基于误差状态卡尔曼的 GPS/IMU 融合导航算法

金宇强　　1112003021

摘要 针对 GPS（Global positioning system）信号缺失环境下的无人车定位导航问题，使用了一种 GPS 与 IMU 融合的误差状态卡尔曼滤波（ESKF）框架。不同于传统的扩展卡尔曼（EKF）框架，ESKF 对误差状态进行更新与修正。由于误差状态是小量，并且其线性成都较高，因此其局部线性化的模型误差更小，进而可以提高状态估计的精度。通过 Matlab 设计了小车导航的仿真实验，验证了该算法的有效性。

关键词　定位导航；GPS/IMU；误差状态卡尔曼滤波

（未完成，待补充）

引言

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

1　误差状态卡尔曼滤波（Error state Kalman filter）

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

1.1　符号定义

为了方便分析，定义 ESKF 中的所有变量如表 1 所示，其中$\oplus$表示广义的加法，另外，Δt表示时间离散状态的时间间隔，$\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^3$表示单位矩阵，$\boldsymbol{L}_{sk}(\boldsymbol{b})$表示向量$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$构成的反对称矩阵，$\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^3$为重力向量，算子$q(\theta)$和$R(\theta)$分别表示轴角向量$\boldsymbol{\theta}$对应的四元数及其旋转矩阵，本文涉及的四元数乘法、矩阵对数以及李群李代数的指数映射均参考文[]。

名称	真实状态	标称状态	误差状态	运算律	测量	噪声
全状态$\in \mathbb{R}^{16}$	$\boldsymbol{x}_t$	$\boldsymbol{x}$	$\delta\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x} \oplus \delta\boldsymbol{x}$		
位置$\in \mathbb{R}^3$	$\boldsymbol{p}_t$	$\boldsymbol{p}$	$\delta\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{p}_t = \boldsymbol{p} + \delta\boldsymbol{p}$		
速度$\in \mathbb{R}^3$	$\boldsymbol{v}_t$	$\boldsymbol{v}$	$\delta\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{v} + \delta\boldsymbol{v}$		
四元数$\in \mathbb{R}^3$	$\boldsymbol{q}_t$	$\boldsymbol{q}$	$\delta\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{q}_t = \boldsymbol{q} \otimes \delta\boldsymbol{q}$		
旋转矩阵$\in SO(3)$	$\boldsymbol{R}_t$	$\boldsymbol{R}$	$\delta\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}_t = \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{R}$		
轴角$\in \mathbb{R}^3$				$\delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{e}^{\delta\boldsymbol{\theta}/2}$ $\delta\boldsymbol{R} = \boldsymbol{e}^{[\delta\boldsymbol{\theta}]_\times}$		

加速度偏置$\in \mathbb{R}^3$ 角速度偏置$\in \mathbb{R}^3$	$\boldsymbol{a}_{bt}$ $\boldsymbol{\omega}_{bt}$	$\boldsymbol{a}_b$ $\boldsymbol{\omega}_b$	$\delta\boldsymbol{a}_b$ $\delta\boldsymbol{\omega}_b$	$\boldsymbol{a}_{bt}=\boldsymbol{a}_b+\delta\boldsymbol{a}_b$ $\boldsymbol{\omega}_{bt}=\boldsymbol{\omega}_b+\delta\boldsymbol{\omega}_b$		$\boldsymbol{a}_w$ $\boldsymbol{\omega}_w$
加速度$\in \mathbb{R}^3$ 角速度$\in \mathbb{R}^3$	$\boldsymbol{a}_t$ ω_t				$\boldsymbol{a}_m$ ω_m	$\boldsymbol{a}_n$ ω_n

1.2 IMU 动力学方程

根据[Quaternion kinematics for the error-state KF]，真实状态的连续时间 IMU 动力学方程如下：

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{p}}_t &= \boldsymbol{v}_t \\
\dot{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{a}_m-\boldsymbol{a}_{bt}-\boldsymbol{a}_n)+\boldsymbol{g}_t \\
\dot{\boldsymbol{q}}_t &= \frac{1}{2}\boldsymbol{q}_t\otimes(\boldsymbol{\omega}_m-\boldsymbol{\omega}_{bt}-\boldsymbol{\omega}_n) \\
\dot{\boldsymbol{a}}_{bt} &= \boldsymbol{a}_\omega,\quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{bt}=\boldsymbol{\omega}_\omega
\end{aligned} \tag{1}$$

其中$\boldsymbol{a}_n$和$\boldsymbol{\omega}_n\in\mathbb{R}^3$分别表示加速度和角速度测量白噪声，$\boldsymbol{a}_\omega$和$\boldsymbol{\omega}_\omega\in\mathbb{R}^3$分别表示加速度和角速度的偏置向量，标称（名义状态）的 IMU 动力学方程如下：

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{p}} &= \boldsymbol{v} \\
\dot{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}_m-\boldsymbol{a}_b)+\boldsymbol{g} \\
\dot{\boldsymbol{q}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{q}\otimes(\boldsymbol{\omega}_m-\boldsymbol{\omega}_b) \\
\dot{\boldsymbol{a}}_b &= 0,\quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_b=0
\end{aligned} \tag{2}$$

根据式（1）和（2）即得到误差状态的动力学方程：

$$\begin{aligned}
&\delta\dot{\boldsymbol{p}}=\delta\boldsymbol{v} \\
&\delta\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{L}_{sk}(\boldsymbol{a}_m-\boldsymbol{a}_b)\delta\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{a}_b-\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_n \\
&\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}=-\boldsymbol{L}_{sk}(\boldsymbol{\omega}_m-\boldsymbol{\omega}_b)\delta\boldsymbol{\theta}-\delta\boldsymbol{\omega}_b-\boldsymbol{\omega}_n \\
&\delta\dot{\boldsymbol{a}}_b=\boldsymbol{a}_\omega \\
&\delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_b=\boldsymbol{\omega}_\omega
\end{aligned} \tag{3}$$

在实际应用中，上述的微分方程需要转换为差分方程，其中，标称状态的运动模型递推表达式为：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{p}_{k+1}=\boldsymbol{p}_{k+1}+\boldsymbol{v}_k\Delta t+\frac{1}{2}(\boldsymbol{R}_k(\boldsymbol{a}_{mk}-\boldsymbol{a}_{bk})+\boldsymbol{g})\Delta t^2 \\
&\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{v}_k+(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}_m-\boldsymbol{a}_b)+\boldsymbol{g})\Delta t \\
&\boldsymbol{q}_{k+1}=\boldsymbol{q}_k\otimes\boldsymbol{q}_k\big((\boldsymbol{\omega}_m-\boldsymbol{\omega}_b)\Delta t\big) \\
&\boldsymbol{a}_{b(k+1)}=\boldsymbol{a}_{bk} \\
&\boldsymbol{\omega}_{b(k+1)}=\boldsymbol{\omega}_{bk}
\end{aligned} \tag{4}$$

其中k即表示第k时刻，误差状态的运动模型递推公式为：

$$
\begin{aligned}
&\delta\boldsymbol{p}_{k+1} = \delta\boldsymbol{p}_k + \delta\boldsymbol{v}_k \Delta t \\
&\delta\boldsymbol{v}_{k+1} = \delta\boldsymbol{v}_k + (-\boldsymbol{R}_k \boldsymbol{L}_{sk}(\boldsymbol{a}_{mk} - \boldsymbol{a}_{bk})\delta\boldsymbol{\theta}_k - \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{a}_{bk})\Delta t + \boldsymbol{w}_{vk} \\
&\delta\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{R}_k^T((\boldsymbol{\omega}_{mk} - \boldsymbol{\omega}_{bk})\Delta t)\delta\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{\omega}_{bk}\Delta t - \boldsymbol{w}_{\theta k} \\
&\delta\boldsymbol{a}_{b(k+1)} = \delta\boldsymbol{a}_{bk} + \boldsymbol{w}_{ak} \\
&\delta\boldsymbol{\omega}_{b(k+1)} = \delta\boldsymbol{\omega}_{bk} + \boldsymbol{w}_{\omega k}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中$\boldsymbol{w}_{vk}$，$\boldsymbol{w}_{\theta k}$，$\boldsymbol{w}_{ak}$，$\boldsymbol{w}_{\omega k} \in \mathbb{R}^3$分别对应速度、姿态、加速度偏置以及角速度偏置的高斯随机脉冲噪声，其对应的协方差矩阵定义如下：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_v &= \sigma_{\mathbf{a}_\mathrm{n}}^2 \Delta t^2 \boldsymbol{I} & \left[\frac{m^2}{s^2}\right] \\
\boldsymbol{w}_\theta &= \sigma_{\boldsymbol{\omega}_\mathrm{n}}^2 \Delta t^2 \boldsymbol{I} & [rad^2] \\
\boldsymbol{w}_a &= \sigma_{\mathbf{a}_\omega}^2 \Delta t^2 \boldsymbol{I} & \left[\frac{m^2}{s^4}\right] \\
\boldsymbol{w}_\omega &= \sigma_{\boldsymbol{\omega}_\omega}^2 \Delta t^2 \boldsymbol{I} & \left[\frac{rad^2}{s^2}\right]
\end{aligned}
\tag{6}
$$

其中$\sigma_{\mathbf{a}_\mathrm{n}}^2$，$\sigma_{\boldsymbol{\omega}_\mathrm{n}}^2$，$\sigma_{\mathbf{a}_\omega}^2$，$\sigma_{\boldsymbol{\omega}_\omega}^2 \in \mathbb{R}$分别表示加速度、角速度、加速度偏置和角速度偏置的高斯白噪声的方差。

1.3 ESKF 的预测与更新过程

误差状态卡尔曼滤波的核心思想是：1）将系统状态分别定义为真实状态和标称状态，误差状态定义为两个状态的差值；2）将标称状态作为较大的状态量，其继承系统的非线性；3）将线性度高的误差状态作为小的状态量进行预测与估计。总的来说，标称状态不考虑 IMU 的测量噪声以及扰动信息，而误差状态包含这些扰动，标称状态的地推与误差状态的预测同时进行更新，然后通过 GPS 信号去修正误差状态的估计，进而将误差状态融合到标称状态中去，最后误差状态及其协方差矩阵复位，如此循环往复。ESKF 同过推到误差状态动力学方程，借助非线性模型的摄动，来实现误差状态及其协方差的最优预测与更新。因为误差状态动力学的非线性程度更低，所以与针对状态进行局部线性化的 EKF 相比，ESKF 局部线性化的模型误差更小，进而提高了估计的精度。

1.3.1 全状态的更新过程

定义全状态、误差状态、IMU 测量以及噪声的向量形式如下：

$$
\boldsymbol{x}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_k \\ \boldsymbol{v}_k \\ \boldsymbol{q}_k \\ \boldsymbol{a}_{bk} \\ \boldsymbol{\omega}_{bk} \end{bmatrix}, \quad
\delta\boldsymbol{x}_k = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{p}_k \\ \delta\boldsymbol{v}_k \\ \delta\boldsymbol{q}_k \\ \delta\boldsymbol{a}_{bk} \\ \delta\boldsymbol{\omega}_{bk} \end{bmatrix}, \quad
\boldsymbol{u}_{mk} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{mk} \\ \boldsymbol{\omega}_{mk} \end{bmatrix}, \quad
\boldsymbol{w}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{vk} \\ \boldsymbol{w}_{\theta k} \\ \boldsymbol{w}_{ak} \\ \boldsymbol{w}_{\omega k} \end{bmatrix}
\tag{7}
$$

结合式（3）和式（7），可以得到标称状态递推方程：

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_{mk}) \tag{8}$$

其中$\boldsymbol{f}$状态变量的递推函数，结合式（5），可得误差状态递推方程：

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{x}_{k+1} &= \boldsymbol{f}_{\delta}(\boldsymbol{x}_k, \delta\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_{mk}, \boldsymbol{w}_k) \\ &= \boldsymbol{F}_{xk}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_{mk})\delta\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{F}_{wk}\boldsymbol{w}_k \end{aligned} \tag{9}$$

其中$\boldsymbol{f}_{\delta}$表示误差状态的递推函数，$\boldsymbol{F}_{xk}$和$\boldsymbol{F}_{wk}$分别为误差状态和噪声状态对应的雅可比矩阵，本文直接使用了文[3]的推导结果来获得雅可比矩阵:

1.3.2 ESKF 的预测过程

基于式（9），可以得到误差状态以及协方差预测方程：

$$\begin{aligned} \delta\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{-} &= \boldsymbol{F}_{xk}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_{mk})\delta\boldsymbol{x}_k \\ \boldsymbol{P}_{k+1}^{-} &= \boldsymbol{F}_{xk}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{F}_{xk}^{T} + \boldsymbol{F}_{wk}\boldsymbol{Q}_w\boldsymbol{F}_{wk}^{T} \end{aligned} \tag{10}$$

1.3.2 ESKF 的观测过程

由于加速度计以及陀螺仪存在偏置，单纯地进行 IMU 积分估计会导致估计地位姿产生漂移，因此，本文使用 GPS 提供位置量测信息。一般的 GPS 提供的数据为 WGS84 坐标系下的经纬度信息，而本文定义的状态实在 ENU 坐标系下的，为此，需要使用文[4]中的坐标变换方法，将 GPS 数据转换至 ENU 笛卡尔坐标系，表示为${}^{G}\boldsymbol{p}_{Gps}$。这样就可以获得观测方程：

$$ {}^{G}\boldsymbol{p}_{Gps} = {}^{G}\boldsymbol{p} + {}^{G}_{I}\boldsymbol{R}\,{}^{I}\boldsymbol{p}_{Gps} \tag{11}$$

可以计算其对于误差状态的雅可比矩阵：

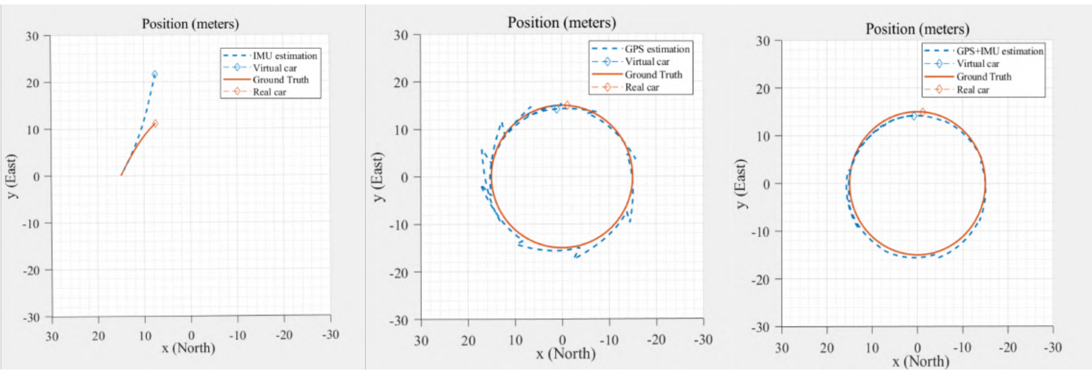
$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial\left({}^{G}\boldsymbol{p} + {}^{G}_{I}\boldsymbol{R}\,{}^{I}\boldsymbol{p}_{Gps}\right)}{\partial\delta\boldsymbol{x}} = \frac{\partial\left({}^{G}_{I}\boldsymbol{R}(1 + \lfloor\delta\boldsymbol{\theta}\rfloor_{\times})\,{}^{I}\boldsymbol{p}_{Gps}\right)}{\partial\delta\boldsymbol{x}} \\ &= \left[\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{0} \quad -{}^{G}_{I}\boldsymbol{R}\lfloor{}^{I}\boldsymbol{p}_{Gps}\rfloor_{\times} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}\right] \end{aligned} \tag{12}$$

待补充

2 实验

基于 Matlab 仿真环境，本文设计了小车环岛定位跟踪实验，对 IMU/GPS 异步融合的算法效果进行分析。分别对仅使用 IMU、仅使用 GPS 和融合 IMU/GPS 三种情况进行了分实验，最终结果如图所示，其中 IMU 的加速度计和陀螺仪的采样频率均为 100Hz，磁力计的采样频率为 50Hz，GPS 的采样频率为 5Hz，小车的运动速度为 10m/s，环岛半径为 15m。可以看到，仅用 IMU 或 GPS 都不能得到很好的定位效果，其中，由于 IMU 的漂移问题随着积分产生累计，IMU 在产生的误差会越来越大。而仅用 GPS 的情况下，由于 GPS 的采样频率较小，无法满足实时精准定位的要求，经过对比，使用 ESKF 算法融合 GPS 和 IMU 的效

果较好。



IMU only GPS only GPS+IMU

3 结论

参考文献

[1] 惯性组合导航原理及应用

[2] Quaternion kinematics for the error-state KF

[3] A micro Lie theory for state estimation in robotics