第一学期期末高等数学试卷

一、解答下列各题

(本大题共16小题，总计80分)

1、(本小题5分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-12x+16}{2x^3-9x^2+12x-4}$

2、(本小题5分)

求$\int\dfrac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

3、(本小题5分)

求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x\cdot\arcsin\dfrac{1}{x}$

4、(本小题5分)

求$\int\dfrac{x}{1-x}\mathrm{d}\,x$.

5、(本小题5分)

求$\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$.

6、(本小题5分)

求$\int\cot^6 x\cdot\csc^4 x\,\mathrm{d}\,x$.

7、(本小题5分)

求$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}\,dx$.

8、(本小题5分)

设$\begin{cases}x=e^t\cos t^2\\ y=e^{2t}\sin t\end{cases}$确定了函数$y=y(x)$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

9、(本小题5分)

求$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$.

10、(本小题5分)

求函数 $y=4+2x-x^2$的单调区间

11、(本小题5分)

求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{8+\sin^2 x}dx$.

12、(本小题5分)

设 $x(t)=e^{-kt}(3\cos\omega t+4\sin\omega t)$，求$dx$.

13、(本小题5分)

设函数$y=y(x)$由方程$y^2+\ln y^2=x^6$所确定,求$\dfrac{dy}{dx}$.

14、(本小题5分)

求函数$y=2e^x+e^{-x}$的极值

15、(本小题5分)

求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2+(2x+1)^2+(3x+1)^2+\cdots+(10x+1)^2}{(10x-1)(11x-1)}$

16、(本小题5分)

求$\int\dfrac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}\,x$.

二、解答下列各题
(本大题共 2 小题，总计 14 分)
1、(本小题 7 分)
某农场需建一个面积为512平方米的矩形的晒谷场,一边可用原来的石条围沿,另三边需砌新石条围沿,问晒谷场的长和宽各为多少时,才能使材料最省.
2、(本小题 7 分)
求由曲线$y=\frac{x^2}{2}$和$y=\frac{x^3}{8}$所围成的平面图形绕ox轴旋转所得的旋转体的体积.
三、解答下列各题
(本 大 题 6 分)
设$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$,证明$f'(x)=0$有且仅有三个实根.

一学期期末高数考试(答案)

一、解答下列各题
(本大题共 16 小题，总计 77 分)
1、(本小题 3 分)
$$\text{解:原式}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{6x^2-18x+12}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{6x}{12x-18}$$
$$=2$$
2、(本小题 3 分)
$$\int\frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}+c.$$
3、(本小题 3 分)
$$\text{因为}\left|\arctan x\right|<\frac{\pi}{2}\quad\text{而}\lim_{x\to\infty}\arcsin\frac{1}{x}=0$$
$$\text{故}\lim_{x\to\infty}\arctan x\cdot\arcsin\frac{1}{x}=0$$
4、(本小题 3 分)
$$\int\frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x$$
$$=-\int\frac{1-x-1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$
$$=-\int\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$$
$$=-x-\ln\left|1-x\right|+c.$$
5、(本小题 3 分)
$$\text{原式}=2x\sqrt{1+x^4}$$
6、(本小题 4 分)

$$\int \cot^6 x \cdot \csc^4 x \, \mathrm{d}x$$

$$= -\int \cot^6 x (1+\cot^2 x) \, \mathrm{d}(\cot x)$$

$$= -\frac{1}{7}\cot^7 x - \frac{1}{9}\cot^9 x + c.$$

7、(本小题 4 分)

$$原式 = -\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \cos\frac{1}{x} d(\frac{1}{x})$$

$$= -\sin\frac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}$$

$$= -1$$

8、(本小题 4 分)

解： $$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2t}(2\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t^2 - 2t\sin t^2)}$$

$$= \frac{e^t(2\sin t + \cos t)}{(\cos t^2 - 2t\sin t^2)}$$

9、(本小题 4 分)

令 $\sqrt{1+x} = u$

$$原式 = 2\int_1^2 (u^4 - u^2) du$$

$$= 2(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3})\Big|_1^2$$

$$= \frac{116}{15}$$

10、(本小题 5 分)

函数定义域$(-\infty,+\infty)$

$y' = 2 - 2x = 2(1-x)$

当$x = 1$，$y' = 0$

当$x < 1$， $y' > 0$函数单调增区间为$(-\infty,1]$

当$x > 1$，$y' < 0$函数的单调减区间为$[1,+\infty)$

11、(本小题 5 分)

$$原式 = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\cos x}{9 - \cos^2 x}$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\frac{3+\cos x}{3-\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}\ln 2$$

12、(本小题 6 分)

$dx = x'(t)dt$

$= e^{-kt}[(4\omega - 3k)\cos\omega t - (4k+3\omega)\sin\omega t]dt$

13、(本小题 6 分)

$$2yy' + \frac{2y'}{y} = 6x^5$$

$$y' = \frac{3yx^5}{y^2+1}$$

14、(本小题 6 分)

定义域$(-\infty, \ +\infty)$,且连续

$y' = 2e^{-x}(e^{2x} - \frac{1}{2})$

驻点：$x = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$

由于$y'' = 2e^{x} + e^{-x} > 0$

故函数有极小值,, $y(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}) = 2\sqrt{2}$

15、(本小题 8 分)

$$原式 = \lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})^2 + (2+\frac{1}{x})^2 + (3+\frac{1}{x})^2 + \cdots + (10+\frac{1}{x})^2}{(10-\frac{1}{x})(11-\frac{1}{x})}$$

$$= \frac{10\times 11\times 21}{6\times 10\times 11}$$

$$= \frac{7}{2}$$

16、(本小题 10 分)

$$解: \int \frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx = \int \frac{\cos 2x}{1+\frac{1}{2}\sin 2x}dx$$

$$= \int \frac{d(\frac{1}{2}\sin 2x + 1)}{1+\frac{1}{2}\sin 2x}$$

$$= \ln\left|1+\frac{1}{2}\sin 2x\right| + c$$

二、解答下列各题

(本大题共 2 小题，总计 13 分)

1、(本小题 5 分)

设晒谷场宽为x,则长为$\frac{512}{x}$米,新砌石条围沿的总长为

$L = 2x + \frac{512}{x} \qquad (x > 0)$

$L' = 2 - \frac{512}{x^2}$ 唯一驻点 $x = 16$

$L'' = \frac{1024}{x^3} > 0$ 即$x = 16$为极小值点

故晒谷场宽为16米,长为$\frac{512}{16} = 32$米时,可使新砌石条围沿

所用材料最省

2、(本小题 8 分)

解: $\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{8}, 8x^2 = 2x^3 \quad x_1 = 0, x_1 = 4.$

$$V_x = \pi\int_0^4\left[(\frac{x^2}{2})^2 - (\frac{x^3}{8})^2\right]dx = \pi\int_0^4(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{64})dx$$

$$= \pi(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{7}x^7)\Big|_0^4$$

$$=\pi 4^4(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})=\frac{512}{35}\pi$$

三、解答下列各题

(本 大 题10分)

证明:$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续,可导,从而在$[0,3]$;连续,可导.

又$f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=0$

则分别在$[0,1],[1,2],[2,3]$上对$f(x)$应用罗尔定理得,至少存在

$\xi_1\in(0,1),\xi_2\in(1,2),\xi_3\in(2,3)$使$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$

即$f'(x)=0$至少有三个实根, 又$f'(x)=0$,是三次方程,它至多有三个实根,

由上述$f'(x)$有且仅有三个实根

高等数学（上）试题及答案

一、 填空题（每小题3分，本题共15分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}=$______.。

2、当k______时，$f(x)=\begin{cases}e^x & x\le 0\\ x^2+k & x>0\end{cases}$在$x=0$处连续.

3、设$y=x+\ln x$,则$\dfrac{dx}{dy}=$______

4、曲线$y=e^x-x$在点（0，1）处的切线方程是________

5、若$\int f(x)dx=\sin 2x+C$，C为常数，则$f(x)=$________。

二、 单项选择题（每小题3分，本题共15分）

1、若函数$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$（　　）

A、0　　B、-1　　C、1　　D、不存在

2、下列变量中，是无穷小量的为（　　）

A. $\ln\dfrac{1}{x}(x\to 0^+)$　　B. $\ln x(x\to 1)$　　C. $\cos x\,(x\to 0)$　　D. $\dfrac{x-2}{x^2-4}(x\to 2)$

3、满足方程$f'(x)=0$的x是函数$y=f(x)$的（　　）.

A. 极大值点　　B. 极小值点　　C. 驻点　　D. 间断点

4、下列无穷积分收敛的是（　　）

A、$\int_0^{+\infty}\sin xdx$　　B、$\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx$　　C、$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}dx$　　D、$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

5、设空间三点的坐标分别为M（1，1，1）、A（2，2，1）、B（2，1，2）。则$\angle AMB=$_______

A、$\frac{\pi}{3}$　　B、$\frac{\pi}{4}$　　C、$\frac{\pi}{2}$　　D、π

三、计算题（每小题 7 分，本题共 56 分）

1、求极限　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{\sin 2x}$　。

2、求极限　$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$

3、求极限　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{x^2}$

4、设 $y=e^5+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 y'

5、设 $f=y(x)$ 由已知 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=\arctan t\end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

6、求不定积分　$\int\frac{1}{x^2}\sin(\frac{2}{x}+3)dx$

7、求不定积分　$\int e^x\cos x\mathrm{d}x$

8、设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^x} & x<0\\ \frac{1}{1+x} & x\ge 0\end{cases}$，　求　$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$

四、应用题（本题 7 分）

求曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 所围成图形的面积 A 以及 A 饶 y 轴旋转所产生的旋转体的体积。

五、证明题（本题 7 分）

若 $f(x)$ 在[0,1]上连续，在(0,1)内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，　$f(\frac{1}{2})=1$，证明：

在(0,1)内至少有一点 ξ，使 $f'(\xi)=1$。

参考答案

一。填空题（每小题 **3** 分，本题共 **15** 分）

1、e^6　2、$k=1$.　3、$\dfrac{x}{1+x}$　4、$y=1$　5、$f(x)=2\cos 2x$

二．单项选择题（每小题 **3** 分，本题共 **15** 分）

1、D　2、B　3、C　4、B　5、A

三．计算题（本题共 **56** 分，每小题 **7** 分）

1.解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x(\sqrt{4+x}+2)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x(\sqrt{4+x}+2)}=\dfrac{1}{8}$

2.解 ：$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\dfrac{1}{2}$

3、解：$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin xe^{-\cos^2 x}}{2x}=-\frac{1}{2e}$$

4、解：$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})\quad=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

5、解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3}$$

6、解：$\int\dfrac{1}{x^2}\sin(\dfrac{2}{x}+3)dx=-\dfrac{1}{2}\int\sin(\dfrac{2}{x}+3)d(\dfrac{2}{3}+3)=\dfrac{1}{2}\cos(\dfrac{2}{x}+3)+C$

7、　解：$$\int e^x\cos x\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}e^x$$

$$=e^x\cos x+\int \mathrm{e}^x\mathrm{sinxdx}=e^x\cos x+\int\sin x\mathrm{de}^{\mathrm{x}}$$

$$=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\mathrm{d}x$$

$$= e^x(\sin x + \cos x) + C$$

8、解：$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \dots$

$$= \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$$

$$= \int_{-1}^0 (1 - \frac{e^x}{1+e^x})\mathrm{d}x + \ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$= 1 - \ln(1+e^x)\Big|_{-1}^0 + \ln 2$$

$$= 1 + \ln(1+e^{-1}) = \ln(1+e)$$

四.　　应用题（本题 7 分）

解：曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 的交点为（1，1），

于是曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 所围成图形的面积 A 为

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = [\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^2]_0^1 = \frac{1}{3}$$

A 绕 y 轴旋转所产生的旋转体的体积为：

$$V = \pi\int_0^1 \left((\sqrt{y})^2 - y^4\right)dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{10}\pi$$

五、证明题（本题 7 分）

证明：　设 $F(x) = f(x) - x$，

显然 $F(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，在 $(\frac{1}{2},1)$ 内可导，

且　　　　　$F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > 0$，$F(1) = -1 < 0$.

由零点定理知存在 $x_1 \in [\frac{1}{2},1]$，使 $F(x_1) = 0$.

由 $F(0) = 0$，在 $[0, x_1]$ 上应用罗尔定理知，至少存在一点

$\xi \in (0, x_1) \subset (0,1)$，使 $F'(\xi) = f'(\xi) - 1 = 0$，即 $f'(\xi) = 1$　…