Profesor: Fernando Roldán
Ayudantes: Cristofer Mamani y Fernando Muñoz
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Optimización II (5225565)

Tarea 3

Fecha de entrega: 23:59 Miércoles 19 de Noviembre en grupos de 2 o 3 personas.

Para toda la tarea, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ son funciones convexas y denotamos $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\colon (x,y) \to f(x)+g(y)$.

P1) Pruebe que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $y \in \mathbb{R}^m$, se tiene $\partial F(x,y) = \partial f(x) \times \partial g(y)$.

P2) Considere el operador proximal

$$\operatorname{prox}_f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\colon x \to \underset{y\in\mathbb{R}^n}{\arg\min}\left(f(y) + \frac{1}{2}\|y-x\|^2\right). \tag{1}$$

Demuestre que, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y todo $\gamma > 0$:

(i) $\operatorname{prox}_{\gamma f}(x)$ existe y es único.

(ii) $p = \operatorname{prox}_{\gamma f}(x) \Leftrightarrow p = (\mathrm{Id} + \gamma\partial f)^{-1}(x)$.

(iii) $\operatorname{prox}_{\gamma f}(x) = x - \gamma \operatorname{prox}_{f^*/\gamma}(x/\gamma)$.

(iv) $\|\operatorname{prox}_{\gamma f}(x) - \operatorname{prox}_{\gamma f}(y)\|^2 \leq \|x-y\|^2 - \|(x - \operatorname{prox}_{\gamma f}(x)) - (y - \operatorname{prox}_{\gamma f}(y))\|^2$.

(v) $\operatorname{prox}_{\gamma F}(x,z) = (\operatorname{prox}_{\gamma f}(x), \operatorname{prox}_{\gamma g}(z))$.

P3) Sean $\rho > 0$ y $\gamma > 0$.

(i) Calcule $\operatorname{prox}_{\gamma h_\rho}$ si $h_\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por:

$$h_\rho(t) = \begin{cases} |t| - \dfrac{\rho}{2}, & \text{si } |t| > \rho; \\ \dfrac{t^2}{2\rho}, & \text{si } |t| \leq \rho. \end{cases} \tag{2}$$

(ii) Calcule $\operatorname{prox}_{\gamma f}$ si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n h_\rho(x_i)$.

P4)

(i) Demuestre que $F^* = f^* + g^*$

(ii) Sea $p \in \,]1,+\infty[$ y defina $p^* = p/(p-1)$. Demuestre que $\left(\dfrac{|\cdot|^p}{p}\right)^* = \dfrac{|\cdot|^{p^*}}{p^*}$.

(iii) Demuestre que $\left(\dfrac{\|\cdot\|_p^p}{p}\right)^* = \dfrac{\|\cdot\|_{p^*}^{p^*}}{p^*}$.

(iv) Demuestre que $f = f^*$ si y sólo si $f^* = \| \cdot \|^2/2$.

P5) Sean $u^i \in \mathbb{R}^n$ y $v^i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, p$. Considere el problema

$$\begin{aligned} \min_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ y\in\mathbb{R}}} \quad & \frac{\|x\|^2}{2} \\ \text{s.a.} \quad & v^i(x^\top u^i + y) \geq 1, \quad i = 1, \ldots, p. \end{aligned}$$

(i) Encuentre problema dual en el sentido de Lagrange.

(ii) Encuentre el problema dual en el sentido de Fenchel–Rockafellar.

P6) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, encuentre la solución del problema

$$\begin{aligned} \min_{(x,y,w,z)\in\ \mathbb{R}^4} \quad & x^2 + y^2 + w^2 + z^2 \\ \text{s.a.} \quad & x + y + w + z = 1 \\ & z \leq \alpha. \end{aligned}$$