

# Optimal Extraction of Information from Finite Quantum Ensembles

Brayan Sandoval

Ingeniería civil matemática  
Universidad de concepción

12 de diciembre de 2023

# Tabla de contenidos

## 1 Introducción

## 2 Estrategia de Solución

## 3 Formulación Matemática

- Formalismo
- Caso Particular

## 4 Solución del Problema

- Problema Débil
- Experimento

## 5 Conclusiones

# Introducción

- 1 Un supuesto básico de la mecánica cuántica es que si se da un conjunto **infinito** de partículas idénticamente preparadas el estado cuántico de las partículas puede determinarse con **exactitud**.
- 2 Por otro lado, en el caso de un conjunto **finito** de partículas idénticamente preparadas el estado cuántico de las partículas solo se puede determinar de forma **aproximada**.

Si bien el segundo punto no es muy alentador, es natural preguntarse:

- ¿Qué tan rápido converge la aproximación?
- ¿Cuál es la mejor aproximación que se puede tener?
- ¿Qué estrategias experimentales proporcionan la mejor aproximación?

En lo que sigue, se intentará responder estas preguntas para el **caso particular** de  $N$  partículas de spin 1/2.

## Estrategia de Solución

La solución al problema planteado se describe como un "juego cuántico", el cual se describe a continuación

- 1 En cada etapa un jugador recibe  $N$  partículas de spin 1/2, todas polarizadas en la misma dirección. El jugador conoce que los  $N$  spin son paralelos. También sabe que en cada etapa están polarizados en otra dirección, **aleatoria y uniformemente distribuidas**, y que el Hamiltoniano de las partículas es el mismo en cada recorrido.
  - 2 El jugador puede hacer las mediciones que desee y, por ultimo debe adivinar la dirección de polarización. La puntuación de la etapa es  $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  donde  $\alpha$  es el ángulo entre la dirección real y la supuesta. La puntuación final es el **promedio** de las puntuaciones obtenidas en cada ejecución, este valor será un

Evidentemente, el objetivo del juego es **Obtener la Puntuación máxima**. Lo cual es equivalente a encontrar la mejor aproximación. Naturalmente, de obtener lo anterior se responderán las otras preguntas planteadas.

## Formalismo

# Formulación Matemática

Primero se desarrolla un formalismo general, para luego desarrollar el caso particular. Siguiendo a Von Neumann [2], se puede considerar que cada medición tiene dos etapas:

- 1 Interacción entre el sistema medido y el sistema de medición.
- 2 "Lectura" del dispositivo de medición.

## Formalismo

Denotemos por  $\{|i\rangle\}$  una base ortonormal del espacio de Hilbert del sistema medido, y  $|\psi_0\rangle_{MD}$  el estado inicial del dispositivo de medición. **La primera etapa de medición** consiste en la interacción entre el sistema sistema medido y el dispositivo de medición,

$$|i\rangle |\psi_0\rangle \longrightarrow \sum_f |f\rangle |\psi_j\rangle_{MD}. \quad (1)$$

Si el sistema medido comenzó en un estado arbitrario  $|\phi\rangle$  la linealidad implica

$$|\phi\rangle |\psi_0\rangle_{MD} \longrightarrow \sum_{i,f} \langle i|\phi\rangle |f\rangle |\psi_f^i\rangle_{MD}. \quad (2)$$

## Formalismo

Para permitir mediciones más generales, no imponemos ninguna restricción al dispositivo de medición ni a la interacción con el sistema medido. La dimensión del espacio de Hilbert del dispositivo de medición es arbitraria y puede ser mucho mayor que la del sistema medido. Las funciones de onda  $|\psi_f^i\rangle_{MD}$  no están necesariamente normalizadas ni ortogonales entre sí. Las únicas restricciones que obedecen son

$$\sum_f \langle \psi_f^i | \psi_f^{i'} \rangle = \delta_{ii'}, \quad (3)$$

que se derivan de la unitariedad de la evolución temporal que describe la interacción con el sistema medido y la normalización de  $|\psi_0\rangle_{MD}$ .

## Formalismo

**La segunda etapa** del experimento consiste en leer el estado del dispositivo de medición. Para ello considerando un conjunto completo de proyectores ortogonales  $\{P_\xi\}$ . Los distintos resultados del experimento corresponden a encontrar el dispositivo de medición en los distintos espacios propios de los proyectores  $P_\xi$ . La probabilidad del resultado  $\xi$  si el estado inicial fuera  $|\phi\rangle$  es

$$\mathbb{P}(\phi, \xi) = \sum_{i,i',f} \langle \phi | i' \rangle \langle i | \phi \rangle_{\text{MD}} \langle \psi_f^{i'} | P_\xi | \psi_f^i \rangle_{\text{MD}}. \quad (4)$$

Para más generalidad, el número de posibles resultados  $\xi$  de la medición se deja arbitrario y puede ser mayor que la dimensión del espacio de Hilbert del sistema medido.

## Formalismo

Al comprobar que el dispositivo de medición se encuentra en el estado  $\xi$ , se obtiene cierta “información” sobre el estado del sistema. Esta información podría expresarse como una función  $S(\xi, \phi)$ . El promedio de  $S$  es

$$S = \sum_{\xi} \int \mathbb{P}(\phi, \xi) S(\xi, \phi) D\phi \quad (5)$$

donde las sumas abarcan los resultados  $\xi$  del experimento y los estados iniciales  $\phi$  del sistema a medir, con una medida  $D\phi$  correspondiente a su distribución.

## Formalismo

El problema que se plantea es maximizar (5) con respecto a las posibles mediciones y estrategias de adivinación respetando las relaciones unitarias (3).

Con el fin de simplificar el formalismo elegimos los proyectores  $P_\xi$  como operadores de proyección de rango uno sobre la base  $\{|e_\xi\rangle\}$  del espacio de Hilbert del dispositivo de medición.

## Caso Particular

El sistema a medir consiste en  $N$  spines paralelos polarizados en una dirección aleatoria, digamos  $(\theta, \varphi)$ , denotamos este estado

$$|N_{\theta,\varphi}\rangle = \underbrace{|\uparrow_{\theta,\varphi} \dots \uparrow_{\theta,\varphi}\rangle}_N \quad (6)$$

El espacio de Hilbert de los  $N$  espines puede descomponerse en una suma de subespacios que tienen diferentes espines totales  $S$  con  $S = N/2, N/2 - 1, \dots, -N/2$ .

## Caso Particular

Dado que el sistema consta de  $N$  espines paralelos, siempre pertenecerá al subespacio de mayor espín por lo que se debe especificar la medida de interacción para este subespacio, el cual tiene como base a  $\{|m\rangle\}_{m=-N/2}^{N/2}$ , que es la abreviatura para  $|S = N/2, S_z = m\rangle$ . La evolución unitaria de los espines más el dispositivo de medición viene dada por

$$|m\rangle |\psi_0\rangle_{\text{MD}} \longrightarrow |v^m\rangle = \sum_{f=1}^{2^N} |f\rangle |\psi_f^m\rangle_{\text{MD}}, \quad (7)$$

donde  $\{|f\rangle\}$  es una base completa del espacio de Hilbert de  $N$  partículas de spin 1/2.

## Caso Particular

La probabilidad de obtener el resultado  $\xi$  es

$$\mathbb{P}(N_{\theta,\varphi}; \xi) = \sum_{m,m'=-N/2}^{N/2} \sum_{f=1}^{2^N} \langle N_{\theta,\varphi} | m \rangle \langle \psi_f^m | e_\xi \rangle \langle e_\xi | \psi_f^{m'} \rangle \langle m' | N_{\theta,\varphi} \rangle \quad (8)$$

. Al encontrar el dispositivo de medición en el estado  $\xi$ , se adivina una dirección de polarización  $\theta_\xi, \varphi_\xi$  y se obtiene una puntuación  $S = S(\theta, \varphi; \theta_\xi, \varphi_\xi) = \cos^2(\frac{\alpha}{2})$ .

## Caso Particular

Con todo lo anterior se deduce la formulación matemática del problema, la cual consiste en

## Formulación

$$\begin{aligned} & \max_{\xi} \quad \sum_{\xi} \int \frac{\sin \theta \, d\theta d\varphi}{4\pi} \mathbb{P}(N_{\theta,\varphi}; \xi) S(\theta, \varphi; \theta_{\xi}, \varphi_{\xi}) \\ & \text{s.a.} \quad \langle v^m | v^{m'} \rangle = \sum_{\xi} \sum_f^{2^N} \langle \psi_f^m | e_{\xi} \rangle \langle e_{\xi} | \psi_f^{m'} \rangle = \delta_{mm'}, \quad (9) \\ & \forall m, m' \in \{-N/2, \dots, N/2\}. \end{aligned}$$

## Caso Particular

Las variables de este problema son:

- $|\psi_f^m\rangle$  que codifican las medidas de interacción.
- $|e_\xi\rangle$  que codifica el procedimiento de lectura.
- $\theta_\xi$  y  $\varphi_\xi$  que codifican la estrategia de adivinación.

Se puede observar que los estados finales del dispositivo de medición  $|\psi_f^m\rangle$  y los vectores base de lectura  $|e_\xi\rangle$  siempre aparecen juntos a través del producto escalar  $\langle\psi_f^m|e_\xi\rangle$ , por lo que no es necesario modificarlos de forma independiente, es decir, se pueden entender como una variable.

# Solución del Problema

El problema (9) puede ser complejo de resolver considerando la cantidad de restricciones que tiene. Por esta razón se intentará "debilitar" la restricción de tal forma que el nuevo problema sea mas sencillo de resolver y que su solución sea una cota superior para el problema original. Luego mediante algunos experimentos se probará que la solución del problema original alcanza el mismo máximo.

## Problema Débil

## Problema Débil

$$\begin{aligned} \max_{\xi} \quad & \sum_{\xi} \int \frac{\sin \theta \, d\theta d\varphi}{4\pi} \mathbb{P}(N_{\theta,\varphi}; \xi) S(\theta, \varphi; \theta_{\xi}, \varphi_{\xi}) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{m=-N/2}^{N/2} \langle v^m | v^m \rangle = \sum_{m=-N/2}^{N/2} 1 = N + 1, \end{aligned} \tag{10}$$

## Problema Débil

El problema (10) al tener una restricción se puede resolver usando multiplicadores de Lagrange, de aquí se obtiene el sistema

$$\frac{\partial}{\partial \langle \psi_f^m | e_\xi \rangle} S_N = \lambda \sum_{m'=-N/2}^{N/2} \frac{\partial}{\partial \langle \psi_f^m | e_\xi \rangle} \langle v^{m'} | v^{m'} \rangle, \quad \forall \langle \psi_f^m | e_\xi \rangle. \quad (11)$$

## Problema Débil

Notar que

$$\begin{aligned} \sum_{m'=-N/2}^{N/2} \frac{\partial}{\partial \langle \psi_f^m | e_\xi \rangle} \langle v^{m'} | v^{m'} \rangle &= \sum_{m', f', \xi'} \frac{\partial}{\partial \langle \psi_f^m | e_\xi \rangle} \left( \langle \psi_{f'}^{m'} | e_{\xi'} \rangle \langle e_{\xi'} | \psi_{f'}^{m'} \rangle \right) \\ &= \langle e_\xi | \psi_f^m \rangle \end{aligned}$$

y que

$$\frac{\partial}{\partial \langle \psi_f^m | e_\xi \rangle} S_N = \sum_{m'} \langle e_\xi | \psi_f^{m'} \rangle M_{mm'} (\theta_\xi, \varphi_\xi)$$

donde

$$M_{mm'} (\theta_\xi, \varphi_\xi) = \int \frac{\sin \theta}{4\pi} d\theta d\varphi \langle N_{\theta, \varphi} | m \rangle \langle m' | N_{\theta, \varphi} \rangle S (\theta, \varphi; \theta_\xi, \varphi_\xi).$$

## Problema Débil

El sistema (11) se puede reescribir

$$\sum_{m'} \langle e_\xi | \psi_f^{m'} \rangle (M_{mm'}(\theta_\xi, \varphi_\xi) - \lambda \delta_{mm'}) = 0 \quad \forall m, f, \xi. \quad (12)$$

Multiplicando la  $m$ -esima ecuación por  $\langle \psi_f^m | e_\xi \rangle$  se obtiene

$$\sum_{m'} \langle e_\xi | \psi_f^{m'} \rangle \langle \psi_f^m | e_\xi \rangle (M_{mm'}(\theta_\xi, \varphi_\xi) - \lambda \delta_{mm'}) = 0 \quad \forall m, f, \xi.$$

Sumando todas las ecuaciones se llega a

$$\underbrace{\sum_{m',m,\xi,f} \langle e_\xi | \psi_f^{m'} \rangle \langle \psi_f^m | e_\xi \rangle M_{mm'}(\theta_\xi, \varphi_\xi)}_{S_N} = \lambda \underbrace{\sum_{m=-N/2}^{N/2} \sum_{\xi} \sum_f \langle \psi_f^m | e_\xi \rangle \langle e_\xi | \psi_f^m \rangle}_{N+1}$$

## Problema Débil

Por tanto, el valor máximo de  $S_N$  es

$$S_{N_{\text{ext}}} = \lambda(N + 1).$$

Ademas, se puede notar que (12) tiene solución no trivial si y sólo si  $\lambda$  es un valor propio de  $M(\theta_\xi, \varphi_\xi)$ . La simetría inherente a este problema puede utilizarse para demostrar que la matriz  $M(\theta_\xi, \varphi_\xi)$  se transforma según la representación de  $SU(2)$ :

$$M(\theta_\xi, \varphi_\xi) = U(\theta_\xi, \varphi_\xi) M(\theta_\xi = 0) U^\dagger(\theta_\xi, \varphi_\xi),$$

donde  $U(\theta_\xi, \varphi_\xi)$  es un elemento de representación unitaria de dimensión  $N + 1$  de  $SU(2)$  que realiza rotaciones de los espines, enviando la dirección  $+z$  a la dirección  $\theta_\xi, \varphi_\xi$ . Por esta razón, los valores propios de  $M(\theta_\xi, \varphi_\xi)$  no dependen de  $\theta_\xi$  y  $\varphi_\xi$ .

## Problema Débil

Tomando  $\theta_\xi = 0$ , de un calculo directo se puede probar que  $M$  es diagonal y que su valor propio mayor es  $\lambda = \frac{1}{N+2}$ . Por tanto, para el problema débil la puntuación media máxima es

$$S_{N_{\text{ext}}} = \frac{N+1}{N+2}.$$

## Experimento

En el caso de una partícula de spin  $\frac{1}{2}$ , hay un experimento que alcanza la puntuación  $\frac{2}{3}$ , se realiza midiendo la proyección del spin a lo largo de un eje dado, por ejemplo el eje z, y según si el spin se encuentra polarizado a lo largo de la dirección  $+z$  o  $-z$  adivinar que esta es la dirección de polarización.

¿Debe una medición óptima en un conjunto de espines paralelos tratar necesariamente el conjunto como una entidad, es decir, como un único sistema compuesto? A continuación se mostrará que no existen experimentos óptimos que consistan en mediciones separadas en cada espín, aunque el resultado de una medición puede utilizarse para decidir qué medida se realizará en el otro espín.

Por simplicidad, considere el caso de 2 partículas de spin  $\frac{1}{2}$ . Al realizar una medida arbitraria al primer spin

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle_1 |\psi_0\rangle_{MD1} &\rightarrow |\uparrow\rangle_1 |\psi_{\uparrow}^+\rangle_{MD1} + |\downarrow\rangle_1 |\psi_{\downarrow}^+\rangle_{MD1} \\ |\downarrow\rangle_1 |\psi_0\rangle_{MD1} &\rightarrow |\uparrow\rangle_1 |\psi_{\uparrow}^-\rangle_{MD1} + |\downarrow\rangle_1 |\psi_{\downarrow}^-\rangle_{MD1} \end{aligned}$$

donde MD1 indica el primer dispositivo de medición.

Los resultados de esta medición se obtienen proyectando el estado de MD1 sobre la base de lectura  $\{|e_{\xi_1}\rangle\}$ . Según resultado  $\xi_1$ , se realizan diferentes mediciones en el segundo espín

$$|\uparrow\rangle_2 |\phi_0\rangle_{MD2} \rightarrow |\uparrow\rangle_2 |\phi_{\uparrow,\xi_1}^+\rangle_{MD2} + |\downarrow\rangle_2 |\phi_{\downarrow,\xi_1}^+\rangle_{MD2}$$

$$|\downarrow\rangle_2 |\phi_0\rangle_{MD2} \rightarrow |\uparrow\rangle_2 |\phi_{\uparrow,\xi_1}^-\rangle_{MD2} + |\downarrow\rangle_2 |\phi_{\downarrow,\xi_1}^-\rangle_{MD2}$$

donde MD2 indica el segundo dispositivo de medición. Los resultados de esta medición se obtienen proyectando el estado de MD2 sobre la base de lectura  $\{|g_{\xi_2,\xi_1}\rangle\}$ ; el índice aparece porque la forma en que se leen los resultados de la segunda también puede depender de los resultados de la primera medición.

Juntando todo se obtiene

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 |\psi_0\rangle_{MD1} |\phi_0\rangle_{MD2} \rightarrow & \sum_{\substack{f'=\uparrow,\downarrow \\ f=\uparrow,\downarrow}} \sum_{\xi_1,\xi_2} |f\rangle_1 |f'\rangle_2 \langle e_\xi | \psi_f^+ \rangle \\ & \times \langle g_{\xi_2,\xi_1} | \phi_{f',\xi_1}^+ \rangle |e_{\xi_1}\rangle |g_{\xi_2,\xi_1}\rangle \end{aligned} \quad (13)$$

y análogamente para los demás estados iniciales

$|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2, |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2, |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2$ . La ecuación (13) es un caso particular de (7) sustituyendo la base de medición  $\{|e_\xi\rangle\}$  por la base  $\{|e_{\xi_1}\rangle |g_{\xi_2,\xi_1}\rangle\}$ .

En efecto, las dos mediciones sucesivas aquí consideradas corresponden en el formalismo general a un único dispositivo de medición compuesto por las dos piezas MD1 y MD2, y la acción del observador humano que lee el resultado de MD1 y decide en consecuencia qué MD2 se correlaciona automáticamente con el estado final de MD1. se correlaciona con el estado final de MD1 y sintoniza su interacción con el segundo espín.

Las relaciones unitarias en (9) se sustituyen ahora por las relaciones unitarias obedecidas por cada dispositivo de medición por separado:

$$\sum_{f,\xi_1} a_{f,\xi_1}^+ \left( a_{f,\xi_1}^+ \right)^* = 1, \quad \sum_{f,\xi_1} a_{f,\xi_1}^- \left( a_{f,\xi_1}^- \right)^* = 1$$

$$\sum_{f,\xi_1} a_{f,\xi_1}^+ \left( a_{f,\xi_1}^- \right)^* = 0$$

$$\sum_{f',\xi_2} b_{f',\xi_2}^+ \left( b_{f',\xi_2}^+ \right)^* = 1, \quad \sum_{f',\xi_2} b_{f',\xi_2}^- \left( b_{f',\xi_2}^- \right)^* = 1$$

$$\sum_{f',\xi_2} b_{f',\xi_2}^+ \left( b_{f',\xi_2}^- \right)^* = 0$$

donde,  $f, f' = \uparrow, \downarrow$  y

$$a_{f,\xi_1}^+ = \langle e_{\xi_1} | \psi_f^+ \rangle, \quad b_{f',\xi_2,\xi_1}^+ = \langle g_{\xi_2,\xi_1} | \phi_{f',\xi_1}^+ \rangle$$

$$a_{f,\xi_1}^- = \langle e_{\xi_1} | \psi_f^- \rangle, \quad b_{f',\xi_2,\xi_1}^- = \langle g_{\xi_2,\xi_1} | \phi_{f',\xi_1}^- \rangle$$

Después de completar estas dos mediciones, se adivina una dirección de polarización  $\theta_{\xi_1,\xi_2}, \varphi_{\xi_1,\xi_2}$ , que depende por de ambos resultados.

Para que (13) describa un experimento óptimo debe satisfacer (11) con  $\lambda = 1/4$ . Explícitamente la Ec. (11) toma la forma

$$\begin{aligned} -2Sa^+b^+ + CE(a^+b^- + a^-b^+) &= 0, \\ 2CSE^*a^+b^+ - (a^+b^- + a^-b^+) + 2CSEa^-b^- &= 0, \quad (14) \\ SE^*(a^+b^- + a^-b^+) - 2Ca^-b^- &= 0, \end{aligned}$$

la cual se cumple para todo  $i, j, \xi_1, \xi_2$ . Donde,  $C = \cos(\theta_{\xi_1, \xi_2}/2)$ ,  $S = \sin(\theta_{\xi_1, \xi_2})$  y  $E = e^{i\varphi_{\xi_1, \xi_2}}$ . Además, resolviendo (14)

$$\frac{a_{f, \xi_1}^+}{a_{f, \xi_1}^-} = \frac{b_{f', \xi_2, \xi_1}^+}{b_{f', \xi_2, \xi_1}^-} = \frac{CE}{S} \quad (15)$$

Al insertar (15) en las relaciones unitarias se obtiene fácilmente una contradicción, demostrando así que experimentos como (13) no pueden ser experimentos óptimos.