UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Ayudantía N°2
Optimización I, 525351 (2025-1)

1. Consideremos $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, y sea $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ es perpendicular a la curva de nivel $f(\boldsymbol{x}) = k$ que pasa por el punto $\boldsymbol{x}_0$.

2. Considere los conjuntos:

$$A := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0,\ 0 \le x_2 \le 1\},$$
$$B := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 1,\ 0 \le x_2 \le 2\}.$$

   Determine $A + B$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Demostrar que el conjunto solución del problema

$$\min_{\boldsymbol{x} \in K} f(\boldsymbol{x})$$

   es un conjunto convexo.

4. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $\boldsymbol{x}_0 \in U$, probar que $\boldsymbol{x}_0$ no es solución del problema

$$\min_{\boldsymbol{x} \in U} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x},$$

   excepto si $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

5. Un torno se utiliza para reducir el diámetro de un eje de acero de 14 in a 12 in, con una longitud de 36 in. La velocidad x_1 rpm, la profundidad de avance x_2 in/min y la longitud de avance x_3 in/min deben determinarse.

   La duración del corte está dada por

$$36/x_2 x_3.$$

   Las tensiones de compresión y lateral (en psi) ejercidas sobre la herramienta de corte están dadas, respectivamente, por:

$$30x_1 + 4500x_2$$
$$40x_1 + 5000x_2 + 5000x_3$$

   La temperatura (en °F) en la punta de la herramienta de corte está dada por:

$$200 + 0.5x_1 + 150(x_2 + x_3)$$

   Para que el torno funcione de la mejor manera, el fabricante indica lo siguiente:

- La tensión de compresión no debe superar los 150000 psi.
- La tensión lateral no debe superar los 100000 psi.
- La temperatura no debe superar los 800 °F.
- La velocidad del torno debe estar en el rango de 600 rpm a 800 rpm.

Se desea determinar x_1, x_2 y x_3 de manera que la duración del corte sea mínima. Formule el problema como un modelo de optimización lineal.

`Hint.` *Puede usar sin demostrar que: Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *no vació conexo, y* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) > 0$ *para todo* $x \in \Omega$*. Entonces* $\min_{x\in\Omega} f(x) = \max_{x\in\Omega} 1/f(x)$.

6. Un fabricante de bebidas refrescantes está interesado en mezclar tres de sus actuales marcas de fábrica (marca 1, marca 2, marca 3) para obtener tres nuevos productos de alta calidad (Producto 1, Producto 2 y Producto 3), que desea vender al precio de 4, 3 y 2 euros por botella, respectivamente.

   Sólo puede importar 2.000 botellas de la marca 1, 4.000 de la marca 2 y 1.000 de la marca 3, siendo el precio que debe pagar de 3, 2 y 1 euro por cada tipo de botella.

   El fabricante requiere que el Producto 1 contenga como mínimo el 80 % de la marca 1 y como máximo el 20 % de la marca 3. El producto 2 deberá contener como mínimo el 20 % de la marca 1 y no más del 80 % de la marca 3. El producto 3 no podrá contener más del 70 % de la marca 3.

   Formule el modelo que permitirá al fabricante hallar las mezclas que le producirán el máximo beneficio.