UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

E V A L U A C I O N 1

Métodos de Elementos Finitos Mixtos (525539)

Lunes 30 de Octubre de 2023 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean K y $\widehat{K}$ compactos conexos de R^n de clase $\mathrm{C}^{0,1}$, y sea $T_K : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ la aplicación afín invertible dada por $T_K(\widehat{\mathbf{x}}) := B_K\,\widehat{\mathbf{x}} + b_K$ para todo $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathrm{R}^n$, con $B_K \in \mathrm{R}^{n\times n}$ y $b_K \in \mathrm{R}^n$, tal que $K = T_K(\widehat{K})$. Además, sean m un entero ≥ 0 y $t \in (1,+\infty)$. Utilice la densidad de $\mathrm{C}^m(K)$ en $W^{m,t}(K)$ para demostrar que para cada $v \in W^{m,t}(K)$ existe $\widehat{v} := v \circ T_K \in W^{m,t}(\widehat{K})$, el cual satisface
$$|\widehat{v}|_{m,t;\widehat{K}} \;\leq\; C\,\|B_K\|^m\,|\mathrm{det}(B_K)|^{-1/t}\,|v|_{m,t;K}\,,$$
donde C es una constante positiva independiente de K. A su vez, sin realizar una demostración análoga a la anterior, sino simplemente intercambiando los roles de K y $\widehat{K}$, y aplicando lo ya demostrado, establezca la implicación y desigualdad recíprocas, esto es, para cada $\widehat{v} \in W^{m,t}(\widehat{K})$ existe $v := \widehat{v} \circ T_K^{-1} \in W^{m,t}(K)$ y
$$|v|_{m,t;K} \;\leq\; C\,\|B_K^{-1}\|^m\,|\mathrm{det}(B_K)|^{1/t}\,|\widehat{v}|_{m,t;\widehat{K}}\,.$$
Por último, utilice lo anterior para deducir las estimaciones respectivas asociadas a $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{m,t}(K)$ y su transformación de Piola $\widehat{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbf{W}^{m,t}(\widehat{K})$.

2. En el mismo contexto geométrico del problema anterior, considere $t,\ s \in (1,+\infty)$ conjugados entre sí, y utilice que el operador de trazas $\gamma_s : \mathrm{W}^{1,s}(K) \to \mathrm{W}^{1-1/s,s}(\partial K)$ es sobreyectivo, y que $\mathrm{W}^{1-1/s,s}(\partial K)$ es denso en $\mathrm{L}^s(\partial K)$, para demostrar, teniendo en mente una identidad relacionada probada en clases, que
$$\int_{\partial K} \varphi\,\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_K \;=\; \int_{\partial\widehat{K}} \widehat{\varphi}\,\widehat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\boldsymbol{\nu}_{\widehat{K}} \qquad \forall\,\varphi \in \mathrm{L}^s(\partial K)\,, \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}^{1,t}(K)\,.$$

3. Dados un abierto acotado Ω de R^2 de clase $C^{0,1}$, y $t,\ s \in (1,+\infty)$ conjugados entre sí, considere la inyección continua $\mathbf{i}_s : \mathbf{H}^1(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}^s(\Omega)$ y los espacios de Banach
$$\mathbb{H}(\mathbf{div}_t;\Omega) \;:=\; \Big\{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \quad \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) \in \mathbf{L}^t(\Omega)\Big\}\,, \quad \text{y}$$
$$\mathbb{H}_0(\mathbf{div}_t;\Omega) \;:=\; \Big\{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}_t;\Omega) : \quad \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}) \;=\; 0\Big\}\,.$$
Demuestre que existe una constante $c_t > 0$ tal que
$$\|\boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}}\|^2_{0,\Omega} \;+\; \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{0,t;\Omega} \;\geq\; c_t\,\|\boldsymbol{\tau}\|^2_{0,\Omega} \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}_t;\Omega)\,.$$

4. Con las mismas notaciones del problema anterior defina para cada $t \in (1, +\infty)$

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^t(\mathbf{div}_t; \Omega) &:= \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^t(\Omega) : \quad \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \in \mathrm{L}^t(\Omega) \Big\}, \\ \mathbb{H}^t_0(\mathbf{div}_t; \Omega) &:= \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}^t(\mathbf{div}_t; \Omega) : \quad \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}) \,=\, 0 \Big\}, \end{aligned}$$

y demuestre que existe una constante $\widetilde{c}_t > 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}}\|^2_{0,t;\Omega} \,+\, \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{0,t;\Omega} \,\geq\, \widetilde{c}_t\, \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{0,t;\Omega} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}^t_0(\mathbf{div}_t; \Omega)\,.$$

5. Una de la formulaciones variacionales que surgen en el problema acoplado de Darcy con la ecuación del calor es del tipo: Hallar $(\mathbf{u}, p) \in X_2 \times M_1$ tal que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_1(\mathbf{v}, p) &= F(\mathbf{v}) \qquad \forall\, \mathbf{v} \in X_1\,, \\ b_2(\mathbf{u}, q) &= G(q) \qquad \forall\, q \in M_2\,, \end{aligned} \tag{1}$$

donde, eligiendo convenientemente r, $s \in (1, +\infty)$ conjugados, se tiene

$$\begin{aligned} X_2 &:= \Big\{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^r(\mathrm{div}_r; \Omega) : \quad \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \Big\}, \\ X_1 &:= \Big\{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^s(\mathrm{div}_s; \Omega) : \quad \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \Big\}, \\ M_1 &:= \Big\{ q \in \mathbf{L}^r(\Omega) : \quad \textstyle\int_\Omega q = 0 \Big\}, \\ M_2 &:= \Big\{ q \in \mathbf{L}^s(\Omega) : \quad \textstyle\int_\Omega q = 0 \Big\}, \end{aligned} \tag{2}$$

$a : X_2 \times X_1 \to \mathrm{R}$ y $b_i : X_i \times M_i \to \mathrm{R}$, $i \in \big\{1, 2\big\}$, son las formas bilineales

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &:= \int_\Omega \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \qquad \forall\, (\mathbf{w}, \mathbf{v}) \in X_2 \times X_1\,, \\ b_i(\mathbf{v}, q) &:= \int_\Omega q\, \mathrm{div}(\mathbf{v}) \qquad \forall\, (\mathbf{v}, q) \in X_i \times M_i\,, \end{aligned} \tag{3}$$

y $F \in X_1'$, $G \in M_2'$ son funcionales dados.

a) Demuestre que para cada $i \in \big\{1, 2\big\}$ el espacio nulo $\mathcal{K}_i$ del operador inducido por b_i se reduce a $\mathcal{K}_i \,:=\, \Big\{ \mathbf{v} \in X_i : \quad \mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \Big\}$.

b) Suponga que existe un operador lineal y acotado $D_s : \mathbf{L}^s(\Omega) \to \mathbf{L}^s(\Omega)$ tal que para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{L}^s(\Omega)$ se tiene $D_s(\mathbf{z}) \in \mathcal{K}_1$ y $\displaystyle\int_\Omega \mathbf{w} \cdot D_s(\mathbf{z}) = \int_\Omega \mathbf{w} \cdot \mathbf{z}$ para todo $\mathbf{w} \in \mathcal{K}_2$, y pruebe, mayorando adecuadamente, que existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathcal{K}_1 \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{a(\mathbf{w}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{X_1}} \,\geq\, \alpha\, \|\mathbf{w}\|_{X_2} \quad \forall\, \mathbf{w} \in \mathcal{K}_2$.

c) Haga el supuesto análogo al de b) con r, $\mathcal{K}_2$ y $\mathcal{K}_1$ en vez de s, $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$, respectivamente, y demuestre que $\displaystyle\sup_{\mathbf{w} \in \mathcal{K}_2} a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) > 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{K}_1,\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

d) Asuma condiciones inf-sup convenientes para b_1 y b_2, y aplique la teoría de Babuška-Brezzi en espacios de Banach (caso general) para concluir que (1) tiene una única solución, la cual está acotada por $\|F\|$ and $\|G\|$.

GGP/ggp