# 華南師範大學

## ________学院 2022-2023 学年（上）学期期末考试试卷

### 《高等数学(I-1)》试卷（A 卷）

专业________年级____班级_______姓名__________学号_________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | |

## 一、选择题（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1. 设函 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　)·

A. 若$\{x_n\}$收敛，则$\{f(x_n)\}$收敛　　B. 若$\{x_n\}$单调，则$\{f(x_n)\}$收敛

C. 若$\{f(x_n)\}$收敛，则$\{x_n\}$收敛　　D. 若$\{f(x_n)\}$单调，则$\{x_n\}$收敛

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+2e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ ,则 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的(　).

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　D. 连续点

3.“函数$f(x)$在点 $x_0$ 可导”是“函数$f(x)$在点 $x_0$ 连续”的(　).

A. 充分必要条件　　B. 充分条件但非必要条件

C. 必要条件但非充分条件　　D. 既非充分条件也非必要条件

4. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0, f''(x)>0$，$\Delta x$ 为自变量 $x$ 在点 $x_0$ 处的增量，$\Delta y$ 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，(　).

A. $\Delta y<\mathrm{d}y<0$　　B. $0<\Delta y<\mathrm{d}y$　　C. $0<\mathrm{d}y<\Delta y$　　D. $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

5. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x$，则 $I,J,K$ 的大小关系是(　).

A. $I<K<J$　　B. $J<K<I$　　C. $J<I<K$　　D. $K<I<J$

## 二、填空题（本题总分 15 分，每小题 3 分）

1. 曲线 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$ 上相应于 $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 的一段弧的长度是__________.

2. $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+2023)$,则 $f'(0)=$ __________.

3. 微分方程 $y''+y'-2y=0$ 通解为______________.

4. 已知 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$，则 $f(x)=$ __________.

5. $\int_{-2}^{2}(x^2+x^3\sqrt{4-x^2})\,\mathrm{d}x=$ ________.

## 三、计算题（本题总分 24 分，每小题 4 分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

2. 求 d$y$，其中 $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}(x+1)}{x-1}$.

3. 求由参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ ($a$ 为常数) 所确定函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

4. 求 $\int\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x$ .

5. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\int_{\cos x}^{1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x(e^x-1)}$ .

6. 求方程 $(x+1)y'-2y=\sqrt{(x+1)^3}$ 的通解.

## 四、解答题（本题总分 21 分，每小题 7 分）

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x-ax, x\ge0\\ \ln(b+x^2), x<0\end{cases}$, 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续且可导，试确定常数 $a,b$ 的值，

并求 $f'(x)$.

2. 过曲线 $y=1-2\sqrt{x}\quad(x\ge0)$ 上一点引一切线，设切线夹在两坐标轴间的部分长度为 $l$，求使 $l$ 最小时切点坐标及 $l$ 的最小值.

3. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点(0, 0), 且当 $x\in[0, 1]$时, $y\geq 0$. 试确定 $a$、$b$、$c$ 的值, 使得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1$, $y=0$ 所围图形的面积为 $\frac{4}{9}$, 且使该图形绕 $x$ 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

## 五、证明题（本题总分 25 分，1、2 题 8 分，3 题 9 分）

1. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

2. $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续可微，且 $4f(1)=f(2)$，求证至少存在一点 $\xi\in(1,2)$，使得 $\xi f'(\xi)-2f(\xi)=0$.

3. 设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$， $F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$, 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\frac{1}{2n}f'(0)$.