Ayudantía 2: Estabilidad de sistemas de ecuaciones lineales.
26 de marzo

1. Problemas

7. **(A)** (*¿Cómo estimar el número de condición de una matriz sin calcular su inversa?*)

   Visto en ayudantía.

10. **(A)** (*Número de condición de matrices hermitianas y definidas positivas*)

    Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermitiana y definida positiva. Demuestre que

    $$\kappa_2(A) = \frac{\text{máx}\,\{\lambda : \lambda \text{ es valor propio de } A\}}{\text{mín}\{\lambda : \lambda \text{ es valor propio de } A\}}.$$

    Solución:

    Si A es una matriz hermitiana y definida positiva, ella satisface que todos sus valores propios son números reales positivos.

    Entonces,

    $$\rho(A^*A) = \rho(A^2) = (\rho(A))^2$$

    y

    $$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{(\rho(A))^2} = \rho(A).$$

    Por otro lado, la inversa de A también es hermitiana y definida positiva y

    $$\|A^{-1}\|_2 = \rho(A^{-1}).$$

    Dado que λ es valor propio de A si y solo si $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de su inversa, se cumple que

    $$\rho(A^{-1}) = \text{máx}\left\{\frac{1}{\lambda} : \lambda \text{ es valor propio de } A\right\} = \frac{1}{\text{mín}\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : \lambda \text{ es valor propio de } A\}}.$$

    Con esto se tiene que

    $$\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{\text{máx}\,\{\lambda : \lambda \text{ es valor propio de } A\}}{\text{mín}\{\lambda : \lambda \text{ es valor propio de } A\}}.$$

12. (*Un resultado auxiliar para próximo problema*)

    Suponga que $I + H$ es una matriz invertible y que existe norma matricial $\|\cdot\|$ de modo que $\|H\| < 1$. Demuestre que

    $$\|(I+H)^{-1} - I\| \leq \frac{\|H\|}{1 - \|H\|}.$$

    Sugerencia: Reemplace I por $(I+H)^{-1}(I+H)$ y aplique distributividad del producto de matrices con respecto a la suma.

    Teorema 3.7, página 46, en Apuntes de Prof. R. Bürger.

13. **(A)** (*Análisis de sensibilidad del problema de invertir una matriz*).

Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $B = A + \delta_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices invertibles. Note que

$$A - B = AB^{-1}B - AA^{-1}B = A(B^{-1} - A^{-1})B \quad \Rightarrow \quad B^{-1} - A^{-1} = -A^{-1}\delta_A B^{-1}. \tag{1}$$

Además,

$$B = A + \delta_A = A(I + A^{-1}\delta_A). \tag{2}$$

(a) Demuestre que

$$\frac{1}{\kappa(B)}\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|} \le \frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \le \|A^{-1}\delta_A\| \le \kappa(A)\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}.$$

Sugerencia: Puede utilizar 1. Para demostrar la cota inferior puede despejar δ_A de (1).

(b) Demuestre que

$$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \le \frac{\|A^{-1}\delta_A\|}{1 - \|A^{-1}\delta\|} \le \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}\delta_A\|}\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}.$$

Sugerencia: Puede utilizar 2 y el resultado demostrado en problema anterior.

En los ítems que siguen suponga que la norma matricial utilizada es tal que $\|A^{-1}\delta_A\| < 1$.

(c) Demuestre que

$$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \ge \frac{1}{\kappa(B)\,(1 + \|A^{-1}\delta_A\|)}\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}.$$

Sugerencia: Puede despejar δ_A de (1) y utilizar las siguientes desigualdades

$$\frac{1}{1 + \|A^{-1}\delta_A\|} \le \frac{\|B^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \le \frac{1}{1 - \|A^{-1}\delta_A\|}$$

que se obtienen de aplicar desigualdad triangular después de igualar las normas de las siguientes matrices

$$B^{-1} = A^{-1} - A^{-1}\delta_A B^{-1}, \quad A^{-1} = B^{-1} + A^{-1}\delta_A B^{-1}.$$

Solución:

(a) Utilizando (1), se tiene que

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \le \|A^{-1}\delta_A\|\|B^{-1}\| \Rightarrow \frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \le \|A^{-1}\delta_A\| \le \|A^{-1}\|\|\delta_A\| = \kappa(A)\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}.$$

Utilizando nuevamente (1), se tiene que

$$\delta_A = -A(B^{-1} - A^{-1})B \Rightarrow \|\delta_A\| le \|A\|\|B^{-1} - A^{-1}\|\|B\| \Rightarrow \|B^{-1} - A^{-1}\| \ge \frac{1}{\|B\|}\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}.$$

Dividiendo por $\|B^{-1}\|$ se tiene la desigualdad pedida.

(b) Teniendo en cuenta (2),

$$B^{-1} - A^{-1} = \left((I + A^{-1}\delta_A)^{-1} - I\right)A^{-1}$$

y

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \le \left\|(I + A^{-1}\delta_A)^{-1} - I\right\|\left\|A^{-1}\right\|.$$

Como $\|A^{-1}\delta_A\| < 1$, se tiene que

$$\left\|(I + A^{-1}\delta_A)^{-1} - I\right\| \le \frac{\|A^{-1}\delta_A\|}{1 - \|A^{-1}\delta_A\|}$$

y

$$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \le \frac{\|A^{-1}\delta_A\|}{1 - \|A^{-1}\delta_A\|} \le \|A^{-1}\|\|\delta_A\|\frac{1}{1 - \|A^{-1}\delta_A\|} = \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}\delta_A\|}\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}.$$

(c) Comenzando con $\|B^{-1} - A^{-1}\| \ge \frac{1}{\|B\|}\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}$, se tiene que

$$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \ge \frac{1}{\|A^{-1}\|\|B\|}\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|} = \frac{1}{\kappa(B)}\frac{\|B^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}.$$

Utilizando una de las desigualdades en la sugerencia se llega a la desigualdad requerida.