Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

# Taller III: Tarea 1

Jeremías Vásquez Díaz

## 1.1 Masa-resorte con péndulo

Un esquema de la situación es mostrado en la figura 1

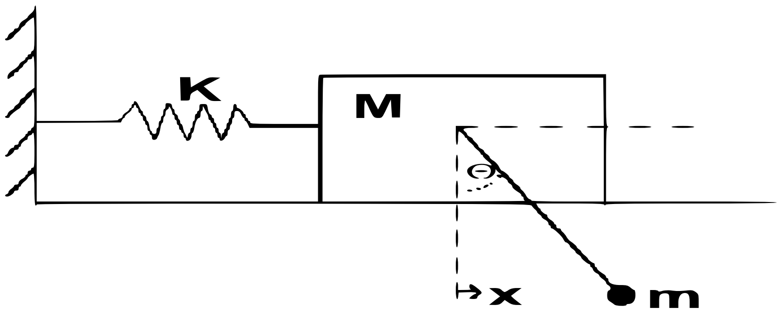


Figure 1: Masa-resorte con péndulo

La posicion del bloque de masa $M$ es $x$. La posicion de la masa puntual $m$ es

$$\begin{cases} x_p = x + L\sin(\theta) \\ y_p = L\cos(\theta) \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{dx_p}{dt} = \dot{x} + L\cos(\theta)\dot{\theta} \\ \frac{dy_p}{dt} = -L\sin(\theta)\dot{\theta} \end{cases}$$

con esto, tenemos que la energia cinetica del sistema es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2\right) \\ &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left((\dot{x} + L\cos(\theta)\dot{\theta})^2 + (-L\sin(\theta)\dot{\theta})^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + mL\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{x} + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

y la energia potencial del sistema es

$$V = -mgL\cos(\theta) + \frac{1}{2}kx^2$$

luego el lagrangiano esta dado por la diferencia de la energia cinetica y la energia potencial, es decir

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + mL\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{x} + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL\cos(\theta) - \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + mL\cos(\theta)(\dot{\theta}\dot{x} + g) + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

ahora, sabemos que las ecuaciones de euler lagrange para para $x$ esta dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

donde cada expresion estaria dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (M+m)\dot{x} + mL\cos(\theta)\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= (M+m)\ddot{x} + mL(\cos(\theta)\ddot{\theta} - \sin(\theta)\dot{\theta}^2) \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -kx \end{aligned}$$

entonces la ecuacion (1) quedaria de la siguiente manera

$$(M+m)\ddot{x} + mL(\cos(\theta)\ddot{\theta} - \sin(\theta)\dot{\theta}^2) + kx = 0$$

por otra parte, la ecuacion de euler lagrange para $\theta$ esta dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{2}$$

donde cada expresion estaria dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mL\cos(\theta)\dot{x} + mL^2\dot{\theta} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= mL\cos(\theta)\ddot{x} - mL\sin(\theta)\dot{x}\dot{\theta} + mL^2\ddot{\theta} \\
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mL\sin(\theta)(\dot{x}\dot{\theta} + g)
\end{aligned}$$

entonces la ecuacion (2) quedaria de la siguiente manera

$$L\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos(\theta) + g\sin(\theta) = 0$$

pero necesitamos que la ecuacion (1) no tenga el termino $\ddot{\theta}$, y a su vez que la ecuacion (2) note el termino $\ddot{x}$, por lo que comenzaremos despejando $\ddot{x}$ en la ecuacion (1) y a su vez $\ddot{\theta}$ de la ecuacion (2), donde obtendremos que

$$\ddot{x} = -\frac{mL(\cos(\theta)\ddot{\theta} - \sin(\theta)\dot{\theta}^2) + kx}{M+m} \tag{3}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{\ddot{x}\cos(\theta) + g\sin(\theta)}{L} \tag{4}$$

ahora, reemplazando (3) en (2), y (4) en (1), tendremos que las ecuaciones de euler lagrange para $x$ y $\theta$ se logran escribir como

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{mg\sin(\theta) + mL\sin(\theta)\dot{\theta}^2 - kx}{M + m\sin^2(\theta)} \\
\ddot{\theta} &= \frac{kx\cos(\theta) - mL\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}^2 - (M+m)g\sin(\theta)}{L(M + m\sin^2(\theta))}
\end{aligned}$$

entonces si queremos reducir estas ecuaciones a un sistema de edo's de primer orden, definimos las variables auxiliares $y_1 = x,\ y_2 = \dot{x},\ y_3 = \theta,\ y_4 = \dot{\theta}$, por lo que el sistemas que describe el problema de masa-resorte con pendulo esta dado por la siguiente expresion

$$\begin{cases}
y_1' = y_2 \\
y_2' = \frac{mg\sin(y_2) + mL\sin(y_3)y_4^2 - ky_1}{M + m\sin^2(y_3)} \\
y_3' = y_4 \\
y_4' = \frac{ky_1\cos(y_3) - mL\sin(y_3)\cos(y_3)_4^2 - (M+m)g\sin(y_3)}{L(M + m\sin^2(y_3))}
\end{cases}$$

## 1.2 Sistema masa-resorte-amortiguado de masa variable

La ecuación de la dinámica del sistema es

$$\left(1 + 5e^{-0.1t}\right)\ddot{x} + 0.05\dot{x}^3 + x = 2\sin(3t)$$

queremos reducir esta ecuacion a un sistema de edo's de primer orden, para esto, usaremos definiremos las variables auxiliares $y_1 = x,\ y_2 = \dot{x}$, por lo que el sistema que describe el problema de masa-resorte-amortiguamiento de masa variable esta dado por la siguiente expresion7

$$\begin{cases}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= \frac{2\sin(3t) - 0.05y_2^3 - y_1}{1 + 5e^{-0.1t}}
\end{cases}$$

### 1.3 Péndulo doble

Consideremos el péndulo doble que es mostrado en la figura 2.

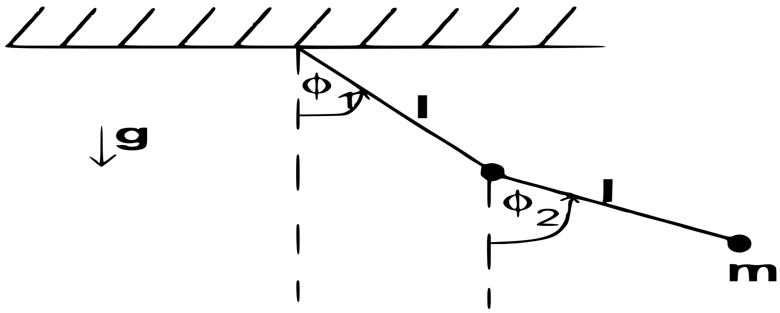


Figure 2: Péndulo doble

La posicion del pendulo $p_1$ y $p_2$ respectivamente son

$$\begin{aligned} p_1 &= (x_1, y_1) = (l\sin(\theta_1), l\cos(\theta_1)) \\ p_2 &= (x_2, y_2) = (l\sin(\theta_1) + l\sin(\theta_2), l\cos(\theta_1) + l\cos(\theta_2)) \end{aligned}$$

la energia cinetica del sistemas esta por

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}ml^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\cos(\theta_1 - \theta_2)\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) \end{aligned}$$

y la energia potencial del sistema viene dado por

$$\begin{aligned} V &= -mgl\cos(\theta_1) - mg(l\cos(\theta_1) + l\cos(\theta_2)) \\ &= -mgl\left(2\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)\right) \end{aligned}$$

dado que el lagrangiano es la diferencia entre la energia cinetica y la energia potencial, tenemos que

$$L = \frac{1}{2}ml^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) + mgl\left(2\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)\right)$$

ahora, sabemos que las ecuaciones de euler lagrange para para $\theta_1$ esta dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \tag{5}$$

donde cada expresion estaria dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= ml\left(2l\dot{\theta}_1 + l\cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2\right) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) &= 2ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 - ml^2\sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= ml\left(-l\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2g\sin(\theta_1)\right) \end{aligned}$$

entonces la ecuacion (5) quedaria de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &2ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 - ml^2\sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2 - ml\left(-l\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2g\sin(\theta_1)\right) = 0 \\ \iff\quad &2ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 + ml^2\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2 + 2mlg\sin(\theta_1) = 0 \end{aligned}$$

por otra parte, la ecuacion de euler lagrange para $\theta_2$ esta dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \tag{6}$$

donde cada expresion estaria dada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = ml^2\dot{\theta}_2 + ml^2\cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = ml^2\ddot{\theta}_2 + ml^2\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 - ml^2\sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_1$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = ml^2\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - mlg\sin(\theta_2)$$

entonces la ecuacion (6) quedaria de la siguiente manera

$$ml^2\ddot{\theta}_2 + ml^2\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 - ml^2\sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_1 - ml^2\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + mlg\sin(\theta_2) = 0$$
$$\iff \quad ml^2\ddot{\theta}_2 + ml^2\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 - ml^2\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2 - ml^2\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + mlg\sin(\theta_2) = 0$$

pero necesitamos que la ecuacion (5) no tenga el termino $\ddot{\theta}_2$, y a su vez que la ecuacion (6) note el termino $\ddot{\theta}_1$, por lo que comenzaremos despejando $\ddot{\theta}_1$ en la ecuacion (5) y a su vez $\ddot{\theta}_2$ de la ecuacion (6), donde obtendremos que

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{1}{2}\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2}\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2 - \frac{g}{l}\sin(\theta_1) \tag{7}$$
$$\ddot{\theta}_2 = -\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 + \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2 - \frac{g}{l}\sin(\theta_2) \tag{8}$$

ahora, reemplazando (7) en (6), y (8) en (5), tendremos que las ecuaciones de euler lagrange para $\theta_1$ y $\theta_2$ se logran escribir como

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)\left(\frac{g}{l}\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2\right) - \frac{2}{l}g\sin(\theta_1) - \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2}{1 + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}$$
$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)\left(\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \frac{2}{l}g\sin(\theta_1)\right) + 2\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2 - \frac{2}{l}g\sin(\theta_2)}{1 + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}$$

entonces si queremos reducir estas ecuaciones a un sistema de edo's de primer orden, definimos las variables auxiliares $y_1 = \theta_1,\ y_2 = \dot{\theta}_1,\ y_3 = \theta_2,\ y_4 = \dot{\theta}_2$, por lo que el sistemas que describe el problema de masa-resorte con pendulo esta dado por la siguiente expresion

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \frac{\cos(y_1 - y_3)\left(\frac{g}{l}\sin(y_3) - \sin(y_1 - y_3)y_2^2\right) - \frac{2}{l}g\sin(y_1) - \sin(y_1 - y_3)y_4^2}{1 + \sin^2(y_1 - y_3)} \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = \frac{\cos(y_1 - y_3)\left(\sin(y_1 - y_3)y_4^2 + \frac{2}{l}g\sin(y_1)\right) + 2\sin(y_1 - y_3)y_2^2 - \frac{2}{l}g\sin(y_3)}{1 + \sin^2(y_1 - y_3)} \end{cases}$$

### 1.4 Dos péndulos unidos por un resorte

Consideremos el sistema mostrado en la figura 3.

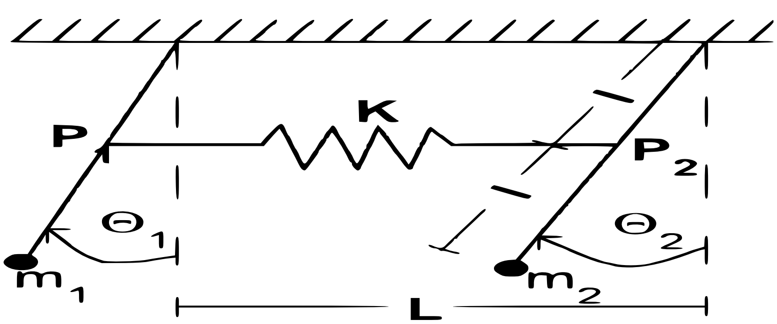


Figure 3: Péndulo doble

La posicion del pendulo $p_1$ y $p_2$ respectivamente son

$$p_1 = (x_1, y_1) = (-2l\sin(\theta_1), 2l\cos(\theta_1))$$
$$p_2 = (x_2, y_2) = (L - 2l\sin(\theta_2), 2l\cos(\theta_2))$$

la energia cinetica del sistemas esta por

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m_1 4l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 4l^2\dot{\theta}_2^2 \\ &= 2l^2\left(m_1\dot{\theta}_1^2 + m_2\dot{\theta}_2^2\right) \end{aligned}$$

y la energia potencial del sistema viene dado por

$$\begin{aligned} V &= -2m_1gl\cos(\theta_1) - 2m_2gl\cos(\theta_2) + \frac{k}{2}\left(l\sin(\theta_1) - l\sin(\theta_2)\right)^2 + \frac{k}{2}\left(l\cos(\theta_1) - l\cos(\theta_2)\right)^2 \\ &= -2m_1gl\cos(\theta_1) - 2m_2gl\cos(\theta_2) + kl^2\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + kl^2\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \end{aligned}$$

dado que el lagrangiano es la diferencia entre la energia cinetica y la energia potencial, tenemos que

$$L = 2l^2\left(m_1\dot{\theta}_1^2 + m_2\dot{\theta}_2^2\right) + 2m_1gl\cos(\theta_1) + 2m_2gl\cos(\theta_2) - kl^2\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) - kl^2\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)$$

ahora, sabemos que las ecuaciones de euler lagrange para para $\theta_1$ esta dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_1} = 0 \tag{9}$$

donde cada expresion estaria dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1} &= 4l^2m_1\dot{\theta}_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right) &= 4l^2m_1\ddot{\theta}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial\theta_1} &= -2m_1gl\sin(\theta_1) - kl^2\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + kl^2\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ &= -2m_1gl\sin(\theta_1) + kl^2\sin(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

entonces la ecuacion (9) quedaria de la siguiente manera

$$4l^2m_1\ddot{\theta}_1 + 2m_1gl\sin(\theta_1) - kl^2\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

por otra parte, la ecuacion de euler lagrange para $\theta_2$ esta dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = 0 \tag{10}$$

donde cada expresion estaria dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2} &= 4l^2m_2\dot{\theta}_2 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right) &= 4l^2m_2\ddot{\theta}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial\theta_2} &= -2m_2gl\sin(\theta_2) - kl^2\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + kl^2\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ &= -2m_2gl\sin(\theta_2) + kl^2\sin(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned}$$

entonces la ecuacion (10) quedaria de la siguiente manera

$$4l^2m_2\ddot{\theta}_2 + 2m_2gl\sin(\theta_2) + kl^2\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

asi, las ecuaciones de euler lagrange ya encontradas se pueden expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= \frac{k}{4m_1}\sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{g}{2l}\sin(\theta_1) \\ \ddot{\theta}_2 &= -\frac{k}{4m_2}\sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{g}{2l}\sin(\theta_2) \end{aligned}$$

entonces si queremos reducir estas ecuaciones a un sistema de edo's de primer orden, definimos las variables auxiliares $y_1 = \theta_1,\ y_2 = \dot{\theta}_1,\ y_3 = \theta_2,\ y_4 = \dot{\theta}_2$, por lo que el sistemas que describe el problema de masa-resorte con pendulo esta dado por la siguiente expresion

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \frac{k}{4m_1}\sin(y_1 - y_3) - \frac{g}{2l}\sin(y_1) \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = -\frac{k}{4m_2}\sin(y_1 - y_3) - \frac{g}{2l}\sin(y_3) \end{cases}$$

la implementacion computacional de los problemas se encuentran en archivos .m dentro de la misma carpeta de donde se esta leyendo este trabajo, a modo de ejemplo, la implementacion computacional del Problema 1.1 se le denomino "problema1.m" y al Problema 1.2 "problema2.m", y asi para el resto de los problemas.