

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \|[v]\|_{k+1,k,K} &= \text{dist}(v, \mathbb{P}_k(K)) \leq \|v + q_v\|_{k+1,K}, \\
 &\leq \frac{1}{C_1} \left\{ |v + q_v|_{k+1,K}^2 + \sum_{j=1}^N |F_j(v + q_v)|^2 \right\}^{1/2}, \\
 &= \frac{1}{C_1} |v|_{k+1,K} = C|[v]|_{k+1,k,K}.
 \end{aligned}$$

□

**Observación:** En el caso en que, en vez de  $H^{k+1}(K)/\mathbb{P}_k(K)$ , se tiene el espacio cociente  $W^{k+1,p}(K)/\mathbb{P}_k(K)$ , ( $p > 1$ ), el Lema de Deny-Lions se demuestra considerando primero una base de  $\mathbb{P}_k(K)$  y luego extendiéndola a todo  $W^{k+1,p}(K)$  a través del Teorema de Hahn-Banach.

**Lemma 4.2** (Lema de Bramble-Hilbert). Sea  $m$  y  $k$  enteros no negativos tales que  $0 \leq m \leq k+1$ , y sea  $\Pi \in \mathcal{L}(H^{k+1}(K), H^m(K))$  tal que:

$$\Pi(p) = p, \quad \forall p \in \mathbb{P}_k(K).$$

Entonces, existe  $C := C(\Pi, K) > 0$ , tal que:

$$\|v - \Pi(v)\|_{m,K} \leq C|v|_{k+1,K}, \quad \forall v \in H^{k+1}(K).$$

**Demostración.** Dado  $v \in H^{k+1}(K)$  y  $p \in \mathbb{P}_k(K)$ , se tiene que:

$$v - \Pi(v) = (v + p) - \Pi(v + p) = (I - \Pi)(v + p),$$

de donde

$$\|v - \Pi(v)\|_{m,K} = \|(I - \Pi)(v + p)\|_{m,K} \leq \|I - \Pi\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(K), H^m(K))} \|v + p\|_{k+1,K},$$

(aquí  $I \in \mathcal{L}(H^{k+1}(K), H^m(K))$ , ya que  $H^{k+1}(K) \subseteq H^m(K)$ ), para todo  $p \in \mathbb{P}_k(K)$ , de donde tomando ínfimo y aplicando Deny-Lions, resulta

$$\begin{aligned}
 \|v - \Pi(v)\|_{m,K} &\leq \|I - \Pi\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(K), H^m(K))} \|[v]\|_{k+1,k,K}, \\
 &\leq C_{\text{DL}} \|I - \Pi\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(K), H^m(K))} |v|_{k+1,K},
 \end{aligned}$$

con lo que basta tomar  $C := C_{\text{DL}} \|I - \Pi\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(K), H^m(K))} > 0$ .

□

## 4.1. Un pequeño recuerdo de cálculo diferencial

Sean  $X$  y  $Y$  espacios vectoriales normados y sea  $v : A \subseteq X \rightarrow Y$ . Si  $v$  es  $k$  veces diferenciable en  $x_0 \in A$ , entonces denotamos por  $D^k v(x_0)$  (o  $Dv(x_0)$  si  $k = 1$ ) su  $k$ -ésima diferencial de Fréchet. Al respecto, se tiene que:

$$Dv(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y),$$

y

$$D^k v(x_0) \in \mathcal{L}(X^k, Y),$$

Además,  $D^k v(x_0)$  es simétrica y

$$\|D^k v(x_0)\| := \sup_{\substack{\xi_i \in X, \|\xi_i\| \leq 1 \\ i \in \{1, \dots, k\}}} \|D^k v(x_0)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)\|_Y.$$

En particular, si  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}$  y  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_0) &= Dv(x_0)(e_i), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) &= D^2 v(x_0)(e_i, e_j), \\ \frac{\partial^3 v}{\partial x_i \partial x_j^2}(x_0) &= D^3 v(x_0)(e_i, e_j, e_j), \\ &= D^3 v(x_0)(e_j, e_i, e_j), \\ &= D^3 v(x_0)(e_j, e_j, e_i), \end{aligned}$$

donde las últimas tres igualdades corresponden a la simetría (multilineal). Además, si  $h_1 = h_2 = \dots = h_k = h \in \mathbb{R}^n$ , se escribe

$$D^k v(x_0)(h_1, h_2, \dots, h_k) \equiv D^k v(x_0)h^k.$$

Así, dado  $v \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ , la fórmula de Taylor de orden  $k$ , es

$$v(x_0 + h) = v(x_0) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} D^j v(x_0)h^j + \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} v(x_0 + \theta h)h^{k+1},$$

para algún  $\theta \in ]0, 1[$ .

Volviendo al caso general

$$Dv(x_0)(h) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \varepsilon h) - v(x_0)}{\varepsilon} \in Y,$$

para todo  $x_0 \in A \subseteq X$ ,  $Dv(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Así,

$$D^2 v(x_0)(h, k) := D(Dv(x_0)(h))(k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Dv(x_0)(h + \varepsilon k) - Dv(x_0)(h)}{\varepsilon}.$$

**Lemma 4.3.** Sean  $K$  y  $\widehat{K}$  compactos conexos de  $\mathbb{R}^n$  con frontera de clase  $\mathcal{C}^{0,1}$ , y sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación afín invertible dada por  $F(\widehat{x}) = B\widehat{x} + b$ ,  $\forall \widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ , con  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $b \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $K = F(\widehat{K})$ .

A su vez, sea  $m \geq 0$  un entero y sea  $v \in H^m(K)$ . Entonces, existe  $\widehat{v} := "v \circ F" \in H^m(\widehat{K})$ , y existe  $C := C(m, n) > 0$  tal que:

$$|\widehat{v}|_{m, \widehat{K}} \leq C \|B\|^m |\det(B)|^{-1/2} |v|_{m, K}.$$

Recíprocamente, dado  $\widehat{v} \in H^m(\widehat{K})$ , existe  $v := "\widehat{v} \circ F^{-1}" \in H^m(K)$ , y existe  $C := C(m, n) > 0$  tal que:

$$|v|_{m, K} \leq C \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{1/2} |\widehat{v}|_{m, \widehat{K}}.$$

**Demostración.** Se usa que  $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$  es denso en  $H^m(\Omega)$ , entonces dado  $v \in \mathcal{C}^m(\overline{K})$  y un multi-índice  $\alpha$  tal que  $|\alpha| = m$ , se tiene que  $\widehat{v} = v \circ F \in \mathcal{C}^m(\widehat{K})$  y  $\partial^\alpha \widehat{v}(\widehat{x}) = D^m \widehat{v}(\widehat{x})(e_{\beta_1}, e_{\beta_2}, \dots, e_{\beta_m})$ ,  $\forall \widehat{x} \in \widehat{K}$ , donde  $\{e_{\beta_1}, e_{\beta_2}, \dots, e_{\beta_m}\} \subseteq \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Se sigue que:

$$|\partial^\alpha \widehat{v}(\widehat{x})| \leq \sup_{\substack{\xi_i \in \mathbb{R}, \|\xi_i\| \leq 1 \\ i \in \{1, \dots, m\}}} \|D^m \widehat{v}(\widehat{x})(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)\| = \|D^m \widehat{v}(\widehat{x})\|,$$

y luego,

$$\begin{aligned} |\hat{v}|_{m,\hat{K}}^2 &= \sum_{|\alpha|=m} \int_{\hat{K}} |\partial^\alpha \hat{v}(\hat{x})|^2 d\hat{x} \leq \sum_{|\alpha|=m} \int_{\hat{K}} \|D^m \hat{v}(\hat{x})\|^2 d\hat{x}, \\ &= C_1(m, n) \int_{\hat{K}} \|D^m \hat{v}(\hat{x})\|^2 d\hat{x}, \end{aligned}$$

con  $C_1(m, n) := \text{card} \{ \alpha : |\alpha| = m \}$ . En resumen:

$$|\hat{v}|_{m,\hat{K}}^2 \leq C_1(m, n) \int_{\hat{K}} \|D^m \hat{v}(\hat{x})\|^2 d\hat{x}.$$

Por otro lado, utilizando la regla de la cadena y el hecho que  $DF(\hat{x}) = B, \forall \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que:

$$D^m \hat{v}(\hat{x})(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = D^m(v \circ F)(\hat{x})(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = D^m v(F(\hat{x}))(B\xi_1, B\xi_2, \dots, B\xi_m),$$

o bien, denotando  $x = F(\hat{x})$ , nos queda:

$$D^m \hat{v}(\hat{x})(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \|B\|^m D^m v(x) \left( \frac{B\xi_1}{\|B\|}, \frac{B\xi_2}{\|B\|}, \dots, \frac{B\xi_m}{\|B\|} \right).$$

Notando que:  $\left\| \frac{B\xi_i}{\|B\|} \right\| \leq \|\xi_i\| \leq 1, \forall i$ , resulta:

$$\|D^m \hat{v}(\hat{x})\| \leq \|B\|^m \sup_{\substack{\lambda_i \in \mathbb{R}, \|\lambda_i\| \leq 1 \\ i \in \{1, \dots, m\}}} \|D^m v(x)(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)\| = \|B\|^m \|D^m v(x)\|.$$

Así, utilizando la fórmula:

$$\int_{\hat{K}} f(F(\hat{x})) d\hat{x} = \int_K |\det(B)|^{-1} f(x) dx,$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} |\hat{v}|_{m,\hat{K}}^2 &\leq C_1(m, n) \int_{\hat{K}} \|D^m \hat{v}(\hat{x})\|^2 d\hat{x}, \\ &\leq C_1(m, n) \|B\|^{2m} \int_{\hat{K}} \|D^m v(F(\hat{x}))\|^2 d\hat{x}, \\ &= C_1(m, n) \|B\|^{2m} \int_K |\det(B)|^{-1} \|D^m v(x)\|^2 dx, \end{aligned}$$

esto es:

$$|\hat{v}|_{m,\hat{K}}^2 \leq C_1(m, n) \|B\|^{2m} |\det(B)|^{-1} \int_K \|D^m v(x)\|^2 dx.$$

A su vez, usando que:

$$\|D^m v(x)\|^2 \leq C_2(n) \max_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)|^2 \leq C_2(n) \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)|^2.$$

se concluye que:

$$|\hat{v}|_{m,\hat{K}}^2 \leq C_1(m, n) C_2(n) \|B\|^{2m} |\det(B)|^{-1} |v|_{m,K}^2,$$

esto es:

$$|\hat{v}|_{m,\hat{K}} \leq C(m, n) \|B\|^m |\det(B)|^{-1/2} |v|_{m,K}, \quad \forall v \in \mathcal{C}^m(\overline{K}),$$

con  $\widehat{v} := v \circ F$ .

Análogamente, intercambiando los roles de  $K$  y  $\widehat{K}$ , se llega a:

$$|v|_{m,K} \leq C(m,n) \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{1/2} |\widehat{v}|_{m,\widehat{K}}, \quad \forall \widehat{v} \in \mathcal{C}^m(\overline{\widehat{K}}),$$

con  $v := \widehat{v} \circ F^{-1}$ .

Similarmente, para  $p \leq m$ , se tiene que:

$$|v|_{p,K} \leq C(p,n) \|B^{-1}\|^p |\det(B)|^{1/2} |\widehat{v}|_{p,\widehat{K}}, \quad \forall \widehat{v} \in \mathcal{C}^p(\overline{\widehat{K}}),$$

y

$$|\widehat{v}|_{p,\widehat{K}} \leq C(p,n) \|B\|^p |\det(B)|^{-1/2} |v|_{p,K}, \quad \forall v \in \mathcal{C}^p(\overline{K}).$$

Se sigue que existen constantes  $C_i(m,n,B)$ ,  $i \in \{1,2\}$ , tal que:

$$C_1 \|\widehat{v}\|_{m,\widehat{K}} \leq \|v\|_{m,K} \leq C_2 \|\widehat{v}\|_{m,\widehat{K}}, \quad \forall v \in \mathcal{C}^m(\overline{K}),$$

con  $\widehat{v} = v \circ F$ . (Esto, pues  $\|\cdot\|_{m,K}$  es la suma de seminormas  $|\cdot|_{p,K}$ ,  $p \leq m$ ).

Ahora, dado  $v \in H^m(K)$ , existe  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^m(\overline{K})$ , tal que  $\|v - \varphi_j\|_{m,K} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$ . Se tiene así que:

$$C_1 \|\widehat{\varphi}_j - \widehat{\varphi}_\ell\|_{m,\widehat{K}} \leq \|\varphi_j - \varphi_\ell\|_{m,K},$$

lo cual indica que  $\{\widehat{\varphi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy en  $H^m(\widehat{K})$ , por lo tanto, existe un elemento en  $H^m(\widehat{K})$  que denotamos  $\widehat{v} := "v \circ F"$ , tal que

$$\|\widehat{v} - \widehat{\varphi}_j\|_{m,\widehat{K}} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0.$$

Es fácil ver que este límite  $\widehat{v} \in H^m(\widehat{K})$  es independiente de la sucesión  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  elegida, lo cual induce la definición del operador

$$\begin{aligned} H^m(K) &\longrightarrow H^m(\widehat{K}) \\ v &\longmapsto \widehat{v}. \end{aligned}$$

A su vez, tomando el límite a

$$|\widehat{\varphi}_j|_{m,\widehat{K}} \leq C(m,n) \|B\|^m |\det(B)|^{-1/2} |\varphi_j|_{m,K}, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

se obtiene:

$$|\widehat{v}|_{m,\widehat{K}} \leq C(m,n) \|B\|^m |\det(B)|^{-1/2} |v|_{m,K}, \quad \forall v \in H^m(K).$$

La otra desigualdad es análoga. □

**Lemma 4.4.** Sean  $K$  y  $\widehat{K}$  compactos conexos de  $\mathbb{R}^n$  con frontera de clase  $\mathcal{C}^{0,1}$ , y sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la aplicación afín  $F(\widehat{x}) := B\widehat{x} + b$ ,  $\forall \widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ , con  $B \in \mathbb{R}^n$  invertible y  $b \in \mathbb{R}^n$ , tal que:  $K = F(\widehat{K})$ . A su vez, sean

$$\begin{aligned} h_K &:= \text{diámetro de } K = \max_{x,y \in K} \|x - y\|, \\ \rho_K &:= \text{diámetro de la bola más grande contenida en } K, \\ \widehat{h} &:= \text{idem para } \widehat{K}, \\ \widehat{\rho} &:= \text{idem para } \widehat{K}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$|\det(B)| = \frac{|K|}{|\widehat{K}|}, \quad \|B\| \leq \frac{h_K}{\widehat{\rho}} \quad \text{y} \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\widehat{h}}{\rho_K}.$$