Análisis Numérico 2: Álgebra lineal numérica (525441)
Tarea **1**
Profesora: Mónica Selva.
DIM - CFM

Tarea 1: Matrices de Hessenberg y su descomposición LU.

1. Instrucciones

1. La tarea se puede trabajar en equipos de **hasta dos estudiantes**.

2. Las preguntas teóricas en siguiente sección deben responderse de manera clara y sencilla, cada afirmación debe estar debidamente fundamentada y los razonamientos presentados deben ser sencillos de seguir. Estas preguntas deben responderse a mano, con letra clara y legible, las hojas con respuestas deben escanearse y el archivo pdf resultante debe subirse a Canvas. Se penalizarán las entregas desordenadas.

3. Como parte de la tarea deben escribirse también ruteros y/o funciones MATLAB. Éstos deben poder ejecutarse sin mensajes de error y deben tener la estructura que se pide en la tarea.

4. La **fecha tope** de entrega de esta tarea es el **domingo 27 de abril**, 23:59 hrs.

5. Después de entregada la tarea y antes de ser publicadas las notas puede ocurrir que estudiantes, seleccionados aleatoriamente, sean citados para explicar partes de la tarea. Si esto ocurre será antes de la semana de pausa activa, es decir, en las semanas del 28 de abril al 9 de mayo. Ningún estudiante será citado después del 9 de mayo.

2. Enunciado de tarea

Sea $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $n \in \mathbb{N}$. Se dice que H es una *matriz (superior) de Hessenberg*[1] si y solo si ella satisface

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \,:\, \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \,:\, i > j + 1 \to h_{ij} = 0.$$

Este tipo de matrices es importante cuando se aproximan valores propios de matrices.
Debido a su estructura, es posible calcular la descomposición LU de una matriz de Hessenberg, si existe y es única, realizando $\mathcal{O}(n^2)$[2] operaciones aritméticas [3]. Calcular, de manera eficiente, una descomposición LU de una matriz de Hessenberg es el objetivo de esta tarea.

2.1. Un caso particular de descomposición PLU

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz cualesquiera, $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_i)_{1\le i\le n}$, $n \in \mathbb{N}$.
Los algoritmos 1 y 2 que se presentan en la siguiente página permiten resolver el sistema $Ax = b$, calculando primero, con el algoritmo 1, una descomposición PLU de A (suponiendo que la estructura de A es tal que los elementos pivote serán siempre distintos de cero).

1. Escriba los algoritmos 1 y 2 en forma matricial y explique por qué ellos son correctos, es decir, determine las matrices L_i (asociadas a composiciones de operaciones elementales del tipo $f_i \leftarrow f_i - \lambda f_j$) y P_i (asociadas a permutaciones simples) de modo que el algoritmo 1 pueda ser descrito como

$$U = L_{n-1}P_{n-1}\cdots P_2L_1P_1A$$

y explique por qué la solución a $Ax = b$ puede calcularse como en el algoritmo 2. Debe tener en cuenta que en el algoirtmo 1 las matrices L y U se almacenan en la propia matriz A.

[1] A partir de ahora cuando hablemos de matriz de Hessenberg nos referimos a una matriz superior de Hessenberg.
[2] Esto significa que el número de operaciones aritméticas es menor o igual que kn^2, siendo k un número positivo independiente de n.
[3] Recuerde que para una matriz general se requieren alrededor de $\frac{2}{3}n^3$ operaciones aritméticas para calcular su descomposición LU

Algorithm 1 Paso 1: Una descomposición PLU especial

for $j = 1$ to $n - 1$ **do**
  for $i = j$ to n **do**
    Intercambia a_{ji} y $a_{j+1,i}$.
  end for
  for $i = j + 1$ to n **do**
    $m_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}$.
    $a_{ij} = m_{ij}$.
    for $k = j + 1$ to n **do**
      $a_{ik} = a_{ik} - m_{ij}a_{jk}$.
    end for
  end for
end for

Algorithm 2 Paso 2: Resolver sistema de ecuaciones lineales después de modificar A con algoritmo anterior

for $j = 1$ to $n - 1$ **do**
  Intercambia b_j y b_{j+1}.
  for $i = j + 1$ to n **do**
    $b_i = b_i - a_{ij}b_j$.
  end for
end for
$x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$.
for $j = n - 1$ to 1 **do**
  $suma = 0$.
  for $k = j + 1$ to n **do**
    $suma = suma + a_{jk}x_k$.
  end for
  $x_j = \dfrac{b_j - suma}{a_{jj}}$.
end for

2.2. Descomposición LU para un tipo especial de matrices de Hessenberg

Sea $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, una matriz de Hessenberg. Se dice que H es *irreducida* si y solo si todos los elementos debajo de la diagonal principal de H son distintos de cero.
Suponga que H es una matriz irreducida de Hessenberg.

2. Modifique el algoritmo 1 de modo que éste retorne una descomposición PLU de H. Su algoritmo debe tener en cuenta la estructura de H para evitar operaciones superfluas. ¿Es posible garantizar que todos los pivotes serán distintos de cero? Justifique.

3. Modifique el algoritmo 2 de modo que éste resuelva $Hx = b$ utilizando la descomposición PLU de H calculada en ítem anterior.

4. ¿Cuántas operaciones aritméticas son necesarias para resolver $Hx = b$ con los algoritmos desarrollados en los ítems anteriores?

5. Escriba una función MATLAB que, dada una matriz H (irreducida de Hessenberg) y un vector b, retorne (una aproximación a) la solución exacta del sistema $Hx = b$ utilizando los algoritmos desarrollados en los ítems anteriores.

6. Escriba un programa MATLAB en el que usted defina matrices superiores de Hessenberg e irreducidas $H_1 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, $H_2 \in \mathbb{R}^{10\times 10}$, así como vectores $b \in \mathbb{R}^4, c \in R^{10}$ y resuelva los sistemas $H_1x = b$ y $H_2x = c$ llamando a la función escrita en ítem anterior. En su programa usted debe además calcular la norma (usted escoge cuál norma utilizar) de la diferencia entre la solución que retorna la función escrita en ítem anterior y la que se obtiene con el comando \ de MATLAB.

2.3. Utilizando la descomposición anterior para resolver un tipo especial de sistemas de ecuaciones lineales

Sean $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$ una matriz triangular superior invertible, $v \in \mathbb{R}^n$, $e_1 \in \mathbb{R}^n$, el primer vector canónico y

$$C = U + ve_1^{\mathrm{T}}.$$

Sea además

$$P = I_{1,2}I_{2,3}\cdots I_{n-1,n}, \tag{1}$$

donde para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ la matriz $I_{i,i+1}$ es la matriz asociada a la transformación lineal que permite intercambiar las componentes i e $i + 1$ de un vector de $\mathbb{R}^n$.

7. Explique por qué la matriz $E = CP$ es una matriz irreducida de Hessenberg.

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz que posee una única descomposición LU. Sean además $w \in \mathbb{R}^n$ y

$$B = A + we_1^{\mathrm{T}}$$

una perturbación de rango 1 de A. Demuestre que B puede escribirse como LHP^{T}, donde H una matriz irreducida de Hessenberg, L es la matriz triangular inferior de la descomposición LU de A y P es la matriz definida en (1).

9. Proponga un algoritmo para la solución de $Bx = d$, $d \in \mathbb{R}^n$, que realice $\mathcal{O}(n^2)$ operaciones aritméticas. El costo de calcular las matrices L y U de la descomposición LU de A no debe ser considerado, es decir, usted debe proponer un algoritmo que, conocidas L y U, permita resolver $Bx = d$ con $\mathcal{O}(n^2)$ operaciones aritméticas. Justifique su elección.