表 1

华南师范大学期末考试命题审批表

学院：　　数学科学学院　　　　　　　　　命题时间：　2020 年 12 月 25 日

<table>
<tr><td>考试科目</td><td colspan="3">高等数学 II-1</td><td>命题教师</td><td colspan="2">高等数学 II 教学小组</td></tr>
<tr><td>使用年级</td><td>2020</td><td>专业</td><td>经济、金融、管理等</td><td>人数</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">试卷页数</td><td>A 卷</td><td colspan="2">2</td><td rowspan="2">答卷页数</td><td>A 卷</td><td>4</td></tr>
<tr><td>B 卷</td><td colspan="2">2</td><td>B 卷</td><td>4</td></tr>
<tr><td>考试形式</td><td colspan="3">闭卷（ √ ）　　开卷（　 ）　　其他（　 ）</td><td>卷面总分</td><td colspan="2">100</td></tr>
<tr><td>试卷保管人签名</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="7">教研室（系）意见：

负责人签名：
年　　月　　日</td></tr>
<tr><td colspan="7">学院意见：

同意选用　　　卷

负责人签名：
年　　月　　日</td></tr>
</table>

注：1、请在 “学院意见”栏签署选用“A”卷或“B”卷。

2、本登记表同试卷一并归档保存。

表 2

华南师范大学

__________学院 2020-2021 学年（ 一 ）学期期末考试试卷

《 高等数学 II 》试卷（A 卷）

专业________年级____ 班级_____ 姓名__________学号__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、求下列极限或不定积分（本题总分 40 分，每小题 5 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\tan x}$ （2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}}$ （3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$

（4）求 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$, 其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-2)\sin(x-2)}{1-\cos(x-2)}, & x<2,\\ \dfrac{x^2-2x}{x^2-3x+2}, & x>2.\end{cases}$

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ (6) $\displaystyle\int\frac{3-2x+x^3\sqrt{x}}{x^2}dx.$ （7）$\displaystyle\int e^x\ln(e^x+1)dx.$

（8）$\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx,\ \ (x>2).$

二、求下列函数的导数或微分（本题总分 24 分，每小题 8 分）

1．设 $f(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$，求 $f'(x)$ 和 $df(x)$.

2．已知 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}+1\\ y=2\arctan t-(t+1)^2\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}.$

3．设 $y(x)$ 是由方程 $e^{xy}+\tan(xy)=y$ 所确定的隐函数, 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ 和 $dy\big|_{x=0}$.

三、（本题总分 10 分） $f(x)=(x^2-1)^2+1$，试确定 $f(x)$ 的单调区间，极值，拐点和凹凸区间.

四、**（本题总分 8 分）**设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(a)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

五、讨论题（总分 8 分） 设函数 $f(x)=\begin{cases} ae^{x}+be^{-x}, & x\le 0 \\ \cos x, & x>0 \end{cases}$，试讨论

（1）当 a,b 满足什么条件时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续?

（2）当 a,b 为何值时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？并求此时 $f'(0)$ 的值.

六、应用题（总分 10 分）欲做一个容积为 $300m^3$ 的无盖圆柱形蓄水池，已知池底单位面积的造价与周围单位面积造价分别为 $2k$ 和 k. 问当蓄水池的底面半径和高分别为多少时，才能使总造价最低？

表 2

华南师范大学

______学院 2020-2021 学年（ 一 ）学期期末考试试卷

《 高等数学 II 》试卷（B 卷）

专业________年级____ 班级_____ 姓名__________学号__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、求下列极限或不定积分（本题总分 40 分，每小题 5 分）

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+10)^{20}(x-3)^{30}}{x^{50}+6x^{40}}$ （2）$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-3x-4}$ （3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-x\sin x\cos x}{x^4}$

（4）求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$, 其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{\sin(x^2-1)}, & x<1,\\ (x-1)^2\cos\dfrac{1}{x-1}, & x>1.\end{cases}$

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$ （6）$\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+x}{\sqrt{x^3}}dx$ （7）$\displaystyle\int x^2e^xdx$

（8）$\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$

二、求下列函数的导数或微分（本题总分 24 分，每小题 8 分）

1．设 $f(x)$ 的一个原函数为 $x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$ 求 $f'(x)$ 和 $df(x)$.

2．已知 $\begin{cases}x=1-\cos t\\ y=t-\sin t\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}.$

3．设 $y(x)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定的隐函数, 求

(1) 函数的微分 dy； (2) 函数在点 $(1,0)$ 处的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

三、（本题总分 10 分） $f(x)=3x^4-4x^3+1$，试确定 $f(x)$ 的单调区间，极值，拐点和凹凸区间.

四、**（本题总分 8 分）** 设$x>0$，证明：$\dfrac{1}{1+x}<\ln\dfrac{x+1}{x}<\dfrac{1}{x}$.

五、（本题总分 8 分） 设函数$f(x)=\begin{cases} e^{x^2}, & x\le 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$，试讨论

（1）当a,b满足什么条件时，函数$f(x)$在$x=1$处连续?

（2）当a,b为何值时，函数$f(x)$在$x=1$处可导？并求此时$f'(1)$的值.

六、应用题（总分 10 分）欲做一个容积为$108m^3$的开口长方体箱子，其中箱子底部为正方形. 问当长方体无盖箱子的长、宽及高各为多少时，才能使得箱子的用料最省？并求其最小表面积是多少？

表 4

华南师范大学

__________学院 2020-2021 学年（一）学期期末考试

《 高等数学 II 》课程试卷（ A ）

参考答案及评分标准

一、求下列极限或不定积分（本题总分 40 分，每小题 5 分）

（1）解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0.$

（2）解：原式= $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\right)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\right)}{2}=2\sqrt{2}.$

（3）解： $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+e^{-x}-1}{-x\left(e^{-x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+e^{-x}-1}{-x\cdot(-x)}$ 2分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+1-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}.$$ 3分

（4） 解： 由

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\sin(x-2)}{1-\cos(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\cdot(x-2)}{\frac{1}{2}(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\cdot(x-2)}{\frac{1}{2}(x-2)^2}=2,$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x-1}=2.$$

可知极限 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 存在，且有 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=2.$

评分标准：求左右极限分别给2分，判断极限存在并给出极限值给1分.

（5） 解：原式= $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x-1}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}\cdot\frac{2(x+1)}{3(2x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{3(2x-1)}}=e^{\frac{1}{3}}.$

（6）解：原式= $\displaystyle\int\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx=-\frac{3}{x}-2\ln|x|+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C.$

注：被积函数隐含条件，故答案中绝对值符号可去掉，两种写法均给满分.

（7）解：原式$=\int \ln(e^x+1)d(e^x+1)=(e^x+1)\ln(e^x+1)-\int(e^x+1)d\ln(e^x+1)$　　2 分

$$=(e^x+1)\ln(e^x+1)-\int(e^x+1)\frac{e^x}{e^x+1}dx=(e^x+1)\ln(e^x+1)-e^x+c$$　　3 分

（8）解：令 $x=2\sec t,\ t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $dx=2\sec t\cdot\tan t\cdot dt.$　　2 分

原式$=\int\dfrac{2\sec t\cdot\tan t}{4\sec^2 t\cdot 2\tan t}dt=\dfrac{1}{4}\int\cos tdt=\dfrac{1}{4}\sin t+C.$　　2 分

由 $\sec t=\dfrac{x}{2}$ 构造直角三角形可得 $\sin t=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}$. 故原式$=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{4x}+C.$　　1 分

二、求下列函数的导数或微分。（本题总分 24 分，每小题 8 分）

1. 解：

$$f'(x)=\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right)'$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}.$$

$$df(x)=f'(x)dx=\sqrt{x^2+a^2}dx.$$

评分标准：两项求导，每项求导得 3 分；求微分得 2 分.

2. 解：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\frac{2}{1+t^2}-2(t+1)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}=-2(t^2+t+1),$$　　4 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\left[-2(t^2+t+1)\right]'}{x'(t)}=-\frac{2(2t+1)\left(1+t^2\right)}{t}.$$

4 分

3. 解: (1)方程两端分别对 $\boldsymbol{x}$ 求导, 得

$\left[e^{xy}+\sec^2(xy)\right]\left(y+xy'\right)=y'.$　　4 分

当 $x=0$ 时可解得 $y=1$, 代入上式可得 $(1+1)(1+0)=y'$,

故求 $y'\big|_{x=0}=2,\ dy\big|_{x=0}=2dx.$　　4 分

三、（本题总分 10 分）

解：函数 $f(x)=(x^2-1)^2+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续可导，且

$f'(x)=4x(x+1)(x-1)$， $f''(x)=4(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)$ 2 分

（1） 令 $f'(x)=0$，得 $x=-1,0,1$．当 $x\in(-\infty,-1)$ 和 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-1,0)$ 和 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$．故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 和 $[0,1]$ 上单调减少，在 $[-1,0]$ 和 $[1,+\infty)$ 内单调增加，从而 $f(x)$ 在 $x=-1,1$ 均取得极小值 $f(\pm1)=1$，在 $x=0$ 取得极大值 $f(0)=2$． 4 分

（2）令 $f''(x)=0$ 得 $x=\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}$．当 $x\in(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$ 及 $x\in(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$ 时，$f''(x)>0$；当 $x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 时，$f''(x)<0$，因此曲线在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ 及 $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 内是上凹的；在 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ 上是上凸的，从而拐点为：$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{13}{9})$ 和 $(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{13}{9})$． 4 分

四、（本题总分 8 分）

证明：令 $F(x)=xf(x)$, 可知 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且有

$$F(0)=0,\ F(a)=af(a)=0.$$ 4 分

由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,a)$, 使 $F'(\xi)=0$, 即 $F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，从而有

$$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}.$$ 4 分

五、（本题总分 8 分）

解：(1) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\cos x=1$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(ae^x+be^{-x})=a+b$,

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 应满足 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$, 得 $a+b=1$.

故当 $a+b=1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 4 分

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f(x)$ 在该点必连续，故必有 $a+b=1$.

$$\because f_-^{'}(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ae^{x}+be^{-x}-(a+b)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\left(e^{x}-1\right)+b\left(e^{-x}-1\right)}{x}=a-b,$$

$$f_+^{'}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-(a+b)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}x=0.$$

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，应满足 $f_+^{'}(0)=f_-^{'}(0)$，得 $a-b=0$. 故当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且有 $f'(0)=f_+^{'}(0)=f_-^{'}(0)=0$. 4 分

六、应用题（总分 10 分）

解：令池底半径为 r 米，则高为 $\frac{300}{\pi r^2}$ 米. 则总造价为

$$S(r)=\pi r^2\cdot 2k+2\pi rk\cdot\frac{300}{\pi r^2}=2k\pi r^2+\frac{600k}{r},\ (r>0)$$

则 $S'(r)=4\pi kr-\frac{600k}{r^2}$. 令 $S'(r)=0$，得唯一驻点为 $r=\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$.

由 $S''(r)=4\pi k+\frac{1200k}{r^3}$，可知唯一驻点为唯一极小值点，也为最小值点. 此时有

高为 $h=\frac{300}{\pi r^2}=\frac{300r}{\pi r^3}=2r=2\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$.

故当蓄水池的地面半径 $\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$，高为 $2\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$ 时，才能使总造价最低.

评分标准：（1）得到目标函数表达式，4 分；（2）解得唯一驻点，2 分；

（3）判断驻点为最小值点（可用“**由实际问题的意义知...**”取代判断驻点为极小值点），2 分；（4）求解并作答，2 分.

表 5

華南師範大學

________学院 2020-2021 学年（一）学期期末考试

《 高等数学 II 》课程试卷（ B ）

参考答案及评分标准

一、求下列极限或不定积分（本题总分 40 分，每小题 5 分）

（1）解: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+10)^{20}(x-3)^{30}}{x^{50}+6x^{40}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2+\dfrac{10}{x}\right)^{20}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{30}}{1+\dfrac{6}{x^{10}}}=2^{20}.$

（2）解:

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-3x+4}=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)}{(x-4)(x+1)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}=\lim_{x\to4}\frac{2}{(x+1)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}=\frac{1}{15}.$$

（3）解:

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

（4） 解：由

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)^2}{\sin(x^2-1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)^2}{x^2-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{x+1}=0,$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x-1)^2\cos\frac{1}{x-1}=0.$$

可知极限 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，且有 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0.$

评分标准：求左右极限分别给2分，判断极限存在并给出极限值给1分.

（5）解: 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}}{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^{-x^2\cdot(-1)}}=\dfrac{e}{e^{-1}}=e^2.$

（6）解：原式$=\displaystyle\int\left(\frac{1}{x}-2x^{-\frac{5}{6}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\ln|x|-12\sqrt[6]{x}+2\sqrt{x}+C.$

注：被积函数隐含条件，故答案中绝对值符号可去掉，两种写法均给满分.

（7）解：$\int x^2e^xdx=\int x^2de^x=x^2e^x-\int e^xd(x^2)=x^2e^x-2\int xe^xdx$ 2分

$$=x^2e^x-2\int xd(e^x)=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^xdx\right)$$ 2分

$$=\left(x^2-2x+2\right)e^x+C.$$ 1分

（8）解：令 $x=2\sin t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $dx=2\cos tdt.$ 2 分

原式$=\int\frac{2\cos t}{4\sin^2 t\cdot 2\cos t}dt=\frac{1}{4}\int\csc^2 tdt=-\frac{1}{4}\cot t+C.$ 2 分

由 $\sin t=\frac{x}{2}$ 构造直角三角形可得 $\cot t=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}.$ 故原式$=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C.$ 1 分

二、求下列函数的导数或微分。（本题总分 24 分，每小题 8 分）

1. 解：由原函数的定义知

$$f(x)=\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)'=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=2\sqrt{1-x^2}.$$ 4 分

$$f'(x)=\left(2\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}},\ df(x)=f'(x)dx=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$ 4 分

2. 解： $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{1-\cos t}{\sin t}=\tan\frac{t}{2},$ 4 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\left(\tan\frac{t}{2}\right)'}{x'(t)}=-\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}}{\sin t}=\frac{1}{(1+\cos t)\sin t}.$$ 4 分

3. 解：(1) 方程两端分别对 x 求导, 得

$$\frac{\frac{y'x-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$$ 3 分

解得 $y'=\frac{x+y}{x-y}$ 2 分

故 $dy=y'dx=\frac{x+y}{x-y}dx$ 2分

(2) 将 $x=1,y=0$ 代入 y' 的表达式, 易得 $y'(1)=1$. 1分

三、（本题总分 10 分）

解：函数 $f(x)=3x^4-4x^3+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续可导，且

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$，$f''(x)=36x^2-24x=12x(3x-2)$.　　　2 分

（1）令 $f'(x)=0$，得 $x=0,1$．由于 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的左右邻域内符号不变，故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不取极值；当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$．从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 内单调减少，在 $[1,+\infty)$ 内单调增加，在 $x=1$ 取得极小值 $f(1)=0$.　　　4 分

（2）令 $f''(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{2}{3}$．当 $x\in\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$ 或 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f''(x)>0$；当 $x\in\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$ 时，$f''(x)<0$．从而曲线在 $(-\infty,0]$ 和 $\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right)$ 内是上凹的，在 $\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$ 上是上凸的. 拐点为 $(0,1)$ 和 $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{11}{27}\right)$.　　　4 分

四、（本题总分 8 分）

证：令 $f(t)=\ln t$，则 $f'(t)=\dfrac{1}{t}$．　　　2 分

易知 $f(t)$ 在闭区间 $[x,1+x]$ 上满足拉格朗日定理的条件，故存在 $\xi\in(x,1+x)$，使

$f(1+x)-f(x)=\dfrac{1}{\xi}(1+x-x)$，即 $\ln(1+x)-\ln x=\dfrac{1}{\xi}$.　　　3 分

由 $0<x<\xi<1+x$ 知 $\dfrac{1}{1+x}<\ln(1+x)-\ln x<\dfrac{1}{x}$，

即 $\dfrac{1}{1+x}<\ln\dfrac{x+1}{x}<\dfrac{1}{x}$.　　　3 分

五、（本题总分 8 分）

解：(1) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}e^{x^2}=e$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(ax+b)=a+b$，

要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，应满足 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)$，得 $a+b=e$.

故当$a+b=e$时， $f(x)$在$x=1$处连续. 4 分

(2) 若$f(x)$在$x=1$处可导, 则$f(x)$在该点必连续, 故必有 $a+b=e$.

$$f_-^{'}(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x^2}-e}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e\left(e^{x^2-1}-1\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e\left(x^2-1\right)}{x-1}=2e,$$

$$f_+^{'}(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax+b-e}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}=a.$$

要使$f(x)$在$x=1$处可导, 应满足$f_+^{'}(1)=f_-^{'}(1)$, 得 $a=2e$, 从而$b=-e$. 且有 $f'(1)=f_+^{'}(1)=f_-^{'}(1)=2e.$ 4 分

六、应用题（总分 10 分）

解：令箱子底部的边长为x米，则高为$\frac{108}{x^2}$米，无盖箱子的表面积为

$$S(x)=x^2+4x\cdot\frac{108}{x^2}=x^2+\frac{27\times 16}{x},\ (x>0).$$

则 $S'(x)=2x-\frac{27\times 16}{x^2}$. 令$S'(x)=0$, 得唯一驻点为 $x=6$.

由$S''(r)=2+\frac{27\times 32}{x^3}>0$，可知唯一驻点为唯一极小值点，也为最小值点. 此时有高为$h=\frac{108}{x^2}=\frac{108}{36}=3$, $S(6)=108$.

故当长方体箱子的底面边长为 6 米，高为 3 米时，所用材料最省. 最小表面积为 108 平方米.

评分标准：（1）得到目标函数表达式，4 分；（2）解得唯一驻点，2 分；

（3）判断驻点为最小值点（可用**“由实际问题的意义知...”**取代判断驻点为极小值点），2 分；（4）求解并作答，2 分.