

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|[v]\|_{k+1,k,K} &= \text{dist}(v, \mathbb{P}_k(K)) \leq \|v + q_v\|_{k+1,K}, \\ &\leq \frac{1}{C_1} \left\{ |v + q_v|_{k+1,K}^2 + \sum_{j=1}^N |\cancel{F_j(v + q_v)}|^2 \right\}^{1/2}, \\ &= \frac{1}{C_1} |v|_{k+1,K} = C |[v]|_{k+1,k,K}. \end{aligned}$$

□

Observación: En el caso en que, en vez de $H^{k+1}(K)/\mathbb{P}_k(K)$, se tiene el espacio cociente $W^{k+1,p}(K)/\mathbb{P}_k(K)$, ($p > 1$), el Lema de Deny-Lions se demuestra considerando primero una base de $\mathbb{P}_k(K)$ y luego extendiéndola a todo $W^{k+1,p}(K)$ a través del Teorema de Hahn-Banach.

Lema 4.2 (Lema de Bramble-Hilbert). Sea m y k enteros no negativos tales que $0 \leq m \leq k+1$, y sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^{k+1}(K), H^m(K))$ tal que:

$$\Pi(p) = p, \quad \forall p \in \mathbb{P}_k(K).$$

Entonces, existe $C := C(\Pi, K) > 0$, tal que:

$$\|v - \Pi(v)\|_{m,K} \leq C |v|_{k+1,K}, \quad \forall v \in H^{k+1}(K).$$

Demostración. Dado $v \in H^{k+1}(K)$ y $p \in \mathbb{P}_k(K)$, se tiene que:

$$v - \Pi(v) = (v + p) - \Pi(v + p) = (I - \Pi)(v + p),$$

de donde

$$\|v - \Pi(v)\|_{m,K} = \|(I - \Pi)(v + p)\|_{m,K} \leq \|I - \Pi\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(K), H^m(K))} \|v + p\|_{k+1,K},$$

(aquí $I \in \mathcal{L}(H^{k+1}(K), H^m(K))$, ya que $H^{k+1}(K) \subseteq H^m(K)$), para todo $p \in \mathbb{P}_k(K)$, de donde tomando ínfimo y aplicando Deny-Lions, resulta

$$\begin{aligned} \|v - \Pi(v)\|_{m,K} &\leq \|I - \Pi\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(K), H^m(K))} \|[v]\|_{k+1,k,K}, \\ &\leq C_{DL} \|I - \Pi\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(K), H^m(K))} |v|_{k+1,K}, \end{aligned}$$

con lo que basta tomar $C := C_{DL} \|I - \Pi\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(K), H^m(K))} > 0$.

□

4.1. Un pequeño recuerdo de cálculo diferencial

Sean X y Y espacios vectoriales normados y sea $v : A \subseteq X \rightarrow Y$. Si v es k veces diferenciable en $x_0 \in A$, entonces denotamos por $D^k v(x_0)$ (o $Dv(x_0)$ si $k = 1$) su k -ésima diferencial de Fréchet. Al respecto, se tiene que:

$$Dv(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y),$$

y

$$D^k v(x_0) \in \mathcal{L}(X^k, Y),$$

Además, $D^k v(x_0)$ es simétrica y

$$\|D^k v(x_0)\| := \sup_{\substack{\xi_i \in X, \|\xi_i\| \leq 1 \\ i \in \{1, \dots, k\}}} \|D^k v(x_0)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)\|_Y.$$

En particular, si $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$ y $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^n , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_0) &= Dv(x_0)(e_i), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) &= D^2 v(x_0)(e_i, e_j), \\ \frac{\partial^3 v}{\partial x_i \partial x_j^2}(x_0) &= D^3 v(x_0)(e_i, e_j, e_j), \\ &= D^3 v(x_0)(e_j, e_i, e_j), \\ &= D^3 v(x_0)(e_j, e_j, e_i), \end{aligned}$$

donde las últimas tres igualdades corresponden a la simetría (multilineal). Además, si $h_1 = h_2 = \dots = h_k = h \in \mathbb{R}^n$, se escribe

$$D^k v(x_0)(h_1, h_2, \dots, h_k) \equiv D^k v(x_0)h^k.$$

Así, dado $v \in \mathbb{C}^{k+1}(\mathbb{R}^n)$, la fórmula de Taylor de orden k , es

$$v(x_0 + h) = v(x_0) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} D^j v(x_0)h^j + \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} v(x_0 + \theta h)h^{k+1},$$

para algún $\theta \in]0, 1[$.

Volviendo al caso general

$$Dv(x_0)(h) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \varepsilon h) - v(x_0)}{\varepsilon} \in Y,$$

para todo $x_0 \in A \subseteq X$, $Dv(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$. Así,

$$D^2 v(x_0)(h, k) := D(Dv(x_0)(h))(k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Dv(x_0)(h + \varepsilon k) - Dv(x_0)(h)}{\varepsilon}.$$

Lemma 4.3. Sean K y \widehat{K} compactos conexos de \mathbb{R}^n con frontera de clase $C^{0,1}$, y sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación afín invertible dada por $F(\widehat{x}) = B\widehat{x} + b$, $\forall \widehat{x} \in \mathbb{R}^n$, con $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$, tal que $K = F(\widehat{K})$.

A su vez, sea $m \geq 0$ un entero y sea $v \in H^m(K)$. Entonces, existe $\widehat{v} := "v \circ F" \in H^m(\widehat{K})$, y existe $C := C(m, n) > 0$ tal que:

$$|\widehat{v}|_{m, \widehat{K}} \leq C\|B\|^m |\det(B)|^{-1/2} |v|_{m, K}.$$

Recíprocamente, dado $\widehat{v} \in H^m(\widehat{K})$, existe $v := "\widehat{v} \circ F^{-1}" \in H^m(K)$, y existe $C := C(m, n) > 0$ tal que:

$$|v|_{m, K} \leq C\|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{1/2} |\widehat{v}|_{m, \widehat{K}}.$$

Demuestra. Se usa que $C^m(\overline{\Omega})$ es denso en $H^m(\Omega)$, entonces dado $v \in C^m(\overline{K})$ y un multi-índice α tal que $|\alpha| = m$, se tiene que $\widehat{v} = v \circ F \in C^m(\widehat{K})$ y $\partial^\alpha \widehat{v}(\widehat{x}) = D^m \widehat{v}(\widehat{x})(e_{\beta_1}, e_{\beta_2}, \dots, e_{\beta_m})$, $\forall \widehat{x} \in \widehat{K}$, donde $\{e_{\beta_1}, e_{\beta_2}, \dots, e_{\beta_m}\} \subseteq \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Se sigue que:

$$|\partial^\alpha \widehat{v}(\widehat{x})| \leq \sup_{\substack{\xi_i \in \mathbb{R}, \|\xi_i\| \leq 1 \\ i \in \{1, \dots, m\}}} \|D^m \widehat{v}(\widehat{x})(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)\| = \|D^m \widehat{v}(\widehat{x})\|,$$

y luego,

$$\begin{aligned} |\widehat{v}|_{m,\widehat{K}}^2 &= \sum_{|\alpha|=m} \int_{\widehat{K}} |\partial^\alpha \widehat{v}(\widehat{x})|^2 d\widehat{x} \leq \sum_{|\alpha|=m} \int_{\widehat{K}} \|D^m \widehat{v}(\widehat{x})\|^2 d\widehat{x}, \\ &= C_1(m, n) \int_{\widehat{K}} \|D^m \widehat{v}(\widehat{x})\|^2 d\widehat{x}, \end{aligned}$$

con $C_1(m, n) := \text{card } \{\alpha : |\alpha| = m\}$. En resumen:

$$|\widehat{v}|_{m,\widehat{K}}^2 \leq C_1(m, n) \int_{\widehat{K}} \|D^m \widehat{v}(\widehat{x})\|^2 d\widehat{x}.$$

Por otro lado, utilizando la regla de la cadena y el hecho que $DF(\widehat{x}) = B$, $\forall \widehat{x} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que:

$$D^m \widehat{v}(\widehat{x})(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = D^m(v \circ F)(\widehat{x})(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = D^m v(F(\widehat{x}))(B\xi_1, B\xi_2, \dots, B\xi_m),$$

o bien, denotando $x = F(\widehat{x})$, nos queda:

$$D^m \widehat{v}(\widehat{x})(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \|B\|^m D^m v(x) \left(\frac{B\xi_1}{\|B\|}, \frac{B\xi_2}{\|B\|}, \dots, \frac{B\xi_m}{\|B\|} \right).$$

Notando que: $\left\| \frac{B\xi_i}{\|B\|} \right\| \leq \|\xi_i\| \leq 1$, $\forall i$, resulta:

$$\|D^m \widehat{v}(\widehat{x})\| \leq \|B\|^m \sup_{\substack{\lambda_i \in \mathbb{R}, \|\lambda_i\| \leq 1 \\ i \in \{1, \dots, m\}}} \|D^m v(x)(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)\| = \|B\|^m \|D^m v(x)\|.$$

Así, utilizando la fórmula:

$$\int_{\widehat{K}} f(F(\widehat{x})) d\widehat{x} = \int_K |\det(B)|^{-1} f(x) dx,$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} |\widehat{v}|_{m,\widehat{K}}^2 &\leq C_1(m, n) \int_{\widehat{K}} \|D^m \widehat{v}(\widehat{x})\|^2 d\widehat{x}, \\ &\leq C_1(m, n) \|B\|^{2m} \int_{\widehat{K}} \|D^m v(F(\widehat{x}))\|^2 d\widehat{x}, \\ &= C_1(m, n) \|B\|^{2m} \int_K |\det(B)|^{-1} \|D^m v(x)\|^2 dx, \end{aligned}$$

esto es:

$$|\widehat{v}|_{m,\widehat{K}}^2 \leq C_1(m, n) \|B\|^{2m} |\det(B)|^{-1} \int_K \|D^m v(x)\|^2 dx.$$

A su vez, usando que:

$$\|D^m v(x)\|^2 \leq C_2(n) \max_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)|^2 \leq C_2(n) \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)|^2.$$

se concluye que:

$$|\widehat{v}|_{m,\widehat{K}}^2 \leq C_1(m, n) C_2(n) \|B\|^{2m} |\det(B)|^{-1} |v|_{m,K}^2,$$

esto es:

$$|\widehat{v}|_{m,\widehat{K}} \leq C(m, n) \|B\|^m |\det(B)|^{-1/2} |v|_{m,K}, \quad \forall v \in \mathcal{C}^m(\overline{K}),$$

con $\widehat{v} := v \circ F$.

Análogamente, intercambiando los roles de K y \widehat{K} , se llega a:

$$|v|_{m,K} \leq C(m,n) \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{1/2} |\widehat{v}|_{m,\widehat{K}}, \quad \forall \widehat{v} \in \mathcal{C}^m(\overline{\widehat{K}}),$$

con $v := \widehat{v} \circ F^{-1}$.

Similarmente, para $p \leq m$, se tiene que:

$$|v|_{p,K} \leq C(p,n) \|B^{-1}\|^p |\det(B)|^{1/2} |\widehat{v}|_{p,\widehat{K}}, \quad \forall \widehat{v} \in \mathcal{C}^p(\overline{\widehat{K}}),$$

y

$$|\widehat{v}|_{p,\widehat{K}} \leq C(p,n) \|B\|^p |\det(B)|^{-1/2} |v|_{p,K}, \quad \forall v \in \mathcal{C}^p(\overline{K}).$$

Se sigue que existen constantes $C_i(m,n,B)$, $i \in \{1, 2\}$, tal que:

$$C_1 \|\widehat{v}\|_{m,\widehat{K}} \leq \|v\|_{m,K} \leq C_2 \|\widehat{v}\|_{m,\widehat{K}}, \quad \forall v \in \mathbb{C}^m(\overline{K}),$$

con $\widehat{v} = v \circ F$. (Esto, pues $\|\cdot\|_{m,K}$ es la suma de seminormas $|\cdot|_{p,K}$, $p \leq m$).

Ahora, dado $v \in H^m(K)$, existe $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^m(\overline{K})$, tal que $\|v - \varphi_j\|_{m,K} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$. Se tiene así que:

$$C_1 \|\widehat{\varphi}_j - \widehat{\varphi}_\ell\|_{m,\widehat{K}} \leq \|\varphi_j - \varphi_\ell\|_{m,K},$$

lo cual indica que $\{\widehat{\varphi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $H^m(\widehat{K})$, por lo tanto, existe un elemento en $H^m(\widehat{K})$ que denotamos $\widehat{v} := "v \circ F"$, tal que

$$\|\widehat{v} - \widehat{\varphi}_j\|_{m,\widehat{K}} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0.$$

Es fácil ver que este límite $\widehat{v} \in H^m(\widehat{K})$ es independiente de la sucesión $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ elegida, lo cual induce la definición del operador

$$\begin{aligned} H^m(K) &\longrightarrow H^m(\widehat{K}) \\ v &\longmapsto \widehat{v}. \end{aligned}$$

A su vez, tomando el límite a

$$|\widehat{\varphi}_j|_{m,\widehat{K}} \leq C(m,n) \|B\|^m |\det(B)|^{-1/2} |\varphi_j|_{m,K}, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

se obtiene:

$$|\widehat{v}|_{m,\widehat{K}} \leq C(m,n) \|B\|^m |\det(B)|^{-1/2} |v|_{m,K}, \quad \forall v \in H^m(K).$$

La otra desigualdad es análoga. □

Lemma 4.4. Sean K y \widehat{K} compactos conexos de \mathbb{R}^n con frontera de clase $C^{0,1}$, y sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación afín $F(\widehat{x}) := B\widehat{x} + b$, $\forall \widehat{x} \in \mathbb{R}^n$, con $B \in \mathbb{R}^n$ invertible y $b \in \mathbb{R}^n$, tal que: $K = F(\widehat{K})$. A su vez, sean

$$\begin{aligned} h_K &:= \text{diámetro de } K = \max_{x,y \in K} \|x - y\|, \\ \rho_K &:= \text{diámetro de la bola más grande contenida en } K, \\ \widehat{h} &:= \text{idem para } \widehat{K}, \\ \widehat{\rho} &:= \text{idem para } \widehat{K}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$|\det(B)| = \frac{|K|}{|\widehat{K}|}, \quad \|B\| \leq \frac{h_K}{\widehat{\rho}} \quad \text{y} \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\widehat{h}}{\rho_K}.$$