EVALUACIÓN 2 DE 525501 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES Y APLICACIONES I

CON CORRECCIONES EN ENUNCIADOS DE DOS PROBLEMAS

2023-II
Docente: Dr. Leonardo Figueroa C.

Esta evaluación consta de **4** preguntas de igual ponderación. Conteste todas las que desee, pero solamente las **3** de mayor puntaje serán consideradas para computar la nota.

Pregunta A. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^2$ junto a las condiciones de tipo Cauchy

$$u = 0 \ \wedge \ \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n x_1) \quad \text{en} \quad \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}.$$

(A.i) Mediante separación de variables obtenga la solución

$$u(x) = \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(n x_1) \operatorname{senh}(n x_2).$$

(A.ii) ¿Qué ocurre cuando $n \to \infty$?

(A.iii) Pruebe que este tipo de problemas de Cauchy para la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^2$ no están bien puestos. Indicación: Esta parte se puede argumentar usando la parte A.ii ~~o, alternativamente, probando que el correspondiente problema con condiciones de tipo Cauchy homogéneas admite más de una solución~~.

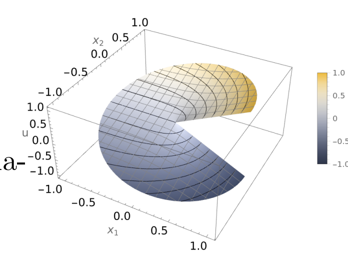
Pregunta B. Considere el abierto

$$U = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\} \setminus \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0 \ \wedge \ x_2 = 0\};$$

esto es, U es la bola abierta unitaria de $\mathbb{R}^2$ menos el segmento que une al origen $(0, 0)$ con $(1, 0)$.

(B.i) Sean $r \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\theta \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas polares habituales, con θ observando la convención de que su rango está en $[0, 2\pi)$. Pruebe que la función $u \colon U \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) := r(x)\cos(\theta(x)/2)$ ~~$r(x)\operatorname{sen}(\theta(x)/2)$~~ pertenece a $W^{1,\infty}(U)$.

(B.ii) Pruebe que u *no es* Lipschitz continua en U.



Pregunta C (Desigualdad de interpolación respecto al orden de diferenciación)**.** Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ que es acotado y de frontera suave.

(C.I) Mediante integración por partes pruebe que existe $C = C(U) > 0$ tal que

$$(\forall\, u \in C_c^\infty(U)) \qquad \|Du\|_{L^2(U)} \leq C\,\|u\|_{L^2(U)}^{1/2}\,\|D^2u\|_{L^2(U)}^{1/2}.$$

(C.II) Pruebe esta misma desigualdad ahora para $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$. INDICACIÓN: Explote que para cada u en esa intersección existe una sucesión $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $C_c^\infty(U)$ tal que $\|u - v_k\|_{H^1(U)} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ y una sucesión $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ esn $C^\infty(\overline{U})$ tal que $\|u - w_k\|_{H^2(U)} \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Pregunta D. Pruebe que si u es la solución de la ecuación de Schrödinger

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (-\infty, \infty), \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi i t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i|x-y|^2}{4t}} g(y)\,dy, \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0),$$

entonces se tiene la cota

$$(\forall\, t \neq 0) \qquad \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(4\pi\,|t|)^{n/2}}\,\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,.$$