

Métodos de Elementos Finitos Mixtos

Evaluación 2 - Problema 1

Victor Cartes

10 de enero de 2022

Problema 1

Se consideran los espacios de Banach reflexivos H y Q , y aplicaciones bilineales acotadas

$$a : H \times H \rightarrow R, \quad b : H \times Q \rightarrow R, \quad c : Q \times Q \rightarrow R.$$

Así, dados funcionales $f \in H'$ y $g \in Q'$, se considera un esquema del siguiente tipo:

Hallar $(\sigma, u) \in H \times Q$ tales que:

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, u) &= f(\tau), & \forall \tau \in H \\ b(\sigma, v) - c(u, v) &= g(v), & \forall v \in Q. \end{aligned}$$

A su vez, siendo $\{H_h\}_{h>0}$ y $\{Q_h\}_{h>0}$ familias de subespacios de dimensión finita de H y Q , respectivamente, particularmente el objetivo del presente problema es analizar la unisolvencia a nivel discreto del esquema precedente:

(★) Hallar $(\sigma_h, u_h) \in H_h \times Q_h$ tales que:

$$\begin{aligned} a(\sigma_h, \tau_h) + b(\tau_h, u_h) &= f(\tau_h), & \forall \tau_h \in H_h \\ b(\sigma_h, v_h) - c(u_h, v_h) &= g(v_h), & \forall v_h \in Q_h. \end{aligned}$$

Problema 1

Junto a lo anterior, se suponen las siguientes hipótesis:

- i) a y b son simétricas y semi-definidas positivas.
- ii) Existe una constante $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de h , tal que

$$\sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\zeta_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|} \geq \tilde{\alpha} \|\zeta_h\|_H, \quad \forall \zeta_h \in V_h,$$

con V_h el espacio nulo del operador inducido por $b|_{H_h \times Q_h}$. Esto, es

$$V_h = \{\tau_h \in H_h : b(\tau_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in Q_h\}$$

- iii) Existe una constante $\tilde{\beta} > 0$, independiente de h , tal que

$$\sup_{\substack{\tau_h \in H_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{b(\tau_h, v_h)}{\|\tau_h\|} \geq \tilde{\beta} \|v_h\|_Q, \quad \forall v_h \in Q_h$$

Problema 1

Para esto, se considerará equivalentemente a (★) la siguiente formulación:

(★★) Hallar $(\zeta_h, w_h) \in H_h \times Q_h$ tal que:

$$A((\zeta_h, w_h)(\tau_h, v_h)) = F(\tau_h, v_h), \quad \forall (\tau_h, v_h) \in H_h \times Q_h,$$

donde la forma bilineal $A : (H_h \times Q_h)^2 \rightarrow R$ está dada por

$$A((\zeta_h, w_h), (\tau_h, v_h)) := a(\zeta_h, \tau_h) + b(\tau_h, w_h) + b(\zeta_h, v_h) - c(w_h, v_h), \\ \forall (\zeta_h, w_h), (\tau_h, v_h) \in H_h \times Q_h$$

y $F : H_h \times Q_h \rightarrow R$ por

$$F(\tau_h, v_h) := f(\tau_h) + g(v_h), \quad \forall (\tau_h, v_h) \in H_h \times Q_h.$$

Problema 1

Luego, recurriendo al lema de Lax-Milgram generalizado, se tiene garantizada la unisolvencia de $(\star\star)$ (y a su vez de (\star)), si y sólo si existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\forall (\zeta_h, w_h) \in H_h \times Q_h$,

$$S(\zeta_h, w_h) := \sup_{\substack{(\tau_h, v_h) \in H_h \times Q_h \\ (\tau_h, v_h) \neq 0}} \frac{A((\zeta_h, w_h), (\tau_h, v_h))}{\|(\tau_h, v_h)\|_{H \times Q}} \geq \alpha \|(\zeta_h, w_h)\|_{H \times Q}. \quad (1)$$

Esto último debido a la simetría de la forma bilineal A , ya que en tal caso el operador inducido $\mathcal{A} : (H_h \times Q_h) \rightarrow (H_h \times Q_h)'$ es “autoadjunto”, teniéndose inyectividad si y sólo si se tiene sobreyectividad.

Problema 1

Para $\zeta_h \in H_h$ y $w_h \in Q_h$ dados, se definen además las siguientes funcionales:

$$F_{(\zeta_h, w_h)}(\tau_h) := A((\zeta_h, w_h)(\tau_h, 0)) = a(\zeta_h, \tau_h) + b(\tau_h, w_h), \quad \forall \tau_h \in H_h$$
$$G_{(\zeta_h, w_h)}(v_h) := A((\zeta_h, w_h)(0, v_h)) = b(\zeta_h, v_h) - c(w_h, v_h), \quad \forall v_h \in Q_h.$$

Se observa que, por definición, $(\zeta_h, w_h) \in H_h \times Q_h$ es la solución del esquema (★) si se considera $f \equiv F_{(\zeta_h, w_h)}$ y $g \equiv G_{(\zeta_h, w_h)}$.

Problema 1

Además, $\forall (\zeta_h, w_h) \in H_h \times Q_h$, también se tiene que

$$S(\zeta_h, w_h) \geq \frac{1}{2} \left\{ \|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'} + \|G_{(\zeta_h, w_h)}\|_{Q'} \right\}$$

$$S(\zeta_h, w_h) \leq \|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'} + \|G_{(\zeta_h, w_h)}\|_{Q'}.$$

Por lo cual, es necesario y suficiente mostrar que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|(\zeta_h, w_h)\|_{H \times Q} \leq C \left\{ \|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'_h} + \|G_{(\zeta_h, w_h)}\|_{Q'_h} \right\},$$

para concluir la condición inf-sup (1) con $\alpha = 2C$.

En lo siguiente, se mostrarán las cotas respectivas que se obtiene para $\|\zeta_h\|_H$ y $\|w_h\|_Q$ en el presente contexto.

Problema 1 - Pregunta a)

Cota para $\zeta_h \in H_h$

Por la condición inf-sup sobre b de la hipótesis (iii) dada, se tiene que $B_h : H_h \rightarrow Q'_h$ es sobreyectivo, siendo B_h el operador inducido por $b|_{H_h \times Q_h}$. Luego, por resultado visto en clases (Lema 3.26-Apunte de apoyo TBB-Banach), existe $\overline{\zeta}_h \in H_h$ tal que $B(\overline{\zeta}_h) = B(\zeta_h)$ y

$$\tilde{\beta} \|\overline{\zeta}_h\| \leq \|B_h(\overline{\zeta}_h)\|,$$

con igual constante $\tilde{\beta}$ que la dada en la hipótesis (iii).

Problema 1 - Pregunta a)

Lo anterior induce una descomposición

$$\zeta_h = \zeta_h^0 + \overline{\zeta_h}$$

con $\zeta_h^0 := \zeta_h - \overline{\zeta_h}$, y de donde se observa que $\zeta_h^0 \in V_h$. Luego,

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} \|\overline{\zeta_h}\|_H &\leq \|B_h(\overline{\zeta_h})\|_{Q'_h} = \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq 0}} \frac{\langle B_h(\overline{\zeta_h}), v_h \rangle_{Q'_h \times Q_h}}{\|v_h\|_Q} \\ &= \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq 0}} \frac{b(\overline{\zeta_h}, v_h)}{\|v_h\|_Q} \\ &= \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq 0}} \frac{b(\zeta_h, v_h)}{\|v_h\|_Q}\end{aligned}$$

Problema 1 - Pregunta a)

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} \|\bar{\zeta}_h\|_H &\leq \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq 0}} \frac{b(\zeta_h, v_h) \pm c(w_h, v_h)}{\|v_h\|_Q} \\ &= \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq 0}} \frac{G_{(\zeta_h, w_h)}(v_h) + c(w_h, v_h)}{\|v_h\|_Q}\end{aligned}$$

Acotando $c(w_h, v_h)$ por Cauchy-Schwarz ($|w|_c := c(w, w)^{1/2}$) queda

$$c(w_h, v_h) \leq c(w_h, w_h)^{1/2} c(v_h, v_h)^{1/2} \leq |w_h|_c \|c\|^{1/2} \|v_h\|_Q,$$

Problema 1 - Pregunta a)

de donde

$$\|\bar{\zeta}_h\|_H \leq \frac{1}{\tilde{\beta}} \|G(\zeta_h, w_h)\|_{Q'_h} + \frac{\|c\|^{1/2}}{\tilde{\beta}} |w_h|_c. \quad (2)$$

Ahora se acota la norma de ζ_h^0 : Dado que $\zeta_h^0 \in V_h$, por la condición inf-sup de la hipótesis (ii) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} \|\zeta_h^0\|_H &\leq \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\zeta_h^0, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \\ &= \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\zeta_h^0, \tau_h) \pm a(\bar{\zeta}_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \\ &= \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\zeta_h, \tau_h) - a(\bar{\zeta}_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \end{aligned}$$

Problema 1 - Pregunta a)

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} \|\zeta_h^0\|_H &\leq \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\zeta_h, \tau_h) + \cancel{b(\tau_h, w_h)} - a(\bar{\zeta}_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \\ &= \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{F_{(\zeta_h, w_h)}(\tau_h) - a(\bar{\zeta}_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H},\end{aligned}$$

de donde

$$\|\zeta_h^0\|_H \leq \frac{1}{\tilde{\alpha}} \|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'_h} + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}} \|\bar{\zeta}_h\|_H. \quad (3)$$

Problema 1 - Pregunta a)

En resumidas cuentas, se tienen las siguientes acotaciones:

$$\begin{aligned}\|\zeta_h^0\|_H &\leq \frac{1}{\tilde{\alpha}} \|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'_h} + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}} \|\bar{\zeta}_h\|_H \\ \|\bar{\zeta}_h\|_H &\leq \frac{1}{\tilde{\beta}} \|G_{(\zeta_h, w_h)}\|_{Q'_h} + \frac{\|c\|^{1/2}}{\tilde{\beta}} |w_h|_c.\end{aligned}$$

Así, por desigualdad triangular se concluye la siguiente cota para ζ_h :

$$\begin{aligned}\|\zeta_h\|_H &\leq \|\zeta_0\|_H + \|\bar{\zeta}_h\|_H \\ &\leq \frac{1}{\tilde{\alpha}} \|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'_h} + \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}}\right) \|\bar{\zeta}_h\|_H \\ &\leq \frac{1}{\tilde{\alpha}} \|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'_h} + \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}}\right) \frac{1}{\tilde{\beta}} \|G_{\zeta_h, w_h}\|_{Q'_h} \\ &\quad + \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}}\right) \frac{\|c\|^{1/2}}{\tilde{\beta}} |w_h|_c\end{aligned}$$

Problema 1 - Pregunta a)

Cota para $w_h \in Q_h$

Por la condición inf-sup para b dada en la hipótesis (iii), se tiene que

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} \|w_h\|_Q &\leq \sup_{\substack{\tau_h \in H_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{b(\tau_h, w_h)}{\|\tau_h\|_H} \\ &= \sup_{\substack{\tau_h \in H_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{b(\tau_h, w_h) \pm a(\zeta_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \\ &= \sup_{\substack{\tau_h \in H_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{F_{(\zeta_h, w_h)}(\tau_h) - a(\zeta_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H},\end{aligned}$$

Problema 1 - Pregunta a)

de donde

$$\|w_h\|_Q \leq \frac{1}{\tilde{\beta}} \|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'} + \frac{\|a\|}{\tilde{\beta}} \|\zeta_h\|_H.$$

Así, reemplazando la cota obtenida sobre $\|\zeta_h\|_H$, que es:

$$\|\zeta_h\|_H \leq \frac{1}{\tilde{\alpha}} \|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'_h} + \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}}\right) \frac{1}{\tilde{\beta}} \|G_{\zeta_h, w_h}\|_{Q'_h} + \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}}\right) \frac{\|c\|^{1/2}}{\tilde{\beta}} |w_h|_c$$

se llega a

$$\begin{aligned} \|w_h\|_Q &\leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}}\right) \frac{1}{\tilde{\beta}} \|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'_h} + \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}}\right) \frac{\|a\|}{\tilde{\beta}^2} \|G_{\zeta_h, w_h}\|_{Q'_h} \\ &\quad + \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}}\right) \frac{\|a\| \|c\|^{1/2}}{\tilde{\beta}^2} |w_h|_c. \end{aligned}$$

Problema 1 - Pregunta a)

Resta obtener una cota para $|w|_c$. Para esto, primero observa que

$$0 \leq a(\zeta_h, \zeta_h) + c(w_h, w_h) = F_{(\zeta_h, w_h)}(\zeta_h) - G_{(\zeta_h, w_h)}(w_h),$$

y dado que a es semi-definido positivo, se obtiene

$$\begin{aligned} c(w_h, w_h) &= |w_h|_c^2 \leq F_{(\zeta_h, w_h)}(\zeta_h) - G_{(\zeta_h, w_h)}(w_h) \\ \Rightarrow |w_h|_c^2 &\leq \|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'_h} \|\zeta_h\|_H + \|G_{(\zeta_h, w_h)}\|_{Q'_H} \|w_h\|_Q. \end{aligned}$$

Luego, por desigualdad de Cauchy con ϵ :

$$|w_h|_c^2 \leq \epsilon_1 \|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'_h}^2 + \frac{1}{4\epsilon_1} \|\zeta_h\|_H^2 + \epsilon_2 \|G_{(\zeta_h, w_h)}\|_{Q'_H}^2 + \frac{1}{4\epsilon_2} \|w_h\|_Q^2$$

Problema 1 - Pregunta a)

Por otra parte, se pueden reacomodar las cotas obtenidas de $\|\zeta_h\|_H$ y $\|w_h\|_Q$ para potencias cuadradas como sigue:

$$\|\zeta_h\|_H^2 \leq 9 \left\{ \frac{1}{\tilde{\alpha}^2} \|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'_h}^2 + \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \frac{1}{\tilde{\beta}^2} \|G_{\zeta_h, w_h}\|_{Q'_h}^2 + \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \frac{\|c\|}{\tilde{\beta}^2} |w_h|_c^2 \right\}$$

$$\|w_h\|_Q^2 \leq 9 \left\{ \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \frac{1}{\tilde{\beta}^2} \|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'_h}^2 + \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \frac{\|a\|^2}{\tilde{\beta}^4} \|G_{\zeta_h, w_h}\|_{Q'_h}^2 + \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \frac{\|a\|^2 \|c\|}{\tilde{\beta}^4} |w_h|_c^2 \right\}.$$

Problema 1 - Pregunta a)

Luego, se eligen

$$\epsilon_1 := 9 \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}} \right)^2 \frac{\|c\|}{\tilde{\beta}^2}$$

$$\epsilon_2 := 9 \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}} \right)^2 \frac{\|a\|^2 \|c\|}{\tilde{\beta}^4},$$

quedando así la siguiente cota:

$$|w_h|_c^2 \leq \left(\frac{C_1}{4\epsilon_1} + \epsilon_1 \right) \|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'_h}^2 + \left(\frac{C_2}{4\epsilon_2} + \epsilon_2 \right) \|G_{(\zeta_h, w_h)}\|_{Q'_H}^2 + \frac{1}{2} |w_h|_c^2$$

$$C_1 := 9 \left\{ \frac{1}{\tilde{\alpha}^2} + \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}} \right)^2 \frac{1}{\tilde{\beta}^2} \right\}$$

$$C_2 := 9 \left\{ \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}} \right)^2 \frac{1}{\tilde{\beta}^2} + \left(1 + \frac{\|a\|}{\tilde{\alpha}} \right)^2 \frac{\|a\|^2}{\tilde{\beta}^4} \right\}$$

Problema 1 - Pregunta a)

Finalmente, $|w_h|_c$ queda acotado de la siguiente manera:

$$|w_h|_c \leq \left[2 \max \left\{ \left(\frac{C_1}{4\epsilon_1} + \epsilon_1 \right), \left(\frac{C_2}{4\epsilon_2} + \epsilon_2 \right) \right\} \right]^{1/2} \left(\|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'_h} + \|G_{(\zeta_h, w_h)}\|_{Q'_H} \right)$$

Por lo tanto, remplazando esto último en las cotas respectivas de $\|\zeta_h\|_H$ y $\|w_h\|_Q$, se llega a

$$\|\zeta_h\|_H + \|w_h\|_Q \leq C \left\{ \|F_{(\zeta_h, w_h)}\|_{H'} + \|G_{(\zeta_h, w_h)}\|_{Q'} \right\},$$

con $C > 0$ que depende sólo de $\|a\|$, $\|c\|$, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ de acuerdo con las estimaciones previamente exhibidas.

Problema 1 - Pregunta b)

En este problema se demuestra la estimación de Céa corresponde al esquema de Galerkin; esto es, que existe una constante \hat{C} , que depende de $\|a\|$, $\|c\|$, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$, tal que

$$\|\sigma - \sigma_h\|_H + \|u - u_h\|_Q \leq \hat{C} \left\{ \text{dist}(\sigma, H_h) + \text{dist}(u, Q_h) \right\}.$$

En efecto, aplicando desigualdad triangular, $\forall (\zeta_h, w_h) \in H_h \times Q_h$

$$\|(\sigma, u) - (\sigma_h, u_h)\|_{H \times Q} \leq \|(\sigma, u) - (\zeta_h, w_h)\|_{H \times Q} + \|(\sigma_h, u_h) - (\zeta_h, w_h)\|_{H \times Q}.$$

Problema 1 - Pregunta b)

Sobre el segundo término de la desigualdad anterior se aplica la condición inf-sup del operador A definido previamente, obteniendo la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \|(\sigma_h, u_h) - (\zeta_h, w_h)\|_{H \times Q} &\leq 2C \sup_{\substack{(\tau_h, v_h) \in H_h \times Q_h \\ (\tau_h, v_h) \neq 0}} \frac{A((\sigma_h, u_h) - (\zeta_h, w_h), (\tau_h, v_h))}{\|(\tau_h, v_h)\|_{H \times Q}} \\ &= 2C \sup_{\substack{(\tau_h, v_h) \in H_h \times Q_h \\ (\tau_h, v_h) \neq 0}} \frac{A((\sigma, u) - (\zeta_h, w_h), (\tau_h, v_h))}{\|(\tau_h, v_h)\|_{H \times Q}}. \end{aligned}$$

Lo último, pues la consistencia del esquema (★★) entrega que

$$A((\sigma_h, u_h), (\tau_h, v_h)) = A((\sigma, u), (\tau_h, v_h)), \quad \forall (\tau_h, v_h) \in H_h \times Q_h.$$

Problema 1 - Pregunta b)

Luego, acotando superiormente por las normas respectivas, se obtiene que

$$\|(\sigma_h, u_h) - (\zeta_h, w_h)\|_{H \times Q} \leq 2C\|A\| \|(\sigma, u) - (\zeta_h, w_h)\|_{H \times Q}.$$

Por lo tanto,

$$\|(\sigma, u) - (\sigma_h, u_h)\|_{H \times Q} \leq (1 + 2C\|A\|) \|(\sigma, u) - (\zeta_h, w_h)\|_{H \times Q},$$

y así la estimación de Céa queda dada por

$$\|\sigma - \sigma_h\|_H + \|u - u_h\|_Q \leq \hat{C} \left\{ \text{dist}(\sigma, H_h) + \text{dist}(u, Q_h) \right\},$$

con constante

$$\hat{C} := (1 + 2C\|A\|).$$