UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

TAREAS, MAT 408.607

Ecuaciones Diferenciales Parciales

Segundo Semestre 2001
Prof. Gabriel N. Gatica

Problema 1 (Lema de Weyl). Sea Ω un abierto conexo y acotado de $\mathbf{R}^n$ y sea $u \in C(\Omega)$. El objetivo de este problema es demostrar que u es armónica en Ω sí y sólo sí

$$\int_\Omega u\,\Delta\varphi\,dx \;=\; 0 \qquad \forall\,\varphi \in C_0^2(\Omega)\,.$$

Para la segunda implicación se sugiere proceder como se indica a continuación:

i) Dado $x \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq \Omega$, considere la función

$$\varphi(y,r) := \begin{cases} (|y-x|^2 - r^2)^n & \text{si } |y-x| \le r\,, \\ 0 \quad \text{si } |y-x| > r\,, \end{cases}$$

y para cada $k = 2, 3, ..., n$, defina:

$$\varphi_k(y,r) := (|y-x|^2 - r^2)^{n-k}\,[\,2(n-k+1)|y-x|^2 + n(|y-x|^2 - r^2)\,]\,.$$

Note que $\Delta_y\varphi(y,r) \;=\; \begin{cases} 2n\,\varphi_2(y,r) & \text{si} \quad |y-x| \le r\,, \\ 0 \quad \text{si} \quad |y-x| > r\,. \end{cases}$ y pruebe, usando inducción finita, que

$$\int_{B(x,r)} u(y)\,\varphi_k(y,r)\,dy \;=\; 0 \qquad \forall\,k = 2, 3, ..., n\,. \tag{1}$$

ii) Aplique (1) con $k = n$, derive la expresión resultante con respecto a r, y deduzca que

$$r\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,ds_y \;=\; n\int_{B(x,r)} u(y)\,dy\,. \tag{2}$$

iii) Utilice (2) para mostrar que u satisface la propiedad del valor medio y concluya que u es armónica.

Problema 2. Deduzca una fórmula explícita para la solución del siguiente problema de valores iniciales:

$$u_t \,+\, b\cdot Du \,+\, cu \;=\; 0 \quad \text{en} \quad \mathbf{R}^n \times (0,+\infty)\,, \quad u = g \quad \text{en} \quad \mathbf{R}^n \times \{t=0\}\,,$$

donde $c \in \mathbf{R}$ y $b \in \mathbf{R}^n$ son constantes.

Problema 3 (Desigualdad de Harnack).

i) Sean $x_0 \in \mathbf{R}^n$ y $R > 0$. Suponga que u es armónica y no-negativa en $B(x_0, R)$, y continua en $\bar{B}(x_0, R)$. Demuestre que para todo $x \in B(x_0, R)$ se tiene

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r}\, u(x_0) \,\leq\, u(x) \,\leq\, \left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r}\, u(x_0)\,,$$

donde $r := ||x - x_0||$.

ii) Utilice **i)** para probar que si u es armónica y acotada (inferiormente o superiormente) en $\mathbf{R}^n$, entonces u es constante.

Problema 4 (Fórmula de Poisson en la bola). Sean $r > 0$, $g \in C(\partial B(\mathbf{0}, r))$, y defina

$$u(x) \,:=\, \frac{r^2 - ||x||^2}{n\alpha(n) r} \int_{\partial B(\mathbf{0},r)} \frac{g(y)}{||x-y||^n}\, ds_y \qquad \forall\, x \in B(\mathbf{0}, r)\,.$$

Demuestre que $u \in C^\infty(B(\mathbf{0}, r))$, $\Delta u = 0$ en $B(\mathbf{0}, r)$, y $\lim_{x \to x_0} u(x) = g(x_0)$ para todo $x_0 \in \partial B(\mathbf{0}, r)$.

Problema 5 (Singularidad removible). Sea $R > 0$ y considere una función u armónica en $B(\mathbf{0}, R) - \{\mathbf{0}\}$, y continua en $\bar{B}(\mathbf{0}, R) - \{\mathbf{0}\}$, tal que

$$u(x) \,=\, \begin{cases} o(\log ||x||)\,, & n = 2\,, \\ o(||x||^{2-n})\,, & n \geq 3\,, \end{cases} \qquad \text{cuando } ||x|| \to 0\,.$$

Demuestre que u puede definirse en $\mathbf{0}$ de modo que u es armónica en $B(\mathbf{0}, R)$. Para este efecto, se sugiere proceder como sigue (caso $n \geq 3$):

i) Defina $w := v - u$, donde v es la solución del problema $\Delta v = 0$ en $B(\mathbf{0}, R)$, $v = u$ en $\partial B(\mathbf{0}, R)$, y utilice el principio del máximo para probar que

$$|w(x)| \,\leq\, M_r \frac{r^{n-2}}{||x||^{n-2}} \qquad \forall\, x \in B(\mathbf{0}, R) - \bar{B}(\mathbf{0}, r)\,, \quad \forall\, r \in (0, R)\,,$$

donde $M_r := \max_{z \in \partial B(\mathbf{0}, r)} |w(z)|$.

ii) Muestre que $M_r \leq M + \max_{z \in \partial B(\mathbf{0}, r)} |u(z)|$, con $M := \max_{z \in \partial B(\mathbf{0}, R)} |u(z)|$, sustituya en la desigualdad de **i)**, y deduzca que $w(x) = 0$ para todo $x \in B(\mathbf{0}, R) - \{\mathbf{0}\}$.

iii) Concluya la demostración requerida.

Problema 6 (Principio del máximo para funciones sub-armónicas). Sea Ω un dominio acotado de $\mathbf{R}^n$ y sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ una función **sub-armónica**, es decir $\Delta u \geq 0$ en Ω. Demuestre que

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) \leq \sup_{x \in \partial\Omega} u(x) .$$

Indicación: dado $\epsilon > 0$ defina $u_\epsilon(x) := u(x) + \epsilon \, ||x||^2$ en Ω, note que $\Delta u_\epsilon > 0$ en Ω y pruebe, por contradicción, que u_ϵ no tiene un punto de máximo en Ω.

Problema 7 (Estimaciones interiores del gradiente). Sea u una función armónica en $B(\mathbf{0}, 1)$.

a) Pruebe que

$$\Delta(||\nabla u||^2) = 2 \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 ,$$

y observe así que $||\nabla u||^2$ es sub-armónica.

b) Sea $\eta \in C_0^\infty(B(\mathbf{0}, 1))$ tal que $\eta = 1$ en una vecindad de $B(\mathbf{0}, 1/2)$, demuestre que

$$\Delta(\eta^2 ||\nabla u||^2) = 2\eta \, \Delta\eta \, ||\nabla u||^2 + 2 \, ||\nabla \eta||^2 \, ||\nabla u||^2$$
$$+ 8 \, \eta \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + 2\eta^2 \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 ,$$

y concluya que

$$\Delta(\eta^2 \, ||\nabla u||^2) \geq (2 \, \eta \, \Delta\eta - 6 \, ||\nabla \eta||^2) \, ||\nabla u||^2 \geq - C \, ||\nabla u||^2 ,$$

donde $C > 0$ depende sólo de η.

c) Muestre que $\Delta(u^2) = 2 \, ||\nabla u||^2$, y deduzca que existe $\beta > 0$, suficientemente grande, tal que

$$\Delta(\eta^2 \, ||\nabla u||^2 + \beta \, u^2) \geq 0 .$$

d) Aplique el resultado del **Problema 6** y concluya que existe $\tilde{C} > 0$, que depende de n, tal que

$$\sup_{x \in B(\mathbf{0}, 1/2)} ||\nabla u(x)|| \leq \tilde{C} \sup_{x \in \partial B(\mathbf{0}, 1)} |u(x)| .$$

e) Demuestre que para todo $\alpha \in [0, 1]$ existe $c = c(n, \alpha)$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq c \, ||x - y||^\alpha \sup_{z \in \partial B(\mathbf{0}, 1)} |u(z)| \qquad \forall \, x \, , \, y \in B(\mathbf{0}, 1/2) .$$

Problema 8 (Lema de Hopf). Sea $u \in \bar{C}(B(\mathbf{0},1))$ una función armónica en $B(\mathbf{0},1)$. Suponga que existe $x_0 \in \partial B(\mathbf{0},1)$ tal que $u(x) < u(x_0)$ para todo $x \in \bar{B}(\mathbf{0},1)$, $x \neq x_0$.

a) Dado $\alpha > 0$ defina $v(x) := e^{-\alpha||x||^2} - e^{-\alpha}$ para todo $x \in B(\mathbf{0},1)$, y demuestre que para $\alpha \geq 2n+1$, la función v es subarmónica en $\Omega := B(\mathbf{0},1) - \bar{B}(\mathbf{0},1/2)$.

b) Defina $w(x) := u(x_0) - u(x)$ en $B(\mathbf{0},1)$ y utilice la desigualdad de Harnack (vista en clases) para probar que

$$\min_{x \in \bar{B}(\mathbf{0},1/2)} w(x) \geq c\, w(\mathbf{0}),$$

es decir

$$\max_{x \in \bar{B}(\mathbf{0},1/2)} u(x) \;\leq\; u(x_0) - c\,(u(x_0) - u(\mathbf{0})),$$

donde c es una constante que depende sólo de n.

c) Dado $\epsilon > 0$ defina $h_\epsilon(x) := u(x) - u(x_0) + \epsilon v(x)$, y demuestre que h_ϵ es subarmónica en Ω. Verifique además que $h_\epsilon \leq 0$ en $\partial B(\mathbf{0},1)$ y que $h_\epsilon(x_0) = 0$.

d) Demuestre que al elegir $\epsilon = \delta\, c\,(u(x_0) - u(\mathbf{0}))$, con $\delta > 0$ suficientemente pequeño, se obtiene que $h_\epsilon(x) < 0$ para todo x con $||x|| = 1/2$.

e) Aplique **ejercicio 6** para deducir que h_ϵ alcanza su máximo valor en $\bar{\Omega}$ en el punto x_0, y note en tal caso que $\frac{\partial h_\epsilon}{\partial \mathbf{n}}(x_0) \geq 0$, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a $\partial B(\mathbf{0},1)$.

f) Concluya a partir de **e)** que existe una constante positiva C, que depende de n y α, tal que

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_0) \;\geq\; C\,(\,u(x_0) \;-\; u(\mathbf{0})\,)\,.$$

Problema 9 (Desigualdad de Caccioppoli). Sean $a_{ij} \in C(B(\mathbf{0},1))$, $i,j \in \{1,...,n\}$, y suponga que existen constantes λ_0, $\lambda_1 > 0$ tales que

$$\lambda_0\,||\xi||^2 \;\leq\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \;\leq\; \lambda_1\,||\xi||^2 \quad \forall\, x \in B(\mathbf{0},1), \quad \forall\, \xi := (\xi_1,...,\xi_n)^{\mathbf{T}} \in \mathbf{R}^n\,.$$

Sea $u \in C^1(B(\mathbf{0},1))$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(\mathbf{0},1)} a_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx \;=\; 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1(B(\mathbf{0},1))\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de λ_0 y λ_1, tal que para toda $\eta \in C_0^1(B(\mathbf{0},1))$ se tiene

$$\int_{B(\mathbf{0},1)} \eta^2\,||\nabla u||^2\,dx \;\leq\; C \int_{B(\mathbf{0},1)} ||\nabla \eta||^2\,u^2\,dx\,.$$

Indicación: Dada $\eta \in C_0^1(B(\mathbf{0},1))$, tomar $\varphi = \eta^2 u$.

Problema 10. Sea u una función suave que verifica $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbf{R}^n \times (0, +\infty)$.

a) Demuestre que $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ resuelve la ecuación del calor para cada $\lambda \in \mathbf{R}$.

b) Use **a)** para mostrar que $v(x,t) := x \cdot \nabla u(x,t) + 2\,t\,u_t(x,t)$ también es solución de esta ecuación.

Problema 11.

a) Suponga las regularidades necesarias para los datos involucrados, y deduzca una formula explícita para la solución del problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + cu &= f \quad \text{en} \quad \mathbf{R}^n \times (0, +\infty)\,, \\ u &= g \quad \text{en} \quad \mathbf{R}^n \times \{t = 0\}\,, \end{aligned}$$

donce $c \in \mathbf{R}$. (**Indicación:** considere la función $v(x,t) := u(x,t)\,e^{ct}$).

b) Extienda lo anterior al caso en que la constante c se reemplaza por una función continua $h(t)$, $t \in [0, \infty)$.

Problema 12 (principio del máximo para sub-soluciones). Se dice que $u \in C_1^2(\Omega_T)$ es una *sub-solución* de la ecuación del calor si $u_t - \Delta u \leq 0$ en Ω_T. Pruebe que en tal caso se tiene

$$u(x,t) \leq \frac{1}{4r^n} \int\int_{E(x,t:r)} u(y,s)\, \frac{||x-y||^2}{(t-s)^2}\, dyds \qquad \forall\, E(x,t:r) \subset \Omega_T\,,$$

y deduzca que $\max\limits_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T} u(x,t) = \max\limits_{(x,t)\in\Gamma_T} u(x,t)$.

Problema 13 (Método de reflección). Considere el problema de valores de contorno/iniciales:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad &\text{en} \quad \mathbf{R}_+ \times (0, +\infty)\,, \\ u = g\,, \quad u_t = h \quad &\text{en} \quad \mathbf{R}_+ \times \{t = 0\}\,, \\ u = 0 \quad &\text{en} \quad \{x = 0\} \times (0, +\infty)\,, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{R}_+ := \{x \in \mathbf{R} : \quad x > 0\}$, y g, h son funciones dadas que satisfacen $g(0) = h(0) = 0$. Extienda $u(\cdot, t)$, $g(\cdot)$ y $h(\cdot)$ a todo $\mathbf{R}$ por reflección impar, esto es

$$\tilde{u}(x,t) := \begin{cases} u(x,t) & \text{si} \quad x \geq 0,\ t \geq 0\,, \\ -u(-x,t) & \text{si} \quad x \leq 0,\ t \geq 0\,, \end{cases}$$

y similarmente para $\tilde{g}$ y $\tilde{h}$. Demuestre que $\tilde{u}$ satisface la ecuación de la onda uni-dimensional en $\mathbf{R} \times (0, +\infty)$ con datos iniciales $\tilde{g}$, $\tilde{h}$, y aplique la fórmula de

D'Alembert para concluir que

$$u(x,t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,[g(x+t)+g(x-t)] \;+\; \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy & \text{si} \quad x \geq t \geq 0\,, \\ \dfrac{1}{2}\,[g(x+t)-g(t-x)] \;+\; \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-x+t}^{x+t} h(y)\,dy & \text{si} \quad 0 \leq x \leq t\,. \end{cases}$$

Problema 14. Dado $r > 0$, defina $\Omega := B(\mathbf{0}, r)$ en $\mathbf{R}^3$, y considere una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que: $-\Delta u = f$ en Ω, $u = g$ en $\partial\Omega$. Modifique la demostración de la fórmula del valor medio y pruebe que

$$u(\mathbf{0}) = \fint_{\partial\Omega} g(s)\,ds \;+\; \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{r}\right) f(x)\,dx\,.$$

Problema 15 (Método de descenso). Sea $u \in C^2(\mathbf{R}^2 \times [0,\infty))$ una solución del problema de valores iniciales

$$(1) \qquad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \mathbf{R}^2 \times (0,\infty)\,, \\ u = g\,, \quad u_t = h\,, \quad \text{en} \quad \mathbf{R}^2 \times \{t = 0\}\,. \end{cases}$$

a) Defina $\bar{u} : \mathbf{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbf{R}$ por $\bar{u}(x_1,x_2,x_3,t) := u(x_1,x_2,t)\ \forall\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\forall\, t \geq 0$, y demuestre que $\bar{u}$ satisface la ecuación de la onda en $\mathbf{R}^3 \times [0,\infty)$ con datos iniciales $\bar{g}$ y $\bar{h}$ en $\mathbf{R}^3 \times \{t=0\}$, donde $\bar{g}(x_1,x_2,x_3) := g(x_1,x_2)$ y $\bar{h}(x_1,x_2,x_3) := h(x_1,x_2)$.

b) Pruebe que

$$\fint_{\partial B(\bar{x},t)} \bar{g}(s)\,ds \;=\; \frac{1}{2\pi t^2}\int_{B(x,t)} g(y)\,\left[1 + \|\nabla\gamma(y)\|^2\right]^{1/2}\,dy\,,$$

donde $\bar{x} = (x_1,x_2,0)$, $B(\bar{x},t)$ es la bola en $\mathbf{R}^3$ con centro en $\bar{x}$ y radio t, y $\gamma(y) := (t^2 - \|y-x\|^2)^{1/2}\ \ \forall\, y \in B(x,t)$.

c) Aplique la fórmula de Kirchhoff a $\bar{u}$ y deduzca que la solución de (1) está dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\fint_{B(x,t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t\nabla g(y)\cdot(y-x)}{(t^2 - \|y-x\|^2)^{1/2}}\,dy \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^2\,, \quad \forall\, t \geq 0\,.$$

(Fórmula de Poisson)

Problema 16. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, $p \in [1, \infty)$, y k un entero no-negativo. Dada $u \in W^{k,p}(\Omega)$, demuestre que:

a) $u \in W^{k,p}(V)$ para todo abierto $V \subseteq \Omega$.

b) $\varphi u \in W^{k,p}(\Omega)$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, y

$$\partial^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \varphi \, \partial^{\alpha - \beta} u \qquad \forall \, |\alpha| \leq k \, .$$

(fórmula de Leibnitz)

Problema 17. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, y f^ϵ su regularizada. Demuestre que:

a) $f^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$, donde $\Omega_\epsilon := \{ x \in \Omega : \quad \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon \}$.

b) $f^\epsilon(x) \to f(x)$ cuando $\epsilon \to 0$, para casi todos los $x \in \Omega$.

c) si $f \in C(\Omega)$, entonces $f^\epsilon \to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω.

d) si $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, entonces $f^\epsilon \to f$ en $L^p_{loc}(\Omega)$.

Problema 18 (El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ y el operador de trazas). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1, y sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Se trata de probar que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ sí y sólo sí $T(u) = 0$ en $\partial\Omega$, donde $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ es el operador de trazas. Para la segunda implicación se sugiere seguir el siguiente esquema:

a) Use partición de la unidad y aplanamiento de la frontera $\partial\Omega$ para reducir el problema al caso en que $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n_+)$, sop u compacto en $\bar{\mathbf{R}}^n_+$, y $T(u) = 0$ en $\partial\mathbf{R}^n_+ = \mathbf{R}^{n-1}$.

b) Pruebe que existe una sucesión $\{u_m\}_{m \in \mathbf{N}} \subseteq C^1(\bar{\mathbf{R}}^n_+)$ tal que

$$\|u_m - u\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^n_+)} \to 0 \quad \text{y} \quad \|T(u_m)\|_{L^p(\mathbf{R}^{n-1})} \to 0 \, , \quad \text{cuando } \; m \to \infty \, .$$

c) Dado $x := (x', x_n) \in \mathbf{R}^n_+$, con $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$ y $x_n > 0$, note que

$$u_m(x', x_n) = u_m(x', 0) + \int_0^{x_n} \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x', t) \, dt \, ,$$

y deduzca, usando la desigualdad de Hölder y **b)**, que

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p \, dx' \, \leq \, C \, x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \|\nabla u(x', t)\|^p \, dx' dt$$

para casi todo $x_n > 0$.

d) Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$ tal que $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi = 1$ en $[0,1]$, $\varphi = 0$ en $\mathbf{R} - [0,2]$, defina $\varphi_m(x) := \varphi(mx_n)$, $w_m(x) := u(x)\,(1 - \varphi_m(x))$, y demuestre que

$$\int_{\mathbf{R}^n_+} \|\nabla w_m - \nabla u\|^p \, dx \;\le\; C\;\{\, A(m) + B(m) \,\}\;,$$

donde

$$A(m) := \int_{\mathbf{R}^n_+} |\varphi_m(x)|^p \, \|\nabla u(x)\|^p \, dx$$

y

$$B(m) := m^p \int_0^{2/m} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |u(x',t)|^p \, dx' dt\,.$$

e) Pruebe que $A(m)$, $B(m) \to 0$, y concluya que $\|w_m - u\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^n_+)} \to 0$ cuando $m \to \infty$.

f) Utilice las funciones w_m para obtener una sucesión $\{v_m\}_{m\in\mathbf{N}} \subseteq C_0^\infty(\mathbf{R}^n_+)$ tal que $\|v_m - u\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^n_+)} \to 0$ cuando $m \to \infty$, y concluya así que $u \in W_0^{1,p}(\mathbf{R}^n_+)$.

Problema 19 (Desigualdad general de Hölder). Sea Ω un abierto de $\mathbf{R}^n$, y sean $1 \le p_1, p_2, ..., p_m < \infty$, con $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$. Suponga que $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$ para todo $k \in \{1, ..., m\}$, y muestre que

$$\int_\Omega \prod_{k=1}^m |u_k| \, dx \;\le\; \prod_{k=1}^m \|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}\,.$$

Ind.: aplicar inducción y la desigualdad de Hölder usual.

Problema 20 (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). Sea $p \in [1,n)$ y sea $p^* := \frac{np}{n-p}$. El objetivo de este problema es demostrar que existe $C > 0$, que depende sólo de p y n, tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbf{R}^n)} \;\le\; C\,\|\nabla u\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \qquad \forall\, u \in C_0^1(\mathbf{R}^n)\,. \tag{1}$$

Para ello, proceda como se indica a continuación.

a) Dado $x \in \mathbf{R}^n$, observe que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)\, dy_i \qquad \forall\, i \in \{1, ..., n\}\,,$$

defina $r := \frac{1}{n-1}$, y pruebe que

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \;\le\; \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbf{R}} \|\nabla u(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)\| \, dy_i \right)^r . \tag{2}$$

b) Integre (2) con respecto a x_1 y aplique la desigualdad general de Hölder para probar que

$$\int_{\mathbf{R}} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 \;\leq\; \left(\int_{\mathbf{R}} \|\nabla u\|\, dy_1\right)^r \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{\mathbf{R}^2} \|\nabla u\|\, dx_1 dy_i\right)^r . \tag{3}$$

c) Integre (3) con respecto a x_2 y aplique nuevamente la desigualdad general de Hölder para probar que

$$\int_{\mathbf{R}^2} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \;\leq\; \left(\int_{\mathbf{R}^2} \|\nabla u\|\, dx_1 dy_2\right)^r \int_{\mathbf{R}} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n} I_i^r\, dx_2$$

$$\leq \left(\int_{\mathbf{R}^2} \|\nabla u\|\, dx_1 dy_2\right)^r \left(\int_{\mathbf{R}^2} \|\nabla u\|\, dy_1 dx_2\right)^r \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{\mathbf{R}^3} \|\nabla u\|\, dx_1 dx_2 dy_i\right)^r ,$$

donde $I_1 := \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \|\nabla u\|\, dy_1$ e $I_i := \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} \|\nabla u\|\, dx_1 dy_i$ para todo $i \in \{3, ..., n\}$.

d) Integre sucesivamente con respecto a $x_3, ..., x_n$, y deduzca que

$$\int_{\mathbf{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx$$

$$\leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \|\nabla u\|\, dx_1 \cdots dy_i \cdots dx_n\right)^r = \left(\int_{\mathbf{R}^n} \|\nabla u\|\, dx\right)^{\frac{n}{n-1}} , \tag{4}$$

lo cual prueba (1) para $p = 1$.

e) Considere $1 < p < n$ y aplique (4) a $v := |u|^\gamma$, con $\gamma := \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$, para concluir que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbf{R}^n)} \;\leq\; \gamma\, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} .$$

Problema 21 (Desigualdad de Poincaré en una bola). Sean $x \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$, y considere $p \in [1, \infty)$. Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de p y n, tal que

$$\|u - (u)_{x,r}\|_{L^p(B(x,r))} \;\leq\; C\, r\, \|\nabla u\|_{L^p(B(x,r))} \qquad \forall\, u \in W^{1,p}(B(x,r)) ,$$

donde $(u)_{x,r} := \dfrac{1}{|B(x,r)|} \displaystyle\int_{B(x,r)} u(y)\, dy$.

Problema 22 (Teorema de Plancherel). Sea $v \in L^2(\mathbf{R}^n)$. La transformada de Fourier $\hat{v}$ de v se define como

$$\hat{v}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\, v(x)\, dx \qquad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n\,.$$

Demuestre que la transformada de Fourier es una isometría de $L^2(\mathbf{R}^n)$ en $L^2(\mathbf{R}^n)$, esto es $\hat{v} \in L^2(\mathbf{R}^n)$ y $\|\hat{v}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$ para todo $v \in L^2(\mathbf{R}^n)$.

Problema 23. Demuestre que

$$H^1(\mathbf{R}^n) \;=\; \Big\{\, v \in L^2(\mathbf{R}^n) : \quad (1 + \|\xi\|^2)^{1/2}\, \hat{v} \in L^2(\mathbf{R}^n) \,\Big\}\,,$$

y que

$$\|v\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \;=\; \|(1 + \|\xi\|^2)^{1/2}\, \hat{v}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \qquad \forall\, v \in H^1(\mathbf{R}^n)\,.$$

Problema 24 (Teorema de Rellich). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1. El objetivo es demostrar que $H^1(\Omega) \stackrel{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$. Para tal efecto, se sugiere proceder de la siguiente manera:

a) Considere una sucesión acotada $\{v_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ de $H^1(\Omega)$, defina $u_m := E(v_m)$ $\forall\, m \in \mathbf{N}$, donde $E : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbf{R}^n)$ es el operador de extensión usual, y muestre que existen una subsucesión $\{u_m^{(1)}\}_{m\in\mathbf{N}} \subseteq \{u_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ y $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$, con $\operatorname{sop} u$ compacto, tales que $\{u_m^{(1)}\}_{m\in\mathbf{N}}$ converge débilmente a u en $L^2(\mathbf{R}^n)$.

b) Aplique el Teorema de Plancherel y el Problema **23** para mostrar que

$$\|u_m^{(1)} - u\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)} \;\le\; \int_{B(\mathbf{0},M)} |\hat{u}_m^{(1)}(\xi) - \hat{u}(\xi)|^2\, d\xi \;+\; \frac{1}{1 + M^2}\, \|u_m^{(1)} - u\|^2_{H^1(\mathbf{R}^n)}$$

para todo $M > 0$.

c) Utilice **a)** para probar que

$$\lim_{m\to\infty} \hat{u}_m^{(1)}(\xi) \;=\; \hat{u}(\xi) \quad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n\,,$$

y luego aplique el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue para deducir que

$$\lim_{m\to\infty} \int_{B(\mathbf{0},M)} |\hat{u}_m^{(1)}(\xi) - \hat{u}(\xi)|^2\, d\xi \;=\; 0 \quad \text{para todo} \quad M > 0\,.$$

d) Concluya a partir de **b)** y **c)** que

$$\lim_{m\to\infty} \|v_m^{(1)} - u\|^2_{L^2(\Omega)} \;=\; 0\,.$$

Problema 25. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1. Demuestre que $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^{m-1}(\Omega)$ para todo $m \in \mathbf{N}$.

Problema 26 (Desigualdad de Poincaré generalizada). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1, y sea $m \in \mathbf{N}$. Sea $\mathcal{F}$ una familia finita de funcionales lineales y acotados sobre $H^m(\Omega)$, tal que la siguiente propiedad se cumple:

$$\Big(v \text{ polinomio de grado} \leq m-1 \quad \text{y} \quad F(v) = 0 \quad \forall\, F \in \mathcal{F} \Big) \quad \Rightarrow \quad v \equiv 0\,.$$

Pruebe que la aplicación $\|\cdot\|_{\mathcal{F}} : H^m(\Omega) \to \mathbf{R}$, definida por

$$\|v\|_{\mathcal{F}} \,:=\, \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|^2_{L^2(\Omega)} \,+\, \sum_{F\in\mathcal{F}} |F(v)|^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^m(\Omega)\,,$$

es una norma equivalente a la norma usual de $H^m(\Omega)$.

Problema 27 (Definición de $H^m(\mathbf{R}^n)$ usando transformada de Fourier). Sea $m \in \mathbf{N}$. Demuestre que

$$H^m(\mathbf{R}^n) := \{ v \in L^2(\mathbf{R}^n) : \quad (1 + \|\xi\|^2)^{m/2}\, \hat{v} \in L^2(\mathbf{R}^n) \}\,,$$

y que existen constantes C_1, $C_2 > 0$, tales que

$$C_1\, \|v\|_{H^m(\mathbf{R}^n)} \,\leq\, \|(1 + \|\xi\|^2)^{m/2}\, \hat{v}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \,\leq\, C_2\, \|v\|_{H^m(\mathbf{R}^n)} \quad \forall\, v \in H^m(\mathbf{R}^n)\,.$$