



## Listado 4: Descomposiciones $LU$ y $PLU$ de matrices.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía.

Los problemas en la sección **Test <número>**, si existe, deben ser entregados en Canvas, tenga en cuenta que hay una fecha tope para ello. Los tests deben resolverse de manera individual, no es obligatorio entregarlos.

### 1. Problemas

#### 1. (A) (*Ejemplo de cálculo de descomposición LU con pivoteo parcial*)

Determine las matrices  $P$ ,  $L$  y  $U$  que forman la descomposición  $LU$  con pivoteo parcial de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

En cada paso escriba las correspondientes  $P_{ij}$  (matriz de permutación simple) y  $L_i$  (matriz asociada a transformaciones lineales de la forma  $f_k \leftarrow f_k + \lambda f_j$ ) y, al finalizar, escriba cómo obtener  $L$ ,  $P$  y  $U$  a partir de ellas y de la matriz original.

Compare sus resultados con los que obtiene al utilizar el comando `lu` de MATLAB.

2. Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Para calcular una descomposición  $PLU$  de  $A$  se realizan  $n - 1$  pasos. En el paso  $i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ ) se realizan las siguientes operaciones:

- Intercambiar fila  $i$  con alguna fila  $j$ ,  $j \geq i$ . Sea  $P_i$  la matriz asociada a esta permutación simple.
- Operaciones elementales del tipo  $f_j \leftarrow f_j + \lambda f_i$ , con  $j = i + 1, i + 2, \dots, n$ . Llamemos  $L_i$  a la matriz asociada a estas transformaciones.

Con esto

$$U = L_{n-1}P_{n-1} \cdots P_{i+1}L_iP_i \cdots P_2L_1P_1A.$$

La matriz  $P$  de la descomposición  $PLU$  de  $A$  es entonces  $P_{n-1}P_{n-2} \cdots P_1$ .

- La matriz  $L$  es igual a la inversa de cierta matriz, ¿de cuál matriz?
- Sea  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ . Demuestre que la matriz  $P_{n-1} \cdots P_{i+1}L_iP_i^{-1} \cdots P_{n-1}^{-1}$  tiene la misma estructura que  $L_i$ .

**Sugerencia:** Puede utilizar los resultados en problema 5 del listado 3.

#### 3. (A) (*Descomposición LU de matriz en bloques*)

Sean  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz triangular superior invertible y  $u, v \in \mathbb{R}^n$ . Determine, si es posible, una descomposición  $LU$  de

$$\begin{pmatrix} R & v \\ u^T & 0 \end{pmatrix}.$$

#### 4. (A) (*Propiedades de matrices durante descomposición LU*)

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que sus submatrices principales de órdenes  $1, 2, \dots, n - 1$  son invertibles. Ya sabemos que  $A$  tiene descomposición  $LU$  y que ésta puede ser determinada con el método de eliminación gaussiana.

Sea  $A^{(k+1)}$  la matriz que se obtiene después de realizar  $k$  pasos del método de eliminación gaussiana, es decir,  $A^{(1)} = A$  y para cada  $k \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$

$$A^{(k+1)} = \begin{pmatrix} U^{(k+1)} & C^{(k+1)} \\ \Theta & B^{(k+1)} \end{pmatrix},$$

siendo  $U^{(k+1)}$  una matriz triangular superior de orden  $k$ ,  $C^{(k+1)} \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$ ,  $\Theta$ , la matriz nula de  $n - k$  filas y  $k$  columnas y  $B^{(k+1)} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ .

Demuestre que si  $A$  es simétrica y definida positiva, las matrices  $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(n)}$  son simétricas y definidas positivas.

**Sugerencia:**

- (a) Realice la demostración por inducción matemática.
- (b) Muestre que si la matriz  $B^{(k)}$  se escribe como

$$B^{(k)} = \begin{pmatrix} \alpha & v^T \\ v & M \end{pmatrix},$$

entonces

$$B^{(k+1)} = M - \frac{1}{\alpha} vv^T$$

y muestre que si  $B^{(k)}$  es simétrica y definida positiva, también lo es  $M - \frac{1}{\alpha} vv^T$ .

## 2. Test 4: Continuar trabajando en test 3

Esto significa que la nota en el test 3 aparecerá como nota en los tests 3 y 4.

**Fecha de entrega:** domingo 13 de abril, 23:59 hrs.