Profesor: Fernando Roldán
Ayudantes: Cristofer Mamani y Fernando Muñoz
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Optimización II (5225565)

Pauta Tarea 1

P1) Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Demuestre que $\operatorname{conv}(C)$ es compacto.

Solución

Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\operatorname{conv}(C)$. Por el Teorema de Caratheodory, para cada $k \in \mathbb{N}$, x_k se puede escribir de la forma

$$x_k = \sum_{m=1}^{n+1} \alpha_k^m x_k^m$$

donde $\alpha_k^m \in [0,1]$, $x_k^m \in C$ y $\sum_{m=1}^{n+1} \alpha_k^m = 1$. Como C es compacto, podemos tomar una subsucesión de $(x_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$ que converja a $x^1 \in C$. De manera análoga, considerando los indices de esta subsucesión, podemos tomar una subsucesión de $(\alpha_k^1)_{n\in\mathbb{N}}$ que converja a $\alpha^1 \in [0,1]$. Repitiendo este proceso para cada x_i y cada α_i, con $i = 2, \ldots, n+1$, podemos sacar una subsucesión de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que sea convergente, de donde se concluye la compacidad de $\operatorname{conv}(C)$.

P2) Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y $C \subset \mathbb{R}^n$ con C convexo.

(i) Pruebe que si $\operatorname{int}(X) \neq \varnothing$ entonces $\operatorname{aff}(X) = \mathbb{R}^n$. **Hint:** Considere primero el caso en que $X = B(0,r)$ para $r > 0$.

(ii) Pruebe que si $\operatorname{aff}(X) = \mathbb{R}^n$ entonces $\operatorname{int}(X) = \operatorname{ri}(X)$.

(iii) Pruebe que si $\operatorname{aff}(C) = \mathbb{R}^n$ entonces $\operatorname{int}(C) \neq \varnothing$.

(iv) Pruebe que

$$\operatorname{aff}(X) = \operatorname{aff}(\operatorname{conv}(X)) = \operatorname{aff}(\overline{X}).$$

(v) Demuestre que $\operatorname{int}(C) \neq \varnothing \Leftrightarrow \operatorname{int}(\overline{C}) \neq \varnothing$.

Solución

(i) Supongamos primero que $X = B(0,r)$ para $r > 0$. Sea e_i el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$. Se sigue que, para cada $i = 1, \ldots, n$, $\frac{re_i}{2} \in X$. Por lo tanto, $e_i \in \operatorname{aff}(X)$ y así $\operatorname{aff}(X) = \mathbb{R}^n$. Para el caso general, basta tomar $x \in \operatorname{int}(X)$ y $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset X$. Considerando la traslación $X - x$ se tiene $B(0,r) \subset (X - x)$ y así el resultado se sigue del primer caso.

(ii) Directo de la definición ya que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $r > 0$, $B(x,r) \cap \operatorname{aff}(X) = B(x,r) \cap \mathbb{R}^n = B(x,r)$.

(iii) Si $\operatorname{aff}(C) = \mathbb{R}^n$, C no puede ser vacío. Como C es convexo $\operatorname{ri}(C) \neq \varnothing$. El resultado se sigue de (ii).

(iv) Primero notemos que $X \subset \operatorname{conv}(X)$ por lo tanto $\operatorname{aff}(X) \subset \operatorname{aff}(\operatorname{conv}(X))$. Por otro lado, como $\operatorname{aff}(X)$ contiene combinaciones lineales de vectores de X, en particular tiene las combinaciones convexas, por lo tanto $\operatorname{conv}(X) \subset \operatorname{aff}(X)$. Se concluye que $\operatorname{aff}(\operatorname{conv}(X)) \subset \operatorname{aff}(X)$ y así que $\operatorname{aff}(\operatorname{conv}(X)) = \operatorname{aff}(X)$.

De manera análoga, $X \subset \overline{X}$ por lo tanto $\operatorname{aff}(X) \subset \operatorname{aff}(\overline{X})$. Además, $\operatorname{aff}(X)$ es cerrado, por lo tanto $\overline{X} \subset \operatorname{aff}(X)$.

(v) Una dirección es directa ya que $\operatorname{int}(C) \subset \operatorname{int}(\overline{C})$. Para la otra dirección, como $\operatorname{int}(\overline{C}) \neq \varnothing$, por (i) se tiene que $\operatorname{aff}(\overline{C}) = \mathbb{R}^n$ y por (iv) que $\operatorname{aff}(C) = \mathbb{R}^n$. El resultado se sigue de (iii).

P3) Sea $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal y sean $C \subset \mathbb{R}^n$, $S \subset \mathbb{R}^n$ y $D \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos convexos no vacíos. Demuestre que las siguientes afirmaciones son verdaderas. Puede utilizar las igualdades $\overline{\operatorname{ri}(C)} = \overline{C}$ $\operatorname{ri}(\overline{C}) = \operatorname{ri}(C)$ vistas en ayudantía y que $A(\overline{X}) \subset \overline{A(X)}$, para cualquier $X \subset \mathbb{R}^n$.

(i) Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $\operatorname{ri}(C) = \operatorname{ri}(S)$.

b) $\overline{C} = \overline{S}$.

c) $\operatorname{ri}(C) \subset S \subset \overline{C}$.

(ii) $A(\operatorname{ri}(C)) \subset A(C) \subset \overline{A(\operatorname{ri}(C))}$.

(iii) $\operatorname{ri}(A(C)) = A(\operatorname{ri}(C))$. **Hint:** Para una inclusión, combine (ii) y (i).

(iv) $\operatorname{ri}(C \times S) = \operatorname{ri}(C) \times \operatorname{ri}(S)$.

(v) $\operatorname{ri}(C - S) = \operatorname{ri}(C) - \operatorname{ri}(S)$. **Hint:** Considere el operador lineal $A\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n\colon (x, y) \mapsto x - y$ y verifique $A(C \times S) = C - S$.

(vi) Si $\operatorname{ri}(D) \cap A(\operatorname{ri}(C)) \neq \varnothing$, entonces $0 \in \operatorname{ri}(D - A(C))$.

Solución

(i) Veamos a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c). Primero, si $\operatorname{ri}(C) = \operatorname{ri}(S)$, debido a que $\overline{C} = \overline{\operatorname{ri}(C)}$ se concluye que $\overline{C} = \overline{S}$. Por otro lado, si asumimos b), $\operatorname{ri}(C) = \operatorname{ri}(\overline{C}) = \operatorname{ri}(\overline{S}) = \operatorname{ri}(S) \subset S \subset \overline{S} = \overline{C}$, lo que corresponde a c). Si asumimos c) se cumple que $\operatorname{ri}(C) \subset \operatorname{ri}(S) \subset \operatorname{ri}(\overline{C})$, pero como $\operatorname{ri}(C) = \operatorname{ri}(\overline{C})$ se concluye que $\operatorname{ri}(C) = \operatorname{ri}(S)$.

(ii) Se deduce de las inclusiones:

$$A(\operatorname{ri}(C)) \subset A(C) \subset A(\overline{C}) = A(\overline{\operatorname{ri}(C)}) \subset \overline{A(\operatorname{ri}(C))}.$$

(iii) De (ii) se tiene que

$$\operatorname{ri}(A(\operatorname{ri}(C))) \subset \operatorname{ri}(A(C)) \subset \operatorname{ri}(\overline{A(\operatorname{ri}(C))}) = \overline{A(\operatorname{ri}(C))}$$

y de (i) se concluye que $\operatorname{ri}(A(\operatorname{ri}(C))) = \operatorname{ri}(A(C))$. Por lo tanto, $\operatorname{ri}(A(C)) \subset A(\operatorname{ri}(C))$.

Para demostrar la inclusión faltante, tomemos $a \in A(\operatorname{ri}(C))$. Se tiene que existe $x \in \operatorname{ri}(C)$ tal que $a = Ax$. Adicionalmente, tomando $b \in \operatorname{ri}(A(C))$, en particular $b \in A(C)$ y por lo tanto existe $y \in C$ tal que $b = Ay$. Debido a que $x \in \operatorname{ri}(C)$, existe $\gamma > 0$ tal que $z = (1+\gamma)x - \gamma y = x + \gamma(x - y) \in C$ ($(1+\gamma)x - \gamma y \in \operatorname{aff}(C)$ y para γ adecuado se tiene $\|x - z\| = \gamma\|x - y\| < \varepsilon$). Se sigue que $c := Az \in A(C)$. Más aún, $c = Az = (1+\gamma)Ax - \gamma Ay = (1+\gamma)a - \gamma b$, de donde se deduce que

$$a = \frac{c}{1+\gamma} + \frac{\gamma}{1+\gamma} b.$$

Como $c \in A(C)$ y $b \in \operatorname{ri}(A(C))$ se concluye que $a \in \operatorname{ri}(A(C))$.

(iv) Es directo de la definición notando que $\operatorname{aff}(C \times S) = \operatorname{aff}(C) \times \operatorname{aff}(S)$ y que

$$B(x, \varepsilon/2) \times B(y, \varepsilon/2) \subset B((x, y), \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon) \times B(y, \varepsilon).$$

(Para los pares (x, y) se considera el espacio $\mathbb{R}^{2n}$ y la norma euclidiana).

(v) Directo de la pista, utilizando (iii) y (iv).

(vi) Directo de (iii) y (v).

P4) Consiere los conjuntos $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \leq -5\}$ y $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(i) Verifique que se cumplen las hipótesis del teorema de separación estricta para A y B.

(ii) Encuentre un plano que separe estrictamente A y B.

(iii) Encuentre un hiperplano soportante para B que lo separe con A.

Solución

(i) A y B son convexos, cerrados y no vacíos. B es compacto por ser también acotado. Además $A \cap B = \varnothing$, ya que si $(x, y, z) \in B$, $x, y, z \in [-1, 1]$, por lo tanto $x + y + z \geq -3$. Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del teorema de separación estrictca.

(ii) En este caso los planos (o hiperlanos) que separen a B con A deben tener el mismo vector director que A, es decir $(1, 1, 1)$. Del item (i) vimos que para $(x, y, z) \in B$, se tiene $x + y + z \geq -3$ por lo tanto un plano que separa estrictamente A con B es

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = -4\}.$$

(iii) El plano tangente a B en un punto (x, y, z) tiene vector director $(2x, 2y, 2z)$. Buscamos que estos planos sean paralelos a A de vector director $(1, 1, 1)$, por lo que se tiene $x = y = z$. Adicionalmente, para que este vector esté en la frontera de B se tiene $x = y = z = \pm\sqrt{3}/3$. Para que separe a B con A nos quedamos con $x = y = z = -\sqrt{3}/3$. Por lo tanto el hiperplano que soporta B y lo separa con A es

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = -\sqrt{3}\}.$$

P5) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Demuestre que f es semicontinua inferior en $x \in \mathbb{R}^n$ si y solamente si

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0) \colon \|x - y\| < \delta \Rightarrow f(x) - f(y) \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Solución

Se tiene que f es semicontinua inferior en $x \in \mathbb{R}^n$ sí y solo si

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \colon f(x) > \alpha \Rightarrow (\exists r > 0)(\forall y \in B(x, r)) \quad f(y) > \alpha.$$

Entonces, si suponemos que f es s.c.i., para cada $\varepsilon > 0$ se cumple $f(x) > f(x) - \varepsilon =: \alpha$, por lo tanto, existe $r = \delta$ tal que si $\|x - y\| < \delta$ entonces $f(y) > \alpha = f(x) - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon > f(x) - f(y)$.

Por otro lado, si tomamos $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > \alpha$ definiendo $\varepsilon = f(x) - \alpha - \frac{f(x)-a}{2} > 0$, por (1) existe $\delta = r$ tal que si $y \in B(x, r)$ se tiene $f(x) - f(y) \leq \varepsilon$ lo que es equivalente a que $f(y) \geq \alpha + \frac{f(x)-a}{2} > \alpha$.