

Elementos Finitos Mixtos

Tarea 4

Juan Pablo Silva Gutiérrez

6.7

1) Lema

Sean m un entero no negativo, $t \in (1, \infty)$ y la aplicación biyectiva $T_K : \hat{K} \rightarrow K$ con $T_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K \quad \forall \hat{x} \in \hat{K}$ con B_K invertible y $b_K \in \mathbb{R}^n$. Entonces se tiene que

i)

$$v \in W^{m,t}(K) \implies \hat{v} := v \circ T_K \in W^{m,t}(\hat{K}) \quad (1)$$

Además,

$$\exists C_1 > 0 \text{ independiente de } K : \quad |\hat{v}|_{m,t;\hat{K}} \leq C_1 \|B_K\|^m |\det B_K|^{-1/t} |v|_{m,t;K} \quad (2)$$

De la misma forma se tiene que

ii)

$$\hat{v} \in W^{m,t}(\hat{K}) \implies v = \hat{v} \circ T_K^{-1} \in W^{m,t}(K) \quad (3)$$

Además,

$$\exists C_2 > 0 \text{ independiente de } K : \quad |v|_{m,t;K} \leq C_2 \|B_K^{-1}\|^m |\det B_K|^{1/t} |\hat{v}|_{m,t;\hat{K}} \quad (4)$$

Demostración:

Sabiendo que $C^\infty(\bar{K})$ es denso en $W^{m,t}(K)$, tomamos un $v \in C^\infty(\bar{K})$ y el multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = m$, luego $\hat{v} = v \circ T_K \in C^\infty(\bar{\hat{K}})$ y

$$\partial^\alpha \hat{v}(\hat{x}) = \partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_n} \hat{v}(\hat{x}) = D^m \hat{v}(\hat{x})(r_1, \dots, r_m)$$

Donde para cada $i \in \{1, \dots, m\} =: I_m$, r_i es algún vector de la base canónica de \mathbb{R}^n luego si definimos:

$$\|D^m \hat{v}\| := \sup_{\substack{\|\xi_i\| \leq 1 \\ i \in I_m}} |D^m \hat{v}(\hat{x})(\xi_1, \dots, \xi_m)| \geq |D^m \hat{v}(\hat{x})(r_1, \dots, r_m)| = |\partial^\alpha \hat{v}(\hat{x})| \quad \checkmark$$

Con esto tenemos que:

$$\begin{aligned} |\hat{v}|_{m,t;\hat{K}}^t &= \int_{\hat{K}} \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha \hat{v}(\hat{x})|^t d\hat{x} \\ &\leq \sum_{|\alpha|=m} \int_{\hat{K}} \|D^m \hat{v}(\hat{x})\|^t d\hat{x} \\ &\leq C_m \int_{\hat{K}} \|D^m \hat{v}(\hat{x})\|^t d\hat{x} \end{aligned}$$

Con C_m la cardinalidad de $\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = m\}$. Luego utilizando que $DT_K(\hat{x}) \equiv B_K$ y la regla de la cadena tenemos que:

$$D^m \hat{v}(\hat{x})(r_1, \dots, r_m) = D^m (v \circ T_K)(\hat{x})(r_1, \dots, r_m) = D^m v(T_K(\hat{x}))(B_K r_1, \dots, B_K r_m) \quad \checkmark$$

Si denotamos $x := T_K(\hat{x})$, entonces $D^m \hat{v}(\hat{x})(r_1, \dots, r_m) = D^m v(x)(B_K r_1, \dots, B_K r_m)$ y

$$\begin{aligned} \|D^m \hat{v}\| &= \sup_{\substack{\|\xi_i\| \leq 1 \\ i \in I_m}} |D^m v(x)(B_K r_1, \dots, B_K r_m)| \\ &= \|B_K\|^m \sup_{\substack{\|\xi_i\| \leq 1 \\ i \in I_m}} \left| D^m v(x) \left(\frac{B_K r_1}{\|B_K\|}, \dots, \frac{B_K r_m}{\|B_K\|} \right) \right| \\ &\leq \|B_K\|^m \sup_{\substack{\|\lambda_i\| \leq 1 \\ i \in I_m}} |D^m v(x)(\lambda_1, \dots, \lambda_m)| \\ &\leq \|B_K\|^m \|D^m v(x)\| \end{aligned}$$

Aplicando esto a la semi-norma de \hat{v}

$$|\hat{v}|_{m,t;\hat{K}}^t \leq C_m \int_{\hat{K}} \|D^m \hat{v}(\hat{x})\|^t d\hat{x} \leq C_m \|B_K\|^{mt} \int_{\hat{K}} \|D^m v(x)\|^t d\hat{x}$$

Aplicando el cambio de variable con $x = T_K(\hat{x})$

$$C_m \|B_K\|^{mt} \int_{\hat{K}} \|D^m v(x)\|^t d\hat{x} = C_m \|B_K\|^{mt} |\det B_K|^{-1} \int_{\hat{K}} \|D^m v(x)\|^t dx$$

y como

$$\|D^m v(x)\| \leq C_n \max_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)| \leq C_n \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)|$$

Si aplicamos esto a la desigualdad anterior tenemos que:

$$|\hat{v}|_{m,t;\hat{K}}^t \leq C_n \|B_K\|^{mt} |\det B_K|^{-1} \int_{\hat{K}} \|D^m v(x)\|^t dx \leq C_n C_m \|B_K\|^{mt} |\det B_K|^{-1} |v|_{m,t;K}^t$$

con $C_1 := C_n C_m$, notar que C_1 es independiente de K , y la desigualdad se reduce a:

$$|\hat{v}|_{m,t;\hat{K}} \leq C_1 \|B_K\|^m |\det B_K|^{-1/t} |v|_{m,t;K}$$

Con $C_1^t := C_n C_m$. Esto demuestra la desigualdad para cada $v \in C^\infty(\bar{K})$.

Análogamente si tomamos $\hat{v} \in C^\infty(\hat{K})$ se tiene que existe C_2 independiente de K tal que:

$$|v|_{m,t;K} \leq C_2 \|B_K^{-1}\|^m |\det B_K|^{1/t} |\hat{v}|_{m,t;\hat{K}}$$

Para extenderlo a $W^{m,t}(K)$ ocupamos el siguiente argumento de densidad. Sea ahora $v \in W^{m,t}(K)$, entonces existe una sucesión $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\bar{K})$ tal que $\|v - v_j\|_{m,t;K} \rightarrow 0$, entonces para cada índice $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |\hat{v}_j|_{m,t;\hat{K}}^t &\leq C_1 \|B_K\|^{mt} |\det B_K|^{-1} |v_j|_{m,t;K} \\ \Rightarrow \lim_j |\hat{v}_j|_{m,t;\hat{K}}^t &\leq C_1 \lim_j \|B_K\|^{mt} |\det B_K|^{-1} |v_j|_{m,t;K} \\ \Rightarrow |\hat{v}|_{m,t;\hat{K}}^t &\leq C_1 \lim_j \|B_K\|^{mt} |\det B_K|^{-1} |v|_{m,t;K} \end{aligned}$$

Teniendo esta desigualdad para cada $v \in W^{m,t}(K)$, esta desigualdad también nos indica que si $v \in W^{m,t}(K)$ entonces $\hat{v} \in W^{m,t}(\hat{K})$, obteniendo así la demostración del ítem i). De la misma forma se demuestra el ítem ii) para cada $v \in W^{m,t}(\hat{K})$.

2) Lema

Dado m un entero no negativo, $t \in (1, \infty)$ y definiendo la transformación de Piola como $\hat{\tau} := |\det B_K| B_K^{-1} \tau \circ T_K \quad \forall \tau \in \mathbf{W}^{m,t}(K) := [W^{m,t}(K)]^n$, entonces se tiene que:

$$i) \quad \tau \in \mathbf{W}^{m,t}(K) \implies \hat{\tau} := |\det B_K| B_K^{-1} \tau \circ T_K \in \mathbf{W}^{m,t}(\hat{K}) \quad (5)$$

Además,

$$\exists C_1 > 0 \text{ independiente de } K : \quad |\hat{\tau}|_{m,t;\hat{K}} \leq C_1 \|B_K^{-1}\| \|B_K\|^m |\det B_K|^{1-1/t} |\tau|_{m,t;K} \quad (6)$$

De la misma forma se tiene que

$$ii) \quad \hat{\tau} \in \mathbf{W}^{m,t}(\hat{K}) \implies \tau = |\det B_K|^{-1} B_K \hat{\tau} \circ T_K^{-1} \in \mathbf{W}^{m,t}(K) \quad (7)$$

Además,

$$\exists C_2 > 0 \text{ independiente de } K : \quad |\tau|_{m,t;K} \leq C_2 \|B_K\| \|B_K^{-1}\|^m |\det B_K|^{1/t-1} |\hat{\tau}|_{m,t;\hat{K}} \quad (8)$$

Demostración

Dado $\tau \in [C^\infty(\bar{K})]^n$ probaremos la desigualdad del item i), ya que $[C^\infty(\bar{K})]^n$ es denso en el espacio $\mathbf{W}^{m,t}(K)$, notemos primero que para cada multi-índice α y cada $\hat{x} \in \hat{K}$:

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \hat{\tau}(\hat{x}) &= |\det B_K| B_K^{-1} \partial^\alpha (\tau \circ T_K)(\hat{x}) \\ \implies \|\partial^\alpha \hat{\tau}(\hat{x})\|_{0,t;\hat{K}} &\leq |\det B_K| \|B_K^{-1}\| \|\partial^\alpha (\tau \circ T_K)(\hat{x})\|_{0,t;\hat{K}} \end{aligned}$$

Luego ocupamos esta desigualdad en la semi-norma:

$$|\hat{\tau}|_{m,t;\hat{K}} = \left(\int_{\hat{K}} \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha \hat{\tau}(\hat{x})\|_{0,t;\hat{K}}^t \right)^{1/t} \leq |\det B_K| \|B_K^{-1}\| |\tau \circ T_K|_{m,t;\hat{K}}$$

Luego como para cada componente de $\tau \circ T_K$ esta acotado por Lema anterior, dicho de otra forma $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists c_1 : |(\tau \circ T_K)_i|_{m,t;\hat{K}} \leq c_1 \|B_K\|^m |\det B_K|^{-1/t} |\tau_i|_{m,t;K}$, luego existe una constante $C_1 > 0$, tal que

$$|\tau \circ T_K|_{m,t;\hat{K}} \leq C_1 \|B_K\|^m |\det B_K|^{-1/t} |\tau|_{m,t;K}$$

Por lo tanto:

$$|\hat{\tau}|_{m,t;\hat{K}} \leq C_1 \|B_K^{-1}\| \|B_K\|^m |\det B_K|^{1-1/t} |\tau|_{m,t;K} \quad \forall v \in C^\infty(\bar{K})$$

Luego por argumento de densidad de forma equivalente al lema anterior, como $C^\infty(\bar{K})$ es denso en $\mathbf{W}^{m,t}(K)$, entonces:

$$|\hat{\tau}|_{m,t;\hat{K}} \leq C_1 \|B_K^{-1}\| \|B_K\|^m |\det B_K|^{1-1/t} |\tau|_{m,t;K} \quad \forall v \in \mathbf{W}^{m,t}(K)$$

Además de la desigualdad se tiene que si $v \in \mathbf{W}^{m,t}(K) \implies \hat{\tau} \in \mathbf{W}^{m,t}(\hat{K})$, demostrando así el item i) y de forma analoga se demuestra el item ii)

falta detallar el caso " $\leq m$ " 3 - 0.3

3) Lema

Dado $\tau \in \mathbf{W}^{1,s}(K)$ y $\phi \in W^{1,s'}(K)$ con $s, s' \in (1, \infty)$ conjugados entre si, se tiene que:

a)

$$\int_{\hat{K}} \hat{\tau} \cdot \nabla \hat{\phi} = \int_K \tau \cdot \nabla \phi \quad (9)$$

b)

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi} \operatorname{div} \hat{\tau} = \int_K \phi \operatorname{div} \tau \quad (10)$$

c)

$$\int_{\partial \hat{K}} \hat{\phi} \hat{\tau} \cdot \nu_{\hat{K}} = \int_{\partial K} \phi \tau \cdot \nu_K \quad (11)$$

Demostración:

Para empezar notemos que:

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}_j}(\hat{x}) = D\hat{\phi}(\hat{x})(e_j)$$

Con e_j el vector j -ésimo de la base canónica de \mathbb{R}^n , luego por regla de la cadena

$$D\hat{\phi}(\hat{x})(e_j) = D\phi(T_K(\hat{x}))(B_K e_j) = D\phi(T_K(\hat{x}))(b_{K,j}) = \nabla \phi(T_K(\hat{x})) \cdot b_{K,j}$$

Con $b_{K,j}$ la columna j -ésima de B_K , se sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}_j}(\hat{x}) &= \nabla \phi(T_K(\hat{x})) \cdot b_{K,j} = b_{K,j}^t \nabla \phi(T_K(\hat{x})) \\ \Rightarrow \nabla \hat{\phi}(\hat{x}) &= B_K^t \nabla \phi(T_K(\hat{x})) \end{aligned}$$

Considerando la primera integral del item a) ocupamos esta igualdad:

$$\int_{\hat{K}} \hat{\tau} \cdot \nabla \hat{\phi} = \int_{\hat{K}} \hat{\tau} \cdot B_K^t \nabla \phi(T_K(\hat{x}))$$

Ahora hacemos cambio de variable:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{K}} \hat{\tau} \cdot \nabla \hat{\phi} &= \int_K B_K^{-1} \tau \cdot B_K^t \nabla \phi \\ &= \int_K (\nabla \phi)^t B_K B_K^{-1} \tau \\ &= \int_K (\nabla \phi)^t \tau = \int_K \tau \cdot \nabla \phi \end{aligned}$$

Probando así el item a).

Continuando la demostración para el ítem b) tenemos que por la definición de \hat{t} y de forma analoga argumento anterior para la derivada parcial de $\hat{\phi}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \hat{x}_j}(\hat{x}) &:= |\det B_K| B_K^{-1} \nabla \tau(T_K(\hat{x})) b_{K,j} \\ \Rightarrow \nabla \hat{\tau}(\hat{x}) &= |\det B_K| B_K^{-1} \nabla \tau(T_K(\hat{x})) B_K\end{aligned}$$

$\forall \hat{x} \in \hat{K}$

Ocupando la propiedad de traza $\text{tr}(B^{-1}TB) = \text{tr}(T)$, entonces para cada $\hat{x} \in \hat{K}$

$$\begin{aligned}\text{div } \hat{\tau}(\hat{x}) &= \text{tr} \nabla \hat{\tau}(\hat{x}) = |\det B_K| \text{tr}(B_K^{-1} \nabla \tau(T_K(\hat{x})) B_K) \\ &= |\det B_K| \text{tr}(\nabla \tau(T_K(\hat{x}))) \\ &= |\det B_K| \text{div } \tau(T_K(\hat{x}))\end{aligned}$$

Dicho de otra forma

$$\text{div } \hat{\tau} = |\det B_K| \text{div } \tau \circ T_K$$

en \hat{K}

Aplicando este resultado sobre primera integral del ítem b):

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi} \text{div } \hat{\tau} = \int_{\hat{K}} (\hat{\phi} |\det B_K| \text{div } \tau) \circ T_K = \int_{\hat{K}} \phi \circ T_K |\det B_K| \text{div } \tau \circ T_K$$

Ocupando el cambio de variable para integrar sobre K :

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi} \text{div } \hat{\tau} = \int_K \phi \text{div } \tau$$

Probando el ítem b) del Lema.

Como $\tau \in \mathbf{W}^{1,s}(K)$, entonces $\hat{\tau} \in \mathbf{W}^{1,s}(\hat{K})$, y como $\phi \in W^{1,s'}(K)$, entonces $\hat{\phi} \in W^{1,s'}(\hat{K})$ y podemos ocupar la formula de integración por partes siguiente:

$$\int_{\partial \hat{K}} \hat{\phi} \hat{\tau} \cdot \nu_{\hat{K}} = \int_{\hat{K}} \hat{\phi} \text{div } \hat{\tau} + \int_{\hat{K}} \hat{\tau} \cdot \nabla \hat{\phi}$$

Y por los ítems a) y b) tenemos que:

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi} \text{div } \hat{\tau} + \int_{\hat{K}} \hat{\tau} \cdot \nabla \hat{\phi} = \int_K \phi \text{div } \tau + \int_K \tau \cdot \nabla \phi = \int_{\partial K} \phi \tau \cdot \nu_K$$

en conclusión

$$\int_{\partial \hat{K}} \hat{\phi} \hat{\tau} \cdot \nu_{\hat{K}} = \int_{\partial K} \phi \tau \cdot \nu_K$$

Concluyendo la demostración de todos los ítems del lema.

4) Lema

Sean s, s' como los definidos en el lema anterior, luego para cada $\tau \in W^{1,s}(K)$ y $\phi \in L^{s'}(\partial K)$ se tiene que

$$\int_{\partial \hat{K}} \hat{\phi} \hat{\tau} \cdot \nu_{\hat{K}} = \int_{\partial K} \phi \tau \cdot \nu_K$$

Demostración:

Sabiendo que $W^{1-1/s',s}(\partial K)$ es denso en $L^{s'}(\partial K)$, entonces existe una sucesión $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{N}} \subset W^{1-1/s',s}(\partial K)$ tal que $\|\phi_t - \phi\|_{0,s';\partial K} \rightarrow 0$ cuando t tiende a infinito, con esto veamos la diferencia:

$$\left| \int_{\partial K} \phi \tau \cdot \nu_K - \int_{\partial K} \phi_t \tau \cdot \nu_K \right| = \left| \int_{\partial K} (\phi - \phi_t) \tau \cdot \nu_K \right|$$

Por la desigualdad de Holder:

$$\left| \int_{\partial K} (\phi - \phi_t) \tau \cdot \nu_K \right| \leq \|(\phi - \phi_t)\|_{0,s';\partial K} \|\tau \cdot \nu_K\|_{0,s;\partial K}$$

Diferencia que tiende a 0 cuando t tiende a infinito por lo cual:

$$\int_{\partial K} \phi \tau \cdot \nu_K = \lim_t \int_{\partial K} \phi_t \tau \cdot \nu_K$$

Y de forma analoga tenemos que

$$\int_{\partial \hat{K}} \hat{\phi} \hat{\tau} \cdot \nu_{\hat{K}} = \lim_t \int_{\partial \hat{K}} \hat{\phi}_t \hat{\tau} \cdot \nu_{\hat{K}}$$

Como $\phi_t \in W^{1-1/s',s}(\partial K)$ y este es el espacio de trazas de $W^{1,s'}(K)$ entonces se cumple el item c) del lema anterior, por lo cual:

$$\int_{\partial \hat{K}} \hat{\phi}_t \hat{\tau} \cdot \nu_{\hat{K}} = \int_{\partial K} \phi_t \tau \cdot \nu_K$$

juntando todo lo anterior tenemos que

$$\int_{\partial \hat{K}} \hat{\phi} \hat{\tau} \cdot \nu_{\hat{K}} = \lim_t \int_{\partial \hat{K}} \hat{\phi}_t \hat{\tau} \cdot \nu_{\hat{K}} = \lim_t \int_{\partial K} \phi_t \tau \cdot \nu_K = \int_{\partial K} \phi \tau \cdot \nu_K$$

Obteniendo la igualdad para cada $\phi \in L^{s'}(\partial K)$.