· A是 n阶方阵. 下列说法等价

(1) A可逆.

(2) $|A| \neq 0$

(3) A行/列向量线性无关

(4) $r(A)=n$

(5) A无特征值0

(6) A可写为初等矩阵乘积

(7) A可由初等变换化为单位阵

(8) A^*可逆

(9) A的标准型为E

(10) $Ax=0$ 只有零解

(11) $Ax=b$ 有唯一解

(12) A是非奇异矩阵

(13) $r(A^TA)=r(AA^T)=n$

(14) A^TA / AA^T 正定矩阵

(15) 由A的行/列向量生成的线性空间V:
$\dim V=n$.

(16) ∃f(x)为A的化零多项式.
且f(x)常数项非0

(17) f(x)为A特征多项式. $f(0)\neq 0$.

(18) 最小多项式 $m(x)$: $m(0)\neq 0$.

(19) A的 Jordan 标准形对角线上元素全非0.

· A是 m行 n列矩阵. 下列说法等价:

(1) $r(A)=r$

(2) A ∃ r阶子式非0. 全部 r+1 阶子式为0.

(3) A经行初等变换化为阶梯阵后.
有r个非0行

(4) 线性空间 $V=\{Ax \mid x\in R^n\}$. $\dim V=r$.

(5) 由A的行/列向量生成的线空 V. $\dim V=r$.

(6) $W=\{x \mid Ax=0\}$. $\dim W=n-r$.

(7) $Ax=0$ 基础解系有 $n-r$ 个解

(8) A的列/行向量组秩为r.

(9) A可经初等变换化为 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(10) ∃可逆Q. P: $QAP=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(11) $r(A^TA)=r(AA^T)=r$

(12) 若 $m=n$. 则对A: $\lambda_1=0$. $m_1=n-r$.

· 下等：

(1) $Ax=0$ 与 $BAx=0$ 同解

(2) $r(A)=r(BA)$

☆(3) $\dim\{x|Ax=0\}=\dim\{x|BAx=0\}$.

(4) $r(B)=n$. 不一定成立.

· 下等：($r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)=r$).

(1) $AA^Tx=0$ 与 $A^Tx=0$ 同解

(2) $r(AA^T)=r(A^T)$

(1) $A^TAx=0$ 与 $Ax=0$ 同解

(2) $r(A^TA)=r(A)$

· $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，则：

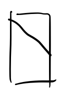
(1) $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)B$

(2) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则 $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)=r(B)$

(3) $r(\beta_1,\cdots,\beta_k)\le r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$

(4) 若 $\beta_1,\cdots,\beta_k$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 等价. 则 $r(\beta_1,\cdots,\beta_k)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$

· $A_{m\times n}$. 下列说法等价：



(1) A列满秩.

(2) $r(A)=n$.

(3) A中 $\exists$ n阶子式非0

(4) A可只经初等变换化为标准形

(5) $\dim\{Ax|x\in R^n\}=n$.

(6) 由A的行/列向量生成V：$\dim V=0$

(7) $\dim\{x|Ax=0\}=0$

(8) $Ax=0$ 只有零解

(9) A列/行向量组秩为n.

(10) A列向量线性无关

(11) A^TA 正定阵（可逆）

(12) A标准形：$\begin{pmatrix}E_n\\0\end{pmatrix}$

(13) $\exists$ 可逆 Q, P：$QAP=\begin{pmatrix}E_n\\0\end{pmatrix}$

· $Ax=b$. 下等：

(1) $Ax=b$ 无解

(2) $r(A)\ne r(A,b)$

(3) b不能由A的列向量线性表示

(4) $b\notin\{Ax|x\in R^n\}$

· 下等:

(1) A 相似于对角阵 B
(2) $\exists$ 可逆 P: $P^{-1}AP=B$
(3) A 有 n 个线性无关特征向量
(4) $\forall i$: $n_i=m_i$
(5) $m_A(\lambda)$ 无重根

· 下等:

(1) A 为正定阵
(2) 二次型 x^TAx 正定
(3) $\forall x\neq 0$: $x^TAx>0$
(4) A: $\forall i$: $\lambda_i>0$.
(5) A 合同于 E
(6) $\exists$ 可逆 P: $A=P^TP$
(7) 顺序主子式全 >0.
(8) $\exists$ 正定阵 B: $A=B^2$.

· 下等:

(1) x^TA^TAx 正定
(2) A^TA 正定
(3) $Ax=0$ 只有零解
(4) A 列满秩