UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

P R U E B A 1

Métodos de Elementos Finitos Mixtos (525539)

Viernes 10 de Diciembre de 2021 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. [1 punto] Sean K y $\widehat{K}$ compactos conexos de R^n con fronteras de clase $\mathrm{C}^{0,1}$, y sea $T_K : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ la aplicación afín invertible dada por $T_K(\widehat{\mathbf{x}}) := B_K\,\widehat{\mathbf{x}} + b_K$ para todo $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathrm{R}^n$, con $B_K \in \mathrm{R}^{n\times n}$ y $b_K \in \mathrm{R}^n$, tal que $K = T_K(\widehat{K})$. Además, sean m un entero ≥ 0 y $p \in (1,+\infty)$. Utilice la densidad de $\mathrm{C}^m(K)$ en $W^{m,p}(K)$ para demostrar que para cada $v \in W^{m,p}(K)$ existe $\widehat{v} := v \circ T_K \in W^{m,p}(\widehat{K})$, el cual satisface

$$|\widehat{v}|_{m,p;\widehat{K}} \;\leq\; C\,\|B_K\|^m\,|\det(B_K)|^{-1/p}\,|v|_{m,p;K}\,,$$

donde C es una constante positiva independiente de K. A su vez, sin realizar una demostración análoga a la anterior, sino simplemente intercambiando los roles de K y $\widehat{K}$, y aplicando lo ya demostrado, establezca la implicación y desigualdad recíprocas, esto es, para cada $\widehat{v} \in W^{m,p}(\widehat{K})$ existe $v := \widehat{v} \circ T_K^{-1} \in W^{m,p}(K)$ y

$$|v|_{m,p;K} \;\leq\; C\,\|B_K^{-1}\|^m\,|\det(B_K)|^{1/p}\,|\widehat{v}|_{m,p;\widehat{K}}\,.$$

2. [1 punto] Sea Ω un abierto acotado de R^n con frontera Γ suficientemente suave. Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, considere el problema de Neumann:

$$\begin{aligned} -\,\Delta\,u \,+\, u \,&=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,,\\ \nabla u\cdot\boldsymbol{\nu} \,&=\, g \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal exterior a Γ.

   a) Defina incógnitas auxiliares convenientes y demuestre que una formulación mixta de (1) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma},\varphi) \in H(\mathrm{div};\Omega)\times H^{1/2}(\Gamma)$ tal que

$$\begin{aligned} \langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}\rangle_{\mathrm{div},\Omega} \,+\, \langle\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu},\varphi\rangle_\Gamma \quad &= \quad -\int_\Omega f\,\mathrm{div}\boldsymbol{\tau} \quad \forall\,\boldsymbol{\tau}\in H(\mathrm{div};\Omega)\,,\\ \langle\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nu},\psi\rangle_\Gamma \quad &= \quad \langle g,\psi\rangle_\Gamma \quad \forall\,\psi\,\in\,H^{1/2}(\Gamma)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

   donde $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle_{\mathrm{div},\Omega}$ y $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle_\Gamma$ denotan el producto interior de $H(\mathrm{div};\Omega)$ y la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma)$ con $H^{1/2}(\Gamma)$, respectivamente.

   b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que (2) posee una única solución, la cual depende continuamente de los datos f y g.

3. [2 PUNTOS] Sean $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H\big)$ y $\big(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q\big)$ espacios de Hilbert con normas $\|\cdot\|_H$ y $\|\cdot\|_Q$, respectivamente, $a : H\times H \to \mathrm{R}$ y $b : H\times Q \to \mathrm{R}$ formas bilineales acotadas con constantes correspondientes $\|a\|$ y $\|b\|$, y V el espacio nulo del operador inducido por b. Suponga que:

   i) existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{\substack{\tau\in V\\ \tau\neq 0}} \frac{a(\zeta,\tau)}{\|\tau\|_H} \,\ge\, \alpha\,\|\zeta\|_H \qquad \forall\,\zeta\in V,$

   ii) para cada $\tau\in V$, $\tau\neq 0$, se tiene que $\displaystyle\sup_{\zeta\in V} a(\zeta,\tau) \,>\, 0$, y

   iii) existe una constante $\beta > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{\substack{\tau\in H\\ \tau\neq 0}} \frac{b(\tau,v)}{\|\tau\|_H} \,\ge\, \beta\,\|v\|_Q \qquad \forall\,v\in Q.$

   Además, sea $A : (H\times Q)\times(H\times Q) \to \mathrm{R}$ la forma bilineal definida por

   $$A\big((\zeta,w),(\tau,v)\big) := a(\zeta,\tau) \,+\, b(\tau,w) \,+\, b(\zeta,v) \qquad \forall\,(\zeta,w),\,(\tau,v)\in H\times Q\,,$$

   y para cada $(\zeta,w)\in H\times Q$ introduzca $S(\zeta,w) \,:=\, \displaystyle\sup_{\substack{(\tau,v)\in H\times Q\\ (\tau,v)\neq 0}} \frac{A\big((\zeta,w),(\tau,v)\big)}{\|(\tau,v)\|_{H\times Q}}$ y los funcionales $F_{\zeta,w}\in H'$ y $G_{\zeta,w}\in Q'$ dados por

   $$F_{\zeta,w}(\tau) \,:=\, A\big((\zeta,w),(\tau,0)\big) \quad \forall\,\tau\in H \;\text{ y }\; G_{\zeta,w}(v) \,:=\, A\big((\zeta,w),(0,v)\big) \quad \forall\,v\in Q\,.$$

   a) Demuestre que para cada $(\zeta,w)\in H\times Q$ se tiene

   $$\frac{1}{2}\Big\{\|F_{\zeta,w}\|_{H'} \,+\, \|G_{\zeta,w}\|_{Q'}\Big\} \,\le\, S(\zeta,w) \,\le\, \|F_{\zeta,w}\|_{H'} \,+\, \|G_{\zeta,w}\|_{Q'}\,. \tag{3}$$

   b) Utilice i), iii), y el hecho que cada $\zeta\in H$ se descompone como $\zeta = \zeta_0 + \bar{\zeta}$, con $\zeta_0\in V$ y $\bar{\zeta}\in V^\perp$ únicos, para demostrar que para cada $(\zeta,w)\in H\times Q$ se tiene

   $$\|\zeta\|_H \,\le\, \frac{1}{\alpha}\,\|F_{\zeta,w}\|_{H'} + \frac{1}{\beta}\Big(1+\frac{\|a\|}{\alpha}\Big)\|G_{\zeta,w}\|_{Q'} \quad \text{y}$$

   $$\|w\|_Q \,\le\, \frac{1}{\beta}\Big(1+\frac{\|a\|}{\alpha}\Big)\|F_{\zeta,w}\|_{H'} + \frac{\|a\|}{\beta^2}\Big(1+\frac{\|a\|}{\alpha}\Big)\|G_{\zeta,w}\|_{Q'}\,,$$

   y deduzca, usando (3), que existe una constante $\widetilde{\alpha} > 0$, que depende de α, β, y $\|a\|$, tal que $S(\zeta,w) \,\ge\, \widetilde{\alpha}\,\|(\zeta,w)\|_{H\times Q}$ para todo $(\zeta,w)\in H\times Q$.

   c) Pruebe que $\displaystyle\sup_{(\zeta,w)\in H\times Q} A\big((\zeta,w),(\tau,v)\big) > 0$ para cada $(\tau,v)\in H\times Q$, $(\tau,v)\neq 0$.

   d) Concluya, utilizando b), c) y el Lema de Lax-Milgram generalizado, que para cada par $(f,g)\in H'\times Q'$ existe un único $(\sigma,u)\,\in\, H\times Q$ solución del problema

   $$\begin{array}{lcll} a(\sigma,\tau) \,+\, b(\tau,u) & = & f(\tau) & \forall\,\tau\,\in\, H\,,\\ b(\sigma,v) & = & g(v) & \forall\,v\,\in\, Q\,, \end{array} \tag{4}$$

   el cual satisface $\|(\sigma,u)\|_{H\times Q} \,\le\, \widetilde{\alpha}^{-1}\Big\{\|f\|_{H'} \,+\, \|g\|_{Q'}\Big\}$.

   IND.: Para b) tenga también en mente la condición inf-sup equivalente a iii), y para c) recuerde el par de condiciones inf-sup que es equivalente al par i) - ii).

4. [2 PUNTOS] En el contexto del problema acoplado de Darcy con una ecuación de convección-difusión, el cual ocurre en un abierto acotado Ω de R^2 con frontera Γ de clase $\mathrm{C}^{0,1}$ y vector normal $\boldsymbol{\nu}$, se llega a la siguiente formulación variacional mixta: Hallar $(\mathbf{u}, p) \in X_2 \times M_1$ tal que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_1(\mathbf{v}, p) &= F(\mathbf{v}) \qquad \forall\, \mathbf{v} \in X_1\,, \\ b_2(\mathbf{u}, q) &= G(q) \qquad \forall\, q \in M_2\,, \end{aligned} \tag{5}$$

donde, eligiendo convenientemente $r,\ s \in (1, +\infty)$ conjugados, se tiene

$$\begin{aligned} X_2 &:= \Big\{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^r(\mathrm{div}_r; \Omega) : \quad \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \Big\}\,, \\ X_1 &:= \Big\{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^s(\mathrm{div}_s; \Omega) : \quad \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \Big\}\,, \\ M_1 &:= \Big\{ q \in \mathbf{L}^r(\Omega) : \quad \textstyle\int_\Omega q = 0 \Big\}\,, \\ M_2 &:= \Big\{ q \in \mathbf{L}^s(\Omega) : \quad \textstyle\int_\Omega q = 0 \Big\}\,, \end{aligned} \tag{6}$$

$a : X_2 \times X_1 \to \mathrm{R}$ y $b_i : X_i \times M_i \to \mathrm{R}$, $i \in \big\{1, 2\big\}$, son las formas bilineales

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &:= \int_\Omega \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \qquad \forall\, (\mathbf{w}, \mathbf{v}) \in X_2 \times X_1\,, \\ b_i(\mathbf{v}, q) &:= \int_\Omega q\, \mathrm{div}(\mathbf{v}) \qquad \forall\, (\mathbf{v}, q) \in X_i \times M_i\,, \end{aligned} \tag{7}$$

y $F \in X_1'$, $G \in M_2'$ son funcionales dados.

a) Demuestre que para cada $i \in \big\{1, 2\big\}$ el espacio nulo $\mathcal{K}_i$ del operador inducido por b_i se reduce a $\mathcal{K}_i := \Big\{ \mathbf{v} \in X_i : \quad \mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \Big\}$.

b) Suponga que existe un operador lineal y acotado $D_s : \mathbf{L}^s(\Omega) \to \mathbf{L}^s(\Omega)$ tal que para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{L}^s(\Omega)$ se tiene $D_s(\mathbf{z}) \in \mathcal{K}_1$ y $\displaystyle\int_\Omega \mathbf{w} \cdot D_s(\mathbf{z}) = \int_\Omega \mathbf{w} \cdot \mathbf{z}$ para todo $\mathbf{w} \in \mathcal{K}_2$, y pruebe, mayorando adecuadamente, que existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathcal{K}_1 \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{a(\mathbf{w}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{X_1}} \geq \alpha\, \|\mathbf{w}\|_{X_2} \quad \forall\, \mathbf{w} \in \mathcal{K}_2$.

c) Haga el supuesto análogo al de b) con r, $\mathcal{K}_2$ y $\mathcal{K}_1$ en vez de s, $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$, respectivamente, y demuestre que $\displaystyle\sup_{\mathbf{w} \in \mathcal{K}_2} a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) > 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{K}_1,\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

d) Suponga que para cada $g \in M_2$ hay un único $z \in W^{1,s}(\Omega)$ tal que $\Delta z = g$ en Ω, $\nabla z \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ en Γ y $\int_\Omega z = 0$, para el cual se tiene $\|z\|_{1,s;\Omega} \leq C_s\, \|g\|_{0,s;\Omega}$, con una constante $C_s > 0$ independiente de g y z, y pruebe, mayorando adecuadamente, que existe una constante $\beta_1 > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{\substack{\mathbf{v} \in X_1 \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{b_1(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{X_1}} \geq \beta_1\, \|q\|_{M_1} \quad \forall\, q \in M_1$.

e) Haga el supuesto análogo al de d) con M_1 y r en vez de M_2 y s, respectivamente, y pruebe la condición inf-sup continua de b_2.

f) Aplique el caso general del Teorema de Babuška-Brezzi en espacios de Banach y concluya la solubilidad y dependencia continua de (5).

GGP/ggp