Universidad de Concepción
Doctorado en Ciencias Aplicadas con Mención en Ingeniería Matemática
Centro de Investigaciones en Ingeniería Matemática
Curso: Tópicos de Elementos Finitos I
Prof: Gabriel Gatica
Estudiante: Isaac Bermúdez Montiel
II Ciclo 2022
Solución de Tarea #3

[Ejercicio 2.28]

Sean H e Q espacios de Banach reales y sean $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H, H')$ y $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$, de modo que $\mathcal{B}' \in \mathcal{L}(Q', H')$. A su vez sea K el espacio nulo de $\mathcal{B}$, defina el operador $\Pi\mathcal{A} : K \longrightarrow K'$ por

$$\Pi\mathcal{A}(\tau)(\zeta) = \mathcal{A}(\tau)(\zeta) \; \forall \tau, \zeta \in K. \tag{0.1}$$

Y suponga que $\Pi\mathcal{A} : K \longrightarrow K'$ es una biyección lineal, y que $\mathcal{B}$ es sobreyectivo. Pruebe que para cada par $(F, y) \in H' \times Q$ existe un único $(\sigma, U) \in H \times Y'$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\sigma) + \mathcal{B}^{'}(U) &= F \\ \mathcal{B}(\sigma) &= y. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Proof. Sea $(F, y) \in H' \times Q$. Por la sobreyectividad de $\mathcal{B}$, existe $\tilde{\sigma} \in H$ tal que $\mathcal{B}(\tilde{\sigma}) = y$, y por un Lema [llamado lema B] de clases, existe $\beta > 0$

$$\beta \|\tilde{\sigma}\|_H \leq \|y\|_Q \tag{0.3}$$

Por otro lado, $\mathcal{A}(\tilde{\sigma}) - F \in H'$, pues $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H, H')$ y $F \in H'$. Esto implica, $(F - \mathcal{A}(\tilde{\sigma}))\,|_K \in K'$.

Puesto que $\Pi\mathcal{A} : K \longrightarrow K'$ es biyección, existe un único $\sigma_0 \in K$ tal que

$$(\Pi\mathcal{A})(\sigma_0) = \Pi\,(F - \mathcal{A}(\tilde{\sigma}))\,|_K$$

es decir,

$$(\Pi\mathcal{A})(\sigma_0)(\tau) = (F - \mathcal{A}(\tilde{\sigma}))(\tau) \; \forall \tau \in K$$

Esto es, por (0.1)

$$\mathcal{A}(\sigma_0)(\tau) = (F - \mathcal{A}(\tilde{\sigma}))(\tau) \; \forall \tau \in K$$

implicando que

$$F - \mathcal{A}(\tilde{\sigma} + \sigma_0) \in K^\circ$$

Además, (Por T.I.A), y (0.3),

$$\begin{aligned} \|\sigma_0\|_H \leq & \|(\Pi\mathcal{A})^{-1}\| \|F - \mathcal{A}(\tilde{\sigma})\|_{K'} \\ \leq & \|(\Pi\mathcal{A})^{-1}\| \left\{ \|F\|_{H'} + \frac{\|\mathcal{A}\|}{\beta} \|y\|_Q \right\} \\ \leq & \frac{1}{\alpha} \left\{ \|F\|_{H'} + \frac{\|\mathcal{A}\|}{\beta} \|y\|_Q \right\} \end{aligned} \tag{0.4}$$

Gracias a que $R(\mathcal{B})$ es inyectivo y de rango cerrado, $R(\mathcal{B}')$ también lo es, y en tal caso

$$R(\mathcal{B}^{'}) = N(\mathcal{B})^\circ = K^\circ$$

entonces tomando $\sigma = \tilde{\sigma} + \sigma_0$, se tiene que

$$F - \mathcal{A}(\sigma) \in R(\mathcal{B}') \tag{0.5}$$

por lo cual, existe un $U \in Q'$ tal que

$$\mathcal{B}'(U) = F - \mathcal{A}(\sigma)$$

Esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\sigma) + \mathcal{B}^{'}(U) &= F \\ \mathcal{B}(\sigma) &= y. \end{aligned} \tag{0.6}$$

A su vez, por el lema B de clases, se tiene que

$$\|\mathcal{B}'(G)\| \geq \beta \|G\|_{Q'} \ \ \forall G \in Q' \tag{0.7}$$

En particular, para $G = U$,

$$\|F - \mathcal{A}(\sigma)\|_{H'} = \|\mathcal{B}'(U)\|_{H'} \geq \beta \|U\|_{Q'}$$

De donde,

$$\|U\|_{Q'} \leq \frac{1}{\beta} \left\{ \|F\|_{H'} + \|\mathcal{A}\| \|\sigma\|_H \right\} \tag{0.8}$$

Por lo cual, de (0.8), (0.4) y (0.3), se obtienen las siguientes estimaciones,

$$\|\sigma\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H'} + \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\|\mathcal{A}\|}{\alpha} \right) \|y\|_Q \tag{0.9}$$

$$\|U\|_Q \leq \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\|\mathcal{A}\|}{\alpha} \right) \|F\|_{H'} + \frac{\|\mathcal{A}\|}{\beta^2} \left(1 + \frac{\|\mathcal{A}\|}{\alpha} \right) \|y\|_Q \tag{0.10}$$

Para la unicidad, se considera el problema homogéneo. Sea $(\hat{\sigma}, \hat{U}) \in H \times Q'$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\hat{\sigma}) + \mathcal{B}'(\hat{U}) &= 0 \\ \mathcal{B}(\hat{\sigma}) &= 0. \end{aligned} \tag{0.11}$$

La segunda ecuación implica que $\hat{\sigma} \in N(\mathcal{B}) = K$. Evaluando la primera ecuación en $\tau \in K$, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{A}(\hat{\sigma})(\tau) + \mathcal{B}'(\hat{U})(\tau) &= \mathcal{A}(\hat{\sigma})(\tau) + \hat{U}(\mathcal{B}(\tau)) \\ &= \mathcal{A}(\hat{\sigma})(\tau) \ \ \forall \tau \in K \\ &= \Pi \mathcal{A}(\hat{\sigma})(\tau) \ \ \forall \tau \in K \end{aligned}$$

esto implica que $\Pi \mathcal{A}(\hat{\sigma}) = \Theta \in K'$ y puesto que $\Pi \mathcal{A} : K \longrightarrow K'$ es biyección, se concluye que $\hat{\sigma} = 0$. Entonces, de la primera ecuación resulta,

$$\mathcal{B}'(\hat{U}) = \Theta \in H',$$

lo cual dice, que $0 = \|\mathcal{B}'(\hat{U})\|_{H'} \geq \beta \|\hat{U}\|_{Q'}$, esto es, $\hat{U} = 0 \in Q'$. Lo cual demuestra la unicidad del problema. $\square$

2.22 Sean H y Q espacios de Hilbert con normas dadas por $\|\cdot\|_H$ y $\|\cdot\|_Q$, respectivamente, y sean $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas. Entonces, dados $F \in H'$ y $G \in Q'$, considere el problema: Hallar $(\sigma, u) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) \,+\, b(\tau,u) &= F(\tau) \qquad \forall\, \tau \in H\,, \\ b(\sigma,v) &= G(v) \qquad \forall\, v \in Q\,. \end{aligned} \tag{49}$$

A su vez, sean H_h y Q_h subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, y sea $a_h : H_h \times H_h \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada. Entonces, dados $F_h \in H_h'$ y $G_h \in Q_h'$, considere el problema de Galerkin: Hallar $(\sigma_h, u_h) \in H_h \times Q_h$ tal que

$$\begin{aligned} a_h(\sigma_h,\tau_h) \,+\, b(\tau_h,u_h) &= F_h(\tau_h) \qquad \forall\, \tau_h \in H_h\,, \\ b(\sigma_h,v_h) &= G_h(v_h) \qquad \forall\, v_h \in Q_h\,. \end{aligned} \tag{50}$$

Suponga que (49) y (50) satisfacen las hipótesis de los Teoremas de Babuška-Brezzi continuo y discreto con constantes inf-sup correspondientes dadas por α, β, α_h y β_h, y denote por V_h y V_h^g el kernel discreto de b y su trasladado según la segunda ecuación de (50), respectivamente.

i) Aplique desigualdad triangular, la condición inf-sup para a_h, y las ecuaciones que definen (49) y (50), para demostrar que

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h\|_H \,&\le\, C_{1,h}\,\|F - F_h\|_{V_h'} \,+\, C_{2,h}\,\mathrm{dist}(u, Q_h) \\ &+ \inf_{\tau_h^g \in V_h^g} \left\{ C_{3,h}\,\|\sigma - \tau_h^g\|_H \,+\, C_{4,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\tau_h^g,\tau_h) - a_h(\tau_h^g,\tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \right\}, \end{aligned} \tag{51}$$

donde

$$C_{1,h} := \frac{1}{\alpha_h}\,, \quad C_{2,h} := \frac{\|b\|}{\alpha_h}\,, \quad C_{3,h} := 1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}\,, \quad \text{y} \quad C_{4,h} := \frac{1}{\alpha_h}\,.$$

ii) Proceda análogamente a lo hecho en clases para probar, a partir de (51), que

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h\|_H \,&\le\, \widetilde{C}_{1,h}\,\|F - F_h\|_{V_h'} \,+\, \widetilde{C}_{2,h}\,\|G - G_h\|_{Q_h'} \,+\, \widetilde{C}_{3,h}\,\mathrm{dist}(u, Q_h) \\ &+ \inf_{\zeta_h \in H_h} \left\{ \widetilde{C}_{4,h}\,\|\sigma - \zeta_h\|_H \,+\, \widetilde{C}_{5,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\zeta_h,\tau_h) - a_h(\zeta_h,\tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \right\}, \end{aligned} \tag{52}$$

donde

$$\widetilde{C}_{1,h} := \frac{1}{\alpha_h}\,, \quad \widetilde{C}_{2,h} := \frac{1}{\beta_h}\left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}\right) + \frac{(\|a\| + \|a_h\|)}{\alpha_h \beta_h}\,, \quad \widetilde{C}_{3,h} := \frac{\|b\|}{\alpha_h}\,,$$

$$\widetilde{C}_{4,h} := \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}\right)\left(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) + \frac{(\|a\| + \|a_h\|)\|b\|}{\alpha_h \beta_h}\,, \quad \text{y} \quad \widetilde{C}_{5,h} := \frac{1}{\alpha_h}\,.$$

iii) Suponga que a_h se puede extender a $H \times H$, y deduzca en tal caso una simplificación de (52) a partir de un manejo algebraico conveniente del supremo.

Proof. i) Denote por

$$V_h^g := \{\tau_h \in H_h : b(\tau_h, v_h) = G_h(v_h) \ \ \forall v_h \in Q_h\} \tag{0.12}$$
$$V_h := \{\tau_h \in H_h : b(\tau_h, v_h) = 0 \ \ \forall \ v_h \in Q_h\} \tag{0.13}$$

Notar de acuerdo a la segunda ecuación de (50) que $\sigma_h \in V_h^g$ y que $\forall \ \tau_h^g \in V_h^g$ se tiene que $b(\sigma_h - \tau_h^g, v_h) = 0$ y por lo tanto $\sigma_h - \tau_h^g \in V_h$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|\sigma_h - \tau_h^g\|_H &\leq \frac{1}{\alpha_h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a_h(\sigma_h - \tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \ \text{(Por la Cond. Inf-Sup para } a_h\text{)} \\
&= \frac{1}{\alpha_h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a_h(\sigma_h, \tau_h) - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \ \text{(Por la Cond. Inf-Sup para } a_h\text{)} \\
&= \frac{1}{\alpha_h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{F_h(\tau_h) - \overbrace{b(\tau_h, u_h)}^{=0} - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \ \text{(Por la 1era Ec. de 50)} \\
&= \frac{1}{\alpha_h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{F_h(\tau_h) - \overbrace{b(\tau_h, v_h)}^{=0} - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \ \text{(Por que } \tau_h \in V_h\text{)} \\
&= \frac{1}{\alpha_h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{F_h(\tau_h) - b(\tau_h, v_h - u) - b(\tau_h, u) - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \\
&= \frac{1}{\alpha_h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{F_h(\tau_h) - F(\tau_h) + a(\sigma, \tau_h) - b(\tau_h, v_h - u) - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \ \text{(Por la 1era Ec. de 49)} \\
&= \frac{1}{\alpha_h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{F_h(\tau_h) - F(\tau_h) + a(\sigma, \tau_h) - b(\tau_h, v_h - u) - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \ \text{(Por la 1era Ec. de (49))} \\
&= \frac{1}{\alpha_h}\|F - F_h\|_{V_h'} + \frac{1}{\alpha_h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\sigma - \tau_h^g, \tau_h) + a(\tau_h^g, \tau_h) - b(\tau_h, v_h - u) - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \\
&= \frac{1}{\alpha_h}\|F - F_h\|_{V_h'} + \frac{\|b\|}{\alpha_h}\|u - v_h\|_Q + \frac{\|a\|}{\alpha_h} \ \|\sigma - \tau_h^g\|_H + \frac{1}{\alpha_h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\tau_h^g, \tau_h) - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H}
\end{aligned}$$

En resumen,

$$\begin{aligned}
\|\sigma_h - \tau_h^g\|_H \leq & \frac{1}{\alpha_h}\|F - F_h\|_{V_h'} + \frac{\|b\|}{\alpha_h}\|u - v_h\|_Q + \frac{\|a\|}{\alpha_h} \ \|\sigma - \tau_h^g\|_H + \frac{1}{\alpha_h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\tau_h^g, \tau_h) - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \\
& \forall v_h \in Q_h \text{ and } \tau_h^g \in V_h^g.
\end{aligned} \tag{0.14}$$

Por lo tanto,

$$\|\sigma - \sigma_h\|_H \leq \|\sigma - \tau_h^g\|_H + \|\sigma_h - \tau_h^g\|_H \tag{0.15}$$

Por último, usando (0.14) y luego tomando ínfimo sobre Q_h y V_h^g , se sigue que

$$\|\sigma - \sigma_h\|_H \leq C_{1,h}\|F - F_h\|_{V_h'} + C_{2,h} \operatorname{dist}(u, Q_h) + \inf_{\tau_h^g \in V_h^g} \left\{ C_{3,h}\|\sigma - \tau_h^g\|_H + C_{4,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\tau_h^g, \tau_h) - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \right\},$$

donde

$$C_{1,h} := \frac{1}{\alpha_h}, \ \ C_{2,h} := \frac{\|b\|}{\alpha_h}, \ \ C_{3,h} := 1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}, \ C_{4,h} := \frac{1}{\alpha_h}.$$

ii) Por cuanto b satisface la condición inf-sup discreta,

$$\mathbb{B} : V_h^{\perp} \to Q_h \tag{0.16}$$

es biyectivo y

$$\|\mathbb{B}_h(\tau_h)\|_Q \geq \beta_h \|\tau_h\|_H \ \forall \tau_h \in V_h^{\perp}.$$

recordemos que aquí el ortogonal se toma con respecto a H_h, es decir,

$$H_h = V_h \oplus V_h^{\perp}$$

Ahora, dado $\zeta_h \in H_h$, $\mathbb{B}_h(\sigma_h - \zeta_h) \in Q_h$ (ya que $\mathbb{B} : H_h \to Q_h$ es sobreyectivo) y por lo tanto, por (0.16), se sigue que existe un único $\overline{\zeta}_h \in V_h^{\perp}$ tal que

$$\mathbb{B}_h(\overline{\zeta}_h) = \mathbb{B}_h(\sigma_h - \zeta_h)$$

y

$$\|\mathbb{B}_h(\sigma_h - \zeta_h)\|_Q = \|\mathbb{B}_h(\overline{\zeta}_h)\|_Q \geq \beta_h \|\overline{\zeta}_h\|_H$$

Notar además que,

$$b(\zeta_h + \overline{\zeta}_h, v_h) = \langle \mathbb{B}_h(\zeta_h + \overline{\zeta}_h), v_h \rangle_Q = \langle \mathbb{B}_h(\sigma_h), v_h \rangle_Q = b(\sigma_h, v_h) = G_h(v_h) \ \ \forall \ v_h \in Q_h. \tag{0.17}$$

lo cual dice que: $\zeta_h + \overline{\zeta}_h \in V_h^g$. A su vez,

$$\begin{aligned}
\beta_h \|\overline{\zeta}_h\|_H &\leq \|\mathbb{B}_h(\sigma_h - \zeta_h)\|_Q \\
&= \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq 0}} \frac{\langle \mathbb{B}_h(\sigma_h - \zeta_h), v_h \rangle}{\|v_h\|_Q} \\
&= \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq 0}} \frac{b(\sigma_h - \zeta_h, v_h)}{\|v_h\|_Q} \\
&= \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq 0}} \frac{b(\sigma - \zeta_h, v_h) + b(\sigma_h - \sigma, v_h)}{\|v_h\|_Q} \\
&\leq \|b\| \|\sigma - \zeta_h\|_Q + \sup_{\substack{v_h \in Q_h \\ v_h \neq 0}} \frac{G_h(v_h) - G(v_h)}{\|v_h\|_Q} \quad (\text{ Por la 2da Ec. de } (49)\ y\ (50))
\end{aligned}$$

En resumen,

$$\|\overline{\zeta}_h\|_H \leq \frac{\|b\|}{\beta_h} \|\sigma - \zeta_h\|_Q + \frac{1}{\beta_h} \|G_h - G\|_{Q_h'} \tag{0.18}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
&\inf_{\tau_h^g \in V_h^g} \left\{ C_{3,h} \|\sigma - \tau_h^g\|_H + C_{4,h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\tau_h^g, \tau_h) - a_h(\tau_h^g, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \right\}, \\
&\leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}\right) \|\sigma - (\zeta_h + \overline{\zeta}_h)\|_H + \frac{1}{\alpha_h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\zeta_h + \overline{\zeta}_h, \tau_h) - a_h(\zeta_h + \overline{\zeta}_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H} \\
&\leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}\right) \left(\|\sigma - \zeta_h\|_H + \|\overline{\zeta}_h\|_H\right) + \frac{1}{\alpha_h} \sup_{\substack{\tau_h \in V_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{a(\zeta_h, \tau_h) - a_h(\zeta_h, \tau_h) + a(\overline{\zeta}_h, \tau_h) - a_h(\overline{\zeta}_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_H}
\end{aligned}$$

de lo cual, usando el acotamiento de las formas bilineales dentro del supremo para los dos últimos términos y luego usando la desigualdad (0.18), se sigue que

$$\begin{aligned}
&\inf_{\tau_h^g\in V_h^g}\left\{C_{3,h}\|\sigma-\tau_h^g\|_H + C_{4,h}\sup_{\substack{\tau_h\in V_h\\ \tau_h\neq 0}}\frac{a(\tau_h^g,\tau_h)-a_h(\tau_h^g,\tau_h)}{\|\tau_h\|_H}\right\},\\
&\leq\left\{\left(1+\frac{\|a\|}{\alpha_h}\right)\left(1+\frac{\|b\|}{\beta_h}\right)+\frac{(\|a\|+\|a_h\|)\|b\|}{\alpha_h\beta_h}\right\}\|\sigma-\zeta_h\|_H+\frac{1}{\beta_h}\left\{\left(1+\frac{\|b\|}{\beta_h}\right)+\frac{(\|a\|+\|a_h\|)\|b\|}{\alpha_h}\right\}\|G-G_h\|_{Q_h'}\\
&\quad+\frac{1}{\alpha_h}\sup_{\substack{\tau_h\in V_h\\ \tau_h\neq 0}}\frac{a(\zeta_h,\tau_h)-a_h(\zeta_h,\tau_h)}{\|\tau_h\|_H}\quad\forall\,\zeta_h\in H_h
\end{aligned}\tag{0.19}$$

insertando (0.19) en la expresión (51) y luego tomando ínfimo sobre H_h. se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\sigma-\sigma_h\|_H &\leq \tilde{C}_{1,h}\|F-F_h\|_{V_h'}+\tilde{C}_{2,h}\|G-G_h\|_{Q_h'}+\tilde{C}_{3,h}\,\mathrm{dist}(u,Q_h)\\
&\quad+\inf_{\zeta_h\in H_h}\left\{\tilde{C}_{4,h}\|\sigma-\zeta_h\|_H+\tilde{C}_{5,h}\sup_{\substack{\tau_h\in V_h\\ \tau_h\neq 0}}\frac{a(\zeta_h,\tau_h)-a_h(\zeta_h,\tau_h)}{\|\tau_h\|_H}\right\},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{1,h}:=\frac{1}{\alpha_h},\ \ \tilde{C}_{2,h}:=\frac{1}{\beta_h}\left\{\left(1+\frac{\|b\|}{\beta_h}\right)+\frac{(\|a\|+\|a_h\|)\|b\|}{\alpha_h}\right\},\tilde{C}_{3,h}:=1+\frac{\|b\|}{\alpha_h},\\
\tilde{C}_{4,h}:=\left(1+\frac{\|a\|}{\alpha_h}\right)\left(1+\frac{\|b\|}{\beta_h}\right)+\frac{1}{\beta_h}\frac{(\|a\|+\|a_h\|)\|b\|}{\alpha_h},\ \tilde{C}_{5,h}:=\frac{1}{\alpha_h}.
\end{aligned}$$

iii) Suponga que $a_h: H_h\times H_h\to\mathbb{R}$, se extiende a $a_h: H\times H\to\mathbb{R}$, es decir

$$\begin{aligned}
a_h(\sigma,\tau)+b(\tau,u) &= F_h(\tau)\ \forall\tau\in H\\
b(\sigma,v) &= G_h(v)\ \forall v\in Q.
\end{aligned}\tag{0.20}$$

esto implica que

$$a_h(\zeta_h,\tau_h)=a_h(\zeta_h-\sigma,\tau_h)+F_h(\tau_h)-b(\tau_h,u)$$

y

$$a(\zeta_h,\tau_h)=a(\zeta_h-\sigma,\tau_h)+F(\tau_h)-b(\tau_h,u),$$

se sigue que,

$$\sup_{\substack{\tau_h\in V_h\\ \tau_h\neq 0}}\frac{a(\zeta_h,\tau_h)-a_h(\zeta_h,\tau_h)}{\|\tau_h\|_H}\leq(\|a\|+\|a_h\|)\,\|\zeta_h-\sigma\|_H+\|F-F_h\|_{V_h'}\ \ \forall\zeta_h\in H_h$$

lo cual dice que una simplificación para (52) está dada por

$$\|\sigma-\sigma_h\|_H\leq\tilde{C}_{1,h}\|F-F_h\|_{V_h'}+\tilde{C}_{2,h}\|G-G_h\|_{Q_h'}+\tilde{C}_{3,h}\,\mathrm{dist}(u,Q_h)+\tilde{C}_{4,h}\,\mathrm{dist}(\sigma,H_h),$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{1,h}:=\frac{2}{\alpha_h},\ \ \tilde{C}_{2,h}:=\frac{1}{\beta_h}\left\{\left(1+\frac{\|b\|}{\beta_h}\right)+\frac{(\|a\|+\|a_h\|)\|b\|}{\alpha_h}\right\},\tilde{C}_{3,h}:=1+\frac{\|b\|}{\alpha_h},\\
\tilde{C}_{4,h}:=\left(1+\frac{\|a\|}{\alpha_h}\right)\left(1+\frac{\|b\|}{\beta_h}\right)+\frac{1}{\beta_h}\frac{\|a\|+\|a_h\|)\|b\|}{\alpha_h}+\frac{(\|a\|+\|a_h\|}{\alpha_h}.
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio [2.23]

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera suave Γ, y sean

$$H = \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega) := \left\{\boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^{N\times N} : \mathbf{div}\boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^N\right\} \text{ y } Q := [L^2(\Omega)]^N$$

los espacios de Hilbert con productos interiores y normas inducidad denotadas, respectivamente, po r $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{div},\Omega}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{0,\Omega}$, $\|\cdot\|_{\mathbf{div},\Omega}$ y $\|\cdot\|_{0,\Omega}$. **Considere el operador $P : H \to H$ que a cada $\boldsymbol{\sigma} \in H$ le asigna $P(\boldsymbol{\sigma}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, donde $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{u}}) \in H \times Q$ es solución del problema**

$$\begin{aligned} \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{div}\boldsymbol{\tau} &= 0 & \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H,\\ \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} & \forall\, \mathbf{v} \in Q. \end{aligned} \tag{0.21}$$

a) **Aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que P está bien definido y que $P \in \mathcal{L}(H)$.**

Proof. Considere el operador $P : H \to H$ que a cada $\boldsymbol{\sigma} \in H$ le asigna $P(\boldsymbol{\sigma}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, donde $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{u}}) \in H \times Q$ es solución del problema (0.21). Veamos que P está bien definido, es decir, que para cada $\boldsymbol{\sigma} \in H$ existe $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in H$ y es único. Para ello, verificamos la hipótesis del T.B.B en la formulación:

$$\begin{aligned} a(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tau) + b(\boldsymbol{\tau}, \tilde{\mathbf{u}}) &= 0 & \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H,\\ b(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{v}) &= G(\mathbf{v}) & \forall\, \mathbf{v} \in Q. \end{aligned} \tag{0.22}$$

donde $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : H \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : H \longrightarrow \mathbb{R}$, $G : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ están definidos como

$$a(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau}) := \int_\Omega \boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\tau} \qquad b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\boldsymbol{\tau},$$

$$G(\mathbf{v}) := \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} \qquad F(\boldsymbol{\tau}) := 0$$

- Acotamiento de a: Dado $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\tau} \in H$: $|a(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau}) \leq \|\boldsymbol{z}\|_H \|\boldsymbol{\tau}\|_H$, por lo tanto, a es acotada y $\|a\| \leq 1$.
- Acotamiento de b: Dado $\boldsymbol{\tau} \in H, \mathbf{v} \in Q$: $|b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})| \leq \|\boldsymbol{\tau}\|_H \|\mathbf{v}\|_Q$, por lo tanto b es acotada y $\|b\| \leq 1$.
- Acotamiento de G: Dado $\mathbf{v} \in Q$: $|G(\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})\|_Q \|\mathbf{v}\|_Q$, por lo tanto $G \in Q'$ y además,

$$\|G\|_{Q'} \leq \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})\|_Q \tag{0.23}$$

- Sea $\mathbb{B} : H \to Q$ el operador inducido por b. Esto es,

$$\langle \mathbb{B}(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{v}\rangle_Q = \langle \mathbf{div}\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}\rangle_Q$$

  Por lo tanto, $\mathbb{B}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{div}\boldsymbol{\tau}$. Así, $V = N(\mathbb{B}) = \{\boldsymbol{\tau} \in H : \mathbf{div}\boldsymbol{\tau} = 0\}$.
  Luego, $a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) = \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{0,\Omega} = \|\boldsymbol{\tau}\|^2_H \ \forall \boldsymbol{\tau} \in V$, lo cual dice que a es $V-$ elíptica con cte $\alpha = 1$.
- Para la condición inf-sup de b, se prueba equivalentemente que $\mathbb{B}$ es sobreyectivo. Para ello, se considera $\mathbf{v} \in Q$ y construímos una preimagen $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in H$ tal que $\mathbb{B}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = \mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = \mathbf{v}$. En efecto, se considera el Problema Auxiliar,

$$-\triangle \mathbf{z} = \mathbf{v} \text{ en } \Omega, \quad \mathbf{z} = 0 \text{ en } \Gamma. \tag{0.24}$$

  Se reduce a: Hallar $\mathbf{z} \in [H^1_0(\Omega)]^N$ tal que

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{z} : \nabla \mathbf{w} = \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \ \ \forall\, \mathbf{w} \in [H^1_0(\Omega)]^N \tag{0.25}$$

  Por el T.L.M existe un único $\mathbf{z} \in [H^1_0(\Omega)]^N$ solución de (0.25) y además,

$$\|\mathbf{z}\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{C_p}\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}$$

donde $C_p > 0$ es la constante de Poincaré que resulta de la *elipticidad* de la forma bilineal del problema. Definiendo $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = -\nabla \mathbf{z} \in [L^2(\Omega)]^{N\times N}$ y tomando $\mathbf{w} = \boldsymbol{\varphi} \in [C_0^\infty(\Omega)]^N$, es claro que

$$\mathbf{div}\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{v} \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^N \tag{0.26}$$

Se sigue que $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in H$ y además

$$\mathbb{B}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = \mathbf{div}\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{v}.$$

Lo cual dice que $\mathbb{B}$ es sobreyectivo. Más aún, demostramos ahora directamente la inf-sup para b, Para ello notamos a partir de lo anterior que,

$$\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}\|_H^2 = |\mathbf{z}|_{1,\Omega}^2 + \|\mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}})\|_Q^2 \leq \left(\frac{1 + C_p^2}{C_p^2}\right)\|\mathbf{v}\|_Q^2$$

y por lo tanto,

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}\in H\\ \boldsymbol{\tau}\neq 0}} \frac{b(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_H} = \sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}\in H\\ \boldsymbol{\tau}\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|_H} \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}\|_H} \geq \left(\frac{C_p^2}{C_p^2+1}\right)^{1/2}\|\mathbf{v}\|_Q$$

lo cual prueba la inf-sup para b con cte $\beta = \left(\frac{C_p^2}{C_p^2+1}\right)^{1/2}$.
Por lo tanto, por el T.B.B, para el problema (0.22) existe una única solución $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\tilde{\mathbf{u}})$. Esto implica inmediatamente que el operador P está bien definido. Más aún, gracias a las cotas de error del Teorema se tiene que,

$$\begin{aligned}
\|P(\boldsymbol{\sigma})\|_H = \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\|_H &\leq \frac{2}{\beta}\|G\|_{Q'}(\text{ ya que } \alpha = 1, \|a\| \leq 1)\\
&\leq \frac{2}{\beta}\|\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})\|_{0,\Omega}(\text{ por (0.23) }) \qquad (0.27)\\
&\leq \frac{2}{\beta}\|\boldsymbol{\sigma}\|_H \qquad (0.28)
\end{aligned}$$

y por lo tanto, $P \in \mathcal{L}(H)$ y $\|P\| \leq \frac{2}{\beta}$.

b) **Defina el subespacio cerrado de H dado por**

$$V := \{\boldsymbol{\tau} \in H : \mathbf{div}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega\},$$

y pruebe que $V = N(P)$, $P^2 = P$, $H = V \oplus R(P)$.

Tenemos que $N(P) := \{\boldsymbol{\sigma} \in H : P(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \in H\}$,

sea $\boldsymbol{\tau} \in V$, esto implica que $\boldsymbol{\tau} \in H$ y $\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0}$. Luego, por (0.27), $\|P(\boldsymbol{\tau})\|_H \leq \frac{2}{\beta}\|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega} = 0$, por lo cual, $P(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0}$.

Recíprocamente, sea $\boldsymbol{\sigma} \in N(P)$ esto implica que $\boldsymbol{\sigma} \in H$ y $P(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$, de donde por la segunda ecuación de (0.21),

$$0 = G(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}), \mathbf{v}\rangle_{0,\Omega}\ \forall\ \mathbf{v} \in Q$$

Así, $\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) \in Q^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Por lo tanto, $\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$. Lo cual significa que $\boldsymbol{\sigma} \in V$. Por lo tanto, $V = N(P)$.

Por otro lado, Sabemos que $P(\boldsymbol{\sigma}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ y de acuerdo a la segunda ecuación de (0.21), $P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$. Así,

$$P^2(\boldsymbol{\sigma}) = P(P(\boldsymbol{\sigma})) = P(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = P(\boldsymbol{\sigma}).$$

Por lo tanto, $P^2 = P$.
Veamos que $H = V \oplus R(P)$:
Sea $\boldsymbol{\sigma} \in H$, es claro que $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - P(\boldsymbol{\sigma}) + P(\boldsymbol{\sigma})$. Es claro que $P(\boldsymbol{\sigma}) \in R(P)$ y $P(\boldsymbol{\sigma} - P(\boldsymbol{\sigma})) = P(\boldsymbol{\sigma}) - P^2(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$, es decir, $\boldsymbol{\sigma} - P(\boldsymbol{\sigma}) \in N(P)$. Así, $H = N(P) + R(P)$. Luego, si $\boldsymbol{\sigma} \in N(P) \cap R(P)$, entonces $P(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$ y existe $\boldsymbol{\tau} \in H$ tal que $P(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\sigma}$. Así, $\mathbf{0} = P(\boldsymbol{\sigma}) = P(P(\boldsymbol{\tau})) = P^2(\boldsymbol{\tau}) = P(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\sigma}$, esto es,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}.$$

Por lo que $N(P) \cap R(P) = \{\mathbf{0}\}$ y con ello

$$H = N(P) \oplus R(P) = V \oplus R(P). \tag{0.29}$$

c) **Deduzca a partir de b) que $V^{\perp} = R(P)$ (ortogonalidad en H), y muestre que existe una constante $C \geq 1$ tal que**

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div},\Omega} \geq C\|\mathbf{div}\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega} \;\; \forall\, \boldsymbol{\tau} \in V^{\perp},$$

concluyendo así que $\|\cdot\|_{\mathbf{div},\Omega}$ y $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ son equivalentes en $V^{\perp}$.

Como V es cerrado de H, $H = V \oplus V^{\perp}$. Así, de (0.29) es claro que $V^{\perp} = R(P)$.

Finalmente, $\forall\ \boldsymbol{\tau} \in R(P)$ existe $\mathbf{z} \in H$ tal que $P(\mathbf{z}) = \boldsymbol{\tau}$. Por lo que $\boldsymbol{\tau} = P(\mathbf{z}) = P^2(\mathbf{z}) = P(P(\mathbf{z})) = P(\boldsymbol{\tau})\ \forall \boldsymbol{\tau} \in R(P)$. De lo cual, $\forall \boldsymbol{\tau} \in V^{\perp}$,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div},\Omega} &= \|P(\boldsymbol{\tau})\|_H \\ &\leq \frac{2}{\beta}\|\mathbf{div}\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega} \;\; \text{(por (0.27))}\end{aligned}$$

de donde, recordando que $\beta = \left(\frac{C_p^2}{C_p^2+1}\right)^{1/2}$, $C := \frac{2}{\beta} \geq 1$. Dado, que $\forall \boldsymbol{\tau} \in H$, $\|\mathbf{div}\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega} \leq \|\boldsymbol{\tau}\|_H$, en particular se cumple en $V^{\perp}$. Así, se concluye la equivalencia entre las normas en $V^{\perp}$. $\square$