一. 矩阵

- **矩阵的计算：**

① 加法：A + B
② 数乘：cA
③ 乘法：A * B

	加法	乘法
结合律	√	√
交换律	√	×
单位元	√	√
逆元	√	?
消去律		×

- **几个概念：**

· **数量矩阵（纯量矩阵）：** $\begin{pmatrix} k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$

特别地，k = 1 时为单位矩阵

· **转置矩阵（$A^T = (a'_{ij})_{m*n}$）：$a'_{ij} = a_{ji}$**

性质：$(AB)^T = B^TA^T$　$|A^T| = |A|$

· **对称矩阵：$a_{ij} = a_{ji}$**　**反对称矩阵：$a_{ij} = -a_{ji}$**

- **几个结论：**

· 任何 n 阶方阵一定可以唯一地表示为一个对称阵和一个反对称阵的和.
· 对任何 m*n 矩阵 A_{m*n} ，AA^T, A^TA 为对称矩阵

- **矩阵相关**

· **方阵的幂（A^m）：**

① $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　拆元法

$= \lambda E + B$

$A^m = (\lambda E + B)^m$

$= (\lambda E)^m + C_m^1(\lambda E)^{m-1}B + \dots + C_m^k(\lambda E)^{m-k}B^k + \dots + B^m$

又 $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B^3 = 0$

所以 $A^m = \begin{cases} \lambda^m E + C_m^1 \lambda^{m-1} B + C_m^2 \lambda^{m-2} B^2 & m \geq 2 \\ \dots \end{cases}$

②

$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$A = \alpha\beta^T = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$

（行与行之间存在比例；秩为 1）

对上述矩阵 A：

$A^m = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)\dots(\alpha\beta^T)$ (共 m 个相乘)

$= \alpha(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)\dots(\beta^T\alpha)\beta^T$ (共 m-1 个相乘)

$= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^{m-1}\alpha\beta^T$

$= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^{m-1}A$

$=(tr(A))^{m-1}A$

- **方阵的迹(tr(A))**

对 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

性质：tr(AB) = tr(BA)

- **方阵的多项式**

$f(x) = a_m x^m + \dots + a_0$

设 A 为 n 阶方阵

则 $f(A) = a_m A^m + \dots + a_1 A + a_0 E$

- **矩阵的共轭**

$A = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 2 & -5i \end{pmatrix}$ 则 $\overline{A} = \begin{pmatrix} -i & 1-i \\ 2 & 5i \end{pmatrix}$

● 可逆矩阵

- 定义：AB=BA=E 则 $B=A^{-1}$

- 性质：A可逆 $\Leftrightarrow |A|^{-1} \neq 0$ $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

- 消去：若 A 可逆，则

$$
\begin{aligned}
&BA = CA \Rightarrow B = C \\
&AB = 0 \Rightarrow B = 0 \\
&BA = 0 \Rightarrow B = 0
\end{aligned}
$$

● 伴随矩阵

- 定义：$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

- 性质：$\mathbf{AA^* = A^*A = |A|E_n}$ $|A^*| = |A|^{n-1} (n \geq 2)$

● 一些计算法则

- 求可逆矩阵：$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} \rightarrow$ A可逆 $\Leftrightarrow A^*$可逆

- 一些定理：

$$
\begin{gathered}
(A^{-1})^{-1} = A \\
(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \\
(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \\
|A^{-1}| = |A|^{-1}
\end{gathered}
$$

- 逆矩阵与伴随矩阵的计算
  - 逆矩阵：

$$
\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & A_S \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \cdots & \\ & & & A_S^{-1} \end{pmatrix}
$$

其中，2 阶的较特殊：

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

• 伴随矩阵：

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} A_1^*|A_2|\dots|A_n| & & & \\ & A_2^*|A_1||A_3|\dots|A_n| & & \\ & & \dots & \\ & & & A_n^*|A_1|\dots|A_{n-1}| \end{pmatrix}$$

其中，特别地，

$$\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & \\ & |A|B^* \end{pmatrix}$$

● 线性方程组

• 矩阵解方程组

①通过初等行变换将系数/增广矩阵化为行阶梯形矩阵

②再将行阶梯形化回方程组，解方程组

（定理：任何矩阵都可经过初等行变换化为（规范）行阶梯形矩阵，但不唯一（唯一）

· 规范行阶梯阵：

①主元全为 1

②主元所在列其他元素全为 0

· 标准形矩阵

形如：$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

（定理：任何矩阵可以经过初等行列变换化作标准形矩阵）

· 自由未知量/主未知量

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中，自由未知量：x_2；其余的为主未知量

- 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

可表示为：$\mathrm{AX} = \mathrm{B}$

· **克莱姆法则**：$\mathrm{x_j} = \frac{\mathrm{D_j}}{\mathrm{D}}$

· **解**：

系数行列式$|A| = 0$：有唯一解

系数行列式$|A| \neq 0$：有两解或无解

- **有解**：$\mathrm{r}(\widetilde{\mathrm{A}}) = \mathrm{r}(\mathrm{A})$
  - 有唯一解：
    （1）无自由未知量
  - 有无穷多解：
    （1）有自由未知量
- **无解**：$\mathrm{r}(\widetilde{\mathrm{A}}) = \mathrm{r}(\mathrm{A}) + 1$

- 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

· **解：总是有解**

- 仅有零解：
  （1）$|\mathrm{D}| \neq 0$
  （2）$\mathrm{r}(\mathrm{A}) = \mathrm{n}$
- 有非零解（无穷）：
  （1）$|D| = 0$
  （2）$\mathrm{r}(\mathrm{A}) < \mathrm{n}$

分块矩阵

• 初等变换

（1）交换分块矩阵的两行（列）
（2）将分块矩阵的某一行（列）的各个元素乘以同一个可逆矩阵 P
（3）将分块矩阵的某一行（列）的各个元素乘以同一个可逆矩阵 Q 后，加到另一行的对应矩阵上去

• 线性方程组视角：

令$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$都是 $AX=0$ 的解，那么矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)$满足：$AB=0$
反之，若 $AB=0$，则矩阵 B 的列都是 $AX=0$ 的解

矩阵等价

• 定义：

给定矩阵$A_{m\times n}$，如果矩阵 B 可以由 A 经过有限次行列变换得到，那么说 B 和 A 等价，记作 B~A
此外，B 可以表示为 B=PAQ，其中 P,Q 为可逆矩阵

• 等价关系

· 自反性：矩阵自己与自己等价

· 对称性：A~B 则 B~A

· 传递性：A~B 且 B~C 则 A~C

• 一些推论

•若 A 为可逆矩阵，则存在初等矩阵$R_1,R_2,...,R_s$，使得$R_1R_2...R_SA=E$，这样，$A=R_s^{-1}R_{s-1}^{-1}...R_1^{-1}$;
• 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，P 为 m 阶可逆矩阵，Q 为 n 阶可逆矩阵，则 PA,AQ,PAQ 具有相同的标准形

• 浪费空间记录行列变换（若记录行（列）变换，则在 A 右（下）侧接一 E）

· 求逆矩阵：(A E)➞(E P)　则 $P=A^{-1}$

· 解方程组：

$$Ax=B\Rightarrow x=A^{-1}B \quad (A\ \ B)\to(E\ \ A^{-1}B)$$

$$xA=B\ \Rightarrow x=BA^{-1} \quad \begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E\\BA^{-1}\end{pmatrix}$$

- **矩阵的秩**

·定义：

设 A 是 $m \times n$ 阵，若存在一个 r 阶子式不为 0，而矩阵 A 的全部 r+1 阶子式都为 0，则称矩阵 A 的秩为 r，记作 r(A)=r

·矩阵秩的性质

①唯一性;
②$r(A_{m\times n}) \le \min\{m,n\}$;
③若矩阵 A 有一个 r 阶子式不为 0，则 r(A)≥ r;
④若矩阵 A 的所有 r 阶子式都为 0，则 r(A)< r;
⑤$r(A^T) = r(A)$;
⑥行阶梯形矩阵的秩等于其非零行的数目；
⑦n 阶可逆矩阵的秩等于 n。

·行（列）满秩

*定理：一个**列**满秩矩阵可只做**行**变换化为**标准形***

·关于矩阵的秩的一些小结论

（1）$r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$
（2）$\max\{r(A), r(B)\} \le r(A\ B) \le r(A) + r(B)$
（3）$r(A+B) \le r(A) + r(B)$
（4）$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \ge r(A) + r(B)$
（5）$A: m \times n$, $B: n \times p$, $AB = 0.$ 则 $r(A) + r(B) \le n$
（6）A 为 n 阶方阵，$r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n-1 \\ 0, r(A) < n-1 \end{cases}$
（7）$r(A) = r(A^T A)$
（8）设 A 为 $m \times p$ 阵，B 为 $p \times n$ 阵，则

$$r(A) + r(B) - p \le r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$$

二．行列式

- **行列式的值**

  - **det(A)=**$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\dots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\dots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$

$$= \sum_{i_1i_2\dots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\dots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\dots a_{i_nn}$$

$$= \sum_{\substack{j_1j_2\dots j_n \\ i_1i_2\dots i_n}}(-1)^{\tau(i_1i_2\dots i_n)\tau(j_1j_2\dots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}$$

  - 上（下）三角：$D_1 = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$

推论：$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \dots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}$

推推论：$\begin{vmatrix} A_{k1} & & & 0 \\ & A_{k2} & & \\ & & \dots & \\ * & & & A_{ks} \end{vmatrix} = |A_{k1}||A_{k2}|\dots|A_{ks}|$

  - 转置不改变行列式的值

  - $\begin{vmatrix} A_k & 0 \\ C_{nk} & B_n \end{vmatrix} = |A_k||B_n|$ 推论：$\begin{vmatrix} 0 & A_k \\ B_n & C_{nk} \end{vmatrix} = (-1)^{kn}|A_k||B_n|$

- **行列式的初等变换**

  - 第一类初等变换：交换 **i,j** 行：**D'=-D**

  - 第二类初等变换：$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ ka_{i1} & \dots & ka_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k|A|$

  - 第三类初等变换：把 **D** 的第 **j** 行的 **K** 倍加到第 **i** 行：行列式值不变

- **易混淆概念：**

  • 元素a_{ij}的余子式(M_{ij})：去掉行列式 D 的 i 行 j 列所得到

  • 元素a_{ij}的代数余子式(A_{ij})：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

  • D 的一个 k 阶子式(M_i)：随机去掉 D 中的 k 行 k 列交点上的k^2个元素所得到的 k 阶行列式

  • M_i的余子式(M’)：D 划去上述 k 行 k 列

  • M_i的代数余子式：$A_i=(-1)^{(i_1+i_2+\ldots+i_k)+(j_1+j_2+\ldots+j_k)}M'$

- **行列式的计算**

  · 行列式的按行（列）展开：$\mathbf{D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}B_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}}$

  eg:$\mathbf{D}=\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-8}\end{vmatrix}$ 求$A_{11}+A_{12}$:

$$A_{11}+A_{12}=1\cdot A_{11}+1\cdot A_{12}+0\cdot A_{13}$$
$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 0 & -8\end{vmatrix}$$

  • **Laplace 定理：$\mathbf{D=\sum_{i=1}^{t}N_iA_i}$**

  • 行列式的乘法：$|\mathrm{A_nB_n}|=|A_n||B_n|$

• 计算行列式的方法：

· 递推法：（常用于 n 阶和 n-1 阶形状相同的行列式）

$$D=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$

· 消去法：（利用行列式的性质将一些非 0 元素化为 0）

$$D_n=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & \dots & 0 & 0\\ & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{n}{n-1} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{n+1}{n}\end{vmatrix}=n+1$$

· 拆元法：（将行列式的一列分成两个数的和）

$$D_n=\begin{vmatrix}x & a & a & \dots & a\\ -a & x & a & \dots & a\\ -a & -a & x & \dots & a\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -a & -a & -a & \dots & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+a & a & \dots & a\\ 0 & x & .. & a\\ 0 & -a & \dots & -a\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & -a & \dots & x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-a & a & a & \dots & a\\ -a & x & a & \dots & a\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -a & -a & -a & \dots & x\end{vmatrix}$$

$$=(x+a)D_{n-1}+\begin{vmatrix}-a & 0 & \dots & 0\\ -a & x-a & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -a & -2a & \dots & x-a\end{vmatrix}=(x+a)D_{n-1}-a(x-a)^{n-1}$$

· 加边法：（通常这样的行列式行（列）有重复出现的元素）

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-a_1b_1 & -a_1b_2 & -a_1b_3 & \dots & -a_1b_n \\ -a_2b_1 & 1-a_2b_2 & -a_2b_3 & \dots & -a_2b_n \\ -a_3b_1 & -a_3b_2 & 1-a_3b_3 & \dots & -a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & -a_nb_3 & \dots & 1-a_nb_n \end{vmatrix} =$$

（第一行乘上a_n 减到后面各行）

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ 0 & 1-a_1b_1 & -a_1b_2 & -a_1b_3 & \dots & -a_2b_n \\ 0 & -a_2b_1 & 1-a_2b_2 & -a_2b_3 & \dots & -a_2b_n \\ 0 & -a_3b_1 & -a_3b_2 & 1-a_3b_3 & \dots & -a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -a_nb_1 & -a_nb_2 & -a_nb_3 & \dots & 1-a_nb_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & & \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left|1-a_1b_1-a_2b_2-\dots-a_nb_n\right|$$

Ps：由此证得：$|E-AB|=|E-BA|$　　此为$\left|\lambda E-AB\right|=\left|\lambda E-BA\right|$的特殊情况

· 数学归纳法：

eg：范德蒙德行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1-x_n & \dots & x_{n-1}-x_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-3}(x_1-x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1}-x_n) & 0 \\ x_1^{n-2}(x_1-x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n) & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}(x_1-x_n)\dots(x_{n-1}-x_n)D_{n-1}=(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})D_{n-1}$$

$$\therefore \mathrm{D_n}=\prod_{1\le j\le i\le n}(x_i-x_j)$$

eg：利用递推方程组

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y \\ z & x & y & \dots & y \\ z & z & x & \dots & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \dots & 0 & y \\ z-x & x-y & 0 & \dots & 0 & y \\ 0 & z-x & x-y & \dots & 0 & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-y & y \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z-x & x \end{vmatrix}$$

K+1 列减到 k 列

$$=(x-y)D_{n-1}+y(-1)^{1+n}(z-x)^{n-1}$$

转置：$D_n=(x-z)D_{n-1}+z(x-y)^{n-1}$

三. 向量空间

- n 维向量默认为列向量
- R^n为 R（数域）上 n 维向量全体构成的集合

· n 维向量的运算性质

• 加法：

$$(1)\alpha+\beta=\beta+\alpha \quad (2)(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$$
$$(3)\alpha+0=\alpha \quad (4)\alpha+(-\alpha)=0$$

• 数乘：

$$(5)1\alpha=\alpha \quad (6)k(l\alpha)=l(k\alpha)=(kl)\alpha$$
$$(7)k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta \quad (8)(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$$

· 线性子空间

• 定义：

- $S\subseteq F^n$ 且 S 非空，若 S 对于加法与数乘运算都封闭，那么说 S 是F^{n}的子空间
- $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$是$F^n$中 s 个元素，令
  $\mathrm{L}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s|k_i\in P,i=1,2,\ldots,s\}$，
  称 $\mathrm{L}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$为由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$生成的线性子空间

• 和与交

已知 U 和 V 都是F^n的子空间，定义
和空间：$\mathrm{U}+\mathrm{V}=\{\mathrm{u}+\mathrm{v}|\mathrm{u}\in\mathrm{U},\mathrm{v}\in\mathrm{V}\}$
交空间：$\mathrm{U}\cap\mathrm{V}=\{\mathrm{w}|\mathrm{w}\in\mathrm{U},\mathrm{w}\in\mathrm{V}\}$

· 线性组合

存在不全为零的 m 个数$k_1,k_2,\ldots,k_m$使$\beta=\mathrm{k}_1\alpha_1+\mathrm{k}_2\alpha_2+\ldots+\mathrm{k}_\mathrm{m}\alpha_\mathrm{m}$，（有解）则称$\beta$是$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$的线性组合，或称$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$的线性表出，称$k_1,k_2,\ldots,k_m$为表出系数

• 等价

两向量组可以相互表示，则称这两个向量组等价

· 线性相关和线性无关

• 定义

存在不全为零的 m 个数$k_1,k_2,\ldots,k_m$使$\mathrm{k}_1\alpha_1+\mathrm{k}_2\alpha_2+\ldots+\mathrm{k}_\mathrm{m}\alpha_\mathrm{m}=0$，则称

$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$线性相关；
相对应地，若该式当且仅当$k_1=k_2=\dots=k_m=0$时成立，则称$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$线性无关

- **方程组/矩阵视角**
  - $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_m\alpha_m=0$ 线性相关
    ①方程组有非零解
    ②$r(A)<m$
    ③$|A|=0$
  - 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$线性无关，

$$\beta_1=k_{11}\alpha_1+k_{21}\alpha_2+\dots+k_{r1}\alpha_r$$
$$\beta_2=k_{12}\alpha_1+k_{22}\alpha_2+\dots+k_{r2}\alpha_r$$
$$\dots\dots$$
$$\beta_m=k_{1m}\alpha_1+k_{2m}\alpha_2+\dots+k_{rm}\alpha_r$$

令 $A=(k_{ij})_{r\times m}$
可以写作$(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r)A_{r\times m}$
那么$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$线性相关当且仅当 $r(A)<m$
则$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$线性无关当且仅当 $r(A)=r(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m)$

- **一些有关向量线性相关性的结论**
  - 若 m 个 n 维（列）向量线性无关，则保持这 m 个 n 维向量的相对位置的任何 n+k 维向量仍然线性无关（在行上添加元素）
  - 若 m 个 n 维（列）向量线性无关，则保持这 m 个 n 维向量的相对位置的任何 k（$\leq n$）维向量线性相关（在行上减少元素）
  - 向量$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$线性无关，且$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m,\beta$线性相关$\Leftrightarrow$ β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$线性表出，且表出系数唯一

· 向量组的极大线性无关组和向量组的秩

- **定义：**

设由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$，若$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_i$时向量组中的 n 个向量，且满足
（1）$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_i$线性无关
（2）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$的任意一个向量都可以由$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_i$线性表出
则称$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_i$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$的一个极大线性无关组

- **一些结论**
  - 向量组的极大线性无关组一定与向量组本身等价
  - 由向量组等价的传递性，向量组的两个不同的极大线性无关组之间是等价的
  - $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t)=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t)A$，若$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t$线性无关，则 $A=E$
  - 局部线性无关的组，总可以增加一些新的向量进去，构成一个极大线性无关组

- **定理：**

给定两个向量组

（1）$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$
（2）$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$
若（1）$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$可由$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$线性表出
（2）s>t
那么$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$线性相关

· 逆否：

$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$线性无关，且可由$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$线性表出，则 $s \le t$

· 加强

$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$，$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$皆线性无关且等价，则 $s = t$

- **关于向量组的秩的有关结论**

（9）向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$线性无关$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)=m$
（10）若 $\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)=r>0$，则向量组中任意 k>r 个向量都是线性相关的
（11）若 $\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)=r>0$，则向量组中任意 r 个线性无关的向量都是它的一个极大线性无关组
（12）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$可由$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$线性表出，则$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m) \le r(\beta_1,\beta_2,...,\beta_t)$
（13）等价的向量组有相同的秩
（14）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$可由$\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$线性表出，且$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)=r(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)$，则这两个向量组等价

· 线性子空间的基与维数

F^n是数域 F 上的线性空间，W 是F^n的一个子空间，若$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$是 W 中 r 个向量，满足：
（1）它们是线性无关的向量；
（2）若 W 中任一向量α都可以由它们线性表示，则称$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$是 W 的一组基；基中包含向量的个数 r，成为 W 的维数，记作 dim(W)=n

· 向量组的秩与矩阵的秩

- **定理：矩阵的秩=矩阵的列秩=矩阵的行秩**

· 向量组的秩和极大线性无关组的求法：

1. 将向量组按列摆放为一个矩阵
2. 对矩阵**只做行变换**化为规范的阶梯形矩阵
3. 得到矩阵的秩，即向量组的秩
4. 各个主元所对应的列（进行行变换前）放在一起形成极大线性无关组，且容易得到其他向量的表示系数

▪ 齐次线性方程组解的性质和结构

• 基础解系

▪ 定义：

设$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s$都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，且满足

（1）$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s$线性无关；

（2）齐次线性方程组的任意一个解都可以由$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s$线性表出，

则称$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s$为齐次线性方程组的基础解系

▪ 求法

1. 通过初等**行变换**化系数矩阵 A 为规范阶梯形矩阵
2. 将一个自由未知量取 1，其余的自由未知量都取 0，然后计算出所有的非自由未知量，从而得到$\mathbf{n}-\mathbf{r}(\mathbf{A})$个向量
3. 这 $n-r(A)$个向量就是 $Ax=0$ 的基础解系，可写出通解

（$Ax=0$ 的基础解系的秩为$n-r(A)$）

• 解的性质

• 设η_1,η_2是非齐次线性方程组 $Ax=B$ 的解

那么（1）$\eta_1-\eta_2$是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解

（3）若ξ是线性方程组 $Ax=B$ 的解，η是线性方程组 $Ax=0$ 的解，那么

$\xi+\eta$是方程组 $Ax=B$ 的解

• 设$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_k$是非齐次线性方程组 $Ax=B$ 的解

那么（1）$l_1\eta_1+l_2\eta_2+\ldots+l_k\eta_k$是线性方程组 $Ax=(l_1+l_2+\ldots+l_k)B$ 的解

（2）若$l_1+l_2+\ldots+l_k\neq 0$，那么$\dfrac{l_1\eta_1+l_2\eta_2+\ldots+l_k\eta_k}{l_1+l_2+\ldots+l_k}$是线性方程组

$Ax=B$ 的解

• 通解

求非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解：

取 $Ax=b$ 的一个**特解**η（取全部自由未知量为 0），求出 $Ax=0$ 的**基础解系**

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$,

则通解： $x = \eta + k_1\xi_1 + \ldots + k_{n-r}\xi_{n-r}$

· 矩阵方程

- 证：A 满足$A^2 - (a+b)A + abE = 0$, $a \neq b$
  则 $r(A - aE) + r(A - bE) = n$
  解：$(A - aE)(A - bE) = n$ 则 $r(A - aE) + r(A - bE) \leq n$
  又 $r(A - aE) + r(A - bE) = r(aE - A) + r(A - bE) \geq r((a - b)E) = n$
  故 $r(A - aE) + r(A - bE) = n$
- 结论：
  设 A 是 $m \times p$ 阵，B 是 $p \times n$ 阵，则 $BX = 0$ 与 $ABX = 0$ 同解当且仅当 $r(AB) = r(B)$