UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Tarea 1 - 525539

Métodos de Elementos Finitos Mixtos

Esteban Henríquez N. Prof. Gabriel N. Gatica.

1. Probar la desigualdad de Poincaré Generalizada en $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$.
   Enunciemos a continuación la desigualdad de Poincaré Generalizada;

Teorema 1. *Sea Ω un abierto 1-regular de $\mathbb{R}^n$ y sea $m \in \mathbb{N}$. Además, sea $\mathcal{F}$ una familia finita de funcionales en $H^m(\Omega)'$ tal que $\mathbb{P}_{m-1}(\Omega) \cap {}^\circ\mathcal{F} = \{\mathbf{0}\}$, donde $\mathbb{P}_{m-1}(\Omega)$ es el espacio de polinomios de grado $\leq m-1$ definidos sobre Ω, $\mathbf{0}$ denota aquí el polinomio nulo y donde ${}^\circ\mathcal{F}$ se define como*

$$ {}^\circ\mathcal{F} := \{v \in H^m(\Omega) : \quad F(v) = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}\}. $$

Entonces, la aplicación $|||\cdot||| : H^m \to \mathbb{R}$ definida por

$$ |||v||| := \left\{ |v|^2_{m,\Omega} + \sum_{F \in \mathcal{F}} |F(v)|^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall v \in H^m(\Omega), \tag{1} $$

es una norma sobre $H^m(\Omega)$ equivalente a la norma usual $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ de este espacio.

Demostración. Primero probemos que $|||\cdot|||$ es una norma sobre $H^m(\Omega)$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Consideremos $m \in \mathbb{N}$ fijo pero arbitrario, sea $v \in H^m(\Omega)$, primero, supongamos que

$$ |||v||| = 0 \Leftrightarrow |||v|||^2 = 0, $$

así,

$$ |v|^2_{m,\Omega} + \sum_{F \in \mathcal{F}} |F(v)|^2 = 0, $$

de lo anterior es fácil notar que como cada miembro de la suma es no negativo y la suma de ellos es cero, entonces necesariamente

$$ |v|_{m,\Omega} = 0 \quad \text{y} \quad |F(v)| = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}, $$

de aquí podemos concluir que; como $|\cdot|_{m,\Omega}$ es la semi norma sobre $H^m(\Omega)$, entonces $v \equiv \mathbf{0}$, entonces

$$ |||\mathbf{0}|||^2 = |\mathbf{0}|^2_{m,\Omega} + \sum_{F \in \mathcal{F}} |F(0)|^2, $$

es fácil notar que como $|\mathbf{0}|_{m,\Omega} = 0$, luego

$$ |||\mathbf{0}|||^2 = \sum_{F \in \mathcal{F}} |F(0)|^2 \leq \sum_{F \in \mathcal{F}} \|F\|^2_{H^m(\Omega)'} \|\mathbf{0}\|^2_{m,\Omega} = 0, $$

ya que $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ es la norma usual en $H^m(\Omega)$. Ahora, consideremos $v \in H^m(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, notemos que

$$
\begin{aligned}
|||\alpha v|||^2 &= |\alpha v|_{m,\Omega}^2 + \sum_{F\in\mathcal{F}} |F(\alpha v)|^2 \\
&= |\alpha|^2 |v|_{m,\Omega}^2 + \sum_{F\in\mathcal{F}} |\alpha|^2 |F(v)| \\
&= |\alpha|^2 \left\{ |v|_{m,\Omega} + \sum_{F\in\mathcal{F}} |F(v)| \right\} \\
&= |\alpha|^2 |||v|||^2.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, sea también ahora $w \in H^m(\Omega)$, luego

$$
\begin{aligned}
|||v+w|||^2 &= |v+w|_{m,\Omega}^2 + \sum_{F\in\mathcal{F}} |F(v+w)|^2 \\
&\leq |v|_{m,\Omega}^2 + |w|_{m,\Omega}^2 + \sum_{F\in\mathcal{F}} |F(v)+F(w)|^2 \\
&\leq |v|_{m,\Omega}^2 + |w|_{m,\Omega}^2 + \sum_{F\in\mathcal{F}} |F(v)|^2 + \sum_{F\in\mathcal{F}} |F(w)|^2 \\
&= |||v|||^2 + |||w|||^2,
\end{aligned}
$$

por lo tanto, se ha demostrado que la aplicación $|||\cdot|||$ es una norma sobre $H^m(\Omega)$, luego, notemos que

$$
\begin{aligned}
|||v|||^2 &= |v|_{m,\Omega}^2 + \sum_{F\in\mathcal{F}} |F(v)|^2 \\
&\leq \|v\|_{m,\Omega}^2 + \sum_{F\in\mathcal{F}} |F(v)|^2 \\
&\leq \|v\|_{m,\Omega}^2 + \sum_{F\in\mathcal{F}} \|F\|_{H^m(\Omega)'}^2 \|v\|_{m,\Omega}^2 \\
&= M_1 \|v\|_{m,\Omega}^2,
\end{aligned}
$$

con $M_1 := \left\{1 + \sum_{F\in\mathcal{F}} \|F\|_{H^m(\Omega)'}^2\right\}$. Por otro lado, razonando por el absurdo, supongamos que no existe $M_2 > 0$ tal que

$$\|v\|_{m,\Omega} \leq M_2 |||v||| \quad \forall v \in H^m(\Omega),$$

así $\forall C > 0$, se tiene que $\exists \tilde{v} \in H^m(\Omega)$, tal que

$$\|\tilde{v}\|_{m,\Omega} > C|||\tilde{v}|||,$$

luego si consideramos $C = k\ \forall k \in \mathbb{N}$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $v_k \in H^m(\Omega)$ tal que

$$\|v_k\|_{m,\Omega} > k|||v|||,$$

luego, normalizando $v_k\ \forall k \in \mathbb{N}$, se define

$$u_k := \frac{v_k}{\|v_k\|_{m,\Omega}} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

donde es fácil notar que

$$\|u_k\|_{m,\Omega} = \left\| \frac{v_k}{\|v_k\|_{m,\Omega}} \right\|_{m,\Omega} = \frac{1}{\|v_k\|_{m,\Omega}} \cdot \|v_k\|_{m,\Omega} = 1,$$

además,

$$|||u_k||| < \frac{1}{k}\|u_k\|_{m,\Omega} = \frac{1}{k},$$

a su vez,

$$|||u_k||| = |u_k|_{m,\Omega} + \sum_{F\in\mathcal{F}} |F(u_k)| < \frac{1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

es decir, $|u_k|_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u_k\|_{0,\Omega}^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0$, entonces $\partial^\alpha u_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ en $L^2(\Omega)$ $\forall|\alpha|$, $|\alpha| = m$, y también, por el mismo razonamiento anterior $|F(u_k)| \xrightarrow{k\to\infty} 0$ $\forall F \in \mathcal{F}$. Luego, como $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $H^m(\Omega)$ y considerando

$$i:\ H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega),$$

como la inyección canónica, la cual es compacta (teorema 9.12 [1]), entonces existe una subsucesión $\{u_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{u_{k_n}\} \xrightarrow{n\to\infty} u$ en $H^{m-1}(\Omega)$. También podemos notar que como $\partial^\alpha u_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ $\forall\alpha$, $|\alpha| = m$, entonces $\partial^\alpha u_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ en $L^2(\Omega)$ $\forall\alpha$, $|\alpha| = m$, a su vez, notemos que $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha u_{k_n}, \varphi\rangle &= (-1)^m \langle u_{k_n}, \partial^\alpha\varphi\rangle \\
&= (-1)^m \int_\Omega u_{k_n}\partial^\alpha\varphi \\
&\xrightarrow{n\to\infty} (-1)^m \int_\Omega u\partial^\alpha\varphi \\
&= \int_\Omega \partial^\alpha u\varphi \\
&= \langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle,
\end{aligned}$$

por lo tanto $\partial^\alpha u = 0$ $\forall\alpha$, $|\alpha| = m$, asimismo queda demostrado que $u \in H^m(\Omega)$ y que $u_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} u$ en $H^m(\Omega)$, con lo cual, se tiene que

$$\|u\|_{m,\Omega} = \lim_{n\to\infty} \|u_{k_n}\|_{m,\Omega} = 1$$

y

$$F(u) = \lim_{n\to\infty} F(u_{k_n}) = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F},$$

pero como $\partial^\alpha u = 0$ $\forall\alpha$, $|\alpha| = m$, entonces $u \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega)$, así $u \equiv \mathbf{0}$ pero, a su vez, $\|\mathbf{0}\|_{m,\Omega} = 1$, lo cual es una contradicción. □

2. Aplicar la desigualdad de Poincaré Generalizada (D.P.G.) para probar que en $\tilde{H}^1(\Omega)$, $\|\cdot\|$ y $|\cdot|_{1,\Omega}$ son equivalentes.

Demostración. Se define

$$\tilde{H}^1(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) : \quad \int_\Omega v = 0 \right\},$$

por su parte, se define $F\,:\,H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$

$$F(v):=\int_\Omega v\quad\forall v\in H^1(\Omega),$$

podemos notar que por lo visto en el problema 1, definiendo $\mathcal{F}=\{F\}$, la cual claramente es una familia finita de funcionales en $H^1(\Omega)'$, se tiene que

$$|||v|||:=\{|v|_{1,\Omega}^2+|F(v)|^2\}^{1/2}\quad\forall v\in H^1(\Omega)$$

es una norma sobre $H^1(\Omega)$, además podemos notar que

$$^\circ\mathcal{F}=\left\{v\in H^1(\Omega):\quad\int_\Omega v=0\right\}=\tilde{H}^1(\Omega),$$

y $^\circ\mathcal{F}\cap\mathbb{P}_0(\Omega)=\mathbf{0}$, así, aplicando D.P.G., se tiene que $|||\cdot|||$ y $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ son equivalentes sobre $H^1(\Omega)$, pero notemos que para todo $v\in\tilde{H}^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}|||v|||^2&=|v|_{1,\Omega}^2+|F(v)|^2\\&=|v|_{1,\Omega}^2+\left\{\int_\Omega v\right\}^2\\&=|v|_{1,\Omega}^2,\end{aligned}$$

por lo tanto, teniendo en cuenta que $\tilde{H}^1(\Omega)\subseteq H^1(\Omega)$ y además la equivalencia entre normas que entrega D.P.G., podemos afirmar que existen $C_1,C_2>0$ tales que

$$C_1|||v|||=C_1|v|_{1,\Omega}\leq\|v\|_{1,\Omega}\leq C_2|v|_{1,\Omega}=C_2|||v|||\quad\forall v\in\tilde{H}^1(\Omega),$$

así $|\cdot|_{1,\Omega}$ y $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ son equivalentes en $\tilde{H}^1(\Omega)$. $\square$

Referencias

[1] Gabriel N. Gatica. *Introducción al análisis funcional. Teoría y aplicaciones.* Reverté, 2021.