

Tarea 2 - 525539

Métodos de Elementos Finitos Mixtos

Esteban Henríquez N.

Prof. Gabriel N. Gatica.

1. Sea Ω un abierto acotado y conexo de \mathbb{R}^n de clase $C^{0,1}$, y sea $H^{-1}(\Omega)$ (resp. $[H^{-1}(\Omega)]^n$ el dual de $H_0^1(\Omega)$ (resp. $[H_0^1(\Omega)]^n$).

- a) Utilice que $[C_0^\infty(\Omega)]^n$ es denso en $[H_0^1(\Omega)]^n$ para extender el gradiente distribucional $\nabla : L^2(\Omega) \rightarrow [\mathcal{D}'(\Omega)]^n$ a un operador $\nabla \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), [H^{-1}(\Omega)]^n)$.

Demostración. Sea $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n$ y dado que $[C_0^\infty(\Omega)]^n$ es denso en $[H_0^1(\Omega)]^n$, podemos decir que $\exists \{\boldsymbol{\varphi}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq [C_0^\infty(\Omega)]^n$ tal que

$$\|\mathbf{v} - \boldsymbol{\varphi}_k\|_{1,\Omega} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

a su vez, se define $\nabla : L^2(\Omega) \rightarrow [\mathcal{D}'(\Omega)]^n$ en el sentido distribucional, para un $w \in L^2(\Omega)$ como

$$-\int_{\Omega} w \operatorname{div}(\boldsymbol{\phi}) = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \boldsymbol{\phi} \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in [C_0^\infty(\Omega)]^n,$$

luego, sea $w \in L^2(\Omega)$, notemos que

$$-\int_{\Omega} w \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}_k) = \int_{\Omega} \nabla w \boldsymbol{\varphi}_k \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

ahora, podemos ver que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \right| &= \left| \int_{\Omega} \nabla w (\mathbf{v} - \boldsymbol{\varphi}_k) \right| \\ &\leq \|\nabla w\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v} - \boldsymbol{\varphi}_k\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|\nabla w\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v} - \boldsymbol{\varphi}_k\|_{1,\Omega} \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

implica que,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} -\int_{\Omega} w \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}_k) = -\int_{\Omega} w \operatorname{div}(\mathbf{v}),$$

a su vez,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla w \cdot \boldsymbol{\varphi}_k = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{v}.$$

En consecuencia, para todo $\boldsymbol{\varphi} \in [H_0^1(\Omega)]^n$, $\exists \{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|\boldsymbol{\varphi} - \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k\|_{1,\Omega} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

lo cual nos permite definir $\nabla : L^2(\Omega) \rightarrow [H_0^1(\Omega)]^n$ en el sentido distribucional, para un $w \in L^2(\Omega)$ como

$$-\int_{\Omega} w \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla w \cdot \boldsymbol{\varphi}_k = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \boldsymbol{\varphi} \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in [H_0^1(\Omega)]^n,$$

por su parte, se tiene que dado $w \in L^2(\Omega)$ para todo $\boldsymbol{\phi} \in [H_0^1(\Omega)]^n$

$$|(\nabla w)(\boldsymbol{\phi})| = \left| \int_{\Omega} w \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} \right| \leq \|w\|_{0,\Omega} \|\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}\|_{0,\Omega},$$

y a su vez es clara la linealidad del operador ∇ , por ende se concluye que $\nabla \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), [H^{-1}(\Omega)]^n)$. \square

- b) Sea $B := \mathcal{R}\nabla \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), [H_0^1(\Omega)]^n)$, donde $\mathcal{R} : [H^{-1}(\Omega)]^n \rightarrow [H_0^1(\Omega)]^n$ es la aplicación de Riesz respectiva, y encuentre explícitamente el operador adjunto $B^* : [H_0^1(\Omega)]^n \rightarrow L^2(\Omega)$.

Demostración. Sean $w \in L^2(\Omega)$ y $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n$, de a) tenemos que

$$(\nabla w)(\mathbf{v}) = - \int_{\Omega} w \operatorname{div}(\mathbf{v}),$$

luego, mediante el teorema de Representación de Riesz se tiene que

$$(\nabla w)(\mathbf{v}) = - \int_{\Omega} w \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \langle \mathcal{R}\nabla w, \mathbf{v} \rangle_{1,\Omega} = \langle B(w), \mathbf{v} \rangle_{1,\Omega},$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \langle B(w), \mathbf{v} \rangle_{1,\Omega} &= \langle \mathcal{R}\nabla w, \mathbf{v} \rangle_{1,\Omega} \\ &= \langle w, -\operatorname{div}(\mathbf{v}) \rangle_{0,\Omega} \\ &= \langle w, B^*(\mathbf{v}) \rangle_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

por lo tanto, se define $B^*(\mathbf{v}) := -\operatorname{div}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n$. \square

- c) Asuma que existe $C > 0$ tal que $\operatorname{dist}(v, S) \leq C\|B(v)\| \quad \forall v \in L^2(\Omega)$, donde $S := \langle \{1\} \rangle$, y luego haga uso de resultados clásicos de análisis funcional para probar que el operador $\operatorname{div} : V^\perp \rightarrow L_0^2(\Omega)$ es un isomorfismo, donde

$$V := \{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \}, \quad [H_0^1(\Omega)]^n = V \oplus V^\perp,$$

y

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p = 0 \right\}.$$

Demostración. Notemos que si se restringe

$$B : L_0^2(\Omega) \rightarrow [H_0^1(\Omega)]^n,$$

se sigue teniendo que $B \in \mathcal{L}(L_0^2(\Omega), [H_0^1(\Omega)]^n)$ y $B^*(\mathbf{v}) = -\operatorname{div}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n$. Ahora, por hipótesis sabemos que $\exists C > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}(w, S) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \|w - a\| \leq C\|B(w)\| \quad \forall w \in L_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega),$$

luego, por teorema de Análisis funcional, el operador B es inyectivo y de rango cerrado, por lo tanto B^* es sobreyectivo. Por otra parte, notemos lo siguiente

$$\begin{aligned} V &= \{\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\} \\ &= \{\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n : B^*(\mathbf{v}) = 0\} \\ &= N(B^*), \end{aligned}$$

por ende $[H_0^1(\Omega)]^n = V \oplus V^\perp = N(B^*) \oplus N(B^*)^\perp$, ya que $N(B^*)$ es un subespacio cerrado de $[H_0^1(\Omega)]^n$. Luego, se restringe B^* a V^\perp , de modo que $B^* : V^\perp \rightarrow L_0^2(\Omega)$ es inyectivo, ya que $N(B^*) = \{\mathbf{0}\}$, así B^* es biyectivo, por ende el operador div también, es decir, div es un isomorfismo. \square

2. Sean H y Q espacios de Hilbert con normas dadas por $\|\cdot\|_H$ y $\|\cdot\|_Q$, respectivamente, y sean $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas. Entonces, dados $F \in H'$ y $G \in Q'$, considere el problema: Hallar $(\sigma, u) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, u) &= F(\tau) \quad \forall \tau \in H, \\ b(\sigma, v) &= G(v) \quad \forall v \in Q. \end{aligned} \tag{1}$$

A su vez, sean H_h y Q_h subespacios de dimensión finita de H y Q , respectivamente, y sea $a_h : H_h \times H_h \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada. Entonces, dados $F_h \in H'_h$ y $G_h \in Q'_h$, considere el problema de Galerkin: Hallar $(\sigma_h, u_h) \in H_h \times Q_h$ tal que

$$\begin{aligned} a_h(\sigma_h, \tau_h) + b(\tau_h, u_h) &= F_h(\tau_h) \quad \forall \tau_h \in H_h, \\ b(\sigma_h, v_h) &= G_h(v_h) \quad \forall v_h \in Q_h. \end{aligned} \tag{2}$$

Suponga que (1) y (2) satisfacen las hipótesis de los Teoremas de Babuška-Brezzi continuo y discreto con constantes inf-sup correspondientes dadas por α , β , α_h y β_h , y denote por V_h y V_h^g el kernel discreto de b y su trasladado según la segunda ecuación de (2), respectivamente.

- a) Aplique desigualdad triangular, la condición inf-sup para a_h , y las ecuaciones que definen (1) y (2), para demostrar que

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h\|_H &\leq C_{1,h} \|F - F_h\|_{V_h'} + C_{2,h} \operatorname{dist}(u, Q_h) \\ &+ \inf_{\tau_h^g \in V_h^g} \left\{ C_{3,h} \|\sigma - \tau_h^g\|_H + C_{4,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \mathbf{0}}} \frac{a(\tau_h^g, \tau_h) - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \right\}, \end{aligned} \tag{3}$$

donde

$$C_{1,h} := \frac{1}{\alpha_h}, \quad C_{2,h} := \frac{\|b\|}{\alpha_h}, \quad C_{3,h} := 1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}, \quad \text{y} \quad C_{4,h} := \frac{1}{\alpha_h}.$$

Demostración. Se define el kernel trasladado de b como

$$V_h^g := \{\tau_h \in H_h : b(\tau_h, v_h) = G_h(v_h) \quad \forall v_h \in Q_h\},$$

notemos que $\sigma_h \in V_h^g$. Además, para todo $\tau_h^g \in V_h^g$ se tiene que $\sigma_h - \tau_h^g \in V_h$. Luego:

$$\|\sigma - \sigma_h\|_H \leq \|\sigma - \tau_h^g\|_H + \|\sigma_h - \tau_h^g\|_H \quad \forall \tau_h^g \in V_h^g, \tag{4}$$

por cuanto $\sigma_h - \tau_h^g \in V_h$ la inf-sup discreta para a_h nos dice que $\exists \alpha_h > 0$ tal que

$$\alpha_h \|\sigma_h - \tau_h^g\|_H \leq \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \emptyset}} \frac{a_h(\sigma_h - \tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H}, \quad (5)$$

por otro lado, se tiene que $\forall \tau_h \in V_h$

$$a_h(\sigma_h - \tau_h^g) = a_h(\sigma_h - \sigma, \tau_h) + a_h(\sigma - \tau_h^g, \tau_h),$$

a su vez, de la primera ecuación de (1) y (2), se tiene

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau_h) + b(\tau_h, u) &= F(\tau_h) \\ a_h(\sigma_h, \tau_h) + b(\tau_h, u_h) &= F_h(\tau_h), \end{aligned}$$

de donde

$$a(\sigma, \tau_h) - a_h(\sigma_h, \tau_h) + b(\tau_h, u - u_h) = F(\tau_h) - F_h(\tau_h),$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} a_h(\sigma_h, \tau_h) &= a(\sigma, \tau_h) + (F_h - F)(\tau_h) + b(\tau_h, u - u_h) \\ &= a(\sigma, \tau_h) + (F_h - F)(\tau_h) + b(\tau_h, u - w_h) + b(\tau_h, w_h - u_h) \\ &= a(\sigma, \tau_h) + (F_h - F)(\tau_h) + b(\tau_h, u - w_h) \end{aligned}$$

$$\iff a_h(\sigma_h - \tau_h^g, \tau_h) + a_h(\tau_h^g, \tau_h) = a(\sigma, \tau_h) + (F_h - F)(\tau_h) + b(\tau_h, u - w_h)$$

$$\iff a_h(\sigma_h - \tau_h^g, \tau_h) = a(\sigma, \tau_h) - a_h(\tau_h^g, \tau_h) + (F_h - F)(\tau_h) + b(\tau_h, u - w_h)$$

$$\iff a_h(\sigma_h - \tau_h^g, \tau_h) = a(\sigma - \tau_h^g, \tau_h) + a(\tau_h^g, \tau_h) - a_h(\tau_h^g, \tau_h) + (F_h - F)(\tau_h) + b(\tau_h, u - w_h),$$

$\forall w_h \in Q_h$, luego, volviendo a (5) se tiene

$$\begin{aligned} \alpha_h \|\sigma_h - \tau_h^g\|_H &\leq \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \emptyset}} \frac{a(\sigma - \tau_h^g, \tau_h) + a(\tau_h^g, \tau_h) - a_h(\tau_h^g, \tau_h) + (F_h - F)(\tau_h) + b(\tau_h, u - w_h)}{\|\tau_h\|_H} \\ &\leq \|a\| \|\sigma - \tau_h^g\|_H + \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \emptyset}} \frac{a(\tau_h^g, \tau_h) - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} + \|F - F_h\|_{V_h'} + \|b\| \|u - w_h\|_Q, \end{aligned}$$

entonces,

$$\|\sigma_h - \tau_h^g\|_H \leq \frac{\|a\|}{\alpha_h} \|\sigma - \tau_h^g\|_H + C_{4,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \emptyset}} \frac{a(\tau_h^g, \tau_h) - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} + C_{1,h} \|F - F_h\|_{V_h'} + C_{2,h} \|u - w_h\|_Q,$$

$\forall \tau_h \in V_h^g$, $\forall w_h \in Q_h$, luego reemplazando esta cota en (4), resulta

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h\|_H &\leq \|\sigma - \tau_h^h\|_H + \frac{\|a\|}{\alpha_h} \|\sigma - \tau_h^g\|_H + C_{4,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \emptyset}} \frac{a(\tau_h^g, \tau_h) - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} + C_{1,h} \|F - F_h\|_{V_h'} \\ &\quad + C_{2,h} \|u - w_h\|_Q, \end{aligned}$$

$\forall \tau_h^g \in V_h^g, \forall w_h \in Q_h$. Luego, tomando ínfimo con respecto a $w_h \in Q_h$ y $\tau_h^g \in V_h^g$, se deduce que:

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h\|_H &\leq C_{1,h}\|F - F_h\|_{V_h'} + C_{2,h}\text{dist}(u, Q_h) \\ &+ \inf_{\tau_h^g \in V_h^g} \left\{ C_{3,h}\|\sigma - \tau_h^g\|_H + C_{4,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \theta}} \frac{a(\tau_h^g, \tau_h) - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \right\}. \end{aligned}$$

□

b) Proceda análogamente a lo hecho en clases para probar, a partir de (3), que

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h\|_H &\leq \tilde{C}_{1,h}\|F - F_h\|_{V_h'} + \tilde{C}_{2,h}\|G - G_h\|_{Q_h'} + \tilde{C}_{3,h}\text{dist}(u, Q_h) \\ &+ \inf_{\zeta_h \in H_h} \left\{ \tilde{C}_{4,h}\|\sigma - \zeta_h\|_H + \tilde{C}_{5,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \theta}} \frac{a(\zeta_h, \tau_h) - a_h(\zeta_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1,h} &:= \frac{1}{\alpha_h}, \quad \tilde{C}_{2,h} := \frac{1}{\beta_h} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h} \right) + \frac{(\|a\| + \|a_h\|)}{\alpha_h \beta_h}, \quad \tilde{C}_{3,h} := \frac{\|b\|}{\alpha_h}, \\ \tilde{C}_{4,h} &:= \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h} \right) \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h} \right) + \frac{(\|a\| + \|a_h\|)\|b\|}{\alpha_h \beta_h}, \quad \text{y} \quad \tilde{C}_{5,h} := \frac{1}{\alpha_h}. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $\zeta_h \in H_h$, consideremos que

$$\mathbb{B}_h(\sigma_h - \zeta_h) \in Q_h,$$

aplicando la afirmación iii) del lema previo discreto visto en clases, se tiene que $\exists! \bar{\zeta}_h \in V^\perp$ tal que

$$\mathbb{B}_h(\bar{\zeta}_h) = \mathbb{B}_h(\sigma_h - \zeta_h) \quad \text{y} \quad \|\bar{\zeta}_h\|_H \leq \frac{1}{\beta_h} \|\mathbb{B}_h(\sigma_h - \zeta_h)\|_Q,$$

notar que

$$\mathbb{B}(\bar{\zeta}_h + \zeta_h) = \mathbb{B}(\sigma_h),$$

lo cual dice que,

$$b(\bar{\zeta}_h + \zeta_h, v_h) = b(\sigma_h, v_h) = G_h(v_h) \quad \forall v_h \in Q_h,$$

y por lo tanto $\bar{\zeta}_h + \zeta_h \in V_h^g$, por otro lado

$$\begin{aligned} \|\bar{\zeta}_h\|_H &\leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq \theta}} \frac{\langle \mathbb{B}_h(\sigma_h - \zeta_h), v_h \rangle}{\|v_h\|_Q} \\ &= \frac{1}{\beta_h} \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq \theta}} \frac{b(\sigma_h - \zeta_h, v_h)}{\|v_h\|_Q}, \end{aligned}$$

a su vez,

$$\begin{aligned} b(\sigma_h - \zeta_h, v_h) &= b(\sigma_h - \sigma, v_h) + b(\sigma - \zeta_h, v_h) \\ &= G_h(v_h) - G(v_h) + b(\sigma - \zeta_h, v_h) \\ &= (G_h - G)(v_h) + b(\sigma - \zeta_h, v_h), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|\bar{\zeta}_h\|_H &\leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq \theta}} \frac{b(\sigma_h - \zeta_h, v_h)}{\|v_h\|_Q} \\
&= \frac{1}{\beta_h} \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq \theta}} \frac{(G_h - G)(v_h) + b(\sigma - \zeta_h, v_h)}{\|v_h\|_Q} \\
&\leq \frac{1}{\beta_h} \|G - G_h\|_{Q'_h} + \frac{\|b\|}{\beta_h} \|\sigma - \zeta_h\|_H,
\end{aligned}$$

ahora, de (3) se deduce que

$$\begin{aligned}
&\inf_{\tau_h^g \in V_h^g} \left\{ C_{3,h} \|\sigma - \tau_h^g\|_H + C_{4,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \theta}} \frac{a(\tau_h^g, \tau_h) - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \right\} \\
&\leq C_{3,h} \|\sigma - (\bar{\zeta}_h + \zeta_h)\|_H + C_{4,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \theta}} \frac{a(\bar{\zeta}_h + \zeta_h, \tau_h) - a_h(\bar{\zeta}_h + \zeta_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \\
&\leq C_{3,h} \|\sigma - \zeta_h\|_H + C_{3,h} \|\bar{\zeta}_h\|_H + C_{4,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \theta}} \frac{a(\zeta_h, \tau_h) - a_h(\zeta_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \\
&\quad + C_{4,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \theta}} \frac{a(\bar{\zeta}_h, \tau_h) - a_h(\bar{\zeta}_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \\
&\leq C_{3,h} \|\sigma - \zeta_h\|_H + C_{3,h} \|\bar{\zeta}_h\|_H + C_{4,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \theta}} \frac{a(\zeta_h, \tau_h) - a_h(\zeta_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \\
&\quad + C_{4,h} (\|a\| + \|a_h\|) \|\bar{\zeta}_h\|_H \\
&= C_{3,h} \|\sigma - \zeta_h\|_H + (C_{3,h} + C_{4,h} (\|a\| + \|a_h\|)) \|\bar{\zeta}_h\|_H \\
&\quad + C_{4,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \theta}} \frac{a(\zeta_h, \tau_h) - a_h(\zeta_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \\
&\leq C_{3,h} \|\sigma - \zeta_h\|_H + (C_{3,h} + C_{4,h} (\|a\| + \|a_h\|)) \left(\frac{1}{\beta_h} \|G - G_h\|_{Q'_h} + \frac{\|b\|}{\beta_h} \|\sigma - \zeta_h\|_H \right) \\
&\quad + C_{4,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \theta}} \frac{a(\zeta_h, \tau_h) - a_h(\zeta_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \\
&= \tilde{C}_{2,h} \|G - G_h\|_{Q'_h} + \tilde{C}_{4,h} \|\sigma - \zeta_h\|_H + \tilde{C}_{5,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \theta}} \frac{a(\zeta_h, \tau_h) - a_h(\zeta_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \quad \forall \zeta_h \in H_h,
\end{aligned}$$

por lo tanto, acotando (3) por lo anterior y tomando ínfimo con respecto a $\zeta_h \in H_h$ se concluye

que

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h\|_H &\leq \tilde{C}_{1,h} \|F - F_h\|_{V'_h} + \tilde{C}_{2,h} \|G - G_h\|_{Q'_h} + \tilde{C}_{3,h} \text{dist}(u, Q_h) \\ &+ \inf_{\zeta_h \in H_h} \left\{ \tilde{C}_{4,h} \|\sigma - \zeta_h\|_H + \tilde{C}_{5,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \theta}} \frac{a(\zeta_h, \tau_h) - a_h(\zeta_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \right\}, \end{aligned}$$

□

- c) Suponga que a_h se puede extender a $H \times H$, y deduzca en tal caso una simplificación de (6) a partir de un manejo algebraico conveniente del supremo.

Demostración. Como a_h se puede extender a $H \times H$, entonces

$$a_h(\sigma_h, \tau_h) = a(\sigma_h, \tau_h) \quad \forall (\sigma_h, \tau_h) \in H_h \times H_h$$

y

$$a_h(\sigma, \tau) = a(\sigma, \tau) \quad \forall (\sigma, \tau) \in H \times H.$$

Luego (2) queda

$$a(\sigma_h, \tau_h) + b(\tau_h, u_h) = F(\tau_h) \quad \forall \tau_h \in H_h,$$

$$b(\sigma_h, v_h) = G_h(v_h) \quad \forall v_h \in Q_h.$$

Ahora, usando la definición del ítem a) para V_h^g , notamos que $\sigma_h \in V_h^g$ y además

$$b(\sigma_h - \tau_h^g, v_h) = 0 \quad \forall \tau_h^g \in V_h^g, \forall v_h \in Q_h,$$

lo cual dice que $\sigma_h - \tau_h^g \in V_h$. Luego

$$\|\sigma - \sigma_h\|_H \leq \|\sigma - \tau_h^g\|_H + \|\sigma_h - \tau_h^g\|_H \quad \forall \tau_h^g \in V_h^g, \quad (7)$$

por cuanto $\sigma_h - \tau_h^g \in V_h$, la inf-sup discreta para a nos dice que $\exists \alpha_h > 0$ tal que

$$\alpha_h \|\sigma_h - \tau_h^g\|_H \leq \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \theta}} \frac{a(\sigma_h - \tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H}, \quad (8)$$

por otro lado, se tiene que

$$a(\sigma_h - \tau_h^g, \tau_h) = a(\sigma_h - \sigma, \tau_h) + a(\sigma - \tau_h^g, \tau_h),$$

a su vez, de las primeras ecuaciones del sistema continuo y discreto, se tiene

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau_h) + b(\tau_h, u) &= F(\tau_h) \\ a(\sigma_h, \tau_h) + b(\tau_h, u_h) &= F(\tau_h), \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} a(\sigma_h - \sigma, \tau_h) &= b(\tau_h, u - u_h) \\ &= b(\tau_h, u - w_h) + b(\tau_h, w_h - u_h) \\ &= b(\tau_h, u - w_h) \quad \forall w_h \in Q_h. \end{aligned}$$

Volviendo a (8), se tiene

$$\begin{aligned}\alpha_h \|\sigma - \tau_h^g\|_H &\leq \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq \theta}} \frac{a(\sigma - \tau_h^g, \tau_h) + b(\tau_h, u - w_h)}{\|\tau_h\|_H} \\ &\leq \|a\| \|\sigma - \tau_h^g\|_H + \|b\| \|u - w_h\|_Q,\end{aligned}$$

de donde

$$\|\sigma_h - \tau_h^g\|_H \leq \frac{\|a\|}{\alpha_h} \|\sigma - \tau_h^g\|_H + \frac{\|b\|}{\alpha_h} \|u - w_h\|_Q \quad \forall \tau_h^g \in V_h^g, \forall w_h \in Q_h,$$

luego, tomando ínfimos con respecto a $\tau_h^g \in V_h^g$ y $w_h \in Q_h$ se deduce que

$$\|\sigma - \sigma_h\|_H \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}\right) \text{dist}(\sigma, V_h^g) + \left(\frac{\|b\|}{\alpha_h}\right) \text{dist}(u, Q_h).$$

Por otra parte, sea ζ_h arbitrario en H_h , consideremos

$$\mathbb{B}_h(\sigma_h - \zeta_h) \in Q_h,$$

aplicando la afirmación iii) del lema previo discreto, se tiene que $\exists! \bar{\zeta}_h \in V_h$ tal que

$$\mathbb{B}_h(\bar{\zeta}_h) = \mathbb{B}_h(\sigma_h - \zeta_h) \quad \text{y} \quad \|\bar{\zeta}_h\|_H \leq \frac{1}{\beta_h} \|\mathbb{B}_h(\sigma_h - \zeta_h)\|_H,$$

notar que,

$$\mathbb{B}_h(\bar{\zeta}_h + \zeta_h, v_h) = b(\sigma_h, v_h) = G_h(v_h) \quad \forall v_h \in Q_h$$

y por tanto $\bar{\zeta}_h + \zeta_h \in V_h^g$, por otro lado

$$\begin{aligned}\|\bar{\zeta}_h\| &\leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq \theta}} \frac{\langle \mathbb{B}_h(\sigma_h - \zeta_h), v_h \rangle}{\|v_h\|_Q} \\ &= \frac{1}{\beta_h} \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq \theta}} \frac{b(\sigma_h - \zeta_h, v_h)}{\|v_h\|_Q},\end{aligned}$$

a su vez,

$$\begin{aligned}b(\sigma_h - \zeta_h, v_h) &= b(\sigma_h - \sigma, v_h) + b(\sigma - \zeta_h, v_h) \\ &= G_h(v_h) - G(v_h) + b(\sigma - \zeta_h, v_h) \\ &= (G_h - G)(v_h) + b(\sigma - \zeta_h, v_h)\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\|\bar{\zeta}_h\|_H &\leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq \theta}} \frac{b(\sigma - \zeta_h, v_h)}{\|v_h\|_Q} \\ &\leq \frac{1}{\beta_h} \|G - G_h\|_{Q_h'} + \frac{\|b\|}{\beta_h} \|\sigma - \zeta_h\|_H,\end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned}
\text{dist}(\sigma, V_h^g) &\leq \|\sigma - (\bar{\zeta}_h + \zeta_h)\|_H \\
&\leq \|\sigma - \zeta_h\|_H + \|\bar{\zeta}_h\|_H \\
&\leq \|\sigma - \zeta_h\|_H + \frac{1}{\beta_h} \|G - G_h\|_{Q'_h} + \frac{\|b\|}{\beta_h} \|\sigma - \zeta_h\|_H,
\end{aligned}$$

de donde tomando el ínfimo con respecto a $\zeta_h \in H_h$, concluye que

$$\text{dist}(\sigma, V_h^g) \leq \frac{1}{\beta_h} \|G - G_h\|_{Q'_h} + \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) \text{dist}(\sigma, H_h),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|\sigma - \sigma_h\|_H &\leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}\right) \frac{1}{\beta_h} \|G - G_h\|_{Q'_h} + \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}\right) \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) \text{dist}(\sigma, H_h) \\
&\quad + \frac{\|b\|}{\alpha_h} \text{dist}(u, Q_h).
\end{aligned}$$

□