

TAREA 2 DE 525501 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES Y APLICACIONES I

2023-II
Docente: Dr. Leonardo Figueroa C.

Esta tarea consta de **3** preguntas de igual ponderación.

Pregunta A. Utilizando el método de características, resuelva el problema de valores de contorno

$$x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = 2u, \quad u(x_1, 1) = g(x_1).$$

Pregunta B. Para $i \in \{1, 2\}$, sea u^i la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_t^i + H(Du^i) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u^i = g^i & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

que da la fórmula de Hopf-Lax. Pruebe la desigualdad de contracción

$$(\forall t > 0) \quad \sup_{\mathbb{R}^n} |u^1(\cdot, t) - u^2(\cdot, t)| \leq \sup_{\mathbb{R}^n} |g^1 - g^2|.$$

Pregunta C. Calcule explícitamente la única solución de entropía de

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g & \text{en } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1, \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ 2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Ilustre su respuesta con un gráfico como el de la página 143 del libro de Evans; asegúrese que quede ilustrado qué sucede para tiempos t grandes.