Análisis Numérico II: Álgebra Lineal Numérica (525441), S1-2025
Listado **2**
Profesora: Mónica Selva
DIM - CFM

Listado 2: Estabilidad de sistemas de ecuaciones lineales.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía.
Los problemas en la sección **Test <número>**, si existe, deben ser entregados en Canvas, tenga en cuenta que hay una fecha tope para ello. Los tests deben resolverse de manera individual, no es obligatorio entregarlos.

1. Problemas

1. (*¿cuándo es una perturbación de I una matriz invertible? Si lo es, ¿cómo acotar la norma de su inversa?*)

   Sea $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz invertible. En clase mostramos que si existe alguna norma matricial $\|\cdot\|$, inducida por norma vectorial, con la propiedad $\|B\| < 1$, entonces $I+B$ es invertible y $\|(I+B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$. Muestre que si existe una norma matricial $\|\cdot\|$ tal que $\|B\| < 1$, entonces $I - B$ también es invertible y

   $$\frac{1}{1+\|B\|} \leq \|(I \pm B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}.$$

   Observación: Los resultados anteriores pueden ser utilizados para mostrar que una matriz es invertible. Si, por ejemplo, los elementos en diagonal principal de cierta matriz A son distintos de cero, entonces si D es la matriz diagonal cuya diagonal principal es igual a la diagonal principal de A,

   $$A = D + (A - D) = D(I + D^{-1}(A - D)).$$

   Si encontramos una norma matricial $\|\cdot\|$ para la que se cumpla que $\|D^{-1}(A-D)\| < 1$, podemos asegurar que $I + D^{-1}(A - D)$ es invertible y, por tanto, A también lo es.

   Con ayuda de las cotas para $\|(I + D^{-1}(A - D))^{-1}\|$ podemos acotar el número de condición de A sin calcular A^{-1}.

2. (*¿cuándo es una perturbación de I una matriz invertible?*)

   Demuestre que si $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisface $\rho(H) < 1$, entonces $I + H$ e $I - H$ son matrices invertibles.

3. (*matrices estrictamente diagonal dominantes*)

   Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Demuestre que si A es estrictamente diagonal dominante por filas, entonces A es invertible.

   (b) ¿Podemos asegurar que A es invertible si A es estrictamente diagonal dominante por columnas?

   Observación: Una matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ es estrictamente diagonal dominante por filas si y solo si

   $$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \,:\, |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

   Una matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ es estrictamente diagonal dominante por filas si y solo si

   $$\forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \,:\, |a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|.$$

4. (*¿Cómo estimar el número de condición de una matriz sin calcular su inversa?*)

   Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Hay distintos métodos para averiguar si A es invertible y, si lo es, acotar su número de condición. Veamos uno de ellos y cuándo es posible utilizarlo.

(a) Escribamos A como $D+B$, siendo D una matriz diagonal cuya diagonal principal es igual a la diagonal principal de A. ¿Qué condiciones debe cumplir A para que D sea invertible? ¿Cuál es la inversa de D? ¿Cuáles son la norma 1, infinito y 2 de D?

(b) Supongamos que D es invertible. Si existe $\|\cdot\|_*$, norma matricial, para la que $\|D^{-1}B\|_* < 1$, entonces $I + D^{-1}B$ es invertible y
$$A^{-1} = (I + D^{-1}B)^{-1}D^{-1}.$$
Utilizando la siguiente cota demostrada en clase
$$\|(I + D^{-1}B)^{-1}\|_* \leq \frac{1}{1 - \|D^{-1}B\|_*},$$
se tiene que
$$\|A^{-1}\|_* = \|(I + D^{-1}B)^{-1}D^{-1}\|_* \leq \|D^{-1}\|_*\|(I + D^{-1}B)^{-1}\|_* \leq \|D^{-1}\|_* \frac{1}{1 - \|D^{-1}B\|_*}.$$
El número $\dfrac{\|D^{-1}\|_*}{1 - \|D^{-1}B\|_*}$ es una cota para $\|A^{-1}\|_*$, con ella obtenemos que
$$\kappa_*(A) = \|A\|_*\|A^{-1}\|_* \leq \|A\|_* \frac{\|D^{-1}\|_*}{1 - \|D^{-1}B\|_*}.$$

(c) Sea
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$
Descomponga $A = D + B$ y compruebe que $\|D^{-1}B\|_1 = \frac{11}{15} < 1$ y $\|D^{-1}B\|_\infty = 1$.

(d) ¿Cuál norma, 1 o infinito, puede ser $\|\cdot\|_*$? Con esa norma, ¿cuál cota obtiene para la norma de A^{-1}? ¿cuál cota obtiene para el número de condición de A? Sabiendo que
$$A^{-1} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 10 & 7 & -8 \\ -6 & 15 & -8 \\ 2 & 5 & -24 \end{pmatrix},$$
calcule los valores reales de $\kappa_1(A)$ y $\kappa_\infty(A)$. ¿Es la cota que obtuvo una “buena” cota?

5. (*Estabilidad de sistemas de ecuaciones lineales, considerando solo perturbaciones en la matriz del sistema*) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz invertible. Sean además $\delta_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{C}^n$, $Ax = b$ y $(A + \delta_A)(x + \delta_x) = b$.

   (a) Demuestre que si existe una norma matricial $\|\cdot\|$ para la que se cumpla que $\|A^{-1}\delta_A\| < 1$, entonces $A + \delta_A$ es invertible.

   (b) Considere que δ_A es tal que $\|A^{-1}\delta_A\| < 1$. Demuestre que
$$\frac{\|\delta_x\|}{\|x + \delta_x\|} \leq \|A^{-1}\delta_A\| \leq \kappa(A)\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|},$$
$$\frac{\|\delta_x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\delta_A\|}{1 - \|A^{-1}\delta_A\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}\delta_A\|}\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}.$$

6. (*Estabilidad de sistemas de ecuaciones lineales, considerando solo perturbaciones en la matriz del sistema*) Considere
$$\begin{pmatrix} 240 & -319 \\ -179 & 240 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 240 & -319.5 \\ -179.5 & 240 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
Determine, si es posible, $u_1, u_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ que satisfagan las ecuaciones anteriores. Realice el análisis de sensibilidad, ¿qué puede decir del condicionamiento del problema?

Observación: Realizar análisis de sensibilidad se refiere a comparar los errores relativos en A con los errores relativos en las soluciones exactas de cada problema.

7. **(A)** (*¿Cómo estimar el número de condición de una matriz sin calcular su inversa?*)

   Sean a y b números reales, $a < b$ y

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$$

   una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de tamaños

$$h_0 = x_1 - x_0, \quad h_1 = x_2 - x_1, \quad \ldots, \quad h_{n-1} = x_n - x_{n-1}$$

   con la propiedad

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \,:\, \frac{1}{2} \leq \frac{h_i}{h_{i-1}} \leq 2,$$

   considerando $h_n = h_0$.

   Se desea resolver el sistema de ecuaciones $As = b$, $b \neq \theta$, siendo A la siguiente matriz de tamaño $n \times n$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n & 2 \end{pmatrix}$$

   con

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}, \qquad \mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

   (a) Demuestre que $\|A\|_\infty = 3$ y $\|A\|_1 \leq \dfrac{10}{3}$.

   (b) Demuestre que $\|A^{-1}\|_\infty \leq 1$ y $\|A^{-1}\|_1 \leq \frac{3}{2}$.

   (c) Sean $b, s, \hat{s}, \delta_b \in \mathbb{R}^n$ y s, $\hat{s}$ las soluciones exactas de $As = b$ y $A\hat{s} = b + \delta_b$ respectivamente. Demuestre que

$$\frac{\|s - \hat{s}\|_\infty}{\|s\|_\infty} \leq \kappa_\infty(A) \frac{\|\delta_b\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

   (d) Sabiendo que $\dfrac{\|\delta_b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq 10^{-2}$, encuentre una cota superior para $\dfrac{\|s - \hat{s}\|_\infty}{\|s\|_\infty}$ y una cota para $\dfrac{\|s - \hat{s}\|_1}{\|s\|_1}$.

8. (*Análisis de estabilidad*)

   Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1.1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

   con $\|e\|_2 = 0.1$. Sean además x e y tales que $Ax = b$ y $Ay = b + e$.

   (a) Compruebe que A es simétrica y definida positiva.

   (b) Sabiendo que

$$A^{-1} = 10 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1.1 \end{pmatrix},$$

   determine $\kappa_2(A)$ (compruebe que se satisface la igualdad en la pregunta 10).

   (c) Determine, sin calcular x e y, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ de modo que

$$k_1 \leq \frac{\|y - x\|_2}{\|x\|_2} \leq k_2.$$

(d) Suponga

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0.1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Determine para qué valores de $b_1, e_2 \in \mathbb{R}$ es máximo el valor de $\dfrac{\|x-y\|_2}{\|x\|_2}$.

Observación: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es definida positiva si y solo si para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{\theta\}$ se cumple que $x^{\mathrm{T}}Ax > 0$.

9. (*Número de condición*)

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz invertible. Demuestre que

$$\kappa(A) = \frac{\max_{x\neq\theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}{\min_{x\neq\theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}.$$

10. **(A)** (*Número de condición de matrices hermitianas y definidas positivas*)

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermitiana y definida positiva. Demuestre que

$$\kappa_2(A) = \frac{\max\{\lambda : \lambda \text{ es valor propio de } A\}}{\min\{\lambda : \lambda \text{ es valor propio de } A\}}.$$

11. (*¿Pueden mejorarse las cotas para error relativo en las soluciones de $Ax = b$ y $A(x+\delta_x) = b + \delta_b$?*)

En clase demostramos que si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible, $b, \delta_b \in \mathbb{C}^n$, $b \neq \theta$, y $x, \delta_x \in \mathbb{C}^n$ son tales que $Ax = b$ y $A(x+\delta_x) = b + \delta_b$, entonces

$$\frac{1}{\kappa(A)} \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\delta_x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|},$$

donde $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$.

Demuestre que, dada una matriz A, es posible encontrar $b, \delta_b \in \mathbb{C}^n$ de modo que cada una de las cotas anteriores se cumpla en la igualdad (los vectores para que una cota se cumpla en la igualdad no son necesariamente los mismos con los que se cumple la igualdad para la otra cota).

Solución para cota superior: Deseamos encontrar $b, \delta_b \in \mathbb{C}^n$ de modo que

$$\frac{\|\delta_x\|}{\|x\|} = \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|} \quad \Leftrightarrow \quad \|\delta_x\|\|b\| = \|A\|\|A^{-1}\|\|\delta_b\|\|x\|.$$

Sabemos que

$$\|A\| = \max_{x\neq\theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ \Rightarrow \exists\, \hat{x} \in \mathbb{C}^n : \|A\| = \frac{\|A\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|}.$$

Del mismo modo, sabemos que

$$\exists\, \hat{y} \in \mathbb{C}^n : \|A^{-1}\| = \frac{\|A^{-1}\hat{y}\|}{\|\hat{y}\|}.$$

Sean $b := A\hat{x}$ y $\delta_b = \hat{y}$, entonces

$$\|b\| = \|A\hat{x}\| = \|A\|\|\hat{x}\| \text{ y } \|\delta_x\| = \|A^{-1}\delta_b\| = \|A^{-1}\|\|\delta_b\|$$

y se cumple que

$$\frac{\|\delta_x\|}{\|\hat{x}\|} = \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|}.$$

Observación: Dado que encontramos casos en los que las cotas se cumplen en la igualdad, no es posible mejorarlas.

12. (*Un resultado auxiliar para próximo problema*)

    Suponga que $I + H$ es una matriz invertible y que existe norma matricial $\|\cdot\|$ de modo que $\|H\| < 1$. Demuestre que
    $$\|(I+H)^{-1} - I\| \leq \frac{\|H\|}{1 - \|H\|}.$$
    Sugerencia: Reemplace I por $(I+H)^{-1}(I+H)$ y aplique distributividad del producto de matrices con respecto a la suma.

13. **(A)** (*Análisis de sensibilidad del problema de invertir una matriz*).

    Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $B = A + \delta_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices invertibles. Note que
    $$A - B = AB^{-1}B - AA^{-1}B = A(B^{-1} - A^{-1})B \quad \Rightarrow \quad B^{-1} - A^{-1} = -A^{-1}\delta_A B^{-1}. \tag{2}$$
    Además,
    $$B = A + \delta_A = A(I + A^{-1}\delta_A). \tag{3}$$

    (a) Demuestre que
    $$\frac{1}{\kappa(B)}\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|} \leq \frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \leq \|A^{-1}\delta_A\| \leq \kappa(A)\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}.$$
    Sugerencia: Puede utilizar 2. Para demostrar la cota inferior puede despejar δ_A de (2).

    (b) Demuestre que
    $$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\delta_A\|}{1 - \|A^{-1}\delta\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}\delta_A\|}\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}.$$
    Sugerencia: Puede utilizar 3 y el resultado demostrado en problema anterior.

    En los ítems que siguen suponga que la norma matricial utilizada es tal que $\|A^{-1}\delta_A\| < 1$.

    (c) Demuestre que
    $$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \geq \frac{1}{\kappa(B)\,(1 + \|A^{-1}\delta_A\|)}\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}.$$
    Sugerencia: Puede despejar δ_A de (2) y utilizar las siguientes desigualdades
    $$\frac{1}{1 + \|A^{-1}\delta_A\|} \leq \frac{\|B^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\delta_A\|}$$
    que se obtienen de aplicar desigualdad triangular después de igualar las normas de las siguientes matrices
    $$B^{-1} = A^{-1} - A^{-1}\delta_A B^{-1}, \quad A^{-1} = B^{-1} + A^{-1}\delta_A B^{-1}.$$

2. Test 2

Forma de entrega: cargando archivos a tarea con nombre **Test 2** en Canvas.
Fecha de entrega: domingo 30 de marzo, 23:59 hrs.
Para resolver el siguiente problema de valores de frontera
$$\begin{aligned} -u''(x) + xu(x) = (1 + 2x - x^2)e^x, &\qquad x \in]0,1[, \\ u(0) = 1,\, u(1) = 0, & \end{aligned}$$
se puede proceder de la siguiente manera:

- Dividir el intervalo $[0,1]$ en N subintervalos de tamaño h.
- Llamar u_0 a $u(0) = 1$ y u_N a $u(1) = 0$.

- Determinar aproximaciones $u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}$ a $u(h), u(2h), \ldots, u((N-1)h)$, $N = \dfrac{1}{h}$, de modo que satisfagan la ecuación diferencial dada de manera aproximada, es decir, de modo que para cada $j \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$

  $$-\Delta(u_j) + x_j u_j = (1 + 2x_j - x_j^2)e^{x_j},$$

  donde $\Delta(u_j) = \dfrac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2}$ es una aproximación a $u''(x_j)$. Estas ecuaciones pueden escribirse en la forma $A_h u_h = b_h$ si u_h es el vector columna con las aproximaciones a $u(h), u(2h), \ldots, u((N-1)h)$.

1. Escriba una función MATLAB (o PYTHON o JULIA) que, dado un valor de h, retorne la matriz A_h y el vector b_h correspondientes.

2. Escriba un programa que llame a la función anterior para cada $h \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$ y estime el número de condición de A_h.

   Para estimar $\kappa(A)$ MATLAB dispone de los siguientes comandos (utilice cualquiera de ellos):

   - `cond(A,1)`: estima $\kappa_1(A)$,
   - `cond(A,'inf')`: estima $\kappa_\infty(A)$,
   - `condest(A)`: estima $\kappa_1(A)$ con un algoritmo distinto al empleado en `cond(A,1)`.