



Evaluación 2, pregunta 4

Victor Cartes

Prof. Gabriel N. Gatica

10 de enero, 2022

Pregunta 4.

El propósito de este ejercicio es demostrar las propiedades de aproximación del interpolante Π_K^k (resp. global Π_h^k) de Raviart-Thomas con respecto a la norma $\|\cdot\|_{0,K}$ (resp. $\|\cdot\|_{0,\Omega}$) y la seminorma del espacio de Sobolev $W^{l,p}(K)$ (resp. $W^{l,p}(\Omega)$), donde l es un entero tal que $1 \leq l \leq k + 1$. Más precisamente, se pide lo que se indica a continuación.

Dado $K \in \mathcal{T}_h$, use escalamiento con respecto a la composición con la aplicación afín T_K , la inyección continua $i : W^{1,p}(\widehat{K}) \rightarrow L^2(\widehat{K})$ para todo $p > \frac{2n}{n+2}$, lo cual significa que existe una constante $\widehat{c} > 0$ tal que

$$\|\widehat{\boldsymbol{\tau}}\|_{0,\widehat{K}} \leq \widehat{c} \|\widehat{\boldsymbol{\tau}}\|_{1,p;\widehat{K}} \quad \forall \widehat{\boldsymbol{\tau}} \in W^{1,p}(\widehat{K}),$$

las propiedades de aproximación ya conocidas de Π_K^k , y las desigualdades geométricas asociadas a T_K , para probar que existe una constante $\widetilde{C} > 0$, independiente de K , tal que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,K} \leq \widetilde{C} h_K^{l-n(2-p)/(2p)} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in W^{l,p}(K). \quad (1)$$

Demostración

Sea $K \in \mathcal{T}_h$, considerando propiedades de escalamiento, para todo $\boldsymbol{\tau} \in W^{l,p}(K)$

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,K} &\leq C \|B_k^{-1}\|^0 |\det B_K|^{1/2} \|\widehat{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})}\|_{0,\widehat{K}} \\ &= C |\det B_k|^{1/2} \|\widehat{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})}\|_{0,\widehat{K}},\end{aligned}$$

luego, como $\exists \widehat{C} > 0$ tal que

$$\|\widehat{\boldsymbol{\tau}}\|_{0,\widehat{K}} \leq \widehat{C} \|\widehat{\boldsymbol{\tau}}\|_{1,p;\widehat{K}} \quad \forall \widehat{\boldsymbol{\tau}} \in W^{1,p}(\widehat{K}),$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\tau - \Pi_K^k(\tau)\|_{0,K} &\leq \widehat{C} |\det B_K|^{1/2} \|\widehat{\tau} - \widehat{\Pi_K^k(\tau)}\|_{1,p;\widehat{K}} \\
&= \widehat{C} |\det B_K|^{1/2} \left\{ \|\widehat{\tau} - \widehat{\Pi_K^k(\tau)}\|_{0,p;\widehat{K}} + |\widehat{\tau} - \widehat{\Pi_K^k(\tau)}|_{1,p;\widehat{K}} \right\} \\
&\leq C |\det B_K|^{1/2} \left\{ \|B_K\|^0 |\det B_K|^{-1/p} \|\tau - \Pi_K^k(\tau)\|_{0,p;K} \right. \\
&\quad \left. + \|B_K\|^1 |\det B_K|^{-1/p} |\tau - \Pi_K^k(\tau)|_{1,p;K} \right\} \\
&= C |\det B_K|^{-(2-p)/(2p)} \left\{ \|\tau - \Pi_K^k(\tau)\|_{0,p;K} + \|B_K\| |\tau - \Pi_K^k(\tau)|_{1,p;K} \right\},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
&\|\tau - \Pi_K^k(\tau)\|_{0,K} \\
&\leq C |\det B_K|^{\frac{-(2-p)}{2p}} \left\{ \|\tau - \Pi_K^k(\tau)\|_{0,p;K} + \|B_K\| |\tau - \Pi_K^k(\tau)|_{1,p;K} \right\} \quad (2)
\end{aligned}$$

Por su parte, de las estimaciones del error de interpolación, con $1 \leq l \leq k + 1$, $m = 0$, $\exists C_0 > 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,p;K} \leq C_0 h_K^l |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in W^{l,p}(K),$$

luego, con $1 \leq l \leq k + 1$, $m = 1$, $\exists C_1 > 0$ tal que

$$|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})|_{1,p;K} \leq C_1 h_K^{l-1} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in W^{l,p}(K).$$

Ahora, aplicando estos resultados en (2), se obtiene

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,K} &\leq C |\det B_K|^{\frac{-(2-p)}{2p}} \left\{ C_0 h_K^l |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K} + C_1 h_K^{l-1} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K} \right\} \\ &\leq C |\det B_K|^{\frac{-(2-p)}{2p}} h_K^l |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K},\end{aligned}$$

para todo $\boldsymbol{\tau} \in W^{l,p}(K)$, con $1 \leq l \leq k+1$.

Recordemos de las propiedades geométricas del escalamiento que

$$|\det B_K| = \frac{|K|}{|\widehat{K}|}$$

y que $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0$ tales que

$$\alpha_1 h_K^n \leq |K| \leq \alpha_2 h_K^n,$$

así, se deduce que

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,K} &\leq C |\det B_K|^{\frac{-(2-p)}{2p}} h_K^l |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K} \\ &\leq \tilde{C} h_K^{l - \frac{n(2-p)}{2p}} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K}, \end{aligned}$$

para todo $\boldsymbol{\tau} \in W^{l,p}(K)$, con $1 \leq l \leq k+1$.

En el caso $p \in \left(\frac{2n}{n+2}, 2 \right]$, aplique la propiedad sub-aditiva, la cual establece que, dados n escalares no negativos a_j , $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, y $r \in (0, 1)$, se tiene que

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j \right)^r \leq \sum_{j=1}^n a_j^r,$$

para demostrar, a partir de (1), que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega} \leq \tilde{C} h^{l-n(2-p)/(2p)} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;\Omega} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in W^{l,p}(\Omega). \quad (3)$$

Demostración

Notemos que, elevando al cuadrado la desigualdad (1) y sumando para cada $K \in \mathcal{T}_h$, se tiene que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,K}^2 = \|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega}^2 \leq C^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2(l - \frac{n(2-p)}{2p})} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K}^2,$$

teniendo en cuenta que $h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$, entonces

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega}^2 &\leq C^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h^{2(l - \frac{n(2-p)}{2p})} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K}^2 \\ &= C^2 h^{2(l - \frac{n(2-p)}{2p})} \left(\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K}^2 \right)^{p/2} \right)^{2/p}, \end{aligned}$$

aplicando la propiedad sub-aditiva, con $p \in \left(\frac{2n}{n+2}, 2\right]$ queda

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega}^2 &\leq C^2 h^{2\left(l - \frac{n(2-p)}{2p}\right)} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K}^p \right)^{2/p} \\ &= C^2 h^{2\left(l - \frac{n(2-p)}{2p}\right)} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;\Omega}^2,\end{aligned}$$

tomando raíz cuadrada, se tiene

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega} \leq C h^{l-n(2-p)/(2p)} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;\Omega} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in W^{l,p}(\Omega).$$

En el caso $p \in (2, +\infty)$, use la desigualdad de Hölder discreta para probar, a partir de (1), que existe una constante $\overline{C} > 0$, que depende de \tilde{C} y $|\Omega|$, tal que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega} \leq \overline{C} h^{l-n/(2p)} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;\Omega} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in W^{l,p}(\Omega) \quad (4)$$

Demostración

Ahora, sea $p \in (2, +\infty)$, de manera análoga al caso anterior, elevando al cuadrado (1) y sumando para cada $K \in \mathcal{T}_h$, se tiene

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega}^2 \leq C^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2(l - \frac{n(2-p)}{2p})} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K}^2,$$

luego, usando desigualdad de Hölder discreta

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega}^2 \leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2(l - \frac{n(2-p)}{2p})p'} \right)^{1/p'} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K}^{2p} \right)^{1/p},$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

A su vez, se sabe que si para todo $a_i > 0$, entonces $\sum_i a_i^2 \leq (\sum_i a_i)^2$, luego

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega}^2 &\leq C^2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2(l - \frac{n(2-p)}{2p})p'} \right)^{1/p'} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;K}^p \right)^{2/p} \\
&= C^2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2(l - \frac{n(2-p)}{2p})p'} \right)^{1/p'} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;\Omega}^2 \\
&= C^2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2(l - \frac{n(2-p)}{2p})p' - n} h_K^n \right)^{1/p'} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;\Omega}^2 \\
&\leq C^2 h^{2(l - \frac{n(2-p)}{2p}) - n/p'} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^n \right)^{1/p'} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;\Omega}^2 \\
&\leq C^2 h^{2(l - \frac{n(2-p)}{2p}) - n/p'} |\Omega|^{1/p'} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;\Omega}^2,
\end{aligned}$$

en conclusión, existe $\overline{C} > 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega} \leq \overline{C} h^{\left(l - \frac{n(2-p)}{2p}\right) - n/2p'} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;\Omega},$$

notando que

$$\left(l - \frac{n(2-p)}{2p}\right) - n/2p' = l - n/(2p),$$

se reescribe como

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega} \leq \overline{C} h^{l-n/(2p)} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;\Omega} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in W^{l,p}(\Omega),$$

con $1 \leq l \leq k + 1$.

Ilustre la aplicabilidad de (3) y (4) con la demostración de alguna condición inf-sup discreta que Ud. conozca.

Demostración

Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \varphi) &= F(\boldsymbol{\tau}), \\ b(\boldsymbol{\sigma}, \phi) &= G(\phi),\end{aligned}$$

$\forall (\boldsymbol{\tau}, \phi) \in H \times Q$, donde:

$$\begin{aligned}H &:= \mathbf{H}(\operatorname{div}_{\varrho}; \Omega) = \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \in L^{\varrho}(\Omega)\} \\ Q &:= L^{\rho}(\Omega),\end{aligned}$$

con $\rho, \varrho \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\varrho} = 1$,

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) &:= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \\ b(\boldsymbol{\tau}, \phi) &:= \int_{\Omega} \phi \operatorname{div} \boldsymbol{\tau},\end{aligned}$$

con F y G funcionales lineales y acotados.

Para el esquema de Galerkin, consideremos un entero $k \geq 0$, y los espacios

$$H_h := \{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbf{H}(\operatorname{div}_{\varrho}; \Omega) : \boldsymbol{\tau}_h|_K \in RT_k(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$
$$Q_h := \{\phi_h \in L^{\rho}(\Omega) : \phi|_K \in \mathcal{P}_k(K) \in \mathcal{T}_h\}.$$

A continuación se probará la condición inf-sup discreta para la forma bilineal b , esto es, demostrar que $\exists \beta > 0$ independiente de h tal que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h \\ \boldsymbol{\tau}_h \neq \boldsymbol{\theta}}} \frac{\int_{\Omega} \psi_h \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\operatorname{div}_{\varrho}; \Omega}} \geq \beta \|\psi_h\|_{0, \rho; \Omega} \quad \forall \psi_h \in Q_h.$$

Dado $\varphi_h \in Q_h$, consideremos un dominio convexo \mathcal{G} , tal que $\overline{\Omega} \subseteq \mathcal{G}$, y definimos

$$g := \begin{cases} |\psi_h|^{\rho-2} \psi_h & \text{en } \Omega, \\ 0 & \text{en } \mathcal{G} \setminus \overline{\Omega}, \end{cases}$$

usando regularidad de EDPs se deduce que existe un único $z \in W^{2,\varrho}(\mathcal{G}) \cap W_0^{1,\varrho}(\mathcal{G})$ tal que

$$\Delta z = g \text{ en } \mathcal{G}, \quad z = 0 \text{ en } \partial\mathcal{G},$$

notar que $|\psi_h|^{\rho-2} \psi_h \in L^\varrho(\Omega)$, y por lo tanto $g \in L^\varrho(\mathcal{G})$, además, $\exists C_{reg} > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|z\|_{2,\varrho;\mathcal{G}} &\leq C_{reg} \|g\|_{0,\varrho;\mathcal{G}} \\ &= C_{reg} \|\psi_h\|_{0,\rho;\Omega}^{\rho-1}. \end{aligned}$$

Definiendo $\zeta := \nabla z|_{\Omega} \in \mathbf{W}^{1,q}(\Omega)$, se tiene que

$$\operatorname{div} \zeta = |\psi_h|^{\rho-2} \psi_h \text{ en } \Omega$$

y

$$\|\zeta\|_{1,q;\Omega} \leq \|z\|_{2,q;\Omega} \leq C_{reg} \|\psi_h\|_{0,\rho;\Omega}^{\rho-1},$$

luego, definiendo $\zeta_h := \Pi_h^K(\zeta) \in H_h$, se tiene que $\operatorname{div} \zeta_h = \mathcal{P}_h^k(\operatorname{div} \zeta)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} \zeta_h\|_{0,q;\Omega} &= \|\mathcal{P}_h^k(\operatorname{div} \zeta)\|_{0,q;\Omega} \\ &\leq \hat{C} \|\operatorname{div} \zeta\|_{0,q;\Omega} \\ &= \hat{C} \| |\psi_h|^{\rho-2} \psi_h \|_{0,q;\Omega} \\ &= \hat{C} \|\psi_h\|_{0,\rho;\Omega}^{\rho-1}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\|\operatorname{div} \zeta_h\|_{0,q;\Omega} \leq \hat{C} \|\psi_h\|_{0,\rho;\Omega}^{\rho-1},$$

a su vez, usando (3)

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega} \leq Ch^{l - \frac{n(2-p)}{(2p)}} |\boldsymbol{\tau}|_{l,p;\Omega} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{l,p}(\Omega),$$

pero en este caso con $n = 2$, $l = 1$, $p = \varrho$ y $\boldsymbol{\tau} = \zeta$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\zeta - \Pi_h^k(\zeta)\|_{0,\Omega} &\leq Ch^{1 - \frac{2(2-\varrho)}{2\varrho}} |\zeta|_{1,\varrho;\Omega} \\ &= Ch^{2(1 - \frac{1}{\varrho})} |\zeta|_{1,\varrho;\Omega}, \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \|\zeta_h\|_{0,\Omega} &= \|\Pi_h^k(\zeta)\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|\zeta - \Pi_h^k(\zeta)\|_{0,\Omega} + \|\zeta\|_{0,\Omega} \\ &\leq \tilde{C} |\zeta|_{1,\varrho;\Omega} + \|\zeta\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

y usando la inyección continua de $\mathbf{W}^{1,\varrho}(\Omega)$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$, se obtiene

$$\|\zeta_h\|_{0,\Omega} \leq \overline{C} \|\zeta\|_{1,\varrho;\Omega} \leq \overline{C} C_{reg} \|\psi_h\|_{0,\rho;\Omega}^{\rho-1}$$

en conclusión

$$\|\zeta_h\|_{\text{div}_\varrho, \Omega} \leq \|\zeta_h\|_{0, \Omega} + \|\text{div } \zeta_h\|_{0, \varrho; \Omega} \leq \tilde{C}_0 \|\psi_h\|_{0, \rho; \Omega}^{\rho-1},$$

finalmente

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\tau_h \in H_h \\ \tau_h \neq \theta}} \frac{\int_{\Omega} \psi_h \text{div } \tau_h}{\|\tau_h\|_{\text{div}_\varrho; \Omega}} &\geq \frac{\int_{\Omega} \psi_h \text{div } \zeta_h}{\|\zeta_h\|_{\text{div}_\varrho; \Omega}} \\ &= \frac{\int_{\Omega} \psi_h \mathcal{P}_h^k(|\psi_h|^{\rho-2} \psi_h)}{\|\zeta_h\|_{\text{div}_\varrho; \Omega}} \\ &= \frac{\int_{\Omega} \psi_h |\psi_h|^{\rho-2} \psi_h}{\|\zeta_h\|_{\text{div}_\varrho; \Omega}} \\ &= \frac{\|\psi_h\|_{0, \rho; \Omega}^\rho}{\|\zeta_h\|_{\text{div}_\varrho; \Omega}} \geq \frac{1}{\tilde{C}_0} \|\psi_h\|_{0, \rho; \Omega}. \end{aligned}$$