

Подготовительный билет №4 вступительных испытаний по программе «Науки о данных»

Тест состоит из 24 вопросов: 14 вопросов по математике и 10 вопросов по программированию.

Чтобы преодолеть минимальный порог, вам нужно набрать 2 балла по математике и 10 баллов за весь экзамен.

На прохождение теста отводится 3 часа.

На настоящем экзамене форматы вопросов могут отличаться, но тематика вопросов остается прежней. Если вы справляетесь с заданиями из подготовительного билета, вы точно справитесь с заданиями на экзамене.

Разбалловка:

№ вопроса	Кол-во баллов
Математика	
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	2
7	2
8	2
9	2
10	2
11	2

12	3
13	3
14	3
Программирование	
15	1
16	1
17	1
18	1
19	1
20	1
21	1
22	2
23	2
24	3
Итого	40

Математика

1. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет точки недифференцируемости в любой окрестности точки $x = 0$, но дифференцируема в этой точке. Построить эскиз графика этой функции.

2. Найти собственные значения линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Чему равна их сумма (с учётом кратностей)?

3. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$$

4. Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0.98 и нестандартную — с вероятностью 0.05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту

5. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}, -2 \leq x \leq 2$$

Определить дисперсию и среднее значение.

6. Найти неопределенный интеграл

$$\int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$$

7. Найти градиент функции $u(x, y, z)$

$$u(x, y, z) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

8. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy$$

9. Найти ортогональную проекцию вектора x на подпространство L ; $x = (7, -4, -1, 2)$, L задано системой уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 &= 0 \end{aligned}$$

10. Линейное преобразование A в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 15 & -1 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу этого же преобразования в базисе $f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$

11. Найти матрицу оператора, переводящего векторы a_1, a_2, a_3 в b_1, b_2, b_3 соответственно, в стандартном базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$

$$\begin{aligned} a_1 &= (2, 3, 5), & b_1 &= (1, 1, 1) \\ a_2 &= (0, 1, 2), & b_2 &= (1, 1, -1) \\ a_3 &= (1, 0, 0), & b_3 &= (2, 1, 2) \end{aligned}$$

Найти сумму всех (с учетом кратностей) собственных значений этого оператора.

12. Найти функцию распределения модуля радиуса-вектор

$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, если случайные величины X и Y независимы и подчиняются одному и тому же закону нормального распределения с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией D .

13. P — ресурсом элемента называется такое число T , что за время T элемент не выходит из строя с вероятностью P . Считается, что время T непрерывной работы электрической лампочки распределено по показательному закону. Найти вероятность того, что лампочка будет гореть в течение 2 лет, если ее 0.9 — ресурс составляет 6 месяцев.

14. Какое максимальное значение функция $f(x, y) = 3x - y$ достигает на поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. В каких точках достигается это значение?

Программирование

15. Какой тип данных используется для хранения последовательности символов в Python?

- a) int
- b) float
- c) str
- d) bool

16. Какое значение вернет выражение $5 + "7"$?

- a) Ошибка
- b) 57
- c) 12
- d) 13

17. Что будет напечатано на экране после выполнения следующего кода?

```
a = 10
if a < 5:
    print("число меньше 5")
elif a < 15:
    print("число между 5 и 15")
else:
    print("число больше или равно 15")
```

- a) Число меньше 5
- b) Число между 5 и 15
- c) Число больше или равно 15
- d) Синтаксическая ошибка

18. Что будет содержать список `my_list` после выполнения следующего кода?

```
my_list = [1, 2, 3]
my_list[1] = 4
```

- a) [1, 2, 3]
- b) [1, 4, 3]
- c) [2, 4, 3]
- d) [1, 3, 4]

19. Что необходимо добавить в код, чтобы в результате его выполнения в консоль выводились числа от 4 до 10 включительно?

```
1 for i in range():
2     print()
```

- a) Дополнить функцию `range()` двумя аргументами: 4, 10.
- b) Дополнить функцию `range()` двумя аргументами: 4, 10. В функцию вывода `print()` добавить в качестве аргумента `i`
- c) Дополнить функцию `range()` двумя аргументами: 4, 11.
- d) Дополнить функцию `range()` двумя аргументами: 4, 11. В функцию вывода `print()` добавить в качестве аргумента `i`

20. Что вернет функция с таким определением:

```
def my_function(x, y):  
    return x*y
```

- a) Сумму x и y
- b) Разность x и y
- c) Произведение x и y
- d) Частное x и y

21. Какой будет результат выполнения кода:

```
x = 5  
y = 10  
if x > 2:  
    if y < 15:  
        print("Оба условия выполняются")  
    else:  
        print("Второе условие не выполняется")  
else:  
    print("Первое условие не выполняется")
```

- a) Оба условия выполняются
- b) Второе условие не выполняется
- c) Первое условие не выполняется
- d) Код выдаст синтаксическую ошибку

22. Дан список чисел: **numbers = [1, 2, 3, 4, 5]**. Какую операцию нужно использовать вместо пропуска, чтобы добавить число 6 в конец списка?

numbers.____(6)

Введите только команду, без дополнительных символов.

23. Дан недописанный скрипт:

```

a = ____
_____ a <= 4:
    a = a + 1
print("МИПТ")

```

Через запятую и пробел впишите недостающие фрагменты кода в пропусках, чтобы вывод(output) соответствовал указанному:

Вывод (output):

МИПТ

МИПТ

МИПТ

МИПТ

МИПТ

24. Напишите программу, которая находит наибольшее число в списке **numbers = [1,6,10,23,50,4,15]** и вывод результата в консоль соответствует указанному:

Вывод (output):

Наибольшее число в списке: 50

Ключи к билету №4:

1. Точки недифференцируемости: $x = \frac{2}{2k+1}, k \in \mathbb{Z}$

2. 3

3. 3

4. 0.998

5. $EX = 0, DX = 2$

6. $\frac{5}{8} \arcsin \sqrt{x} - \frac{8x^2 + 10x + 15}{24} \sqrt{x(1-x)} + C$

7. $\frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2(x^2 + y^2 + z^2)}} \langle y^2 + z^2, -xy, -xz \rangle$

8. $\frac{1}{40}$

9. $(5, -5, -2, -1)$

10.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

11.
$$\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \sum \lambda_i = -5$$

12.
$$F_R(r) = \begin{cases} 0, & r < 0 \\ 1 - e^{-\frac{r^2}{2D}}, & 0 \leq r \end{cases}$$

13. 0.656

14. $(x, y) = (\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}})$ — точка условного максимума; $3\sqrt{5}$ — значение f в этой точке.

15. c

16. a

17. b

18. b

19. d

20. c

21. a

22. append

23. 0, while

24. Возможный ответ:

```
numbers = [1,6,10,23,50,4,15]
max_num = numbers[0]
for num in numbers:
    if num > max_num:
        max_num = num
print("Наибольшее число в списке:", max_num)
```