Th 1.3

$n = 1$ 时，$|A_n| = a_{11}$ 显然成立.

$n \geq 2$ 时，

$n = k$ 时，假设$|A_n| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n1}M_{n1}$ 成立.

$n = k + 1$ 时，

$$|A_n| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{1i}M_{1i}$$

$$= \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{1i}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j}M_{1i,j1}a_{j1} + a_{11}M_{11}$$

$$= \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}a_{j1}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i}M_{1i,j1}a_{1i} + a_{11}M_{11}$$

$$= \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}a_{j1}M_{j1} + a_{11}M_{11}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{j1}M_{j1}$$

由数学归纳法，$|A_n| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n1}M_{n1}$ 成立.

Th 1.4

$$An = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A_n^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

$$A_{n+1}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} & a_{n+1,1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} & a_{n+1,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ a_{1,n+1} & a_{2,n+1} & \ldots & a_{n,n+1} & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

$n = 1$ 时，$|A_1| = |A_1^T|$ 显然成立.

$n \geq 2$ 时，

$n = k$ 时，假设 $|A_k| = |A_k^T|$ 成立.

$n = k + 1$ 时，

$$|A_{k+1}| = \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}a_{k+1,i}M_{k+1,i}$$

$$|A_{k+1}^T| = \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}a_{k+1,i}M'_{i,k+1}$$

下证 $M_{k+1,i} = M'_{i,k+1}$

$i = k+1$ 时，$M_{k+1,i} = |A_n|$, $M'_{i,k+1} = |A_n^T|$

$1 \leq k \leq n$ 时同理. 由数学归纳法，知$|A_n| = |A_n^T|$.

下证行列式的性质（1）：

设 A'_n 是 A_n 交换了 i,j 行所得到的矩阵.（其中 $n \geq 2$）

$n = k$ 时，假设 $|A'_k| = -|A_k|$ 成立.

$n = k+1$ 时，

$|A_{k+1}| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \ldots + (-1)^{n-1}a_{k+1,1}M_{k+1,1}$

$|A'_{k+1}| = a_{11}M'_{11} - a_{21}M'_{21} + \ldots + (-1)^{n-1}a_{k+1,1}M'_{k+1,1}$

$i,j \neq 1$ 时 $\forall\, l \in (1, k+1)$ ，由 $|A'_k| = -|A_k|$ 都有 $M_{l1} = -M'_{l1}$.

$i = 1$ 或 $j = 1$ 时同理，则 $|A_{k+1}| = -|A'_{k+1}|$.

由数学归纳法，行列式的性质（1）为真.

下证行列式的性质（2）：

不妨设在矩阵 A_n 第 i 行乘上常数 k 后得到 A'_n.

$|A'_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a'_{ik}M_{ik}$

又 $a'_{ik} = ka_{ik}$ 则 $|A'_n| = k|A_n|$.

下证行列式的性质（3）：

不妨设将矩阵 A_n 的第 i 行乘上一个常数 k 后加到第 j 行得到 A'_n.

则 $|A'_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}(a_{jk} + ka_{ik})M_{jk}$

$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{jk}M_{jk} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}ka_{ik}M_{jk}$

$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{jk}M_{jk} + k\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{ik}M_{jk}$

$= |A_n| + k|B_k|$

其中，B_k 的第 i,j 行相同，交换 i,j 行得到 B'_k，则 $|B'_k| = -|B_k|$

又 $|B'_k| = |B_k|$ 则 $|B_k| = 0$.

综上，$|A'_n| = |A_n|$.则行列式性质（3）为真.