

Listado 4: Descomposiciones LU y PLU de matrices.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía.

Los problemas en la sección **Test** <número>, si existe, deben ser entregados en Canvas, tenga en cuenta que hay una fecha tope para ello. Los tests deben resolverse de manera individual, no es obligatorio entregarlos.

1. Problemas

1. **(A)** (Ejemplo de cálculo de descomposición LU con pivoteo parcial)

Determine las matrices P , L y U que forman la descomposición LU con pivoteo parcial de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

En cada paso escriba las correspondientes P_{ij} (matriz de permutación simple) y L_i (matriz asociada a transformaciones lineales de la forma $f_k \leftarrow f_k + \lambda f_j$) y, al finalizar, escriba cómo obtener L , P y U a partir de ellas y de la matriz original.

Compare sus resultados con los que obtiene al utilizar el comando `lu` de MATLAB.

2. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Para calcular una descomposición PLU de A se realizan $n - 1$ pasos. En el paso i ($i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$) se realizan las siguientes operaciones:

- Intercambiar fila i con alguna fila j , $j \geq i$. Sea P_i la matriz asociada a esta permutación simple.
- Operaciones elementales del tipo $f_j \leftarrow f_j + \lambda f_i$, con $j = i + 1, i + 2, \dots, n$. Llamemos L_i a la matriz asociada a estas transformaciones.

Con esto

$$U = L_{n-1}P_{n-1} \cdots P_{i+1}L_iP_i \cdots P_2L_1P_1A.$$

La matriz P de la descomposición PLU de A es entonces $P_{n-1}P_{n-2} \cdots P_1$.

- La matriz L es igual a la inversa de cierta matriz, ¿de cuál matriz?
- Sea $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$. Demuestre que la matriz $P_{n-1} \cdots P_{i+1}L_iP_{i+1}^{-1} \cdots P_{n-1}^{-1}$ tiene la misma estructura que L_i .

Sugerencia: Puede utilizar los resultados en problema 5 del listado 3.

3. **(A)** (Descomposición LU de matriz en bloques)

Sean $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz triangular superior invertible y $u, v \in \mathbb{R}^n$. Determine, si es posible, una descomposición LU de

$$\begin{pmatrix} R & v \\ u^T & 0 \end{pmatrix}.$$

4. **(A)** (Propiedades de matrices durante descomposición LU)

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que sus submatrices principales de órdenes $1, 2, \dots, n - 1$ son invertibles. Ya sabemos que A tiene descomposición LU y que ésta puede ser determinada con el método de eliminación gaussiana.

Sea $A^{(k+1)}$ la matriz que se obtiene después de realizar k pasos del método de eliminación gaussiana, es decir, $A^{(1)} = A$ y para cada $k \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$

$$A^{(k+1)} = \begin{pmatrix} U^{(k+1)} & C^{(k+1)} \\ \Theta & B^{(k+1)} \end{pmatrix},$$

siendo $U^{(k+1)}$ una matriz triangular superior de orden k , $C^{(k+1)} \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$, Θ , la matriz nula de $n-k$ filas y k columnas y $B^{(k+1)} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$.

Demuestre que si A es simétrica y definida positiva, las matrices $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(n)}$ son simétricas y definidas positivas.

Sugerencia:

- (a) Realice la demostración por inducción matemática.
- (b) Muestre que si la matriz $B^{(k)}$ se escribe como

$$B^{(k)} = \begin{pmatrix} \alpha & v^T \\ v & M \end{pmatrix},$$

entonces

$$B^{(k+1)} = M - \frac{1}{\alpha} vv^T$$

y muestre que si $B^{(k)}$ es simétrica y definida positiva, también lo es $M - \frac{1}{\alpha} vv^T$.

2. Test 4: Continuar trabajando en test 3

Esto significa que la nota en el test 3 aparecerá como nota en los tests 3 y 4.

Fecha de entrega: domingo 13 de abril, 23:59 hrs.