UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Listado de ejercicios
Optimización I, 525351 (2025-1)

1. Sea la función $f(x,y) = x^2 + y^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que el gradiente de f en un punto de $\mathbb{R}^2$ es ortogonal a la curva de nivel que pasa por ese punto.

2. Considere el problema de ubicar una nueva máquina a una red existente de cuatro máquinas. Estas máquinas están puestas en las siguientes coordenadas en el espacio dos-dimensional: $(3,1),\ (0,-3),\ (-2,2)$ y $(1,4)$. Sean (x_1, x_2) las coordenadas de la nueva máquina. Formule el problema de hallar una ubicación óptima como un problema de optimización lineal para cada uno de los siguientes casos:

   a) La suma de las distancias desde la nueva máquina hasta las otras cuatro es minimizada. Use la distancia del taxista (o distancia rectilínea). Recuerde que, en el plano, la distancia del taxista entre (p_1, p_2) y (q_1, q_2) es $|p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$.

   b) Debido a las diversas cantidades de flujo entre la nueva máquina y las máquinas existentes, reformular el problema donde la suma de las distancias ponderadas se minimizan, donde los pesos correspondientes a las cuatro máquinas son 6, 4, 7 y 2, respectivamente.

   c) Formule a) y b) con la siguiente restricción añadida: Para evitar congestión, suponga que la nueva máquina debe ser ubicada en el cuadrado $\{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 1\}$.

   d) Suponga que la nueva maquina debe ser ubicada de modo que la distancia desde la primera máquina no exceda las 2 unidades. Formule el problema con esta restricción añadida.

3. Una empresa planea crear un nuevo producto con 4 componentes químicos. Estos componentes están conformados principalmente de 3 elementos: A, B, y C. La composición y costo unitario de estos químicos se muestran en la tabla siguiente:

Componentes	1	2	3	4
A %	30	20	40	20
B %	20	60	30	40
C %	40	15	25	30
$/kg	20	30	20	15

   El nuevo producto consiste de 20 % del elemento A, al menos de 30 % de B y al menos de 20 % de C. Debido a efectos colaterales de los componentes 1 y 2, ellos no deben exceder el 30 % y 40 % del contenido del nuevo producto. Formule el problema de encontrar la manera de crear el nuevo producto al menor costo como un problema de optimización lineal.

4. Una empresa fabricante de televisores debe decidir sobre la combinación entre *QLED FHD Smart TV* y *LED HD Smart TV* a producir. Una investigación de mercado indica que, como máximo, se pueden vender al mes, 2000 unidades de *QLED FHD Smart TV* y 4000 unidades de *LED HD Smart TV*. El número máximo de horas-persona[**!**] disponible es 60000 cada mes. Para fabricar una QLED FHD Smart TV se requieren 20 horas-persona, y 15 horas-persona para una *LED HD Smart TV*. Las utilidades unitarias de la *QLED FHD Smart TV* y *LED HD Smart TV* son USD 60 y USD 30 respectivamente. Se desea encontrar el número de unidades de cada tipo de televisor que la empresa debe producir para maximizar su beneficio. Formular la situación como un problema de optimización lineal.

   [**!**] En el trabajo, una hora-persona es una unidad de estimación del esfuerzo necesario para realizar una tarea cuya unidad equivale a una hora de trabajo ininterrumpido de un trabajador medio.

5. Demostrar que las m ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

   equivalen a las $m + 1$ desigualdades

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right) x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i \end{cases}$$

6. Considere el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} & \min \varepsilon \\ \text{s.a.} & \begin{array}{rcrcrl} |\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 8| & \leq \varepsilon \\ |\ x_1 & + & 5x_2 & - & 3| & \leq \varepsilon \\ |\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 7| & \leq \varepsilon \end{array} \end{array}$$

   Escribir tal problema como uno de programación lineal en su forma estándar.

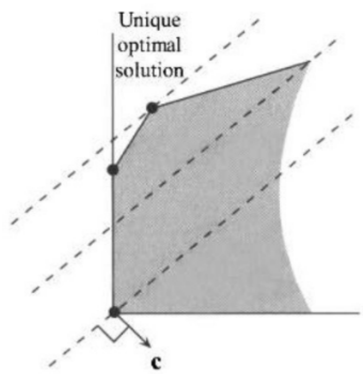
7. Dibuje la región factible de $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ donde $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{b}$ son dados a continuación. En cada caso, indique si la región factible es vacía o no y si es acotada o no.

   a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8. Considere la región factible dibujada en la figura adjunta abajo. Geométricamente, identifique las condiciones en el vector gradiente $\boldsymbol{c}$ objetivo para el cual los diferentes puntos en la región factible serán óptimos e identifique los vectores $\boldsymbol{c}$ para los cuales no existe valor óptimo.



9. Jorge dispone de 1000000 de pesos para invertir en un cierto banco. El agente bancario le propone 2 tipos de depósitos: A y B. Los del tipo A tienen más riesgo, por lo que otorga un interés anual del 10 %; mientras que los del tipo B, solo dan un interés anual del 7 %. Jorge decide invertir a lo más 600000 pesos en depósito tipo A y al menos 200000 en los del tipo B, de manera que la cantidad invertida en depósito tipo A no sea menor que la invertida en los del tipo B. Su objetivo es obtener la mayor rentabilidad posible bajo las restricciones impuestas. Formule el problema como uno de optimización lineal y resuélvalo gráficamente.

10. Considere el problema siguiente:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{máx} & 3x_1 & + & 6x_2 & & \\ \text{s.a.} & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_1, \; x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

   a) Identifique gráficamente el conjunto de todas las soluciones óptimas.
   b) Supongamos que una función objetivo de prioridad secundaria busca maximizar $-3x_1 + x_2$ sobre el conjunto de soluciones óptimas identificado en la parte a). ¿Cuál es la solución obtenida?
   c) ¿Cuál es la solución que se obtiene si las prioridades de las dos anteriores funciones objetivo se invierte?

11. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son convexos y cuáles no?

   a) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 \geq 3\}$.

b) $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 + 2x_2 \leq 1, \; x_1 - 2x_3 \leq 2\}$.

c) $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_2 - 3x_1^2 = 0\}$.

d) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_2 \leq x_1^2, \; x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4\}$.

e) $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 = 3, \; |x_2| \leq 4\}$.

f) $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_3 = |x_2|, \; x_1 \leq 3\}$.

12. Muestre que C es un cono convexo si y solo si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C \Rightarrow \lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y} \in C$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2_+$.

13. Sea $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq x_1^2\}$. Calcular K^∞.

14. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{p} \neq 0$. Considere el semiespacio $K := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{x} \leq \alpha\}$. Encontrar K^∞ , y demostrar que $K = \overline{\boldsymbol{x}} + K^\infty$ para todo $\overline{\boldsymbol{x}}$ que verifica $\boldsymbol{p}^T \overline{\boldsymbol{x}} = \alpha$.

15. Sea K un conjunto convexo y cerrado. Demuestre que
$$K = K^\infty \Longleftrightarrow K \text{ es cono.}$$

16. Decida si las funciones presentadas a continuación son convexas, cóncavas o si no tienen ninguna de estas propiedades.

    a) $f(x) = x^2$.

    b) $g(x_1, x_2) = e^{-x_1 - x_2} + 2x_1^2 - 2x_1$.

    c) $h(x_1, x_2) = \text{máx}\{h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)\}$, donde $h_1(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2$ y $h_2(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 5x_2$.

    d) $\phi(x_1, x_2) = \text{mín}\{h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)\}$, donde h_1 y h_2 son las funciones definidas anteriormente.

    e) $\psi(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3 + 2x_1 + 5x_3$.

    f) $\xi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_2$.

17. Pruebe la convexidad del conjunto solución de $\text{mín}_{\boldsymbol{x} \in K} f(\boldsymbol{x})$ con $K \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa.

18. Sean $C \in R^n$ un conjunto convexo y $f : C \to \mathbb{R}$ una función cualquiera. Se define el conjunto
$$\text{epi}(f) := \{(\boldsymbol{x}, t) \in C \times \mathbb{R} : \; f(\boldsymbol{x}) \leq t\}.$$
el cual recibe el nombre de epígrafo de f. Demostrar que la función f es convexa si y solo si epi(f) es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

19. Dados $\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{v} \in R^n$, $\boldsymbol{v} \neq 0$, muestre que la recta $\mathcal{L} = \{\overline{\boldsymbol{x}} + t\,\boldsymbol{v} : t \in \mathbb{R}\}$ no tiene puntos extremales.

20. Considere el siguiente problema:
$$\begin{array}{lcccccc}
\text{máx} & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & 4x_1 & + & 6x_2 & \leq & 9 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Dibuje la región factible.

b) Encuentre dos puntos extremales óptimos.

c) Encuentre una clase infinita de soluciones óptimas.

21. Se dice que un cono convexo C es *puntudo* si $C \cap (-C) = \{0\}$. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vació y convexo, y sea $x_0 \in K$. Demostrar que las afirmaciones siguientes son equivalentes:

    a) $\boldsymbol{x}_0$ es un punto extremal de K;

    b) El conjunto $K \setminus \{x_0\}$ es convexo;

    c) Existe un cono convexo y puntudo C tal que $K - x_0 \subseteq C$.

22. Sea el problema lineal siguiente:

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{máx} & x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{s.a.} & x_1 & - & 3x_2 & \leq & 3 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\ & & & x_1, \quad x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

    a) Sin resolver, concluya que el conjunto solución no es vació, y que es acotado.

    b) Bosquejar la región factible en (x_1, x_2) e identificar la solución óptima.

    c) Identificar todos los puntos extremos y reformular el problema en términos de las combinaciones convexas de los puntos extremos, luego, resolver el nuevo problema.

    d) Supongamos que se elimina la cuarta restricción. Identificar los puntos y direcciones extremales y reformular el problema en términos de ellos. Resolver el nuevo problema y hacer algún comentario.

23. Considere el poliedro $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 1\}$. Muestre que no tiene puntos extremales.

24. Demuestre: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cono poliédrico $\iff \exists\, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n} : \; K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \geq 0\}$.

25. Sea K un cono poliédrico. Entonces, K no puede tener más de un punto extremal. ¿Cuál seria?

26. Encontrar todos los puntos extremales del conjunto $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{1}^T \boldsymbol{x} \leq 0,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$, donde $\mathbf{1}$ es el vector en Rn de componentes todas iguales a 1.

27. Demostrar que un poliedro tiene puntos extremales si y solo si este no contiene rectas.

28. Sea $C = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ con $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}(m, n)$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Expresar matemáticamente cuando C no contiene rectas a través del rango de la matriz $\boldsymbol{A}$.

29. Considere el conjunto poliédrico $X = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{x} = k\}$, donde $\boldsymbol{p}$ es un vector no nulo y k es un escalar. Muestre que X no tiene puntos extremales ni rayos extremales. ¿Cómo lo explica en términos del teorema general de representación?

30. Escribir el sistema con desigualdades (sin aquellas de no negatividad) en su forma estándar. Después encontrar todas las soluciones básicas, ya sean factibles o no.

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & & & \leq & 4 \\ & & x_2 & \leq & x_1 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

31. Consideremos la restricciones:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & \leq & 0 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

   a) Dibujar la región factible.

   b) Después de añadir las variables inactivas (de holgura), identificar los puntos extremales para el nuevo poliedro, y para cada uno de ellos enumerar todas las variables básicas y no básicas correspondientes.

32. Consideremos las restricciones siguientes:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

   a) Dibuje la región factible.

   b) Identifique los puntos extremales del poliedro obtenido una vez agregadas las variables de holgura, además de las variables básicas y no básicas.

   c) Suponga que se ha movido desde el punto extremal $(4, 0)$ al $\left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}\right)$ en el espacio (x_1, x_2). Especifique cuál variable entra a la base y cuál sale de ella.