Profesor: Fernando Roldán
Ayudantes: Cristofer Mamani y Fernando Muñoz
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Optimización II (5225565)

Tarea 2

Fecha de entrega: Lunes 06 de Octubre de manera individual.

P1) Decimos que $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es *fuertemente convexa* con constante $\mu > 0$ si

$$(\forall \lambda \in [0,1]) \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.$$

Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $\mu > 0$.

(i) Demuestre que si f es μ-fuertemente convexa entonces es estricatmente convexa y por lo tanto convexa.

(ii) Demuestre que f es μ-fuertemente convexa si y solo si $(f - \frac{\mu}{2}\|x\|^2)$ es convexa.

(iii) Demuestre que si f es propia, μ-fuertemente convexa y semicontinua inferior entonces f es coerciva. **Hint:** Utilice una función afín $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f - \frac{\mu}{2}\|x\|^2 \geq g$ (justifique su existencia).

(iv) Demuestre que si f es propia, μ-fuertemente convexa y semicontinua inferior, entonces $\arg\min_{\mathbb{R}^n} f$ es no vacío. Más aún, muestre que f tiene un único mínimo.

P2) Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia y convexa. Suponga que f es localmente acotada en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, es decir, existe $\delta > 0$ y $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tal que para cada $x \in B(x_0, \delta)$ se cumple que

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Demuestre que f es Lipschitz continua en $B(x_0, \delta/2)$ con constante $\frac{2(M-m)}{\delta}$, esto es:

$$x_2, x_1 \in B(x_0, \delta/2) \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{2(M-m)}{\delta}\|x_1 - x_2\|.$$

Hint: Considere el vector $y = x_2 + \dfrac{\delta}{2}\dfrac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|}$.

P3) Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función Gâteaux diferenciable[1] y D un conjunto abierto.

(i) Sea x un mínimo de f en D. Pruebe que $\nabla f(x) = 0$.

(ii) Pruebe que si $D = \mathbb{R}^n$ y f es convexa, $x \in \mathbb{R}^n$ es un mínimo de f si y sólo si, $\nabla f(x) = 0$.

(iii) Proporcione un ejemplo donde $\nabla f(x) = 0$ pero x no sea un mínimo global.

P4) Verifique que la función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2xy + (z+1)^2 + 2e^{-z}$ es convexa. Justifique la existencia de mínimos de f y determinelos.

[1] Recuerde que la derivada direccional de f en $x \in \mathbb{R}^n$ con dirección $d \in \mathbb{R}^n$ está definida por

$$f'(x;v) \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

Además, decimos que f es diferenciable en x en el sentido de Gâteaux, Si $f'(x,d)$ existe para cada $d \in \mathbb{R}^n$ y la función $d \mapsto f'(x,d)$ es lineal y continua. Si f es Gâteaux diferenciable, se tiene que $f'(x;v) \;=\; v^\top \nabla f(x)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$