基于误差状态卡尔曼滤波的GPS/IMU与VIO融合导航

金宇强　1112003021

摘要 针对GPS（Global positioning system）信号不足或丢失环境下的无人车定位导航问题，使用误差状态卡尔曼滤波（ESKF）分别实现了GPS/IMU与VIO融合定位。不同于传统的扩展卡尔曼（EKF）框架，ESKF对误差状态进行更新与修正，由于误差状态是小量，并且其线性程度较高，因此其局部线性化的模型误差更小，可以提高状态估计的精度。通过Matlab分别设计了基于GPS/IMU和VIO定位的仿真场景，结果验证了基于ESKF的融合能有效提高定位精度。

关键词　定位导航；GPS/IMU；VIO；误差状态卡尔曼滤波

引言

车辆的高精度定位导航是智能驾驶的关键技术之一，目前，全球定位系统（GPS）、惯性导航系统（INS）因其易集成、低成本，成为应用最为广泛的2种导航方法。但在室内环境或城市环境中，GPS和IMU都容易受到外部电磁干扰，且GPS信号易丢失，而常见的视觉传感器测量精度高，不受电磁信号影响，且与IMU存在天然的互补优势，因而被广泛集成在车辆导航系统上。本文介绍了基于ESKF的融合框架（松耦合），首先讨论在低频GPS信号场景下，将高频IMU信号与低频GPS信号进行融合，提高定位精度。然后引入了视觉里程计的漂移模型，并讨论在无GPS信号情况下，将VO测量的位姿与IMU信号进行融合，实现了基于VIO的定位导航。通过Matlab的仿真场景与代码实现，验证了该框架的有效性，具体代码地址可见[1]。

1　基于误差状态卡尔曼滤波的GPS/IMU融合

1.1　符号定义

为了方便分析，定义ESKF中的所有变量如表1所示，其中$\oplus$表示广义的加法，另外，Δt表示时间离散状态的时间间隔，$\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^3$表示单位矩阵，$\boldsymbol{L}_{sk}(\boldsymbol{b})$表示向量$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$构成的反对称矩阵，$\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^3$为重力向量，算子$q(\theta)$和$R(\theta)$分别表示轴角向量$\theta$对应的四元数及其旋转矩阵，本文涉及的四元数乘法、矩阵对数以及李群李代数的指数映射均参考文[1][3]。

[1] https://github.com/yuqJin/Informationfusion

表 1 相关符号定义表

名称	真实状态	标称状态	误差状态	运算律	测量	噪声
全状态$\in \mathbb{R}^{16}$	$\boldsymbol{x_t}$	$\boldsymbol{x}$	$\delta\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x_t} = \boldsymbol{x} \oplus \delta\boldsymbol{x}$		
位置$\in \mathbb{R}^3$	$\boldsymbol{p_t}$	$\boldsymbol{p}$	$\delta\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{p_t} = \boldsymbol{p} + \delta\boldsymbol{p}$		
速度$\in \mathbb{R}^3$	$\boldsymbol{v_t}$	$\boldsymbol{v}$	$\delta\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v_t} = \boldsymbol{v} + \delta\boldsymbol{v}$		
四元数$\in \mathbb{R}^3$	$\boldsymbol{q_t}$	$\boldsymbol{q}$	$\delta\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{q_t} = \boldsymbol{q} \otimes \delta\boldsymbol{q}$		
旋转矩阵$\in \mathrm{SO}(3)$	$\boldsymbol{R_t}$	$\boldsymbol{R}$	$\delta\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R_t} = \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{R}$		
轴角$\in \mathbb{R}^3$				$\delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{e}^{\delta\boldsymbol{\theta}/2}$ $\delta\boldsymbol{R} = \boldsymbol{e}^{[\delta\boldsymbol{\theta}]_\times}$		
加速度偏置$\in \mathbb{R}^3$	$\boldsymbol{a_{bt}}$	$\boldsymbol{a_b}$	$\delta\boldsymbol{a_b}$	$\boldsymbol{a_{bt}} = \boldsymbol{a_b} + \delta\boldsymbol{a_b}$		$\boldsymbol{a_w}$
角速度偏置$\in \mathbb{R}^3$	$\boldsymbol{\omega_{bt}}$	$\boldsymbol{\omega_b}$	$\delta\boldsymbol{\omega_b}$	$\boldsymbol{\omega_{bt}} = \boldsymbol{\omega_b} + \delta\boldsymbol{\omega_b}$		$\boldsymbol{\omega_w}$
加速度$\in \mathbb{R}^3$	$\boldsymbol{a_t}$				$\boldsymbol{a_m}$	$\boldsymbol{a_n}$
角速度$\in \mathbb{R}^3$	ω_t				ω_m	ω_n

1.2 IMU 动力学方程

根据[2][3]，真实状态的连续时间 IMU 动力学方程如下：

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{p}}_t &= \boldsymbol{v}_t \\
\dot{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_{bt} - \boldsymbol{a}_n) + \boldsymbol{g}_t \\
\dot{\boldsymbol{q}}_t &= \frac{1}{2}\boldsymbol{q}_t \otimes (\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_{bt} - \boldsymbol{\omega}_n) \\
\dot{\boldsymbol{a}}_{bt} &= \boldsymbol{a}_\omega,\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{bt} = \boldsymbol{\omega}_\omega
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中$\boldsymbol{a}_n$和$\boldsymbol{\omega}_n \in \mathbb{R}^3$分别表示加速度和角速度测量白噪声，$\boldsymbol{a}_\omega$和$\boldsymbol{\omega}_\omega \in \mathbb{R}^3$分别表示加速度和角速度的偏置向量，标称（名义状态）的 IMU 动力学方程如下：

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{p}} &= \boldsymbol{v} \\
\dot{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_b) + \boldsymbol{g} \\
\dot{\boldsymbol{q}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{q} \otimes (\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b) \\
\dot{\boldsymbol{a}}_b &= 0,\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_b = 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

根据式（1）和（2）即得到误差状态的动力学方程：

$$
\begin{aligned}
&\delta\dot{\boldsymbol{p}} = \delta\boldsymbol{v} \\
&\delta\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{L}_{sk}(\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_b)\delta\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{a}_b - \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_n \\
&\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\boldsymbol{L}_{sk}(\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b)\delta\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{\omega}_n \\
&\delta\dot{\boldsymbol{a}}_b = \boldsymbol{a}_\omega \\
&\delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = \boldsymbol{\omega}_\omega
\end{aligned}
\tag{3}
$$

在实际应用中，上述的微分方程需要转换为差分方程，其中，标称状态

的运动模型递推表达式为：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{p}_{k+1}=\boldsymbol{p}_{k+1}+\boldsymbol{v}_k\Delta t+\frac{1}{2}(\boldsymbol{R}_k(\boldsymbol{a}_{mk}-\boldsymbol{a}_{bk})+\boldsymbol{g})\Delta t^2\\
&\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{v}_k+(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}_m-\boldsymbol{a}_b)+\boldsymbol{g})\Delta t\\
&\boldsymbol{q}_{k+1}=\boldsymbol{q}_k\otimes\boldsymbol{q}_k\big((\boldsymbol{\omega}_m-\boldsymbol{\omega}_b)\Delta t\big)\\
&\boldsymbol{a}_{b(k+1)}=\boldsymbol{a}_{bk}\\
&\boldsymbol{\omega}_{b(k+1)}=\boldsymbol{\omega}_{bk}
\end{aligned}\tag{4}$$

其中k即表示第k时刻，误差状态的运动模型递推公式为：

$$\begin{aligned}
&\delta\boldsymbol{p}_{k+1}=\delta\boldsymbol{p}_k+\delta\boldsymbol{v}_k\Delta t\\
&\delta\boldsymbol{v}_{k+1}=\delta\boldsymbol{v}_k+(-\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{L}_{sk}(\boldsymbol{a}_{mk}-\boldsymbol{a}_{bk})\delta\boldsymbol{\theta}_k-\boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{a}_{bk})\Delta t+\boldsymbol{w}_{vk}\\
&\delta\boldsymbol{\theta}_{k+1}=\boldsymbol{R}_k^T((\boldsymbol{\omega}_{mk}-\boldsymbol{\omega}_{bk})\Delta t)\delta\boldsymbol{\theta}-\delta\boldsymbol{\omega}_{bk}\Delta t-\boldsymbol{w}_{\theta k}\\
&\delta\boldsymbol{a}_{b(k+1)}=\delta\boldsymbol{a}_{bk}+\boldsymbol{w}_{ak}\\
&\delta\boldsymbol{\omega}_{b(k+1)}=\delta\boldsymbol{\omega}_{bk}+\boldsymbol{w}_{\omega k}
\end{aligned}\tag{5}$$

其中$\boldsymbol{w}_{vk}$，$\boldsymbol{w}_{\theta k}$，$\boldsymbol{w}_{ak}$，$\boldsymbol{w}_{\omega k}\in\mathbb{R}^3$分别对应速度、姿态、加速度偏置以及角速度偏置的高斯随机脉冲噪声，其对应的协方差矩阵定义如下：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_v&=\sigma_{\mathbf{a}_\mathrm{n}}^2\Delta t^2\boldsymbol{I} && \left[\frac{m^2}{s^2}\right]\\
\boldsymbol{w}_\theta&=\sigma_{\boldsymbol{\omega}_\mathrm{n}}^2\Delta t^2\boldsymbol{I} && [rad^2]\\
\boldsymbol{w}_a&=\sigma_{\mathbf{a}_\omega}^2\Delta t^2\boldsymbol{I} && \left[\frac{m^2}{s^4}\right]\\
\boldsymbol{w}_\omega&=\sigma_{\boldsymbol{\omega}_\omega}^2\Delta t^2\boldsymbol{I} && \left[\frac{rad^2}{s^2}\right]
\end{aligned}\tag{6}$$

其中$\sigma_{\mathbf{a}_\mathrm{n}}^2$，$\sigma_{\boldsymbol{\omega}_\mathrm{n}}^2$，$\sigma_{\mathbf{a}_\omega}^2$，$\sigma_{\boldsymbol{\omega}_\omega}^2\in\mathbb{R}$分别表示加速度、角速度、加速度偏置和角速度偏置的高斯白噪声的方差。

1.3 ESKF 的预测与更新过程

误差状态卡尔曼滤波的核心思想是：1）将系统状态分别定义为真实状态和标称状态，误差状态定义为两个状态的差值；2）将标称状态作为较大的状态量，其继承系统的非线性；3）将线性度高的误差状态作为小的状态量进行预测与估计。总的来说，标称状态不考虑 IMU 的测量噪声以及扰动信息，而误差状态包含这些扰动，标称状态的地推与误差状态的预测同时进行更新，然后通过 GPS 信号去修正误差状态的估计，进而将误差状态融合到标称状态中去，最后误差状态及其协方差矩阵复位，如此循环往复。ESKF 同过推到误差状态动力学方程，借助非线性模型的摄动，来实现误差状态及其协方差的最优预测与更新。因为误差状态动力学的非线性程度更低，所以与针对状态进行局部线性化的 EKF 相比，ESKF 局部线性化的模型误差更小，进而提高了估计的精度。使用 ESKF 进行 GPS/IMU 融合的具体步骤框图可见图 1。

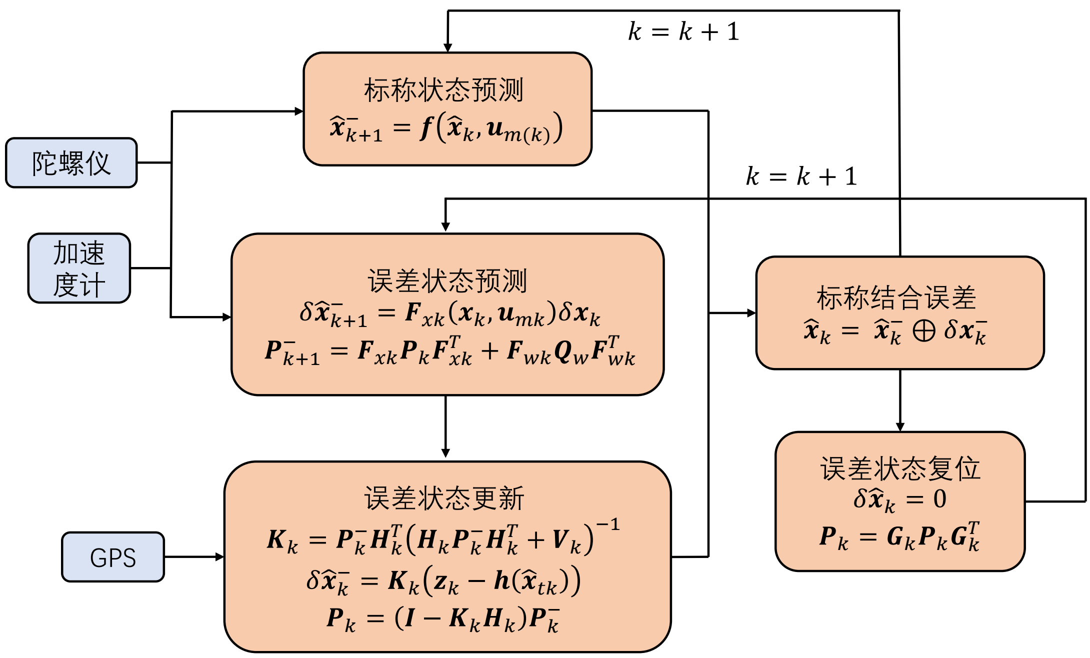

图 1 基于 EKSF 的 GPS/IMU 融合流程图

1.3.1 全状态的更新过程

定义全状态、误差状态、IMU 测量以及噪声的向量形式如下：

$$\boldsymbol{x}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_k \\ \boldsymbol{v}_k \\ \boldsymbol{q}_k \\ \boldsymbol{a}_{bk} \\ \boldsymbol{\omega}_{bk} \end{bmatrix}, \quad \delta\boldsymbol{x}_k = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{p}_k \\ \delta\boldsymbol{v}_k \\ \delta\boldsymbol{q}_k \\ \delta\boldsymbol{a}_{bk} \\ \delta\boldsymbol{\omega}_{bk} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_{mk} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{mk} \\ \boldsymbol{\omega}_{mk} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{vk} \\ \boldsymbol{w}_{\theta k} \\ \boldsymbol{w}_{ak} \\ \boldsymbol{w}_{\omega k} \end{bmatrix} \tag{7}$$

结合式（3）和式（7），可以得到标称状态递推方程：

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_{mk}) \tag{8}$$

其中$\boldsymbol{f}$状态变量的递推函数，结合式（5），可得误差状态递推方程：

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{x}_{k+1} &= \boldsymbol{f}_\delta(\boldsymbol{x}_k, \delta\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_{mk}, \boldsymbol{w}_k) \\ &= \boldsymbol{F}_{xk}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_{mk})\delta\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{F}_{wk}\boldsymbol{w}_k \end{aligned} \tag{9}$$

其中$\boldsymbol{f}_\delta$表示误差状态的递推函数，$\boldsymbol{F}_{xk}$和$\boldsymbol{F}_{wk}$分别为误差状态和噪声状态对应的雅可比矩阵，本文直接使用了文[4]的推导结果来获得雅可比矩阵:

$$\boldsymbol{F}_{xk} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{L}_{sk}(\boldsymbol{a}_{mk} - \boldsymbol{a}_{bk})\Delta t & -\boldsymbol{R}_k\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{R}^T_k(\boldsymbol{\omega}_{mk} - \boldsymbol{\omega}_{bk})\Delta t & 0 & -\boldsymbol{I}\Delta t \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{F}_{wk} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{11}$$

1.3.2 ESKF 的预测过程

基于式（9），可以得到误差状态以及协方差预测方程：

$$\begin{aligned}\delta\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{-} &= \boldsymbol{F}_{xk}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_{mk})\delta\boldsymbol{x}_k \\ \boldsymbol{P}_{k+1}^{-} &= \boldsymbol{F}_{xk}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{F}_{xk}^{T}+\boldsymbol{F}_{wk}\boldsymbol{Q}_w\boldsymbol{F}_{wk}^{T}\end{aligned} \tag{10}$$

其中$\boldsymbol{Q}_w$为噪声矩阵，其具体形式为：

$$\boldsymbol{Q}_w=\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_v & 0 & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{W}_\Theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{W}_A & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{W}_\Omega\end{bmatrix} \tag{11}$$

1.3.2 ESKF 的观测过程

由于加速度计以及陀螺仪存在偏置，单纯地进行 IMU 积分估计会导致估计地位姿产生漂移，因此，本文使用 GPS 提供位置量测信息。一般的 GPS 提供的数据为 WGS84 坐标系下的经纬度信息，而本文定义的状态实在 ENU 坐标系下的，为此，需要使用文[2]中的坐标变换方法，将 GPS 数据转换至 ENU 笛卡尔坐标系，表示为 ${}^{G}\boldsymbol{p}_{Gps}$。这样就可以获得观测方程：

$${}^{G}\boldsymbol{p}_{Gps}={}^{G}\boldsymbol{p}+{}^{G}_{I}\boldsymbol{R}\,{}^{I}\boldsymbol{p}_{Gps} \tag{11}$$

可以计算其对于误差状态的雅可比矩阵：

$$\begin{aligned}H&=\frac{\partial\left({}^{G}\boldsymbol{p}+{}^{G}_{I}\boldsymbol{R}\,{}^{I}\boldsymbol{p}_{Gps}\right)}{\partial\delta\boldsymbol{x}}=\frac{\partial\left({}^{G}_{I}\boldsymbol{R}(1+\lfloor\delta\boldsymbol{\theta}\rfloor_\times)\,{}^{I}\boldsymbol{p}_{Gps}\right)}{\partial\delta\boldsymbol{x}}\\ &=\left[\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{0}\quad -{}^{G}_{I}\boldsymbol{R}\left\lfloor{}^{I}\boldsymbol{p}_{Gps}\right\rfloor_\times\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\right]\end{aligned} \tag{12}$$

至此，已经给出了 ESKF 预测更新的所有步骤。

2 GPS/IMU 融合实验

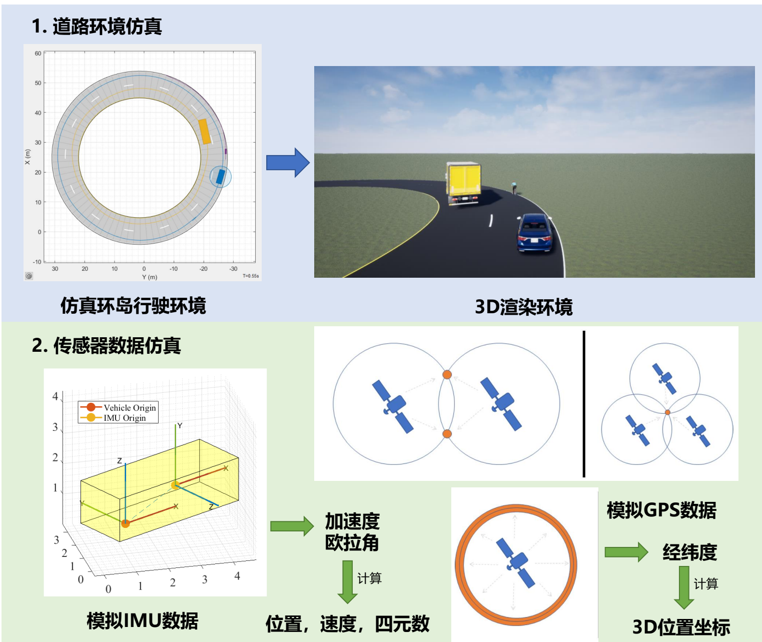

图 2 仿真环境搭建与传感器数据模拟

基于 Matlab 仿真环境，本文设计了小车环岛定位跟踪实验，对 IMU/GPS 异步融合的算法效果进行分析，其中包括仿真环境搭建的示意图可见图 2。

分别对仅使用 IMU、仅使用 GPS 和基于 ESKF 融合 IMU/GPS 三种情况进行了分实验，最终结果如图 3 所示，其中 IMU 的加速度计和陀螺仪的采样频率均为 100Hz，加速度计的测量范围为$\pm 19.6m/s^2$，噪声密度为$0.01(m/s^2)/Hz^{\frac{1}{2}}$，陀螺仪的测量范围$250rad/s$，噪声密度为$0.0573(rad/s)/Hz^{\frac{1}{2}}$，磁力计的采样频率为 50Hz，GPS 的采样频率为 5Hz，小车的运动速度为 10m/s，环岛半径为 15m。

可以看到，仅用 IMU 或 GPS 都不能得到很好的定位效果，其中，由于 IMU 的漂移问题随着积分产生累计，IMU 在产生的误差会越来越大。而仅用 GPS 的情况下，由于 GPS 的采样频率较小，无法满足实时精准定位的要求，经过对比，使用 ESKF 算法融合 GPS 和 IMU 的效果较好，可见图 3。

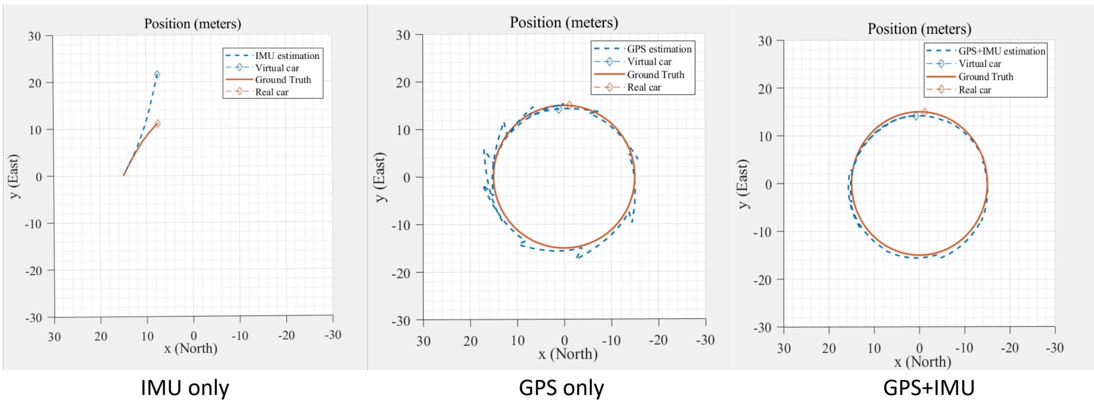

图 3 对比结果图

由图 4 所示，基于本文算法的融合策略在x,y轴上的误差变化在$\pm 2m$内变化，z轴上的误差在$\pm 0.5m$的区间内，这是由于仿真过程中，传感器数据读取设置的测量噪声以及 IMU 动力学模型设置的噪声以及偏置造成的。

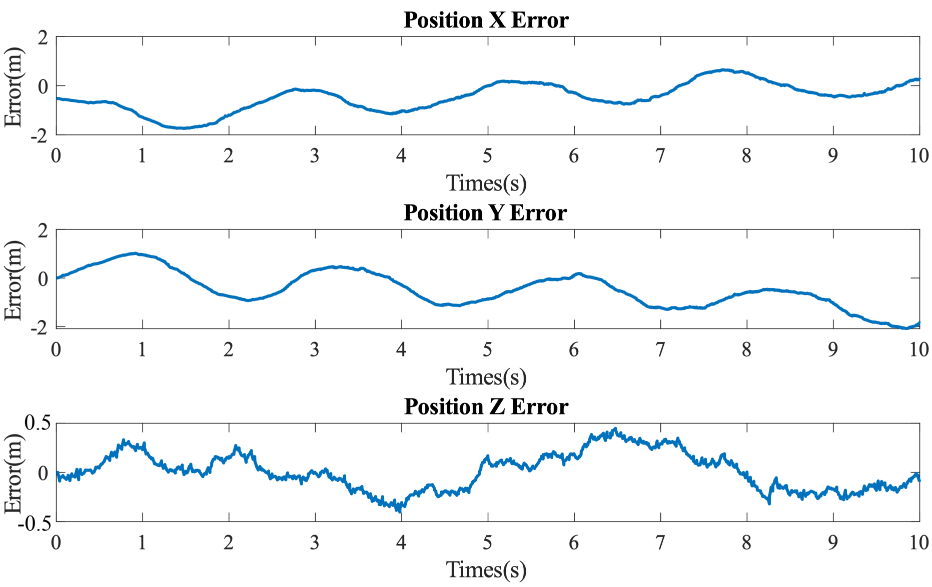

图 4 GPS/IMU 融合误差变化图

3　视觉惯导融合

上文中介绍了 GPS/IMU 的融合方案，但是在实际应用中，存在无信号的情况，第 2 节的实验也表明，当 GPS 信号弱时，IMU 无法很好的完成定位的任务。可以发现，IMU 能够高频输出姿态估计值，但由于在计算速度和位置时对测量结果进行了积分，使得误差放大导致较大的漂移。另外，单目相机能够低频返回准确的姿态估计，但会导致尺度模糊。这两者均不容易受地理位置的影响，因此在本节中，主要介绍将基于单目相机的视觉里程计的位姿估计与 IMU 的姿态估计相融合的松耦合 ESKF 方案。其中，IMU 的建模与第 1 节介绍的相同，因此，本节基于文[5]对视觉里程计的建模进行分析。

3.1　视觉里程计模型

视觉里程计（VO）根据相邻图像间特征点的变化来确定相机的位姿，并实现定位，与基于 IMU 和 GPS 的位姿估计相比，其相对稳定且价格便宜。但是，VO 的内在问题在于其在远距离定位导航中的漂移，因为 VO 的位姿估计基于相对测量（前后两帧图像），这导致误差累计并随着时间的增加趋于无穷。以基于特征匹配的方法为例，特征提取和三角化测量过程中均存在误差，经过长时间导航后，误差累积，测量值逐渐偏离真值。

考虑一般的相机模型，若E是世界坐标系到相机坐标系的变换矩阵，M是t时刻到$t+1$时刻的变换矩阵。由于方向偏移限制在$[-\pi,\pi]$，且其最终也导致位置的变换，因此下文中只考虑位置的漂移。容易得到：

$$E_{t+1} = E_t \cdot M_t \tag{13}$$

其中右乘M_t是因为M_t是t时刻相对相机坐标系的运动，E和M的一般表示为：

$$\begin{bmatrix} R_{3\times3} & T_{3\times1} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}_{4\times4} \tag{14}$$

其中$R_{3\times3}$为旋转矩阵，$T_{3\times1}$为平移向量，其意味着使用旋转和平移来表示位姿的变换。对于平移漂移，有：

$$\Delta d_{t+1} = \left\| d_{t+1} - \bar{d}_{t+1} \right\| \tag{15}$$

其中$\|\cdot\|$是欧几里得距离，d_{t+1}和$\bar{d}_{t+1}$分别表示$t+1$时刻的位姿估计值和真值。

3.1.1　漂移模型

式（15）中的漂移是非平稳过程，并且会随时间趋于无穷，其漂移模型为：

$$\ln \Delta d_t = F_t \cdot \boldsymbol{p} + u_t \tag{16}$$

其中$F_t = [1, \ln d_t]$是一个无界的确定性矩阵，$\boldsymbol{p} = [a, b]^T$是一个待辨识的参数向量，$u_t$是零均值的随机过程。简单的说，模型由确定性部分$F_t \cdot \boldsymbol{p}$和随机部分$u_t$组成。另外，可以发现，如果不考虑$u_t$，则有$\Delta d_t = e^a \cdot d_t^b$，这说明漂移随着距离呈指数增长，并且是无界的，这与我们的先验知识是一致的。

3.1.1　参数辨识

漂移模型中的参数辨识，基于最小二乘法，采集大量的测量数据，之后可以分为两个步骤：1. 假设$u_t=0$，估计参数$\boldsymbol{p}$，并记为$\overline{\boldsymbol{p}}$。2. 根据$\bar{u}_t=\Delta d_t-F_t\cdot\overline{\boldsymbol{p}}$，估计$\bar{u}_t$。其中对于第一步，使用最小二乘法，容易得到：

$$\overline{\boldsymbol{p}}(N)=\left(\sum_{t=1}^{N}F_t^TF_t\right)^{-1}\cdot\sum_{t=1}^{N}F_t^T\Delta d_t \tag{17}$$

使用式（17）的结果，可以得到$\bar{u}_t$，然后使用一阶高斯-马尔科夫过程对齐进行建模，有：

$$\bar{u}_t=\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\bar{u}_{i-1}+\omega_n \tag{18}$$

其中τ成为相关时间，ω_n为均值为零方差为σ_n^2的模型噪声。高斯-马尔科夫过程的过程方差σ_u^2为：

$$\sigma_u^2=\frac{\sigma_n^2}{2/\tau+1/\tau^2} \tag{19}$$

实际推导过程中，由于F_t是一个无界矩阵，因此需要对模型的收敛性进行分析，具体过程可见文[5]，限于篇幅，本文只是利用了其中的结果，对推导不做说明。至此，即可对相机的测量位姿进行计算，即为：

$$\boldsymbol{p}_{vk}=s\cdot\boldsymbol{p}_k+\bar{u}_t \tag{20}$$

其中s为相机的尺度因子，$\boldsymbol{p}_{vk}$即为相机的位姿测量，与第 2 节中相同，将式（20）写作测量方程，可以用 ESKF 来对惯导和视觉里程计进行融合

4　VIO 融合实验

基于 Matlab Driving Scenario Designer Tools 搭建仿真场景，为了验证长时间导航的准确性，设置仿真时间为 80s，仿真路径长且设置弯道，将道路轨迹设为真值，其具体场景可见图 5 所示：

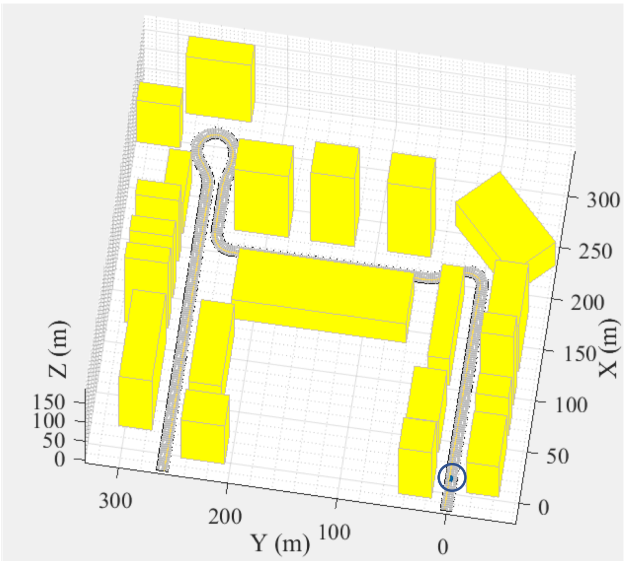

图 5 城市道路仿真场景

设置 VO 的采样频率为 4Hz，位置和角度的测量噪声方差均为 0.1，尺度因子设为 2，τ 为 200。IMU 和小车的设置与第 3 节中相同，为了分析 VIO 导航的效果，对 VO 定位与 VIO 融合导航的结果进行比较，具体结果可见图 6。

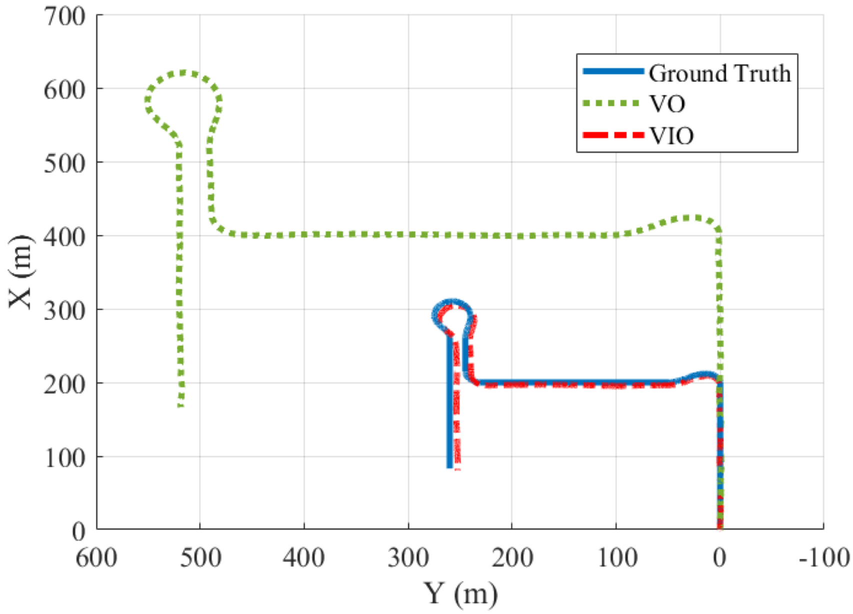

图 6 VIO 定位导航结果

可见，VO 在估计轨迹形状方面相对准确，而 VIO 融合的结果一定程度上减小了 VO 测量值中比例因子不确定性带来的影响以及 IMU 积分带来的偏移 。

5 讨论

本文讨论了在 GPS 信号弱和 GPS 信号丢失场景下，基于 ESKF 对 GPS/IMU 信号和 IMU/VO 进行融合的方案，并通过仿真实验验证。需要注意的是，本文讨论的方法是在 EKF 框架上给出的松耦合方案，与紧耦合方案相比，例如文[6]提出的 MSCKF，准确度较低，但处理量少，速度快。接下来的工作将对基于滤波以及优化的紧耦合方案进行研究。

参考文献

[1] 高翔, 张涛, 刘毅, 颜沁睿. 视觉 SLAM 十四讲:从理论到实践. 北京：电子工业出版社, 2019.

[2] 罗建军，马卫华，袁建平，岳晓奎. 组合导航原理与应用. 西安：西北工业大学出版社，2012. (第四章)

[3] Sola. J. "Quaternion Kinematics for the Error-State Kalman Filter." ArXiv e-prints, arXiv:1711.02508v1, 2017.

[4] Sola. J, Deray. J, Atchuthan. D. "A micro Lie theory for state estimation in robotics. " arXiv:1812.01537, 2018.

[5] R. Jiang, R., R. Klette, and S. Wang. "Modeling of Unbounded Long-Range Drift in Visual Odometry." 2010 Fourth Pacific-Rim Symposium on Image and Video Technology. Nov. 2010, pp. 121-126.

[6] A. I. Mourikis and S. I. Roumeliotis, “A multi-state constraint Kalman filter for vision-aided inertial navigation,” IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2007, no. April, pp. 3565–3572.