1.设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0,\ f'''(x)>0,$，则下列选项正确的是(　　). D

A. $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值；　　B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；　　D. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).D

A. 不可导;　　B. 可导且 $f'(0)\neq 0$;　　C. 有极大值;　　D.有极小值.

3. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得(　　).　C

（导数的定义、极限的保号性）

A. $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加；　　B. $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少；

C. 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$；　　D. 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

4. 曲线 $y=e^{x+\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$ 渐近线条数为(　　). B

A. 1 条;　B. 2 条;　C. 3 条;　　4. 4 条.

【参考解答】: 函数没有定义点有 $x=0, x=1, x=2$.

(1) 水平渐近线: 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{\pi}{4}$, 故

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty} e^{x+\frac{1}{x}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to+\infty} e^{x+\frac{1}{x}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=0$$

故曲线有左侧方向的水平渐近线.

(2) 铅直渐近线：由于

$$\lim_{x\to0^+} y=\lim_{x\to0^+} e^{x+\frac{1}{x}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} y=\lim_{x\to0^-} e^{x+\frac{1}{x}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=0$$

故曲线有铅直渐近线 $x=0$.

$$\lim_{x\to1^+} y=\lim_{x\to1^+} e^{x+\frac{1}{x}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=e^2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}e^2$$

$$\lim_{x\to1^-} y=\lim_{x\to1^-} e^{x+\frac{1}{x}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{\pi}{2}e^2$$

故 $x=1$ 不是曲线的铅直渐近线.

$$\lim_{x\to2^+} y=\lim_{x\to2^+} e^{x+\frac{1}{x}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=e^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to2^-} y=\lim_{x\to2^-} e^{x+\frac{1}{x}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=-\frac{\pi}{2}e^{\frac{5}{2}}$$

故 $x=2$ 不是曲线的铅直渐近线.

(3) 斜渐近线. 因为曲线有左侧水平渐近线，故只需判定 $x\to+\infty$ 时曲线的斜渐近线.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}}{x}=+\infty$$

故曲线无斜渐近线.

综上可知，曲线总共有 2 条渐近线，故正确选项为【B】.

5. 以下函数在 x=0 点不可导的为（　　).D

A. $f(x)=|x|\sin|x|$；　B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$；　C. $f(x)=\cos|x|$；　D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|\sin|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\cdot\sin(-x)}{x}=0$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|\sin|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\sin(x)}{x}=0$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\cdot\sin\sqrt{-x}}{x}=0$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\sin\sqrt{x}}{x}=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=0 \qquad f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}(-x)}{x}=\frac{1}{2}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=0 \qquad f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}x}{x}=-\frac{1}{2}$$

填空

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)})^n=$________；

【解析】计算

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

2. 设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在$(0, +\infty)$内零点的个数为________.

解：应填写 2. 提示：$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$，$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$. 在$(0, +\infty)$内，令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=e$.

因为 $f''(x)<0$，所以曲线 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在$(0, +\infty)$内是凸的，且驻点 $x=e$ 一定是最大值点，

最大值为 $f(e)>k>0$. 又因为 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，所以曲线经过 x 轴两次，即零点

的个数为 2.

3. 若 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1-\tan x}{1+\tan x})^{\frac{1}{\sin ax}}=e$, 则 $a=$______；

【解析】由于

$$e=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{\sin kx}\ln\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin kx}\ln\left(1-\frac{2\tan x}{1+\tan x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin kx}\cdot\frac{-2\tan x}{1+\tan x}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\tan x}{\sin kx}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2x}{kx}}=e^{\frac{-2}{k}}$$

故k = - 2。

4.函数 $f(x)=\dfrac{|x|^2-1}{x(1+x)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为______；

【解析】由题意知$f(x)$的间断点为0，±1．

当$x\ln|x|\to0$时，$|x|^x-1=e^{x\ln|x|}-1\sim x\ln|x|$．

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln|x|}{x\ln|x|}=1$，故$x=0$是函数$f(x)$的可去间断点．

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln|x|}{2x\ln|x|}=\dfrac{1}{2}$，故$x=1$是函数$f(x)$的可去间断点．

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x\ln|x|}{-(x+1)\ln|x|}=\infty$，故$x=-1$不是函数$f(x)$的可去间断点．因此，可去间断点的个数为2．

5. 函数 $y=f(x)$和$y=x^2-x$在点$(1,0)$处有公共的切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nf(\dfrac{n}{n+2})=$______.

【答案】 - 2

【解析】由条件可知$f(1)=0,f'(1)=1$．故

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{-2}{n+2}\right)-f(1)}{\frac{-2}{n+2}\cdot\frac{n+2}{-2n}}=-2f'(1)=-2$$

计算： 1. 求极限 (1) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1+2^x+3^x}{3})^{\frac{1}{x}}$; (2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+(1-\cos x)\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$；(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+\dfrac{1}{2}x^2}{x(x-\sin x)}$；

(5) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin^2 x}-1}{\ln(1+3x^2)}=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

(1)解：

【参考解答】:【思路一】由极限的对数法与等价无穷小，得

$$原式=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{1+2^x+4^x}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1+2^x+4^x}{3}-1\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{3x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^x-1}{3x}}=e^{\frac{\ln 2}{3}+\frac{\ln 4}{3}}=e^{\ln 2}=2$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{1+2^x+4^x}{3}-1\right)\right]^{\frac{3}{2^x+4^x-2}\cdot\frac{2^x+4^x-2}{3x}}$$

由洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x+4^x-2}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2+4^x\ln 4}{3}=\ln 2$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+2^x+4^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x+4^x-2}{3x}}=2$$

(2)解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}\cdot(\sin x-1)\tan x}$，因为

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}}=e$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\tan x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x(\sin x-1)}{\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x(\sin^2 x-1)}{\cos x(\sin x+1)}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos x}{\sin x+1}=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=e^0=1$.

(3)解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)\ln(1+x)}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)}=\dfrac{1}{2}$

(4)解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+\dfrac{1}{2}x^2}{x(x-\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+o(x^4)-1+\dfrac{1}{2}x^2}{x(x-(x-\dfrac{x^3}{3!})+o(x^3))}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{4!}x^4+o(x^4)}{\dfrac{x^4}{3!}+o(x^4)}=$

$\dfrac{1}{4}$.

(5)解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin^2 x}-1}{\ln(1+3x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\sin^2 x}{\ln(1+3x^2)(\sqrt{1+f(x)\sin^2 x}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}[f(x)\cdot\dfrac{\sin^2 x}{\ln(1+3x^2)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+f(x)\sin^2 x}+1}]=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=12$.

2. 求导数或微分 (1) $y=(1+x^2)^{\sin x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$；(2) $y=\dfrac{(1+x^2)\sqrt{4x-5}\tan x}{2\sin(6x+5)\ln(\sqrt{x^2+6})}$，求 y'；

(3) 若 $y^2 f(x)+xf(y)=x^2$，其中 $f(x)$ 为可微函数，求 $\mathrm{d}y$.

（隐函数的导数+微分的计算公式）

解：$2yy'f(x)+y^2 f'(x)+f(y)+xf'(y)y'=2x$

$$y'=\frac{2x-y^2 f'(x)-f(y)}{2yf(x)+xf'(y)}\text{，故}\quad \mathrm{d}y=\frac{2x-y^2 f'(x)-f(y)}{2yf(x)+xf'(y)}\mathrm{d}x .$$

(4) 求由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数;

（由参数方程所确定的函数的高阶导数）

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{t}{2}$; 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}\Big/\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\Big/\dfrac{2t}{1+t^2}=\dfrac{1+t^2}{4t}$.

(5) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^y-1=0$ 确定，求 $y'(0),\ y''(0)$.

14、**【参考解答】**: **【思路一】** 由 $y-xe^y=1$ 知，$x=0$ 时，$y=1$ 且

$$y'-e^y-xy'e^y=0$$

将 $x=0, y=1$ 代入得 $y'(0)=\mathrm{e}$. 对上式两边再求导，得

$$y''-y'\mathrm{e}^y-y'\mathrm{e}^y-xy''\mathrm{e}^y-x(y')^2\mathrm{e}^y=0$$

将 $x=0, y=1, y'(0)=\mathrm{e}$ 代入得 $y''(0)=2\mathrm{e}^2$.

【思路二】 由 $y-xe^y=1$ 解得 $x=\dfrac{y-1}{e^y}$，故得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\left(\frac{y-1}{e^y}\right)'=\frac{e^y-(y-1)e^y}{e^{2y}}=\frac{2-y}{e^y}$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{e^y}{2-y}$. 于是可得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^y}{2-y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{e^y}{2-y}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$
$$=\frac{e^y(2-y)-e^y\cdot(-1)}{(2-y)^2}\frac{e^y}{2-y}=\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$$

由 $y-xe^y=1$ 知，$x=0$ 时，$y=1$ 代入上面的两个导数结果，得

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{e}{2-1}=e,\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=\frac{e^2(3-1)}{(2-1)^3}=2e^2$$

3. 求曲线 $\begin{cases} x=e^x\sin t-1 \\ y=t^3+2t \end{cases}$ 在 t=0 处的切线方程.

15、**【参考解答】**: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-e^x\sin t\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-e^x\cos t=0$ 从而得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{e}^x\cos t}{1-\mathrm{e}^x\sin t}$$

又 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3t^2+2$，故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(3t^2+2)(1-\mathrm{e}^x\sin t)}{\mathrm{e}^x\cos t}$$

由于 $t=0$ 时，$x=-1, y=0, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2e$，因此切线方程为

$$y=2\mathrm{e}(x+1).$$

4. 求常数 a 使 $f(x)=\begin{cases} \ln(1+3x)-7e^x, x>0 \\ 5\arctan\dfrac{2x}{1-x}+a(x+1)^2, x<0 \end{cases}$ 在 x=0 连续，并判断 $f(x)$在 x=0 是否可导，若可

导求值.

17、【参考解答】: 由$f(x)$在点$x=0$处连续，得

$$\lim_{x\to0^-}\left[5\arctan\frac{2x}{1-x}+a(x+1)^2\right]=a=f(0)$$

$$\lim_{x\to0^+}\left[\ln(1+3x)-7e^x\right]=-7=f(0)=a$$

由此得$a=-7$. 当$x=0$时，

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{5\arctan\frac{2x}{1-x}-7(x+1)^2+7}{x}=-4$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+3x)-7e^x+7}{x}=3-7=-4$$

因为$f'_+(0)=f'_-(0)$，所以$f(x)$在$x=0$处可导，且导数

$f'(0)=-4$.

证明题

1. 设$a>0,a_1>0,a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})(n=1,2,\cdots)$ 考察极限存在准则 2 单调有界准则的运用

证明 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在；(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(1) 证明：$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})\ge\sqrt{a_n\cdot\frac{a}{a_n}}=\sqrt{a}$，$n\ge2$时，所以有下界。

又$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})-a_n=\frac{a-a_n^{\ 2}}{2a_n}\le0$ $(n\ge2)$,所以$\{a_n\}$单调递减。

根据单调有界准则，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

(2) 解：设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x$，则$x=\frac{1}{2}(x+\frac{a}{x})$，解得$x=\sqrt{a}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{a}$.

2. 当$0<x<\dfrac{\pi}{4}$时，$(\sin x)^{\cos x}<(\cos x)^{\sin x}$.

证：$(\sin x)^{\cos x}<(\cos x)^{\sin x} \Leftrightarrow \cos x\ln\sin x<\sin x\ln\cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\sin x}{\sin x}<\frac{\ln\cos x}{\cos x}.$$

作函数$f(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，则$f'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}>0$（$0<t<e$），

故当$0<t\le e$时，$f(t)$单调增加.

当$0<x<\dfrac{\pi}{4}$时，由$0<\sin x<\cos x<1<e$，故$\dfrac{\ln\sin x}{\sin x}<\dfrac{\ln\cos x}{\cos x}$，

从而有

$$(\sin x)^{\cos x}<(\cos x)^{\sin x}.$$

3. 设函数$f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值 M，$f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$. 证明：至少存在一点$\xi\in(a,b)$, $f''(\xi)=g''(\xi)$.

证：作函数$\varphi(x)=f(x)-g(x)$，

设函数$f(x)$，$g(x)$在(a,b)内的最大值M分别在$\alpha\in(a,b)$，$\beta\in(a,b)$处取得，

当$\alpha=\beta$时，取$\eta=\alpha$，则有$\varphi(\eta)=0$；

当$\alpha\ne\beta$时，$\varphi(\alpha)=M-g(\alpha)\ge0$，$\varphi(\beta)=f(\beta)-M\le0$，

由零点定理知，至少存在一点$\eta\in[\alpha,\beta]$（或$[\beta,\alpha]$），使得$\varphi(\eta)=0$.

综上，存在点$\eta\in(a,b)$，使得$\varphi(\eta)=0$.

因为$\varphi(a)=\varphi(\eta)=\varphi(b)=0$，所以由罗尔定理知，

至少存在$\xi_1\in(a,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,b)$使得$\varphi'(\xi_1)=\varphi'(\xi_2)=0$，

再由罗尔定理，至少存在一点$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得$\varphi''(\xi)=0$，即

$$f''(\xi)=g''(\xi).$$

应用题

1. 对数曲线$y=\ln x$上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解 $y'=\dfrac{1}{x}$，$y''=-\dfrac{1}{x^2}$.

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|-\frac{1}{x^2}|}{(1+\frac{1}{x^2})^{3/2}}=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}},$$

$$\rho=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x},$$

$$\rho'=\frac{\frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x\cdot x-(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}(2x^2-1)}{x^2}.$$

令 $\rho'=0$，得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

因为当 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $\rho'<0$；当 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\rho'>0$，所以 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是极小值点，同时也最小值点．当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$y=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$.因此在曲线上点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\ln\frac{\sqrt{2}}{2})$ 处曲率半径最小,最小曲率半径为 $\rho=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2. 建造容积为 V 的开口圆柱容积器，若底面每平方米的造价是侧面每平方米的造价的两倍，问底半径与高成怎样的比例才能使该容器造价最低？

解：设底面每平方米的造价是 a 元，底面半径为 R ,高为 h

则容器造价为 $y=2a\pi R^2+2a\pi Rh$　　容积为 $V=\pi R^2 h$

将 $h=\frac{V}{\pi R^2}$ 代入 $y=2a\pi R^2+2a\pi Rh$　得 $y=2a\pi R^2+\frac{2aV}{R}$

令 $y'=4a\pi R-\frac{2aV}{R}=0$　　解得 $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

于是 $R:h=1:2$.

因此当 $R:h=1:2$ 才能使该容器造价最低.