Listado 3: Descomposición LU para sistemas de ecuaciones lineales.
2 de abril

1. Problemas

2. **(A)** (*Tipo especial de matrices que admite descomposición LU*)

   Demuestre que si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es estrictamente diagonal dominante por filas (o por columnas), entonces ella tiene una única descomposición LU, es decir, si A es estrictamente diagonal dominante, es posible encontrar matrices L, triangular inferior con elementos en diagonal principal iguales a 1, y U, triangular superior con la propiedad $A = LU$ y L y U son únicas.

   Visto en ayudantía.

7. **(A)** (*Matrices irreducible-diagonal dominantes*)

   Considere
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Demuestre que A es irreducible y que B es reducible.

   Visto en ayudantía.

8. **(A)** (*Ejemplo particular de matriz irreducible diagonal dominante y su descomposición LU.*)

   Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ la siguiente matriz tridiagonal
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

   cuyos elementos satisfacen
$$\begin{aligned} |a_1| &> |c_1| > 0, \\ |a_i| &\geq |b_i| + |c_i|, \quad \text{con } b_i \neq 0 \wedge c_i \neq 0, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1, \\ |a_n| &\geq |b_n| > 0. \end{aligned}$$

   (a) Demuestre que A es invertible.

   (b) Demuestre que A tiene una única descomposición LU y que ésta puede calculare con el método de eliminación gaussiana.

(c) Aplique eliminación gaussiana a A y muestre que las matrices L y U que forman su descomposición LU son de la forma

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_n & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} &u_1 = a_1, \\ &l_j = \frac{b_j}{u_{j-1}}, \; u_j = a_j - l_j c_{j-1}, \quad j = 2, 3, \ldots, n \end{aligned}$$

Observación: Este algoritmo recibe el nombre de algoritmo de Thomas.

Solución:

(a) La matriz A es irreducible porque es tridiagonal con elementos distintos de cero en diagonales justo encima y justo debajo de diagonal principal, por tanto, es irreducible. A es además irreducible-diagonal dominante porque el módulo del elemento en diagonal principal en fila 1 es estrictamente mayor que la suma de los módulos de los restantes elementos en la fila 1 y en las restantes filas el módulo del elemento en diagonal principal es mayor o igual que la suma de los módulos de los restantes elementos en la misma fila. Como A es irreducible diagonal dominante, A es invertible.

(b) Las submatrices principales de órdenes 1, 2, hasta $n-1$ de A son irreducible-diagonal dominantes (mismas razones que en ítem anterior). Esto indica que son invertibles y, por tanto, A tiene una única descomposición LU y es posible encontrarla por el método de eliminación gaussiana.

(c) Apliquemos el proceso de eliminación gaussiana a A. Como los menores principales de órdenes 1 a $n-1$ son distintos de cero, los pivotes durante la eliminación gaussiana serán distintos de cero.

Sea $A^{(1)} = A$. En cada paso de la eliminación gaussiana solo debemos realizar una operación elemental. En el paso ésta es: $f_2 \leftarrow f_2 - \frac{b_2}{a_1} f_1$. Dado que las filas 1 y 2 de $A^{(2)}$ son las filas 1 y 2 de U, $u_1 = a_1$ y $u_2 = a_2 - c_1 l_2$, Con ello,

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

con $l_2 = \frac{b_2}{a_1}$. De L solo mostramos los elementos que se van completando durante la eliminación gaussiana de A.

La siguiente operación elemental es $f_3 \leftarrow f_3 - \frac{b_3}{u_2} f_2$. El elemento en posición $(3,3)$ de $A^{(2)}$ cambia a $a_3 - \dfrac{b_3}{u_2} c_2$. Llamando l_3 a $\dfrac{b_3}{u_2}$ y u_3 a $a_3 - \dfrac{b_3}{u_2} c_2 = a_3 - l_3 c_2$ se obtiene

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Sea $A^{(k)}$ la matriz que se obtiene después de $k-1$ pasos del proceso de eliminación gaussiana,

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{k-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & u_{k-1} & c_{k-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_k & c_k & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{k+1} & a_{k+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix}.$$

En este momento debemos realizar la operación elemental $f_{k+1} \leftarrow f_{k+1} - \dfrac{b_{k+1}}{u_k} f_k$.

Llamando l_{k+1} a $\dfrac{b_{k+1}}{u_k}$ y u_{k+1} a $a_{k+1} - c_k l_{k+1}$ se obtiene

$$A^{(k+1)} = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{k-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & u_{k-1} & c_{k-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_k & c_k & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & u_{k+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_k & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & l_{k+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Procediendo del mismo modo hasta completar $n-1$ pasos se obtienen las matrices L y U mencionadas.

9. **(A)** (*Problema de certamen y otra manera de acotar número de condición*)

Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, invertible, tiene descomposición LU, entonces

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

y

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \leq \|L\|\|U\|\|U^{-1}\|\|L^{-1}\| = \kappa(L)\kappa(U).$$

Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

(a) Determine las matrices L y U que forman descomposición LU de A.

(b) Determine $\kappa_\infty(L)$ y $\kappa_\infty(U)$.

(c) ¿Cuál aproximación obtiene a $\kappa_\infty(A)$?

(d) Sean x y $\tilde{x}$ tales que a $Ax = b$ y $A\tilde{x} = b + \delta_b$. ¿Cuán grande puede ser n para que, sabiendo que $\dfrac{\|\delta_b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq 10^{-10}$, podamos asegurar que $\dfrac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 10^{-6}$?

Observación: Note que A es una matriz tridiagonal. Las matrices L y U son sencillas de calcular. Además, para calcular $\kappa_\infty(L)$ y $\kappa_\infty(U)$ puede serle útil la siguiente propiedad: si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \end{pmatrix},$$

entonces $M^{-1} = (\hat{m}_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ es tal que

$$\hat{m}_{ij} = \begin{cases} (-a)^{i-j}, & \text{si } i \geq j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Recuerde también que para toda matriz invertible $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se cumple que $(B^{\mathrm{T}})^{-1} = (B^{-1})^{\mathrm{T}}$.

Solución:

(a) La matriz A tiene las propiedades de la matriz en problema anterior. Por tanto, las matrices L y U de su descomposición LU tienen la estructura mencionada en problema anterior con $l_2 = l_3 = \ldots = l_n = 1$ y $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 1$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Las matrices L y U satisfacen

$$\|L\|_\infty = \|U\|_\infty = 2.$$

Además, teniendo en cuenta observación en problema,

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & (-1)^{n-3} & \ldots & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad U = L^{\mathrm{T}} \Rightarrow U^{-1} = \left(L^{-1}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Por tanto,

$$\|L^{-1}\|_\infty = n, \quad \|U^{-1}\|_\infty = \|L^{-1}\|_1 = n \qquad \Rightarrow \qquad \kappa_\infty(L) = \kappa_\infty(U) = 2n.$$

(c) $\kappa_\infty(A) \leq (2n)(2n) = 4n^2$.

(d) Dado que

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \kappa_\infty(A) \frac{\|\delta_b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq 4n^2 \cdot 10^{-10},$$

escogiendo n de modo que

$$4n^2 \cdot 10^{-10} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow n \leq 50,$$

se garantiza que $\dfrac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 10^{-6}$.