Projeto e Analise de Algoritmos

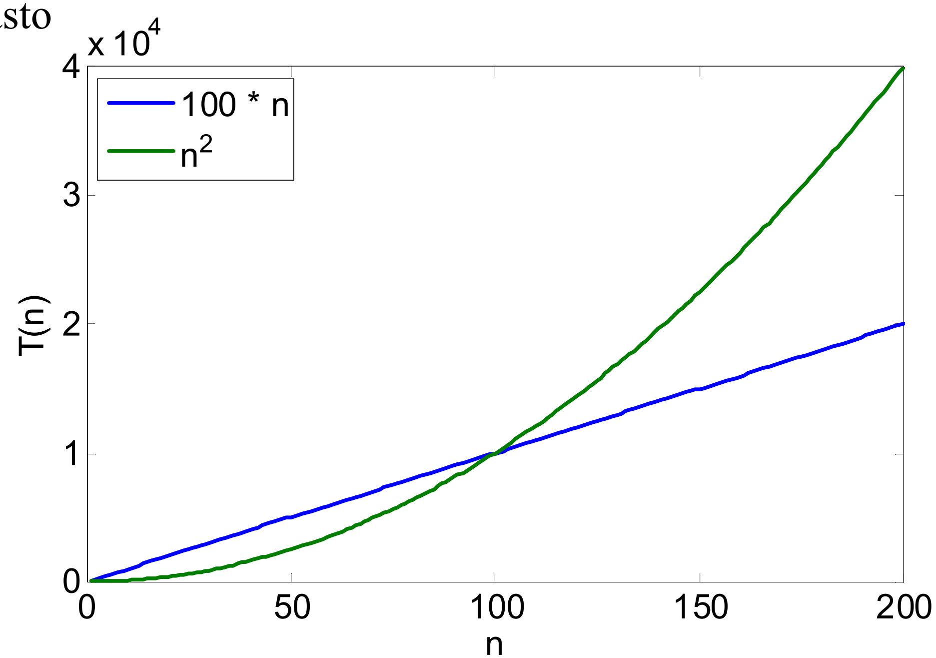
- Analise assintótica
- Notação assintótica
  - O
  - Ω
  - Θ

Analise Assintótica

- O tempo necessário para rodar o programa depende to tamanho da entrada n
  - Um vetor maior demora mais tempo para ser ordenado
  - $\mathrm{T}(n)$: o tempo necessário para a entrada de tamanho n
  - Ver o crescimento de $T(n)$ quando $n \rightarrow \infty$ é chamado de "**Análise Assintótica**"
- O tamanho da entrada é geralmente definido como o número de elementos da entrada
  - Pode não ser verdade em alguns casos

Analise Assintótica

- Considera um custo uniforme para cada declaração do código (menos para funções)
- Ordem de crescimento é uma medida importante:
  - O termo de maior ordem é o que realmente importa
    - Quando o tamanho n da entrada aumenta, o termo de maior ordem domina o tempo gasto



Ordem de Crescimento

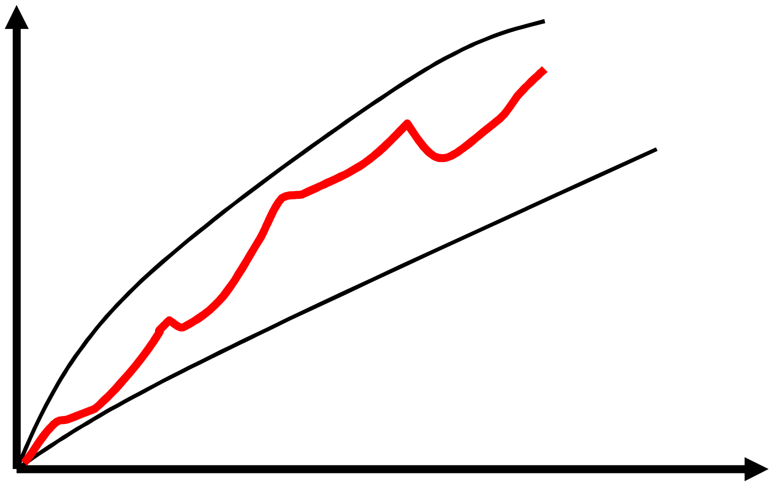
Comparação entre ordens de crescimento

$1 << \log_2 n << n << n\log_2 n << n^2 << n^3 << 2^n << n!$

Como comparar as ordens de crescimento?

Análise Exata é Difícil

- O pior caso e o caso médio são difíceis de lidar de forma exata pois os detalhes são muito complicados



Pode ser mais fácil lidar com os limites inferiores e superiores da função

Notações Assintótica

- O: Grande O
- Ω: Grande Omega
- Θ: Theta
- o: Pequeno o
- ω: Pequeno omega

Grande O

- Informalmente, O (g(n)) é o conjunto de todas as funções com uma ordem de crescimento menor ou igual a g(n), multiplicado por uma constante
- g(n) é o limite superior assintótico de f(n)
  - Intuitivamente é como se $f(n) \leq g(n)$
- O que significa $O(n^2)$?
  - Corresponde ao conjunto de todas as funções que tem o crescimento mais lento ou da mesma ordem de n^2
  - Várias funções preenchem este requisito

Exemplo

Temos (como se $f(n) \leq g(n)$):

$n \in O(n^2)$

$n^2 \in O(n^2)$

$1000n \in O(n^2)$

$n^2 + n \in O(n^2)$

$100n^2 + n \in O(n^2)$

Mas:

$1/1000\ n^3 \notin O(n^2)$

Pequeno o

- Informalmente, o (g(n)) é o conjunto de todas as funções que tem um crescimento estritamente menor que o crescimento de g(n), multiplicado por uma constante
- O que significa $o(n^2)$?
  - Conjunto de todas as funções que crescem mais lentamente que n^2
  - E como se $f(n) < g(n)$

Logo:

$1000n \in o(n^2)$

Mas:

$n^2 \notin o(n^2)$

Grande Ω

- Informalmente, Ω (g(n)) é o conjunto de todas as funções com uma ordem de crescimento igual ou superior a de g(n), multiplicado por uma constante.
- Assim, g(n) é o limite inferior assintótico de f(n)
  - Intuitivamente e como se $g(n) \leq f(n)$

Assim:

$n^2 \in \Omega(n)$

$1/1000\ n^2 \in \Omega(n)$

Mas:

$1000\ n \notin \Omega(n^2)$

Pequeno ω

- Informalmente, ω (g(n)) corresponde ao conjunto de todas as funções com uma ordem de crescimento maior que g(n), multiplicado por uma constante
- É como se g(n) < f(n)

Assim:

$n^2 \in \omega(n)$

$1/1000\ n^2 \in \omega(n)$

$n^2 \notin \omega(n^2)$

Theta (Θ)

- Informalmente, Θ (g(n)) é o conjunto de todas as funções com uma ordem de crescimento igual a de g(n), multiplicado por uma constante
- g(n) é o limite assintótico de f(n)
  - Intuitivamente e como se f(n) = g(n)
- Qual é o $\Theta(n^2)$?
  - Conjunto de todas as funções que crescem com a mesma ordem de n^2

Exemplo

Então:

$n^2 \in \Theta(n^2)$

$n^2 + n \in \Theta(n^2)$

$100n^2 + n \in \Theta(n^2)$

$100n^2 + \log_2 n \in \Theta(n^2)$

Mas:

$n\log_2 n \notin \Theta(n^2)$

$1000n \notin \Theta(n^2)$

$1/1000\ n^3 \notin \Theta(n^2)$

Grande O

- Informalmente: O (g(n)) é o conjunto de todas as funções com uma ordem de crescimento menor ou igual a g(n), multiplicado por uma constante
- Definição:

  $O(g(n)) = \{f(n)\text{: } \exists$ constantes positivas c e n_0 tais que $0 \leq f(n) \leq cg(n)\ \forall\ n>n_0\}$
- $\lim_{n\to\infty} g(n)/f(n) > 0$ (se este limite existir)
- Significado da notação:

  $f(n) = O(g(n))$ significa $f(n) \in O(g(n))$

Grande O

- Verificar se $f(n) = 3n^2 + 10n + 5 \in O(n^2)$
- Prova usando a definição:

  $O(g(n)) = \{f(n): \exists$ constantes positivas c e n_0 tais que $0 \leq f(n) \leq cg(n)\ \forall\ n>n_0\}$

  Queremos encontrar c e n_0 tais que $f(n) <= cn^2$ para $n > n_0$.

  (podemos escolher qualquer constante que satisfaça a definição)

  $3n^2 + 10n + 5 \leq 10n^2 + 10n + 10$

  $\leq 10n^2 + 10n^2 + 10n^2, \forall\ n \geq 1$

  $\leq 30\ n^2, \forall\ n \geq 1$

  Seja $c = 30$ e $n_0 = 1$, nós temos $f(n) \leq c\ n^2, \forall\ n \geq n_0$.

  assim de acordo com a definição, $f(n) = O(n^2)$.
- Se pode alternativa provar que

  $$\lim_{n\to\infty} n^2 / (3n^2 + 10n + 5) = 1/3 > 0$$

Grande Omega

- Definição:

  $\Omega(g(n)) = \{f(n)\text{: } \exists$ constantes positivas c e n_0 tais que $0 \leq cg(n) \leq f(n)\ \forall\ n > n_0\}$

- $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) > 0$ (se o limite existe)
- A notação:

  $f(n) = \Omega(g(n))$ significa $f(n) \in \Omega(g(n))$

Grande Omega

- Verificar: $f(n) = n^2 / 10 = \Omega(n)$

- Prova por definição:

  $f(n) = n^2 / 10$, $g(n) = n$

  Basta encontrar c e n_o que satisfaz a definição $f(n) \in \Omega(g(n))$, i.e., $f(n) \geq cg(n)$ para $n > n_0$

  $n \leq n^2 / 10$ quando $n \geq 10$

  Se $c = 1$ e $n_0 = 10$, nos temos $f(n) \geq cn^2$, $\forall\ n \geq n_0$. logo de acordo com a definição $f(n) = \Omega(n^2)$.

- Se Pode alternativamente demonstrar que:

  $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = \lim_{n\to\infty} (n/10) = \infty$

Theta

- Definição:
  - $\Theta(g(n)) = \{f(n)$: $\exists$ constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $0 \leq c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n), \quad \forall\, n \geq n_0 \}$
- $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = c > 0$ e $c < \infty$
- $f(n) = O(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$
- A notação significa:

  $f(n) = \Theta(g(n))$ significa $f(n) \in \Theta(g(n))$

  $\Theta(1)$ significa tempo constante

Theta

- Verificar: $f(n) = 2n^2 + n = \Theta\ (n^2)$
- Prova usando a definição:
  - Queremos encontrar 3 constantes c_1, c_2 e n_0 tais que $c_1n^2 \leq 2n^2+n \leq c_2n^2$ para todo $n > n_0$
  - Uma solução é $c_1 = 2$, $c_2 = 3$ e $n_0 = 1$

- Alternativamente, $\lim_{n\to\infty}(2n^2+n)/n^2 = 2$

Exemplos

- Mostrar que $n^2 + 3n + \lg n$ está em $O(n^2)$
- Encontrar c e n_0 tais que

$$n^2 + 3n + \lg n <= cn^2 \text{ para } n > n_0$$

- Prova:

$$\begin{aligned} n^2 + 3n + \lg n &<= 3n^2 + 3n + 3\lg n \qquad \text{para } n > 1 \\ &<= 3n^2 + 3n^2 + 3n^2 \\ &<= 9n^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ou } n^2 + 3n + \lg n <= n^2 + n^2 + n^2 \qquad \text{para } n > 10$$

$$<= 3n^2$$

Exemplos

- Provar $n^2 + 3n + \lg n$ esta em $\Omega(n^2)$
- Encontrar c e n_0 tais que

$$n^2 + 3n + \lg n >= cn^2 \text{ para } n > n_0$$

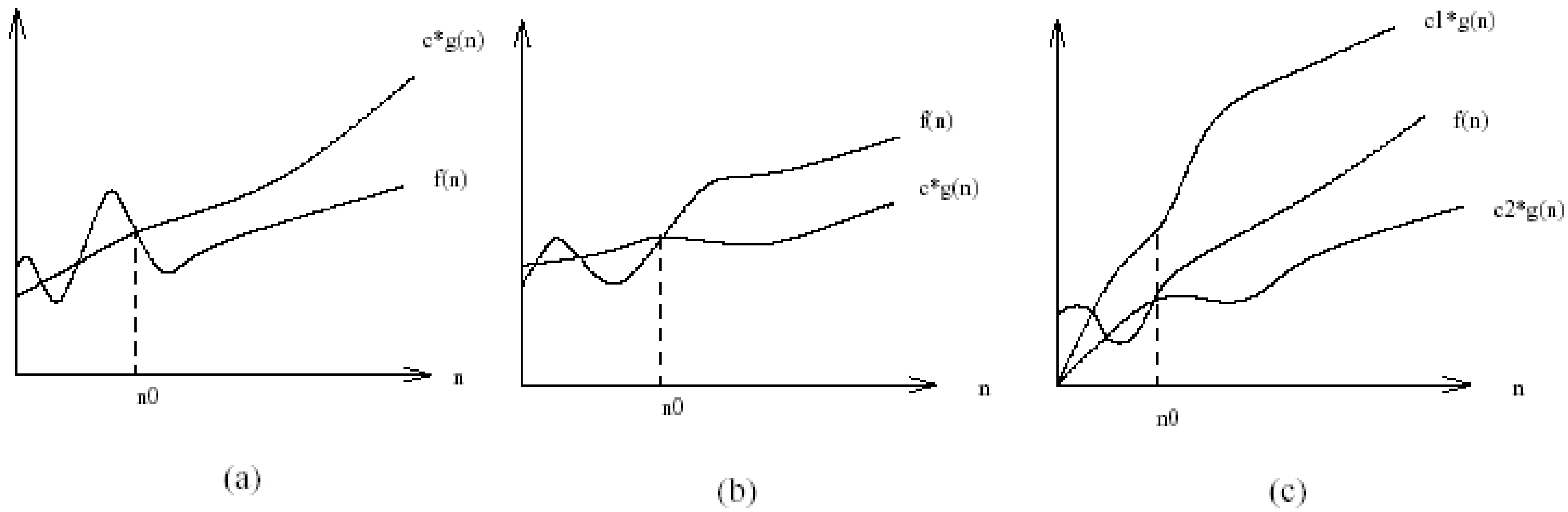
$$n^2 + 3n + \lg n >= n^2 \quad \text{para } n > 0$$

- Provar $n^2 + 3n + \lg n$ esta em $\Theta(n^2)$

$$n^2 + 3n + \lg n = O(n^2) \text{ e } n^2 + 3n + \lg n = \Omega(n^2)$$

$$=> n^2 + 3n + \lg n = \Theta(n^2)$$

O, Ω, Θ



As definições implicam em uma constante n_0 alem da qual a propriedade é satisfeita. Valores pequenos de n são ignorados

Comparação de Ordens

- comparar $\log_2 n$ e $\log_{10} n$

- $\log_a b = \log_c b \; / \; \log_c a$
- $\log_2 n = \log_{10} n \; / \; \log_{10} 2 \sim 3.3 \log_{10} n$
- Assim, $\lim(\log_2 n \; / \; \log_{10} n) = 3.3$
- $\log_2 n = \Theta\,(\log_{10} n)$

Comparação de Ordens

- Comparar 2^n e 3^n

- $\lim_{n\to\infty} 2^n / 3^n = \lim_{n\to\infty}(2/3)^n = 0$

- Logo, $2^n \in o(3^n)$ e $3^n \in \omega(2^n)$

- Comparar 2^n e 2^{n+1}?

  $2^n / 2^{n+1} = ½$, logo $2^n = \Theta\ (2^{n+1})$

Dominância da Ordem de Crescimento

$$n! \gg c^n \gg n^3 \gg n^2 \gg n^{1+\epsilon} \gg n \log n \gg n \gg \sqrt{n} \gg$$
$$\log^2 n \gg \log n \gg \log n / \log \log n \gg \log \log n \gg \alpha(n) \gg 1$$