{\Omega^-} u^- \,+\, \int_{\Omega^+} u^+ \,=\, 0\,,
\end{gathered} \tag{3}$$

donde $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^- : H(\text{div}\,;\Omega^-) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+ : H(\text{div}\,;\Omega^+) \to H^{-1/2}(\partial\Omega^+) \equiv H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Sigma)$ son los operadores de trazas normales respectivos ($\boldsymbol{\nu}$ apunta hacia Ω^+ en Γ y hacia el exterior de Ω^+ en Σ).

b) Utilice identidades de Green en espacios de Sobolev convenientes y deduzca una formulación variacional de (3) con incógnita en un subespacio cerrado V de $H^1(\Omega)$.

c) Identifique una condición de compatibilidad sobre los datos, y demuestre en tal caso que la formulación obtenida en b) posee una única solución, la cual depende continuamente de f^-, f^+, g_Γ, y g_Σ.

d) Demuestre que la formulación obtenida en b) es equivalente a una formulación variacional mixta con incógnita en $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$, y verifique que ella satisface las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi.

1.5 Este problema constituye una versión particular del Lema de Peetre-Tartar y proporciona una demostración alternativa a la desigualdad del problema 1.3.

a) Sean $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ y $(X_3, \|\cdot\|_3)$, espacios de Banach, y considere operadores $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ y $B \in \mathcal{L}(X_1, X_3)$, tales que B es compacto. Además, suponga que existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \,\leq\, c \Big\{ \|A(x)\|_2 \,+\, \|B(x)\|_3 \Big\} \qquad \forall\, x \in X_1 \,.$$

Demuestre que $N(A)$ es de dimensión finita, y luego razone por contradicción para probar que existe $C > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}(x, N(A)) \,\leq\, C\, \|A(x)\|_2 \qquad \forall\, x \in X_1 \,.$$

b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave Γ y considere la descomposición: $H^1(\Omega) \,=\, \tilde{H}^1(\Omega) \oplus \mathbb{P}_0(\Omega)$, donde $\mathbb{P}_0(\Omega)$ es el espacio de las funciones constantes sobre Ω y

$$\tilde{H}^1(\Omega) \,:=\, \left\{ v \in H^1(\Omega) : \quad \int_\Omega v \,=\, 0 \right\} .$$

Pruebe que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \,\leq\, |v|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in \tilde{H}^1(\Omega) \,. \tag{4}$$

c) Aplique a), (4), y el teorema de trazas, para demostrar que existen constantes C_1, $C_2 > 0$, tales que

$$C_1\, \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \,\leq\, |v|^2_{H^1(\Omega)} \,+\, \|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \,\leq\, C_2\, \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega) \,. \tag{5}$$

Indicación: para la desigualdad (5) inferior defina operadores A y B apropiados utilizando los espacios $X_1 := H^1(\Omega)$, $X_2 := [L^2(\Omega)]^2 \times L^2(\Gamma)$ y $X_3 := \mathbb{P}_0(\Omega)$.

1.6 Considere un abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{rot};\Omega) \,:=\, \{\, v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \,: \quad \mathrm{rot}\, v \,:=\, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \,-\, \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \,\in\, L^2(\Omega) \,\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)} \,:=\, \int_\Omega v \cdot w \, dx \,+\, \int_\Omega \mathrm{rot}\, v \;\mathrm{rot}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega) \,.$$

a) Demuestre que $(H(\mathrm{rot};\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

b) Pruebe que existe un operador lineal y continuo $\gamma \,:\, H(\mathrm{rot};\Omega) \,\to\, H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que $\gamma(u) \,=\, u \cdot \tau \;\forall\, u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$, donde τ es el vector **tangencial** unitario de Γ.

1.7 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. El objetivo de este problema es demostrar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,\geq\, \frac{1}{2}\, |\mathbf{v}|^2_{[H^1(\Omega)]^2} \qquad \forall\, \mathbf{v} \,\in\, [H^1_0(\Omega)]^2 \,, \tag{6}$$

donde $\mathbf{e}(\mathbf{v}) \,:=\, \dfrac{1}{2}\Big\{ \nabla \mathbf{v} \,+\, (\nabla \mathbf{v})^{\mathtt{t}} \Big\}$. Para tal efecto, proceda como sigue.

i) Dados $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_{ij})$ y $\boldsymbol{\tau} := (\tau_{ij})$ en $\mathbb{R}^{2\times 2}$, se define el producto tensorial $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} := \sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}\,\tau_{ij}$ y se introducen los subespacios

$$\mathbb{R}^{2\times 2}_{sim} := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \quad \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{t}} = \boldsymbol{\tau}\} \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^{2\times 2}_{asim} := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \quad \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{t}} = -\boldsymbol{\tau}\}\,.$$

Pruebe que $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \forall\,\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{2\times 2}_{sim}, \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{2\times 2}_{asim}$.

ii) Note que $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{e}(\mathbf{v}) + \mathbf{w}(\mathbf{v})$, con $\mathbf{w}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}\Big\{\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^{\mathtt{t}}\Big\}$, y recuerde que $\|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} = \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2}$, para probar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} - \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} = \int_\Omega \nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{v})^{\mathtt{t}}$$

y

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} + \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} = \int_\Omega \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v}\,.$$

iii) Deduzca la identidad $\nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{v})^{\mathtt{t}} = \operatorname{div}\Big\{\nabla \mathbf{v}\,\mathbf{v} - \operatorname{div}(\mathbf{v})\,\mathbf{v}\Big\} + (\operatorname{div}(\mathbf{v}))^2$ y concluya la desigualdad (6).

1.8 Sean Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno:

$$-\Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,.$$

a) Demuestre que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H(\operatorname{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\,dx + \int_\Omega u\,\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})\,dx - \int_\Omega v\,\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma})\,dx = \int_\Omega f\,v\,dx \tag{7}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v) \in H(\operatorname{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$.

b) Dados $\delta_1\,,\ \delta_2 > 0$, fundamente la introducción de las ecuaciones

$$\delta_1 \int_\Omega (\nabla u - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\nabla v + \boldsymbol{\tau})\,dx = 0 \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H} := H(\operatorname{div};\Omega) \times H^1_0(\Omega), \tag{8}$$

$$\delta_2 \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma})\,\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})\,dx = -\,\delta_2 \int_\Omega f\,\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})\,dx \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div};\Omega)\,, \tag{9}$$

luego sume (7), (8) y (9), y obtenga una formulación variacional mixta modificada: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) = F(\boldsymbol{\tau}, v) \qquad \forall\,(\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H}\,, \tag{10}$$

donde $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal y $F : \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal. Entonces, demuestre que, eligiendo δ_1 y δ_2 convenientemente, el problema (10) posee una única solución, la cual depende continuamente del dato f.

1.9 Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

a) Demuestre que $\displaystyle \sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v\in V^\perp\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \qquad \forall\, q \in Q.$

b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\displaystyle \sup_{\substack{v\in V^\perp\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \geq \beta\, \|q\|_Q \quad \forall\, q \in Q$, y pruebe que $H = R(\mathbf{B}^*) \oplus V$.

1.10 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. Dada $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, nos interesa el siguiente problema de elasticidad lineal: *Hallar el desplazamiento* $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ *y el tensor de esfuerzos* $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ *tal que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}\,\mathbf{e}(\mathbf{u}) \;:=\; \lambda \,\mathrm{tr}\,\mathbf{e}(\mathbf{u})\,\mathbf{I}_2 + 2\mu\,\mathbf{e}(\mathbf{u}) \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \qquad \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,,$$

donde λ, $\mu > 0$ son las constantes de Lamé, $\mathbf{I}_2$ es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, y $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \dfrac{1}{2}(\nabla\,\mathbf{u} + (\nabla\,\mathbf{u})^{\mathsf{t}})$ es el tensor de deformaciones. Es fácil verificar que $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ puede re-escribirse como

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \nabla\,\mathbf{u} - \gamma \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

donde $\gamma := \dfrac{1}{2}(\nabla\,\mathbf{u} - (\nabla\,\mathbf{u})^{\mathsf{t}})$ es una nueva incógnita (llamada rotación) que vive en el espacio $\mathcal{R} := \{\,\eta \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} : \quad \eta + \eta^{\mathsf{t}} = 0\,\}$.

a) Demuestre que una formulación variacional MIXTA de este problema se reduce a: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \gamma)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \gamma)) \;&=\; 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, (v, \eta)) \;&=\; -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot v\, dx \quad \forall\,(v, \eta) \in Q\,, \end{aligned} \tag{11}$$

donde $H := \{\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega) : \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}) = 0\}$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$, y $a : [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $b : H(\mathrm{div};\Omega) \times Q \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{2\mu} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}\, dx - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)} \int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\tau})\, dx \;\forall\, \boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2},$$

$$b(\boldsymbol{\tau}, (v, \eta)) := \int_\Omega v\cdot \mathrm{div}\;\boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \eta\, dx \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau}, (v, \eta)) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times Q\,.$$

b) Demuestre que a y b satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi.

c) Sea $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ un vector de parámetros positivos y considere las siguientes ecuaciones del tipo Galerkin-residuales:

$$\kappa_1 \int_\Omega \big(\mathbf{e}(\mathbf{u}) - \mathcal{C}^{-1}\,\boldsymbol{\sigma}\big) : \big(\mathbf{e}(v) + \mathcal{C}^{-1}\,\boldsymbol{\tau}\big) \;=\; 0\,, \tag{12}$$

$$\kappa_2 \int_\Omega \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma})\cdot \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \;=\; -\,\kappa_2 \int_\Omega \mathbf{f}\cdot \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau})\,, \tag{13}$$

y

$$\kappa_3 \int_\Omega \left(\gamma - \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^{\mathtt{t}})\right) : \left(\eta + \frac{1}{2}(\nabla v - (\nabla v)^{\mathtt{t}})\right) \;=\; 0\,, \tag{14}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v, \eta) \in H \times [H_0^1(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$. Demuestre que κ_1, κ_2 y κ_3 pueden elegirse explícitamente, y dependiendo sólo de μ, de modo que la formulación variacional que resulta al restar la segunda de la primera ecuación en (11), y luego sumar (12), (13) y (14), satisface las hipótesis del Lema de Lax-Milgram.

1.11 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ. Dado $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, el Problema de Stokes con condiciones de contorno de Dirichlet consiste en hallar un campo tensorial $\boldsymbol{\sigma}$ (esfuerzo), un campo vectorial $\mathbf{u}$ (velocidad) y un campo escalar p (presión) tal que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \;=\; 2\,\mu\,\nabla\mathbf{u} - p\,\mathbf{I} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} \;=\; -\,\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} \;=\; 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \mathbf{u} \;=\; \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \end{aligned} \tag{15}$$

donde μ es la viscosidad cinemática del fluido, $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, y $\mathbf{div}$ es el operador divergencia div actuando sobre cada fila del tensor.

a) Demuestre que, al eliminar la incógnita p, el problema (15) se transforma en:

$$\frac{1}{2\,\mu}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathtt{d}} \;=\; \nabla\mathbf{u} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} \;=\; -\,\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \mathbf{u} \;=\; \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{16}$$

b) Pruebe que la formulación variacional de (16) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\,\mu}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathtt{d}} : \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}} + \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} \quad &= \quad 0 \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H \\ \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} \quad &= \quad -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \quad \forall\,\mathbf{v} \in Q\,, \end{aligned} \tag{17}$$

donde

$$H \;:=\; \left\{\boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div};\Omega) : \quad \int_\Omega \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau} \;=\; 0\right\} \quad \text{y} \quad Q \;=\; [L^2(\Omega)]^2\,.$$

c) Aplique un método similar al empleado con los problemas 1.8 y 1.10, y defina una formulación aumentada de (17) cuya forma bilineal resulte fuertemente coerciva.

1.12 Sea Ω un abierto acotado y conexo de $\mathbb{R}^n$ de clase $C^{0,1}$, y sea $H^{-1}(\Omega)$ (resp. $[H^{-1}(\Omega)]^n$) el dual de $H_0^1(\Omega)$ (resp. $[H_0^1(\Omega)]^n$).

a) Utilice que $[C_0^\infty(\Omega)]^n$ es denso en $[H_0^1(\Omega)]^n$ para extender el gradiente distribucional $\nabla : L^2(\Omega) \to [\mathcal{D}'(\Omega)]^n$ a un operador $\nabla \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), [H^{-1}(\Omega)]^n)$.

b) Sea $B := \mathcal{R}\,\nabla \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), [H_0^1(\Omega)]^n)$, donde $\mathcal{R} : [H^{-1}(\Omega)]^n \to [H_0^1(\Omega)]^n$ es la aplicación de Riesz respectiva, y encuentre explícitamente el operador adjunto $B^* : [H_0^1(\Omega)]^n \to L^2(\Omega)$.

c) Asuma que existe $C > 0$ tal que $\operatorname{dist}(v, S) \;\leq\; C\,\|B(v)\| \quad \forall\, v \in\; L^2(\Omega)$, donde $S \;:=\; \langle\{1\}\rangle$, y luego haga uso de resultados clásicos de análisis funcional para probar que el operador $\operatorname{div} : V^\perp \to L_0^2(\Omega)$ es un isomorfismo, donde

$$V := \left\{\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n : \; \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\right\}, \qquad [H_0^1(\Omega)]^n = V \oplus V^\perp\,,$$

y

$$L_0^2(\Omega) := \left\{p \in L^2(\Omega) : \; \int_\Omega p = 0\right\}.$$

1.13 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase Lipschitz-continua, y sean Γ_D y Γ_N partes disjuntas y de medida no nula de Γ tales que $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Para cada $* \in \{D, N\}$ defina explícitamente un subespacio $\mathbf{H}_*(\mathrm{div}\,;\Omega)$ de $\mathbf{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$ y un operador $A_* \in \mathcal{L}\big(\mathbf{H}_*(\mathrm{div}\,;\Omega), H^{-1/2}(\Gamma_*)\big)$ que sea sobreyectivo.

1.14 Dados un abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y p, $q \in]1,+\infty[$ tales que $1/p + 1/q = 1$, la desigualdad de Hölder establece que

$$\left| \int_\Omega w\, z \right| \,\le\, \|w\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\, \|z\|_{\mathrm{L}^q(\Omega)} \qquad \forall\, (w,z) \in \mathrm{L}^p(\Omega) \times \mathrm{L}^q(\Omega)\,.$$

Además, uno de los clásicos teoremas de inclusión garantiza que $\mathrm{H}^1(\Omega)$ está siempre contenido en $\mathrm{L}^q(\Omega)$, y que el operador identidad respectivo $i_q : \mathrm{H}^1(\Omega) \longrightarrow \mathrm{L}^q(\Omega)$ es acotado. Por otro lado, se define el espacio de Banach

$$\mathbf{H}(\mathrm{div}_p;\Omega) \,:=\, \Big\{ \tau \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \quad \mathrm{div}(\tau) \in \mathrm{L}^p(\Omega) \Big\}\,,$$

provisto de la norma inducida

$$\|\tau\|_{\mathrm{div}_p;\Omega} := \|\tau\|_{0,\Omega} \,+\, \|\mathrm{div}(\tau)\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \qquad \forall\, \tau \in \mathbf{H}(\mathrm{div}_p;\Omega)\,.$$

a) Proceda de manera análoga al caso del espacio $\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$ ($p = 2$), y utilice lo indicado previamente, para probar que se puede definir también un operador $\gamma_{\boldsymbol{\nu}} : \mathbf{H}(\mathrm{div}_p;\Omega) \longrightarrow \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$, el cual es lineal y acotado.

b) Concluya a partir de a) que se tiene la identidad

$$\langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\tau), \gamma_0(v) \rangle_\Gamma = \int_\Omega \tau \cdot \nabla v \,+\, \int_\Omega v\, \mathrm{div}(\tau) \qquad \forall\, \tau \in \mathbf{H}(\mathrm{div}_p;\Omega), \quad \forall\, v \in \mathrm{H}^1(\Omega)\,.$$

1.15 Sean X, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, y sea $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada, donde $Y := Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_N$. Defina el funcional

$$S(y) \,:=\, \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{b(x,y)}{\|x\|} \qquad \forall\, y \in Y\,,$$

y suponga que existen constantes $\alpha_{ij} > 0$, para $i \in \big\{1, 2, \ldots, N\big\}$ y $j \in \big\{1, 2, \ldots, i\big\}$, tales que para todo $y := (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in Y$ se tiene

$$S(y) \,\ge\, \alpha_{ii} \|y_i\| \,-\, \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\, \|y_j\| \qquad \forall\, i \in \big\{1, 2, \ldots, N\big\}\,.$$

Razone por inducción finita para demostrar que existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$S(y) \,:=\, \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{b(x,y)}{\|x\|} \,\ge\, \alpha\, \|y\| \qquad \forall\, y \in Y\,.$$

1.16 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y sean Γ_D, $\Gamma_N \subseteq \Gamma$ tales que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $|\Gamma_D| \neq 0$ y $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Se sabe que

$$H^{1/2}(\Gamma_*) \,:=\, \Big\{ \gamma_0(w)|_{\Gamma_*} : \quad w \in H^1(\Omega) \Big\} \qquad \forall\, * \in \{D, N\}\,,$$

con $\|\varphi\|_{1/2,\Gamma_*} := \text{ínf}\Big\{\|w\|_{1,\Omega} : \quad w \in H^1(\Omega), \quad \gamma_0(w)|_{\Gamma_*} = \varphi\Big\}$ $\forall\,\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_*)$. A su vez, denotando por $E_{N,0} : H^{1/2}(\Gamma_N) \to L^2(\Gamma)$ el operador de extensión nula

$$E_{N,0}(\varphi) := \begin{cases} \varphi & \text{en} \quad \Gamma_N \\ 0 & \text{en} \quad \Gamma\backslash\Gamma_N \end{cases} \qquad \forall\,\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_N)\,,$$

se tiene que $H^{1/2}_{00}(\Gamma_N) := \Big\{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_N) : \quad E_{N,0}(\varphi) \in H^{1/2}(\Gamma)\Big\}$, con norma inducida $\|\varphi\|_{1/2,00,\Gamma_N} := \|E_{N,0}(\varphi)\|_{1/2,\Gamma}$ $\forall\,\varphi \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)$.

i) Pruebe que para cada $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ existe un único $w_\varphi \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(w_\varphi)|_{\Gamma_D} = \varphi$ y $\|\varphi\|_{1/2,\Gamma_D} = \|w_\varphi\|_{1,\Omega}$.

ii) Dado $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, considere el problema de valores de contorno

$$\Delta z_\varphi = 0 \;\text{ en }\; \Omega\,, \quad \gamma_0(z_\varphi)|_{\Gamma_D} = \varphi \;\text{ en }\; \Gamma_D\,, \quad \gamma_1(z_\varphi) = 0 \;\text{ en }\; \Gamma_N\,, \tag{18}$$

y demuestre fundadamente, utilizando una adecuada fórmula de integración por partes, que $z_\varphi = \widetilde{z}_\varphi + w_\varphi$, donde $\widetilde{z}_\varphi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ es tal que

$$\int_\Omega \nabla\widetilde{z}_\varphi \cdot \nabla v \;=\; -\int_\Omega \nabla w_\varphi \cdot \nabla v \qquad \forall\, v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)\,. \tag{19}$$

Pruebe que (19) tiene solución única y concluya que $\|z_\varphi\|_{1,\Omega} \,\le\, c\,\|\varphi\|_{1/2,\Gamma_D}$.

iii) Defina el operador $E_D : H^{1/2}(\Gamma_D) \to H^{1/2}(\Gamma)$ por $E_D(\varphi) := \gamma_0(z_\varphi)$ $\forall\,\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, y pruebe que E_D es lineal y acotado.

iv) Pruebe que $H^{1/2}(\Gamma) = E_D(H^{1/2}(\Gamma_D)) \oplus E_{N,0}(H^{1/2}_{00}(\Gamma_N))$. Equivalentemente, dado $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$, demuestren que existen únicos $\psi_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ y $\psi_N \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)$ tales que $\psi = E_D(\psi_D) + E_{N,0}(\psi_N)$.

v) Deduzca a partir de iv) que, dado $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$, existen $\lambda_D \in H^{-1/2}(\Gamma_D)$ y $\lambda_N \in H^{-1/2}_{00}(\Gamma_N)$ tales que $\langle\lambda,\psi\rangle = \langle\lambda_D,\psi_D\rangle_{\Gamma_D} + \langle\lambda_N,\psi_N\rangle_{\Gamma_N}$ $\forall\,\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Concluya que si $\lambda|_{\Gamma_N} = 0$, λ se identifica con un funcional en $H^{-1/2}(\Gamma_D)$.

2. Teoría Abstracta

2.1 Sean X y M espacios de Hilbert y sean $a : X \times X \to \mathbb{R}$, $b : X \times M \to \mathbb{R}$ dos formas bilineales acotadas. Suponga además que a es simétrica y semi-definida positiva sobre X. Dados $F \in X'$, $G \in M'$ se define el operador $\mathcal{J} : X \times M \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{J}(v,\mu) := \frac{1}{2}\, a(v,v) + b(v,\mu) - F(v) - G(\mu)\,.$$

Considere entonces los siguientes problemas variacionales:
Hallar $(u,\lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\lambda) &= F(v) \quad \forall\, v \in X\,,\\ b(u,\mu) &= G(\mu) \quad \forall\, \mu \in M\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Hallar $(u,\lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\mathcal{J}(u,\mu) \le \mathcal{J}(u,\lambda) \le \mathcal{J}(v,\lambda) \qquad \forall\,(v,\mu) \in X \times M\,. \tag{21}$$

Demuestre que (u,λ) es solución de (20) si y sólo si (u,λ) es solución de (21).

2.2 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. Dada $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, nos interesa el siguiente problema de elasticidad lineal: *Hallar el desplazamiento* $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ *y el tensor de esfuerzos* $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ *tal que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda\, \mathrm{tr}\, \mathbf{e}(\mathbf{u})\, \mathbf{I}_2 + 2\mu\, \mathbf{e}(\mathbf{u}) \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,,$$

donde λ, $\mu > 0$ son las constantes de Lamé, $\mathbf{I}_2$ es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, y $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\mathbf{T}})$ es el tensor de deformaciones. Es fácil verificar que $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ puede re-escribirse como $\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} - \gamma$ en Ω, donde $\gamma := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^{\mathbf{T}})$ es una nueva incógnita (llamada rotación) que vive en el espacio

$$\mathcal{R} := \{\, \eta \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} : \quad \eta + \eta^{\mathbf{T}} = 0 \,\}\,.$$

a) Demuestre que una formulación variacional **mixta** de este problema se reduce a: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma},(\mathbf{u},\gamma)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau},(\mathbf{u},\gamma)) &= 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,,\\ b(\boldsymbol{\sigma},(\mathbf{v},\eta)) &= -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\, dx \quad \forall\,(\mathbf{v},\eta) \in Q\,, \end{aligned} \tag{22}$$

donde $H := H(\mathrm{div};\Omega)$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$, y $a : H \times H \to \mathbb{R}$, $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{2\mu}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}\, dx - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}\int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\, \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{\tau} \in H\,,$$

$$b(\boldsymbol{\tau},(\mathbf{v},\eta)) := \int_\Omega \mathbf{v}\cdot \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \eta\, dx \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau},(\mathbf{v},\eta)) \in H \times Q\,.$$

b) Demuestre que a y b satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi.

2.3 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ.

a) Considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ con norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y semi-norma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$. Defina la aplicación

$$|||v||| := \left\{ |v|^2_{H^1(\Omega)} + \left(\int_\Omega v \right)^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1\,|||v||| \,\leq\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \,\leq\, C_2\,|||v||| \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

b) Considere el problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \int_\Omega u \,=\, 0\,,$$

donde $f \,\in\, L^2(\Omega)$ es tal que $\displaystyle\int_\Omega f \,=\, 0$, y demuestre que su formulación débil se reduce a: Hallar $(u, \lambda) \,\in\, H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,+\, \lambda \int_\Omega v \,=\, \int_\Omega f v \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

$$\mu \int_\Omega u \,=\, 0 \qquad \forall\, \mu \in \mathbb{R}\,.$$

Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que este problema tiene solución única, la cual depende continuamente de f.

c) Extienda el análisis en b) al caso discreto y deduzca espacios de elementos finitos que garanticen la solubilidad y estabilidad del esquema de Galerkin asociado. Indique la razón de convergencia correspondiente.

2.4 Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \,\in\, \mathcal{L}(X, X)$, $Q \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$

y que existen constantes positivas α, β tales que

$$\langle \mathbf{P}x, x\rangle_X \;\geq\; \alpha\,||x||^2_X \qquad \forall\, x \in X$$

y

$$\sup_{\substack{x \in X\\ x \neq 0}} \frac{\langle Q(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \;\geq\; \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de $||\mathbf{P}||$, α, β y $||Q||$, tal que $||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \,\leq\, C\,\{\,||f|| + ||g||\,\}$.

2.5 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$ y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. Se dice que un material que ocupa la region Ω es **casi-incompresible** si se necesitan cantidades muy altas de energía para producir cambios pequeños en su densidad, lo cual genera una gran diferencia entre los tamaños de las constantes de Lamé. En tal caso, la formulación en desplazamiento del problema de elasticidad lineal consiste en: Hallar $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ tal que

$$- 2\,\mu\,\mathbf{div}\,\mathbf{e}(\mathbf{u}) \,-\, \lambda\,\nabla(\operatorname{div}\mathbf{u}) \,=\, \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \mathbf{u} \,=\, \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \tag{23}$$

donde $\lambda >> \mu > 0$ son las constantes de Lamé y

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\,(\nabla\,\mathbf{u} + (\nabla\,\mathbf{u})^{\mathtt{t}})$$

es el tensor de deformaciones.

a) Defina la incógnita auxiliar $p := \lambda\,\operatorname{div}\,\mathbf{u}$ en Ω y demuestre que una formulación variacional de (23) se reduce a: Hallar $(\mathbf{u}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned}
2\,\mu \int_\Omega \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \,+\, \int_\Omega p\,\operatorname{div}\,\mathbf{v} \,&=\, \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \qquad \forall\,\mathbf{v} \,\in\, [H_0^1(\Omega)]^2\,,\\
\int_\Omega q\,\operatorname{div}\,\mathbf{u} \,-\, \frac{1}{\lambda}\int_\Omega pq \,&=\, 0 \qquad\qquad \forall\,q \,\in\, L_0^2(\Omega)\,.
\end{aligned} \tag{24}$$

b) Aplique el teorema abstracto del problema 2.4 para probar que (24) tiene una única solución que depende continuamente del dato $\mathbf{f}$.

2.6 Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} : X \to X$, $Q \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\,y \in Y\,,$$

que $\mathbf{P}$ es **nolineal**, y que existen constantes M, α, $\beta > 0$ tales que

$$||\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}||_X \,\leq\, M\,||x - \bar{x}||_X \quad , \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x - \bar{x}\rangle_X \,\geq\, \alpha\,||x - \bar{x}||_X^2 \quad \forall\,x,\,\bar{x} \,\in X\,,$$

y

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle Q(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \,\geq\, \beta\,||y||_Y \quad \forall\,y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de M, α, β y $||Q||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \,\leq\, C\,\{\,||f|| + ||g|| + ||\mathbf{P}(0)||\,\}\,.$$

2.7 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. El Problema de Stokes consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$\begin{aligned} -\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\,dx = 0\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Defina los espacios

$$H := [H_0^1(\Omega)]^2 \quad \text{y} \quad Q := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\,dx = 0 \right\}.$$

a) Demuestre que la formulación débil de (25) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B(\mathbf{v},p) &= \;\; F(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H\,, \\ B(\mathbf{u},q) &= \;\; 0 \quad \forall\, q \in Q\,, \end{aligned} \tag{26}$$

donde $A : H \times H \to \mathbb{R}$, $B : H \times Q \to \mathbb{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$A(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\,dx\,,$$

$$B(\mathbf{v},p) := -\int_\Omega p \operatorname{div}\mathbf{v}\,dx \quad , \quad F(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,dx\,.$$

b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que el problema (26) posee una única solución, la cual depende continuamente del dato $\mathbf{f}$.

2.8 Sean $\Omega =]a,b[$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno

$$u^{(4)} = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0\,. \tag{27}$$

i) Defina la incógnita auxiliar $\sigma := u''$ en Ω y demuestre que una formulación variacional **mixta** de (27) se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx + \int_\Omega u'\,\tau'\,dx &= \quad 0 \qquad \forall\, \tau \in H^1(\Omega)\,, \\ \int_\Omega v'\,\sigma'\,dx &= \;\; -\int_\Omega f\,v\,dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{28}$$

ii) Aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (28) tiene una única solución que depende continuamente del dato f.

2.9 Dados $\Omega := (0,1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:

$$-\,u'' = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) = 0\,, \quad u'(1) = 1\,. \tag{29}$$

a) Defina $\sigma := u'$ en Ω y demuestre que una formulación variacional **mixta** de (29) se reduce a: *Hallar* $(\sigma,(u,\varphi)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) + b(\tau,(u,\varphi)) &= \quad F(\tau) \quad \forall\, \tau \in H\,, \\ b(\sigma,(v,\psi)) &= \quad G((v,\psi)) \quad \forall\, (v,\psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{30}$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \to \mathbb{R}$, $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) &:= \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx \qquad \forall\, \sigma,\tau \in H\,, \\ b(\tau,(v,\psi)) &:= \int_\Omega v\,\tau'\,dx \,+\, \psi\,\tau(1) \quad \forall\, (\tau,(v,\psi)) \in H \times Q\,. \end{aligned}$$

b) Defina los funcionales F y G, y aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (30) tiene una única solución.

2.10 (Lema de Fortin). Sean H, Q espacios de Hilbert, y sea $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H} \,\geq\, \beta\,\|q\|_Q \qquad \forall\, q \in Q\,. \tag{31}$$

Sean $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y $\{Q_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, y asuma que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H,H_n)$ tal que

$$b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) \,=\, 0 \qquad \forall\, v \in H\,, \quad \forall\, q_n \in Q_n\,.$$

Suponga que la familia de operadores $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H,H_n)} \,\leq\, C$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y demuestre que existe $\beta^* > 0$, independiente de n, tal que

$$\sup_{\substack{v_n \in H_n \\ v_n \neq 0}} \frac{b(v_n,q_n)}{\|v_n\|_H} \,\geq\, \beta^*\,\|q_n\|_Q \qquad \forall\, q_n \in Q_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}\,.$$

2.11 Sean H_h y Q_h subespacios de dimensión finita de espacios de Hilbert H y Q, respectivamente, y sean $\mathbf{a} : H \times H \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{b} : H \times Q \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas que satisfacen las hipótesis de las versiones continua y discreta del Teorema de Babuška-Brezzi, con constantes independientes de h. Sean $(\boldsymbol{\sigma},u) \in H \times Q$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h,u_h) \in H_h \times Q_h$ las únicas soluciones de los problemas de punto-silla continuo y discreto, respectivamente, asociados a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Suponga que el kernel discreto de $\mathbf{b}$ está contenido en su kernel continuo y demuestre que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_H \,\leq\, C \inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_H\,.$$

2.12 Sean H_1, H_2, Q_1, Q_2 espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, y sean $a : H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ y $b_j : H_j \times Q_j \to \mathbb{R}$, $j \in \{1,2\}$, formas bilineales acotadas con operadores inducidos $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H_1,H_2)$ y $\mathbf{B}_j \in \mathcal{L}(H_j,Q_j)$, $j \in \{1,2\}$, respectivamente. También, sea K_j el espacio nulo de $\mathbf{B}_j$, $j \in \{1,2\}$, y sea Π_2 el proyector ortogonal de H_2 en K_2. Suponga que:

i) $\Pi_2\, \mathbf{A} : K_1 \to K_2$ es un isomorfismo.

ii) existen $\beta_1,\, \beta_2 \,>\, 0$ tales que

$$\|\mathbf{B}_j^*(q)\|_{H_j} \,:=\, \sup_{\substack{v\in H_j\\ v\neq 0}} \frac{b_j(v,q)}{\|v\|_{H_j}} \,\geq\, \beta_j\, \|q\|_{Q_j} \quad \forall\, q \in Q_j, \quad \forall\, j \in \{1,2\}\,.$$

a) Pruebe que, dados $F \in H_2'$ y $G \in Q_1'$, existe un único $(u,p) \in H_1 \times Q_2$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) \,+\, b_2(v,p) \quad &= \quad F(v) \quad \forall\, v \in H_2\,,\\ b_1(u,q) \quad &= \quad G(q) \quad \forall\, q \in Q_1\,. \end{aligned}$$

Además, pruebe que la hipótesis i) es equivalente a cada una de las siguientes:

a) existe $\alpha_1 > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{v\in K_2\\ v\neq 0}} \frac{a(u,v)}{\|v\|_{H_2}} \,\geq\, \alpha_1\, \|u\|_{H_1} \qquad \forall\, u \in K_1$$

y $\quad \sup\limits_{u\in K_1} a(u,v) \,>\, 0 \qquad \forall\, v \in K_2,\, v \neq 0.$

b) existe $\alpha_2 > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{u\in K_1\\ u\neq 0}} \frac{a(u,v)}{\|u\|_{H_1}} \,\geq\, \alpha_2\, \|v\|_{H_2} \qquad \forall\, v \in K_2$$

y $\quad \sup\limits_{v\in K_2} a(u,v) \,>\, 0 \qquad \forall\, u \in K_1,\, u \neq 0.$

b) Dadas $\big\{H_{1,n}\big\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\big\{H_{2,n}\big\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\big\{Q_{1,n}\big\}_{n\in\mathbf{N}}$, y $\big\{Q_{2,n}\big\}_{n\in\mathbf{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H_1, H_2, Q_1, y Q_2, respectivamente, defina el esquema de Galerkin asociado, y deduzca la estimación de Cea correspondiente.

2.13 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave. Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, considere el problema de Neumann:

$$-\,\Delta\, u \,+\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} \,=\, g \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \tag{32}$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal exterior a Γ.

a) Defina incógnitas auxiliares convenientes y demuestre que una formulación mixta de (32) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) \,\in\, H(\mathrm{div};\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\mathrm{div},\Omega} \,+\, \langle \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}, \varphi \rangle_\Gamma \quad &= \quad -\int_\Omega f\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,,\\ \langle \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nu}, \psi \rangle_\Gamma \quad &= \quad \langle g, \psi\rangle_\Gamma \quad \forall\, \psi \,\in\, H^{1/2}(\Gamma)\,, \end{aligned} \tag{33}$$

donde $\langle\, \cdot, \cdot\, \rangle_{\mathrm{div},\Omega}$ y $\langle\, \cdot, \cdot\, \rangle_\Gamma$ denotan el producto interior de $H(\mathrm{div};\Omega)$ y la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma)$ con $H^{1/2}(\Gamma)$, respectivamente.

b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que (33) posee una única solución, la cual depende contínuamente de los datos f y g.

c) Defina subespacios de elementos finitos $H_h \subseteq H(\mathrm{div};\Omega)$ y $Q_h \subseteq H^{1/2}(\Gamma)$, y pruebe que el esquema de Galerkin resultante tiene solución única, es estable y convergente.

2.14 Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ Lipschitz continua, y considere datos $\mathbf{f} := (f_1, f_2)^{\mathsf{t}} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} := (g_1, g_2)^{\mathsf{t}} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$. El Problema de Stokes con condiciones de contorno de Neumann consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathsf{t}}$ y la presión p de un fluido que ocupa la region Ω, tal que

$$\begin{aligned} -\mu\,\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mu\,\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - p\,\mathbf{n} &= \mathbf{g} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \end{aligned} \tag{34}$$

donde $\mu > 0$ es la viscosidad del fluido y $\mathbf{n}$ es el vector normal a Γ.

a) Introduzca las incógnitas auxiliares $\varphi := -\mathbf{u}$ en Γ y $\boldsymbol{\sigma} := \mu\,\nabla\mathbf{u} - p\,\mathbf{I}$ en Ω, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{2\times 2}$, y pruebe que, eliminando p, se obtiene en primera instancia una formulación variacional mixta de la forma siguiente: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \varphi)) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \varphi)) &= 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{v}, \psi)) &= -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \langle \mathbf{g}, \psi\rangle \quad \forall\,(\mathbf{v}, \psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{35}$$

donde $H := H(\mathbf{div};\Omega)$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times [H^{1/2}(\Gamma)]^2$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es la paridad dual entre $[H^{-1/2}(\Gamma)]^2$ y $[H^{1/2}(\Gamma)]^2$, y $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales acotadas definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{\mu}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathtt{d}} : \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}} \quad \text{y} \quad b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \psi)) := \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} + \langle \boldsymbol{\tau}\,\mathbf{n}, \psi\rangle\,.$$

b) Deduzca a partir de la segunda ecuación de (35) que los datos deben satisfacer la condición de compatibilidad: $\int_\Omega f_i + \langle g_i, 1\rangle = 0 \ \forall\, i \in \{1,2\}$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota también la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$.

c) Muestre que para todo $c \in \mathbb{R}$, $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \varphi)) := c\big(\mathbf{0}, (\,(1,1)^{\mathsf{t}}, (-1,-1)^{\mathsf{t}}\,)\big)$ es solución del problema homogéneo asociado a (35), de modo que para evitar la no-unicidad, se sugiere buscar ahora $\mathbf{u}$ en $[L^2_0(\Omega)]^2$. Redefina fundadamente (35) con $Q := [L^2_0(\Omega)]^2 \times [H^{1/2}(\Gamma)]^2$, y aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que esta nueva formulación posee una única solución, la cual depende continuamente de los datos.

d) Defina explícitamente un esquema de Galerkin bien propuesto para la formulación redefinida en c).

2.15 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ. Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, considere el problema de Dirichlet:

$$-\,\Delta\,u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u = g \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{36}$$

a) Defina $\varphi := \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$ en Γ, donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal exterior a Γ, y demuestre que una formulación mixta de (36) se reduce a: Hallar $(u, \varphi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\varphi) &= \int_\Omega f\, v \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,, \\ b(u,\psi) &= \langle \psi, g\rangle_\Gamma \quad \forall\, \psi \in H^{-1/2}(\Gamma)\,, \end{aligned} \tag{37}$$

donde $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $b : H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \qquad \forall\, u,\, v \in H^1(\Omega),$$

$$b(v,\psi) = \langle \psi, v\rangle_\Gamma \qquad \forall\, (v,\psi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)\,,$$

y $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ denota la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma)$ con $H^{1/2}(\Gamma)$.

b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que (37) posee una única solución, la cual depende contínuamente de los datos f y g.

c) Utilice la desigualdad de Poincaré generalizada para probar que $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y $|\cdot|_{1,\Omega}$ son equivalentes en el espacio

$$\tilde{H}^1(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) : \quad \langle 1, v\rangle_\Gamma = 0 \right\}.$$

d) Sean H_h y Q_h subespacios de elementos finitos de $H^1(\Omega)$ y $H^{-1/2}(\Gamma)$, respectivamente, tal que

$$Q_h := \{\psi_h \in L^2(\Gamma) : \quad \psi_h|_{\Gamma_j} \in \mathbf{P}_0(\Gamma_j) \quad \forall\, j \in \{1,2,...,m\}\}\,,$$

donde $\{\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m\}$ es una partición de Γ y $\mathbf{P}_0(\Gamma_j)$ denota el espacio de constantes sobre Γ_j. Aplique la equivalencia de c) para demostrar que a es fuertemente coerciva en el espacio nulo discreto de b. Además, indique las condiciones adicionales que deben satisfacer H_h y Q_h para que el esquema de Galerkin asociado a (37) tenga solución única, sea estable y convergente.

2.16 Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ Lipschitz continua, y considere datos $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$. El MODELO DE BRINKMAN para flujos en medios porosos con condiciones de contorno de Neumann, consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathtt{t}}$ y la presión p de un fluido que ocupa la region Ω, tal que

$$\begin{aligned} \alpha\, \mathbf{u} - \mu\, \Delta\, \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad && \text{en} \quad \Omega\,, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mu\, \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p\, \mathbf{n} &= \mathbf{g} && \text{en} \quad \Gamma\,, \end{aligned} \tag{38}$$

donde $\mu > 0$ es la viscosidad del fluido, α es un parámetro positivo dado por el cuociente entre la viscosidad y la permeabilidad, y $\mathbf{n}$ es el vector normal a Γ.

a) Introduzca las incógnitas auxiliares $\varphi := -\mathbf{u}$ en Γ y $\boldsymbol{\sigma} := \mu\, \nabla \mathbf{u} - p\, \mathbf{I}$ en Ω, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{2\times 2}$, y pruebe que, eliminando p y $\mathbf{u}$, se obtiene una formulación variacional mixta de la forma siguiente: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \varphi) &= F(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, \psi) &= G(\psi) \quad \forall\, \psi \in Q\,, \end{aligned} \tag{39}$$

donde $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ son formas bilineales acotadas.

b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que (39) posee una única solución, la cual depende continuamente de los datos $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$.

c) Establezca condiciones suficientes mínimas sobre subespacios de elementos finitos $H_h \subseteq H$ y $Q_h \subseteq Q$ para que el esquema de Galerkin asociado a (39) tenga solución única, sea estable y convergente.

d) Defina una formulación aumentada de (39) que incorpore nuevamente a p y $\mathbf{u}$, de modo tal que la nueva forma bilineal a siga siendo elíptica en el kernel de b.

2.17 Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Lipschitz continua Γ. Dados $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$, el Problema de Elasticidad con condiciones de contorno de tracción (Neumann) consiste en hallar un tensor simétrico $\boldsymbol{\sigma}$ (esfuerzos) y un vector $\mathbf{u}$ (desplazamientos), tales que

$$\boldsymbol{\sigma} \,=\, \mathcal{C}\,\mathbf{e}(\mathbf{u})\,, \quad \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\sigma}) \,=\, -\,\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{g} \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{40}$$

Aquí, $\mathcal{C}$ es el operador de elasticidad dado por la ley de Hooke (con constantes de Lamé λ, $\mu > 0$), $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\mathtt{t}}\right)$ es el tensor de pequeñas deformaciones, $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal a Γ, y los datos satisfacen la condición de compatibilidad:

$$\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\chi} \,+\, \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\chi}\rangle \,=\, 0 \qquad \forall\,\boldsymbol{\chi} \,\in\, \mathbb{RM}(\Omega)\,, \tag{41}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota la paridad dual de $[H^{-1/2}(\Gamma)]^2$ y $[H^{1/2}(\Gamma)]^2$ con respecto al producto escalar de $[L^2(\Gamma)]^2$, y $\mathbb{RM}(\Omega) \,:=\, [\mathbb{P}_0(\Omega)]^2 \,\oplus\, \mathbb{P}_0(\Omega)\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ es el espacio de movimientos rígidos en Ω. Puede probarse que (41) constituye una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución de (40).

a) Demuestre que, en primera instancia, la formulación variacional mixta de (40) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\mathbf{u}}) := (\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \gamma)) \in H(\mathrm{div};\Omega)\times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \,+\, \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \vec{\mathbf{u}}) \,&=\, 0 \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau} \,\in\, H(\mathrm{div};\Omega)\,, \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\mathbf{v}}) \,&=\, -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \,+\, \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}\rangle \quad \forall\,\vec{\mathbf{v}} := (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \eta) \,\in\, Q\,, \end{aligned} \tag{42}$$

donde $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times [H^{1/2}(\Gamma)]^2 \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{\mathtt{asym}}$, y

$$\mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \vec{\mathbf{v}}) \,:=\, \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \,+\, \langle \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\psi}\rangle \,+\, \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \eta \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau}, \vec{\mathbf{v}}) \in H(\mathrm{div};\Omega)\times Q\,.$$

b) Pruebe que el espacio de soluciones del problema homogéneo asociado a (42) está dado por $\Big\{(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\mathbf{u}}) : \;\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}\,,\; \vec{\mathbf{u}} = (\boldsymbol{\chi}, -\boldsymbol{\chi}|_\Gamma, \nabla\boldsymbol{\chi})\,,\; \boldsymbol{\chi} \in \mathbb{RM}(\Omega)\Big\}$.

c) Agregue a (42) la condición de unicidad $\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\chi}\cdot\mathbf{u} \,=\, 0\;\forall\,\boldsymbol{\chi} \,\in\, \mathbb{RM}(\Omega)$, y pruebe que la formulación variacional resultante es equivalente a: Hallar $((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}), \vec{\mathbf{u}}) := ((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}), (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \gamma)) \in H\times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\chi} \,+\, \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \vec{\mathbf{u}}) \,+\, \int_\Omega \boldsymbol{\chi}\cdot\mathbf{u} = 0 \quad &\forall\,(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\chi}) \in H\,, \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\mathbf{v}}) \,+\, \int_\Omega \boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{v} = -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \,+\, \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}\rangle \quad &\forall\,\vec{\mathbf{v}} := (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \eta) \in Q\,, \end{aligned} \tag{43}$$

donde $H \,:=\, H(\mathrm{div};\Omega)\times\mathbb{RM}(\Omega)$.

d) Use la teoría de Babuška-Brezzi para probar que (43) está bien propuesto.

2.18 Sea Ω_1 un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ, y sea Ω_2 la region anular acotada por Γ y una curva cerrada Σ cuyo interior contiene a Γ. Además, sean $\gamma_0^1 : H^1(\Omega_1) \to H^{1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_0^2 : H^1(\Omega_2) \to H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Sigma)$ los operadores de trazas respectivos, y denote $\Omega := \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$. Dados $\mathbf{f}_1 \in \mathbf{L}^2(\Omega_1)$, $\mathbf{f}_2 \in \mathbf{L}^2(\Omega_2)$, $\mathbf{g}_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$, y $\mathbf{g}_\Sigma \in H^{1/2}(\Sigma)$, considere el problema de transmisión en ELASTICIDAD LINEAL

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathcal{C}_1\, \mathbf{e}(\mathbf{u}_1) \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \quad \mathbf{div}\, \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{f}_1 \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \\
\boldsymbol{\sigma}_2 = \mathcal{C}_2\, \mathbf{e}(\mathbf{u}_2) \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \quad \mathbf{div}\, \boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{f}_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \\
\gamma_0^1(\mathbf{u}_1) - \gamma_0^2(\mathbf{u}_2) = \mathbf{g}_\Gamma \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^1(\boldsymbol{\sigma}_1) = \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^2(\boldsymbol{\sigma}_2) \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \\
\gamma_0^2(\mathbf{u}_2) = \mathbf{g}_\Sigma \quad \text{en} \quad \Sigma\,,
\end{aligned}
\tag{44}
$$

donde $\mathcal{C}_i : \mathbb{L}^2(\Omega_i) \to \mathbb{L}^2(\Omega_i)$, $i \in \{1,2\}$, son los operadores lineales de Hooke en los dominios Ω_1 y Ω_2 con constantes de Lamé (μ_1, λ_1) y (μ_2, λ_2), respectivamente, y $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^1 : \mathbb{H}(\mathrm{div}\,;\Omega_1) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^2 : \mathbb{H}(\mathrm{div}\,;\Omega_2) \to H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Sigma)$ son los operadores de trazas normales correspondientes ($\boldsymbol{\nu}$ apunta hacia Ω_2 en Γ y hacia el exterior de Ω_2 en Σ).

a) Demuestre que una FORMULACIÓN VARIACIONAL MIXTA-DUAL de (44) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) \in \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega_1) \times \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega_2)$, $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbf{L}^2(\Omega_1) \times \mathbf{L}^2(\Omega_2)$, $\boldsymbol{\rho} := (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \in \mathbb{L}^2_{\mathtt{asim}}(\Omega_1) \times \mathbb{L}^2_{\mathtt{asim}}(\Omega_2)$, y $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, tales que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \mathcal{C}_i^{-1}\, \boldsymbol{\sigma}_i : \boldsymbol{\tau}_i + \widetilde{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})) + \langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^1(\boldsymbol{\tau}_1) - \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^2(\boldsymbol{\tau}_2), \boldsymbol{\xi} \rangle_\Gamma &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\tau})\,, \\
\widetilde{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{v}, \eta)) + \langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^1(\boldsymbol{\sigma}_1) - \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^2(\boldsymbol{\sigma}_2), \boldsymbol{\lambda} \rangle_\Gamma &= \mathbf{G}(\mathbf{v}, \eta, \boldsymbol{\lambda}),
\end{aligned}
\tag{45}
$$

para todo $\boldsymbol{\tau} := (\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) \in \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega_1) \times \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega_2)$, $\mathbf{v} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{L}^2(\Omega_1) \times \mathbf{L}^2(\Omega_2)$, $\eta := (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{L}^2_{\mathtt{asim}}(\Omega_1) \times \mathbb{L}^2_{\mathtt{asim}}(\Omega_2)$, y $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, donde $\widetilde{\mathbf{b}}$ es una forma bilineal, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ denota la paridad dual entre $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ y $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, y $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son funcionales lineales y acotados que dependen de $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{g}_\Gamma$ y $\mathbf{g}_\Sigma$.

b) Escriba (45) en la forma requerida por el Teorema de Babuška-Brezzi, identificando claramente los espacios H y Q involucrados, las formas bilineales $\mathbf{a} : H \times H \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{b} : H \times Q \to \mathbb{R}$ resultantes, y los operadores lineales inducidos por ellas. Concluya luego que este problema posee una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi})) \in H \times Q$, la cual depende continuamente de los datos.

2.19 Sean X_1, M_1, X_2, M_2 y Q espacios de Hilbert reales, y defina el espacio producto $H := X_1 \times M_1 \times X_2 \times M_2$. A su vez, considere operadores $A_1 \in \mathcal{L}(X_1, X_1)$, $B_1 \in \mathcal{L}(X_1, M_1)$, $A_2 \in \mathcal{L}(X_2, X_2)$, $B_2 \in \mathcal{L}(X_2, M_2)$, y $B \in \mathcal{L}(H, Q)$, y defina los operadores matriciales $A : H \to H$ y $T : H \times Q \to H \times Q$ como:

$$
A := \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & B_1^* & & \\ B_1 & 0 & & \\ \hline & & A_2 & B_2^* \\ & & B_2 & 0 \end{array} \right)
$$

y

$$
T := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix}.
$$

a) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para establecer condiciones necesarias y suficientes que garanticen la biyectividad de T.

b) Establezca un esquema de Galerkin asociado al operador T y demuestre la estimación de Cea correspondiente.

2.20 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$ y vector normal respectivo dado por $\mathbf{n}$. Entonces, dados $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y constantes $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$, $\kappa_2 \neq 0$, considere el problema de Neumann:

$$- \Delta u + \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \kappa_2 \, u = f \quad \text{en} \quad \Omega \,, \quad \nabla u \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{en} \quad \Gamma \,. \tag{46}$$

En lo que sigue, $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ es la aplicación de trazas y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$.

a) Introduzca las incógnitas auxiliares $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω y $\xi := -\gamma_0(u)$ en Γ, y demuestre que, eliminando u, la formulación variacional mixta de (46) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \xi) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{array}{lcll} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \xi) & = & F(\boldsymbol{\tau}) & \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H \,, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, \lambda) & = & G(\lambda) & \forall\, \lambda \in Q \,, \end{array} \tag{47}$$

donde $H := H(\mathrm{div}; \Omega)$, $Q := H^{1/2}(\Gamma)$, y $a : H \times H \to \mathbb{R}$, $b : H \times Q \to \mathbb{R}$, $F \in H'$, y $G \in Q'$ están definidos, para cada $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau} \in H$ y $\lambda \in Q$, por

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \int_\Omega \left\{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{\kappa_2} \mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} \right\},$$

$$b(\boldsymbol{\tau}, \lambda) := \langle \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}, \lambda \rangle \,, \quad F(\boldsymbol{\tau}) := -\frac{1}{\kappa_2} \int_\Omega f \, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} \,, \quad \text{y} \quad G(\lambda) := \langle g, \lambda \rangle \,.$$

b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para demostrar que, para cada par $(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\kappa_2 > 0$ y $|\kappa_1| < \frac{2}{\sqrt{n}} \,\mathrm{mín} \big\{ 1, \kappa_2 \big\}$, el problema (47) posee una única solución, la cual depende continuamente de los datos f y g. A su vez, defina el esquema de Galerkin asociado a (47) y establezca la estimación de Cea correspondiente en términos de κ_1 y κ_2.

2.21 Sea Ω un dominio anular de $\mathbb{R}^2$ con fronteras interior y exterior, ambas Lipschitz continuas, dadas por Σ y Γ, respectivamente, y considere datos $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$. El Problema de Stokes con condiciones de contorno mixtas consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathsf{t}}$ y la presión p de un fluido que ocupa la region Ω, tal que

$$\begin{array}{rcll} -\mu \, \Delta \, \mathbf{u} + \nabla p & = & \mathbf{f} & \text{en} \quad \Omega \,, \\ \mathrm{div}\, \mathbf{u} & = & 0 & \text{en} \quad \Omega \,, \\ \mu \, \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \, \mathbf{n} & = & \mathbf{g} & \text{en} \quad \Gamma \,, \\ \mathbf{u} & = & \mathbf{0} & \text{en} \quad \Sigma \,, \end{array} \tag{48}$$

donde $\mu > 0$ es la viscosidad del fluido y $\mathbf{n}$ es el vector normal a Γ. Introduzca las incógnitas auxiliares $\varphi := -\mathbf{u}$ en Γ y $\boldsymbol{\sigma} := \mu \, \nabla \mathbf{u} - p \, \mathbf{I}$ en Ω, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, luego elimine p, y finalmente aplique la Teoría de Babuška -Brezzi para analizar la solubilidad de la formulación variacional mixta resultante.

2.22 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera suave Γ, y sean

$$H = \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega) := \Big\{\boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^{N\times N}: \ \mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^N\Big\} \ \text{ y } \ Q := [L^2(\Omega)]^N\,,$$

los espacios de Hilbert con productos interiores y normas inducidas denotadas, respectivamente, por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{div},\Omega}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{0,\Omega}$, $\|\cdot\|_{\mathbf{div},\Omega}$ y $\|\cdot\|_{0,\Omega}$. Considere el operador $P: H \to H$ que a cada $\boldsymbol{\sigma} \in H$ le asigna $P(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}$, donde $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{u}}) \in H \times Q$ es solución del problema

$$\begin{aligned} \int_\Omega \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \bar{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} &= 0 && \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,,\\ \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,\bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} && \forall\, \mathbf{v} \in Q\,. \end{aligned} \tag{49}$$

a) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para demostrar que P está bien definido y que $P \in \mathcal{L}(X)$.

b) Defina el subespacio cerrado de H dado por

$$V := \Big\{\boldsymbol{\tau} \in H: \quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Omega\Big\}\,,$$

y pruebe que $V = N(P)$, $P^2 = P$, y $H = V \oplus R(P)$.

c) Deduzca a partir de b) que $V^\perp = R(P)$ (ortogonalidad en H), y muestre que existe una constante $C \geq 1$ tal que

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div},\Omega} \leq C\,\|\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in V^\perp\,,$$

concluyendo así que $\|\cdot\|_{\mathbf{div},\Omega}$ y $\|\mathbf{div}\,\cdot\|_{0,\Omega}$ son equivalentes en $V^\perp$.

2.23 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ tal que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ and $|\Gamma_D| > 0$, y sea $\boldsymbol{\nu}$ el vector normal a Γ. Dados $\mathbf{f} \in [C(\bar{\Omega})]^n$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, el problema de Darcy con presión dependiente de la porosidad consiste en encontrar la velocidad $\mathbf{u}$ y la presión p de un fluido, tales que:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} = p\,\mathbf{f} + \nabla p \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,,\\ &p = g \quad \text{en} \quad \Gamma_D\,, \quad \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_N\,. \end{aligned} \tag{50}$$

a) Demuestre que la formulación variacional mixta de (50) se reduce a: Hallar $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v},p) &= \langle \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu}, g\rangle_D + \int_\Omega p\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} && \forall\, \mathbf{v} \in H\,,\\ \mathbf{b}(\mathbf{u},q) &= 0 && \forall\, q \in Q\,, \end{aligned} \tag{51}$$

donde $H := \Big\{\mathbf{v} \in H(\operatorname{div};\Omega): \quad \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_N\Big\}$, $Q := L^2(\Omega)$, $\mathbf{a}: H \times H \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{b}: H \times Q \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales dadas por

$$\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}(\mathbf{v},q) := \int_\Omega q\,\operatorname{div}\mathbf{v} \qquad \forall\, \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in H\,, \quad \forall\, q \in Q\,,$$

y $\langle\cdot,\cdot\rangle_D$ denota la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma_D)$ y $H^{1/2}(\Gamma_D)$.

b) Demuestre que (51) puede re-escribirse, equivalentemente, como una ecuación de punto fijo de la forma $(\mathbf{u}, p) = T(\mathbf{u}, p)$, donde, gracias a la Teoría de Babuška-Brezzi, $T : H \times Q \to H \times Q$ es un operador no-lineal bien definido. De hecho, utilice el principio de superposición para darse cuenta que en realidad T es una aplicación afín. Luego, aplique el Teorema del Punto Fijo de Banach para concluir que si $\|\mathbf{f}\|_{\infty,\Omega} := \sup\limits_{x\in\Omega} \|\mathbf{f}(x)\|$ es suficientemente pequeño, entonces el problema (51) tiene una única solucion. Pruebe en tal caso que existe $C > 0$, dependiente de $\|\mathbf{f}\|_{\infty,\Omega}$, tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{div},\Omega} + \|p\|_{0,\Omega} \leq C \, \|g\|_{1/2,\Gamma_D} .$$

c) Defina un esquema de Galerkin estable para el problema en a) y establezca las cotas de error a priori y razones de convergencia correspondientes.

2.24 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase Lipschitz-continua, y sean Γ_D y Γ_N partes disjuntas y de medida no nula de Γ tales que $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Entonces, dado un dato $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, considere el problema de valores de contorno:

$$\Delta z = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \qquad \gamma_0(z) = g \quad \text{en} \quad \Gamma_D, \qquad \gamma_1(z) = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_N. \tag{52}$$

a) Introduzca una incógnita auxiliar conveniente $\xi \in H^{-1/2}(\Gamma_D)$ y demuestre que una formulación variacional de (52) se reduce a: Hallar $(z, \xi) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(z, v) + b(v, \xi) &= 0 \qquad \forall\, v \in H\,, \\ b(z, \lambda) &= G(\lambda) \qquad \forall\, \lambda \in Q\,, \end{aligned} \tag{53}$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $\quad Q := H^{-1/2}(\Gamma_D)$, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales

$$a(\omega, v) := \int_\Omega \nabla\omega \cdot \nabla v\,, \quad b(v, \lambda) := \langle \lambda, \gamma_0(v)|_{\Gamma_D} \rangle_{\Gamma_D}\,, \quad \forall\, \omega, v \in H\,,\ \forall\, \lambda \in Q\,,$$

y $G : Q \to \mathbb{R}$ es el funcional lineal $G(\lambda) := \langle \lambda, g \rangle_{\Gamma_D} \quad \forall\, \lambda \in H^{-1/2}(\Gamma_D$.

b) Identifique explícitamente el operador $B \in \mathcal{L}(H, Q)$ inducido por la forma bilineal b y demuestre que B es sobreyectivo. Además, pruebe que la constante de la condición inf-sup continua para b puede elegirse como $\beta = 1$. Luego, deduzca los resultados de existencia, unicidad y dependencia continua de (53).

2.25 Dados X_1, X_2, M_1, y M_2 espacios de Banach reales reflexivos, considere formas bilineales acotadas $a : X_2 \times X_1 \to \mathbb{R}$ y $b_i : X_i \times M_i \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, cuyos operadores inducidos se denotan por $A \in \mathcal{L}(X_2, X_1')$ y $B_i \in \mathcal{L}(X_i, M_i')$, respectivamente, esto es

$$A(w)(v) := a(w, v) \qquad \forall\, (w, v) \in X_2 \times X_1$$

y

$$B_i(w)(q) := b_i(w, q) \qquad \forall\, (w, q) \in X_i \times M_i\,.$$

Además, para cada $i \in \{1, 2\}$ denote por K_i el espacio nulo de B_i y por $B_i^{\mathtt{t}} \in \mathcal{L}(M_i, X_i')$ su “adjuntorespectivo, esto es

$$B_i^{\mathtt{t}}(q)(w) := b_i(w, q) \qquad \forall\, (q, w) \in M_i \times X_i\,.$$

A su vez, sea $\Pi : X_1' \to K_1'$ el operador definido por $\Pi(f)(v) := f(v) \ \ \forall\, (f, v) \in X_1' \times K_1$, y suponga que se verifican las siguientes hipótesis

i) $\Pi\, A|_{K_2} : K_2 \to K_1'$ es un isomorfismo (biyección acotada).

ii) para cada $i \in \{1,2\}$ existe $\beta_i > 0$ tal que $\|B_i^{\mathtt{t}}(q)\|_{X_i'} \,\geq\, \beta_i\, \|q\|_{M_i} \quad \forall\, q \in M_i$.

De acuerdo a lo anterior, se pide lo siguiente:

a) Muestre que i) y ii) se pueden re-escribir, equivalentemente, como condiciones inf-sup continuas para a, b_1 y b_2.

b) Pruebe que para cada $(f,g) \in X_1' \times M_2'$ existe un único $(u,p) \in X_2 \times M_1$ tal que

$$A(u) \,+\, B_1^{\mathtt{t}}(p) \,=\, f \quad \text{y} \quad B_2(u) \,=\, g\,. \tag{54}$$

c) Deduzca la existencia de constantes explícitas C_1, $C_2 > 0$, que dependen sólo de A, $\Pi A|_{K_2}$, β_1 y β_2, tales que

$$\|u\|_{X_2} \,+\, \|p\|_{M_1} \,\leq\, C_1\, \|f\|_{X_1'} \,+\, C_2\, \|g\|_{M_2'}\,.$$

d) Demuestre que i) y ii) son también condiciones necesarias para la solubilidad única de (54) ante cualquier par $(f,g) \in X_1' \times M_2'$.

2.26 Sea Ω un dominio acotado y simplemente conexo en $\mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$, y sea $\boldsymbol{\nu}$ el vector normal sobre su frontera Lipschitz-continua Γ. La temperatura φ de un fluido en un medio poroso que ocupa la region Ω, se modela a través del acoplamiento de la ley de Darcy con una ecuación de convección-difusión que depende de la velocidad $\boldsymbol{u}$ del fluido. Más precisamente, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mu(\varphi)\,\boldsymbol{u} \,+\, \nabla p &= \boldsymbol{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,,\\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,,\\ -\alpha\,\Delta\varphi \,+\, \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi &= g \quad \text{en} \quad \Omega\,,\\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nu} \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \quad \text{y} \quad \varphi &= 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \end{aligned} \tag{55}$$

donde μ es la viscosidad dependiente de la temperatura, la cual se supone acotada superiormente e inferiormente, p es la presión, $\boldsymbol{f}$ representa una fuerza externa, α es un coeficiente de difusión positivo, y g denota una fuente de calor externa.

a) Recuerde que, dados $r,\, s\, \in]1,+\infty[$ tales que $1/r + 1/s = 1$, la desigualdad de Hölder establece que $\left|\int_\Omega zv\right| \,\leq\, \|z\|_{\mathrm{L}^r(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}^s(\Omega)}\ \forall\,(z,v) \in \mathrm{L}^r(\Omega) \times \mathrm{L}^s(\Omega)$, y pruebe que

$$\left|\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi\,\psi\right| \,\leq\, \|i\|\,\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\,\|\psi\|_{1,\Omega}\,|\varphi|_{1,\Omega}$$

para todo $(\boldsymbol{u},\varphi,\psi) \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, donde $i : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{L}^4(\Omega)$ es la inyección continua y $\mathbf{L}^4(\Omega) := [\mathrm{L}^4(\Omega)]^d$.

b) Sea $(\boldsymbol{f},g) \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega)$, y muestre que la formulación mixta-primal de (55) se reduce a: Hallar $\big((\boldsymbol{u},p),\varphi\big) \in (X_2 \times M_1) \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} a_\varphi(\boldsymbol{u},\mathbf{v}) \,+\, b_1(\mathbf{v},p) &= \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\mathbf{v} && \forall\,\mathbf{v} \in X_1\,,\\ b_2(\boldsymbol{u},q) &= 0 && \forall\, q \in M_2\,,\\ \mathbf{A}_{\boldsymbol{u}}(\varphi,\psi) &= \int_\Omega g\psi && \forall\,\psi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\,, \end{aligned} \tag{56}$$

donde $\mathbf{A}_{\boldsymbol{u}}(\varphi,\psi) := \alpha \int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla\psi + \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi\,\psi$, $a_\varphi(\boldsymbol{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega \mu(\varphi)\,\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{v}$, $b_1(\mathbf{v},p) := -\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$, $b_2(\boldsymbol{u},q) := -\int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$, y X_1, X_2, M_1 y M_2 son espacios de Banach convenientemente definidos.

c) Demuestre que existe $\delta > 0$ tal que para todo $\boldsymbol{u}\in \mathbf{L}^4(\Omega)$ tal que $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \le \delta$, la tercera ecuación de (56) posee una única solución $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

d) A partir de la teoría del Ejercicio 2.25, describa explícitamente las condiciones inf-sup continuas que deben satisfacerse para concluir que, dado $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, las primeras dos ecuaciones de (56) tienen una única solución $(\boldsymbol{u},p)\in X_2\times M_1$.

e) Demuestre que (56) es equivalente a una ecuación de punto fijo.

2.27 Sean X e Y espacios de Banach reales, y sean $A\in\mathcal{L}(X,X')$ y $B\in\mathcal{L}(X,Y)$, de modo que $B'\in\mathcal{L}(Y',X')$. A su vez, sea Z el espacio nulo de B, defina el operador $\Pi A : Z\longrightarrow Z'$ por $\Pi A(\tau)(\zeta) := A(\tau)(\zeta) \quad \forall\,\tau,\zeta\in Z$, y suponga que $\Pi A : Z\longrightarrow Z'$ es una biyección lineal, y que B es sobreyectivo. Pruebe que para cada par $(F,y)\in X'\times Y$ existe un único $(\sigma,U)\in X\times Y'$ tal que

$$\begin{aligned} A(\sigma) + B'(U) &= F \\ B(\sigma) &= y\,. \end{aligned}$$

2.28 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y sea $\boldsymbol{\nu}$ el vector normal exterior a Γ. Dados $\mathbf{f}\in\mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\mathbf{g}\in\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, considere el problema de elasticidad:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}\,\mathbf{e}(\mathbf{u}) \quad\text{en}\quad \Omega, \quad \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = -\mathbf{f} \quad\text{en}\quad \Omega, \quad \gamma_0(\mathbf{u}) = \mathbf{g} \quad\text{en}\quad \Gamma\,. \tag{57}$$

a) Defina una incógnita auxiliar conveniente y demuestre, aplicando integración por partes, que la formulación primal-mixta de (57) se reduce a: Hallar $(\mathbf{u},\boldsymbol{\xi})\in\mathbf{H}^1(\Omega)\times\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathcal{C}\,\mathbf{e}(\mathbf{u}):\mathbf{e}(\mathbf{v}) + \langle\boldsymbol{\xi},\gamma_0(\mathbf{v})\rangle_\Gamma &= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \qquad \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1(\Omega)\,, \\ \langle\boldsymbol{\lambda},\gamma_0(\mathbf{u})\rangle_\Gamma &= \langle\boldsymbol{\lambda},\mathbf{g}\rangle_\Gamma \qquad \forall\,\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)\,, \end{aligned} \tag{58}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ denota la paridad dual entre $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ y $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$.

b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que (58) posee una única solución, la cual depende contínuamente de los datos $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$.

2.29 Dados un abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y p, $q\in(1,+\infty)$ tales que $1/p+1/q=1$, la desigualdad de Hölder establece que

$$\left|\int_\Omega \mathbf{w}\cdot\boldsymbol{z}\right| \le \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}\,\|\boldsymbol{z}\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} \qquad \forall\,(\mathbf{w},\boldsymbol{z})\in\mathbf{L}^p(\Omega)\times\mathbf{L}^q(\Omega)\,.$$

Además, uno de los clásicos teoremas de inclusión de Sobolev garantiza que el espacio $\mathbf{H}^1(\Omega)$ está siempre contenido en $\mathbf{L}^q(\Omega)$, y que el operador identidad respectivo $\mathbf{i}_q : \mathbf{H}^1(\Omega)\longrightarrow\mathbf{L}^q(\Omega)$ es acotado. Por otro lado, se define el espacio de Banach

$$\mathbb{H}(\mathbf{div}_p;\Omega) := \Big\{\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{L}^2(\Omega) : \quad \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\in\mathbf{L}^p(\Omega)\Big\}\,,$$

y su subespacio

$$\mathbb{H}_0(\mathbf{div}_p;\Omega) := \left\{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}_p;\Omega) : \quad \int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}) = 0\right\}.$$

Demuestre que existe una constante $\widetilde{c}_1 > 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^2 \geq \widetilde{c}_1 \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega}^2 \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_p;\Omega).$$

2.30 Sean $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H\big)$ y $\big(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q\big)$ espacios de Hilbert con normas $\|\cdot\|_H$ y $\|\cdot\|_Q$, respectivamente, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas con constantes correspondientes $\|a\|$ y $\|b\|$, y V el espacio nulo del operador inducido por b. Suponga que:

i) existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{\substack{\tau\in V\\ \tau\neq 0}} \frac{a(\zeta,\tau)}{\|\tau\|_H} \geq \alpha\,\|\zeta\|_H \qquad \forall\, \zeta \in V,$

ii) para cada $\tau \in V$, $\tau \neq 0$, se tiene que $\displaystyle\sup_{\zeta\in V} a(\zeta,\tau) > 0$, y

iii) existe una constante $\beta > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{\substack{\tau\in H\\ \tau\neq 0}} \frac{b(\tau,v)}{\|\tau\|_H} \geq \beta\,\|v\|_Q \qquad \forall\, v \in Q.$

Además, sea $A : (H \times Q) \times (H \times Q) \to \mathbb{R}$ la forma bilineal definida por

$$A\big((\zeta,w),(\tau,v)\big) := a(\zeta,\tau) + b(\tau,w) + b(\zeta,v) \qquad \forall\,(\zeta,w),\,(\tau,v) \in H \times Q,$$

y para cada $(\zeta,w) \in H \times Q$ introduzca $S(\zeta,w) := \displaystyle\sup_{\substack{(\tau,v)\in H\times Q\\ (\tau,v)\neq 0}} \frac{A\big((\zeta,w),(\tau,v)\big)}{\|(\tau,v)\|_{H\times Q}}$ y los funcionales $F_{\zeta,w} \in H'$ y $G_{\zeta,w} \in Q'$ dados por

$$F_{\zeta,w}(\tau) := A\big((\zeta,w),(\tau,0)\big) \quad \forall\, \tau \in H \ \text{ y } \ G_{\zeta,w}(v) := A\big((\zeta,w),(0,v)\big) \quad \forall\, v \in Q.$$

a) Demuestre que para cada $(\zeta,w) \in H \times Q$ se tiene

$$\frac{1}{2}\Big\{\|F_{\zeta,w}\|_{H'} + \|G_{\zeta,w}\|_{Q'}\Big\} \leq S(\zeta,w) \leq \|F_{\zeta,w}\|_{H'} + \|G_{\zeta,w}\|_{Q'}. \tag{59}$$

b) Utilice i), iii), y el hecho que cada $\zeta \in H$ se descompone como $\zeta = \zeta_0 + \bar{\zeta}$, con $\zeta_0 \in V$ y $\bar{\zeta} \in V^\perp$ únicos, para demostrar que para cada $(\zeta,w) \in H \times Q$ se tiene

$$\|\zeta\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|F_{\zeta,w}\|_{H'} + \frac{1}{\beta}\Big(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\Big)\|G_{\zeta,w}\|_{Q'} \quad \text{y}$$

$$\|w\|_Q \leq \frac{1}{\beta}\Big(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\Big)\|F_{\zeta,w}\|_{H'} + \frac{\|a\|}{\beta^2}\Big(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\Big)\|G_{\zeta,w}\|_{Q'},$$

y deduzca, usando (59), que existe una constante $\widetilde{\alpha} > 0$, que depende de α, β, y $\|a\|$, tal que $S(\zeta,w) \geq \widetilde{\alpha}\,\|(\zeta,w)\|_{H\times Q}$ para todo $(\zeta,w) \in H \times Q$.

c) Pruebe que $\displaystyle\sup_{(\zeta,w)\in H\times Q} A\big((\zeta,w),(\tau,v)\big) > 0$ para cada $(\tau,v) \in H \times Q$, $(\tau,v) \neq 0$.

d) Concluya, utilizando b), c) y el Lema de Lax-Milgram generalizado, que para cada par $(f,g) \in H' \times Q'$ existe un único $(\sigma,u) \in H \times Q$ solución del problema

$$\begin{array}{lcll} a(\sigma,\tau) \,+\, b(\tau,u) & = & f(\tau) & \forall\, \tau \,\in\, H\,, \\ b(\sigma,v) & = & g(v) & \forall\, v \,\in\, Q\,, \end{array}$$

el cual satisface $\|(\sigma,u)\|_{H\times Q} \,\le\, \widetilde{\alpha}^{-1}\Big\{\|f\|_{H'} \,+\, \|g\|_{Q'}\Big\}$.

IND.: Para b) tenga también en mente la condición inf-sup equivalente a iii), y para c) recuerde el par de condiciones inf-sup que es equivalente al par i) - ii).

2.31 En el contexto del problema acoplado de Darcy con una ecuación de convección-difusión, el cual ocurre en un abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ de clase $\mathrm{C}^{0,1}$ y vector normal $\boldsymbol{\nu}$, se llega a la siguiente formulación variacional mixta: Hallar $(\mathbf{u},p) \in X_2 \times M_1$ tal que

$$\begin{array}{rcll} a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b_1(\mathbf{v},p) & = & F(\mathbf{v}) & \forall\, \mathbf{v} \in X_1\,, \\ b_2(\mathbf{u},q) & = & G(q) & \forall\, q \in M_2\,, \end{array} \tag{60}$$

donde, eligiendo convenientemente r, $s \in (1,+\infty)$ conjugados, se tiene

$$\begin{array}{l} X_2 := \Big\{\mathbf{w} \in \mathbf{H}^r(\mathrm{div}_{\,r};\Omega) : \quad \mathbf{w}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\Big\}\,, \\ X_1 := \Big\{\mathbf{w} \in \mathbf{H}^s(\mathrm{div}_{\,s};\Omega) : \quad \mathbf{w}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\Big\}\,, \\ M_1 := \Big\{q \in \mathbf{L}^r(\Omega) : \quad \int_\Omega q = 0\Big\}\,, \\ M_2 := \Big\{q \in \mathbf{L}^s(\Omega) : \quad \int_\Omega q = 0\Big\}\,, \end{array} \tag{61}$$

$a : X_2 \times X_1 \to \mathbb{R}$ y $b_i : X_i \times M_i \to \mathbb{R}$, $i \in \big\{1,2\big\}$, son las formas bilineales

$$\begin{array}{ll} a(\mathbf{w},\mathbf{v}) := \displaystyle\int_\Omega \mathbf{w}\cdot\mathbf{v} & \forall\,(\mathbf{w},\mathbf{v}) \in X_2 \times X_1\,, \\ b_i(\mathbf{v},q) := \displaystyle\int_\Omega q\,\mathrm{div}\,(\mathbf{v}) & \forall\,(\mathbf{v},q) \in X_i \times M_i\,, \end{array} \tag{62}$$

y $F \in X_1'$, $G \in M_2'$ son funcionales dados.

a) Demuestre que para cada $i \in \big\{1,2\big\}$ el espacio nulo $\mathcal{K}_i$ del operador inducido por b_i se reduce a $\mathcal{K}_i := \Big\{\mathbf{v} \in X_i : \quad \mathrm{div}\,(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\Big\}$.

b) Suponga que existe un operador lineal y acotado $D_s : \mathbf{L}^s(\Omega) \to \mathbf{L}^s(\Omega)$ tal que para cada $\boldsymbol{z} \in \mathbf{L}^s(\Omega)$ se tiene $D_s(\boldsymbol{z}) \in \mathcal{K}_1$ y $\displaystyle\int_\Omega \mathbf{w}\cdot D_s(\boldsymbol{z}) = \int_\Omega \mathbf{w}\cdot\boldsymbol{z}$ para todo $\mathbf{w} \in \mathcal{K}_2$, y pruebe, mayorando adecuadamente, que existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{\substack{\mathbf{v}\in\mathcal{K}_1\\ \mathbf{v}\neq\mathbf{0}}} \frac{a(\mathbf{w},\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{X_1}} \ge \alpha\,\|\mathbf{w}\|_{X_2} \quad \forall\, \mathbf{w} \in \mathcal{K}_2$.

c) Haga el supuesto análogo al de b) con r, $\mathcal{K}_2$ y $\mathcal{K}_1$ en vez de s, $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$, respectivamente, y demuestre que $\displaystyle\sup_{\mathbf{w}\in\mathcal{K}_2} a(\mathbf{w},\mathbf{v}) > 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{K}_1,\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

d) Suponga que para cada $g \in M_2$ hay un único $z \in W^{1,s}(\Omega)$ tal que $\Delta z = g$ en Ω, $\nabla z \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ en Γ y $\int_\Omega z = 0$, para el cual se tiene $\|z\|_{1,s;\Omega} \le C_s \|g\|_{0,s;\Omega}$, con una constante $C_s > 0$ independiente de g y z, y pruebe, mayorando adecuadamente, que existe una constante $\beta_1 > 0$ tal que $\sup\limits_{\substack{\mathbf{v} \in X_1 \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \dfrac{b_1(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{X_1}} \ge \beta_1 \|q\|_{M_1} \quad \forall\, q \in M_1$.

e) Haga el supuesto análogo al de d) con M_1 y r en vez de M_2 y s, respectivamente, y pruebe la condición inf-sup continua de b_2.

f) Aplique el caso general del Teorema de Babuška-Brezzi en espacios de Banach y concluya la solubilidad y dependencia continua de (60).

2.32 Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$, con frontera Lipschitz-continua Γ, y sean Γ_D y Γ_N partes disjuntas de Γ tal que $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$.

a) Sea $E_D : H^{1/2}(\Gamma_D) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ el operador definido por $E_D(\varphi) := \gamma_0(z_\varphi)$, donde $z_\varphi \in H^1(\Omega)$ es la única solución del problema

$$\Delta z_\varphi = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \gamma_0(z_\varphi) = \varphi \quad \text{en} \quad \Gamma_D\,, \quad \gamma_1(z_\varphi) = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_N\,, \tag{63}$$

y sea $E_{N,0} : H^{1/2}(\Gamma_N) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ el operador de extensión nula en Γ_D. Pruebe que E_D está bien definido (es decir que (63) está bien propuesto), que $E_D \in \mathcal{L}\big(H^{1/2}(\Gamma_D), H^{1/2}(\Gamma)\big)$, y que

$$H^{1/2}(\Gamma) \;=\; E_D\big(H^{1/2}(\Gamma_D)\big) \;\oplus\; E_{N,0}\big(H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)\big)\,. \tag{64}$$

Dados $f \in L^2(\Omega)$, $g_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ y $g_N \in H^{-1/2}_{00}(\Gamma_N)$, considere el problema de valores de contorno

$$\Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \gamma_0(u) = g_D \quad \text{en} \quad \Gamma_D\,, \quad \gamma_1(u) = g_N \quad \text{en} \quad \Gamma_N\,. \tag{65}$$

b) Pruebe que una formulación primal-mixta de (65) se reduce a: Hallar $(u, \xi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma_D)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \;+\; \langle \xi, \gamma_0(v)|_{\Gamma_D} \rangle_{\Gamma_D} \;&=\; F(v) \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,, \\ \langle \lambda, \gamma_0(u)|_{\Gamma_D} \rangle_{\Gamma_D} \;&=\; G(\lambda) \qquad \forall\, \lambda \in H^{-1/2}(\Gamma_D)\,, \end{aligned} \tag{66}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_D}$ denota la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma_D)$ y $H^{1/2}(\Gamma_D)$, y F y G son funcionales lineales y acotados que dependen del par (f, g_N) y de g_D, respectivamente.

c) Muestre que una formulación dual-mixta de (65) queda dada por: Hallar $(\sigma, (u, \varphi)) \in H(\mathrm{div}; \Omega) \times \big(L^2(\Omega) \times H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)\big)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma \cdot \tau \;+\; \int_\Omega u \,\mathrm{div}(\tau) \;+\; \langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\tau)|_{\Gamma_N}, \varphi \rangle_{\Gamma_N} \;&=\; F(\tau)\,, \\ \int_\Omega v \,\mathrm{div}(\sigma) \;+\; \langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\sigma)|_{\Gamma_N}, \psi \rangle_{\Gamma_N} \;&=\; G(v, \psi)\,, \end{aligned} \tag{67}$$

para todo $(\tau, (v, \psi)) \in H(\mathrm{div}; \Omega) \times \big(L^2(\Omega) \times H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)\big)$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_N}$ denota la paridad dual de $H^{-1/2}_{00}(\Gamma_N)$ y $H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)$, y F y G son funcionales lineales y acotados que dependen de g_D y del par (f, g_N), respectivamente.

d) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para probar que uno de los dos problemas ((66) o (67)) está bien propuesto.

3. Teoría de Interpolación

3.1 Dado un triángulo K de $\mathbb{R}^2$, se define el espacio de Raviart-Thomas de orden 0 sobre K como $\mathrm{RT}_0(K) := [P_0(K)]^2 \oplus P_0(K)\,\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} := (x_1, x_2)^{\mathtt{t}}$ denota un vector genérico de K. Equivalentemente, $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{RT}_0(K)$ si y sólo si existen únicas constantes a, b, c tales que $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} a + c\,x_1 \\ b + c\,x_2 \end{pmatrix} \quad \forall\,\mathbf{x} := (x_1, x_2)^{\mathtt{t}} \in K$. En lo que sigue, $\boldsymbol{\nu}_K$ es el vector normal en ∂K, y los lados de K se denotan por F_j, $j \in \{1, 2, 3\}$, de modo que $\boldsymbol{\nu}_K|_{F_j}$ es un vector constante de $\mathbb{R}^2$ $\forall\, j \in \{1, 2, 3\}$.

a) Pruebe que para cada $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{RT}_0(K)$ se tiene que $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \in P_0(K)$ y $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_K|_{F_j} \in P_0(F_j)$ $\forall\, j \in \{1, 2, 3\}$.

b) Demuestre que si $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{RT}_0(K)$ es tal que $\displaystyle\int_{F_j} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_K \,=\, 0$ $\forall\, j \in \{1, 2, 3\}$, entonces necesariamente $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{0}$. Use primero integración por partes para probar que $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0$, y luego concluya utilizando el hecho que los vectores normales sobre los lados de K son l.i. dos a dos.

c) Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ defina el funcional $m_i(\boldsymbol{\tau}) := \int_{F_i} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_K$ $\forall\, \boldsymbol{\tau} \in [H^1(K)]^2$, y deduzca, a partir de b), que existen únicos $\boldsymbol{\tau}_j \in \mathrm{RT}_0(K)$, $j \in \{1, 2, 3\}$, tales que $m_i(\boldsymbol{\tau}_j) = \delta_{ij}$ $\forall\, i, j \in \{1, 2, 3\}$. A su vez, defina el operador de interpolación $\Pi_K : [H^1(K)]^2 \to \mathrm{RT}_0(K)$ por $\Pi_K(\boldsymbol{\tau}) := \displaystyle\sum_{i=1}^{3} m_i(\boldsymbol{\tau})\,\boldsymbol{\tau}_i$ $\forall\, \boldsymbol{\tau} \in [H^1(K)]^2$, y muestre que $\Pi_K(\boldsymbol{\tau})$ es el único elemento en $\mathrm{RT}_0(K)$ tal que $m_j(\Pi_K(\boldsymbol{\tau})) = m_j(\boldsymbol{\tau})$ $\forall\, j \in \{1, 2, 3\}$.

d) Sea $\widehat{K}$ el triángulo canónico de $\mathbb{R}^2$, y sea $F_K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación afín invertible dada por $F_K(\widehat{\mathbf{x}}) := B_K\,\widehat{\mathbf{x}} + b_K$ $\forall\, \widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$, con $B_K \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $b_K \in \mathbb{R}^2$, tal que $K = F_K(\widehat{K})$. Luego, dado $\boldsymbol{\tau} \in [H^m(K)]^2$, $m \in \{0, 1\}$, defina $\widehat{\boldsymbol{\tau}} := |\det B_K|\, B_K^{-1}\,\boldsymbol{\tau} \circ F_K$, pruebe que $\widehat{\boldsymbol{\tau}} \in [H^m(\widehat{K})]^2$, y concluya que existe $C > 0$, independiente de K, tal que

$$|\widehat{\boldsymbol{\tau}}|_{m,\widehat{K}} \,\le\, C\,\|B_K^{-1}\|\,\|B_K\|^m\,|\det B_K|^{1/2}\,|\boldsymbol{\tau}|_{m,K}\,.$$

Inversamente, si $\widehat{\boldsymbol{\tau}} \in [H^m(\widehat{K})]^2$, muestre que $\boldsymbol{\tau} := |\det B_K|^{-1}\,B_K\,\widehat{\boldsymbol{\tau}} \circ F_K^{-1} \in [H^m(K)]^2$ y que existe $C > 0$, independiente de K, tal que

$$|\boldsymbol{\tau}|_{m,K} \,\le\, C\,\|B_K\|\,\|B_K^{-1}\|^m\,|\det B_K|^{-1/2}\,|\widehat{\boldsymbol{\tau}}|_{m,\widehat{K}}\,.$$

e) Suponga que K es parte de una triangulación $\mathcal{T}_h$ perteneciente a una familia regular, y utilice la identidad $\Pi_{\widehat{K}}(\widehat{\boldsymbol{\tau}}) \,=\, \widehat{\Pi_K(\boldsymbol{\tau})}$ para demostrar que, dado $m \in \{0, 1\}$, existe $C := C(\widehat{K}, \Pi_{\widehat{K}}, m) > 0$, tal que

$$|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K(\boldsymbol{\tau})|_{m,K} \,\le\, C\,h_K^{1-m}\,|\boldsymbol{\tau}|_{1,K} \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in [H^1(K)]^2\,.$$

f) Pruebe que $\operatorname{div} \Pi_K(\boldsymbol{\tau}) = P_K(\operatorname{div} \boldsymbol{\tau})$ $\forall\, \boldsymbol{\tau} \in [H^1(K)]^2$, donde $P_K : L^2(K) \to P_0(K)$ es el proyector ortogonal.

3.2 Sea $\widehat{K}$ el elemento de referencia de una familia regular de triangulaciones $\big\{\mathcal{T}_h\big\}_{h>0}$, y para cada $K \in \mathcal{T}_h$ denote por $T_K : \widehat{K} \longrightarrow K$ la aplicación afín biyectiva definida por $T_K(\widehat{\mathbf{x}}) := B_K\,\widehat{\mathbf{x}} + b_K$ $\forall\, \widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{K}$, donde $B_K \in R^{n\times n}$ es invertible y $b_K \in R^n$.

a) Para cada par $(\boldsymbol{\tau}, \psi) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ defina $\widehat{\boldsymbol{\tau}} := |\det B_k|\, B_K^{-1} \boldsymbol{\tau} \circ T_K$ y $\widehat{\psi} := \psi \circ T_K$, y demuestre que $\displaystyle\int_{\partial \widehat{K}} \widehat{\psi}\, \widehat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\widehat{K}} = \int_{\partial K} \psi\, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_K$.

b) Para cada par $(\boldsymbol{\tau}, \varphi) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\partial K)$ defina $\widehat{\boldsymbol{\tau}} := |\det B_k|\, B_K^{-1} \boldsymbol{\tau} \circ T_K$ y $\widehat{\varphi} := \varphi \circ T_K$, y demuestre, usando a) y la densidad de $H^{1/2}(\partial K)$ en $L^2(\partial K)$, que $\displaystyle\int_{\partial \widehat{K}} \widehat{\varphi}\, \widehat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\widehat{K}} = \int_{\partial K} \varphi\, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_K$.

3.3 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2(\Omega)}$, norma inducida $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$, y semi-norma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$. Además, sea $P_1(\Omega)$ el espacio de polinomios sobre Ω de grado ≤ 1 con base $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ donde $p_0(x) = 1$ y $p_i(x) = x_i\ \forall\, i \in \{1, ..., n\}$, $\forall\, x := (x_1, ..., x_n)^{\mathbf{T}} \in \Omega$.

a) (Desigualdad de Poincaré generalizada). Defina la aplicación

$$|||v||| := \left\{ |v|^2_{H^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{n} |\langle v, p_i \rangle_{H^2(\Omega)}|^2 \right\}^{1/2} \quad \forall\, v \in H^2(\Omega),$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1\, |||v||| \leq \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C_2\, |||v||| \quad \forall\, v \in H^2(\Omega).$$

Ind.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción: suponga, en particular, que $\forall\, n \in \mathbf{N}$ existe $v_n \in H^2(\Omega)$ tal que $\|v_n\|_{H^2(\Omega)} > n\, |||v_n|||$. Luego, defina $w_n := \dfrac{v_n}{\|v_n\|_{H^2(\Omega)}}$, observe que $\|w_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$ y que $|||w_n||| < \frac{1}{n}$, y aplique el hecho que la inclusión de $H^2(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ es compacta.

b) (Lema de Deny-Lions). Considere el espacio cuociente $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ con norma

$$\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := \inf_{p \in P_1(\Omega)} \|v - p\|_{H^2(\Omega)},$$

y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega).$$

Demuestre que $|\cdot|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ está bien definida y que existe $C > 0$ tal que

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \leq \|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$$

$$\leq C\, |[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega).$$

Ind.: Note que para todo $p \in P_1(\Omega)$ y para todo α con $|\alpha| = 2$ se tiene $\partial^\alpha p = 0$. Aplique la desigualdad de Poincaré generalizada.

c) (Lema de Bramble-Hilbert). Sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ tal que $\Pi(p) = p\ \forall\, p \in P_1(\Omega)$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega).$$

Ind.: Note que $v - \Pi(v) = v - p - \Pi(v - p)\ \forall\, p \in P_1(\Omega)$, y luego aplique el Lema de Deny-Lions.

3.4 Sea $\Omega :=]a, b[$ y para cada $n \in \mathbf{N}$ introduzca una partición

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Además, denote $h := \max\left\{ x_j - x_{j-1} : \quad j \in \{1, 2, ..., n\} \right\}$, defina el espacio

$$V_h := \left\{ v \in L^2(\Omega) : \quad v|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \mathbf{P}_0([x_{j-1}, x_j]) \quad \forall\, j \in \{1, 2, ..., n\} \right\},$$

y considere el operador $\Pi_h : L^2(\Omega) \to V_h$ que a cada $v \in L^2(\Omega)$ le asigna su mejor aproximación $\Pi_h(v) \in V_h$ con respecto al producto escalar de $L^2(\Omega)$. Demuestre que existe una constante $C > 0$, independiente de n y de h, tal que

$$\| v - \Pi_h(v) \|_{L^2(\Omega)} \leq C\, h\, |v|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

3.5 Sean $\hat{K} = [0, 1]$, $K = [x_{j-1}, x_j]$, $h_j := x_j - x_{j-1} > 0$, y considere la aplicación afín $F : \hat{K} \to K$ definida por

$$F(\hat{x}) = h_j\, \hat{x} + x_{j-1} \qquad \forall\, \hat{x} \in \hat{K}\,.$$

1. Dado un entero $r \geq 0$, demuestre que $v \in H^r(K)$ sí y sólo sí $\hat{v} := v \circ F \in H^r(\hat{K})$, y en tal caso pruebe que
$$|\hat{v}|_{H^r(\hat{K})} = h_j^{r-1/2}\, |v|_{H^r(K)}\,.$$
2. Sean m, k enteros tal que $0 \leq m \leq k+1$, y sea $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), H^m(\hat{K}))$ tal que $\hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p} \quad \forall\, \hat{p} \in \mathbf{P}_k$, donde $\mathbf{P}_k$ es el espacio de polinomios de grado $\leq k$. Además, sea Π el operador definido por
$$\Pi v = (\hat{\Pi}\hat{v}) \circ F^{-1} \qquad \forall\, v \in H^{k+1}(K)\,.$$
Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de $\hat{K}$ y $\hat{\Pi}$, tal que
$$\|v - \Pi v\|_{H^m(K)} \leq C\, h_j^{k+1-m}\, |v|_{H^{k+1}(K)}\,.$$

3.6 Sea T un triángulo de $\mathbb{R}^2$ con diámetro h_T y sea $\widehat{T}$ el triángulo canónico con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. A su vez, sea $F_T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación afín invertible tal que $F_T(\widehat{T}) = T$, y defina $\psi_T := \widehat{\psi} \circ F_T^{-1}$, donde $\widehat{\psi}$ es la función burbuja de $\widehat{T}$. Además, sea $\mathcal{P}_0$ el proyector ortogonal de $L^2(T)$ en $\mathbb{P}_0(T)$, el espacio de polinomios constantes sobre T, con respecto al producto escalar

$$\langle f, g \rangle := \int_T \psi_T\, f\, g \qquad \forall\, f,\, g \in L^2(T)\,.$$

Aplique los lemas de Bramble-Hilbert y Deny-Lions para demostrar que existe $C > 0$, independiente de T, tal que:

$$\|v - \mathcal{P}_0(v)\|_{0,T} \leq C\, h_T\, |v|_{1,T} \qquad \forall\, v \in H^1(T)\,.$$

Dado $s \in]0, 1[$, utilice argumentos de interpolación de espacios normados y el hecho que $(L^2(T), H^1(T))_{s,2} = H^s(T)$, para probar que existe $C_s > 0$, independiente de T, tal que

$$\|v - \mathcal{P}_0(v)\|_{0,T} \leq C_s\, h_T^s\, \|v\|_{s,T} \qquad \forall\, v \in H^s(T)\,.$$

3.7 Sean K y $\widehat{K}$ compactos conexos de R^n con fronteras de clase $C^{0,1}$, y considere la aplicación afín $T_K : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $T_K(\widehat{\mathbf{x}}) := B_K\,\widehat{\mathbf{x}} + b_K \quad \forall\,\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, con $B_K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible and $b_K \in \mathbb{R}^n$, tal que $K = T_K(\widehat{K})$. A su vez, dados $p \in]1,+\infty[$ y m, k enteros tales que $0 \le m \le k+1$, denote por $\Big\{\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, ..., \widehat{p}_N\Big\}$ una base arbitraria de $\mathrm{P}_k(\widehat{K})$ (espacio de polinomios de grado $\le k$ sobre $\widehat{K}$) y tenga en mente los espacios de Sobolev $W^{m,p}(\widehat{K})$ y $W^{m,p}(K)$.

a) Utilice un corolario del Teorema de Hahn-Banach para probar que existe un conjunto de funcionales $\Big\{\widehat{F}_1, \widehat{F}_2, ..., \widehat{F}_N\Big\} \subseteq W^{m,p}(\widehat{K})'$ tales que $\widehat{F}_j(\widehat{p}_i) = \delta_{ij} \ \ \forall\, i,\, j \in \big\{1, 2, ..., N\big\}$.

b) Sean $\widehat{\Pi} : W^{m,p}(\widehat{K}) \longrightarrow \mathrm{P}_k(\widehat{K})$ y $\Pi_K : W^{m,p}(K) \longrightarrow \mathrm{P}_k(K)$ los operadores definidos por

$$\widehat{\Pi}(\widehat{v}) := \sum_{j=1}^{N} \widehat{F}_j(\widehat{v})\,\widehat{p}_j \quad \text{y} \quad \Pi_K(v) := \sum_{j=1}^{N} \widehat{F}_j(v \circ T_K)\,\widehat{p}_j \circ T_K^{-1}\,,$$

para todo $\widehat{v} \in W^{m,p}(\widehat{K})$ y para todo $v \in W^{m,p}(K)$, respectivamente. Defina $\sigma_K := h_K/\rho_K$ (según las notaciones de clases), y demuestre que existe una constante $C > 0$, independiente de K, tal que

$$|v - \Pi_K(v)|_{m,p;K} \,\le\, C\,\sigma_K^m\,h_K^{k+1-m}\,|v|_{k+1,p;K} \qquad \forall\, v \in W^{k+1,p}(K)\,.$$

3.8 En lo que sigue, k es un entero ≥ 0, $p \in (1,+\infty)$, y $\widehat{K}$ es el elemento de referencia de una familia regular de triangulaciones $\big\{\mathcal{T}_h\big\}_{h>0}$. El propósito de este ejercicio es demostrar para cada $K \in \mathcal{T}_h$ las propiedades de aproximación del interpolante local de Raviart-Thomas Π_K^k con respecto a las seminormas de los espacios de Sobolev $\mathbf{W}^{m,p}(K)$ y $\mathbf{W}^{\ell+1,p}(K)$, donde ℓ y m son enteros tales que $0 \le \ell \le k$ y $0 \le m \le \ell + 1$. Para ello, se sugiere proceder como se indica a continuación.

a) Sean $N := \dim \mathbf{P}_\ell(\widehat{K})$, $\{\widehat{\mathbf{p}}_1, \widehat{\mathbf{p}}_2, ..., \widehat{\mathbf{p}}_N\}$ una base de $\mathbf{P}_\ell(\widehat{K})$, y $\{f_1, f_2, ..., f_N\}$ la base asociada de $\mathbf{P}_\ell(\widehat{K})'$, la cual verifica $f_j(\widehat{\mathbf{p}}_i) = \delta_{ij} \ \ \forall\, i,\, j \in \{1, 2, ..., N\}$. Use el Teorema de Hahn-Banach para probar que existe $\{F_1, F_2, ..., F_N\} \subseteq \mathbf{W}^{\ell+1,p}(\widehat{K})'$ tal que

$$\mathbf{P}_\ell(\widehat{K}) \,\cap\, {}^{o}\{F_1, F_2, ..., F_N\} \,=\, \{\mathbf{0}\}\,,$$

y aplique la desigualdad de Poincaré generalizada en $\mathbf{W}^{\ell+1,p}(\widehat{K})$ para deducir que existe una constante $\widehat{C} > 0$ tal que

$$\|\widehat{\boldsymbol{\tau}}\|_{\ell+1,p;\widehat{K}} \,\le\, \widehat{C}\,|\widehat{\boldsymbol{\tau}}|_{\ell+1,p;\widehat{K}} \qquad \forall\,\widehat{\boldsymbol{\tau}} \,\in\, \mathbf{W}^{\ell+1,p}(\widehat{K}) \,\cap\, {}^{o}\{F_1, F_2, ..., F_N\}\,. \tag{68}$$

b) Pruebe que para cada $\widehat{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbf{W}^{\ell+1,p}(\widehat{K})$ existe un único $\widehat{\mathbf{q}} \in \mathbf{P}_\ell(\widehat{K})$ tal que $f_i(\widehat{\mathbf{q}}) = F_i(\widehat{\boldsymbol{\tau}})$ $\forall\, i \in \{1, 2, ..., N\}$, y concluya, usando (68), que existe una constante $\widehat{C} > 0$ tal que

$$\inf_{\widehat{\mathbf{p}} \in \mathbf{P}_\ell(\widehat{K})} \|\widehat{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\mathbf{p}}\|_{\ell+1,p;\widehat{K}} \,\le\, \widehat{C}\,|\widehat{\boldsymbol{\tau}}|_{\ell+1,p;\widehat{K}} \qquad \forall\,\widehat{\boldsymbol{\tau}} \,\in\, \mathbf{W}^{\ell+1,p}(\widehat{K})\,, \tag{69}$$

c) Muestre que $\Pi_{\widehat{K}}^k \in \mathcal{L}\big(\mathbf{W}^{\ell+1,p}(\widehat{K}), \mathbf{W}^{m,p}(\widehat{K})\big)$, y luego emplee (69) para probar que existe una constante $\widehat{C} > 0$ tal que

$$\|\widehat{\boldsymbol{\tau}} - \Pi_{\widehat{K}}^k(\widehat{\boldsymbol{\tau}})\|_{m,p;\widehat{K}} \,\le\, \widehat{C}\,|\widehat{\boldsymbol{\tau}}|_{\ell+1,p;\widehat{K}} \qquad \forall\,\widehat{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbf{W}^{\ell+1,p}(\widehat{K})\,. \tag{70}$$

d) A partir de las propiedades de escalamiento dadas por

$$\begin{aligned} |\widehat{v}|_{m,p;\widehat{K}} &\le C\,\|B_K\|^m\,|\det B_K|^{-1/p}\,|v|_{m,p;K} \qquad \forall\, v \in W^{m,p}(K)\,, \quad \text{y} \\ |v|_{m,p;K} &\le C_2\,\|B_K^{-1}\|^m\,|\det B_K|^{1/p}\,|\widehat{v}|_{m,p;\widehat{K}} \qquad \forall\, \widehat{v} \in W^{m,p}(\widehat{K})\,, \end{aligned}$$

donde $\widehat{v}$ denota v compuesta con la aplicación afín, deduzca los escalamientos respectivos entre $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{m,p}(K)$ y su transformación de Piola $\widehat{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbf{W}^{m,p}(\widehat{K})$ (ver más detalles al respecto en problema 3.9).

e) Utilizando los nuevos escalamientos deducidos en d), y empleando a su vez (70), concluya que existe una constante $C > 0$, independiente de K, tal que

$$|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})|_{m,p;K} \;\le\; C\,h_K^{\ell+1-m}\,|\boldsymbol{\tau}|_{\ell+1,p;K} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{\ell+1,p}(K)\,. \tag{71}$$

f) Extienda la estimación de e) al caso del interpolante global Π_h^k.

3.9 Sean K y $\widehat{K}$ compactos conexos de $\mathbb{R}^n$ con fronteras de clase $\mathrm{C}^{0,1}$, y sea $T_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la aplicación afín invertible dada por $T_K(\widehat{\mathbf{x}}) := B_K\,\widehat{\mathbf{x}} + b_K$ para todo $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, con $B_K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b_K \in \mathbb{R}^n$, tal que $K = T_K(\widehat{K})$. Además, sean m un entero ≥ 0 y $p \in (1, +\infty)$. Utilice la densidad de $\mathrm{C}^m(K)$ en $W^{m,p}(K)$ para demostrar que para cada $v \in W^{m,p}(K)$ existe $\widehat{v} := v \circ T_K \in W^{m,p}(\widehat{K})$, el cual satisface

$$|\widehat{v}|_{m,p;\widehat{K}} \;\le\; C\,\|B_K\|^m\,|\det(B_K)|^{-1/p}\,|v|_{m,p;K}\,,$$

donde C es una constante positiva independiente de K. A su vez, sin realizar una demostración análoga a la anterior, sino simplemente intercambiando los roles de K y $\widehat{K}$, y aplicando lo ya demostrado, establezca la implicación y desigualdad recíprocas, esto es, para cada $\widehat{v} \in W^{m,p}(\widehat{K})$ existe $v := \widehat{v} \circ T_K^{-1} \in W^{m,p}(K)$ y

$$|v|_{m,p;K} \;\le\; C\,\|B_K^{-1}\|^m\,|\det(B_K)|^{1/p}\,|\widehat{v}|_{m,p;\widehat{K}}\,.$$

3.10 El propósito de este ejercicio es demostrar las propiedades de aproximación del interpolante local Π_K^k (resp. global Π_h^k) de Raviart-Thomas con respecto a la norma $\|\cdot\|_{0,K}$ (resp. $\|\cdot\|_{0,\Omega}$) y la seminorma del espacio de Sobolev $W^{\ell,p}(K)$ (resp. $W^{\ell,p}(\Omega)$), donde ℓ es un entero tal que $1 \le \ell \le k+1$. Más precisamente, se pide lo que se indica a continuación.

a) Dado $K \in \mathcal{T}_h$, use escalamiento con respecto a la composición con la aplicación afín T_K, la inyección continua $i : W^{1,p}(\widehat{K}) \longrightarrow L^2(\widehat{K})$ para todo $p \ge \frac{2n}{n+2}$, lo cual significa que existe una constante $\widehat{c} > 0$ tal que

$$\|\widehat{\boldsymbol{\tau}}\|_{0,\widehat{K}} \;\le\; \widehat{c}\,\|\widehat{\boldsymbol{\tau}}\|_{1,p;\widehat{K}} \qquad \forall\, \widehat{\boldsymbol{\tau}} \in W^{1,p}(\widehat{K})\,,$$

las propiedades de aproximación ya conocidas de Π_K^k, y las desigualdades geométricas asociadas a T_K, para probar que existe una constante $\widetilde{C} > 0$, independiente de K, tal que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,K} \;\le\; \widetilde{C}\,h_K^{\ell-n(2-p)/(2p)}\,|\boldsymbol{\tau}|_{\ell,p;K} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in W^{\ell,p}(K)\,. \tag{72}$$

b) En el caso $p \in (\frac{2n}{n+2}, 2]$, aplique la propiedad sub-aditiva, la cual establece que, dados n escalares no negativos a_j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, y $r \in (0, 1)$, se tiene que

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j\Big)^r \,\leq\, \sum_{j=1}^{n} a_j^r\,,$$

para demostrar, a partir de (72), que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega} \;\leq\; \widetilde{C}\, h^{\ell - n(2-p)/(2p)}\, |\boldsymbol{\tau}|_{\ell,p;\Omega} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in W^{\ell,p}(\Omega)\,. \tag{73}$$

c) En el caso $p \in (2, +\infty)$, use la desigualdad de Hölder discreta para probar, a partir de (72), que existe una constante $\bar{C} > 0$, que depende de $\widetilde{C}$ y $|\Omega|$, tal que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega} \;\leq\; \bar{C}\, h^{\ell - n/(2p)}\, |\boldsymbol{\tau}|_{\ell,p;\Omega} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in W^{\ell,p}(\Omega)\,. \tag{74}$$

d) Ilustre la aplicabilidad de (73) y (74) con la demostración de alguna condición inf-sup discreta que Ud. conozca.

3.11 [DESIGUALDAD DE POINCARÉ GENERALIZADA EN $W^{m,p}(\Omega)$]
Dados Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$, con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $m \in \mathbf{N}$ y $p \in [1, +\infty)$, se define el espacio de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) \,:=\, \Big\{ v \in L^p(\Omega) : \quad \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \quad \forall\, \alpha\,,\; |\alpha| \,\leq\, m \Big\}\,,$$

el cual es un espacio de Banach provisto de la norma

$$\|v\|_{m,p;\Omega} \,:=\, \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \right\}^{1/p} \qquad \forall\, v \,\in\, W^{m,p}(\Omega)\,,$$

cuya semi-norma asociada se define como

$$|v|_{m,p;\Omega} \,:=\, \left\{ \sum_{|\alpha| = m} \|\partial^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \right\}^{1/p} \qquad \forall\, v \,\in\, W^{m,p}(\Omega)\,.$$

Sea $\mathcal{F}$ una familia finita en $W^{m,p}(\Omega)'$ tal que[1] $P_{m-1}(\Omega) \cap {}^o\mathcal{F} \,=\, \{0\}$, y defina

$$\|v\|_{\mathcal{F}} \,:=\, \left\{ |v|^p_{m,p;\Omega} \,+\, \sum_{F \in \mathcal{F}} |F(v)|^p \right\}^{1/p} \qquad \forall\, v \in W^{m,p}(\Omega)\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$, que depende de Ω, tal que

$$\|v\|_{m,p;\Omega} \,\leq\, C\, \|v\|_{\mathcal{F}} \qquad \forall\, v \in W^{m,p}(\Omega)\,.$$

3.12 [LEMA DE DENY-LIONS EN $W^{k+1,p}(K)$]
Dados un entero $k \geq 0$, $p \in [1, +\infty)$, y un compacto convexo K de $\mathbb{R}^n$ de clase $C^{0,1}$, el propósito de este ejercicio es probar que existe una constante $C > 0$, que depende sólo de K, tal que

$$\inf_{p \in P_k(K)} \|v - p\|_{k+1,p;K} \;\leq\; C\, |v|_{k+1,p;K} \qquad \forall\, v \,\in\, W^{k+1,p}(K)\,, \tag{75}$$

para lo cual se sugiere proceder como se indica a continuación.

a) Sean $N := \dim P_k(K)$, $\{p_1, p_2, ..., p_N\}$ una base de $P_k(K)$, y denote por $\{f_1, f_2, ..., f_N\}$ la base canónica asociada del dual $P_k(K)'$, la cual verifica $f_j(p_i) = \delta_{ij} \;\; \forall\, i,\, j \in \{1, 2, ..., N\}$. Luego, demuestre que existe un conjunto de funcionales $\{F_1, F_2, ..., F_N\} \subseteq W^{k+1,p}(K)'$ tal que

$$P_k(K) \cap {}^o\{F_1, F_2, ..., F_N\} = \{0\},$$

y use problema 2 para deducir que existe una constante $C_K > 0$ tal que

$$\|v\|_{k+1,p;K} \leq C_K\, |v|_{k+1,p;K} \qquad \forall\, v \in W^{k+1,p}(K) \cap {}^o\{F_1, F_2, ..., F_N\}. \tag{76}$$

b) Pruebe que para cada $v \in W^{k+1,p}(K)$ existe un único $q_v \in P_k(K)$ tal que $f_i(q_v) = F_i(v)$ $\forall\, i \in \{1, 2, ..., N\}$, y concluya a partir de (76) la desigualdad requerida (75).

3.13 [LEMA DE BRAMBLE-HILBERT EN $W^{k+1,p}(K)$ Y $W^{m,p}(K)$]
Además de las notaciones del problema anterior, considere un entero m tal que $0 \leq m \leq k+1$ y un operador $\Pi \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(K), W^{m,p}(K))$ tal que $\Pi(p) = p \;\; \forall\, p \in P_k(K)$, y pruebe que existe $C > 0$, que depende de K, tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{m,p;K} \leq C\, |v|_{k+1,p;K} \qquad \forall\, v \in W^{k+1,p}(K).$$

3.14 [PROPIEDADES DE ESCALAMIENTO EN $W^{m,p}(K)$ Y $W^{m,p}(\widehat{K})$]
Sean K y $\widehat{K}$ compactos conexos de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere la aplicación afín $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $F(\widehat{x}) := B\,\widehat{x} + b \quad \forall\, \widehat{x} \in \mathbb{R}^n$, con $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible y $b \in \mathbb{R}^n$, tal que $K = F(\widehat{K})$. Se puede probar que $v \in W^{m,p}(K)$ si y sólo si $\widehat{v} := v \circ F \in W^{m,p}(\widehat{K})$, y demuestre en tal caso, procediendo análogamente a lo realizado en clases, que existen constantes $C_j := C_j(m, p, n) > 0$, $j \in \{1, 2\}$, tales que

$$|\widehat{v}|_{m,p;\widehat{K}} \leq C_1\, \|B\|^m\, |\det B|^{-1/p}\, |v|_{m,p;K} \qquad \forall\, v \in W^{m,p}(K),$$

y

$$|v|_{m,p;K} \leq C_2\, \|B^{-1}\|^m\, |\det B|^{1/p}\, |\widehat{v}|_{m,p;\widehat{K}} \qquad \forall\, \widehat{v} \in W^{m,p}(\widehat{K}).$$

3.15 [PROPIEDAD DE APROXIMACIÓN EN $W^{k+1,p}(K)$ Y $W^{m,p}(K)$]
Además de las notaciones del problema anterior, considere el proyector ortogonal $\Pi : L^2(K) \longrightarrow P_k(K)$ con respecto al producto escalar de $L^2(K)$, y defina el operador $\widehat{\Pi} : L^2(\widehat{K}) \longrightarrow P_k(\widehat{K})$ por

$$\widehat{\Pi}(\widehat{v}) := \Pi(\widehat{v} \circ F^{-1}) \circ F \qquad \forall\, \widehat{v} \in L^2(\widehat{K}).$$

a) Demuestre que $\widehat{\Pi}$ coincide con el proyector ortogonal de $L^2(\widehat{K})$ en $P_k(\widehat{K})$.

b) Denote $\sigma_K := h_K/\rho_K$ (según las notaciones usuales de clases), y aplique lo obtenido en los problemas 4 y 5 para demostrar que existe una constante $C > 0$, independiente de K, tal que

$$|v - \Pi(v)|_{m,p;K} \leq C\, \sigma_K^m\, h_K^{k+1-m}\, |v|_{k+1,p;K} \qquad \forall\, v \in W^{k+1,p}(K).$$

4. Métodos de Elementos Finitos Mixtos

4.1 Sean Ω un abierto acotado y convexo de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ, $f \in L^2(\Omega)$, y $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ la única solución de: $-\Delta u = f$ en Ω, $u = 0$ en Γ. Dada una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de $\bar{\Omega}$ hecha de triángulos K y lados e, se definen los espacios de LAGRANGE y de CROUZEIX-RAVIART, respectivamente, como sigue:

$$X_h := \Big\{ v \in C(\bar{\Omega}) : \quad v|_K \in \mathbf{P}_1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,, \quad v = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \Big\},$$

$$V_h := \Big\{ v \in L^2(\Omega) : \ v|_K \in \mathbf{P}_1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,,\ v \text{ es continua en los puntos medios de los lados } e \in \mathcal{T}_h\,,\ v = 0 \text{ en los puntos medios de los lados } e \subseteq \Gamma \Big\}.$$

a) Defina $\|v_h\|_h := \left\{ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v_h|_{1,K}^2 \right\}^{1/2}$ $\forall\, v_h \in V_h$, pruebe que $\|\cdot\|_h$ es una norma sobre V_h, y concluya que existe un único $u_h \in V_h$ tal que

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h = F(v_h) := \int_\Omega f\, v_h \quad \forall\, v_h \in V_h\,.$$

b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|u - u_h\|_h \le C \left\{ \inf_{v_h\in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h\in V_h\setminus 0} \frac{|a_h(u, w_h) - F(w_h)|}{\|w_h\|_h} \right\}. \tag{77}$$

c) Integre por partes en cada $K \in \mathcal{T}_h$ y pruebe que

$$\begin{aligned} a_h(u, w_h) - F(w_h) &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}\, w_h = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{e\subseteq\partial K} \int_e \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} \left(w_h - \mathcal{P}_{0,e}(w_h)\right) \\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{e\subseteq\partial K} \int_e \left(\nabla u - \nabla \Pi_h(u)\right) \cdot \boldsymbol{\nu} \left(w_h - \mathcal{P}_{0,e}(w_h)\right) \qquad \forall\, w_h \in V_h\,, \end{aligned} \tag{78}$$

donde $\Pi_h : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to X_h$ es el operador de interpolación global de Lagrange y $\mathcal{P}_{0,e} : L^2(e) \to \mathbf{P}_0(e)$ es el proyector ortogonal.

d) Deduzca a partir de (77) y (78) que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|u - u_h\|_h \le C\, h\, |u|_{2,\Omega}\,.$$

4.2 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$, con frontera Γ de clase $C^{0,1}$ y vector normal $\boldsymbol{\nu}$. Dados $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^n$ y $\mathbf{g} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^n$, la formulación en desplazamiento del problema de elasticidad lineal con condiciones de contorno de Dirichlet, consiste en: Hallar $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^n$ tal que

$$-\,\mu\, \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu)\, \nabla \mathrm{div}\, \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \tag{79}$$

donde $\lambda\,,\ \mu > 0$ son las constantes de Lamé del material respectivo.

a) Defina el pseudoesfuerzo $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} := \mu\,\nabla\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathbf{I}$ en Ω, y recuerde que $\mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega) = H_0 \oplus \mathbb{R}\,\mathbf{I}$, donde

$$H_0 := \left\{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega) : \int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}) \,=\, 0\right\}$$

e $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Luego, considere la descomposición $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} + c\,\mathbf{I}$, con $\boldsymbol{\sigma} \in H_0$, $c \in \mathbb{R}$, denote por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la paridad dual entre $[H^{-1/2}(\Gamma)]^n$ y $[H^{1/2}(\Gamma)]^n$, y demuestre que (79) da origen a la siguiente formulación mixta: Hallar $(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) \in H_0 \times [L^2(\Omega)]^n$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}} + \frac{1}{n\big(n\lambda + (n+1)\,\mu\big)}\int_\Omega \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\operatorname{tr}\boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} \;&=\; F(\boldsymbol{\tau})\,, \\ \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} \;&=\; G(\mathbf{v})\,, \end{aligned} \tag{80}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}) \in H_0 \times [L^2(\Omega)]^n$, donde

$$F(\boldsymbol{\tau}) \,:=\, \langle \boldsymbol{\tau}\,\boldsymbol{\nu}, \mathbf{g}\rangle \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau} \,\in\, \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega)\,,$$

y

$$G(\mathbf{v}) \,:=\, -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \qquad \forall\,\mathbf{v} \,\in\, [L^2(\Omega)]^n\,.$$

b) Use la teoría de Babuška-Brezzi para probar que (80) está bien propuesto.

c) Use la teoría de Babuška-Brezzi discreta para definir, explícitamente, un esquema de Galerkin estable para (80).

4.3 Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ, y sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia de triangulaciones regulares de $\bar{\Omega}$, cada una de ellas hecha de triángulos K con diámetro h_K y lados e con longitud h_e. Entonces, se definen los subespacios:

$$X_h \,:=\, \Big\{\, v_h \in C(\bar{\Omega}) : \quad v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall\,K \in \mathcal{T}_h \,\Big\}\,,$$

$$\Lambda_h \,:=\, \Big\{\, \lambda_h \in C(\Gamma) : \quad \lambda_h|_e \in \mathbb{P}_1(e) \quad \forall\,e \,\in\, \Gamma_h \,\Big\}\,,$$

y

$$\Phi_{\tilde{h}} \,:=\, \Big\{\, \phi_{\tilde{h}} \in L^2(\Gamma) : \quad \phi_{\tilde{h}}|_e \in \mathbb{P}_0(e) \quad \forall\,e \in \Gamma_{\tilde{h}} \,\Big\}\,,$$

donde Γ_h es la partición de Γ heredada de $\mathcal{T}_h$, y $\Gamma_{\tilde{h}}$ es otra partición de Γ, con $\tilde{h} := \max\big\{\,|e| : e \in \Gamma_{\tilde{h}}\,\big\}$. Además, sea $I_h : H^1(\Omega) \to X_h$ el interpolante de Clément, y recuerde que existen constantes positivas c_1, c_2, independientes de h, tales que, para cada $v \in H^1(\Omega)$ y $e \in \mathcal{T}_h$ se tiene:

$$\|I_h(v)\|_{1,\Omega} \,\le\, c_1\,\|v\|_{1,\Omega} \quad \text{y} \quad \|v - I_h(v)\|_{0,e} \,\le\, c_2\,h_e^{1/2}\,|v|_{1,\omega_e}\,,$$

donde $\omega_e \,:=\, \cup\big\{\,K \in \mathcal{T}_h : \quad K\cap e \,\neq\, \phi\,\big\}$.

a) Defina un problema auxiliar conveniente con dato $\lambda_h \in \Lambda_h$, y aplique I_h para probar que existen constantes C_1, $C_2 > 0$, independientes de h y $\tilde{h}$, tales que, para cada $\phi_{\tilde{h}} \in \Phi_{\tilde{h}}$ se tiene:

$$\sup_{v_h\in X_h\backslash 0} \frac{\langle \phi_{\tilde{h}}, v_h\rangle}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \,\ge\, C_1 \sup_{\lambda_h\in\Lambda_h\backslash 0} \frac{\langle \phi_{\tilde{h}}, \lambda_h\rangle}{\|\lambda_h\|_{1/2,\Gamma}} \,-\, C_2\left(\frac{h_\Gamma}{\tilde{h}}\right)^{1/2} \|\phi_{\tilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma}\,,$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota la paridad dual entre los espacios $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$, y $h_\Gamma := \max\{|e| : e \in \Gamma_h\}$.

b) Defina un problema auxiliar conveniente con dato $\phi_{\tilde{h}} \in \Phi_{\tilde{h}}$, y aplique la propiedad de aproximación dada por:

$$\|\lambda - \mathcal{P}_h^{1/2}(\lambda)\|_{1/2,\Gamma} \leq C\, h_\Gamma^{1/2}\, \|\lambda\|_{1,\Gamma} \quad \forall\, \lambda \in H^1(\Gamma)\,,$$

donde $\mathcal{P}_h^{1/2} : H^{1/2}(\Gamma) \to \Lambda_h$ es el proyector ortogonal, para probar que existen C_0, $\beta > 0$, independientes de h_Γ y $\tilde{h}$, tales que, para cada $h_\Gamma \leq C_0\, \tilde{h}$ se tiene:

$$\sup_{\lambda_h \in \Lambda_h \backslash 0} \frac{\langle \phi_{\tilde{h}}, \lambda_h \rangle}{\|\lambda_h\|_{1/2,\Gamma}} \geq \beta\, \|\phi_{\tilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma} \quad \forall\, \phi_{\tilde{h}} \in \Phi_{\tilde{h}}\,.$$

c) Como una alternativa al análisis sugerido por a) y b), demuestre directamente, sin pasar por a), usando sólo el operador I_h, que existen constantes C_3, $C_4 > 0$, independientes de h y $\tilde{h}$, tales que, para cada $\phi_{\tilde{h}} \in \Phi_{\tilde{h}}$ se tiene:

$$\sup_{v_h \in X_h \backslash 0} \frac{\langle \phi_{\tilde{h}}, v_h \rangle}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \geq \left\{ C_3 \; - \; C_4 \left(\frac{h_\Gamma}{\tilde{h}} \right)^{1/2} \right\} \|\phi_{\tilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma}$$

4.4 Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, donde Ω es un dominio poligonal de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ y vector normal $\boldsymbol{\nu}$, el esquema de Galerkin para la formulación mixta del problema de Poisson respectivo con condiciones de contorno de Neumann, se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}_h, (u_h, \xi_h)) \in H_h \times (Q_h^u \times Q_h^\xi)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_h + \int_\Omega u_h \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h + \langle \boldsymbol{\tau}_h \cdot \boldsymbol{\nu}, \xi_h \rangle_\Gamma &= 0\,, \\ \int_\Omega v_h \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h + \langle \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\nu}, \lambda_h \rangle_\Gamma &= -\int_\Omega f v_h + \langle g, \lambda_h \rangle_\Gamma\,, \end{aligned} \tag{81}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}_h, (v_h, \lambda_h)) \in H_h \times (Q_h^u \times Q_h^\xi)$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ es la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$, y H_h, Q_h^u y Q_h^ξ son subespacios de elementos finitos de $H(\mathrm{div};\Omega)$, $L_0^2(\Omega)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$, respectivamente. En particular, dada una triangularización $\mathcal{T}_h$ de $\overline{\Omega}$ y un entero $k \geq 0$, defina

$$H_h := \Big\{ \boldsymbol{\tau}_h \in H(\mathrm{div};\Omega) : \quad \boldsymbol{\tau}_h|_K \in \mathrm{RT}_k(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\}\,,$$

$$Q_h^u := \Big\{ v_h \in L_0^2(\Omega) : \quad v_h|_K \in P_k(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\}\,,$$

$$\Phi_h := \Big\{ \boldsymbol{\tau}_h \cdot \boldsymbol{\nu}|_\Gamma : \quad \boldsymbol{\tau}_h \in H_h \Big\}\,,$$

y suponga que existen constantes $\widetilde{c}$, $\widetilde{\beta} > 0$, independientes de h, y un operador lineal $\mathcal{L}_h : \Phi_h \to H_h$, tales que $\|\mathcal{L}_h(\phi_h)\|_{\mathrm{div};\Omega} \leq \widetilde{c}\, \|\phi_h\|_{-1/2,\Gamma} \quad \forall\, \phi_h \in \Phi_h$, $\operatorname{div} \mathcal{L}_h(\phi_h) \in P_0(\Omega) \quad \forall\, \phi_h \in \Phi_h$, $\mathcal{L}_h(\phi_h) \cdot \boldsymbol{\nu} = \phi_h \quad \text{en} \quad \Gamma \quad \forall\, \phi_h \in \Phi_h$, y

$$\sup_{\substack{\phi_h \in \Phi_h \\ \phi_h \neq 0}} \frac{\langle \phi_h, \lambda_h \rangle_\Gamma}{\|\phi_h\|_{-1/2,\Gamma}} \geq \widetilde{\beta}\, \|\lambda_h\|_{1/2,\Gamma} \qquad \forall\, \lambda_h \in Q_h^\xi\,.$$

Pruebe en este caso que (81) verifica las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi discreto.

4.5 Sean X, M, y Q espacios de Hilbert reales, y defina el espacio producto $H := X \times M$. A su vez, considere $A_1 \in \mathcal{L}(X, X)$, $B_1 \in \mathcal{L}(X, M)$, y $B \in \mathcal{L}(H, Q)$, y defina los operadores $A : H \to H$ y $T : H \times Q \to H \times Q$ según la estructura matricial dada por:

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & B_1^* \\ B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Defina el esquema de Galerkin asociado al operador T y luego aplique la teoría de Babuška-Brezzi discreta para establecer condiciones necesarias y suficientes que garanticen su solubilidad y estabilidad.

b) Dados un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, y $K \in [C(\Omega)]^{n\times n}$ una matriz simétrica y uniformemente definida positiva, considere el problema de valores de contorno:

$$-\operatorname{div}\big(K \nabla u\big) = f \quad \text{en} \quad \Omega, \quad u = g \quad \text{en} \quad \Gamma.$$

Defina las variables auxiliares $\mathbf{t} := \nabla u$ y $\boldsymbol{\sigma} := K \nabla u = K\,\mathbf{t}$ en Ω, y demuestre que el operador que representa la formulación mixta resultante tiene la forma de T con incógnitas $\mathbf{t} \in X := [L^2(\Omega)]^n$, $\boldsymbol{\sigma} \in M := H(\operatorname{div}; \Omega)$, y $u \in Q := L^2(\Omega)$, y con operadores dados por $A_1(\mathbf{s}) := K\,\mathbf{s} \quad \forall\, \mathbf{s} \in X$, $B_1(\mathbf{s}) := -\mathbf{s} \quad \forall\, \mathbf{s} \in X$, y $B(\mathbf{s}, \boldsymbol{\tau}) := -\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \quad \forall\, (\mathbf{s}, \boldsymbol{\tau}) \in H$.

c) Defina subespacios de elementos finitos X_h, M_h, y Q_h de X, M, y Q, respectivamente, con los cuales se cumplan las hipótesis deducidas en a).

4.6 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ. Dado $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, el esquema de Galerkin para la formulación mixta del PROBLEMA DE STOKES con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas se reduce, luego de eliminar la incógnita presión, a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in H_h \times Q_h$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\,\mu} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau}_h^{\mathrm{d}} + \int_\Omega \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{\tau}_h &= 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau}_h \in H_h \\ \int_\Omega \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{\sigma}_h &= -\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \quad \forall\, \mathbf{v}_h \in Q_h\,, \end{aligned} \tag{82}$$

donde μ es la viscosidad cinemática del fluido, y H_h y Q_h son, respectivamente, subespacios de elementos finitos de

$$H := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div}; \Omega) : \quad \int_\Omega \operatorname{tr} \boldsymbol{\tau} = 0 \right\} \quad \text{y} \quad Q = [L^2(\Omega)]^2.$$

Defina explícitamente un caso particular de H_h y Q_h con los cuales (82) resulta únicamente soluble, estable y convergente.

4.7 Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert tales que $H \subseteq Q$, y suponga que existe $A \in \mathcal{L}(H, Q)$ such that

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle_H = \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle_Q + \langle A(\boldsymbol{\zeta}), A(\boldsymbol{\tau}) \rangle_Q \qquad \forall\, \boldsymbol{\zeta},\ \boldsymbol{\tau} \in H\,.$$

A su vez, dados $\boldsymbol{\sigma} \in H$ y $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subespacios de dimension finita de H, considere para cada $n \in \mathbb{N}$ una aproximación $\boldsymbol{\sigma}_n \in H_n$ de $\boldsymbol{\sigma}$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_n\|_Q < +\infty\,.$$

Luego, asuma que $A(\boldsymbol{\sigma})$ es conocido explícitamente, y defina una **aproximación postprocesada** de $\boldsymbol{\sigma}$ como el único elemento $\boldsymbol{\sigma}_n^* \in H_n$ (si es que existe) tal que

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_n^*, \boldsymbol{\tau}_n \rangle_H \,=\, \langle \boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\tau}_n \rangle_Q \,+\, \langle A(\boldsymbol{\sigma}), A(\boldsymbol{\tau}_n) \rangle_Q \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau}_n \in H_n \,.$$

Pruebe que $\boldsymbol{\sigma}_n^*$ está efectivamente bien definido y concluya que

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_n^*\|_H \,\le\, \|\boldsymbol{\sigma} - \Pi_n(\boldsymbol{\sigma})\|_H \,+\, \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_n\|_Q \,,$$

donde $\Pi_n : H \longrightarrow H_n$ es el proyector ortogonal.

4.8 Sea Ω un dominio acotado de R^2 con frontera poligonal Γ, y sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia de triangulaciones regulares de $\bar{\Omega}$, cada una de ellas hecha de triángulos K con diámetro h_K y lados e con longitud h_e. A su vez, dados un entero $k \ge 0$ y un conjunto S contenido en Γ o en Ω, denote por $\mathrm{P}_k(S)$ el espacio de polinomios de grado $\le k$ sobre S, y considere los subespacios de $H^1(\Omega)$ y $H^{-1/2}(\Gamma)$ definidos, respectivamente, por:

$$H_h \,:=\, \Big\{ v_h \in C(\bar{\Omega}) : \quad v_h|_K \in \mathrm{P}_1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\}$$

y

$$Q_{\widetilde{h}} \,:=\, \Big\{ \psi_{\widetilde{h}} \in L^2(\Gamma) : \quad \psi_{\widetilde{h}}|_e \in \mathrm{P}_0(e) \quad \forall\, e \in \Gamma_{\widetilde{h}} \Big\} ,$$

donde $\Gamma_{\widetilde{h}}$ es una partición de Γ, independiente de la que se hereda de $\mathcal{T}_h$, con tamaño de malla $\widetilde{h} \,:=\, \text{máx}\big\{ |e| : \quad e \,\in\, \Gamma_{\widetilde{h}} \big\}$. Entonces, denotando por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$, se tiene que un esquema de Galerkin para la formulación primal - mixta del problema de Poisson con fuente $f \in L^2(\Omega)$ y dato de Dirichlet $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, está dado por: Hallar $(u_h, \varphi_{\widetilde{h}}) \in H_h \times Q_{\widetilde{h}}$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \,+\, \langle \varphi_{\widetilde{h}}, v_h \rangle \;&=\; \int_\Omega f\, v_h \qquad \forall\, v_h \in H_h \,, \\ \langle \psi_{\widetilde{h}}, u_h \rangle \;&=\; \langle \psi_{\widetilde{h}}, g \rangle \qquad \forall\, \psi_{\widetilde{h}} \in Q_{\widetilde{h}} \,. \end{aligned} \tag{83}$$

El propósito principal de este ejercicio es probar que (83) verifica las hipótesis del Teorema de Babuška - Brezzi discreto, para lo cual se pide proceder como sigue.

a) Suponga que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|\psi_{\widetilde{h}}\|_{0,\Gamma} \,\le\, C \widetilde{h}^{-1/2} \, \|\psi_{\widetilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma} \qquad \forall\, \psi_{\widetilde{h}} \in Q_{\widetilde{h}} \,,$$

y demuestre, utilizando resultados de interpolación de espacios de Sobolev (válidos también en Γ), que existe $c > 0$, independiente de h, tal que

$$\|\psi_{\widetilde{h}}\|_{r,\Gamma} \,\le\, c\, \widetilde{h}^{-1/2-r} \, \|\psi_{\widetilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma} \qquad \forall\, \psi_{\widetilde{h}} \in Q_{\widetilde{h}} \,, \quad \forall\, r \in [-1/2, 0] \,.$$

b) Dado $\psi_{\widetilde{h}} \in Q_{\widetilde{h}}$, denote por $z \in H^1(\Omega)$ la única solución del problema de Neumann: $-\Delta z + z = 0 \;$ en $\; \Omega \,, \;\; \nabla z \cdot \boldsymbol{\nu} = \psi_{\widetilde{h}} \;$ en $\; \Gamma$, donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal en Γ, y observe (no demuestre) que la regularidad elíptica de este problema garantiza la existencia de $\delta \in (0, 1/2)$ y $C > 0$, independiente de h, tal que $z \in H^{1+\delta}(\Omega)$ y $\|z\|_{1+\delta,\Omega} \,\le\, C\, \|\psi_{\widetilde{h}}\|_{-1/2+\delta,\Gamma}$. Denote por $\mathbf{P}_{1,h} : H^1(\Omega) \longrightarrow H_h$ el proyector ortogonal con respecto a $\| \cdot \|_{1,\Omega}$, y deduzca a partir de lo anterior las siguientes desigualdades e identidades:

$$\|z - \mathbf{P}_{1,h}(z)\|_{1,\Omega} \,\le\, C \left(\frac{h}{\widetilde{h}} \right)^\delta \|\psi_{\widetilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma} \,, \qquad \langle \psi_{\widetilde{h}}, z \rangle \,=\, \|z\|_{1,\Omega}^2 \,,$$

$$\|\psi_{\widetilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma} \,\le\, \|z\|_{1,\Omega} \,, \quad \text{y} \quad \|\psi_{\widetilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma}^2 \,\le\, \langle \psi_{\widetilde{h}}, z \rangle \,.$$

c) Notando en b) que $\mathbf{P}_{1,h}(z) \in H_h$, razone a partir de la desigualdad

$$\sup_{\substack{v_h \in H_h \\ v_h \neq 0}} \frac{\langle \psi_{\widetilde{h}}, v_h \rangle}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \,\geq\, \frac{\langle \psi_{\widetilde{h}}, \mathbf{P}_{1,h}(z) \rangle}{\|\mathbf{P}_{1,h}(z)\|_{1,\Omega}}\,,$$

sumando y restando z en la segunda componente, y deduzca finalmente que existen constantes $c_0,\ \beta > 0$, independientes de h, tales que cada vez que $h \,\leq\, c_0\,\widetilde{h}$ se tiene que

$$\sup_{\substack{v_h \in H_h \\ v_h \neq 0}} \frac{\langle \psi_{\widetilde{h}}, v_h \rangle}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \,\geq\, \beta\,\|\psi_{\widetilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma} \qquad \forall\,\psi_{\widetilde{h}} \in Q_{\widetilde{h}}\,. \tag{84}$$

d) Defina el kernel discreto $V_h \,:=\, \Big\{ v_h \,\in\, H_h \,:\quad \langle \psi_{\widetilde{h}}, v_h \rangle \,=\, 0 \quad \forall\,\psi_{\widetilde{h}} \,\in\, Q_{\widetilde{h}} \Big\}$, pruebe que $V_h \,\subseteq\, \widehat{V} \,:=\, \Big\{ v \,\in\, H^1(\Omega) \,:\, \displaystyle\int_\Gamma v \,=\, 0 \Big\}$, y luego aplique la desigualdad de Poincaré generalizada para concluir que existe $\alpha > 0$, independiente de h, tal que $|v_h|^2_{1,\Omega} \,\geq\, \alpha\,\|v_h\|^2_{1,\Omega}$ $\forall\, v_h \in V_h$.

e) Concluya a partir de c) y d) que (83) está bien propuesto, denote por $(u,\varphi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ la solución continua asociada, y establezca la estimación de Cea correspondiente.

f) Sea $\mathbf{P}_{0,\widetilde{h}} \,:\, L^2(\Gamma) \,\longrightarrow\, Q_{\widetilde{h}}$ el proyector ortogonal con respecto a $\|\cdot\|_{0,\Gamma}$, el cual verifica $\|\psi - \mathbf{P}_{0,\widetilde{h}}(\psi)\|_{0,\Gamma} \,\leq\, c\,\widetilde{h}^{1/2}\,\|\psi\|_{1/2,\Gamma} \quad \forall\,\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$, y a partir del argumento de dualidad

$$\|\psi - \mathbf{P}_{0,\widetilde{h}}(\psi)\|_{-1/2,\Gamma} \,=\, \sup_{\substack{\lambda \in H^{1/2}(\Gamma) \\ \lambda \neq 0}} \frac{\langle \psi - \mathbf{P}_{0,\widetilde{h}}(\psi), \lambda \rangle}{\|\lambda\|_{1/2,\Gamma}} \,=\, \sup_{\substack{\lambda \in H^{1/2}(\Gamma) \\ \lambda \neq 0}} \frac{\langle \psi - \mathbf{P}_{0,\widetilde{h}}(\psi), \lambda \rangle_{0,\Gamma}}{\|\lambda\|_{1/2,\Gamma}}$$

pruebe que $\|\psi - \mathbf{P}_{0,\widetilde{h}}(\psi)\|_{-1/2,\Gamma} \,\leq\, c\,\widetilde{h}\,\|\psi\|_{1/2,\Gamma} \quad \forall\,\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$.

g) Sea $\mathbf{P}_{-1/2,\widetilde{h}} : H^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow Q_{\widetilde{h}}$ el proyector ortogonal con respecto a $\|\cdot\|_{-1/2,\Gamma}$, y utilice f) y argumentos de interpolación para probar que existe $c > 0$, independiente de h, tal que

$$\|\psi - \mathbf{P}_{-1/2,\widetilde{h}}(\psi)\|_{-1/2,\Gamma} \,\leq\, c\,\widetilde{h}^{r+1/2}\,\|\psi\|_{r,\Gamma} \quad \forall\,\psi \in H^r(\Gamma)\,, \quad \forall\, r \in [-1/2, 1/2]\,.$$

h) Recordando que $(u,\varphi) \,\in\, H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ es la solución continua asociada a (83), demuestre que existe $C > 0$, independiente de h, tal que para $u \in H^{\ell+1}(\Omega),\ 0 \leq \ell \leq 1$, y $\varphi \in H^r(\Gamma),\ -1/2 \leq r \leq 1/2$, se tiene

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \,+\, \|\varphi - \varphi_{\widetilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma} \,\leq\, C\,\Big\{ h^\ell\,\|u\|_{\ell+1,\Omega} \,+\, \widetilde{h}^{r+1/2}\,\|\varphi\|_{r,\Gamma} \Big\}\,.$$

i) Sea Γ_h la partición de Γ que se hereda de $\mathcal{T}_h$ con tamaño de malla asociado $h_\Gamma \,:=$ $\text{máx}\,\big\{ |e| \,:\quad e \in \Gamma_h \big\}$, y considere el interpolante de Clément $I_h \,:\, H^1(\Omega) \,\longrightarrow\, H_h$ para deducir una demostración alternativa de (84). Más precisamente, dados $\psi_{\widetilde{h}} \,\in\, Q_{\widetilde{h}}$ y $v \in H^1(\Omega)$, razone a partir de la desigualdad

$$\sup_{\substack{v_h \in H_h \\ v_h \neq 0}} \frac{\langle \psi_{\widetilde{h}}, v_h \rangle}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \,\geq\, \frac{\langle \psi_{\widetilde{h}}, I_h(v) \rangle}{\|I_h(v)\|_{1,\Omega}} \,=\, \frac{\langle \psi_{\widetilde{h}}, I_h(v) \rangle_{0,\Gamma}}{\|I_h(v)\|_{1,\Omega}}\,,$$

sumando y restando v en la segunda componente, usando que I_h es acotado independientemente de h, y deduzca que existen constantes C_1, $C_2 > 0$, tales que

$$\sup_{\substack{v_h \in H_h \\ v_h \neq 0}} \frac{\langle \psi_{\widetilde{h}}, v_h \rangle}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \geq C_1 \sup_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{\langle \psi_{\widetilde{h}}, v \rangle}{\|v\|_{1,\Omega}} - C_2 \left(\frac{h_\Gamma}{\widetilde{h}} \right)^{1/2} \|\psi_{\widetilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma} \,.$$

Finalmente, concluya de la estimación anterior que existen constantes $\widetilde{c}_0$, $\widetilde{\beta} > 0$, independientes de h, tales que cada vez que $h_\Gamma \leq \widetilde{c}_0 \, \widetilde{h}$ se tiene que

$$\sup_{\substack{v_h \in H_h \\ v_h \neq 0}} \frac{\langle \psi_{\widetilde{h}}, v_h \rangle}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \geq \widetilde{\beta} \, \|\psi_{\widetilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma} \qquad \forall \, \psi_{\widetilde{h}} \in Q_{\widetilde{h}} \,.$$

Comente cual es la ventaja de esta demostración de (84) con respecto a la que se obtuvo en c).

j) Por último, use la densidad de $C^\infty(\bar{\Omega})$ y $C^\infty(\Gamma)$ en $H^1(\Omega)$ y $H^{-1/2}(\Gamma)$, respectivamente, para probar que, sin ninguna hipótesis adicional de regularidad, igual se obtiene convergencia, esto es

$$\lim_{h,\widetilde{h} \to 0} \left\{ \|u - u_h\|_{1,\Omega} + \|\varphi - \varphi_{\widetilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma} \right\} = 0 \,.$$

4.9 Sea Ω un dominio acotado de R^2 con frontera poligonal Γ, y sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$, cada una de ellas hecha de triángulos K con diámetro h_K y lados e con longitud h_e. A su vez, dados un entero $k \geq 0$ y un conjunto $S \subseteq \mathrm{R}^2$, denote por $\mathrm{P}_k(S)$ el espacio de polinomios de grado $\leq k$ sobre S, y defina los subespacios de $H^1(\Omega)$ y $H^{-1/2}(\Gamma)$ dados, respectivamente, por

$$H_h := \left\{ v_h \in C(\bar{\Omega}) : \quad v_h|_K \in \mathrm{P}_1(K) \quad \forall \, K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$Q_{\widetilde{h}} := \left\{ \psi_{\widetilde{h}} \in L^2(\Gamma) : \quad \psi_{\widetilde{h}}|_e \in \mathrm{P}_0(e) \quad \forall \, e \in \Gamma_{\widetilde{h}} \right\},$$

donde $\Gamma_{\widetilde{h}}$ es una partición de Γ con tamaño de malla $\widetilde{h} := \max \left\{ h_e : \quad e \in \Gamma_{\widetilde{h}} \right\}$. En relación a $Q_{\widetilde{h}}$, notar que existe $c > 0$, independiente de h, tal que

$$\|\psi_{\widetilde{h}}\|_{r,\Gamma} \leq c \, \widetilde{h}^{-1/2-r} \, \|\psi_{\widetilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma} \qquad \forall \, \psi_{\widetilde{h}} \in Q_{\widetilde{h}} \,, \quad \forall \, r \in [-1/2, 0] \,. \tag{85}$$

Luego, introduzca el esquema primal - mixto discreto del problema de Poisson con datos $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma)$: Hallar $(u_h, \varphi_{\widetilde{h}}) \in H_h \times Q_{\widetilde{h}}$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \int_\Gamma \varphi_{\widetilde{h}} \, v_h &= \int_\Omega f \, v_h \qquad \forall \, v_h \in H_h \,, \\ \int_\Gamma \psi_{\widetilde{h}} \, u_h &= \int_\Gamma \psi_{\widetilde{h}} \, g \qquad \forall \, \psi_{\widetilde{h}} \in Q_{\widetilde{h}} \,. \end{aligned} \tag{86}$$

El propósito principal de este ejercicio es probar que (86) verifica las hipótesis del Teorema de Babuška - Brezzi discreto, para lo cual se pide proceder como sigue.

a) Considere el kernel discreto $V_h := \left\{ v_h \in H_h : \quad \int_\Gamma \psi_{\widetilde{h}} \, v_h = 0 \quad \forall \, \psi_{\widetilde{h}} \in Q_{\widetilde{h}} \right\}$, y deduzca que $| \cdot |_{1,\Omega}$ y $\| \cdot \|_{1,\Omega}$ son equivalentes en este espacio.

b) Sea $\{\Pi_h\}_{h\in I} \subseteq \mathcal{L}\big(H^1(\Omega), H_h\big)$ una familia de operadores uniformemente acotados, para la cual existe una constante $c > 0$, independiente de h, tal que

$$\|v - \Pi_h(v)\|_{0,e} \,\leq\, c\, h_e^{1/2}\, |v|_{1,\omega_e} \quad \forall \text{ lado } e \,\in\, \mathcal{T}_h\,, \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

donde $\omega_e := \cup\big\{K \in \mathcal{T}_h : \; K \cap e \neq \phi\big\}$, y demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|v - \Pi_h(v)\|_{0,\Gamma} \,\leq\, C\, h_\Gamma^{1/2}\, |v|_{1,\Omega} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,, \tag{87}$$

con $h_\Gamma \,:=\, \text{máx}\big\{h_e : \quad e \subseteq \Gamma\big\}$.

c) A partir de la desigualdad $S(\psi_{\widetilde{h}}) := \displaystyle\sup_{\substack{v_h \in H_h\\ v_h \neq 0}} \frac{\left|\displaystyle\int_\Gamma \psi_{\widetilde{h}}\, v_h\right|}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \,\geq\, \frac{\left|\displaystyle\int_\Gamma \psi_{\widetilde{h}}\, \Pi_h(v)\right|}{\|\Pi_h(v)\|_{1,\Omega}}$, la cual es válida para todo $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ tal que $\Pi_h(v) \neq 0$, y usando (85), (87), y argumentos de dualidad, deduzca que existen constantes $\widetilde{c}_0,\ \widetilde{\beta} > 0$, independientes de h y $\widetilde{h}$, tales que para $h_\Gamma \leq \widetilde{c}_0\, \widetilde{h}$ se tiene que $S(\psi_{\widetilde{h}}) \,\geq\, \widetilde{\beta}\, \|\psi_{\widetilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma} \quad \forall\, \psi_{\widetilde{h}} \in Q_{\widetilde{h}}$.

4.10 Sean H y Q espacios de Hilbert con normas dadas por $\|\cdot\|_H$ y $\|\cdot\|_Q$, respectivamente, y sean $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas. Entonces, dados $F \in H'$ y $G \in Q'$, considere el problema: Hallar $(\sigma, u) \,\in\, H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) \,+\, b(\tau,u) \quad &= \quad F(\tau) \qquad \forall\, \tau \,\in\, H\,, \\ b(\sigma, v) \quad &= \quad G(v) \qquad \forall\, v \,\in\, Q\,. \end{aligned} \tag{88}$$

A su vez, sean H_h y Q_h subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, y sea $a_h : H_h \times H_h \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada. Entonces, dados $F_h \in H_h'$ y $G_h \in Q_h'$, considere el problema de Galerkin: Hallar $(\sigma_h, u_h) \,\in\, H_h \times Q_h$ tal que

$$\begin{aligned} a_h(\sigma_h,\tau_h) \,+\, b(\tau_h,u_h) \quad &= \quad F_h(\tau_h) \qquad \forall\, \tau_h \,\in\, H_h\,, \\ b(\sigma_h, v_h) \quad &= \quad G_h(v_h) \qquad \forall\, v_h \,\in\, Q_h\,. \end{aligned} \tag{89}$$

Suponga que (88) y (89) satisfacen las hipótesis de los Teoremas de Babuška-Brezzi continuo y discreto con constantes inf-sup correspondientes dadas por α, β, α_h y β_h, y denote por V_h y V_h^g el kernel discreto de b y su trasladado según la segunda ecuación de (89), respectivamente.

i) Aplique desigualdad triangular, la condición inf-sup para a_h, y las ecuaciones que definen (88) y (89), para demostrar que

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h\|_H \,\leq\, C_{1,h}\, \|F - F_h\|_{V_h'} \,+\, C_{2,h}\, \mathrm{dist}(u, Q_h) \\ +\, \inf_{\tau_h^g \in V_h^g} \left\{ C_{3,h}\, \|\sigma - \tau_h^g\|_H \,+\, C_{4,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h\\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\tau_h^g, \tau_h) - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \right\}, \end{aligned} \tag{90}$$

donde

$$C_{1,h} := \frac{1}{\alpha_h}\,, \quad C_{2,h} := \frac{\|b\|}{\alpha_h}\,, \quad C_{3,h} := 1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}\,, \quad \text{y} \quad C_{4,h} := \frac{1}{\alpha_h}\,.$$

ii) Proceda análogamente a lo hecho en clases para probar, a partir de (90), que

$$\begin{aligned}\|\sigma-\sigma_h\|_H \,&\le\, \widetilde{C}_{1,h}\,\|F-F_h\|_{V_h'} \,+\, \widetilde{C}_{2,h}\,\|G-G_h\|_{Q_h'} \,+\, \widetilde{C}_{3,h}\,\mathrm{dist}(u,Q_h)\\ &+\inf_{\zeta_h\in H_h}\left\{\widetilde{C}_{4,h}\,\|\sigma-\zeta_h\|_H \,+\, \widetilde{C}_{5,h}\sup_{\substack{\tau_h\in V_h\\ \tau_h\neq 0}}\frac{a(\zeta_h,\tau_h)-a_h(\zeta_h,\tau_h)}{\|\tau_h\|_H}\right\},\end{aligned}\tag{91}$$

donde

$$\widetilde{C}_{1,h}:=\frac{1}{\alpha_h},\quad \widetilde{C}_{2,h}:=\frac{1}{\beta_h}\left(1+\frac{\|a\|}{\alpha_h}\right)+\frac{(\|a\|+\|a_h\|)}{\alpha_h\beta_h},\quad \widetilde{C}_{3,h}:=\frac{\|b\|}{\alpha_h},$$

$$\widetilde{C}_{4,h}:=\left(1+\frac{\|a\|}{\alpha_h}\right)\left(1+\frac{\|b\|}{\beta_h}\right)+\frac{(\|a\|+\|a_h\|)\|b\|}{\alpha_h\beta_h},\quad \text{y}\quad \widetilde{C}_{5,h}:=\frac{1}{\alpha_h}.$$

iii) Suponga que a_h se puede extender a $H\times H$, y deduzca en tal caso una simplificación de (91) a partir de un manejo algebraico conveniente del supremo.

4.11 Sean H y Q espacios de Banach reflexivos, y sean $a: H\times H\to\mathbb{R}$, $b: H\times Q\to\mathbb{R}$ y $c: Q\times Q\to\mathbb{R}$ formas bilineales acotadas con constantes correspondientes $\|a\|$, $\|b\|$, y $\|c\|$, tales que a y c son simétricas y semi-definidas positivas, esto es

$$a(\tau,\tau)\,\ge\,0\quad\forall\,\tau\in H\quad \text{y}\quad c(v,v)\,\ge\,0\quad\forall\,v\in Q\,.$$

A su vez, sean $\{H_h\}_{h>0}$ y $\{Q_h\}_{h>0}$ familias de subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, denote por V_h el espacio nulo del operador inducido por $b|_{H_h\times Q_h}$, y suponga que:

i) existe una constante $\widetilde{\alpha}>0$, independiente de h, tal que

$$\sup_{\substack{\tau_h\in V_h\\ \tau_h\neq 0}}\frac{a(\zeta_h,\tau_h)}{\|\tau_h\|_H}\,\ge\,\widetilde{\alpha}\,\|\zeta_h\|_H\qquad\forall\,\zeta_h\in V_h\,,$$

ii) existe una constante $\widetilde{\beta}>0$, independiente de h, tal que

$$\sup_{\substack{\tau_h\in H_h\\ \tau_h\neq 0}}\frac{b(\tau_h,v_h)}{\|\tau_h\|_H}\,\ge\,\widetilde{\beta}\,\|v_h\|_Q\qquad\forall\,v_h\in Q_h\,.$$

a) Use las ideas del problema 2.30 para probar que para cada $(f,g)\in H'\times Q'$ existe un único $(\sigma_h,u_h)\in H_h\times Q_h$ tal que

$$\begin{aligned}a(\sigma_h,\tau_h)+b(\tau_h,u_h) &= f(\tau_h)\qquad\forall\,\tau_h\in H_h\,,\\ b(\sigma_h,v_h)-c(u_h,v_h) &= g(v_h)\qquad\forall\,v_h\in Q_h\,,\end{aligned}\tag{92}$$

y

$$\|\sigma_h\|_H+\|u_h\|_Q\,\le\,\widetilde{C}\left\{\|f\|_{H'}\,+\,\|g\|_{Q'}\right\},$$

donde $\widetilde{C}$ es una constante positiva que depende sólo de $\|a\|$, $\|c\|$, $\widetilde{\alpha}$, y $\widetilde{\beta}$.

b) Suponga que el problema continuo asociado a (92) tiene una única solución $(\sigma, u) \in H \times Q$, y demuestre la estimación de Céa correspondiente, esto es que existe una constante $\widehat{C} > 0$, que depende sólo de $\|a\|$, $\|b\|$, $\|c\|$, $\widetilde{\alpha}$, y $\widetilde{\beta}$, tal que

$$\|\sigma - \sigma_h\|_H + \|u - u_h\|_Q \,\le\, \widehat{C}\left\{\mathrm{dist}(\sigma, H_h) + \mathrm{dist}(u, Q_h)\right\}.$$

4.12 En el mismo contexto del problema 2.31, suponga ahora que Ω es convexo y considere el esquema de Galerkin: Hallar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_{2,h} \times M_{1,h}$ tal que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_1(\mathbf{v}_h, p_h) &= F(\mathbf{v}_h) \qquad \forall\, \mathbf{v}_h \in X_{1,h}\,, \\ b_2(\mathbf{u}_h, q_h) &= G(q_h) \qquad \forall\, q_h \in M_{2,h}\,, \end{aligned} \tag{93}$$

donde, dados un entero $k \ge 0$ y una triangularización $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$, se definen[1]:

$$\begin{aligned} &\mathbf{RT}_k(\mathcal{T}_h) := \left\{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}(\mathrm{div}\,;\Omega): \quad \mathbf{v}_h|_K \in \mathbf{RT}_k(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\right\}, \\ &\mathrm{P}_k(\mathcal{T}_h) := \left\{q_h \in \mathrm{L}^2(\Omega): \quad q_h|_K \in \mathrm{P}_k(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\right\}, \\ &X_{2,h} := \mathbf{H}_0^r(\mathrm{div}\,_r;\Omega) \cap \mathbf{RT}_k(\mathcal{T}_h)\,, \quad M_{1,h} := \mathrm{L}_0^r(\Omega) \cap \mathrm{P}_k(\mathcal{T}_h)\,, \\ &X_{1,h} := \mathbf{H}_0^s(\mathrm{div}\,_s;\Omega) \cap \mathbf{RT}_k(\mathcal{T}_h)\,, \quad M_{2,h} := \mathrm{L}_0^s(\Omega) \cap \mathrm{P}_k(\mathcal{T}_h)\,, \\ &\widetilde{\mathrm{P}}_{k+1}(\mathcal{T}_h) := \left\{\phi_h \in \mathrm{H}_0^1(\Omega): \ \phi_h|_K \in \mathrm{P}_{k+1}(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\right\}. \end{aligned}$$

A su vez, sea $\mathcal{R}_h^k : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \widetilde{\mathrm{P}}_{k+1}(\mathcal{T}_h)$ el proyector que a cada $\phi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ le asigna el único $\mathcal{R}_h^k(\phi) \in \widetilde{\mathrm{P}}_{k+1}(\mathcal{T}_h)$ tal que $\displaystyle\int_\Omega \nabla\mathcal{R}_h^k(\phi)\cdot\nabla\phi_h = \int_\Omega \nabla\phi\cdot\nabla\phi_h \quad \forall\, \phi_h \in \widetilde{\mathrm{P}}_{k+1}(\mathcal{T}_h)$.

a) Demuestre que los espacios nulos discretos de los operadores inducidos por b_1 y b_2 están dados por

$$\mathcal{K}_h^k \,:=\, \left\{\mathbf{v}_h \in \mathbf{RT}_k(\mathcal{T}_h): \ \mathbf{v}_h\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma \text{ y } \mathrm{div}\,(\mathbf{v}_h) = 0 \text{ en } \Omega\right\},$$

y deduzca que $\mathcal{K}_h^k = \mathbf{curl}\big(\widetilde{\mathrm{P}}_{k+1}(\mathcal{T}_h)\big)$.

b) Sea $\Theta_h^k : \mathbf{L}^1(\Omega) \to \mathcal{K}_h^k$ el proyector que a cada $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ le asigna el único $\Theta_h^k(\mathbf{w}) \in \mathcal{K}_h^k$ tal que $\displaystyle\int_\Omega \Theta_h^k(\mathbf{w})\cdot\mathbf{v}_h = \int_\Omega \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}_h \quad \forall\, \mathbf{v}_h \in \mathcal{K}_h^k$, suponga que para cada $t \in (1, +\infty)$ existe una constante positiva C_t^k, independiente de h, tal que $\|\nabla\mathcal{R}_h^k(\phi)\|_{0,t;\Omega} \,\le\, C_t^k\,\|\nabla\phi\|_{0,t;\Omega} \quad \forall\, \phi \in \mathrm{W}_0^{1,t}(\Omega)$, y utilice a) para demostrar que $\|\Theta_h^k(\mathbf{w})\|_{0,t;\Omega} \,\le\, C_t^k\,\|\mathbf{w}\|_{0,t;\Omega} \quad \forall\, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^t(\mathrm{div}\,_t;\Omega)$ tal que $\mathrm{div}\,(\mathbf{w}) = 0$ en Ω.

c) Use el operador $D_s : \mathbf{L}^s(\Omega) \to \mathbf{L}^s(\Omega)$ y b) para probar que existe una constante $\widetilde{\alpha} > 0$, independiente de h, tal que $\displaystyle\sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathcal{K}_h^k \\ \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{a(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{X_1}} \,\ge\, \widetilde{\alpha}\,\|\mathbf{w}_h\|_{X_2} \quad \forall\, \mathbf{w}_h \in \mathcal{K}_h^k$.

d) De manera análoga a c) pruebe que $\displaystyle\sup_{\mathbf{w}_h \in \mathcal{K}_h^k} a(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) > 0 \quad \forall\, \mathbf{v}_h \in \mathcal{K}_h^k,\ \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}$.

[1] $\mathbf{H}_0^t(\mathrm{div}\,_t;\Omega) := \big\{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^t(\mathrm{div}\,_t;\Omega): \ \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma\big\}$, $\mathrm{L}_0^t(\Omega) := \big\{q \in \mathrm{L}^t(\Omega): \ \int_\Omega q = 0\big\}$

e) Suponga que para cada $g \in M_2$ (resp. $g \in M_1$) hay un único $z \in W^{2,s}(\Omega)$ (resp. $z \in W^{2,r}(\Omega)$) tal que $\Delta z = g$ en Ω, $\nabla z \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ en Γ y $\int_\Omega z = 0$, para el cual se tiene $\|z\|_{2,s;\Omega} \le C_s \|g\|_{0,s;\Omega}$ (resp. $\|z\|_{2,r;\Omega} \le C_r \|g\|_{0,r;\Omega}$) con constantes C_s, $C_r > 0$, independientes de g y z, y pruebe las condiciones inf-sup discretas de b_1 y b_2.

f) Aplique el caso general del Teorema de Babuška-Brezzi discreto en espacios de Banach y concluya la solubilidad y dependencia continua de (93). Establezca, además, la estimación de Céa y las razones de convergencia respectivas.

4.13 En la formulación mixta del problema de elasticidad lineal en $\mathbb{R}^2$ con condiciones de contorno de Dirichlet aparece la forma bilineal $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ dada por

$$b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \eta)) := \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \eta \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \eta)) \in H \times Q\,,$$

donde $H := H(\mathbf{div}; \Omega)$ y $Q := Q_1 \times Q_2$, con $Q_1 := \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $Q_2 := \mathbb{L}^2(\Omega)_{\texttt{asim}}$. Notar que b puede descomponerse como $b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \eta)) = b_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) + b_2(\boldsymbol{\tau}, \eta)$, donde $b_1 : H \times Q_1 \to \mathbb{R}$ y $b_2 : H \times Q_2 \to \mathbb{R}$ están dadas por

$$b_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{\tau} \qquad \text{y} \qquad b_2(\boldsymbol{\tau}, \eta) := \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \eta\,.$$

a) Sean H_h, $Q_{1,h}$ y $Q_{2,h}$ subespacios de elementos finitos de H, Q_1 y Q_2, respectivamente, y suponga que existen operadores $\Pi_{i,h} : H \to H_h$, $i \in \{1, 2\}$, uniformemente acotados (con respecto a h), tales que para todo $\boldsymbol{\tau} \in H$:

   i) $b_1(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{v}_h) = 0 \qquad \forall\, \mathbf{v}_h \in Q_{1,h}$,

   ii) $b_1(\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{v}_h) = 0 \qquad \forall\, \mathbf{v}_h \in Q_{1,h}$,

   iii) $b_2(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}) - \Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), \eta_h) = 0 \qquad \forall\, \eta_h \in Q_{2,h}$.

   Demuestre que existe $\beta > 0$, independiente de h, tal que

$$\sup_{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}_h, (\mathbf{v}_h, \eta_h))}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_H} \ge \beta\, \|(\mathbf{v}_h, \eta_h)\|_Q \qquad \forall\, (\mathbf{v}_h, \eta_h) \in Q_h := Q_{1,h} \times Q_{2,h}\,.$$

b) Sean H_h y $Q_{1,h}$ subespacios dados, y $\Pi_{1,h} : H \to H_h$ un operador específico, uniformemente acotado, tales que la parte i) de a) se verifica. A su vez, sean X_h y M_h subespacios de elementos finitos de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ y $\mathrm{L}^2_0(\Omega)$, respectivamente, y suponga que para cada par $(F_h, G_h) \in X'_h \times M'_h$, el siguiente esquema verifica, uniformemente con respecto a h, las hipótesis de la teoría de Babuška-Brezzi discreta: Hallar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{w}_h + \int_\Omega p_h \,\mathrm{div}\, \mathbf{w}_h &= F_h(\mathbf{w}_h) \quad \forall\, \mathbf{w}_h \in X_h\,, \\ \int_\Omega q_h \,\mathrm{div}\, \mathbf{u}_h &= G_h(q_h) \quad \forall\, q_h \in M_h\,. \end{aligned} \tag{94}$$

   En particular, dado $\boldsymbol{\tau} \in H$, considere $F_h \equiv 0$ y

$$G_h(q_h) := \int_\Omega \big(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})\big) : S(q_h)\,, \quad \text{con} \quad S(q_h) := \begin{pmatrix} 0 & q_h \\ -q_h & 0 \end{pmatrix} \in Q_2\,,$$

   y, bajo el supuesto que H_h contiene a $\mathrm{curl}\, X_h$, defina $\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}) := \mathrm{curl}\, \mathbf{u}_h$. Demuestre entonces que $\Pi_{2,h} : H \to H_h$ es uniformemente acotado y satisface ii) de la parte a). Además, suponga que $Q_{2,h}$ está contenido en $S(M_h)$, y demuestre, a partir de la segunda ecuación de (94), que la parte iii) de a) también se verifica.

c) Comenzando con H_h y $Q_{1,h}$ dados por el espacio global de Raviart-Thomas de orden k y el espacio de funciones polinomiales discontinuas de grado $\leq k$ en cada elemento, respectivamente, aplique lo deducido en b) al caso de X_h y M_h dados por el mini-elemento estable para Stokes, y deduzca los subespacios H_h, $Q_{1,h}$ y $Q_{2,h}$ resultantes que prueban la inf-sup discreta para b.

5. Otros Tópicos

5.1 Sea Ω un dominio poligonal convexo de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ, y dado $f \in L^2(\Omega)$, considere la ecuación de Helmholtz con datos de Dirichlet:

$$\Delta u + u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{95}$$

i) Introduzca la incógnita auxiliar $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω y pruebe que una formulación variacional mixta de (95) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} \,-\, \int_\Omega \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \,=\, -\int_\Omega f\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,. \tag{96}$$

ii) Defina el operador $P : H(\mathrm{div};\Omega) \to [L^2(\Omega)]^2$ que a cada $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ le asigna $P(\boldsymbol{\tau}) := \nabla z$, donde $z \in H_0^1(\Omega)$ es la única solución del problema de valores de contorno: $\Delta z = \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau})$ en Ω, $z = 0$ en Γ. Pruebe que P es compacto y que $H(\mathrm{div};\Omega) = P(H(\mathrm{div};\Omega)) \oplus (I-P)(H(\mathrm{div};\Omega))$.

iii) Utilice la descomposición anterior de $H(\mathrm{div};\Omega)$ para demostrar que (96) se reduce, equivalentemente, a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) \,+\, K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) \,=\, F(\boldsymbol{\tau}) \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,, \tag{97}$$

donde A y B son formas bilineales acotadas cuyos operadores inducidos $\mathbf{A} : H(\mathrm{div};\Omega) \to H(\mathrm{div};\Omega)$ y $\mathbf{K} : H(\mathrm{div};\Omega) \to H(\mathrm{div};\Omega)$ son biyectivo y compacto, respectivamente, y F es el funcional dado a la derecha de (96).

Ind. Defina el operador $S(\boldsymbol{\tau}) := (I - 2\,P)(\boldsymbol{\tau})$ y considere la expresión dada por $A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau}))$ para probar que A satisface las condiciones inf-sup continuas.

iv) Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia de subespacios de dimensión finita de $H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que ella satisface $\lim\limits_{h\to 0} \mathrm{dist}\,(\boldsymbol{\tau}, H_h) \,=\, 0$ para todo $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$, y considere el esquema de Galerkin perturbado: Hallar $\boldsymbol{\sigma}_h \in H_h$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\tau}_h) \,=\, F(\boldsymbol{\tau}_h) \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau}_h \in H_h\,. \tag{98}$$

Suponga que existen operadores lineales $\mathcal{E}_h : [H^1(\Omega)]^2 \to H_h$ tales que

$$\mathrm{div}\,(\mathcal{E}_h\,P(\boldsymbol{\tau}_h)) \,=\, \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}_h) \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau}_h \,\in\, H_h\,,$$

y

$$\|\boldsymbol{\tau} - \mathcal{E}_h(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^2} \,\le\, C\,h\,\|\boldsymbol{\tau}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau} \,\in\, [H^1(\Omega)]^2\,.$$

Demuestre que existe $h_0 > 0$ tal que $\forall\,h \le h_0$ el problema (98) tiene solución única, la cual es estable y convergente con constantes independientes de h.

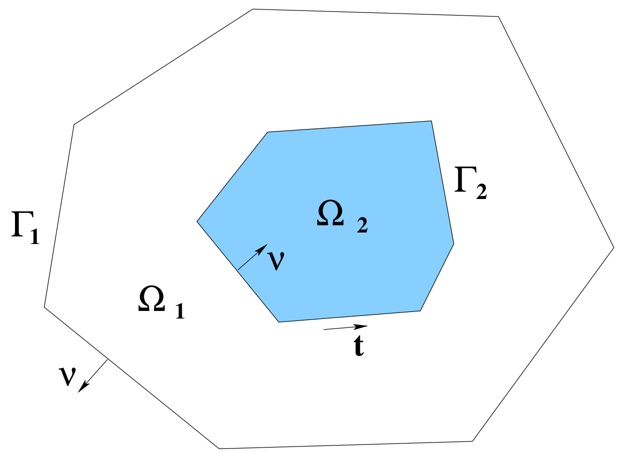
Ind. Defina el operador $S_h(\boldsymbol{\tau}) := (I \,-\, 2\,\mathcal{E}_h\,P)(\boldsymbol{\tau}_h)$ y considere la expresión

$$A(\boldsymbol{\tau}, S_h(\boldsymbol{\tau})) = A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau})) - A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau}) - S_h(\boldsymbol{\tau}))$$

para probar que A satisface las condiciones inf-sup discretas.

v) Qué se puede decir del esquema de Galerkin respectivo para (97)?.

5.2 Sea Ω_2 un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ_2, y sea Ω_1 la region anular acotada por Γ_2 y por una curva cerrada Γ_1 cuyo interior contiene completamente a $\overline{\Omega}_2$, como se muestra en la siguiente figura:



El propósito de este ejercicio es analizar el acoplamiento de un fluido viscoso que ocupa la region Ω_1 con un material poroso que vive en Ω_2. Si $\mu > 0$ es la viscosidad y $\mathbf{K}$ es una matriz simétrica y uniformemente definida positiva que representa la permeabilidad del medio poroso, entonces las ecuaciones constitutivas están dadas por las leyes de Stokes y de Darcy, respectivamente, esto es:

$$\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1) \,=\, -\,p_1\,\mathbf{I} \,+\, 2\,\mu\,\mathbf{e}(\mathbf{u}_1) \quad \text{en} \quad \Omega_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 \,=\, -\,\mathbf{K}\,\nabla\,p_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,,$$

donde $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ y (p_1, p_2) denotan las velocidades y presiones en los dominios correspondientes, $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)$ es el tensor de esfuerzos y $\mathbf{e}(\mathbf{u}_1) \,:=\, \frac{1}{2}\Big(\nabla\mathbf{u}_1 + (\nabla\mathbf{u}_1)^{\mathtt{t}}\Big)$ es el tensor de deformaciones. Así, dados $\mathbf{f}_1 \in [L^2(\Omega_1)]^2$ y $f_2 \in L^2(\Omega_2)$ tal que $\int_{\Omega_2} f_2 = 0$, nos interesa: Hallar $\mathbf{u} \,:=\, (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ y $p \,:=\, (p_1, p_2)$ tales que

$$\left\{\begin{array}{rcllll}
-\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1) & = & \mathbf{f}_1 & \text{en} & \Omega_1 & \text{(conservación de momentum)}\,,\\
\operatorname{div}\mathbf{u}_1 & = & 0 & \text{en} & \Omega_1 & \text{(conservación de masa)}\,,\\
\mathbf{u}_1 & = & 0 & \text{en} & \Gamma_1 & \text{(deslizamiento nulo)}\,,\\
\operatorname{div}\mathbf{u}_2 & = & f_2 & \text{en} & \Omega_2 & \text{(conservación de masa)}\,,\\
\mathbf{u}_1\cdot\boldsymbol{\nu} & = & \mathbf{u}_2\cdot\boldsymbol{\nu} & \text{en} & \Gamma_2 & \text{(conservación de masa)}\,,\\
\big(\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)\boldsymbol{\nu}\big)\cdot\boldsymbol{\nu} & = & -\,p_2 & \text{en} & \Gamma_2 & \text{(balance de fuerzas normales)}\,,\\
-\,\dfrac{\kappa}{\mu}\,\big(\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)\,\boldsymbol{\nu}\big)\cdot\mathbf{t} & = & \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{t} & \text{en} & \Gamma_2 & \text{(ley de Beavers-Joseph-Saffman)}\,,
\end{array}\right.$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal unitario exterior a Ω_1, $\mathbf{t}$ es el vector tangencial a Γ_2, $\kappa > 0$ es la constante de fricción, y la ley de Beavers-Joseph-Saffman establece que el esfuerzo de corte es proporcional a la velocidad de deslizamiento (bajo el supuesto experimental que $\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{t}$ es despreciable).

a) Pruebe que el balance de fuerzas normales y la ley de Beavers-Joseph-Saffman pueden re-escribirse formalmente como la siguiente ecuación en $H^{-1/2}(\Gamma_2)$:

$$\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)\,\boldsymbol{\nu} \,+\, p_2\,\boldsymbol{\nu} \,=\, -\,\frac{\mu}{\kappa}\,(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{t})\,\mathbf{t} \quad \text{en} \quad \Gamma_2\,.$$

b) Defina los espacios

$$[H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)]^2 := \{\, \mathbf{v}_1 \,\in\, [H^1(\Omega_1)]^2 : \quad \mathbf{v}_1 \,=\, \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma_1 \}\,,$$

$$H(\mathrm{div}\,;\Omega_2) \,:=\, \{\, \mathbf{v}_2 \,\in\, [L^2(\Omega_2)]^2 : \quad \mathrm{div}\ \mathbf{v}_2 \,\in\, L^2(\Omega_2)\,\}\,,$$

$$H \,:=\, [H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)]^2 \times H(\mathrm{div}\,;\Omega_2)\,,$$

$$Q \,:=\, (L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)) \times H^{1/2}(\Gamma_2)\,,$$

y demuestre que una formulación variacional mixta del presente problema de transmisión se reduce a: Hallar $(\mathbf{u},(p,\lambda)) \,\in\, H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \,+\, \mathbf{b}(\mathbf{v},(p,\lambda)) \;&=\; \int_{\Omega_1} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \qquad \forall\, \mathbf{v} := (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) \,\in\, H\,, \\ \mathbf{b}(\mathbf{u},(q,\xi)) \;&=\; -\int_{\Omega_2} f_2\, q_2 \quad \forall\,(q,\xi) \,:=\, ((q_1,q_2),\xi) \,\in\, Q\,, \end{aligned} \tag{99}$$

donde $\mathbf{a} : H \times H \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{b} : H \times Q \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \,:=\, 2\,\mu \int_{\Omega_1} \mathbf{e}(\mathbf{u}_1) : \mathbf{e}(\mathbf{v}_1) \,+\, \frac{\mu}{\kappa} \int_{\Gamma_2} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{t})\,(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{t}) \,+\, \int_{\Omega_2} \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2\,,$$

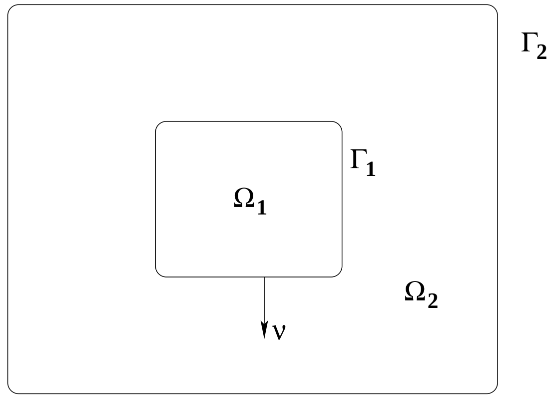
$$\mathbf{b}(\mathbf{v},(q,\xi)) \,:=\, -\int_{\Omega_1} q_1\, \mathrm{div}\,\mathbf{v}_1 \,-\, \int_{\Omega_2} q_2\, \mathrm{div}\,\mathbf{v}_2 \,+\, \int_{\Gamma_2} (\mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} + \mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\nu})\,\xi\,.$$

c) Demuestre que si $(\mathbf{u},(p,\lambda)) \,\in\, H \times Q$ es una solución de (99), entonces para todo $c \in \mathbb{R}$, $(\mathbf{u},(\tilde{p},\tilde{\lambda})) \,\in\, H \times Q$ también lo es, con $\tilde{p} \,:=\, (p_1 + c, p_2 + c)$ y $\tilde{\lambda} \,:=\, \lambda + c$. En tal caso, deduzca cómo debe modificarse la definición del espacio Q para evitar estas soluciones adicionales.

d) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que el problema (99) (con el espacio Q modificado de acuerdo a c)) posee una única solución.

5.3 Sea Ω_1 un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ_1, y sea Ω_2 la region anular acotada por Γ_1 y por una curva cerrada Γ_2 cuyo interior contiene completamente a $\overline{\Omega}_1$ (ver figura). Entonces, dados $f_1 \in L^2(\Omega_1)$, $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, $g_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, y $g_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, interesa el siguiente PROBLEMA DE TRANSMISIÓN: Hallar $(u_1,u_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ tales que

$$\begin{aligned} -\,\Delta u_1 \,&=\, f_1 \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \\ -\,\Delta u_2 \,&=\, f_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \\ u_1 - u_2 \,=\, g_1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} \,&=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_1\,, \\ u_2 \,&=\, g_2 \quad \text{en} \quad \Gamma_2\,. \end{aligned} \tag{100}$$



a) Demuestre que una FORMULACIÓN VARIACIONAL MIXTA-DUAL de (100) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega_1) \times H(\mathrm{div}\,;\Omega_2)$, $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\xi \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_{\Omega_i} \sigma_i \cdot \tau_i + \int_{\Omega_i} u_i \,\mathrm{div}\, \tau_i \right\} + \langle \tau_1 \cdot \nu - \tau_2 \cdot \nu, \xi \rangle_1 = &\quad F(\boldsymbol{\tau})\,, \\ \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} v_i \,\mathrm{div}\, \sigma_i + \langle \sigma_1 \cdot \nu - \sigma_2 \cdot \nu, \lambda \rangle_1 = &\quad G(\mathbf{v}, \lambda)\,, \end{aligned} \tag{101}$$

para todo $\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \tau_2) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega_1) \times H(\mathrm{div}\,;\Omega_2)$, $\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, donde

$$F(\boldsymbol{\tau}) := \langle \tau_1 \cdot \nu, g_1 \rangle_1 \,+\, \langle \tau_2 \cdot \nu, g_2 \rangle_2\,, \quad G(\mathbf{v}, \lambda) := -\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} f_i\, v_i\,,$$

y $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ denota la paridad dual entre $[H^{-1/2}(\Gamma_i)]^2$ y $[H^{1/2}(\Gamma_i)]^2$ $\forall\, i \in \{1, 2\}$.

b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que el problema (101) posee una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \xi)$ en los espacios indicados.

c) Defina subespacios de elementos finitos explícitos y pruebe que el esquema de Galerkin resultante tiene solución única, es estable y convergente.

5.4 Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ Lipschitz continua, y sean $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$ tal que $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}\, ds \,=\, 0$, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a Γ. El PROBLEMA DE STOKES GENERALIZADO consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathtt{t}}$ y la presión p de un fluido que ocupa la region Ω, tal que

$$\begin{aligned} \alpha\, \mathbf{u} \,-\, \nu\, \Delta\, \mathbf{u} + \nabla p \;&=\; \mathbf{f} \qquad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathrm{div}\, \mathbf{u} \;&=\; 0 \qquad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} \;&=\; \mathbf{g} \qquad \text{en} \quad \Gamma\,, \end{aligned} \tag{102}$$

donde $\nu > 0$ es la viscosidad del fluido y α es un parámetro positivo.

a) Introduzca las incógnitas auxiliares $\mathbf{t} := \nabla \mathbf{u}$ y $\boldsymbol{\sigma} := \nu\,\nabla \mathbf{u} - p\,\mathbf{I}$ en Ω, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{2\times 2}$, y pruebe que una formulación variacional mixta de (102) se reduce a: Hallar $(\mathbf{t}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \xi) \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^2 \times H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ tal que

$$
\begin{aligned}
\nu \int_\Omega \mathbf{t} : \mathbf{s} + \alpha \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{s} - \int_\Omega \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{v} - \int_\Omega p\,\mathrm{tr}\,\mathbf{s} \quad &= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,,\\
-\int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \mathbf{t} - \int_\Omega \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{u} \qquad\qquad + \quad \xi \int_\Omega \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau} \quad &= -\langle \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}, \mathbf{g}\rangle\,,\\
-\int_\Omega q\,\mathrm{tr}\,\mathbf{t} + \eta \int_\Omega \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma} \quad &= 0\,,
\end{aligned}
\tag{103}
$$

para todo $(\mathbf{s}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, q, \eta) \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^2 \times H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$.

b) Defina espacios de Hilbert y operadores (formas bilineales) convenientes y pruebe que (103) puede reformularse en base a una estructura dual-dual.

c) Utilice lo indicado en b) para demostrar que (103) tiene una única solución y que existe una constante $C(\alpha,\nu) > 0$ tal que

$$\|(\mathbf{t}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \xi)\| \;\le\; C(\alpha,\nu)\;\{\,\|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\|\,\}\,.$$

d) Extienda el análisis en c) al caso discreto y **deduzca** espacios de elementos finitos que garanticen que el esquema de Galerkin asociado a (103) tiene una única solución.

5.5 Sea Ω un abierto suave de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ, y denote por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{div}\,;\Omega}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,\Omega}$ los productos escalares usuales de $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente. Entonces, dados $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$, y constantes a, $b \in \mathbb{R}$, considere el problema variacional: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u, \phi) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ tal que

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}\rangle_{\mathrm{div}\,,\Omega} + \langle u, v\rangle_{1,\Omega} - a\int_\Omega \phi\, v \;&=\; \int_\Omega f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}\,,\\
\int_\Omega \nabla\phi\cdot\nabla\psi - b\int_\Omega \phi\,\psi - b\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\psi \;&=\; \int_\Gamma g\,\psi\,,
\end{aligned}
\tag{104}
$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v, \psi) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$.

a) Introduzca operadores $S := (S_1, S_2) : H^1_0(\Omega) \longrightarrow H(\mathrm{div}\,;\Omega) \times H^1(\Omega)$ y $\widetilde{S} : H^1_0(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow H^1_0(\Omega)$, bien definidos, tales que (104) se reduzca equivalentemente a la ecuación de punto fijo: Hallar $\phi \in H^1_0(\Omega)$ tal que $T(\phi) = \phi$, donde $T(\phi) := \widetilde{S}(\phi, S_2(\phi)) \quad \forall\,\phi \in H^1_0(\Omega)$.

b) Demuestre que existen constantes $C(a)$, $C(b) \ge 0$ tales que

$$\|S_1(\phi) - S_1(\varphi)\|_{\mathrm{div}\,;\Omega} + \|S_2(\phi) - S_2(\varphi)\|_{1,\Omega} \;\le\; C(a)\,\|\phi - \varphi\|_{0,\Omega}\,,$$

$$\|\widetilde{S}(\phi, u) - \widetilde{S}(\varphi, w)\|_{1,\Omega} \;\le\; C(b)\left\{\|\phi - \varphi\|_{0,\Omega} + |u - w|_{1,\Omega}\right\},$$

para todo ϕ, $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, u, $w \in H^1(\Omega)$.

c) Deduzca a partir de a) y b) que existe una constante $C(a,b) \geq 0$ tal que

$$\|T(\phi) - T(\varphi)\|_{1,\Omega} \,\leq\, C(a,b)\, \|\phi - \varphi\|_{0,\Omega} \quad \forall\, \phi,\, \varphi \in H_0^1(\Omega)\,,$$

pruebe luego que T es compacto, y concluya finalmente que para a y b suficientemente pequeños, el problema original (104) posee una única solución.

5.6 Sea Ω un abierto suave de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ, y denote por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{div}\,;\Omega}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,\Omega}$ los productos escalares usuales de $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente. A su vez, sea $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma)$ con $H^{1/2}(\Gamma)$. Entonces, dados $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y constantes a, $b \in \mathbb{R}$, considere el problema variacional: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u, \phi) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega) \times H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}\rangle_{\mathrm{div}\,,\Omega} \,+\, \langle u, v\rangle_{1,\Omega} \,-\, a \int_\Omega \phi\, v \;&=\; \int_\Omega f \,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}\,,\\ \int_\Omega \nabla\phi\cdot\nabla\psi \,-\, b \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left\{ \phi \,-\, u \,+\, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \;&=\; \langle g, \psi\rangle_\Gamma\,, \end{aligned} \tag{105}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v, \psi) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega) \times H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

i) Introduzca operadores $S := (S_1, S_2) \,:\, H_0^1(\Omega) \longrightarrow H(\mathrm{div}\,;\Omega) \times H^1(\Omega)$ y $\widetilde{S} \,:\, H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$, bien definidos, tales que (105) se reduzca equivalentemente a la ecuación de punto fijo: Hallar $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $T(\phi) = \phi$, donde $T(\phi) := \widetilde{S}(\phi, S_2(\phi)) \quad \forall\, \phi \in H_0^1(\Omega)$.

ii) Demuestre que existen constantes $C(a)$, $C(b) \geq 0$ tales que

$$\|S_1(\phi) - S_1(\varphi)\|_{\mathrm{div}\,;\Omega} \,+\, \|S_2(\phi) - S_2(\varphi)\|_{1,\Omega} \,\leq\, C(a)\, \|\phi - \varphi\|_{0,\Omega}\,,$$

$$\|\widetilde{S}(\phi, u) - \widetilde{S}(\varphi, w)\|_{1,\Omega} \,\leq\, C(b) \left\{ \|\phi - \varphi\|_{0,\Omega} \,+\, \|u - w\|_{1,\Omega} \right\},$$

para todo ϕ, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, u, $w \in H^1(\Omega)$.

iii) Deduzca a partir de i) y ii) que existe una constante $C(a,b) \geq 0$ tal que

$$\|T(\phi) - T(\varphi)\|_{1,\Omega} \,\leq\, C(a,b)\, \|\phi - \varphi\|_{0,\Omega} \quad \forall\, \phi,\, \varphi \in H_0^1(\Omega)\,,$$

pruebe luego que T es compacto, y concluya finalmente que para a y b suficientemente pequeños, el problema original (104) posee una única solución.

5.7 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave Γ, y sean

$$\mathrm{H}_0^1(\Omega) := \left\{ \mathbf{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega) :\ \mathbf{v} = 0 \,\mathrm{en}\, \Gamma \right\},\ \mathbf{H}_0^1(\Omega) := [\mathrm{H}_0^1(\Omega)]^n\,,\ \mathbf{L}^2(\Omega) := [\mathrm{L}^2(\Omega)]^n\,,$$

$$\mathbb{L}^2(\Omega) := [\mathrm{L}^2(\Omega)]^{n\times n}\,, \quad \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega) := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \quad \mathbf{div}\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\},$$

cuyas normas respectivas son $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ y $\|\cdot\|_{\mathbf{div}\,;\Omega}$. Entonces, dados $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y parámetros κ_1 y κ_2 a ser elegidos convenientemente, una formulación mixta simplificada del problema de Navier-Stokes consiste en: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in \mathrm{H} := \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) \,+\, B(\mathbf{u}; (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) \,=\, F(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathrm{H}\,, \tag{106}$$

donde A, B, y F están definidos por

$$
\begin{aligned}
A((\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) \,:=\, & \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \,+\, \kappa_1 \int_\Omega \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} \,+\, \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} \\
- & \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} \,+\, \kappa_2 \int_\Omega \big\{ \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} \big\} : \nabla \mathbf{v}\,,
\end{aligned}
$$

$$
B(\mathbf{w};(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) \,:=\, \int_\Omega (\mathbf{w} \otimes \mathbf{u}) : \big\{ \boldsymbol{\tau} - \kappa_2 \nabla \mathbf{v} \big\}\,,
$$

$$
F(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}) \,:=\, -\kappa_1 \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} \,+\, \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\,,
$$

para todo $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})$, $(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}) \in \mathrm{H}$. Notar aquí que, dados vectores $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}$ y tensores $\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\tau}$, se definen $\mathbf{w} \otimes \mathbf{u} \,:=\, (w_i\, u_j)_{i,j=1}^n$ y $\boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\tau} := \displaystyle\sum_{i,j=1}^n \zeta_{ij}\, \tau_{ij}$.

a) Demuestre que para $\kappa_1 > 0$ y $\kappa_2 \in (0,2)$, la forma bilineal A es elíptica en H con una constante α dependiente de ambos parámetros.

b) Aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la inyección continua de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ en $\mathbf{L}^4(\Omega)$ $:= [\mathrm{L}^4(\Omega)]^n$ para deducir la existencia de $c(\Omega,\kappa_2) > 0$ tal que

$$
\big| B(\mathbf{w};(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) \big| \,\le\, c(\Omega,\kappa_2)\, \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\, \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\, \|(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})\|_{\mathrm{H}}\,.
$$

c) Pruebe que existe $r > 0$ tal que para cada $\mathbf{w} \in \mathbf{V}(r) := \Big\{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) :\ \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \le r \Big\}$, existe un único $(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) \in \mathrm{H}$ tal que

$$
A((\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) \,+\, B(\mathbf{w};(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) \,=\, F(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}) \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}) \in \mathrm{H}\,. \tag{107}
$$

En tal caso defina el operador $\mathbf{S} : \mathbf{V}(r) \longrightarrow \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ por $\mathbf{S}(\mathbf{w}) := \mathbf{u}$, y deduzca la dependencia continua de (107) (según el Lema de Lax-Milgram).

d) Observe que (106) puede reformularse equivalentemente como la ecuación de punto fijo: Hallar $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(r)$ tal que $\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, y luego aplique la elipticidad de la forma bilineal $A(\cdot,\cdot) + B(\mathbf{w};\cdot,\cdot)$ y el Teorema de Banach, para concluir que, bajo adecuadas hipótesis sobre $\mathbf{f}$, el problema (106) tiene una única solución $(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) \in \mathrm{H}$ con $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(r)$.

5.8 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega) := [\mathrm{L}^2(\Omega)]^n$. El problema de Navier-Stokes con viscosidad variable $\mu : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ consiste en encontrar la velocidad $\boldsymbol{u}$ y la presión p de un fluido que ocupa la región Ω, tal que

$$
\begin{aligned}
-\,\mathbf{div}\,\big(\mu(|\nabla \boldsymbol{u}|)\, \nabla \boldsymbol{u}\big) \,+\, (\nabla \boldsymbol{u})\, \boldsymbol{u} \,+\, \nabla p \ &=\ \boldsymbol{f} \qquad \text{en} \quad \Omega\,, \\
\mathrm{div}\, \boldsymbol{u} \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad \boldsymbol{u} \ &=\ \mathbf{0} \qquad \text{en} \quad \Gamma\,.
\end{aligned}
\tag{108}
$$

a) Incorpore una condición de unicidad para la presión, introduzca las incógnitas auxiliares $\boldsymbol{\sigma} := \mu(|\nabla \boldsymbol{u}|)\, \nabla \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - p\,\mathbb{I}$ y $\boldsymbol{t} := \nabla \boldsymbol{u}$ en Ω, elimine fundadamente p, y demuestre que (108) se transforma, equivalentemente, en el sistema de primer orden

$$
\begin{aligned}
\nabla \boldsymbol{u} \,=\, \boldsymbol{t} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \mu(|\boldsymbol{t}|)\, \boldsymbol{t} \,-\, (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})^{\mathrm{d}} \ &=\ \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} \quad \text{en}\ \Omega\,, \\
-\,\mathbf{div}\ \boldsymbol{\sigma} \,=\, \boldsymbol{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\sigma} \,+\, \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) = 0\,, \quad \boldsymbol{u} \ &=\ \mathbf{0} \quad \text{en}\ \Gamma\,.
\end{aligned}
\tag{109}
$$

b) Sea $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + c\,\mathbb{I}$, con $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}\,;\Omega) := \left\{\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega) : \ \int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\zeta}) = 0\right\}$, y $c \in$ R, y deduzca de (109) que $c = -\frac{1}{n\,|\Omega|}\int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})$.

c) Defina $\mathbb{L}^2(\Omega) := [\mathrm{L}^2(\Omega)]^{n\times n}$ y $\mathbb{L}^2_{\mathtt{tr}}(\Omega) := \Big\{\boldsymbol{s} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \quad \mathrm{tr}\ \boldsymbol{s} = 0\Big\}$, y demuestre que la formulación variacional de (109) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\sigma}) \in \mathbb{L}^2_{\mathtt{tr}}(\Omega)\times\mathbb{H}_0(\mathbf{div}\,;\Omega)$, y $\boldsymbol{u}$ en un espacio por definir, tal que

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\int_\Omega \mu(|\boldsymbol{t}|)\,\boldsymbol{t}:\boldsymbol{s} - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathtt{d}}:\boldsymbol{s} - \int_\Omega (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})^{\mathtt{d}}:\boldsymbol{s} & = & 0 & \forall\,\boldsymbol{s}\in\mathbb{L}^2_{\mathtt{tr}}(\Omega)\,,\\
\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}}:\boldsymbol{t} + \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} & = & 0 & \forall\,\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{H}_0(\mathbf{div}\,;\Omega)\,,\\
\displaystyle -\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} & = & \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\mathbf{v} & \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{L}^2(\Omega)\,.
\end{array}$$

d) Aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la inyección continua de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ en $\mathbf{L}^4(\Omega) := [\mathrm{L}^4(\Omega)]^n$ para deducir que un espacio factible para $\boldsymbol{u}$ en c) está dado por $\mathbf{H}^1_0(\Omega) := [\mathrm{H}^1_0(\Omega)]^n$.

NOTACION. Dados $\mathbf{w} = (w_i)_{i=1}^n$, $\mathbf{u} = (u_i)_{i=1}^n$, $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_{ij})_{i,j=1}^n$, y $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})_{i,j=1}^n$, se definen los productos $\mathbf{w}\otimes\mathbf{u} := (w_i\,u_j)_{i,j=1}^n$ y $\boldsymbol{\zeta}:\boldsymbol{\tau} := \sum_{i,j=1}^n \zeta_{ij}\,\tau_{ij}$, y el tensor $\boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}} := \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\tau})\,\mathbb{I}$.

5.9 Dados Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ, $\boldsymbol{g}\in\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ y una constante (viscosidad) $\mu > 0$, considere el sistema simplificado de Boussinesq con incógnitas $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$ y φ

$$\begin{array}{rcll}
\mu\,\nabla\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})^{\mathtt{d}} & = & \boldsymbol{\sigma}^{\mathtt{d}} & \text{en} \quad \Omega\,,\\
-\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{g}\,\varphi & = & 0 & \text{en} \quad \Omega\,,\\
-\,\Delta\,\varphi + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi & = & 0 & \text{en} \quad \Omega\,,\\
\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma, \quad \varphi & = & 0 & \text{en} \quad \Gamma\,,\\
\displaystyle\int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) & = & 0\,. &
\end{array} \tag{110}$$

a) Descomponga $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + c\,\mathbb{I}$, con $c\in\mathbb{R}$ y $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}\,;\Omega)$, donde

$$\mathbb{H}_0(\mathbf{div}\,;\Omega) := \left\{\zeta \in \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega) : \quad \int_\Omega \mathrm{tr}\,(\zeta) = 0\right\},$$

y demuestre que, denotando $\boldsymbol{\sigma}_0$ simplemente por $\boldsymbol{\sigma}$, una formulación variacional mixta aumentada de (110) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u},\varphi) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}\,;\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)\times\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tal que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{A}((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) + \mathbf{B}_{\boldsymbol{u}}((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) & = & F_\varphi(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})\,,\\
\mathbf{a}(\varphi,\psi) & = & F_{\boldsymbol{u},\varphi}(\psi)\,,
\end{array} \tag{111}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v},\psi) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}\,;\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)\times\mathrm{H}^1_0(\Omega)$, donde

$$\begin{array}{rl}
\mathbf{A}((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) := & \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathtt{d}} : (\boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}} - \kappa_1\,\nabla\mathbf{v}) + \int_\Omega (\mu\,\boldsymbol{u} + \kappa_2\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau}\\
& \displaystyle -\,\mu\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \mu\,\kappa_1\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}:\nabla\mathbf{v}\,,
\end{array}$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{w}}(\,(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u})\,,\,(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})\,) := -\int_\Omega (\boldsymbol{u}\otimes\mathbf{w})^{\mathtt{d}} : \big(\kappa_1\,\nabla\mathbf{v} - \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}}\big)\,,$$

$$\mathbf{a}(\varphi,\psi) := \int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla\psi\,,$$

$$F_\varphi(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}) := \int_\Omega \varphi\,\mathbf{g}\cdot\big(\mu\,\mathbf{v} - \kappa_2\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau}\big) \quad \text{y} \quad F_{\boldsymbol{u},\varphi}(\psi) := -\int_\Omega (\,\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi\,)\,\psi\,,$$

donde κ_1 y κ_2 son parámetros positivos a ser determinados posteriormente.

b) Analice la solubilidad de (111) mediante un enfoque de punto fijo adecuado.

5.10 Sea Ω un abierto acotado, conexo, pero no necesariamente convexo, de $\mathbb{R}^n$, $n\in\{2,3\}$, con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Hilbert $H(\mathrm{div};\Omega)$ de vectores en $[L^2(\Omega)]^n$ con divergencia en $L^2(\Omega)$, cuya norma inducida se denota por $\|\cdot\|_{\mathrm{div}\,;\Omega}$. Se dice que $\boldsymbol{\tau}\in H(\mathrm{div};\Omega)$ admite una DESCOMPOSICIÓN DE HELMHOLTZ ESTABLE si existen $z\in H^2(\Omega)$, $\varphi\in H^1(\Omega)$ con $\int_\Omega\varphi = 0$ cuando $n=2$ (resp. $\varphi\in[H^1(\Omega)]^3$ con $\int_\Omega\varphi = \mathbf{0}$ cuando $n=3$), y una constante $C>0$, independiente de las variables anteriores, tales que

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla z + \mathbf{curl}\,\varphi \quad \text{en} \quad \Omega \qquad \text{y} \qquad \|\nabla z\|_{1,\Omega} + \|\varphi\|_{1,\Omega} \le C\,\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathrm{div}\,;\Omega}\,, \tag{112}$$

donde $\mathbf{curl}\,\varphi := \begin{cases} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^{\mathtt{t}} & \text{si} \quad n=2 \\ \nabla\times\varphi & \text{si} \quad n=3 \end{cases}$.

a) En esta parte se pide deducir (112) para el caso $n=2$, procediendo de la siguiente manera. Introduzca primero un abierto acotado y **convexo** G de clase $C^{0,1}$ y suficientemente grande tal que $\overline{\Omega}\subset G$. Luego, dado $\boldsymbol{\tau}\in H(\mathrm{div};\Omega)$, defina $f_{\boldsymbol{\tau}} := \begin{cases} \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} & \text{en} \quad \Omega \\ 0 & \text{en} \quad G\setminus\overline{\Omega} \end{cases}$, y considere el problema de valores de contorno:

$$\Delta w = f_{\boldsymbol{\tau}} \quad \text{en} \quad G\,, \quad w = 0 \quad \text{en} \quad \partial G\,. \tag{113}$$

Pruebe que (113) está bien propuesto, observe que $\mathrm{div}\big(\nabla w\big) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, y entonces concluya utilizando el resultado que dice que "$\boldsymbol{\zeta}\in[L^2(\Omega)]^2$ satisface $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\zeta}=0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si y sólo si existe $\phi\in H^1(\Omega)$ tal que $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{curl}\,\phi$ en Ω", y notando que para $n=2$ se tiene que $\|\mathbf{curl}\,\phi\|_{0,\Omega} = |\phi|_{1,\Omega}$.

b) Cuando $n=3$ se puede proceder de la misma manera anterior, utilizando ahora que "$\boldsymbol{\zeta}\in[L^2(\Omega)]^3$ satisface $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\zeta}=0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si y sólo si existe $\phi\in[H^1(\Omega)]^3$ tal que $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{curl}\,\phi$ en Ω", pero en tal caso no es verdad que $\|\mathbf{curl}\,\phi\|_{0,\Omega} = |\phi|_{1,\Omega}$, y por lo tanto la cota de estabilidad (desigualdad al lado derecho de (112)) sólo resulta válida si el dominio original Ω es convexo. Con el objeto de subsanar esta dificultad, se propone el siguiente procedimiento, el cual hace uso de la misma geometría ya descrita para definir una extensión apropiada desde Ω hacia todo G. Más precisamente, dado $\boldsymbol{\tau}\in H(\mathrm{div};\Omega)$, denote por $\mathbf{n}$ el vector normal interior en $\partial\Omega$, y considere el siguiente problema de valores de contorno en $G\setminus\overline{\Omega}$:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad G\setminus\overline{\Omega}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} = \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n} \quad \text{en} \quad \partial\Omega\,, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \partial G\,. \tag{114}$$

Pruebe que (114) está bien propuesto, defina

$$\widetilde{\boldsymbol{\tau}} := \begin{cases} \boldsymbol{\tau} & \text{en} \quad \Omega \\ \nabla u & \text{en} \quad G\setminus\overline{\Omega} \end{cases},$$

muestre que $\widetilde{\boldsymbol{\tau}}\in H(\mathrm{div}\,;G)$, y concluya el resultado requerido haciendo uso primero de (112) para $\widetilde{\boldsymbol{\tau}}$ y el dominio convexo G, y luego restringiendo lo obtenido a Ω.

5.11 Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangulaciones, hechas de triángulos K con diámetro h_K, de una región poligonal Ω de R^2. Además, dados un entero $\ell \geq 0$ y $K \in \mathcal{T}_h$, denote por $\mathrm{P}_\ell(K)$ al espacio de polinomios de grado $\leq \ell$ definidos sobre K, y defina los espacios vectorial y tensorial asociados por $\mathbf{P}_\ell(K) := [\mathrm{P}_\ell(K)]^2$ y $\mathbb{P}_\ell(K) := [\mathrm{P}_\ell(K)]^{2\times 2}$, respectivamente. A su vez, dado $K \in \mathcal{T}_h$, denote por ψ_K la función burbuja correspondiente, esto es, ψ_K es el único polinomio en $\mathrm{P}_3(K)$ tal que

$$\psi_K = 0 \quad \text{en} \quad \partial K \qquad \text{y} \qquad 0 \leq \psi_K \leq 1 \quad \text{en} \quad K\,.$$

a) Utilice las desigualdades que acotan las seminormas de Sobolev hacia y desde el triángulo canónico $\widehat{K}$ para probar que, dados un entero $\ell \geq 0$ y $K \in \mathcal{T}_h$, existen constantes c_1, $c_2 > 0$, dependientes de ℓ e independientes de K, tal que

$$\|p\|_{0,K}^2 \,\leq\, c_1\, \|\psi_K^{1/2}\, p\|_{0,K}^2 \quad \text{y} \quad |p|_{1,K} \,\leq\, c_2\, h_K^{-1}\, \|p\|_{0,K} \qquad \forall\, p \in \mathrm{P}_\ell(K)\,. \tag{115}$$

b) Dados v, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{\tau}$ campos escalar, vectorial y tensorial, respectivamente, suficientemente suaves, considere los operadores diferenciales

$$\mathbf{curl}(v) := \begin{pmatrix} -\frac{\partial v}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathrm{curl}}(\boldsymbol{v}) := \begin{pmatrix} \mathbf{curl}(v_1)^{\mathtt{t}} \\ \mathbf{curl}(v_2)^{\mathtt{t}} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\,, \qquad \mathrm{curl}(\boldsymbol{\tau}) := \begin{pmatrix} \mathrm{rot}\big(\tau_{11}, \tau_{12}\big) \\ \mathrm{rot}\big(\tau_{21}, \tau_{22}\big) \end{pmatrix},$$

y demuestre que para todo $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{H}(\mathrm{curl}; K) \times \mathbf{H}^1(K)$ se tiene

$$\int_K \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{curl}(\boldsymbol{\tau}) \;=\; -\int_K \boldsymbol{\tau} : \underline{\mathrm{curl}}(\boldsymbol{v}) \;+\; \langle \boldsymbol{\tau}\, \mathbf{s}_K, \boldsymbol{v}\rangle_{\partial K}\,, \tag{116}$$

donde $\mathbb{H}(\mathrm{curl}; K) := \Big\{\boldsymbol{\zeta} \in [\mathrm{L}^2(K)]^{2\times 2} :\; \mathrm{curl}(\boldsymbol{\zeta}) \in [\mathrm{L}^2(K)]^2\Big\}$, $\mathbf{H}^1(K) := [\mathrm{H}^1(K)]^2$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial K}$ es la paridad dual entre $[\mathrm{H}^{-1/2}(\partial K)]^2$ y $[\mathrm{H}^{1/2}(\partial K)]^2$, y $\mathbf{s}_K$ es el vector tangencial sobre ∂K.

c) Dados un entero $k \geq 0$ y $K \in \mathcal{T}_h$, aplique (115), (116), y la desigualdad de Cauchy-Schwarz para demostrar que existe $C > 0$, dependiente sólo de k, tal que para todo $\big(\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}, \boldsymbol{\zeta}\big) \in \mathbb{P}_k(K) \times \mathbb{H}(\mathrm{curl}; K)$ con $\mathrm{curl}(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{0}$, se tiene

$$\|\mathrm{curl}(\widetilde{\boldsymbol{\zeta}})\|_{0,K} \,\leq\, C\, h_K^{-1}\, \|\boldsymbol{\zeta} - \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}\|_{0,K}\,. \tag{117}$$

d) Dados enteros k, $\ell \geq 0$ y $K \in \mathcal{T}_h$, proceda de manera similar a c) para demostrar que existe $C > 0$, dependiente sólo de k y ℓ, tal que para todo $\big(\widetilde{\mathbf{p}}, \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}, \mathbf{p}\big) \in \mathbf{P}_k(K) \times \mathbb{P}_\ell(K) \times \mathbf{H}^1(K)$ se tiene

$$\|\nabla\widetilde{\mathbf{p}} - \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}\|_{0,K} \,\leq\, C\,\Big\{h_K^{-1}\, \|\mathbf{p} - \widetilde{\mathbf{p}}\|_{0,K} \,+\, \|\nabla\mathbf{p} - \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}\|_{0,K}\Big\}\,. \tag{118}$$

e) Considere el estimador a posteriori para el método de elementos finitos mixtos del problema de Stokes (hecho en clases), y aplique adecuadamente (117) y (118) para deducir las siguientes estimaciones de **eficiencia** para todo $K \in \mathcal{T}_h$:

$$h_K^2\, \left\|\mathrm{curl}\Big\{\frac{1}{2\mu}\,\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathtt{d}}\Big\}\right\|_{0,K}^2 \,\leq\, C_1\, \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,K}^2\,,$$

$$h_K^2\, \left\|\nabla\boldsymbol{u}_h - \frac{1}{2\mu}\,\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathtt{d}}\right\|_{0,K}^2 \,\leq\, C_2\,\Big\{\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{0,K}^2 \,+\, h_K^2\, \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,K}^2\Big\}\,,$$

donde C_1, $C_2 > 0$ son constantes independientes de h.

5.12 Sea Ω_1 un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ, y sea Ω_2 la region anular acotada por Γ y una curva cerrada Σ cuyo interior contiene a Γ. Dados $\mathbf{f}_1 \in \mathbf{L}^2(\Omega_1)$, $\mathbf{f}_2 \in \mathbf{L}^2(\Omega_2)$, $\mathbf{g}_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$, y $\mathbf{g}_\Sigma \in H^{1/2}(\Sigma)$, considere el problema de transmisión entre dos fluidos que ocupan las regiones Ω_1 y Ω_2, y los cuales se rigen por las ecuaciones de Stokes:

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\sigma}_1 \,=\, \mu_1 \nabla \mathbf{u}_1 - p_1 \mathbf{I} \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \quad \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\sigma}_1) \,=\, \mathbf{f}_1 \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \\
\operatorname{div}(\mathbf{u}_1) \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \\
\boldsymbol{\sigma}_2 \,=\, \mu_2 \nabla \mathbf{u}_2 - p_2 \mathbf{I} \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \quad \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\sigma}_2) \,=\, \mathbf{f}_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \\
\operatorname{div}(\mathbf{u}_2) \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \\
\mathbf{u}_1 \,-\, \mathbf{u}_2 \,=\, \mathbf{g}_\Gamma \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\nu} \,=\, \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\nu} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \mathbf{u}_2 \,=\, \mathbf{g}_\Sigma \quad \text{en} \quad \Sigma\,,
\end{gathered}
\tag{119}
$$

donde μ_1 y μ_2 son constantes positivas que denotan las viscosidade, $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son los vectores de velocidad, p_1 y p_2 son las presiones, y $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal a $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$, el cual apunta hacia Ω_2 en Γ y hacia el exterior de Ω_2 en Σ.

a) Demuestre que una FORMULACIÓN VARIACIONAL MIXTA del problema (119) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) \in \mathrm{H} := \mathbb{H}_0(\mathbf{div}\,; \Omega_1) \times \mathbb{H}_0(\mathbf{div}\,; \Omega_2)$, $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) := \big((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \boldsymbol{\xi}\big) \in \mathrm{Q} := \big(\mathbf{L}^2(\Omega_1) \times \mathbf{L}^2(\Omega_2)\big) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, tales que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2} \left\{ \frac{1}{\mu_i} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\sigma}_i^{\mathtt{d}} : \boldsymbol{\tau}_i^{\mathtt{d}} + \int_{\Omega_i} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\tau}_i) \right\} + \langle \boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\tau}_2 \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi} \rangle_\Gamma &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\tau})\,, \\
\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\sigma}_i) + \langle \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda} \rangle_\Gamma &= \mathbf{G}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}),
\end{aligned}
\tag{120}
$$

para todo $\boldsymbol{\tau} := (\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) \in \mathrm{H}$, para todo $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) := \big((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \boldsymbol{\lambda}\big) \in \mathrm{Q}$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ denota la paridad dual entre $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ y $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, y $\mathbf{F} \in \mathrm{H}'$ y $\mathbf{G} \in \mathrm{Q}'$ son funcionales que dependen de $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{g}_\Gamma$ y $\mathbf{g}_\Sigma$.

b) Escriba (120) en la forma requerida por el Teorema de Babuška-Brezzi, identifique claramente las formas bilineales $\mathbf{a} : \mathrm{H} \times \mathrm{H} \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{b} : \mathrm{H} \times \mathrm{Q} \to \mathbb{R}$ resultantes, y demuestre luego que este problema posee una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi})) \in \mathrm{H} \times \mathrm{Q}$, la cual depende continuamente de los datos.

5.13 Establezca fundadamente la veracidad o no de las siguientes afirmaciones:

i) En una formulación mixta típica con formas bilineales a y b, la elipticidad de a en el kernel discreto V_h de b es consecuencia de la elipticidad de a en el kernel continuo V de b, sólo cuando $V_h \subseteq V$.

ii) El operador de interpolación de Raviart-Thomas $\Pi_h^k : H(\mathrm{div}; \Omega) \cap Z \to H_h^k$ es acotado si ambos espacios se proveen de la norma $\|\cdot\|_{\mathrm{div};\Omega}$.

5.14 Establezca fundadamente la veracidad o no de las siguientes afirmaciones:

i) En una formulación mixta típica con formas bilineales a y b, la elipticidad de a en el kernel de b es una condición necesaria para la unicidad de la solución.

ii) Para cada tensor $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega)$ cuya componente normal se anula en un subconjunto de medida no nula de la frontera Γ, se tiene que $\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathrm{div};\Omega}$ es equivalente a $\|\boldsymbol{\sigma}_0\|_{\mathrm{div};\Omega}$, donde $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + c\,\mathbf{I}$, con $\boldsymbol{\sigma}_0 \in H_0$ y $c \in \mathbb{R}$.