UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACIÓN 1.
EDP y Aplicaciones 525501.

1. Considere el siguiente problema de Cauchy para la ecuación de Burger no viscosa

$$\partial_t u(x,t) + u(x,t)\,\partial_x u(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 1-x & \text{si } 0 \le x < 1, \\ 0 & \text{si } x \ge 1, \end{cases}$$

   (a) Dibuje el las lineas características de la solución de esta ecuación en el plano (t,x).
   (b) Grafique la solución para $t = 1$.
   (c) A partir de las lineas características, escriba explícitamente la solución $u = u(x,t)$ para $x \in \mathbb{R}$ y $0 < t \le 1$.
   (d) ¿ es $u(x,t)$ una solución fuerte en $\mathbb{R} \times (0,1]$? que pasa para $t \ge 1$?

2. Considere el problema de Laplace en el cuarto de plano $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0, \qquad \forall\, x,y > 0, \\ u(x,0) = g(x), &\qquad \forall\, x > 0, \\ u(0,y) = 0, &\qquad \forall\, y > 0, \end{aligned}$$

   con $g(x)$ una función continua dada. Recordemos que la solución fundamental en dimensión 2 está dada por:

$$\Phi(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \log \sqrt{x^2+y^2}$$

   (a) Pruebe que la función definida por

$$\phi^{xy}(w,z) = \Phi(w-x, z+y) - \Phi(w+x, z+y) + \Phi(w+x, z-y)$$

   es solución de $\Delta\phi^{xy}(w,z) = 0$ para todo $w > 0$ y $z > 0$, y además $\phi^{xy}(w,z) = \Phi(w-x, z-y)$ sobre el borde del cuarto de plano $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}_+$.

   (b) Pruebe que la función de Green asociada al cuarto de plano está dada por

$$G(x,y,w,z) = \Phi(w-x, z-y) - \phi^{xy}(w,z).$$

(c) Pruebe que una fórmula de representación de la solución de este problema usando la función de Green se escribe como

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(\frac{4\,y\,g(w)}{(w-x)^2 + y^2} - \frac{4\,y\,g(w)}{(w+x)^2 + y^2} \right) dw$$

3. Sea $u(x,t) = v(\frac{x^2}{t})$, con $x \in \mathbb{R}$, y $t > 0$.

(a) Muestre que $u_t = u_{xx}$ si y solo si

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0, \qquad (z > 0).$$

(b) Muestre que la solución general de la EDO anterior está dada por:

$$v(z) = c \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2}\, ds \; + \; d.$$

(c) Diferenciando $v(\frac{x^2}{t})$ respecto de x y eligiendo adecuadamente la constante c, encuentre la solución fundamental de la ecuación del calor para $n = 1$.

Duración : 2 horas.
MSC/msc
(07-Mayo-2008)