

Теория вероятностей

1. *Парадокс Бертрانا.* В круге радиуса R случайно проводится хорда. Обозначим через ξ ее длину. Найти вероятность $Q_x = P(\xi > x)$. Вычислить вероятности Q_R и $Q_{R\sqrt{3}}$ того, что длина хорды больше стороны правильного вписанного шестиугольника и треугольника соответственно. Дать подробное решение в каждом из следующих случаев:

1. Считать, что слово "случайно" означает, что середина хорды равномерно распределена в круге.

2. Считать, что слово "случайно" означает, что направление хорды фиксировано, а середина равномерно распределена на диаметре окружности.

3. Считать, что слово "случайно" означает, что один из концов хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности.

В качестве ответа на каждый из пунктов принимается формула для Q_x , выражающая искомую вероятность через R и параметр x , а также два значения, вычисленные по этой формуле: при $x = R$ и при $x = R\sqrt{3}$.

2. *Игла Бюффона.* Иглу длиной 1 бросают на пол, разлинованный параллельными прямыми, находящимися на расстоянии 1 друг от друга. Найти вероятность того, что игла пересечет одну из линий. Дать подробное решение.

3. *Распределение порядковых статистик.* Пусть ξ_1, \dots, ξ_n – независимые случайные величины из одного и того же распределения. В предположении, что распределение каждой из ξ_k – абсолютно непрерывно с функцией распределения $F(x)$ и плотностью $p(x)$, найдите распределение k -той порядковой статистики $\xi_{(k)}$. Дать подробное решение.

4. Используя результат предыдущей задачи, найти в зависимости от n интеграл

$$I(n) = \int_{[0,1]^n} f(x_1, \dots, x_n) d^n x,$$

где $f(x_1, \dots, x_n)$ равно второму по величине сверху из чисел x_1, \dots, x_n .