***Матрицы***

***Числовая матрица — это прямоугольная таблица чисел.***

Матрица размером m\*n, где m - количество строк, n – количество столбцов

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | a11 | a12 | a1... | a1n | | a...1 | a...2 | a…... | a...n | | am1 | am2 | am... | amn | |

***Матрица называется квадратной, если число строк равно количеству столбцов. При этом число строк является порядком матрицы.***

Квадратная матрица 3-его порядка

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a11 | a12 | a13 |
| a21 | a22 | a23 |
| a31 | a32 | a33 |

***Диагональ a11 – a22 – a33 называется главной диагональю. Если все элементы матрицы, кроме элементов лежащих на главной диагонали, равны 0, то такая матрица называется диагональной***. ***Диагональная матрица, у которой элементы главной диагонали равны 1, называется единичной. Если все элементы матрицы равны 0, то матрица называется нулевой.***

***Матрицы Amn и Bpq равны, если m = p и n = q, aij = bij при 1 <= i <= m и 1 <= j <= n.***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 1 | 2 | 3 | 4 | | 5 | 6 | 7 | 8 | | 9 | 10 | 11 | 12 | |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 1 | 2 | 3 | 4 | | 5 | 6 | 7 | 8 | | 9 | 10 | 11 | 12 | |

***A = B***

***Сложение матриц***

***Сложение матрицы Amn и матрицы Bpq возможно если m = p и n = q. Amn + Bpq = Cmn, при этом:***

***(cij) = (aij) + (bij).***

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A = | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 5 | 7 | -3 | | 0 | 6 | 1 | |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B = | |  |  |  | | --- | --- | --- | | -6 | 7 | 2 | | 8 | 12 | 4 | |

C = A + B

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C = | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 5 | 7 | -3 | | 0 | 6 | 1 | | + | |  |  |  | | --- | --- | --- | | -6 | 7 | 2 | | 8 | 12 | 4 | | = | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 5 + (-6) | 7 + 7 | -3 + 2 | | 0 + 8 | 6 + 12 | 1 + 4 | | = | |  |  |  | | --- | --- | --- | | -1 | 14 | -1 | | 8 | 18 | 5 | |

***Умножение матрицы на число.***

***Amn \* x = Bmn , при этом (bij) = (aij) \* x***

x = 2,

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A = | |  |  | | --- | --- | | 0 | 1 | | 2 | 3 | | 4 | 5 | |

B = A \* x

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B = | |  |  | | --- | --- | | 0 | 1 | | 2 | 3 | | 4 | 5 | | \* | 2 | = | |  |  | | --- | --- | | 0 \* 2 | 1 \* 2 | | 2 \* 2 | 3 \* 2 | | 4 \* 2 | 5 \* 2 | | = | |  |  | | --- | --- | | 0 | 2 | | 4 | 6 | | 8 | 10 | |

***Умножение матрицы на матрицу.***

***Матрицу Amn можно умножить на матрицу Bpq , если количество столбцов A равно количеству строк B, т. е. n = p. Такие матрицы являются согласованными. Результатом умножения будет матрица C размером n \* p. При этом (cij) = (ai1) \* (b1j) + (ai2) \* (b2j) + (ai...) \* (b...j) + (ain) \* (bpj). A \* B может быть не равно B \* A.***

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A = | |  |  | | --- | --- | | 1 | 2 | | 3 | 4 | |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B = | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 1 | 0 | -1 | | 3 | 2 | 0 | |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C = | |  |  | | --- | --- | | 1 | 2 | | 3 | 4 | | \* | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 1 | 0 | -1 | | 3 | 2 | 0 | | = | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 1 \* 1 + 2 \* 3 | 1 \* 0 + 2 \* 2 | 1 \* (-1) + 2 \* 0 | | 3 \* 1 + 4 \* 3 | 3 \* 0 + 4 \* 2 | 3 \* (-1) + 4 \* 0 | | = | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 7 | 4 | -1 | | 15 | 8 | -3 | |

***Если матрица A квадратная, то A \* A = A2, A2 \* A = A \* A \* A = A3 и т. д.***

***Транспонирование матрицы.***

***Транспонированием матрицы называется такое преобразование данной матрицы при котором каждая её строка становится столбцом с тем же номером. Транспонированная матрица обозначается AT. Для матриц A и AT всегда возможно умножение.***

***Определители***

**Определители второго и третьего порядков**

Рассмотрим квадратную матрицу 2-ого порядка A = .

Определителем квадратной матрицы 2-ого порядка называется число *a1,1 \* a2,2 - a1,2 \* a2,1,* вычисляемое по следующему правилу:

надо взять ***произведение чисел, расположенных по главной диагонали,*** и вычесть из него ***произведение чисел, расположенных на побочной диагонали.***

**Обозначения: , , det A, Δ.**

**Свойства определителей 2-ого порядка:**

1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы: = .

Это свойство означает полную ***равноправность*** строк и столбцов. Другие свойства для краткости будут сформулированы только для строк (они верны и для столбцов).

2. При перестановке строк определитель меняет лишь знак: = -

3. Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю: = 0

4. Общий множитель элементов какой-либо строки определителя можно выносить за знак определителя:

= λ \*

Это свойство допускает и другую формулировку: если все элементы одной из строк определителя умножить на некоторое число λ, то определитель умножится на это число.

5. Если все элементы некоторой строки равны нулю, то определитель также равен нулю.

6. Определитель, в котором все элементы одной из строк являются суммами двух слагаемых, равен сумме двух определителей:

= +

7. Если к элементам одной из строк прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится:

=

8. Определитель единичной матрицы второго порядка равен 1:

= 1

Рассмотрим квадратную матрицу 3-ого порядка A =

Определителем квадратной матрицы 3-его порядка является число:

**= a11\*a22\*a33 + a12\*a31\*a23 + a13\*a21\*a32 – a13\*a22\*a31 – a11\*a32\*a23-a33\*a21\*a12**

Если квадратная матрица 3-его порядка является треугольной, т. е. имеет вид:

или , то её определитель равен произведению элементов главной диагонали - |A| = a11 \* a22 \* a33.

**Свойства определителей третьего порядка:**

1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы.

2. При перестановке строк определитель меняет лишь знак.

3. Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.

4. Общий множитель какой-либо строки определителя можно выносить за знак определителя.

5. Если все элементы некоторой строки равны нулю, то определитель также равен нулю.

6. Определитель в котором все элементы одной из строк являются суммами двух слагаемых, равен сумме двух определителей.

7. Если к элементам одного столбца прибавить соответствующие элементы другого столбца, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

***Для вычисления определителя квадратной матрицы порядка n, где n >= 2 необходимо ввести понятие минора и алгебраического дополнения.***

**Минором элемента a ij определителя n - ого порядка называется определитель (n – 1) – го порядка, полученный из исходного вычёркиванием i – ой строки и j – ого столбца (той строки и того столбца на пересечении которых находится элемент a ij). Минор элемента a ij обозначается M ij.**

**Алгебраическим дополнением элемента aij называется его минор взятый со знаком (-1)i + j .**

**Алгебраическое дополнение элемента aij обозначается A1j.**

**В соответствии с определением A1j = (-1)i + j \* Mij.**

**Теорема разложения: определитель 3-его порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.**

**|A| = ai1A1j + ai2A1j + ai3A1j, при 1<= i <= 3.**

**Теорема замещения: пусть Δ определитель 3-его порядка. Сумма произведений алгебраических дополнений элементов какого-нибудь столбца (строки) на любые числа b1, b2, b3 равна определителю Δ1, который получается из данного определителя Δ заменой указанного столбца (строки) столбцом (строкой) из чисел b1, b2, b3 .**

**Δ =** **Δ1 =**

**Δ1 = b1A11 + b2A21 + b3A31**

**Теорема аннулирования. Сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) определителя 3-его порядка на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.**

**Вычисление определителей 3-его порядка.**

Определители 3-его порядка можно вычислять по разному:

1. По **способу треугольников (правило Саррюса).** Использовать только в теории.

2. По **теореме разложения.** |A| = ai1 \* Ai1 + ai2 \* Ai2 + ai3 \* Ai3, 1 <= i <= 3.

3. Вычисление определителя по свойству 7. Упрощение заключается в получении в какой-либо строке (столбце) двух нулей с помощью 7-ого свойства определителей.

4. Приведение определителя к треугольному виду.

**Определитель n-ого порядка.**

**Определение 1 (предварительное).** Определителем матрицы **A n-ого** **порядка** называется сумма всех **n! произведений** элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки (столбца); при этом каждое произведение снабжено знакам плюс (+) или минус (-) по некоторому правилу.

**Определение 2.** Определителем матрицы A порядка n называется число, вычисляемое по следующему правилу:

|A| = = =

**Теорема. *Каков бы ни был номер строки i****(1<=i<=n)* ***для определителя n-ого порядка справедлива формула***

***|A|= (), называемая разложением этого определителя по i-ой строке.***

**Теорема. *Каков бы ни был номер столбца j() для определителя n-го порядка справедлива формула |A| = (), называемая разложением этого определителя по j-ому столбцу.***

***Для определителей n-ого порядка (n>3) также верны теоремы замещения и аннулирования. Определители n-ого порядка (n>3) обладают теми же свойствами, что определители 2-ого и 3-его порядков.***

***Основные методы вычисления определителей.***

**Метод эффективного понижения порядка.**

В соответствии с теоремой разложения вычисление определителя **n-ого** порядка сводится к вычислению **n** определителей **(n-1)-ого** порядка. Этот метод понижения порядка не эффективен. Используя основные свойства определителей, вычисление **|A| != 0** всегда можно свести к вычислению одного определителя **(n-1)-ого** порядка, сделав в какой-либо строке (столбце) **|A|** все элементы, кроме одного, равными нулю.

**Пример:**

Дано: A = |A| = ?

Решение: *преобразуя определитель так, что бы все элементы третьей строки, кроме одного, превратились в нуль. Для этого к элементам 1-ого столбца прибавим элементы 3-его столбца умноженные на -4, а к элементам 2-ого столбца прибавим элементы 3-его столбца умноженные на 2.*

*|A| = ==*

*Прибавим к элементам 1-й строки элементы 2-й строки, умноженные на -2, а к элементам 3-й строки элементы 2-й строки, умноженные на -3. Тогда*

*|A|== = 1 \* (-1)2+3 \*= -1 \* = -(-4)\*9\*= 4\*9\*(5\*2-11\*1) = 36\*(-1) = -36*