MIPT MATH 22 #4

Вступительные | «Науки о данных» | 2022

Задача 1

Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 |\cos \frac{\pi}{x}|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет точки недифференцируемости в любой окрестности точки x = 0, но дифференцируема в этой точке. Построить эскиз графика этой функции.

Задача 2

Найти собственные значения линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Чему равна их сумма (с учетом кратностей)?

Задача 3

Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$$

Задача 4

Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0.98 и нестандартную - с вероятностью 0.05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту

Задача 5

Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{4 - x^2}}, -2 \leq x \leq 2$$

Определить дисперсию и среднее значение

Задача 6

Найти неопределенный интеграл

$$\int x^2 \sqrt{\frac{x}{1 - x}} dx$$

Задача 7

Найти градиент функции $u(x, y, z)$

$$u(x,y,z) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

.

Задача 8

Вычислить интеграл:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} xy^2 dy$$

Задача 9

Найти ортогональную проекцию вектора x на подпространство L; $x = (7, \ -4, \ -1, 2)$, L задано системой уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0 \end{aligned}$$

Задача 10

Линейное преобразование A в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 15 & -1 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу этого же преобразования в базисе $f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$

Задача 11

Найти матрицу оператора, переводящего векторы a_1, a_2, a_3 в b_1, b_2, b_3 соответственно, в стандартном базисе $e_1 = (1,\ 0,\ 0)$, $e_2 = (0,\ 1,\ 0)$, $e_3 = (0,\ 0,\ 1)$

$$\begin{aligned} a_1 &= (2,\ 3,\ 5), & b_1 &= (1,\ 1,\ 1) \\ a_2 &= (0,\ 1,\ 2), & b_2 &= (1,\ 1,\ -1) \\ a_3 &= (1,\ 0,\ 0), & b_3 &= (2,\ 1,\ 2) \end{aligned}$$

Найти сумму всех (с учетом кратностей) собственных значений этого оператора.

Задача 12

Найти функцию распределения модуля радиуса-вектор $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, если случайные величины X и Y независимы и подчиняются одному и тому же закону нормального распределения с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией D.

Задача 13

P — ресурсом элемента называется такое число T , что за время T элемент не выходит из строя с вероятностью P. Считается, что время T непрерывной работы электрической лампочки распределено по показательному закону. Найти вероятность того, что лампочка будет гореть в течение 2 лет, если ее 0.9 — ресурс составляет 6 месяцев

Задача 14

. Какое максимальное значение функция $f(x, y) = 3x - y$ достигает на поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. В каких точках достигается это значение?