

МІРТ МАТН 22 #3

Вступительные | «Науки о данных» | 2022

Задача 1

Исследовать на дифференцируемость функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-1)(x+1)^2, & |x| \leq 1 \\ |x| - 1, & |x| > 1 \end{cases}$$

Сколько раз $f(x)$ дифференцируема в точке $x = -1$.

Задача 2

Найти собственные значения линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Чему равна их сумма (с учетом кратностей)?

Задача 3

Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$$

Задача 4

Определить вероятность того, что среди 1000 лампочек нет ни одной неисправной, если из взятых наудачу 100 лампочек все оказались исправными. Предполагается, что число неисправных лампочек из 1000 равномерно от 0 до 5

Задача 5

Функция распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ a + b \arcsin x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$$

Определить постоянные a и b . Найти $E\xi$ и $D\xi$.

Задача 6

Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^3 dx}{(1 - x^2)^3}$$

Задача 7

Найти градиент функции $u(x, y, z)$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Задача 8

Вычислить интеграл:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

Задача 9

Найти ортогональную проекцию вектора x на подпространство L ; $x = (4, -1, -3, 4)$, L , натянуто на векторы $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$.

Задача 10

Линейное преобразование A в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу этого же преобразования в базисе e_1, e_2, e_3, e_4

Задача 11

Линейное преобразование A в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу:
Найти матрицу оператора в базисе: $1, x - 2, x^2 + 3x, x^3 - x - 1$ и его собственные значения. Чему равна сумма всех собственных значений с учетом кратностей?

Задача 12

Найти плотность вероятности случайной величины $Y = \sqrt{\frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2)}$, где X_i — нормальная центрированная случайная величина и $DX_i = \sigma^2$.

Задача 13

Студент делает в среднем 1 ошибку на 10 страниц конспекта. Пусть ξ — число ошибок, которое студент сделает в 24-листовой тетради. Найти закон распределения ξ и вероятности следующих событий: в конспекте будет 5 ошибок; не меньше 3 ошибок; от 3 до 6 ошибок включительно

Задача 14

14. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ , характеристическая функция $f(t) = Ee^{it\xi}$, которой равна

$$\frac{4}{(2-it)^2} e^{3it-1} \cos^2 5t.$$