EJEMPLO DEL DOBLE PÉNDULO

LEONARDO E. FIGUEROA

Consideremos un péndulo ideal de largo L_1 y masa m_1 del cual, a su vez, pende otro péndulo ideal de largo L_2 y masa m_2. Para representar el estado del sistema conviene emplear los ángulos q_1 y q_2 que cada péndulo tiende respecto a la vertical (ver Figura 1). Asumimos que ambos péndulos pueden dar la vuelta entera; no chocan.

Las posiciones de las masas en coordenadas cartesianas son

$$\begin{aligned} r_1 &= L_1 \left(\operatorname{sen}(q_1), -\cos(q_1)\right), \\ r_2 &= L_1 \left(\operatorname{sen}(q_1), -\cos(q_1)\right) + L_2 \left(\operatorname{sen}(q_2), -\cos(q_2)\right). \end{aligned}$$

Las correspondientes velocidades entonces son

$$\begin{aligned} v_1 = \dot{r}_1 &= L_1 \left(\cos(q_1), \operatorname{sen}(q_1)\right) \dot{q}_1, \\ v_2 = \dot{r}_2 &= L_1 \left(\cos(q_1), \operatorname{sen}(q_1)\right) \dot{q}_1 + L_2 \left(\cos(q_2), \operatorname{sen}(q_2)\right) \dot{q}_2. \end{aligned}$$

De esta forma, la energía cinética total es

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m_1 |v_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |v_2|^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{q}_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 \left[L_1^2 \dot{q}_1^2 + 2 L_1 L_2 \left(\cos(q_1)\cos(q_2) + \operatorname{sen}(q_1)\operatorname{sen}(q_2) \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + L_2^2 \dot{q}_2^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[L_1^2 \dot{q}_1^2 + 2 L_1 L_2 \cos(q_2 - q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + L_2^2 \dot{q}_2^2 \right]. \end{aligned} \tag{1}$$

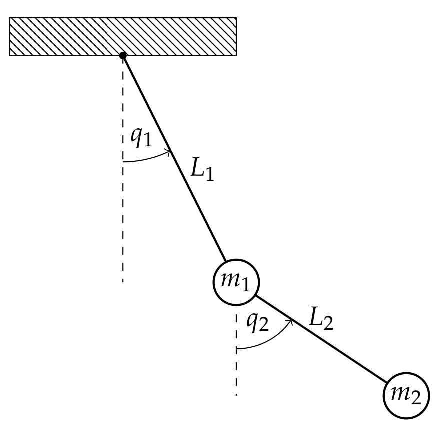

FIGURA 1. Doble péndulo.

Nos convendrá expresar a la energía cinética en la forma más compacta

$$K = \frac{1}{2}\dot{q} \cdot M(q)\dot{q}, \quad \text{con} \quad M(q) := \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)L_1^2 & m_2 L_1 L_2 \cos(q_2 - q_1) \\ m_2 L_1 L_2 \cos(q_2 - q_1) & m_2 L_2^2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

La energía potencial gravitatoria total es

$$\begin{aligned} U &= m_1 g (r_1)_2 + m_2 g (r_2)_2 \\ &= -m_1 g L_1 \cos(q_1) - m_2 g \left[L_1 \cos(q_1) + L_2 \cos(q_2) \right], \end{aligned} \tag{3}$$

donde g es la aceleración de gravedad.

El lagrangiano $L = K - U$ toma entonces la forma

$$L(\dot{q}, q) = \frac{1}{2}\dot{q} \cdot M(q)\dot{q} + m_1 g L_1 \cos(q_1) + m_2 g \left[L_1 \cos(q_1) + L_2 \cos(q_2) \right]. \tag{4}$$

Sus gradientes respecto a su primer y a su segundo argumento (para esto $\dot{q}$ y q se tratan como variables independientes entre sí; el libro de Evans enfatiza aquello al denotar al primero por v y al segundo por x) son

$$D_{\dot{q}} L(\dot{q}, q) = M(q)\dot{q} \tag{5}$$

y

$$D_q L(\dot{q}, q) = \begin{pmatrix} m_2 L_1 L_2 \operatorname{sen}(q_2 - q_1)\dot{q}_1 \dot{q}_2 - (m_1 + m_2) g L_1 \operatorname{sen}(q_1) \\ -m_2 L_1 L_2 \operatorname{sen}(q_2 - q_1)\dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 g L_2 \operatorname{sen}(q_2) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

El sistema de ecuaciones de Euler–Lagrange es

$$-\frac{d}{dt} D_{\dot{q}} L(\dot{q}(t), q(t)) + D_q L(\dot{q}(t), q(t)) = 0. \tag{7}$$

Expandiendo el primer término del lado izquierdo de las ecuaciones de Euler–Lagrange obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} D_{\dot{q}} L(\dot{q}(t), q(t)) &\overset{(5)}{=} -\frac{d}{dt}\left[M(q(t))\,\dot{q}(t) \right] = -M(q(t))\,\ddot{q}(t) - \frac{d}{dt}\left[M(q(t)) \right] \dot{q}(t) \\ &= -M(q(t))\,\ddot{q}(t) - \left[\frac{\partial M}{\partial q_1}(q(t))\dot{q}_1(t) + \frac{\partial M}{\partial q_2}(q(t))\dot{q}_2(t) \right] \dot{q}(t) \\ &= -M(q(t))\,\ddot{q}(t) + m_2 L_1 L_2 \operatorname{sen}(q_2(t) - q_1(t))\,(\dot{q}_2(t) - \dot{q}_1(t)) \begin{pmatrix} \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_1(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta igualdad y (6) en (7), simplificando y reordenando, quedamos con el sistema de ecuaciones diferencial-algebraicas

$$\begin{aligned} &M(q(t))\,\ddot{q}(t) \\ &\quad = m_2 L_1 L_2 \operatorname{sen}(q_2(t) - q_1(t)) \begin{pmatrix} \dot{q}_2(t)^2 \\ -\dot{q}_1(t)^2 \end{pmatrix} - g \begin{pmatrix} (m_1 + m_2) L_1 \operatorname{sen}(q_1(t)) \\ m_2 L_2 \operatorname{sen}(q_2(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8}$$

Como

$$\det(M(q(t))) \overset{(2)}{=} m_2 L_1^2 L_2^2 \left([m_1 + m_2] - m_2 \cos(q_2(t) - q_1(t))^2 \right) \geq m_1 m_2 L_1^2 L_2^2 > 0,$$

podemos premultiplicar ambos lados de (8) por $M(q(t))^{-1}$, quedando al lado izquierdo $\ddot{q}(t)$ despejado y al lado derecho una función continua de $q(t)$ y $\dot{q}(t)$, lo que constituye un sistema de EDO de segundo orden. Este sistema de segundo orden, complementado con condiciones iniciales para q y $\dot{q}$, describe la evolución del sistema.

El momentum generalizado p del sistema se define mediante

$$p := D_{\dot{q}} L(\dot{q}, q) \overset{(5)}{=} M(q)\dot{q}. \tag{9}$$

Claramente podemos despejar a $\dot{q}$ en términos de q y p de acuerdo a

$$\dot{q} = M(q)^{-1} p. \tag{10}$$

Esto nos permite definir el hamiltoniano H del sistema mediante

$$\begin{aligned} H(p, q) &= p \cdot \dot{q}(p, q) - L(\dot{q}(p, q), q) \\ &\overset{(4),(10)}{=} \frac{1}{2} p \cdot M(q)^{-1} p - m_1 g L_1 \cos(q_1) - m_2 g \left[L_1 \cos(q_1) + L_2 \cos(q_2)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

El correspondiente sistema de EDO de Hamilton es

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = D_p H(p(t), q(t)), \\ \dot{p}(t) = -D_q H(p(t), q(t)). \end{cases} \tag{12}$$

Para explicitar la primera ecuación de Hamilton computamos directamente desde (11) que

$$D_p H(p, q) = M(q)^{-1} p.$$

Para explicitar la segunda ecuación de (12) conviene explotar la observación hecha en el libro de Evans de que $D_q H(p, q) = -D_q L(\dot{q}(p, q), q)$; combinando esto con (6) y (10) obtenemos

$$\begin{aligned} D_q H(p, q) = -m_2 L_1 L_2 \operatorname{sen}(q_2 - q_1) \left(M(q)^{-1} p\right)_1 \left(M(q)^{-1} p\right)_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ + g \begin{pmatrix} (m_1 + m_2) L_1 \operatorname{sen}(q_1) \\ m_2 L_2 \operatorname{sen}(q_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así, una alternativa a resolver sistema de dos EDO de segundo orden (8) para $t \mapsto q(t)$ para computar la evolución del sistema es resolver el sistema de cuatro EDO de Hamilton de primer orden para $t \mapsto q(t)$ y $t \mapsto p(t)$ dado por (12).