Profesor: Fernando Roldán
Ayudantes: Cristofer Mamani y Fernando Muñoz
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Certamen 1 – Optimización II (5225565)

Fecha: Lunes 06 de Octubre de 2025.

P1) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Suponga que A y A^c están separados por un hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x = \alpha\}$ donde $a \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

(i) $\partial A \subset H$.

(ii) $x \in \operatorname{int}(A) \Leftrightarrow a^\top x < \alpha$. **Hint:** Para cada $x_0 \in \mathcal{H}$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $y \in B(x_0, \varepsilon)$ tal que $\alpha < a^\top y$.

(iii) $\operatorname{int}(A)$ es convexo.

(iv) $\operatorname{int}(A^c)$ es convexo.

Solución

(i) Si H separa A y A^c entonces,

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A^c) \quad a^\top x \leq \alpha \leq a^\top y.$$

Tomando $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A^c tales que $x_n \to z \in \partial A$ e $y_n \to z$ se tiene que

$$a^\top z \leq \alpha \leq a^\top z,$$

de donde se deduce que $a^\top z = \alpha$ y por lo tanto $z \in H$. Concluimos que $\partial A \subset H$.

(ii) Sea $x \in \operatorname{int}(A)$. En particular se tiene que $a^\top x \leq \alpha$. Si $a^\top x = \alpha$, $x \in \partial A$ entonces $x \in H$. Como para cada $\varepsilon > 0$ existe $y \in B(x, \varepsilon)$ tal que $\alpha < a^\top y$ por lo tanto $y \in A^c$ lo que contradice que x sea un punto interior. Por otro lado, si $a^\top x < \alpha$, $x \notin H \Rightarrow x \notin \partial A$ y como $x \notin A^c$ se sigue que $x \in \operatorname{int}(A)$.

(iii) Sea $x, y \in \operatorname{int}(A)$, entonces $a^\top x < \alpha$ y $a^\top y < \alpha$. Se sigue que

$$\begin{aligned} a\top(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lambda a^\top x + (1-\lambda)a^\top y \\ &< \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(\lambda x + (1-\lambda)y) \in \operatorname{int}(A)$ y entonces este conjunto es convexo.

(iv) Es directo intercambiando A^c por A.

P2) Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fuertemente convexa[1] con constante $\mu > 0$ y diferenciable (en el sentido de Fréchet).

(i) Demuestre que f es μ-fuertemente convexa si y solo si $(f - \frac{\mu}{2}\|x\|^2)$ es convexa.

(ii) Sea $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa. Demuestre que $f + g$ es μ-fuertemente convexa.

[1] es decir $f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2$, para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ y cada $\lambda \in [0,1]$.

(iii) Pruebe que f es fuertemente convexa con constante $\mu > 0$ si y solo si, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x))^\top (y - x) + \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2.$$

(iv) Pruebe que si $\nabla f(x) = 0$ entonces x es un mínimo de f.

(v) Pruebe que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f(y) \leq f(x) + (\nabla f(x))^\top (y - x) + \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2.$$

Se recomienda proceder de la siguiente manera

a) Para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, considere la función $\phi\colon y \mapsto f(y) + (\nabla f(x))^\top (x - y)$. Demuestre que esta función es fuertemente convexa, que $\nabla \phi(x) = 0$ y por lo tanto x es el único minimizador de ϕ (recuerde que en la tarea se demostró que las funciones fuertemente convexas tienen un único minimzador).

b) Considere ahora, para $y \in \mathbb{R}^n$ fijo, la función $\phi_2\colon z \mapsto \phi(y) + (\nabla\phi(y))^\top (z - y) + \frac{\mu}{2}\|z - y\|^2$ y de manera análoga concluya que ϕ_2 tiene un único[2] mínimo en $z = y - \frac{1}{\mu}\nabla\phi(y)$. Verifique que el valor mínimo es $\phi(y) - \frac{1}{2\mu}\|\nabla\phi(y)\|^2$.

c) Demuestre que para todo $z \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\phi(z) \geq \phi_2(z)$.

d) Concluya lo solicitado notando que $\phi(x) = \min_{z \in \mathbb{R}^n} \phi(z) \geq \min_{z \in \mathbb{R}^n} \phi_2(z)$.

(vi) Pruebe que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^\top (x - y) \leq \frac{1}{\mu}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2.$$

Solución

(i) Notemos que $f - \frac{\mu}{2}\|\cdot\|^2$ es convexa si y solo si

$$\begin{aligned}
&f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) - \frac{\mu}{2}\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 \leq \lambda\left(f(x) - \frac{\mu}{2}\|x\|^2\right) + (1-\lambda)\left(f(y) - \frac{\mu}{2}\|y\|^2\right) \\
&\quad\Leftrightarrow f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + \frac{u}{2}\left(\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 - \lambda\|x\|^2 - (1-\lambda)\|y\|^2\right).
\end{aligned}$$

Adicionalmente

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 - \lambda\|x\|^2 - (1-\lambda)\|y\|^2 &= \lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda(1-\lambda)x^\top y + (1-\lambda)^2\|y\|^2 - \lambda\|x\|^2 - (1-\lambda)\|y\|^2 \\
&= \lambda(\lambda-1)\|x\|^2 - 2\lambda(1-\lambda)x^\top y + (1-\lambda)\lambda\|y\|^2 \\
&= \lambda(1-\lambda)\|x - y\|^2,
\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado.

(ii) Debido a que g es convexa $g + f - \frac{\mu}{2}\|\cdot\|^2$ es convexa. Se concluye que $g + f$ es μ-fuertemente convexa.

(iii) Se sigue de la caracterización de funciones convexas y diferenciables aplicada a la función $f - \frac{\mu}{2}\|\cdot\|^2$.

(iv) Se sigue directamente de (iii) remplazando $\nabla f(x) = 0$.

(v) a) Debido a que $(\nabla f(x))^\top (x - y)$ es afín, por lo tanto convexa, de la fuerte convexidad de f, se sigue que ϕ es fuertemente convexa. Además, $\nabla\phi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$. Por lo tanto $\nabla\phi(x) = 0$ y por el resultado visto en la tarea, se concluye que x es el único minimizador de ϕ.

[2]La función $z \mapsto \frac{\mu}{2}\|z - y\|^2$ es fuertemente convexa

b) Análogamente, ϕ_2 es fuertemente convexa ya que $\phi(y)+(\nabla\phi(y))^\top(z-y)$ es convexa y $\frac{\mu}{2}\|z-y\|^2$ es fuertemente convexa. En este caso $\nabla\phi_2(z)=\nabla\phi(y)+\mu(z-y)$ por lo tanto $\nabla\phi_2(z)=0$ si y solo si $z=y-\frac{1}{\mu}\nabla\phi(y)$ de donde se concluye que el valor mínimo es $\phi_2(y-\frac{1}{\mu}\nabla\phi(y))=\phi(y)-\frac{1}{2\mu}\|\nabla\phi(y)\|^2$.

c) Esto es directo de (iii).

d) Notemos que,

$$\begin{aligned}\phi(x)=\min_{z\in\mathbb{R}^n}\phi(z)\geq\min_{z\in\mathbb{R}^n}\phi_2(z)&\Rightarrow f(x)\geq\phi(y)-\frac{1}{2\mu}\|\nabla\phi(y)\|^2\\&\Leftrightarrow f(x)\geq f(y)+(\nabla f(x))^\top(x-y)-\frac{1}{2\mu}\|\nabla f(y)-\nabla f(y)\|^2,\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado.

(vi) Directo de (v) intercambiando los roles de x e y y sumando.