

**¡¡APRUEBA TU EXAMEN CON SCHAUM!!**

# Mecánica vectorial: Estática y Dinámica

*Schaum*

5<sup>a</sup> EDICIÓN

E. W. Nelson <sup>3</sup> C. L. Best <sup>3</sup> W. G. McLean

 REDUCE TU TIEMPO DE ESTUDIO

 INCLUYE 1320 PROBLEMAS RESUELTOS, TOTALMENTE EXPLICADOS

Utilízalo para las siguientes asignaturas:

MECÁNICA

MECÁNICA TÉCNICA

# **Mecánica Vectorial**

## **Estática y Dinámica**

**Quinta edición**



# Mecánica Vectorial

## Estática y Dinámica

### Quinta edición

**E. W. NELSON, B. S. M. E., M. Adm. E.**

*Engineering Supervisor, Retired*

*Western Electric Company*

**CHARLES L. BEST, B. S. M. E., M. S., Ph. D.**

*Emeritus Professor*

*Lafayette College*

**W. G. McLEAN, B. S. E. E., Sc. M., Eng. D.**

*Emeritus Director of Engineering*

*Lafayette College*

### Traducción y Revisión Técnica

M<sup>a</sup> Rosa Dalmau

José Vilardell

Universidad Politécnica de Cataluña



MADRID • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MÉXICO  
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO  
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS  
SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • SAN LUIS • TOKIO • TORONTO

## **MECÁNICA VECTORIAL. ESTÁTICA Y DINÁMICA.Qinta edición**

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

Traducido de la edición en inglés de

**Engineering Mechanics Statics and Dynamics. Fifth Edition**

Copyright © 1998 by The McGraw-Hill Companies, Inc.

ISBN: 0-07-046193-7

DERECHOS RESERVADOS © 2004, respecto a la quinta edición en español, por

McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S. A. U.

Edificio Valrealty, 1.<sup>a</sup> planta

Basauri, 17

28023 Aravaca (Madrid)

ISBN: 84-481-2950-4

Depósito legal:

Editora: Silvia Figueras

Asist. editorial: Amelia Nieva

Compuesto en Vuelapluma, S. L.

Diseño de cubierta: MGH

Impreso en

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

# PREFACIO

El propósito de este libro es servir de complemento a los textos oficiales, más que nada como ayuda para que los estudiantes de ingeniería y ciencias adquieran unos conocimientos mas sólidos y una mayor destreza en mecánica analítica y aplicada. Se basa en el convencimiento de los autores de que uno de los mejores procedimientos para aclarar las ideas y fijar mentalmente las ideas fundamentales consiste en resolver un buen número de problemas. Mientras que este libro no encaja exactamente con ningún otro texto, los autores creen que puede ser un valioso acompañante a todos ellos.

Las anteriores ediciones fueron recibidas muy favorablemente. En esta edición se incluyen las unidades tradicionales de EE. UU. y las unidades SI, tal como en las ediciones tercera y cuarta. Los problemas se presentan aproximadamente al cincuenta por ciento en unas y otras, pero sin mezclarlas en ningún caso. Se ha procurado hacer uso de las mejores herramientas matemáticas de que disponen los estudiantes a nivel de segundo curso. Por ello, se recurre al método vectorial en los capítulos donde esas técnicas brindan elegancia y sencillez tanto en la teoría como en la resolución de problemas. Por otra parte, no hemos dudado en emplear métodos escalares en los demás casos, pues proporcionan unas soluciones enteramente suficientes a gran parte de los problemas. En el Capítulo 1 se repasan por completo el número mínimo de definiciones y operaciones vectoriales necesarias para la totalidad del libro, de las que se hace uso a lo largo de todo el texto. Se ofrecen algunas soluciones por computadora, pero la mayoría de los problemas pueden resolverse fácilmente por otros procedimientos.

Los temas de los capítulos corresponden a las materias habitualmente tratadas en los cursos oficiales de introducción a la Mecánica. Cada capítulo empieza con el enunciado de las definiciones, principios y teoremas pertinentes. Al material de texto siguen unas colecciones de problemas resueltos y problemas propuestos ordenados por dificultad creciente. Los problemas resueltos sirven para ilustrar y ampliar la teoría, presentar métodos de análisis, ofrecer ejemplos prácticos y centrar la atención en los aspectos cruciales que capacitan al estudiante para aplicar los principios básicos correcta y confiadamente. Entre los problemas resueltos se incluyen numerosas demostraciones de teoremas y deducciones de fórmulas. El gran número de problemas propuestos sirven como repaso completo de la materia tratada en cada capítulo.

En la primera edición los autores reconocieron agradecidos su deuda con Paul B. Eaton y J. Warren Gillon. En la segunda edición, los autores recibieron la ayuda de las sugerencias y críticas de Charles L. Beste y John W. McNabb. Asimismo, en esa edición, Larry Freed y Paul Gary comprobaron las soluciones a los problemas. En la tercera edición, James Schwar nos ayudó en la preparación de las soluciones por computadora del Apéndice C. En la cuarta edición, volvimos a agradecer a James Schwarr y a Michael Regan, Jr., su ayuda en las soluciones por computadora del Apéndice C. En esta quinta edición, los autores agradecen a William Best su comprobación a las soluciones de los nuevos problemas y la revisión del material añadido. Por el mecanografiado de los manuscritos de las ediciones tercera y cuarta, estamos en deuda con Elizabeth Bullock.

E. W. NELSON  
C. L. BEST  
W. G. MCLEAN



# ACERCA DE LOS AUTORES

**E. W. NELSON** es licenciado en ingeniería mecánica y master en administración por la Universidad de New York. Fue profesor de ingeniería mecánica en Lafayette College y posteriormente entró en la división de ingeniería de Western Electric Company (hoy Lucent Technologies). Retirado de esta última , actualmente es miembro de la American Society of Mechanical Engineers. Está colegiado como ingeniero profesional y es miembro de las sociedades Tau Beta Pi y Pi Tau Sigma.

**CHARLES L. BEST** es profesor emérito de ingeniería en Lafayette College. Es licenciado en ingeniería mecánica por Princeton, master en matemáticas por el Instituto Politécnico de Brooklyn y doctor en mecánica aplicada por el Instituto Politécnico de Virginia. Es coautor de dos libros de ingeniería mecánica y de otro libro de programación en FORTRAN para estudiantes de ingeniería. Es miembro de la sociedad Tau Beta Pi.

**W. G. McLEAN** es director emérito de ingeniería en Lafayette College. Posee una licenciatura en ingeniería eléctrica por Lafayette College, un master en ciencia por la universidad de Brown y un doctorado honorario en ingeniería por Lafayette College. El profesor McLean es coautor de dos libros de ingeniería mecánica, fue presidente de la Sociedad de Ingenieros Profesionales de Pennsylvania y forma parte de los comités de codificación y normalización de la American Society of Mechanical Engineers. Está colegiado como ingeniero profesional y es miembro de las sociedades Fi Beta Kappa y Tau Beta Pi.



# CONTENIDO

<b>Capítulo 1</b>	VECTORES .....	1									
1.1 Definiciones	1.2 Suma de dos vectores	1.3 Sustracción de un vector	1.4 Vector cero	1.5 Composición de vectores	1.6 Producto de vectores por escalares	1.7 Terna ortogonal de vectores unitarios	1.8 Vector de posición	1.9 Producto escalar o interno	1.10 Producto vectorial	1.11 Cálculo vectorial	1.12 Dimensiones y unidades
<b>Capítulo 2</b>	OPERACIONES CON FUERZAS .....	19									
2.1 Momento de una fuerza	2.2 Par de fuerzas	2.3 Momento de un par	2.4 Sustitución de una fuerza única	2.5 Sistemas de fuerzas coplanarias	2.6 Notas						
<b>Capítulo 3</b>	RESULTANTES DE SISTEMAS DE FUERZAS COPLANARIAS .....	31									
3.1 Fuerzas coplanarias	3.2 Sistemas concurrentes	3.3 Sistemas paralelos	3.4 Sistemas no concurrentes y no paralelos	3.5 Resultantes de los sistemas de fuerzas distribuidas	3.7 Clases de conjuntos indexados	3.8 Cardinalidad. Números cardinales					
<b>Capítulo 4</b>	RESULTANTES DE SISTEMAS DE FUERZAS NO COPLANARIAS .....	45									
4.1 Sistemas de fuerzas no coplanarias	4.2 Resultantes de un sistema de fuerzas no coplanarias	4.3 Sistema concurrente	4.4 Sistema paralelo	4.5 Sistemas no concurrentes y no paralelos							
<b>Capítulo 5</b>	EQUILIBRIO DE SISTEMAS DE FUERZAS COPLANARIAS .....	55									
5.1 Equilibrio de un sistema de fuerzas coplanarias	5.2 Cuerpos de dos y tres fuerzas	5.3 Sistema concurrente	5.4 Sistema paralelo	5.5 Sistema no concurrente y no paralelo	5.6 Observaciones - diagramas de cuerpo libre						
<b>Capítulo 6</b>	EQUILIBRIO DE SISTEMAS DE FUERZAS NO COPLANARIAS .....	77									
6.1 Equilibrio de un sistema de fuerzas no coplanarias	6.2 Sistemas concurrentes	6.3 Sistemas paralelos	6.4 Sistemas no concurrentes y no paralelos								
<b>Capítulo 7</b>	CERCHAS Y CABLES .....	93									
7.1 Cerchas y cables	7.2 Cerchas	7.3 Cables									
<b>Capítulo 8</b>	FUERZAS EN LAS VIGAS .....	111									
8.1 Vigas	8.2 Tipos de vigas	8.3 Fuerza cortante y momento flector	8.4 Diagramas de cortantes y de flectores	8.5 Pendiente del diagrama de cortantes	8.6 Variación del cortante	8.7 Pendiente del diagrama de flectores	8.8 Variación del flector				

<b>Capítulo 9 ROZAMIENTO .....</b>	<b>123</b>
9.1 Conceptos generales    9.2 Leyes del rozamiento    9.3 Gato mecánico    9.4 Rozamiento en las correas y cintas de freno    9.5 Resistencia a la rodadura	
<b>Capítulo 10 PRIMEROS MOMENTOS Y CENTROIDES .....</b>	<b>151</b>
10.1 Centroide de un conjunto    10.2 Centroide de una cantidad continua    10.3 Teoremas de Pappus-Guldin    10.4 Centro de presión	
<b>Capítulo 11 TRABAJOS VIRTUALES .....</b>	<b>179</b>
11.1 Desplazamiento virtual y trabajo virtual    11.2 Equilibrio    11.3 Equilibrio estable    11.4 Equilibrio inestable    11.5 Equilibrio neutro    11.6 Resumen sobre el equilibrio	
<b>Capítulo 12 CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA .....</b>	<b>191</b>
12.1 Cinemática    12.2 Movimiento rectilíneo    12.3 Movimiento curvilíneo    12.4 Componentes rectangulares    12.5 Componentes tangencial y normal    12.6 Componentes radial y transversal    12.7 Unidades	
<b>Capítulo 13 DINÁMICA DE LA PARTÍCULA .....</b>	<b>225</b>
13.1 Leyes del movimiento de Newton    13.2 Unidades    13.3 Aceleración    13.4 Principio de D'Alambert    13.5 Problemas de dinámica	
<b>Capítulo 14 CINEMÁTICA DE UN CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO .....</b>	<b>257</b>
14.1 Movimiento plano de un cuerpo rígido    14.2 Translación    14.3 Rotación    14.4 Eje instantáneo de rotación    14.5 Aceleración de Coriolis	
<b>Capítulo 15 MOMENTOS DE INERCIA .....</b>	<b>293</b>
15.1 Momento de inercia axial de un elemento de área    15.2 Momento de inercia polar de un elemento de área    15.3 Producto de inercia de un elemento de área    15.4 Momento de inercia axial de un área    15.5 Radio de giro de un área    15.6 Momento de inercia polar de un área    15.7 Producto de inercia de un área    15.8 Teorema de steiner o de los ejes paralelos    15.9 Áreas compuestas    15.10 Ejes rotados    15.11 Círculo de Mohr    15.12 Momento de inercia axial de un elemento de masa    15.13 Momento de inercia axial de una masa    15.14 Radio de giro de una masa    15.15 Producto de inercia de una masa    15.16 Teorema de steiner para una masa    15.17 Masas compuestas	
<b>Capítulo 16 DINÁMICA DE UN CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO .....</b>	<b>325</b>
16.1 Ecuaciones vectoriales del movimiento plano    16.2 Ecuaciones escalares del movimiento plano    16.3 Representación interpretativa de las ecuaciones    16.4 Traslación de un cuerpo rígido    16.5 Rotación de un cuerpo rígido    16.6 Centro de percusión    16.7 Método de las fuerzas de inercia para cuerpos rígidos	
<b>Capítulo 17 TRABAJO Y ENERGÍA .....</b>	<b>389</b>
17.1 Trabajo    17.2 Casos particulares    17.3 Potencia    17.4 Rendimiento    17.5 Energía cinética de una partícula    17.6 Relación entre trabajo y energía para una partícula    17.7 Energía cinética $T$ de un cuerpo rígido en traslación    17.8 Energía cinética $T$ de un cuerpo rígido en rotación    17.9 Energía cinética $T$ de un cuerpo en movimiento plano	

17.10 Energía potencial	17.11 Relación entre trabajo y energía para una cuerpo rígido
17.12 Teorema de la conservación de la energía	
<b>Capítulo 18 IMPULSO, MOMENTO LINEAL Y MOMENTO ANGULAR . . . . .</b>	<b>419</b>
18.1 Relación entre el impulso y el momento lineal para una partícula	18.2 Relación entre el impulso y el momento lineal para un conjunto de partículas
18.3 Momento cinético $H_o$	18.4 Momento cinético relativo $H'_o$
18.5 Ecuaciones escalares correspondientes	18.6 Unidades
18.7 Conservación del momento lineal	18.8 Conservación del momento angular
18.9 Choque	18.10 Masa variable
<b>Capítulo 19 VIBRACIONES MECÁNICAS . . . . .</b>	<b>459</b>
19.1 Definiciones	19.2 Grados de libertad
19.3 Movimiento armónico simple	19.4 Sistemas multicomponente
19.5 Unidades	
<b>Apéndice A UNIDADES SI . . . . .</b>	<b>489</b>
<b>Apéndice B PRIMEROS MOMENTOS Y CENTROIDES . . . . .</b>	<b>491</b>
<b>Apéndice C SOLUCIONES POR COMPUTADORA A LOS PROBLEMAS SELECCIONADOS . . . . .</b>	<b>493</b>



# VECTORES

1

## 1.1 DEFINICIONES

Las *magnitudes escalares* poseen solo cantidad, por ejemplo, tiempo, volumen, energía, masa, densidad, trabajo. Los escalares se suman por los métodos algebraicos ordinarios, por ejemplo,  $2\text{ s} + 7\text{ s} = 9\text{ s}$ ;  $14\text{ kg} - 5\text{ kg} = 9\text{ kg}$ .

Las *magnitudes vectoriales* poseen cantidad y dirección\*, por ejemplo, fuerza, desplazamiento, velocidad, impulso. Un vector se representa mediante una flecha con la inclinación dada. La punta de la flecha indica el sentido y la longitud representa el módulo del vector. El símbolo de un vector se imprime en negrita, tal como **P**. El módulo se representa por  $|\mathbf{P}|$  o  $P$ .

Un *vector libre* puede situarse en cualquier lugar del espacio con tal que mantenga la dirección y el módulo.

Un *vector deslizante* puede estar aplicado en cualquier punto de su recta de acción. Por el *principio de transmisibilidad* los efectos externos de un vector deslizante no varían.

Un vector *ligado* o *fijo* debe permanecer en el mismo punto de aplicación.

Un *vector unitario* es un vector de módulo unidad.

El *opuesto* de un vector **P** es el vector  $-\mathbf{P}$  del mismo módulo y dirección pero de sentido opuesto.

La *resultante* de un sistema de vectores es el mínimo número de vectores que puede reemplazar al sistema dado.

## 1.2 SUMA DE DOS VECTORES

- (a) La *regla del paralelogramo* establece que la resultante **R** de dos vectores **P** y **Q** es la diagonal del paralelogramo definido por **P** y **Q**. Los tres vectores **P**, **Q** y **R** son concurrentes tal como se muestra en la Figura 1.1(a). **P** y **Q** se conocen también como componentes de **R**.
- (b) Si en la Figura 1.1(a) los lados del paralelogramo son perpendiculares, se dice que los vectores **P** y **Q** son componentes *rectangulares* del vector **R**. En la Figura 1.1(b) se representan las componentes rectangulares. Los módulos de las componentes rectangulares están dados por

$$Q = R \cos \theta$$

y

$$P = R \cos (90^\circ - \theta) \quad P = R \sin \theta$$

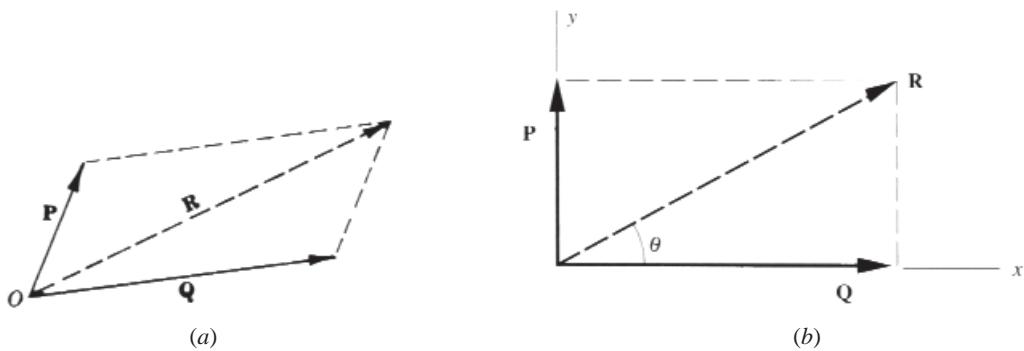


Figura 1.1

\*La dirección se entiende que incluye la inclinación (ángulo) que la recta de acción forma con una recta de referencia dada y el sentido del vector sobre dicha recta.

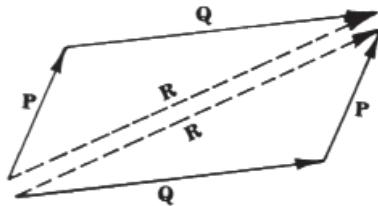


Figura 1.2

- (c) *Regla del triángulo.* Se coloca el origen de uno cualquiera de los vectores en el extremo del otro. La resultante se traza desde el origen del primer vector al extremo del otro. La regla del triángulo es consecuencia de la regla del paralelogramo, tal como se muestra en la Figura 1.2, porque los lados opuestos del paralelogramo son vectores libres.
- (d) La suma de vectores es conmutativa; es decir.,  $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}$ .

### 1.3 SUSTRACCIÓN DE UN VECTOR

La sustracción de un vector consiste en sumar el opuesto al vector; es decir:

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q})$$

Obsérvese que

$$-(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = -\mathbf{P} - \mathbf{Q}$$

### 1.4 VECTOR CERO

El *vector cero* se obtiene cuando se sustraen, o resta, un vector de sí mismo; es decir,  $\mathbf{P} - \mathbf{P} = \mathbf{0}$ . Se llama también *vector nulo*.

### 1.5 COMPOSICIÓN DE VECTORES

Componer vectores consiste en determinar la resultante del sistema. Se dibuja un polígono vectorial, colocando por orden el origen de cada vector en el extremo del precedente, tal como se muestra en la Figura 1.3. Se dibuja la resultante desde el origen del primer vector al extremo del último. Como se verá más adelante, no todos los sistemas de vectores pueden reducirse a un vector único. Puesto que el orden en que se dibujen los vectores es indiferente, puede comprobarse que para tres vectores dados  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{S}$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} \\ &= \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) = (\mathbf{P} + \mathbf{S}) + \mathbf{Q}\end{aligned}$$

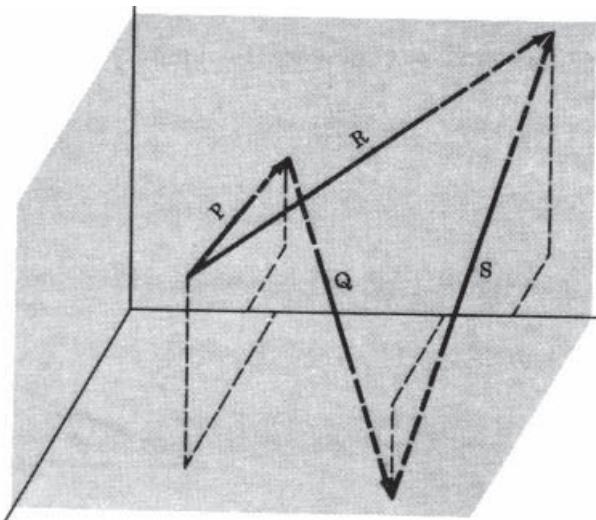


Figura 1.3

La ecuación anterior puede ampliarse a cualquier número de vectores.

## 1.6 PRODUCTO DE VECTORES POR ESCALARES

- (a) El producto del vector  $\mathbf{P}$  por el escalar  $m$  es un vector  $m\mathbf{P}$  cuyo módulo es  $|m|$  veces el módulo de  $\mathbf{P}$  y cuyo sentido es el de  $\mathbf{P}$  o su opuesto según que  $m$  sea positivo o negativo.
- (b) Otras operaciones con los escalares  $m$  y  $n$  son

$$(m + n)\mathbf{P} = m\mathbf{P} + n\mathbf{P}$$

$$m(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = m\mathbf{P} + m\mathbf{Q}$$

$$m(n\mathbf{P}) = n(m\mathbf{P}) = (mn)\mathbf{P}$$

## 1.7 TERNA ORTOGONAL DE VECTORES UNITARIOS

Una *terna ortogonal* de vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ , y  $\mathbf{k}$  está formada por tres vectores unitarios según los ejes  $x$ ,  $y$ , y  $z$  respectivamente. En la Figura 1.4 se muestra una terna a la derecha, o directa. Un vector  $\mathbf{P}$  se escribe

$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}$$

donde  $P_x\mathbf{i}$ ,  $P_y\mathbf{j}$  y  $P_z\mathbf{k}$  son los vectores componentes de  $\mathbf{P}$  según los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, tal como se muestra en la Figura 1.5.

Obsérvese que  $P_x = P \cos \theta_x$ ,  $P_y = P \cos \theta_y$  y  $P_z = P \cos \theta_z$ .

## 1.8 VECTOR DE POSICIÓN

El *vector de posición*  $\mathbf{r}$  de un punto  $(x, y, z)$  en el espacio se escribe como sigue

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Véase la Figura 1.6.

## 1.9 PRODUCTO ESCALAR O INTERNO

El *producto escalar o interno* de dos vectores  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$ , que se escribe  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ , es el escalar que se obtiene como producto de los módulos de los dos vectores por el coseno del ángulo que forman (véase la Figura 1.7). Luego

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta$$

El producto interno cumple las siguientes reglas, donde  $m$  es un escalar:

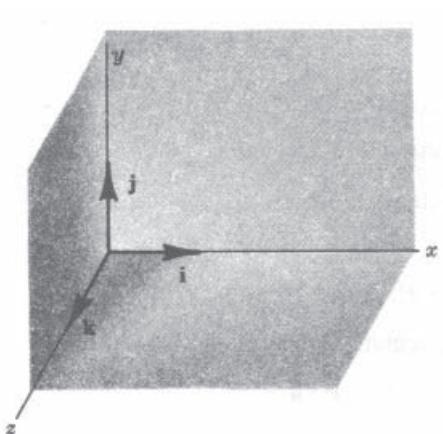


Figura 1.4

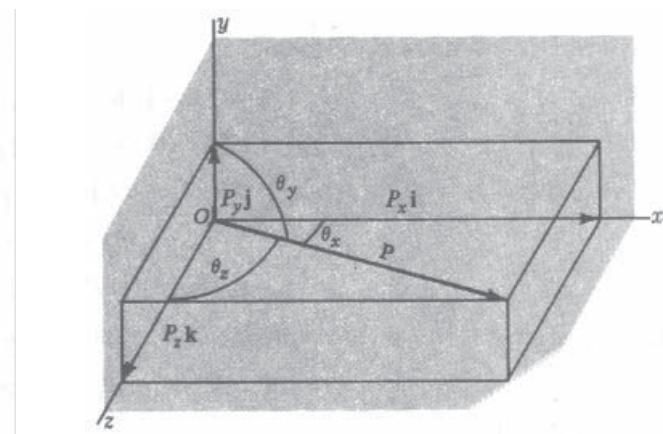


Figura 1.5

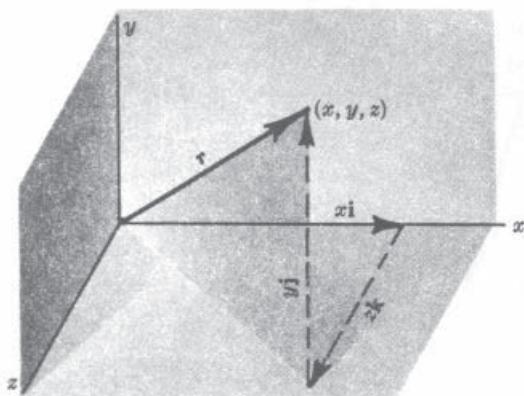


Figura 1.6



Figura 1.7

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}$$

$$(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{T}) + \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}$$

$$m(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) = (m\mathbf{P}) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P} \cdot (m\mathbf{Q})$$

Puesto que  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ , y  $\mathbf{k}$  son ortogonales

$$\begin{aligned}\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = (1)(1) \cos 90^\circ = 0 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = (1)(1) \cos 0^\circ = 1\end{aligned}$$

Además, si  $\mathbf{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}$  y  $\mathbf{Q} = Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k}$  será

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} &= P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} &= P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\end{aligned}$$

Los módulos de los vectores componentes de  $\mathbf{P}$  en las direcciones de los ejes rectangulares pueden escribirse

$$P_x = \mathbf{P} \cdot \mathbf{i} \quad P_y = \mathbf{P} \cdot \mathbf{j} \quad P_z = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}$$

ya que, por ejemplo,

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{i} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = P_x + 0 + 0 = P_x$$

Análogamente, el módulo del vector componente de  $\mathbf{P}$  según la dirección de una recta cualquiera  $L$  puede escribirse  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_L$ , donde  $\mathbf{e}_L$  es el vector unitario en la dirección  $L$ . (Algunos autores llaman  $\mathbf{u}$  al vector unitario.) La Figura 1.8 muestra un plano que pasa por el origen  $A$  del vector  $\mathbf{P}$  y otro plano que pasa por el extremo  $B$ , siendo ambos perpendiculares a la recta  $L$ . Dichos planos cortan a  $L$  en los puntos  $C$  y  $D$ . El vector  $\mathbf{CD}$  es el vector componente de  $\mathbf{P}$  en la dirección de  $L$  y su módulo vale  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_L = Pe_L \cos \theta$ .

En los problemas 1.15 y 1.16 se ofrecen ejemplos de cálculo.

## 1.10 PRODUCTO VECTORIAL

El *producto vectorial* de dos vectores  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$ , que se escribe  $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ , es un vector  $\mathbf{R}$  cuyo módulo es el producto de los módulos de los dos vectores por el seno del ángulo comprendido. El vector  $\mathbf{R} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$  es perpendicular al plano de  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  y apunta en el sentido de avance de un sacacorchos hacia la derecha que girara en el sentido de  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$ , describiendo el menor ángulo comprendido  $\theta$ . Así pues, si  $\mathbf{e}$  es el vector unitario en la dirección y sentido de  $\mathbf{R} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ , el producto vectorial puede escribirse

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (PQ \sin \theta) \mathbf{e} \quad 0 \leq \theta \leq 180^\circ$$

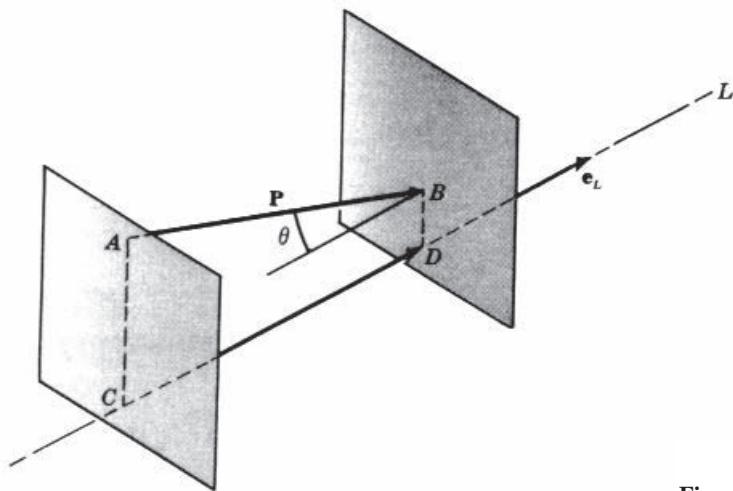


Figura 1.8

La Figura 1.9 indica que  $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = -\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$  (no comutativo).

El producto vectorial cumple las siguientes reglas, donde  $m$  es un escalar:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) &= \mathbf{P} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \mathbf{S} \\ (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \times (\mathbf{S} + \mathbf{T}) &= \mathbf{P} \times (\mathbf{S} + \mathbf{T}) + \mathbf{Q} \times (\mathbf{S} + \mathbf{T}) \\ &= \mathbf{P} \times \mathbf{S} + \mathbf{P} \times \mathbf{T} + \mathbf{Q} \times \mathbf{S} + \mathbf{Q} \times \mathbf{T} \\ m(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) &= (m\mathbf{P}) \times \mathbf{Q} = \mathbf{P} \times (m\mathbf{Q})\end{aligned}$$

Como  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  son ortogonales,

$$\begin{aligned}\mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}\end{aligned}$$

Además, si  $\mathbf{P} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}$  y  $\mathbf{Q} = Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k}$ , será

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_y Q_z - P_z Q_y) \mathbf{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \mathbf{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x) \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

En el Problema 1.12 se demuestra esta última expresión.

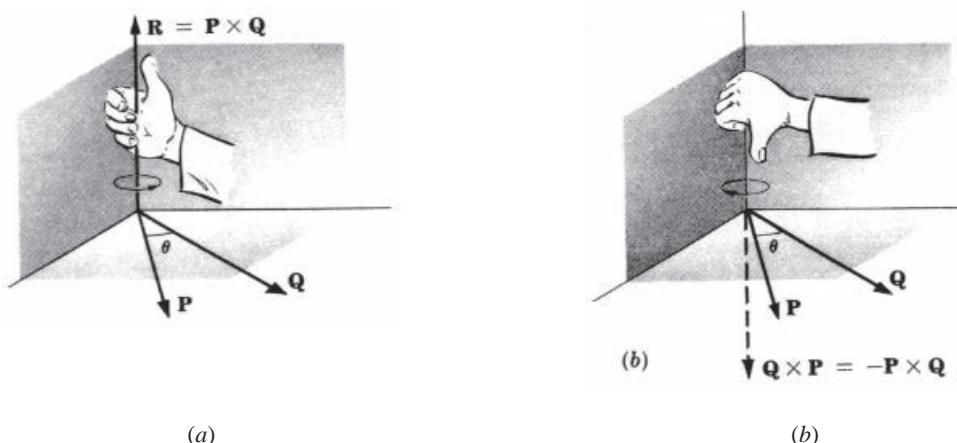


Figura 1.9

## 1.11 CÁLCULO VECTORIAL

- (a) La *derivada* de un vector  $\mathbf{P}$  que varía con un escalar tal como el tiempo  $t$  se calcula como sigue.

Sea  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ ; o sea,  $\mathbf{P}$  es una función del tiempo  $t$ . Una variación  $\Delta\mathbf{P}$  en  $\mathbf{P}$  cuando el tiempo varía de  $t$  a  $(t + \Delta t)$  es

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t)$$

Luego

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t)}{\Delta t}$$

Si  $\mathbf{P}(t) = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}$ , donde  $P_x$ ,  $P_y$  y  $P_z$  son funciones del tiempo  $t$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(P_x + \Delta P_x)\mathbf{i} + (P_y + \Delta P_y)\mathbf{j} + (P_z + \Delta P_z)\mathbf{k} - P_x \mathbf{i} - P_y \mathbf{j} - P_z \mathbf{k}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x \mathbf{i} + \Delta P_y \mathbf{j} + \Delta P_z \mathbf{k}}{\Delta t} = \frac{dP_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dP_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dP_z}{dt} \mathbf{k} \end{aligned}$$

Son válidas las siguientes operaciones :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\psi \mathbf{P}) &= \psi \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \mathbf{P} \quad \text{donde } \psi \text{ es un escalar función de } t. \end{aligned}$$

- (b) La *integral* de un vector  $\mathbf{P}$  que varía con un escalar tal como el tiempo  $t$  se calcula como sigue. Sea  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ ; o sea,  $\mathbf{P}$  es una función del tiempo  $t$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{P}(t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) dt \\ &= \mathbf{i} \int_{t_0}^{t_1} P_x dt + \mathbf{j} \int_{t_0}^{t_1} P_y dt + \mathbf{k} \int_{t_0}^{t_1} P_z dt \end{aligned}$$

## 1.12 DIMENSIONES Y UNIDADES

Al estudiar la mecánica, las características de un cuerpo y de su movimiento pueden describirse mediante un conjunto de magnitudes fundamentales que son las dimensiones. En Estados Unidos, en ingeniería, se ha acostumbrado a emplear un sistema gravitatorio basado en las dimensiones de fuerza, longitud y tiempo. La mayoría de los países del mundo usa un sistema absoluto en el cual las dimensiones básicas son la masa, la longitud y el tiempo. En Estados Unidos va en aumento el uso de este segundo sistema.

Ambos sistemas derivan de la segunda ley del movimiento de Newton, que suele escribirse

$$\mathbf{R} = M\mathbf{a}$$

dónde  $\mathbf{R}$  es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula,  $\mathbf{a}$  es la aceleración de la partícula y  $M$  es la constante de proporcionalidad llamada masa.

### Sistema tradicional de EE. UU.

En este sistema de ingeniería, la unidad de longitud es el pie (ft), la unidad de tiempo es el segundo (s) y la unidad de fuerza es la libra (lb). Una masa  $M$  que cayera libremente cerca de la superficie de la Tierra sería atraída hacia el centro de ésta por una fuerza  $W$  con una aceleración gravitatoria  $g$ . La fuerza  $W$  es el peso medido en libras y la aceleración  $g$  se expresa en ft/s<sup>2</sup>. Por tanto, la segunda ley de Newton queda, en forma escalar

$$W = Mg$$

El valor de la aceleración  $g$  varía con la posición del observador sobre la superficie de la Tierra. En este libro se emplea el valor de 32,2 ft/s<sup>2</sup>. Un objeto que pese 1 lb en o cerca de la superficie terrestre tendrá una aceleración de caída libre  $g$  de 32,2 ft/s<sup>2</sup>. Con la ecuación anterior se obtiene

$$M = \frac{W}{g} = \frac{1 \text{ lb}}{32,2 \text{ ft/s}^2} = \frac{1}{32,2} \frac{\text{lb s}^2}{\text{ft}} = \frac{1}{32,2} \text{ slug}$$

En los problemas de estática no se menciona la masa. Es importante comprender que la masa en slugs es una constante para cada cuerpo. En la superficie de la Luna sobre esta misma masa actuará una fuerza gravitatoria aproximadamente igual a la sexta parte de la que actúa en la Tierra.

### Sistema Internacional (SI)

En el Sistema Internacional (SI)\*, la unidad de masa es el kilogramo (kg), la unidad de longitud es el metro (m) y la unidad de tiempo es el segundo (s). La unidad de fuerza es el newton (N) y se define como la fuerza que acelera una masa de un kilogramo un metro por segundo al cuadrado (m/s<sup>2</sup>). Así pues,

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Una masa de 1 kg que caiga libremente cerca de la superficie de la Tierra sufre una aceleración gravitatoria  $g$  que varía de un lugar a otro. En este libro se acepta un valor medio de 9,80 m/s<sup>2</sup>. En consecuencia, la fuerza de la gravedad que actúa sobre una masa de 1 kg es

$$W = Mg = (1 \text{ kg})(9,80 \text{ m/s}^2) = 9,80 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 9,80 \text{ N}$$

Por supuesto que en los problemas de estática intervienen fuerzas; pero, en un problema, una masa dada en kilogramos no es una fuerza. Debe emplearse la fuerza gravitatoria, o peso, que actúa sobre la masa. En todos los trabajos en los que intervengan masas, el estudiante debe acordarse de multiplicar la masa en kilogramos por 9,80 m/s<sup>2</sup> para obtener la fuerza gravitatoria, o peso, en newtons. Sobre una masa de 5 kg actúa una fuerza gravitatoria, o peso, de  $5 \times 9,8 = 49 \text{ N}$ .

Conviene que el estudiante tenga además en cuenta que, en SI, el milímetro (mm) es la unidad estándar de longitud para los dibujos y planos técnicos. Por consiguiente, en los planos, las dimensiones deben figurar en milímetros ( $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ ). Además, debe dejarse un espacio entre el número y el símbolo de la unidad; por ejemplo, 2,85 mm y no 2,85mm. Cuando se usan cinco o más cifras han de espaciarse en grupos de tres, empezando por la coma decimal como en 12 832,325. No se usan puntos en el SI. Un número de cuatro cifras puede escribirse sin espacios a no ser que se encuentre en una columna de cantidades de cinco o más cifras.

En el Apéndice A se incluyen tablas de unidades SI, prefijos SI y factores de conversión al sistema métrico moderno (SI). En este texto, alrededor del 50 por ciento de los problemas están en el sistema tradicional de EE. UU. y el 50 por ciento en unidades SI.

### Problemas resueltos

- 1.1.** Sumar por el método del paralelogramo una fuerza de 120 lb a  $30^\circ$  con otra coplanaria de  $-100$  lb a  $90^\circ$ , (véase la Figura 1.10(a)).

\* SI es el acrónimo de Système International d'Unités (sistema métrico internacional modernizado).

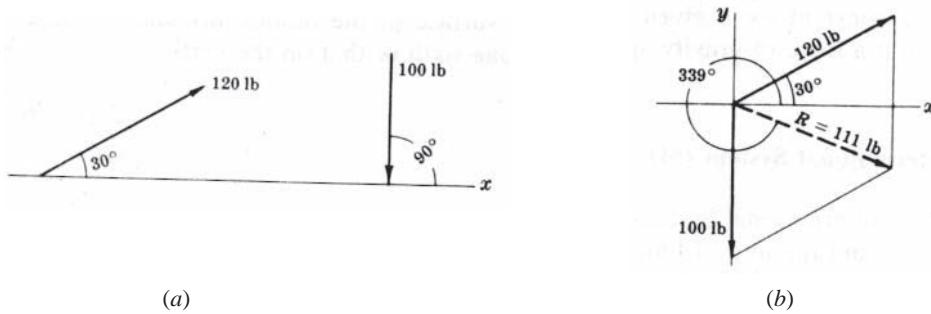


Figura 1.10

**SOLUCIÓN**

Se dibuja un esquema del problema, no necesariamente a escala. El signo negativo indica que la fuerza de 100 lb actúa según la recta a  $90^\circ$  acercándose al origen. Equivale a una fuerza positiva de 100 lb según la recta a  $270^\circ$ , de acuerdo con el principio de transmisibilidad.

Se dibujan los dos vectores a una escala conveniente con el origen coincidente en el mismo punto, tal como se indica en la Figura 1.10(b). Se completa el paralelogramo. La resultante  $R$  mide 111 lb a la escala del dibujo. El ángulo que forma con el eje  $x$  es de  $\theta_x = 339^\circ$ , medido con un transportador.

En la Figura 1.10(b) consideremos el triángulo, uno de cuyos lados es el eje  $y$ . Los lados de este triángulo son  $R$ , 100 y 120. El ángulo entre los lados de 100 y 120 es de  $60^\circ$ . Según el teorema del coseno,

$$R^2 = 120^2 + 100^2 - 2(120)(100)\cos 60^\circ \quad R = 111 \text{ lb}$$

Y aplicando el teorema del seno,

$$\frac{120}{\sin \alpha} = \frac{111}{\sin 60^\circ} \quad \alpha = 69^\circ$$

El ángulo de  $69^\circ$  sumado al de  $270$  da como resultado el ángulo de  $339^\circ$  medido.

- 1.2.** Resolver el Problema 1.1 por la regla del triángulo, (véase la Figura 1.11).

**SOLUCIÓN**

Es indiferente el orden de los vectores. En el extremo de la fuerza de 120 lb se sitúa el origen de la fuerza de 100 lb. Se dibuja la resultante desde el origen de la fuerza de 120 lb hasta el extremo de la fuerza de 100 lb. Al medir a escala, los resultados son los mismos que los del Problema 1.1.

- 1.3.** La resultante de dos fuerzas copланarias es de 400 N a  $120^\circ$ . Una de las fuerzas es de 200 N a  $20^\circ$ . Hallar la otra fuerza, (véase la Figura 1.12).

**SOLUCIÓN**

Se dibujan la resultante y la fuerza dada a una escala conveniente con el origen común.

Se traza el segmento que une los extremos de ambas fuerzas. La fuerza buscada es la representada por este segmento con su extremo coincidente con el de la resultante. Al medir a escala, la fuerza buscada es de 477 N con  $\theta_x = 144^\circ$ .



Figura 1.11

Figura 1.12

Este resultado puede obtenerse también analíticamente por trigonometría. El ángulo entre  $\mathbf{R}$  y la fuerza de 200 N es de  $100^\circ$ , y, por tanto, por el teorema del coseno, la fuerza desconocida  $F$  es

$$F^2 = 400^2 + 200^2 - 2(400)(200)\cos 100^\circ \quad F = 477 \text{ N}$$

Sea  $\alpha$  el ángulo entre  $\mathbf{F}$  y la fuerza de 200 N. Luego, por el teorema del seno,

$$\frac{477}{\sin 100} = \frac{400}{\sin \alpha} \quad \alpha = 55,7^\circ \quad \theta_x = 144^\circ$$

- 1.4.** Restar en el plano 130 N,  $60^\circ$  de 280 N,  $320^\circ$ . Véase la Figura 1.13.

#### SOLUCIÓN

Se suma a 280 N,  $320^\circ$  la fuerza opuesta de 130 N,  $60^\circ$  y se obtiene 330 N,  $297^\circ$ . Todos los ángulos están referidos al eje  $x$ .

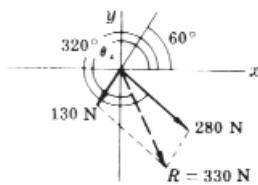


Figura 1.13

- 1.5.** Hallar la resultante del sistema de fuerzas coplanario siguiente: 26 lb,  $10^\circ$ ; 39 lb,  $114^\circ$ ; 63 lb,  $183^\circ$ ; 57 lb,  $261^\circ$ . Véase la Figura 1.14.

#### SOLUCIÓN

Se aplica el método del polígono, situando por orden el origen de cada vector en el extremo del anterior. Véase la Figura 1.14(a).

El vector resultante se obtiene uniendo el orgien del primer vector con el extremo del último vector. Midiendo a escala,  $R = 65$  lb con  $\theta_x = 197^\circ$ .

Este problema puede también resolverse analíticamente por componentes rectangulares. Se descompone cada fuerza de la Figura 1.14(b) en sus componentes rectangulares  $x$  e  $y$ . Como todas las componentes  $x$  son colineales, se pueden sumar algebraicamente, al igual que las componentes  $y$ . La suma de las componentes  $x$  es la componente  $x$  de la resultante y la suma de las componentes  $y$  es la componente  $y$  de la resultante. Así pues,

$$R_x = 26 \cos 10^\circ + 39 \cos 114^\circ + 63 \cos 183^\circ + 57 \cos 261^\circ = -62,1$$

$$R_y = 26 \sin 10^\circ + 39 \sin 114^\circ + 63 \sin 183^\circ + 57 \sin 261^\circ = -19,5$$

$$R = \sqrt{(62,1)^2 + (-19,5)^2} \quad R = 65 \text{ lb} \quad \begin{array}{c} \theta_x \\ \swarrow \\ \mathbf{R} \end{array}$$

$$\tan \theta_x = \frac{-19,5}{-62,1} \quad \theta_x = 17^\circ \quad \theta = 180^\circ + 17^\circ = 197^\circ$$

- 1.6.** En la Figura 1.15 la componente rectangular de la fuerza  $\mathbf{F}$  es de 10 lb en la dirección de  $OH$ . La dirección de la fuerza  $\mathbf{F}$  forma un ángulo de  $60^\circ$  con el sentido positivo del eje  $x$ . ¿Cuál es el módulo de la fuerza?

#### SOLUCIÓN

La componente de  $\mathbf{F}$  en la dirección de  $OH$  es  $F \cos \theta$ . Por tanto,  $F \cos 15^\circ = 10$ , es decir,  $F = 10,35$  lb.

- 1.7.** Una persona de 80 kg está de pie sobre una tabla inclinada  $20^\circ$ . ¿Cuál es la componente del peso (*a*) normal a la tabla y (*b*) paralela a la tabla? Véase la Figura 1.16.

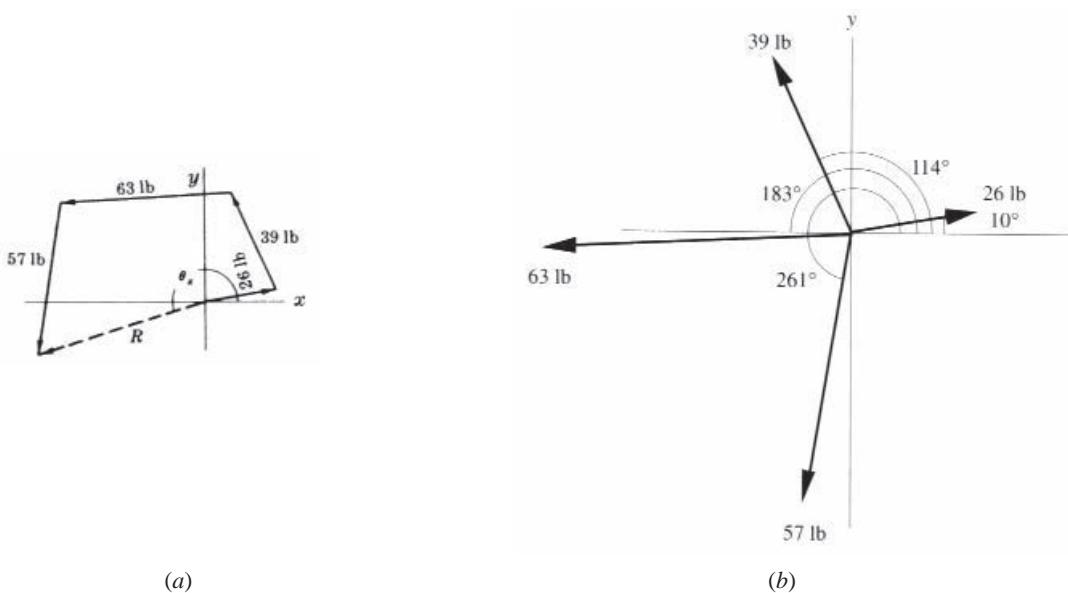


Figura 1.14

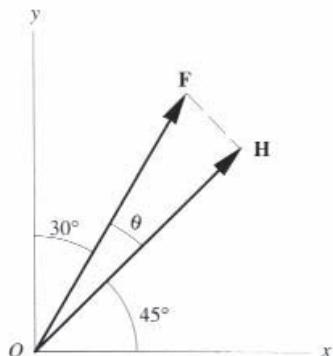


Figura 1.15

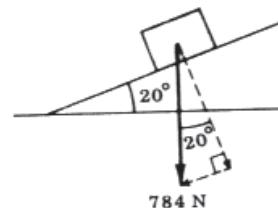


Figura 1.16

**SOLUCIÓN**

(a) La componente normal forma un ángulo de  $20^\circ$  con el peso, que vale  $80 \times 9.8 = 784$  N. Medida a escala, la componente normal mide 740 N. Por trigonometría, la componente normal es igual a  $784 \cos 20^\circ = 737$  N.

(b) Medida a escala, la componente paralela vale 270 N. Por trigonometría, es  $784 \cos 70^\circ = 268$  N.

- 1.8.** Una fuerza  $P$  de 235 N actúa formando un ángulo de  $60^\circ$  con la horizontal sobre un bloque situado en un plano inclinado  $22^\circ$ . Hallar algebraicamente (a) las componentes horizontal y vertical de  $P$  y (b) las componentes de  $P$  perpendicular y paralela al plano. Véase la Figura 1.17(a).

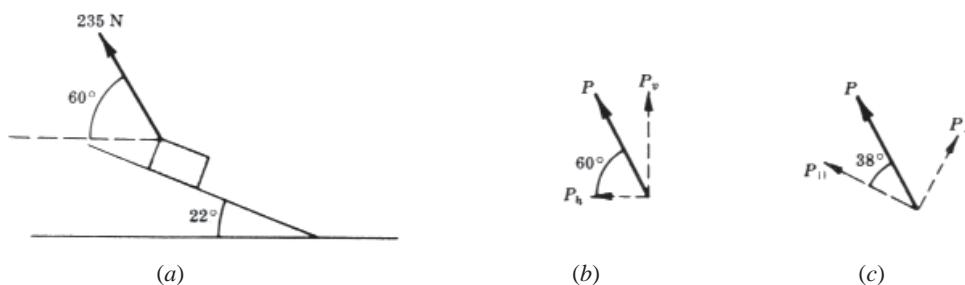


Figura 1.17

**SOLUCIÓN**

- (a) La componente horizontal  $P_h$  actúa hacia la izquierda y es igual a  $235 \cos 60^\circ = 118$  N. La componente vertical  $P_v$  actúa hacia arriba y vale  $235 \sin 60^\circ = 204$  N, tal como se muestra en la Figura 1.17 (b).  
 (b) La componente  $P_{\parallel}$  paralela al plano  $= 235 \cos (60^\circ - 22^\circ) = 185$  N actúa hacia arriba. La componente  $P_{\perp}$  normal al plano  $= 235 \sin 38^\circ = 145$  N, tal como se muestra en la Figura 1.17 (c).

- 1.9.** La resultante de las tres fuerzas mostradas en la Figura 1.18 es de 20 lb en la dirección del eje y, en sentido ascendente. Hallar los módulos de  $\mathbf{F}$  y de  $\mathbf{P}$ .

**SOLUCIÓN**

Para que la resultante sea una fuerza de 20 lb ascendente según el eje y,  $R_x = 0$  y  $R_y = 20$  lb. Dado que la suma de las componentes  $x$  ha de ser igual a la componente  $x$  de la resultante  $R_x = P \cos 30^\circ - 90 \cos 40^\circ = 0$ , de donde  $P = 79,6$  lb. Análogamente,  $R_y = P \sin 30^\circ + 90 \sin 40^\circ - F = 20$  y  $F = 77,7$  lb.

- 1.10.** Las aristas de un paralelepípedo rectangular (Figura 1.19) miden 4, 3 y 2 m, respectivamente. Si la diagonal  $OP$  dibujada a partir del origen representa una fuerza de 50 N, hallar las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de la fuerza. Expresar ésta en función de los vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ .

**SOLUCIÓN**

Sean  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  los ángulos que forma la diagonal con los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Por tanto

$$P_x = P \cos \theta_x \quad P_y = P \cos \theta_y \quad P_z = P \cos \theta_z$$

La longitud de  $OP = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = 5,38$  m. De aquí,

$$\cos \theta_x = \frac{4}{5,38} \quad \cos \theta_y = \frac{3}{5,38} \quad \cos \theta_z = \frac{2}{5,38}$$

Puesto que en el dibujo cada componente está en el sentido positivo del eje sobre el que actúa,

$$P_x = 50 \cos \theta_x = 37,2 \text{ N} \quad P_y = 50 \cos \theta_y = 27,9 \text{ N} \quad P_z = 50 \cos \theta_z = 18,6 \text{ N}$$

Por tanto,  $\mathbf{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k} = 37,2 \mathbf{i} + 27,9 \mathbf{j} + 18,6 \mathbf{k}$  N.

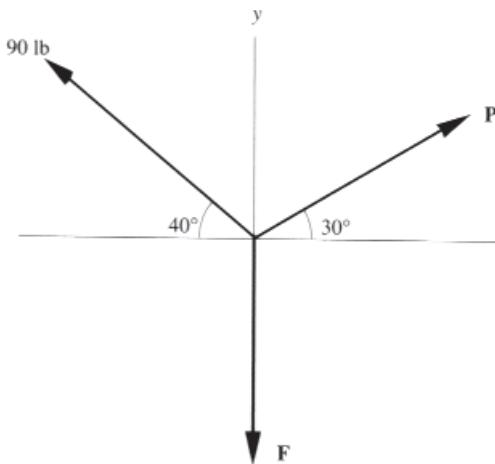


Figura 1.18

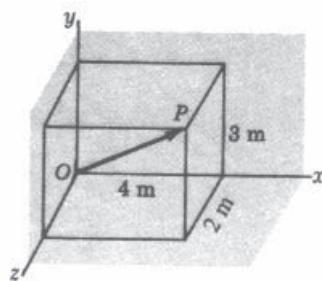


Figura 1.19

- 1.11.** Hallar las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de una fuerza de 100 N dirigida desde el origen al punto  $(2, -4, 1)$ . Expresar la fuerza en función de los vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ .

**SOLUCIÓN**

Los cosenos directores de la dirección de la recta son:

$$\cos \theta_x = \frac{2}{\sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (1)^2}} = 0,437 \quad \cos \theta_y = \frac{-4}{\sqrt{21}} = -0,873 \quad \cos \theta_z = 0,281$$

Luego  $P_x = 43,7$  N;  $P_y = -87,3$  N;  $P_z = 21,8$  N; y el vector  $\mathbf{P} = 43,7\mathbf{i} - 87,3\mathbf{j} + 21,8\mathbf{k}$  N.

- 1.12.** Demostrar que el producto vectorial de los vectores  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  puede escribirse como

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

#### SOLUCIÓN

Si se expresan los vectores dados en función de sus componentes y se desarrollan los productos vectoriales se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \times \mathbf{Q} &= (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \times (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k}) \\ &= (P_xQ_x)\mathbf{i} \times \mathbf{i} + (P_xQ_y)\mathbf{i} \times \mathbf{j} + (P_xQ_z)\mathbf{i} \times \mathbf{k} \\ &\quad + (P_yQ_x)\mathbf{j} \times \mathbf{i} + (P_yQ_y)\mathbf{j} \times \mathbf{j} + (P_yQ_z)\mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ &\quad + (P_zQ_x)\mathbf{k} \times \mathbf{i} + (P_zQ_y)\mathbf{k} \times \mathbf{j} + (P_zQ_z)\mathbf{k} \times \mathbf{k} \end{aligned}$$

Pero  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$ ; y  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$  y  $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ , etc. Por tanto

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_xQ_y)\mathbf{k} - (P_xQ_z)\mathbf{j} - (P_yQ_x)\mathbf{k} + (P_yQ_z)\mathbf{i} + (P_zQ_x)\mathbf{j} - (P_zQ_y)\mathbf{i}$$

que puede escribirse, agrupando términos,

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_yQ_z - P_zQ_y)\mathbf{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\mathbf{j} + (P_xQ_y - P_yQ_x)\mathbf{k}$$

o, en forma de determinante, como

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

- 1.13.** Una fuerza  $\mathbf{F} = 2,63\mathbf{i} + 4,28\mathbf{j} - 5,92\mathbf{k}$  está aplicada en el origen. ¿Cuál es su módulo y qué ángulos forma con los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ ?

#### SOLUCIÓN

$$F = \sqrt{(2,63)^2 + (4,28)^2 + (-5,92)^2} = 7,75 \text{ N}$$

$$\cos \theta_x = +\frac{2,63}{7,75} \quad \theta_x = 70,2^\circ$$

$$\cos \theta_y = +\frac{4,28}{7,75} \quad \theta_y = 56,3^\circ$$

$$\cos \theta_z = -\frac{5,92}{7,75} \quad \theta_z = 139,8^\circ$$

- 1.14.** Calcular el producto escalar de  $\mathbf{P} = 4,82\mathbf{i} - 2,33\mathbf{j} + 5,47\mathbf{k}$  N y  $\mathbf{Q} = -2,81\mathbf{i} - 6,09\mathbf{j} + 1,12\mathbf{k}$  m.

#### SOLUCIÓN

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z = (4,82)(-2,81) + (-2,33)(-6,09) + (5,47)(1,12) = 6,72 \text{ N} \cdot \text{m}$$

- 1.15.** Escribir el vector unitario de la recta  $L$  definida por los puntos  $(2, 3, 0)$  y  $(-2, 4, 6)$ , en este orden. Hallar a continuación la proyección del vector  $\mathbf{P} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$  en la dirección de  $L$ .

**SOLUCIÓN**

La coordenada  $x$  cambia de  $+2$  a  $-2$ , o sea que cambia en  $-4$ . El cambio en la dirección  $y$  es de  $4-3=+1$ . El cambio en la dirección  $z$  es de  $6-0=+6$ . El vector unitario es

$$\mathbf{e}_L = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2 + (+1)^2 + (+6)^2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{53}} \mathbf{j} + \frac{6}{\sqrt{53}} \mathbf{k} = -0,549\mathbf{i} + 0,137\mathbf{j} + 0,823\mathbf{k}$$

La proyección de  $\mathbf{P}$  es, por tanto,

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_L = 2(-0,549) + 3(0,137) - 1(0,823) = -1,41$$

- 1.16.** Hallar la proyección de la fuerza  $\mathbf{P} = 10\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$  lb sobre la recta  $L$  definida por los puntos  $(2, -5, 3)$  y  $(5, 2, -4)$  en este orden.

**SOLUCIÓN**

El vector unitario según  $L$  es

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_L &= \frac{5-2}{\sqrt{(5-2)^2 + [2-(-5)]^2 + (-4-3)^2}} \mathbf{i} + \frac{2-(-5)}{\sqrt{107}} \mathbf{j} + \frac{-4-3}{\sqrt{107}} \mathbf{k} \\ &= 0,290\mathbf{i} + 0,677\mathbf{j} - 0,677\mathbf{k}\end{aligned}$$

La proyección de  $\mathbf{P}$  sobre  $L$  es

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_L &= (10\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 14\mathbf{k}) \cdot (0,29\mathbf{i} + 0,677\mathbf{j} - 0,677\mathbf{k}) \\ &= 2,90 - 5,42 - 9,48 = -12,0 \text{ lb}\end{aligned}$$

El signo menos indica que la proyección tiene el sentido opuesto al del segmento.

- 1.17.** Calcular el producto vectorial de  $\mathbf{P} = 2,85\mathbf{i} + 4,67\mathbf{j} - 8,09\mathbf{k}$  ft y  $\mathbf{Q} = 28,3\mathbf{i} + 44,6\mathbf{j} + 53,3\mathbf{k}$  lb.

**SOLUCIÓN**

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \times \mathbf{Q} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2,85 & 4,67 & -8,09 \\ 28,3 & 44,6 & 53,3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}[(4,67)(53,3) - (44,6)(-8,09)] - \mathbf{j}[(2,85)(53,3) - (28,3)(-8,09)] \\ &\quad + \mathbf{k}[(2,85)(44,6) - (28,3)(4,67)] \\ &= \mathbf{i}(249 + 361) - \mathbf{j}(152 + 229) + \mathbf{k}(127 - 132) = 610\mathbf{i} - 381\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \text{ lb} \cdot \text{ft}\end{aligned}$$

- 1.18.** Calcular la derivada respecto al tiempo del vector de posición  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + 6y^2\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$ , donde  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  son vectores fijos.

**SOLUCIÓN**

La derivada respecto al tiempo es

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + 12y\frac{dy}{dt}\mathbf{j} - 3\frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

- 1.19.** Calcular la integral entre los instantes  $t_1 = 1$  s y  $t_2 = 3$  s del vector velocidad  $\mathbf{v} = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - \mathbf{k}$  ft/s, donde  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  son vectores fijos.

**SOLUCIÓN**

$$\int_1^3 (t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} - \mathbf{k}) dt = \mathbf{i} \int_1^3 t^2 dt + \mathbf{j} \int_1^3 2t dt - \mathbf{k} \int_1^3 dt = 8,67 \mathbf{i} + 8,00 \mathbf{j} - 2,00 \mathbf{k}$$

**Problemas propuestos**

- 1.20.** Hallar la resultante de las fuerzas coplanarias 100 N, 0° y 200 N, 90°. *Resp.* 224 N,  $\theta_x = 64^\circ$ .
- 1.21.** Hallar la resultante de las fuerzas coplanarias 32 N, 20° y 64 N, 190°. *Resp.* 33,0 N,  $\theta_x = 180^\circ$ .
- 1.22.** Hallar la resultante de las fuerzas coplanarias 80 N, -30° y 60 N, 60°. *Resp.* 100 N,  $\theta_x = 6,87^\circ$ .
- 1.23.** Hallar la resultante de las fuerzas concurrentes 120 N, 78° y 70 N, 293°. *Resp.* 74,7 N,  $\theta_x = 45,2^\circ$ .
- 1.24.** La resultante de dos fuerzas coplanarias es 18 oz a 30°. Si una de las fuerzas es 28 oz a 0°, hallar la otra fuerza. *Resp.* 15,3 oz, 144°.
- 1.25.** La resultante de dos fuerzas coplanarias es 36 N a 45°. Si una de las fuerzas es 24 N a 0°, hallar la otra fuerza. *Resp.* 25,5 N, 87°.
- 1.26.** La resultante de dos fuerzas coplanarias es 50 N a 143°. Una de las fuerzas es 120 N a 238°. Hallar la otra fuerza. *Resp.* 134 N,  $\theta_x = 79,6^\circ$ .
- 1.27.** La resultante de dos fuerzas, una en sentido *x* positivo y la otra en sentido *y* positivo, es de 100 lb a 50°, medido en el sentido antihorario a partir del eje positivo de las *x*. ¿Cuáles son dichas fuerzas? *Resp.*  $R_x = 64,3$  lb,  $R_y = 76,6$  lb.
- 1.28.** Una fuerza de 120 N tiene una componente rectangular de 84 N, según la dirección de una recta que forma un ángulo de 20° en el sentido antihorario medido a partir del eje *x* positivo. ¿Qué ángulo forma la fuerza de 120 N con el eje *x* positivo? *Resp.* 65,6°.
- 1.29.** Hallar la resultante de las fuerzas coplanarias: 6 oz, 38°; 12 oz 73°; 18 oz, 67°; 24 oz, 131°. *Resp.* 50,0 oz,  $\theta_x = 91^\circ$ .
- 1.30.** Hallar la resultante de las fuerzas coplanarias: 20 lb, 0°; 20 lb, 30°; 20 lb, 60°; 20 lb, 90°; 20 lb, 120°; 20 lb, 150°. *Resp.* 77,2 lb,  $\theta_x = 75^\circ$ .
- 1.31.** Hallar la fuerza única que reemplace al siguiente sistema de fuerzas coplanarias: 120 N, 30°; 200 N, 110°; 340 N, 180°; 170 N, 240°; 80 N, 300°. *Resp.* 351 N, 175°.
- 1.32.** Calcular la fuerza única que reemplace al siguiente sistema de fuerzas coplanarias: 150 N, 78°; 320 N, 143°; 485 N, 249°; 98 N, 305°; 251 N, 84°. *Resp.* 321 N, 171°.
- 1.33.** Se tira de un patín con una fuerza de 25 lb ejercida con una cuerda inclinada 30° con la horizontal. ¿Cuál es la componente efectiva de la fuerza que tira del patín? ¿Cuál es la componente que tiende a elevar verticalmente el patín? *Resp.*  $P_h = 21,7$  lb,  $P_v = 12,5$  lb.
- 1.34.** Hallar la resultante de las fuerzas coplanarias: 15 N, 30°; 55 N, 80°; 90 N, 210° y 130 N, 260°. *Resp.* 136 N,  $\theta_x = 235^\circ$ .
- 1.35.** Un coche viaja a velocidad constante por un túnel que tiene una pendiente ascendente del 1 por ciento. Si coche y pasajero pesan 3100 lb, ¿qué fuerza de tracción ha de suministrar el motor para vencer exactamente la componente del peso del coche paralela al túnel? *Resp.* 31 lb.

- 1.36.** Un poste de teléfono está sujeto por un viento que ejerce una tracción de 200 lb en el extremo superior. Si el ángulo entre el cable y el poste es de  $50^\circ$ , ¿cuáles son las componentes horizontal y vertical de la tracción en el poste? *Resp.*  $P_h = 153$  lb,  $P_v = 129$  lb.
- 1.37.** Un bote es remolcado por un canal con un cable que forma un ángulo de  $10^\circ$  con la orilla. Si la tracción del cable es de 200 N, calcular la fuerza que arrastra al bote por el canal. *Resp.* 197 N.
- 1.38.** Expresar en función de los vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  la fuerza de 200 N con origen en  $(2, 5, -3)$  y extremo en  $(-3, 2, 1)$ . *Resp.*  $\mathbf{F} = 141\mathbf{i} - 84,9\mathbf{j} + 113\mathbf{k}$  N
- 1.39.** Hallar la resultante de las tres fuerzas  $\mathbf{F}_1 = 2,0\mathbf{i} + 3,3\mathbf{j} - 2,6\mathbf{k}$  lb,  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{i} + 5,2\mathbf{j} - 2,9\mathbf{k}$  lb y  $\mathbf{F}_3 = 8,3\mathbf{i} - 6,6\mathbf{j} + 5,8\mathbf{k}$  lb, que concurren en el punto  $(2, 2, -5)$ .  
*Resp.*  $\mathbf{R} = 9,3\mathbf{i} + 1,9\mathbf{j} + 0,3\mathbf{k}$  lb en  $(2, 2, -5)$ .
- 1.40.** La polea de la Figura 1.20 puede desplazarse por el cable guía. Si soporta un peso de 160 lb, ¿cuál es la tensión del cable? *Resp.*  $T = 234$  lb.

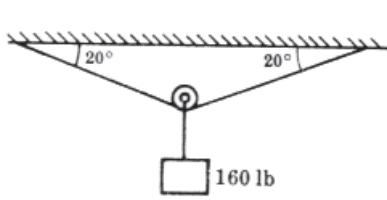


Figura 1.20

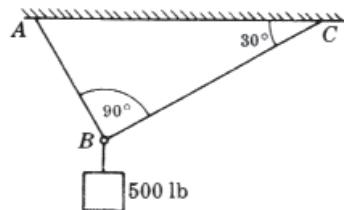


Figura 1.21

- 1.41.** Dos cables soportan un peso de 500 lb, tal como se muestra en la Figura 1.21. Hallar la tensión en cada cable. *Resp.*  $T_{AB} = 433$  lb,  $T_{BC} = 250$  lb.
- 1.42.** ¿Qué fuerza horizontal  $P$  se requiere para sostener el peso de 10 lb en la posición indicada en la Figura 1.22? *Resp.*  $P = 3,25$  lb
- 1.43.** Una partícula cargada está en reposo bajo la acción de otras tres partículas cargadas. Las fuerzas ejercidas por dos de las partículas se indican en la Figura 1.23. Hallar el módulo y la dirección de la tercera fuerza. *Resp.*  $F = 14,7$  N,  $\theta_x = 76,8^\circ$ .
- 1.44.** Hallar la resultante de las fuerzas coplanarias 200 N,  $0^\circ$  y 400 N,  $90^\circ$ .  
*Resp.* Puesto que se han multiplicado por el escalar 2 las fuerzas del Problema 1.20, el módulo de la resultante en este problema debe ser el doble que el de la resultante en aquel problema. El ángulo debe ser el mismo.

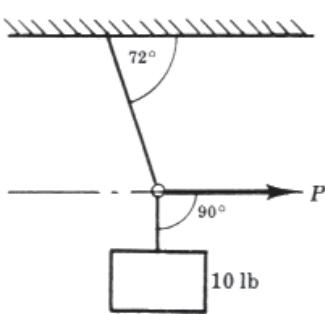


Figura 1.22

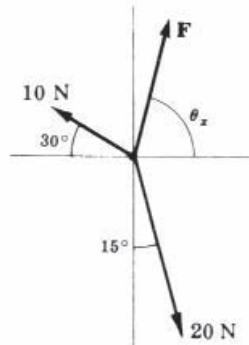


Figura 1.23

- 1.45.** ¿Qué vector debe de sumarse al vector  $\mathbf{F} = 30 \text{ N}$ ,  $60^\circ$  para obtener el vector cero?

Resp.  $30 \text{ N}$ ,  $\theta_x = 240^\circ$

- 1.46.** En el instante  $t = 2 \text{ s}$ , las coordenadas de un punto que se mueve sobre una curva son  $(3, -5, 2)$ . En el instante  $t = 3 \text{ s}$ , las coordenadas del punto son  $(1, -2, 0)$ . ¿Cuál es la variación del vector de posición?  
Resp.  $\Delta\mathbf{r} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

- 1.47.** Calcular el producto escalar de  $\mathbf{P} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$  y  $\mathbf{Q} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ . Resp. +2

- 1.48.** Calcular el producto escalar de  $\mathbf{P} = 2,12\mathbf{i} + 8,15\mathbf{j} - 4,28\mathbf{k}$  y  $\mathbf{Q} = 6,29\mathbf{i} - 8,93\mathbf{j} - 10,5\mathbf{k}$  m.  
Resp.  $-14,5 \text{ N} \cdot \text{m}$

- 1.49.** Calcular el producto vectorial de los vectores del Problema 1.47. Resp.  $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = 2\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$

- 1.50.** Calcular el producto vectorial de  $\mathbf{P} = 2,12\mathbf{i} + 8,15\mathbf{j} - 4,28\mathbf{k}$  y  $\mathbf{Q} = 2,29\mathbf{i} - 8,93\mathbf{j} - 10,5\mathbf{k}$ .  
Resp.  $-124\mathbf{i} + 12,5\mathbf{j} - 37,6\mathbf{k}$

- 1.51.** Hallar la derivada respecto al tiempo de  $\mathbf{P} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$ .

$$\text{Resp. } \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + 2\frac{dy}{dt}\mathbf{j} - 2z\frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

- 1.52.** Si  $\mathbf{P} = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} - t\mathbf{k}$  y  $\mathbf{Q} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ , demostrar que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) = 4t + 8t^3$$

Comprobar el resultado, aplicando

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})$$

- 1.53.** En el problema anterior, demostrar que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = (15t^4 + 3t^2)\mathbf{i} - (8t^3 + 2t)\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}$$

Comprobar el resultado, aplicando

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$$

- 1.54.** Hallar el producto escalar de los siguientes vectores:

	<b>P</b>	<b>Q</b>	<i>Resp.</i>
(a)	$3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$	$-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$	-23
(b)	$0,86\mathbf{i} + 0,29\mathbf{j} - 0,37\mathbf{k}$	$1,29\mathbf{i} - 8,26\mathbf{j} + 4,0\mathbf{k}$	-2,77
(c)	$a\mathbf{i} + b\mathbf{j} - c\mathbf{k}$	$d\mathbf{i} - e\mathbf{j} + f\mathbf{k}$	$ad - be - cf$

- 1.55.** Hallar el producto vectorial de los siguientes vectores:

	<b>P</b>	<b>Q</b>	<i>Resp.</i>
(a)	$3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$	$-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$	$22\mathbf{i} + \mathbf{j} - 8\mathbf{k}$
(b)	$0,86\mathbf{i} + 0,29\mathbf{j} - 0,37\mathbf{k}$	$1,29\mathbf{i} - 8,26\mathbf{j} + 4,0\mathbf{k}$	$-1,90\mathbf{i} - 3,92\mathbf{j} - 7,48\mathbf{k}$
(c)	$a\mathbf{i} + b\mathbf{j} - c\mathbf{k}$	$d\mathbf{i} - e\mathbf{j} + f\mathbf{k}$	$(bf - ec)\mathbf{i} - (af + cd)\mathbf{j} - (ae + bd)\mathbf{k}$

- 1.56.** Hallar la componente del vector  $\mathbf{Q} = 10\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 20\mathbf{k}$  según la recta definida por los puntos  $(2, 3, -2)$  y  $(1, 0, 5)$ , en este orden. *Resp.*  $-11,72$
- 1.57.** Hallar la componente del vector  $\mathbf{P} = 1,52\mathbf{i} - 2,63\mathbf{j} + 0,83\mathbf{k}$  según la recta definida por los puntos  $(2, 3, -2)$  y  $(1, 0, 5)$  en este orden. *Resp.*  $P_L = +1,59$
- 1.58.** Dados los vectores  $\mathbf{P} = \mathbf{i} + P_y\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$  y  $\mathbf{Q} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ , hallar el valor de  $P_y$  para que el producto vectorial de los dos vectores sea  $9\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ . *Resp.*  $P_y = +0,75$
- 1.59.** Dados los vectores  $\mathbf{P} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}$  y  $\mathbf{Q} = 4\mathbf{i} - \mathbf{k}$ , hallar el valor de  $P_z$  para que el producto escalar de los dos vectores sea 14. *Resp.*  $P_z = -10$
- 1.60.** Expresar los vectores de la Figura 1.24 en función de  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ .
- Resp.* (a)  $\mathbf{P} = -223\mathbf{i} + 306\mathbf{j} - 129\mathbf{k}$   
 (b)  $\mathbf{Q} = +75\mathbf{i} + 50\mathbf{j} - 43,3\mathbf{k}$   
 (c)  $\mathbf{S} = +144\mathbf{i} + 129\mathbf{j} + 52,4\mathbf{k}$

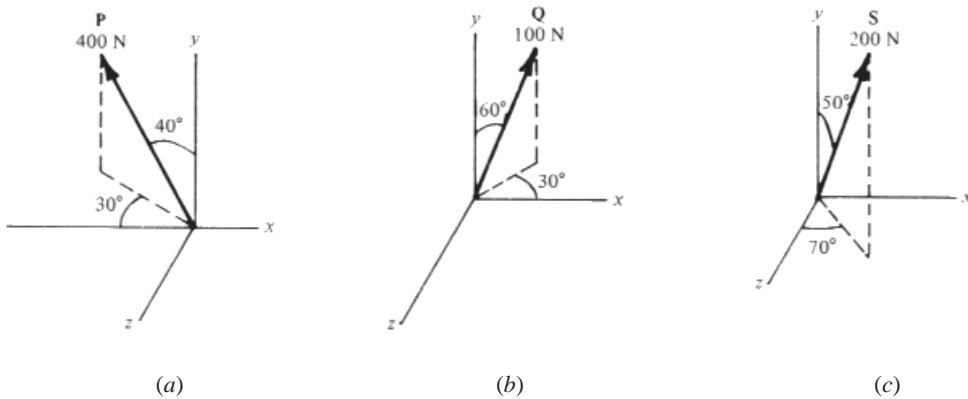


Figura 1.24



# 2

# OPERACIONES CON FUERZAS

## 2.1 MOMENTO DE UNA FUERZA

El momento  $\mathbf{M}$  de una fuerza  $\mathbf{F}$  respecto a un punto  $O$  es el producto vectorial  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , donde  $\mathbf{r}$  es el vector de posición respecto al punto  $O$  de un punto cualquiera  $P$  de la recta de acción de la fuerza  $\mathbf{F}$ . Físicamente,  $\mathbf{M}$  representa la tendencia de la fuerza  $\mathbf{F}$  a hacer girar el cuerpo (sobre el que actúa) alrededor de un eje que pasa por  $O$  y es perpendicular al plano que contiene a la fuerza  $\mathbf{F}$  y al vector de posición  $\mathbf{r}$ .

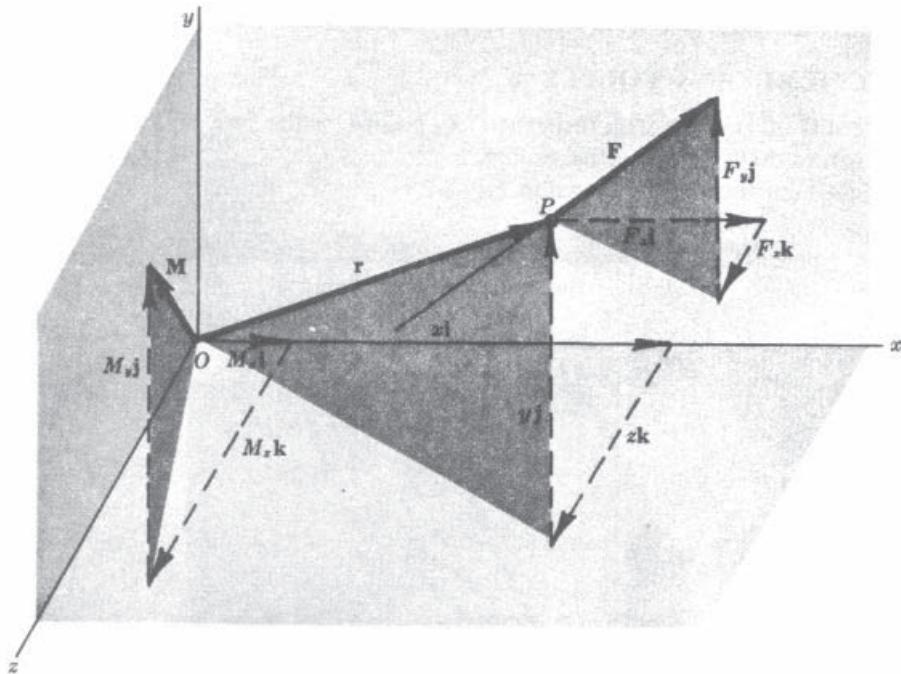


Figura 2.1

Si se dibuja un sistema de ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  con origen  $O$ , como en la Figura 2.1,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \quad \mathbf{M} = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}$$

y, por definición,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante,

$$\mathbf{M} = \mathbf{i}(F_z y - F_y z) + \mathbf{j}(F_x z - F_z x) + \mathbf{k}(F_y x - F_x y)$$

Comparando esta expresión de  $\mathbf{M}$  con la escrita antes, se ve que

$$M_x = F_z y - F_y z \quad M_y = F_x z - F_z x \quad M_z = F_y x - F_x y$$

Los escalares  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_z$  son los momentos de la fuerza  $\mathbf{F}$  respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  que pasan por  $O$ . Véanse los Problemas 2.3 y 2.4.

Obsérvese que  $M_x$  puede obtenerse multiplicando escalarmente el momento  $\mathbf{M}$  por el vector unitario  $\mathbf{i}$  en la dirección del eje  $x$ . Así pues,

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{i} = (M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = M_x(1) + M_y(0) + M_z(0) = M_x$$

Análogamente, el módulo del momento de  $\mathbf{F}$  respecto a un eje cualquiera  $L$  que pase por  $O$  es la proyección de  $\mathbf{M}$  sobre  $L$ . Así pues,

$$M_L = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_L$$

## 2.2 PAR DE FUERZAS

Por definición, *par de fuerzas* o simplemente *par* es un sistema de fuerzas constituido por dos fuerzas paralelas y de igual módulo, pero de sentido opuesto.

## 2.3 MOMENTO DE UN PAR

El momento  $\mathbf{C}$  de un par respecto a un punto cualquiera  $O$  es la suma de los momentos respecto a  $O$  de las dos fuerzas que constituyen el par.

El momento  $\mathbf{C}$  del par de la Figura 2.2 es

$$\mathbf{C} = \sum \mathbf{M}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F} = \mathbf{a} \times \mathbf{F}$$

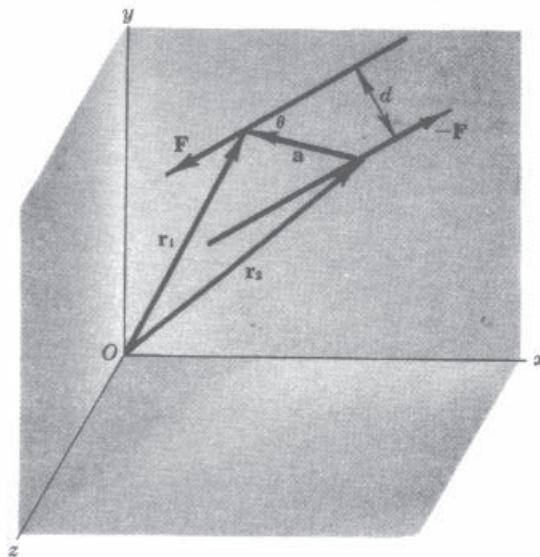


Figura 2.2

Así pues,  $\mathbf{C}$  es un vector perpendicular al plano que contiene a las dos fuerzas ( $\mathbf{a}$  está en dicho plano). Por la definición de producto vectorial, el módulo de  $\mathbf{C}$  es  $|\mathbf{a} \times \mathbf{F}| = aF \sin \theta$ . Como  $d$ , distancia perpendicular entre las dos fuerzas del par, es  $a \sin \theta$ , el módulo de  $\mathbf{C}$  es  $C = Fd$ .

Los pares obedecen a las reglas del álgebra vectorial. Cualquier par  $\mathbf{C}$  puede escribirse  $\mathbf{C} = C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k}$ , donde  $C_x$ ,  $C_y$  y  $C_z$  son los módulos de las componentes de  $\mathbf{C}$ .

Obsérvese que  $O$  es un punto cualquiera; por tanto, el momento de un par es independiente del punto  $O$ .

## 2.4 SUSTITUCIÓN DE UNA FUERZA ÚNICA

Una fuerza única  $\mathbf{F}$  aplicada en un punto  $P$  puede sustituirse por (a) otra fuerza igual aplicada en cualquier otro punto  $O$  y (b) un par  $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , donde  $\mathbf{r}$  es el vector de  $O$  a  $P$ . Véanse los Problemas 2.11 y 2.12.

## 2.5 SISTEMAS DE FUERZAS COPLANARIAS

Muchos problemas de mecánica tratan de fuerzas coplanares. El método escalar que se desarrolla a continuación sirve para problemas en dos dimensiones.

- El *momento*  $M_o$  de una fuerza respecto a un punto  $O$  de un plano que contenga a la fuerza es el momento de la fuerza respecto a un eje que pase por el punto y sea perpendicular al plano. Por tanto, el momento es el producto de (a) la fuerza y (b) la distancia perpendicular del punto a la recta de acción de la fuerza. Es habitual asignar al momento el signo positivo si la fuerza tiende a girar en sentido antihorario alrededor del punto. Véase Problema 2.1.
- El *teorema de Varignon* establece que el momento de una fuerza respecto a un punto es igual a la suma algebraica de los momentos de las componentes de la fuerza respecto a dicho punto. Véase el Problema 2.2.
- El momento de un par no cambia si (a) el par gira o se traslada en su plano, (b) el par se traslada a un plano paralelo, o (c) el tamaño de las fuerzas cambia, pero el brazo del momento cambia también de tal manera que el valor del momento no varíe.
- Un par y una fuerza coplanares o en planos paralelos pueden combinarse en una fuerza única del mismo módulo, dirección y sentido que la fuerza dada. Véase el Problema 2.9.
- Inversamente, una fuerza única puede reemplazarse por (a) una fuerza de igual módulo, dirección y sentido aplicada en un punto cualquiera y (b) un par en el plano determinado por la fuerza y el punto elegido. Véase el Problema 2.11.

## 2.6 NOTAS

En algunos problemas resueltos se emplean ecuaciones vectoriales, pero en otros se utilizan las ecuaciones escalares equivalentes. En las figuras, cuando las direcciones son evidentes, los vectores se identifican por su módulo.

Nótese también que en el sistema tradicional de EE. UU., la unidad de los momentos es la libra por pie (lb·ft). En el sistema SI, la unidad de los momentos es el metro por newton (m·N).

### Problemas resueltos

- En la Figura 2.3, hallar el momento de la fuerza de 20 lb respecto al punto  $O$ .

#### SOLUCIÓN

Se traza la perpendicular  $OD$  desde  $O$  a la recta de acción de la fuerza de 20 lb. Su longitud medida a escala es de 4,33 ft. El momento de la fuerza respecto a  $O$  (realmente respecto a un eje perpendicular al plano  $xy$  que pase por  $O$ ) es, por tanto,  $-(20 \times 4,33) = -86,6$  lb·ft.

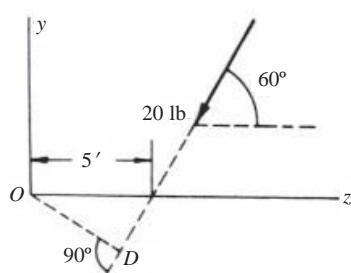


Figura 2.3

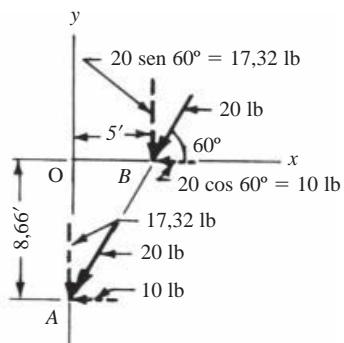


Figura 2.4

El signo menos indica que el sentido de la rotación, visto desde el extremo positivo del eje  $z$  (no mostrado en la figura), es horario.

- 2.2.** Resolver el Problema 2.1 por el teorema de Varignon. Véase la Figura 2.4.

#### SOLUCIÓN

Para aplicar este teorema, se sustituye la fuerza de 20 lb en *cualquier* punto conveniente de su recta de acción por sus componentes rectangulares según los ejes  $x$  e  $y$ .

Si se elige el punto  $B$  en el eje  $x$ , es evidente que la componente  $x$  no tiene momento respecto a  $O$ . El momento de la fuerza de 20 lb respecto a  $O$  es, por tanto, únicamente el momento de la componente  $y$  respecto a  $O$ , o sea,  $-(17,32 \times 5) = -86,6$  lb·ft.

Si se elige el punto  $A$  en el eje  $y$ , la componente  $y$  no tendrá momento respecto a  $O$ . El momento de la fuerza de 20 lb respecto a  $O$  es, en este caso, sólo el momento de la componente  $x$  respecto a  $O$ , es decir,  $-(10 \times 8,66) = -86,6$  lb·ft.

- 2.3.** Una fuerza de 100 N está dirigida según la recta definida por los puntos  $(2, 0, 4)$  m y  $(5, 1, 1)$  m. ¿Cuáles son los momentos respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ ?

#### SOLUCIÓN

En la Figura 2.5, se supone que la escala es tal que la fuerza de 100 N coincide con la diagonal del paralelepípedo cuyos lados son paralelos a los ejes. Los lados representan en dicha escala las componentes de la fuerza.

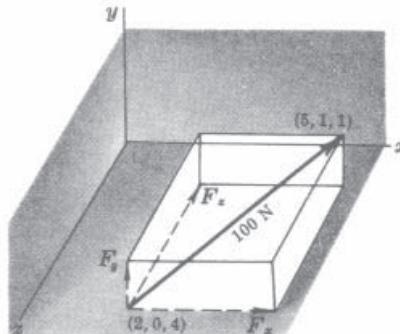


Figura 2.5

El lado  $x$  mide  $5-2 = 3$  m, el lado  $y$  mide  $1-0 = 1$  m y el lado  $z$  mide  $1-4 = -3$  m. El signo menos significa que la componente  $F_z$  se dirige hacia atrás, o sea, que su sentido es negativo.

$$F_x = \frac{\text{longitud del lado } x}{\text{longitud de la diagonal}} \times 100 \text{ N} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-3)^2}} \times 100 = \frac{3}{\sqrt{19}} \times 100 = 68,7 \text{ N}$$

$$\text{Análogamente, } F_y = \frac{1}{\sqrt{19}} \times 100 = 22,9 \text{ N} \quad F_z = \frac{-3}{\sqrt{19}} \times 100 = -68,7 \text{ N}$$

Para calcular el momento de la fuerza de 100 N respecto al eje  $x$  se calcula el momento de sus componentes respecto a dicho eje. Se observa que la única componente que posee ese momento es  $F_y$ . Por consiguiente,  $M_x$  de la fuerza de 100 N coincide con el de  $F_y$  respecto a  $x$ , que vale  $-22,9 \times 4 = -91,6$  m·N. El signo menos indica que el sentido de la rotación de  $F_y$  alrededor del eje  $x$  observada desde el lado positivo de dicho eje tiene sentido horario.

Al calcular el momento respecto al eje  $y$ , tenemos en cuenta que  $F_y$  es paralela al eje  $y$  y que, por tanto, no tiene momento respecto a dicho eje. En este caso, no obstante,  $F_z$  y  $F_x$  sí tienen. Es mejor averiguar el signo del momento por observación que escribiendo los signos de la componente y de su brazo. Por consiguiente,  $M_y = +(68,7 \times 2) + (68,7 \times 4) = +412$  m·N.

Por la misma razón, empleando sólo  $F_y$  (puesto que  $F_z$  es paralela al eje  $z$  y  $F_x$  corta a éste),  $M_z = +(22,9 \times 2) = +45,8$  m·N.

Hay que asegurarse de que los momentos tienen asociados los signos correctos y que se entiende el significado de esos signos.

- 2.4.** Repetir el Problema 2.3 empleando la definición de momento como producto vectorial.

#### SOLUCIÓN

Según el Problema 2.3,  $\mathbf{F} = 68,7\mathbf{i} + 22,9\mathbf{j} - 68,7\mathbf{k}$ .

El vector  $\mathbf{r}$  es el vector de posición de cualquier punto de la recta de acción de  $\mathbf{F}$  respecto al origen. Si se elige el punto  $(2, 0, 4)$ ,  $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - 0\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ . Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 4 \\ 68,7 & 22,9 & -68,7 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}[0 - 4(22,9)] - \mathbf{j}[2(-68,7) - 4(68,7)] + \mathbf{k}[2(22,9) - 0] \\ &= -91,6\mathbf{i} + 412\mathbf{j} + 45,8\mathbf{k} \text{ m} \cdot \text{N}\end{aligned}$$

Tomando el punto  $(5, 1, 1)$  de la recta de acción de  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{r} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 1 & 1 \\ 68,7 & 22,9 & -68,7 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}[-1(68,7) - 22,9(1)] - \mathbf{j}[5(-68,7) - 1(68,7)] + \mathbf{k}[5(22,9) - 68,7(1)] \\ &= -91,6\mathbf{i} + 412\mathbf{j} + 45,8\mathbf{k} \text{ m} \cdot \text{N}\end{aligned}$$

Los momentos respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  son los coeficientes de los vectores unitarios,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ .

- 2.5.** Calcular el momento de la fuerza  $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$  lb aplicada en el punto  $(3, 1, 1)$  respecto a la recta definida por los puntos  $(2, 5, -2)$  y  $(3, -1, 1)$ . Las coordenadas están en pies.

#### SOLUCIÓN

El brazo del momento  $\mathbf{r}$  puede encontrarse a partir de cualquier punto de la recta de acción de la fuerza. Si elegimos el punto  $(2, 5, -2)$ , tenemos el vector  $\mathbf{r} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ . El momento  $\mathbf{M}$  respecto a ese punto es

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

Por consiguiente  $\mathbf{e}_L = \frac{[(3-2)\mathbf{i} + (-1-5)\mathbf{j} + (1+2)\mathbf{k}]}{\sqrt{(1)^2 + (-6)^2 + (3)^2}} = \frac{\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{46}}$

Por tanto, el momento de  $\mathbf{F}$  respecto a la recta es,

$$\mathbf{M}_L = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_L = (-5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}) \cdot \frac{\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{46}} = \frac{-5 - 42 + 33}{\sqrt{46}} = \frac{-14}{\sqrt{46}} = -2,06 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Si el brazo del momento se calcula a partir del punto  $(3, -1, 1)$ , es  $\mathbf{r} = 2\mathbf{j}$ . El momento  $\mathbf{M}$  vale

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$$

Por tanto, el momento de  $\mathbf{M}$  respecto a la recta dada es

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_L = (-2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \cdot \frac{\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{46}} = \frac{-2 - 12}{\sqrt{46}} = \frac{-14}{\sqrt{46}} = -2,06 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

- 2.6.** Calcular el momento de una fuerza  $\mathbf{P}$  cuyas componentes rectangulares son  $P_x = 22 \text{ N}$ ,  $P_y = 23 \text{ N}$ ,  $P_z = 7 \text{ N}$ , aplicada en el punto  $(1, -1, -2)$  respecto a una recta que pasa por el origen y el punto  $(3, -1, 0)$ . Las coordenadas están en metros.

**SOLUCIÓN**

$$\mathbf{P} = 22\mathbf{i} + 23\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \text{ N}$$

Brazo del momento,  $\mathbf{r} = (1-0)\mathbf{i} + (-1-0)\mathbf{j} + (-2-0)\mathbf{k} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \text{ m}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 22 & 23 & 7 \end{vmatrix} = 39\mathbf{i} - 51\mathbf{j} + 45\mathbf{k} \text{ m} \cdot \text{N}$$

- 2.7.** Un par de momento  $+60 \text{ lb} \cdot \text{ft}$  actúa en el plano del papel. Dibujarlo con (a) fuerzas de 10 lb y (b) fuerzas de 30 lb.

**SOLUCIÓN**

En (a) el brazo del momento debe ser de 6 ft, mientras que en (b) es de 2 ft.

El sentido de rotación debe ser antihorario. Las fuerzas paralelas pueden dibujarse en cualquier dirección, tal como se muestra en la Figura 2.6.

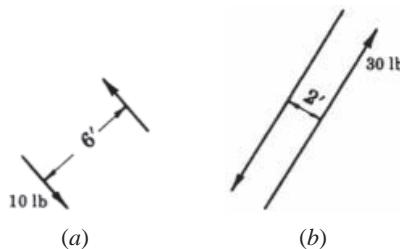


Figura 2.6

- 2.8.** Combinar el par  $C_1 = +20 \text{ m} \cdot \text{N}$  con el par  $C_2 = -50 \text{ m} \cdot \text{N}$ , ambos en el mismo plano. Véase la Figura 2.7.

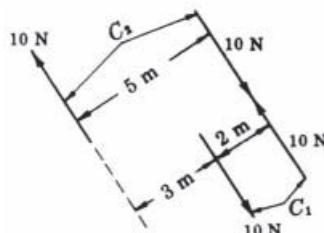


Figura 2.7

**SOLUCIÓN**

Para realizar la combinación gráficamente ambos pares se representan con fuerzas del mismo módulo, por ejemplo, de 10N, y se dibujan dos de las fuerzas, una de cada par, colineales, pero de sentidos opuestos.

Es evidente que las fuerzas colineales se cancelan, quedando dos fuerzas de 10 N con un brazo de 3 m. El par resultante es de  $-30 \text{ m} \cdot \text{N}$ , resultado que también puede obtenerse por suma algebraica.

- 2.9.** Sustituir un par de momento  $-100 \text{ m} \cdot \text{N}$  y una fuerza vertical de 50 N en el origen por una fuerza única. ¿Dónde actúa esa fuerza única?

**SOLUCIÓN**

En la Figura 2.8 se representa el par mediante dos fuerzas iguales y opuestas de 50 N a una distancia perpendicular de 2 m. Una de las fuerzas del par se ha alineado con la fuerza dada en el origen. Estas dos fuerzas se cancelan y queda únicamente la fuerza de 50 N a 2 m a la izquierda del origen.

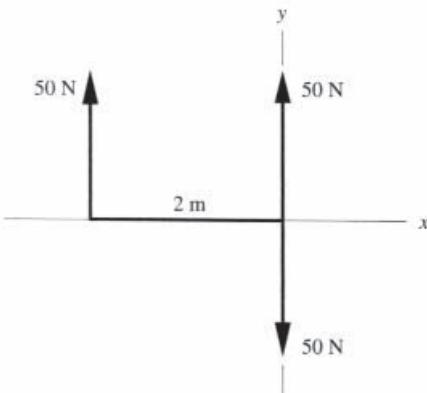


Figura 2.8

- 2.10.** Combinar una fuerza de 30 N,  $60^\circ$  con un par de  $+50 \text{ m}\cdot\text{N}$  en el mismo plano (Figura 2.9).

**SOLUCIÓN**

Un par como tal no puede reducirse a un sistema más sencillo, pero puede combinarse con otra fuerza.

Se dibuja el par dado con fuerzas de 30 N de tal manera que una de ellas sea colineal con la fuerza dada de 30 N, pero de sentido opuesto.

Es evidente que las fuerzas colineales se cancelan, y queda únicamente la fuerza de 30 N paralela y del mismo sentido que la fuerza original, pero a una distancia de 1,67 m de ella.

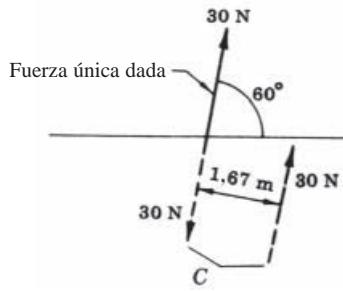


Figura 2.9

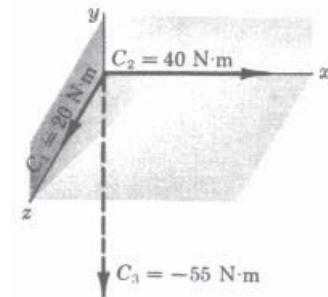


Figura 2.10

- 2.11.** En la Figura 2.10 se representa un par  $C_1$  de  $20 \text{ m}\cdot\text{N}$  que actúa en el plano  $xy$ , un par  $C_2$  de  $40 \text{ m}\cdot\text{N}$  que actúa en el plano  $yz$ , y un par  $C_3$  de  $-55 \text{ m}\cdot\text{N}$  que actúa en el plano  $xz$ . Hallar el par resultante.

**SOLUCIÓN**

El par  $C_1$  es positivo y actúa en el plano  $xy$ . Visto desde el extremo positivo del eje  $z$ , tiende a girar en el sentido antihorario alrededor del eje  $z$ . Según la *regla de la mano derecha*, está representado por un vector de la dirección del eje  $z$  y sentido positivo. Siguiendo este mismo razonamiento se han dibujado en la figura los tres pares. Sumando vectorialmente

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2} = \sqrt{(20)^2 + (40)^2 + (-55)^2} = 70,9 \text{ m}\cdot\text{N}$$

$$\cos \phi_x = \frac{C_2}{C} = +0,564 \quad \cos \phi_y = \frac{C_3}{C} = -0,777 \quad \cos \phi_z = \frac{C_1}{C} = +0,282$$

Éstos son los cosenos directores del par **C**, el cual actúa en el plano perpendicular al vector **C**. El par **C** puede escribirse en notación vectorial como sigue

$$\mathbf{C} = +40\mathbf{i} - 55\mathbf{j} + 20\mathbf{k} \text{ m}\cdot\text{N}$$

de donde se deduce el mismo valor de **C** que antes.

- 2.12.** En la Figura 2.11(a), un tubo de 2 in de diámetro está sometido a una fuerza de 25 lb vertical descendente, aplicada a través de la barra horizontal con un brazo de 14 in. Sustituir la fuerza de 25 lb (1) por una fuerza en el extremo del tubo que provoque la flexión y (2) un par que retuerza el árbol, provocando su torsión. ¿Cuáles son los momentos de la fuerza y del par?

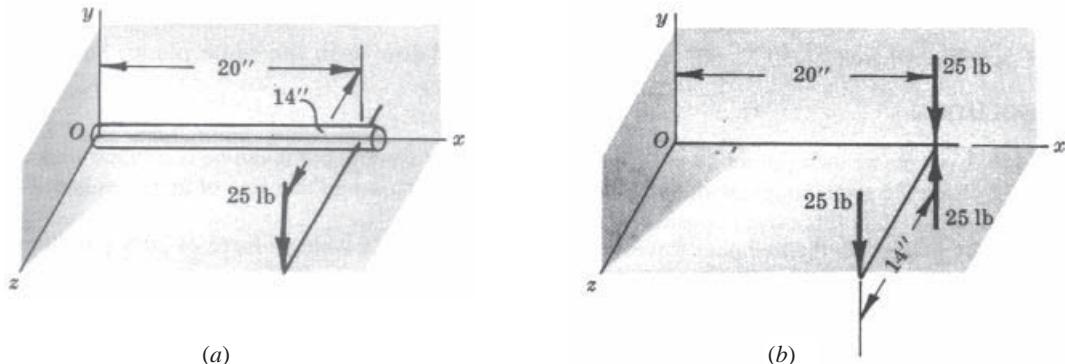


Figura 2.11

#### SOLUCIÓN

Se colocan dos fuerzas de 25 lb de sentido contrario en el centro del tubo, como se muestra en la Figura 2.11(b). Las tres fuerzas siguen siendo equivalentes a la fuerza original.

La fuerza de sentido ascendente se combina con la fuerza original formando un par  $C = 25 \times 14 = 350 \text{ lb}\cdot\text{in}$ . Este par tiende a retorcer el tubo en sentido antihorario si se mira desde la derecha.

La otra fuerza de 25 lb de sentido descendente aplicada al tubo produce un momento flector  $M = -25 \times 20 = -500 \text{ lb}\cdot\text{in}$  respecto al eje z.

- 2.13.** Resolver el Problema 2.12 hallando el momento de la fuerza de 25 lb respecto a *O*.

#### SOLUCIÓN

El vector de posición del punto de aplicación de la fuerza de 25 lb respecto al origen es  $\mathbf{r} = 20\mathbf{i} + 14\mathbf{k}$ . La fuerza es  $\mathbf{F} = -25\mathbf{j}$ . Así pues, el momento de la fuerza de 25 lb respecto al origen es

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 20 & 0 & 14 \\ 0 & -25 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}[0 - 14(-25)] - \mathbf{j}[0 - 0] + \mathbf{k}[20(-25) - 0] = 350\mathbf{i} - 500\mathbf{k} \text{ lb}\cdot\text{in}$$

Lo que concuerda con el resultado del Problema 2.12.

- 2.14.** La grúa de la Figura 2.12 está sobre una calzada horizontal. El eje *x* pasa por los puntos de contacto de las ruedas traseras posteriores con el suelo, el eje *y* es paralelo al eje longitudinal del vehículo y el eje *z* es vertical. La plataforma está a 3 ft por encima del suelo. A efectos prácticos, el punto de pivotaje de la base de la pluma puede suponerse en la plataforma de la grúa a 6 ft del centro de la cabina. El centro de ésta está en el eje a 15 ft hacia la izquierda del puente trasero posterior. La pluma mide 50 ft y forma un ángulo de  $60^\circ$  con la plataforma, medido en un plano vertical, y la cabina y la pluma están giradas formando un ángulo horizontal de  $45^\circ$  con el eje longitudinal de la plataforma. La distancia entre los puntos de contacto de las ruedas traseras se supone de 8 ft. Calcular el momento de vuelco de la fuerza de 4000 lb alrededor del eje *x*.

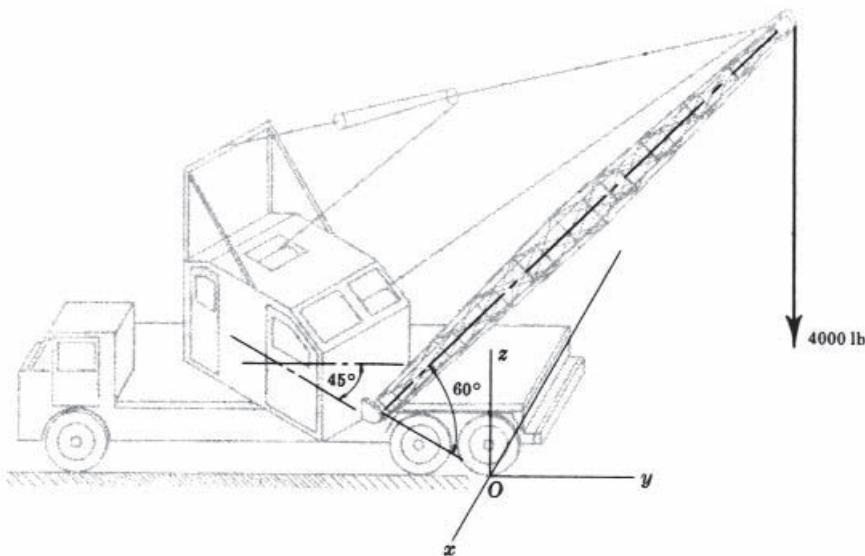


Figura 2.12

**SOLUCIÓN**

Las coordenadas del centro de la cabina respecto al origen  $O$  son  $(-4, -15, +3)$ . Las coordenadas de la base de la pluma son  $(-4+6 \operatorname{sen} 45^\circ, -15+6 \cos 45^\circ, +3)$ , o sea,  $(+0,24; -10,8; +3)$ . Las coordenadas del extremo de la pluma son  $(0,24+50 \operatorname{sen} 45^\circ, -10,8 + 50 \cos 45^\circ, +3+50 \operatorname{sen} 60^\circ)$ , o sea,  $(+17,9; +6,91; +46,3)$ .

El momento del peso de 4000 lb respecto a  $O$  es

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 17,9 & 6,91 & 46,3 \\ 0 & 0 & -4000 \end{vmatrix}$$

El coeficiente del término en  $\mathbf{i}$  es el momento respecto al eje  $x$ . Por tanto,  $M_x = -27\,600 \text{ lb}\cdot\text{ft}$ . Así pues, este momento es horario respecto al eje  $x$  cuando lo observamos desde el costado.

**Problemas propuestos**

- 2.15.** Aplicando el teorema de Varignon, calcular el momento de la fuerza  $\mathbf{F}$  respecto al origen en los siguientes casos:

Módulo de $\mathbf{F}$	Ángulo de $\mathbf{F}$ con la horizontal	Coordenadas del punto de aplicación de $\mathbf{F}$	Respuesta
20 lb	$30^\circ$	$(5, -4)$ ft	$+119 \text{ lb}\cdot\text{ft}$
64 lb	$140^\circ$	$(-3, 4)$ ft	$-72,9 \text{ lb}\cdot\text{ft}$
15 lb	$337^\circ$	$(8, -2)$ ft	$-19,3 \text{ lb}\cdot\text{ft}$
8 oz	$45^\circ$	$(6, 1)$ in	$-28,3 \text{ oz}\cdot\text{in}$
4 N	$90^\circ$	$(0, -20)$ m	0
96 N	$60^\circ$	$(4, 2)$ m	$+236 \text{ m}\cdot\text{N}$

- 2.16.** En el Problema 2.15, calcular el momento a partir de su definición como producto vectorial ( $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ). Incluir el vector  $\mathbf{k}$  en las respuestas.
- 2.17.** Una fuerza de 50 N actúa según la recta que va del punto (8, 2, 3) m al punto (2, 6, 5) m. ¿Cuáles son los momentos de la fuerza respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ ?  
*Resp.*  $M_x = +137 \text{ m}\cdot\text{N}$ ,  $M_y = -167 \text{ m}\cdot\text{N}$ ,  $M_z = -255 \text{ m}\cdot\text{N}$
- 2.18.** Dada la fuerza en el origen  $\mathbf{P} = 32,4\mathbf{i} - 29,3\mathbf{j} + 9,9\mathbf{k}$  lb. Hallar el momento respecto al eje que pasa por los puntos (0, -1, 3) y (3, 1, 1). Las coordenadas están en pies.  
*Resp.*  $M = -88,2 \text{ lb}\cdot\text{ft}$
- 2.19.** La fuerza  $\mathbf{P}$  de componentes rectangulares  $P_x = 68,7 \text{ N}$ ,  $P_y = 22,9 \text{ N}$ ,  $P_z = -68,7 \text{ N}$  actúa en el origen. Calcular su momento respecto al eje que pasa por los puntos (1, 0, -1) m y (4, 4, -1) m.  
*Resp.*  $M = -13,7 \text{ m}\cdot\text{N}$
- 2.20.** Componer  $C_1 = +20 \text{ lb}\cdot\text{ft}$ ,  $C_2 = -80 \text{ lb}\cdot\text{ft}$  y  $C_3 = -18 \text{ lb}\cdot\text{ft}$  actuando todos en el mismo plano.  
*Resp.*  $C = -78 \text{ lb}\cdot\text{ft}$  actuando en el mismo plano o en planos paralelos.
- 2.21.** Sustituir una fuerza vertical descendente de 270 lb aplicada en el origen por la misma fuerza aplicada en  $x = -5$  in y un par. *Resp.*  $C = -1350 \text{ lb}\cdot\text{in}$
- 2.22.** Hallar el par resultante de los tres pares  $+16 \text{ m}\cdot\text{N}$ ,  $-45 \text{ m}\cdot\text{N}$ ,  $+120 \text{ m}\cdot\text{N}$ , que actúan respectivamente en los planos  $xy$ ,  $yz$  y  $xz$ .  
*Resp.*  $C = +129 \text{ m}\cdot\text{N}$ ,  $\cos \theta_x = -0,349$ ;  $\cos \theta_y = 0,931$ ;  $\cos \theta_z = 0,124$
- 2.23.** Sumar el par  $\mathbf{C} = 30\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 35\mathbf{k}$  m-N al par resultante del Problema 2.22.  
*Resp.*  $\mathbf{C} = -15\mathbf{i} + 100\mathbf{j} + 51\mathbf{k}$  m-N
- 2.24.** Las dos fuerzas de 24 lb aplicadas en los vértices  $A$  y  $B$  del paralelepípedo de la Figura 2.13 actúan según  $AE$  y  $BF$ , respectivamente. Demostrar que el par dado puede sustituirse por dos fuerzas verticales de 16 lb cada una, una ascendente, aplicada en el punto  $C$  y otra descendente, aplicada en el punto  $D$ .

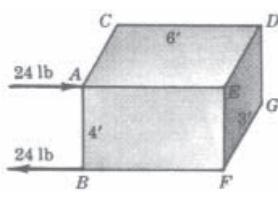


Figura 2.13

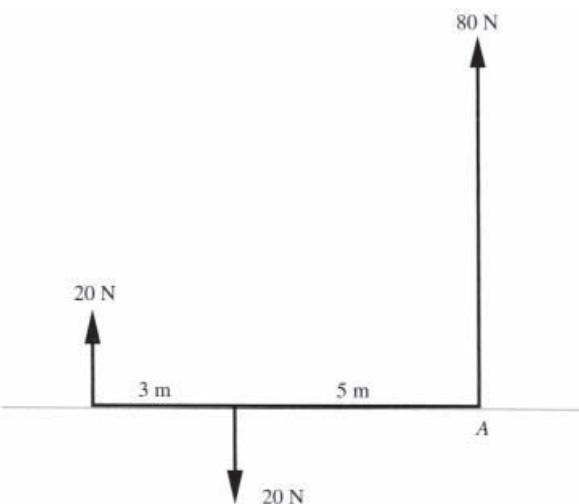


Figura 2.14

- 2.25.** Sustituir las tres fuerzas verticales de la Figura 2.14 por una fuerza única. ¿Cuál es el módulo, el sentido y posición de dicha fuerza?

*Resp.* 80 N, ( $\uparrow$ ), 0,75 m a la izquierda de A

- 2.26. Una barra horizontal de 8 m de longitud tiene aplicada una fuerza de 12 N vertical descendente en su extremo derecho, como se muestra en la Figura 2.15. Demostrar que es equivalente a la misma fuerza aplicada en el extremo izquierdo y un par horario de 96 m·N.

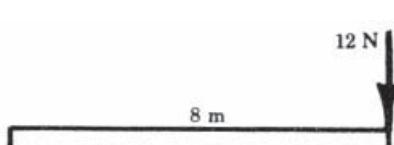


Figura 2.15

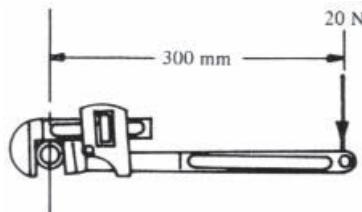


Figura 2.16

- 2.27. Una llave inglesa en posición horizontal ase el extremo izquierdo de un tubo. Se quiere aplicar una fuerza de 20 N en el extremo derecho a una distancia de 300 mm. Demostrar que ésta equivale a una fuerza vertical descendente de 20 N aplicada en el centro del tubo y un par horario de 6 m·N. Véase la Figura 2.16.

- 2.28. En la Figura 2.17, reducir el sistema de fuerzas en las correas a una fuerza única en O y un par. Las fuerzas son todas verticales u horizontales

*Resp.* 78,3 lb;  $\theta_x = 296,5^\circ$ ;  $C = 0$

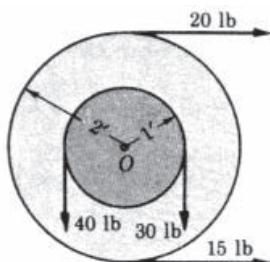


Figura 2.17

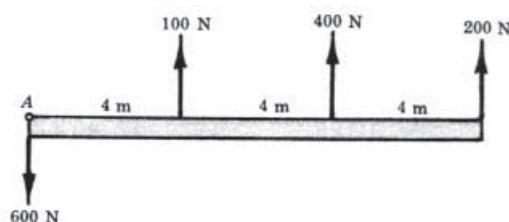


Figura 2.18

- 2.29. Reducir el sistema de fuerzas que actúa en la viga de la Figura 2.18 a una fuerza en el punto A y un par. *Resp.*  $R = 100 \text{ N } (\uparrow)$  en A,  $C = 6000 \text{ m}\cdot\text{N}$

- 2.30. Reducir el sistema de fuerzas y pares de la Figura 2.19 al sistema más sencillo en el punto A. *Resp.*  $R_x = +48,1 \text{ lb}$ ;  $R_y = -3,9 \text{ lb}$ ;  $C = + 36,2 \text{ lb}\cdot\text{ft}$

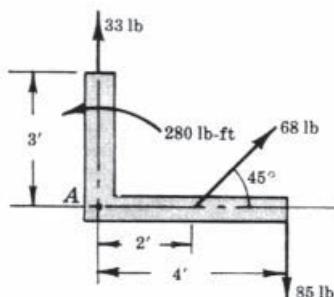


Figura 2.19

- 2.31. Calcular el momento de las dos fuerzas de la Figura 2.20 respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ .  
Resp.  $\mathbf{M} = 488\mathbf{i} + 732\mathbf{k}$  m·N o  $M_x = +488$  m·N,  $M_y = 0$ ,  $M_z = +732$  m·N

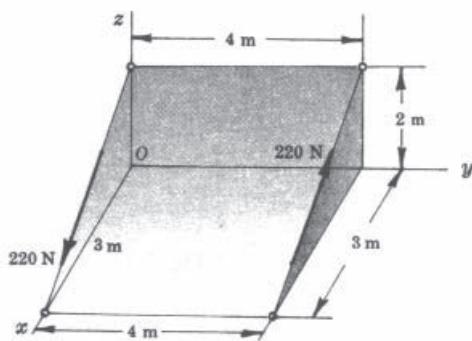


Figura 2.20

# RESULTANTES DE SISTEMAS DE FUERZAS COPLANARIAS

3

## 3.1 FUERZAS COPLANARIAS

Las fuerzas coplanarias están contenidas en un plano. Un sistema concurrente está constituido por fuerzas que se cortan en el llamado punto de concurrencia. Un sistema paralelo está formado por fuerzas que se cortan en el infinito. Un sistema no concurrente y no paralelo es un sistema cuyas fuerzas no todas son concurrentes y no todas son paralelas.

Para hallar las resultantes de los sistemas citados pueden emplearse ecuaciones vectoriales, pero es más práctico emplear las ecuaciones escalares que seguidamente se deducen para cada sistema.

## 3.2 SISTEMAS CONCURRENTES

La resultante **R** puede ser (a) una fuerza única en el punto de concurrencia o (b) cero. Algebraicamente,

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \theta_x = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

donde  $\sum F_x, \sum F_y$  = suma algebraica de las componentes  $x$  e  $y$ , respectivamente, de las fuerzas.  
 $\theta_x$  = ángulo que la resultante **R** forma con el eje  $x$ .

## 3.3 SISTEMAS PARALELOS

La resultante puede ser (a) una fuerza única **R** paralela al sistema, (b) un par en el plano del sistema o en un plano paralelo, o (c) cero. Algebraicamente,

$$R = \sum F \quad \text{y} \quad R\bar{a} = \sum M_O$$

donde  $\sum F$  = suma algebraica de las fuerzas del sistema  
 $O$  = cualquier centro de momentos en el plano  
 $\bar{a}$  = distancia perpendicular desde el centro de momentos a la resultante **R**  
 $R\bar{a}$  = momento de **R** respecto a  $O$   
 $\sum M_O$  = suma algebraica de los momentos de las fuerzas respecto a  $O$

Si  $\sum F$  no es cero, mediante la ecuación  $R\bar{a} = \sum M_O$  puede determinarse  $\bar{a}$  y, en consecuencia, la recta de acción de **R**. Si  $\sum F = 0$ , el par resultante, de existir, vale  $\sum M_O$ .

## 3.4 SISTEMAS NO CONCURRENTES Y NO PARALELOS

La resultante puede ser (a) una fuerza única **R**, (b) un par en el plano del sistema o en un plano paralelo, o (c) cero. Algebraicamente,

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \theta_x = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

donde  $\Sigma F_x, \Sigma F_y$  = sumas algebraicas de las componentes  $x$  e  $y$ , respectivamente, de las fuerzas.  
 $\theta_x$  = ángulo que la resultante  $\mathbf{R}$  forma con el eje  $x$ .

Para hallar la recta de acción de la fuerza resultante se emplea la ecuación

$$R\bar{a} = \sum M_O$$

donde  $O$  = cualquier centro de momentos en el plano

$\bar{a}$  = distancia perpendicular desde el centro de momentos a la resultante  $R$

$R\bar{a}$  = momento de  $R$  respecto a  $O$

$\sum M_O$  = suma algebraica de los momentos de las fuerzas respecto a  $O$

Obsérvese que, incluso si  $R = 0$ , puede existir un par de momento  $\sum M_O$ .

### 3.5 RESULTANTES DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS DISTRIBUIDAS

Un sistema de fuerzas distribuidas está formado por fuerzas que no pueden representarse por vectores que actúen en puntos específicos del espacio; sino que deben representarse por un número infinito de vectores, cada uno de los cuales es función del punto en el que actúa. Considérese el sistema coplanario (paralelo) de fuerzas distribuidas de la Figura 3.1. En el sistema tradicional de EE. UU., las unidades de  $f(x)$  pueden ser, por ejemplo, lb/ft. En el Sistema Internacional, las unidades podrían ser N/m. La resultante  $R$  del sistema de fuerzas y su ubicación pueden determinarse por integración. Así pues,

$$R = \int_A^B f(x) dx \quad \text{y} \quad R\bar{d} = \int_A^B x f(x) dx$$

Los Problemas 3.13 y 13.15 son ejemplos de ello.

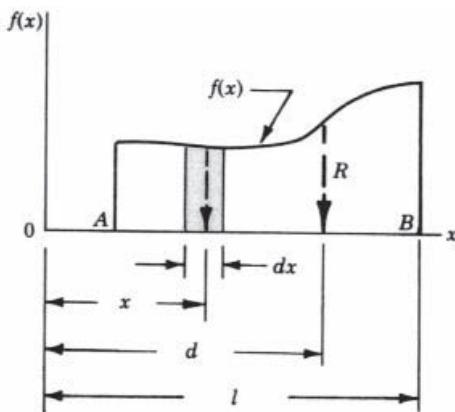


Figura 3.1

#### Problemas resueltos

**3.1.** Calcular la resultante del sistema de fuerzas concurrentes de la Figura 3.2.

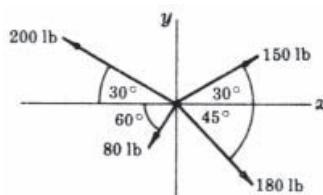


Figura 3.2

**SOLUCIÓN**

Se hallan las componentes  $x$  e  $y$  de cada una de las cuatro fuerzas dadas. Se suman algebraicamente las componentes  $x$  para calcular  $\sum F_x$ . Se calcula  $\sum F_y$  de las componentes  $y$ . Resulta más claro tabular los datos.

Fuerza	$\cos \theta_x$	$\operatorname{sen} \theta_x$	$F_x$	$F_y$
150	+0,866	+0,500	+129,9	+75,0
200	-0,866	+0,500	-173,2	+100,0
80	-0,500	-0,866	-40,0	-69,2
180	+0,707	-0,707	+127,3	-127,3

$$\sum F_x = +44,0; \sum F_y = -21,5 \text{ y } R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = \sqrt{(44,0)^2 + (-21,5)^2} = 49,0 \text{ lb}$$

$$\operatorname{tg} \theta_x = \frac{\sum F_y}{\sum F_x} = \frac{-21,5}{+44,0} = -0,489$$

de donde

$$\theta_x = 360^\circ - 26^\circ = 334^\circ$$

- 3.2.** Calcular la resultante del sistema de fuerzas concurrentes de la Figura 3.3. Obsérvese que en la figura se indican las pendientes de las rectas de acción de las fuerzas.

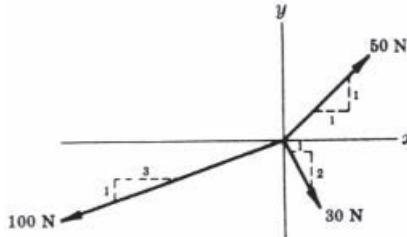


Figura 3.3

**SOLUCIÓN**

Fuerza	$F_x$	$F_y$
50	$+50 \times \frac{1}{\sqrt{1^2 \times 1^2}}$	$+50 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$
100	$-100 \times \frac{3}{\sqrt{1^2 + 3^2}}$	$-100 \times \frac{1}{\sqrt{10}}$
30	$+30 \times \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$	$-30 \times \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\sum F_x = -46,1; \sum F_y = -23,0 \text{ y } R = \sqrt{(-46,1)^2 + (-23,0)^2} = 51,6 \text{ N con } \theta_x = 207^\circ$$

- 3.3.** Hallar la resultante del sistema de fuerzas coplanares y concurrentes de la Figura 3.4.

**SOLUCIÓN**

$$\sum F_x = 70 - 100 \cos 30^\circ - 125 \operatorname{sen} 10^\circ = -38,3 \text{ lb}$$

$$\sum F_y = 125 \cos 10^\circ - 100 \operatorname{sen} 30^\circ = 73,1 \text{ lb}$$

$$R = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2} = \sqrt{(-38,3)^2 + (73,1)^2} = 82,5 \text{ lb}$$

$$\operatorname{tg} \theta_x = \frac{\sum F_y}{\sum F_x} = \frac{73,1}{-38,3} = -1,91 \quad \theta_x = 62^\circ$$

de donde  $\theta = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$  redondeado a grados. La resultante se ha dibujado en la Figura 3.4 en trazo discontinuo.

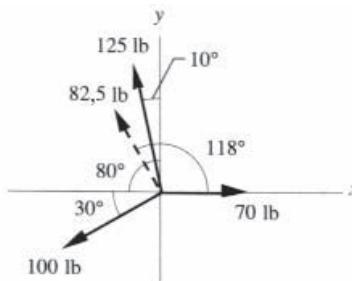


Figura 3.4

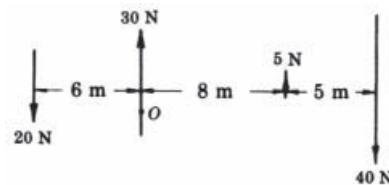


Figura 3.5

- 3.4.** Hallar la resultante del sistema de fuerzas paralelas de la Figura 3.5.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 3.5 las rectas de acción de las fuerzas son verticales, tal como se muestra.

$$R = -20 + 30 + 5 - 40 = -25 \text{ N (o sea, } \downarrow)$$

Para hallar la recta de acción de esta fuerza de 25 N, se elige un centro de momentos cualquiera  $O$ . Puesto que el momento de una fuerza respecto a un punto de su recta de acción es cero, es aconsejable, aunque no necesario, tomar  $O$  sobre una de las fuerzas dadas. Tomemos  $O$  sobre la fuerza de 30 N.

$$\sum M_O = +(20 \times 6) + (30 \times 0) + (5 \times 8) - (40 \times 13) = -360 \text{ m} \cdot \text{N}$$

O sea, el momento de  $R$  debe ser de  $-360 \text{ m} \cdot \text{N}$ . Ello significa que  $R$ , cuyo sentido es descendente ( $-$ ), debe estar situada a la derecha de  $O$  porque sólo así su momento será horario ( $-$ ).

De  $R\bar{a} = \sum M_O$  se deduce que

$$\bar{a} = \frac{360 \text{ m} \cdot \text{N}}{25 \text{ N}} = 14,4 \text{ m a la derecha de } O$$

Obsérvese que  $\bar{a}$  se ha obtenido por razonamiento, y no por consideración de los signos de  $R$  o  $\sum M_O$ .

- 3.5.** Hallar la resultante del sistema de fuerzas paralelas de la Figura 3.6.

#### SOLUCIÓN

$R = -100 + 200 - 200 + 400 - 300 = 0$ . O sea, la resultante no es una fuerza única. Seguidamente, se calcula  $\sum M_O$ . Se elige  $O$  sobre la fuerza de 100 lb, tal como se muestra en la figura.

$$\sum M_O = +(100 \times 0) + (200 \times 2) - (200 \times 5) + (400 \times 9) - (300 \times 11) = -300 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

La resultante es, por tanto, un par  $C = -300 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ , que puede representarse en el plano del papel de acuerdo con las reglas de los pares.

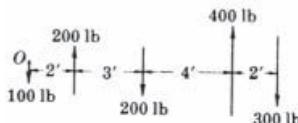


Figura 3.6

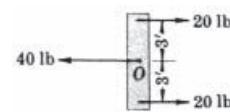


Figura 3.7

- 3.6** Hallar la resultante del sistema de fuerzas horizontales que actúan en la barra de la Figura 3.7.

**SOLUCIÓN**

$$R = \sum F_h = +20 + 20 - 40 = 0. \text{ O sea, la resultante no es una fuerza única, pero puede ser un par.}$$

$$\sum M_o = -(20 \times 3) + (20 \times 3) = 0$$

Por tanto, en este sistema la fuerza resultante es cero y el par resultante es también cero.

- 3.7.** En el voladizo de la Figura 3.8 actúan tres fuerzas y un par. ¿Cuál es la resultante del sistema?

**SOLUCIÓN**

$$R = \sum F = 500 - 400 - 200 = -100 \text{ N}$$

$$\sum M_o = 2 \times 500 - 4 \times 400 - 6 \times 200 + 1500 = -300 \text{ m} \cdot \text{N}$$

$$R\bar{a} = \sum M_o \quad \bar{a} = \frac{-300}{-100} = 3 \text{ m}$$

Para que la resultante, que es descendente, tenga un momento negativo debe estar situada a la derecha del punto  $O$ . En la Figura 3.8 se ha dibujado la resultante en su posición con trazo discontinuo.

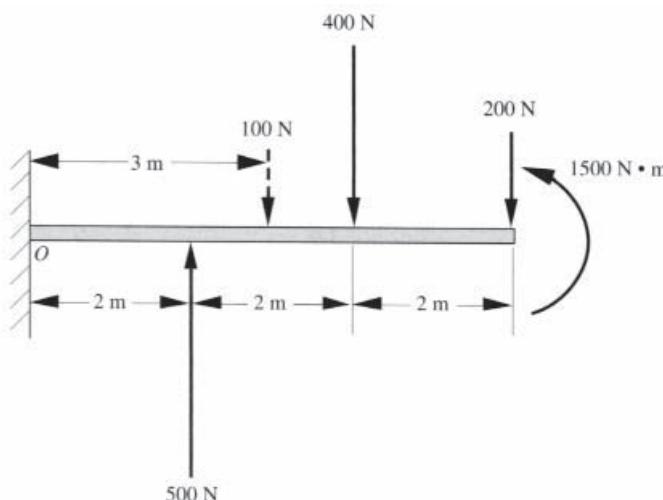


Figura 3.8

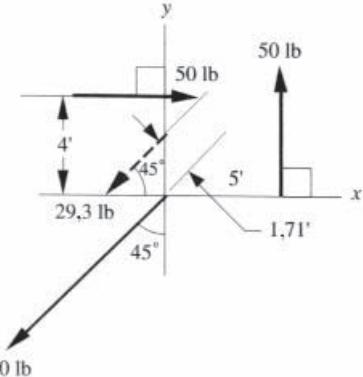


Figura 3.9

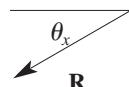
- 3.8.** Hallar la resultante del sistema de fuerzas coplanares no concurrentes de la Figura 3.9.

**SOLUCIÓN**

$$\sum F_x = 50 - 100 \cos 45^\circ = -20,7 \text{ lb}$$

$$\sum F_y = 50 - 100 \sin 45^\circ = -20,7 \text{ lb}$$

$$R = \sqrt{(-20,7)^2 + (-20,7)^2} = 29,3 \text{ lb} \quad \theta = \arctg \frac{\sum F_y}{\sum F_x} = 45^\circ$$



$$\sum M_o = 5 \times 50 - 4 \times 50 = 50 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$R\bar{a} = \sum M_o = 50 \quad \bar{a} = 50 / 29,3 = 1,71 \text{ ft}$$

$\mathbf{R}$  es descendente hacia la izquierda y, por tanto, debe estar por encima del origen para que su momento sea positivo (+).

- 3.9. Hallar la resultante del sistema no concurrente y no paralelo de la Figura 3.10(a). Se supone que las coordenadas están en metros.

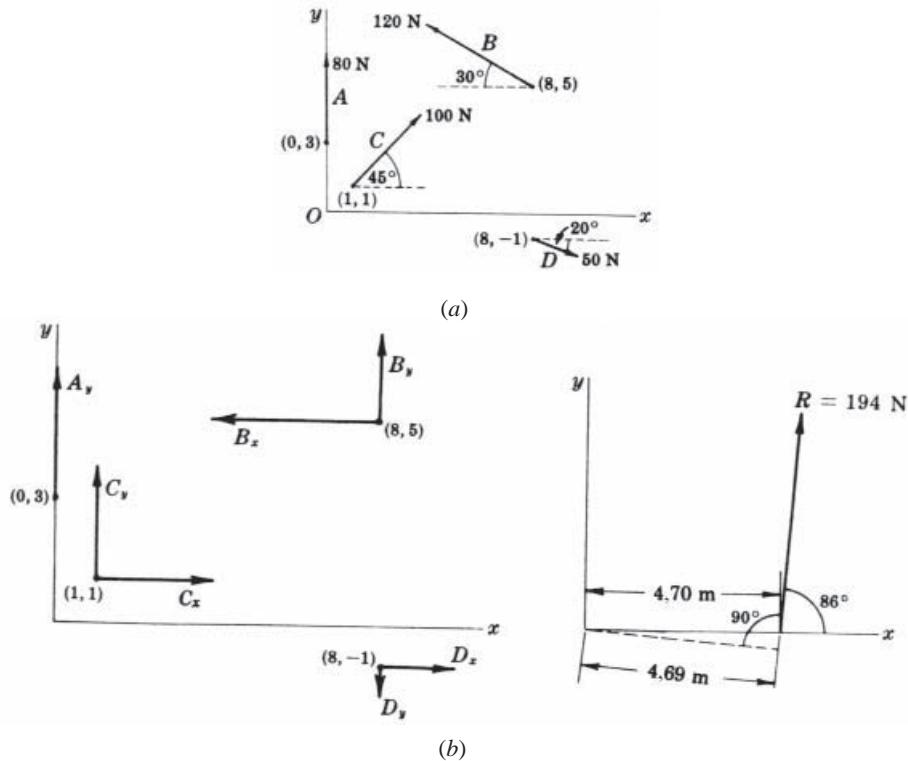


Figura 3.10

**SOLUCIÓN**

Por comodidad, las fuerzas se rotulan  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y se tabulan las componentes  $x$  e  $y$  de cada fuerza y de los momentos de cada componente respecto a un centro de momentos, en este caso  $O$ . Se sustituye cada fuerza por sus componentes en un punto de su recta de acción, tal como se indica en la Figura 3.10(b). A veces puede ser conveniente situar las componentes en puntos de las rectas de acción distintos de los dados, por ejemplo, la recta de acción de la fuerza  $C$  que actúa a  $45^\circ$  pasa por el origen  $O$ , lo que conlleva que el momento respecto de  $O$  sea cero para esta fuerza. No obstante, las componentes que se utilizan en este ejemplo son las componentes horizontales y verticales situadas en los puntos de aplicación dados.

La siguiente tabla resume la información necesaria. Asegúrese de asociar el signo apropiado a cada componente y deducir el signo del momento por inspección

Fuerza	$\cos \theta_x$	$\operatorname{sen} \theta_x$	$F_x$	$F_y$	Momento de $F_x$ respecto a $O$	Momento de $F_y$ respecto a $O$	$M_O$
$A$	0	+1	0	+80,0	0	0	0
$B$	-0,866	+0,500	-103,9	+60,0	+519,5	+480,0	+999,5
$C$	+0,707	+0,707	+70,7	+70,7	-70,7	+70,7	0
$D$	+0,940	-0,342	+47,0	-17,1	+47,0	-136,8	-89,8

$$\sum F_x = +13,8 \text{ N} \quad \sum F_y = +193,6 \text{ N} \quad \sum M_O = +910 \text{ m} \cdot \text{N}$$

$$R = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2} = \sqrt{(13,8)^2 + (193,6)^2} = 194 \text{ N} \quad \theta_x = \operatorname{artg} \frac{+193,6}{+13,8} = 86^\circ$$

Para hallar el brazo del momento de la resultante se divide 910 por 194 y resulta 4,69 m.

Puesto que  $R$  es ascendente y ligeramente hacia la derecha, debe estar situada como se muestra en la figura, ya que  $\sum M_O$  es positivo; es decir, el sentido del momento de  $R$  debe ser antihorario.

Otro modo de situar la recta de acción de la resultante consiste en determinar su intersección, por ejemplo, con el eje  $x$ . Si las componentes de la resultante se dibujan en este punto, la componente  $x$  no tiene momento respecto a  $O$  y el momento es el correspondiente únicamente a la componente  $y$ , o sea, el producto de la componente  $y$  por la distancia  $x$  de la intersección al punto  $O$  (coordenada  $x$  del punto de intersección).

$$x = \frac{\sum M_O}{\sum F_y} = \frac{910}{193,6} = 4,70 \text{ m}$$

Se dibuja la resultante tal como se muestra cortando al eje  $x$  a +4,70 m a la derecha porque  $\sum F_y$  es positivo y  $\sum M_O$  también.

- 3.10.** Hallar la resultante del sistema de fuerzas de la Figura 3.11(a). Se supone que las coordenadas están en ft.

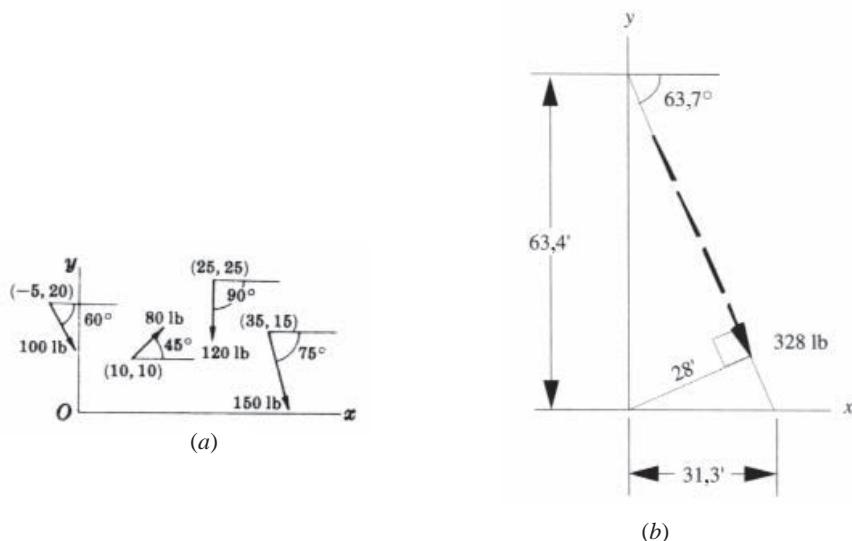


Figura 3.11

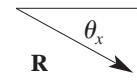
### SOLUCIÓN

Las componentes pueden sumarse directamente sin necesidad de una tabla como en el Problema 3.9:

$$\sum F_x = 100 \cos 60^\circ + 80 \cos 45^\circ + 150 \cos 75^\circ = 145,4 \text{ lb}$$

$$\sum F_y = -100 \sin 60^\circ + 80 \sin 45^\circ - 120 + 150 \sin 75^\circ = -294,9 \text{ lb}$$

$$R = \sqrt{(145,4)^2 + (-294,9)^2} = 328 \text{ lb} \quad \theta = \operatorname{artg} \frac{-294,9}{145,4} = 63,7^\circ$$



Sumando los momentos respecto a  $O$ :

$$\sum M_O = -(20) 100 \cos 60^\circ + (5) 100 \sin 60^\circ - (10) 80 \cos 45^\circ$$

$$+ (10) 80 \sin 45^\circ - (25) 120 - (15) 150 \cos 75^\circ - (35) 150 \sin 75^\circ = -9220 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Para hallar la intersección de la resultante con el eje  $x$ :

$$(\sum F_y) \bar{x} = \sum M_O \quad \bar{x} = 31,3 \text{ ft}$$

Para hallar la intersección de la resultante con el eje  $y$ :

$$(\sum F_x) \bar{y} = \sum M_O \quad \bar{y} = 63,4 \text{ ft}$$

En la Figura 3.11(b) se representa la resultante.

- 3.11.** Hallar la resultante de las cuatro fuerzas tangentes al círculo de radio 3 ft de la Figura 3.12(a). ¿Cómo está situada respecto al centro del círculo?

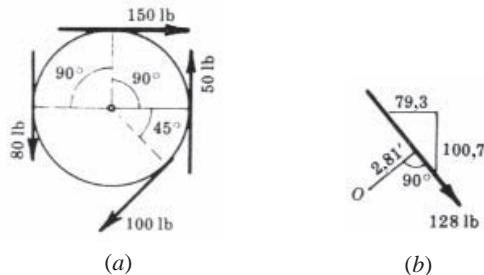


Figura 3.12

#### SOLUCIÓN

Obsérvese que tanto la componente horizontal como la vertical de la fuerza de 100 lb son ambas  $-70,7 \text{ lb}$ . Por tanto,  $\sum F_h = +150 - 70,7 = 79,3 \text{ lb}$ , o sea, hacia la derecha; y  $\sum F_v = +50 - 80 - 70,7 = -100,7 \text{ lb}$ , o sea descendente. La resultante vale  $R = \sqrt{(\sum F_h)^2 + (\sum F_v)^2} = 128 \text{ lb}$ .

El momento de  $R$  respecto a  $O$  es  $Ra$ , y debe ser igual a la suma de los momentos de todas las fuerzas dadas respecto a  $O$ . Por tanto,  $128a = +50 \times 3 - 150 \times 3 + 80 \times 3 - 100 \times 3 = -360$ . En la Figura 3.12(b) se representa la resultante a una distancia de 2,81 ft del centro del círculo, creando un momento negativo.

- 3.12.** Hallar la resultante del sistema de fuerzas que actúan en la placa de nudo de la Figura 3.13. Ubicar la resultante expresando su intersección con el eje  $x$ .

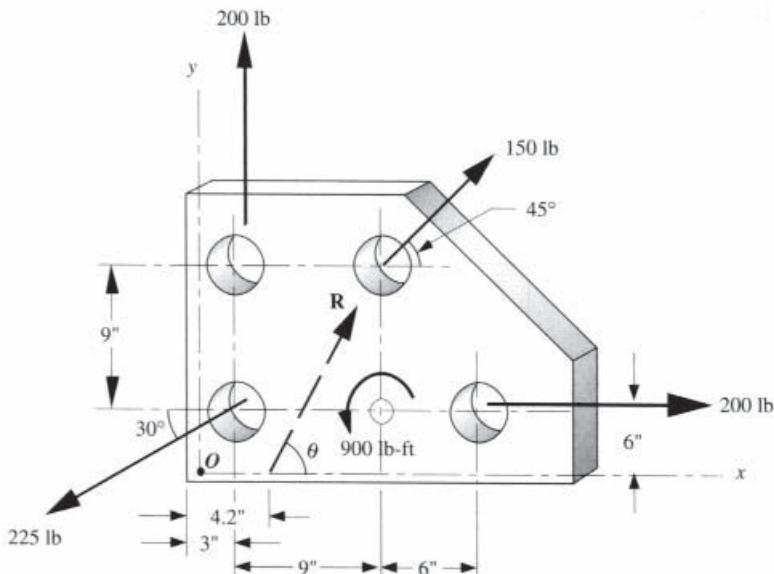


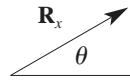
Figura 3.13

#### SOLUCIÓN

$$\sum F_x = 150 \cos 45^\circ + 200 - 225 \cos 30^\circ = 111,2 \text{ lb}$$

$$\sum F_y = 150 \sin 45^\circ - 225 \sin 30^\circ + 200 = 193,6 \text{ lb}$$

$$R = \sqrt{(111,2)^2 + (193,6)^2} = 223 \text{ lb} \quad \theta = \operatorname{argt} \frac{193,6}{111,2} = 60^\circ$$



$$\begin{aligned} \sum M_o &= (3) 200 - (15) 150 \cos 45^\circ + (12) 150 \sin 45^\circ - (6) 200 + 900 + (6) 225 \cos 30^\circ - (3) 225 \sin 30^\circ \\ &= 813 \text{ lb}\cdot\text{ft} \end{aligned}$$

Para situar la resultante por su intersección con el eje  $x$ , se aplica

$$(\sum F_y) \bar{x} = \sum M_o \quad \bar{x} = \frac{813}{194} = 4,2 \text{ in}$$

- 3.13.** En la Figura 3.14, la carga de 20 lb/ft está uniformemente distribuida a lo largo de la viga de 6 ft de longitud. Calcular  $R$  y  $d$ .

**SOLUCIÓN**

$$R = \int_0^6 20 \, dx = 120 \text{ lb} \quad Rd = \int_0^6 x(20) \, dx = 360 \text{ lb}\cdot\text{ft} \quad d = \frac{360}{120} = 3 \text{ ft}$$

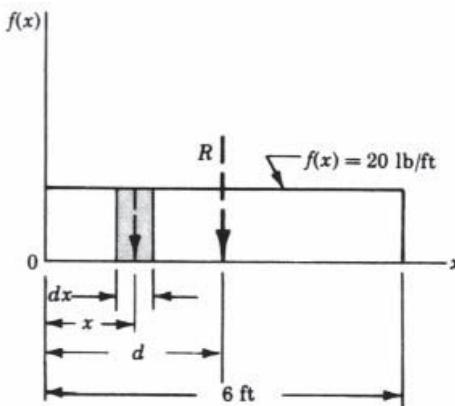


Figura 3.14

- 3.14** En la Figura 3.15 la distribución de la carga es triangular. La altura del diagrama a una distancia  $x$  del punto  $O$  es proporcional a  $x$  y vale  $(x/9)30$  N/m. Calcular  $R$  y  $d$ .

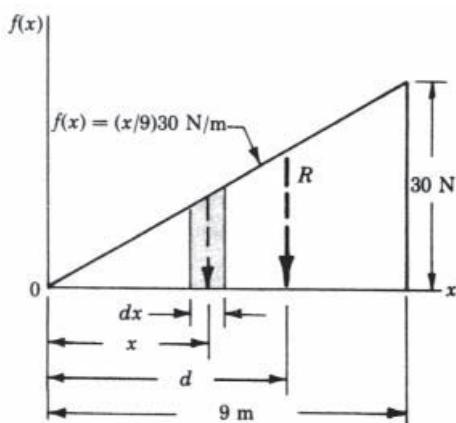


Figura 3.15

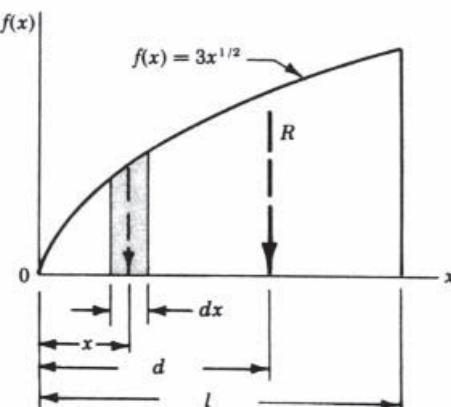


Figura 3.16

**SOLUCIÓN**

$$R = \int_0^9 \frac{x}{9} (30) dx = 135 \text{ N} \quad Rd = \int_0^9 x \left[ \frac{x}{9} (30) \right] dx = 810 \text{ m} \cdot \text{N} \quad d = \frac{810}{135} = 6 \text{ m}$$

- 3.15** Hallar  $R$  y  $d$  para la distribución de carga parabólica de la Figura 3.16.

**SOLUCIÓN**

$$R = \int_0^l 3x^{1/2} dx = 2x^{3/2} \Big|_0^l = 2l^{3/2} \quad Rd = \int_0^l x(3x^{1/2}) dx = \frac{6}{5} l^{5/2} \quad d = \frac{\frac{6}{5} l^{5/2}}{2l^{3/2}} = 0,6l$$

**Problemas propuestos**

- 3.16.** Dos fuerzas de tracción, una de 200 N y la otra de 300 N, actúan en un plano horizontal sobre un poste vertical. Si el ángulo que forman es de  $85^\circ$ , ¿cuál es la resultante? ¿Qué ángulo forma con la fuerza de 200 N? Resolver el problema gráfica y analíticamente.

*Resp.*  $R = 375 \text{ N}$ ,  $\theta = 53^\circ$

**En los Problemas 3.17 a 3.20, calcular la resultante de los sistemas de fuerzas concurrentes. Se da el ángulo que las fuerzas forman con el eje  $x$  (medido en sentido antihorario). Las fuerzas están expresadas en lb.**

- 3.17.** Fuerza 85    126    65    223  
 $\theta_x$      $38^\circ$      $142^\circ$      $169^\circ$      $295^\circ$     *Resp.*  $R = 59,8 \text{ lb}$ ,  $\theta_x = 268^\circ$

- 3.18.** Fuerza 22    13    19    8  
 $\theta_x$      $135^\circ$      $220^\circ$      $270^\circ$      $358^\circ$     *Resp.*  $R = 21,3 \text{ lb}$ ,  $\theta_x = 214^\circ$

- 3.19.** Fuerza 1250    1830    855    2300  
 $\theta_x$      $62^\circ$      $125^\circ$      $340^\circ$      $196^\circ$     *Resp.*  $R = 2520 \text{ lb}$ ,  $\theta_x = 138^\circ$

- 3.20.** Fuerza 285    860    673    495    241  
 $\theta_x$      $270^\circ$      $180^\circ$      $45^\circ$      $330^\circ$      $100^\circ$     *Resp.*  $R = 181 \text{ lb}$ ,  $\theta_x = 89^\circ$

- 3.21.** La fuerza de 100 lb de la Figura 3.17 es la resultante de cuatro fuerzas, tres de las cuales son conocidas. Hallar la cuarta fuerza.

*Resp.*  $F = 203 \text{ lb}$ ,  $\theta_x = 49^\circ$

- 3.22.** Tres fuerzas copланarias de 80 N cada una tiran de un pequeño anillo (de diámetro despreciable). Suponiendo que las rectas de acción forman entre sí ángulos iguales ( $120^\circ$ ), hallar la resultante. De tal sistema se dice que está en equilibrio.

*Resp.*  $R = 0$

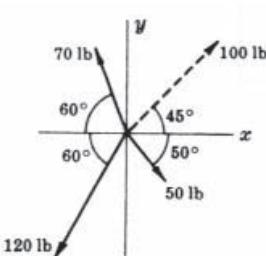


Figura 3.17

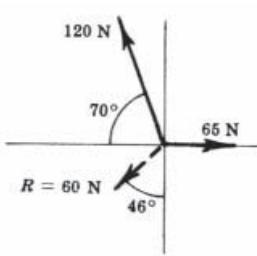


Figura 3.18

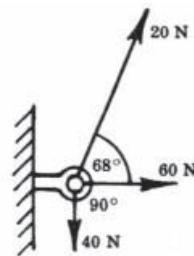


Figura 3.19

- 3.23.** En la Figura 3.18 la fuerza de 60 N es la resultante de tres fuerzas, dos de las cuales, una de 120 N y otra de 65 N, aparecen en la figura. Hallar la tercera fuerza.

*Resp.* 169 N,  $\theta_x = 246^\circ$

- 3.24.** En la Figura 3.18 tres alambres ejercen sobre el cáncamo las tracciones indicadas. Suponiendo que es un sistema concurrente, calcular la fuerza que debe ejercer un único alambre para que pueda sustituir a los tres alambres dados. *Resp.*  $T = 70,8$  N,  $\theta_x = 343^\circ$

- 3.25.** Hallar la resultante de tres fuerzas de origen en el punto  $(3, -3)$  y que pasen por los puntos que se indican a continuación: 126 N por el punto  $(8, 6)$ , 183 N por el punto  $(2, -5)$ , 269 N por el punto  $(-6, 3)$ .

*Resp.*  $R = 263$  N,  $\theta_x = 159^\circ$  en  $(3, -3)$

- 3.26.** En la Figura 3.20 calcular los valores de  $P$  y  $Q$  para que la resultante de las tres fuerzas coplana- rias sea de 100 lb a  $20^\circ$  del eje  $x$ . *Resp.*  $P = 240$  lb;  $Q = 161$  lb

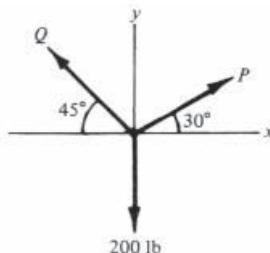


Figura 3.20

**Calcular la resultante en los Problemas 3.27 a 3.29. Las fuerzas son horizontales y están en lb. Las distan- cias de las intersecciones de las rectas de acción con el eje y al origen están ft.**

**3.27.** Fuerza    +50    +20    -10  
y            +3    -5    +6    *Resp.* + 60 lb,  $\bar{y} = -0,167$  ft

**3.28.** Fuerza    +800    -300    +1000    -600  
y            -6    -5    -4    0    *Resp.* + 900 lb,  $\bar{y} = -8,11$  ft

**3.29.** Fuerza    +160    -220    +80    -180    +160  
y            +3    -7    -3    +10    0    *Resp.*  $C = +20$  lb·ft

- 3.30.** Hallar la resultante de las tres cargas que actúan en la viga de la Figura 3.21.  
*Resp.*  $R = 38$  T ( $\downarrow$ ) a una distancia de 8,37 ft del apoyo izquierdo

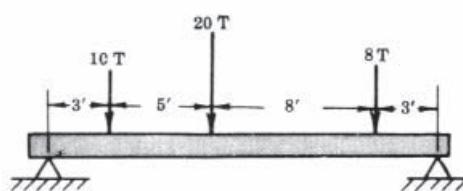


Figura 3.21

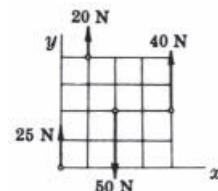


Figura 3.22

- 3.31.** Hallar la resultante de las cuatro fuerzas de la Figura 3.22. Los cuadrados pequeños son de 1m de lado. *Resp.*  $R = +35$  N,  $\bar{x} = 2,99$  m

- 3.32.** Seis pesos de 30, 20, 40, 25, 10 y 35 lb cuelgan en un mismo plano vertical de un soporte horizontal a distancias de una pared de 2, 3, 5, 7, 10 y 12 ft, respectivamente. ¿Qué fuerza única podría sustituir a los seis pesos? *Resp.* -160 lb, a 6,34 ft de la pared

- 3.33.** Sobre la viga de la Figura 3.23 actúan tres fuerzas. En la figura están indicadas la resultante y dos de las fuerzas. ¿Cuál es la tercera?

*Resp.*  $F = 20 \text{ T} (\downarrow)$ ,  $\bar{x} = 10 \text{ ft}$  del soporte izquierdo.

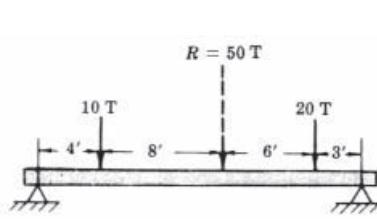


Figura 3.23

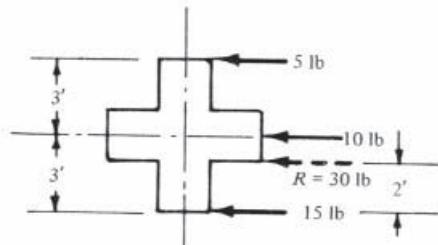


Figura 3.24

- 3.34.** Hallar la resultante del sistema coplanario y paralelo de la Figura 3.24.

*Resp.* 30 lb ( $\leftarrow$ ), 2 ft por encima de la base.

- 3.35.** Hallar la resultante del sistema coplanario y paralelo de la Figura 3.25.

*Resp.*  $R = 100 \text{ N} (\downarrow)$ , a 55 mm de A en la dirección del plano

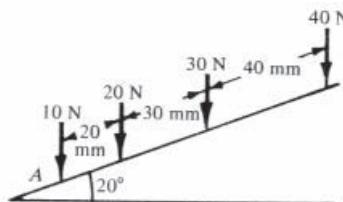


Figura 3.25

**Calcular la resultante de los sistemas de fuerzas no concurrentes ni paralelas de los Problemas 3.36 a 3.38.. Las fuerzas están en N y las coordenadas en m.**

**3.36.**

$F$	20	30	50	10
$\theta_x$	45°	120°	190°	270°

Coordenadas del punto de aplicación (1, 3) (4, -5) (5, 2) (-2, -4)

*Resp.*  $R = 54,7 \text{ N}$ ,  $\theta_x = 157^\circ$ , corta a  $x$  a 3,52 m

**3.37.**

$F$	50	100	200	90
$\theta_x$	90°	150°	30°	45°

Coordenadas del punto de aplicación (2, 2) (4, 6) (3, -2) (7, 2)

*Resp.*  $R = 303 \text{ N}$ ,  $\theta_x = 60,3^\circ$ , corta a  $x$  a 6,77 m

**3.38.**

$F$	2	4	5	8
$\theta_x$	45°	290°	183°	347°

Coordenadas del punto de aplicación (0, 5) (4, 3) (9, 24) (2, 26)

*Resp.*  $R = 7,12 \text{ N}$ ,  $\theta_x = 322^\circ$ , corta a  $x$  a 1,20 m

- 3.39.** Hallar la resultante de las cinco fuerzas de la Figura 3.26. Las fuerzas están en onzas y los cuadrados son de 1 × 1 in. *Resp.*  $C = -268 \text{ oz-in}$

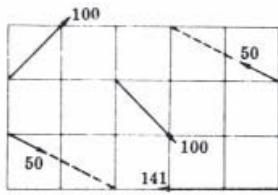


Figura 3.26

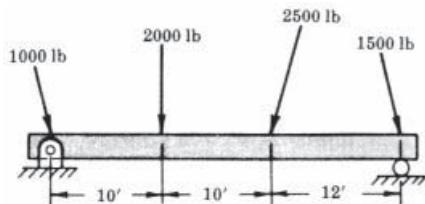


Figura 3.27

- 3.40.** Hallar la resultante de las cuatro fuerzas de la Figura 3.27. Todas las fuerzas forman un ángulo de  $15^\circ$  con la vertical, excepto la de 2000 lb, que es vertical.

*Resp.*  $R = 6830 \text{ lb } (\downarrow)$ , distancia horizontal a la articulación: 16,8 ft

- 3.41.** En la Figura 3.28, una placa de acero está sometida a tres fuerzas. ¿Qué fuerza única haría el mismo efecto en la placa?

*Resp.*  $R = 18,7 \text{ N}$ ,  $\theta_x = 285^\circ$ , corta a la base a: 4,23 m a la izquierda de  $O$

- 3.42.** Hallar la resultante de las fuerzas que actúan en la palanca acodada de la Figura 3.29.

*Resp.*  $R = 247 \text{ lb}$ ,  $\theta_x = 259^\circ$ , corta a la horizontal a: -6,3 in de  $O$

- 3.43.** Hallar la resultante de las tres fuerzas que actúan en la polea de la Figura 3.30.

*Resp.*  $R = 742 \text{ N}$ ,  $\theta_x = 357^\circ$ ,  $R$  corta al diámetro vertical a: 2,27 m por encima de  $O$

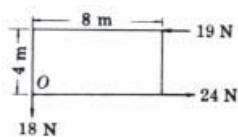


Figura 3.28

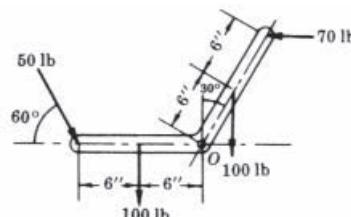


Figura 3.29

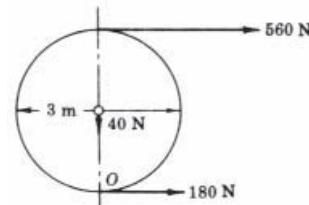


Figura 3.30

- 3.44.** Calcular la resultante de las seis cargas de la cercha de la Figura 3.31. Las cargas se dan en kips ( $1 \text{ kip} = 1000 \text{ lb}$ ). Tres cargas son verticales y las cargas del viento son perpendiculares a los lados. La cercha es simétrica.

*Resp.*  $R = 10,7 \text{ k}$ ,  $\theta_x = 281^\circ$ ,  $R$  corta a la base de la cercha a: +15,3 ft del soporte izquierdo

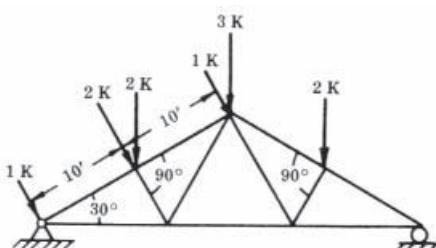


Figura 3.31

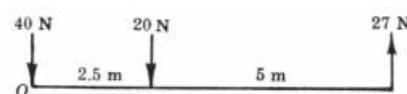


Figura 3.32

- 3.45.** La resultante de cuatro fuerzas verticales es un par antihorario de  $300 \text{ m}\cdot\text{N}$ . Tres de las cuatro fuerzas se representan en la Figura 3.32. Hallar la cuarta fuerza.

*Resp.* 33 N ( $\uparrow$ ) a 4,46 m a la derecha de  $O$

- 3.46.** En la Figura 3.33, calcular  $M$ ,  $P$  y  $Q$  para que la resultante del sistema de fuerzas coplanarias no concurrentes sea cero.

*Resp.*  $M = 293 \text{ lb}\cdot\text{ft}$ ,  $P = 76,7 \text{ lb}$ ,  $Q = 227 \text{ lb}$

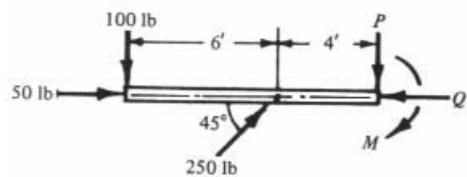


Figura 3.33

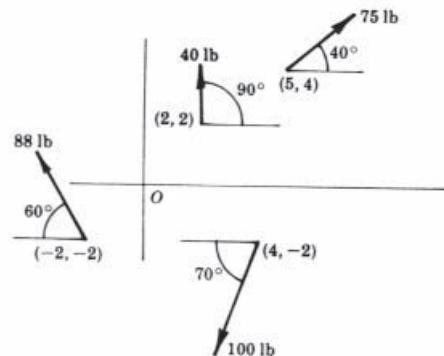


Figura 3.34

- 3.47.** Hallar la resultante de las fuerzas de la Figura 3.34. Las coordenadas están en ft.

*Resp.*  $73,4 \text{ lb}$ ,  $\theta_x = 107^\circ$ , corta a  $x$  a:  $8,38 \text{ ft}$  a la izquierda de  $O$

- 3.48** ¿Cuál es el máximo valor de  $M$  para el que la viga de la Figura 3.35 no se separe del soporte  $A$ ?

*Resp.*  $M = 13.500 \text{ lb-ft}$

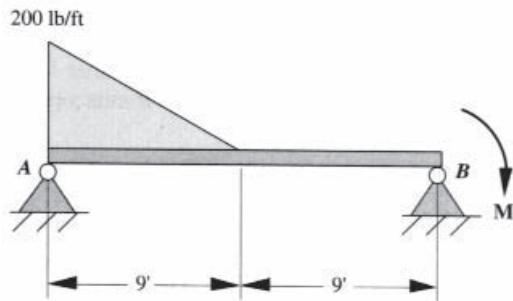


Figura 3.35

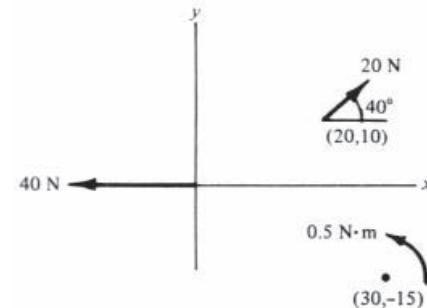


Figura 3.36

- 3.49.** Hallar la resultante del sistema de fuerzas de la Figura 3.36. Las coordenadas están en mm.

*Resp.*  $\mathbf{R} = 24,7\mathbf{i} + 12,9\mathbf{j} \text{ N}$ , corta a  $x$  a  $24,5 \text{ mm}$

- 3.50.** Se somete un ala de avión a una carga de prueba que varía parabólicamente desde cero a  $500 \text{ lb/ft}$  (Figura 3.37). Determinar  $k$ , la carga resultante y su ubicación.

*Resp.*  $R = 16.700 \text{ lb}$ ,  $\bar{x} = 30 \text{ ft}$ ,  $k = 70.7$

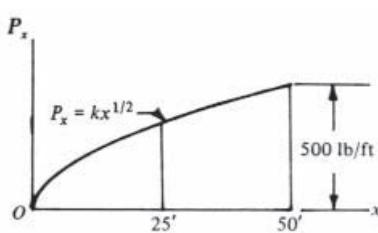


Figura 3.37

- 3.51.** Resolver el Problema 3.50 si la carga de prueba varía siguiendo el primer cuadrante de un ciclo sinusoidal desde cero a  $500 \text{ lb/ft}$  en  $50 \text{ ft}$ . *Sugerencia:*  $P_x = k \operatorname{sen}(\pi x/100)$ .

*Resp.*  $k = 500$ ,  $R = 15.900 \text{ lb}$ ,  $x = 31,9 \text{ ft}$

# 4

# RESULTANTES DE SISTEMAS DE FUERZAS NO COPLANARIAS

## 4.1 SISTEMAS DE FUERZAS NO COPLANARIAS

Los sistemas de fuerzas no coplanarias se clasifican como sigue. Un sistema concurrente está constituido por fuerzas que se cortan en el llamado punto de concurrencia. Un sistema paralelo está formado por fuerzas que se cortan en el infinito. El sistema más general es el constituido por fuerzas no concurrentes y no paralelas.

## 4.2 RESULTANTES DE UN SISTEMA DE FUERZAS NO COPLANARIAS

La resultante de un sistema de fuerzas no coplanarias es una fuerza  $\mathbf{R}$  y un par  $\mathbf{C}$ , siendo  $\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$  el vector suma de todas las fuerzas del sistema y  $\mathbf{C} = \Sigma$  el vector suma de los momentos (respecto al punto elegido como centro de momentos) de todas las fuerzas del sistema. El valor de  $\mathbf{R}$  es independiente del centro de momentos elegido, pero el momento  $\mathbf{C}$  sí depende del centro de momentos. Para todo sistema de fuerzas es posible hallar un centro de momentos para el cual el vector  $\mathbf{C}$  que representa al par sea paralelo a  $\mathbf{R}$ . Esta combinación especial se llama *torsor* o *hélice*.

Para hallar la resultante de los sistemas no coplanarios pueden aplicarse directamente las ecuaciones vectoriales citadas, o pueden emplearse las ecuaciones escalares siguientes.

## 4.3 SISTEMAS CONCURRENTES

La resultante  $\mathbf{R}$  puede ser (a) una fuerza única en el punto de concurrencia o (b) cero. Algebraicamente,

$$R = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2 + \left(\sum F_z\right)^2}$$

con cosenos directores

$$\cos \theta_x = \frac{\sum F_x}{R} \quad \cos \theta_y = \frac{\sum F_y}{R} \quad \cos \theta_z = \frac{\sum F_z}{R}$$

donde  $\sum F_x, \sum F_y, \sum F_z$  = sumas algebraicas de las componentes  $x, y$  y  $z$  de las fuerzas, respectivamente.  
 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  = ángulos que la resultante  $\mathbf{R}$  forma con los ejes  $x, y$  y  $z$  respectivamente.

## 4.4 SISTEMAS PARALELOS

La resultante puede ser (a) una fuerza única  $\mathbf{R}$  paralela al sistema, (b) un par o (c) cero. Supongamos que el eje  $y$  sea paralelo al sistema. En este caso, algebraicamente,

$$R = \sum F \quad R\bar{x} = \sum M_z \quad R\bar{z} = \sum M_x$$

donde

$\sum F$  = suma algebraica de las fuerzas

$\bar{x}$  = distancia del plano  $yz$  a la resultante

$\bar{z}$  = distancia del plano  $xy$  a la resultante

$\Sigma M_x, \Sigma M_z$  = sumas algebraicas de los momentos de las fuerzas respecto a los ejes  $x$  y  $z$  respectivamente.

Si  $\Sigma F = 0$ , el par resultante, de existir, se calcula con la expresión siguiente:

$$C = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_z)^2} \quad \text{con} \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{\sum M_z}{\sum M_x}$$

siendo  $\phi$  = ángulo que el vector del par forma con el eje  $x$ .

## 4.5 SISTEMAS NO CONCURRENTES Y NO PARALELOS

Como ya se ha indicado, la resultante es una fuerza y un par donde éste depende del centro de momentos elegido. En lo que sigue se supone que el origen del sistema de ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  se ha situado en el centro de momentos.

Se sustituye cada una de las fuerzas del sistema dado por el conjunto formado por: (1) una fuerza igual pero situada en el origen y (2) un par actuando en el plano determinado por la fuerza y el origen.

El módulo de la resultante  $\mathbf{R}$  del sistema concurrente en el origen es

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2}$$

con cosenos directores

$$\cos \theta_x = \frac{\sum F_x}{R} \quad \cos \theta_y = \frac{\sum F_y}{R} \quad \cos \theta_z = \frac{\sum F_z}{R}$$

donde las cantidades anteriores poseen el mismo significado que en la Sección 4.3.

El módulo del par resultante  $\mathbf{C}$  vale

$$C = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_y)^2 + (\sum M_z)^2}$$

con cosenos directores

$$\cos \phi_x = \frac{\sum M_x}{C} \quad \cos \phi_y = \frac{\sum M_y}{C} \quad \cos \phi_z = \frac{\sum M_z}{C}$$

donde  $\Sigma M_x, \Sigma M_y, \Sigma M_z$  = sumas algebraicas de los momentos de las fuerzas del sistema respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente.

$\phi_x, \phi_y, \phi_z$  = ángulos que el par  $\mathbf{C}$  forma con los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente.

### Problemas resueltos

En los problemas que siguen se aplican las ecuaciones escalares equilántes cuando resultan más cómodas que las ecuaciones vectoriales. Analógicamente, en los diagramas, las fuerzas se indican por su módulo cuando la dirección es evidente.

- 4.1. Cuatro fuerzas de módulos 20, 15, 30 y 50 lb, concurren en el origen y están dirigidas hacia los puntos de coordenadas  $(2, 1, 6)$ ,  $(4, -2, 5)$ ,  $(-3, -2, 1)$  y  $(5, 1, -2)$ , respectivamente. Hallar la resultante del sistema.

#### SOLUCIÓN

El denominador en cada caso es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias de las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  entre extremo y origen. Para la fuerza de 30 lb vale  $\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$ .

$F$	Coordenadas	$\cos \theta_x$	$\cos \theta_y$	$\cos \theta_z$	$F_x$	$F_y$	$F_z$
20	(2, 1, 6)	$\frac{+2}{\sqrt{41}} = +0,313$	$\frac{+1}{\sqrt{41}} = +0,156$	$\frac{+6}{\sqrt{41}} = +0,938$	+6,26	+3,12	+18,8
15	(4, -2, 5)	$\frac{+4}{\sqrt{45}} = +0,597$	$\frac{-2}{\sqrt{45}} = -0,298$	$\frac{+5}{\sqrt{45}} = +0,938$	+8,96	-4,47	+11,2
30	(-3, -2, 1)	$\frac{-3}{\sqrt{14}} = -0,803$	$\frac{-2}{\sqrt{14}} = -0,535$	$\frac{+1}{\sqrt{14}} = +0,268$	-24,1	-16,1	+8,04
50	(5, 1, -2)	$\frac{+5}{\sqrt{30}} = +0,912$	$\frac{+1}{\sqrt{30}} = +0,183$	$\frac{-2}{\sqrt{30}} = -0,365$	+45,6	+9,15	-18,3

$F_x$  es el producto de  $F$  por  $\cos \theta_x$ . Atención a los signos. Es aconsejable escribir el signo antes de escribir el valor.

$\Sigma F_x = +6,26 + 8,96 - 24,1 + 45,6 = +36,7$ . Análogamente  $\Sigma F_y = -8,30$  y  $\Sigma F_z = +19,7$ . Luego

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2} = 42,5 \text{ lb}$$

$$\cos \theta_x = \frac{\sum F_x}{R} = \frac{+36,7}{42,5} = +0,864 \quad \theta_x = 30,2^\circ$$

$$\cos \theta_y = \frac{\sum F_y}{R} = \frac{-8,30}{42,5} = -0,192 \quad \theta_y = 79,0^\circ$$

$$\cos \theta_z = \frac{\sum F_z}{R} = \frac{+19,7}{42,5} = +0,463 \quad \theta_z = 62,4^\circ$$

El valor negativo de  $\cos \theta_y$  significa que la componente de la resultante en la dirección  $y$  es negativa. Se ilustra en la Figura 4.1.

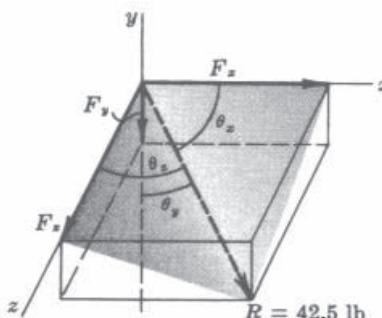


Figura 4.1

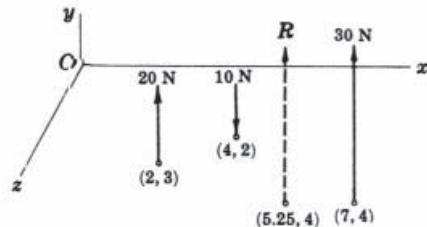


Figura 4.2

- 4.2. En la Figura 4.2 se representan tres fuerzas de +20 N, -10 N y +30 N. Se ha tomado el eje  $y$  paralelo a las rectas de acción de las fuerzas. Dichas rectas de acción cortan al plano  $xz$  en los puntos cuyas coordenadas  $x$  y  $z$ , medidas en metros, son respectivamente (2, 3), (4, 2) y (7, 4). Ubicar la resultante.

#### SOLUCIÓN

$$R = \sum F = +20 - 10 + 30 = +40 \text{ N}$$

Para determinar la coordenada  $x$  de la resultante (es decir, del punto donde la resultante corta al plano  $xz$ ), se proyecta el sistema en el plano  $xy$  tal como se muestra en la Figura 4.3. Se aplica la ecuación  $Rx = \sum M_z$ :

$$\begin{aligned}\sum M_z &= \sum M_o = +(20 \times 2) - (10 \times 4) + (30 \times 7) \\ &= +210 \text{ m} \cdot \text{N}\end{aligned}$$

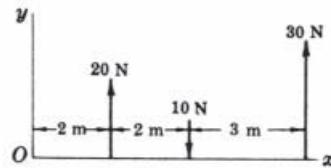


Figura 4.3

La coordenada  $\bar{x}$  debe ser tal que la fuerza de +40 N (ascendente) tenga un momento positivo o anti-horario. Por tanto,  $R$  debe estar situada a la derecha de  $O$ .

$$\bar{x} = +\frac{210}{40} = +5,25 \text{ m}$$

Se aconseja deducir el signo por inspección tal como se ha hecho en el parágrafo anterior y no combinando los signos del momento y de la fuerza.

En la Figura 4.4 se muestra la proyección del sistema en el plano  $yz$ .

$$\sum M_x = \sum M_o = -(30 \times 4) - (20 \times 3) + (10 \times 2) = -160 \text{ m} \cdot \text{N}$$

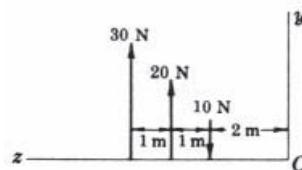


Figura 4.4

La coordenada  $\bar{z}$  debe ser tal que la fuerza de +40 N (ascendente) tenga un momento negativo, u horario, de 160 m·N. Por tanto,  $R$  debe estar situada a la izquierda de  $O$ . En tal caso la coordenada  $\bar{z}$  es positiva cuando está a la izquierda de  $O$  (véase en el diagrama en el espacio).

$$\bar{z} = +\frac{160}{40} = +4,00 \text{ m}$$

En resumen, la resultante es una fuerza de 40 N en sentido ascendente. Su recta de acción es paralela al eje  $y$  y corta al plano  $xz$  en el punto cuyas coordenadas  $x$  y  $z$  son (+5,25, +4,00) m. Se ilustra en la Figura 4.2.

### 4.3. Hallar la resultante del sistema de fuerzas de la Figura 4.5. Las coordenadas están en metros.

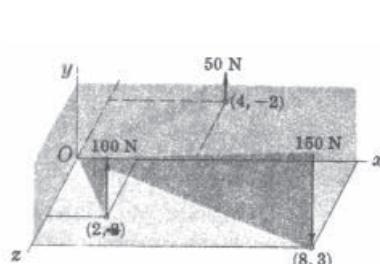


Figura 4.5

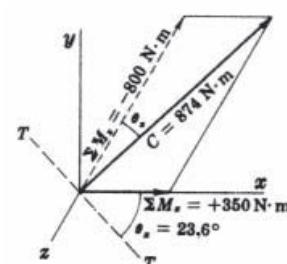


Figura 4.6

**SOLUCIÓN**

$$R = \sum F = +100 + 50 - 150 = 0$$

Lo que indica que la resultante no es una fuerza única. Puede, no obstante, ser un par.

Seguidamente se hallan  $\sum M_x$  y  $\sum M_z$  como en el problema anterior.

$$\begin{aligned}\sum M_x &= -(100 \times 2) + (50 \times 2) + (150 \times 3) = +350 \text{ m} \cdot \text{N} \\ \sum M_z &= +(100 \times 2) + (50 \times 4) - (150 \times 8) = -800 \text{ m} \cdot \text{N}\end{aligned}$$

Puesto que  $\sum F = 0$ ,  $\sum M_x$  y  $\sum M_z$  representan pares en los planos  $yz$  y  $xy$ , respectivamente. Se representan en la Figura 4.6.

Los dos vectores de los pares se combinan para dar un par resultante **C**, tal como se representa, de módulo

$$C = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_z)^2} = 874 \text{ m} \cdot \text{N}$$

El vector **C** está contenido en el plano  $xz$  y forma un ángulo  $\theta_z$  con el eje  $z$ , tal como se indica en la figura, siendo  $\theta_z = \theta_x$ .

De acuerdo con el convenio para los pares, el par resultante actúa en un plano perpendicular al vector **C** que lo representa. En la figura dicho plano es el plano que contiene al eje  $y$  y corta al plano  $xz$  según la traza *TT*.

Dicha traza forma con el eje  $x$  un ángulo

$$\theta_x = \operatorname{artg} \frac{\sum M_x}{\sum M_z} = \operatorname{artg} \frac{350}{800} = 23,6^\circ$$

- 4.4.** Hallar la resultante del sistema de fuerzas no concurrentes y no paralelas de la Figura 4.7.

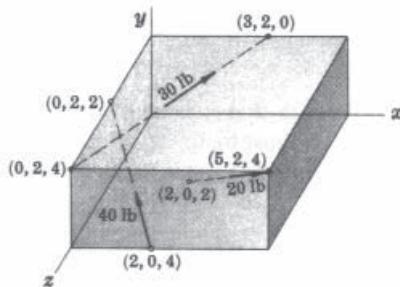


Figura 4.7

**SOLUCIÓN**

Para resolver este problema reemplazamos cada fuerza por otra igual que pase por el origen y un par. Las fuerzas en el origen se descomponen en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , empleando los cosenos directores. Así, los cosenos directores de la fuerza de 40 lb se hallan por diferencia de coordenadas de los dos puntos dados de su recta de acción.

La diferencia  $x$  es  $0 - 2 = -2$ ; la diferencia  $y$  es  $2 - 0 = 2$ ; la diferencia  $z$  es  $2 - 4 = -2$ . El coseno del ángulo que la fuerza de 40 lb forma con el eje de las  $x$  es

$$\cos \theta_x = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + (+2)^2 + (-2)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{12}}$$

Análogamente,  $\cos \theta_y = +2/\sqrt{12}$  y  $\cos \theta_z = -2/\sqrt{12}$ .

Es cómodo tabular los resultados

$F$	$\cos \theta_x$	$\cos \theta_y$	$\cos \theta_z$	$F_x$	$F_y$	$F_z$
40	$\frac{-2}{\sqrt{12}}$	$\frac{+2}{\sqrt{12}}$	$\frac{-2}{\sqrt{12}}$	-23,1	+23,1	-23,1
30	$\frac{+3}{\sqrt{25}}$	0	$\frac{-4}{\sqrt{25}}$	+18,0	0	-24,0
20	$\frac{+3}{\sqrt{17}}$	$\frac{+2}{\sqrt{17}}$	$\frac{+2}{\sqrt{17}}$	+14,6	+9,71	+9,71

$$\sum F_x = +9,5 \quad \sum F_y = +32,8 \quad \sum F_z = -37,4$$

Con la tabla precedente se calcula la resultante de las fuerzas trasladadas al origen, que coincide con la resultante del sistema.

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2} = \sqrt{(+9,5)^2 + (+32,8)^2 + (-37,4)^2} = 50,8 \text{ lb}$$

$$\cos \theta_x = \frac{\sum F_x}{R} = \frac{+9,5}{50,8} = +0,187 \quad \cos \theta_y = \frac{\sum F_y}{R} = +0,645 \quad \cos \theta_z = \frac{\sum F_z}{R} = -0,737$$

La resultante de las fuerzas trasladadas al origen se representa en la Figura 4.8.

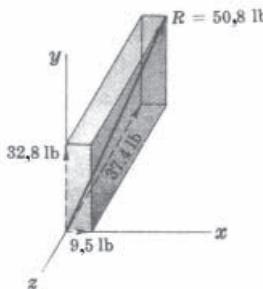


Figura 4.8

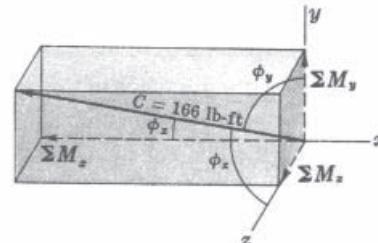


Figura 4.9

Falta determinar los pares asociados a las fuerzas trasladadas. Para ello se calculan los momentos de cada una de las tres fuerzas respecto de los tres ejes para hallar el módulo y dirección de estos pares. Consideremos, observando la Figura 4.7, la fuerza de 40 lb que actúa en el punto (2, 0, 4). Su momento respecto al eje  $x$  es la suma algebraica de los momentos de sus tres componentes respecto al eje  $x$ . Sin embargo, la única componente que posee momento respecto al eje  $x$  es la componente  $y$ . El momento de la fuerza de 40 lb respecto al eje  $x$  es, por tanto,  $-(23,1 \times 4) = -92,4 \text{ lb}\cdot\text{ft}$ . Para hallar el momento respecto al eje  $y$  (o sea,  $M_y$ ) se consideran los momentos de las componentes  $x$  y  $z$ . El momento de la componente  $x$  respecto al eje  $y$  es  $-(23,1 \times 4) = -92,4 \text{ lb}\cdot\text{ft}$ . El momento de la componente  $z$  respecto al eje  $y$  es  $+(23,1 \times 2) = +46,2 \text{ lb}\cdot\text{ft}$ . Por tanto,  $M_y$  vale  $-92,4 + 46,2 = -46,2 \text{ lb}\cdot\text{ft}$ . El momento de la fuerza de 40 lb respecto al eje  $z$  es el mismo que el de su componente  $y$  respecto al eje  $z$ . Por tanto,  $M_z = +(23,1 \times 2) = +46,2 \text{ lb}\cdot\text{ft}$ .

Los cálculos referente a los momentos de las tres fuerzas pueden tabularse como sigue

$F$	$F_x$	$F_y$	$F_z$	$M_x$	$M_y$	$M_z$
40	-23,1	+23,1	-23,1	-92,4	-46,2	+46,2
30	+18,0	0	-24,0	-48,0	+72,0	-36,0
20	+14,6	+9,71	+9,71	-19,4	+9,8	+19,4

$$\sum M_x = -159,8 \quad \sum M_y = +35,6 \quad \sum M_z = +29,6$$

El módulo del par resultante vale

$$C = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_y)^2 + (\sum M_z)^2} = \sqrt{(-159,8)^2 + (+35,6)^2 + (+29,6)^2} = 166 \text{ lb}\cdot\text{ft}$$

y sus cosenos directores son

$$\cos \phi_x = \frac{\sum M_x}{C} = \frac{-159,8}{166} = -0,963 \quad \cos \phi_y = \frac{\sum M_y}{C} = +0,214 \quad \cos \phi_z = \frac{\sum M_z}{C} = +0,178$$

El vector **C** se representa en la Figura 4.9. El par resultante actúa en un plano perpendicular al vector **C**. La resultante del sistema es el conjunto de la fuerza **R** y el par **C**.

- 4.5.** Hallar la resultante general fuerza-par del sistema de fuerzas no coplanarias y no concurrentes formado por una fuerza de 150 lb en la recta que va de (2, 0, 0) a (0, 0, 1), una fuerza de 90 lb en la recta que va de (0, -2, -1) a (-1, 0, -1) y un par de 160 lb·ft contenido en el plano xy. Las distancias están en pies. Tomar los momentos respecto al origen.

#### SOLUCIÓN

Expresamos las fuerzas en función de **i**, **j**, **k** y calculamos sus momentos respecto al origen.

$$\mathbf{F}_1 = 150 \frac{(0-2)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (1-0)\mathbf{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (0)^2 + (1)^2}} = -134\mathbf{i} + 67,1\mathbf{k} \text{ lb}$$

$$\mathbf{F}_2 = 90 \frac{(-1)\mathbf{i} + (2)\mathbf{j} + (0)\mathbf{k}}{\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (0)^2}} = -40,25\mathbf{i} + 80,5\mathbf{j} \text{ lb}$$

De donde  $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -174\mathbf{i} + 80,5\mathbf{j} + 67,1 \text{ lb}$   
Seguidamente calculamos  $\mathbf{C}_1$  y  $\mathbf{C}_2$

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ -134 & 0 & 67,1 \end{vmatrix} = -134\mathbf{j} \text{ lb}\cdot\text{ft}$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -2 & -1 \\ -40,25 & 80,5 & 0 \end{vmatrix} = 80,5\mathbf{i} + 40,25\mathbf{j} - 80,5\mathbf{k} \text{ lb}\cdot\text{ft}$$

El par dado en el plano xy puede expresarse como  $\mathbf{C}_3 = 160 \text{ lb}\cdot\text{ft}$ . El par resultante total es

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 = 80,5\mathbf{i} - 93,8\mathbf{j} + 79,5 \text{ lb}\cdot\text{ft}$$

#### Problemas propuestos

allar las resultantes de los sistemas de fuerzas concurrentes de los Problemas 4.6 a 4.9. Las fuerzas están en libras y las coordenadas de los puntos de las rectas de acción están en pies. En todos los problemas las fuerzas concurren en el origen. (Las respuestas negativas corresponden a componentes negativas).

- 4.6.**  $F \quad 100 \quad 200 \quad 500 \quad 300$   
Coordenadas  $(1, 1, 1) \quad (2, 3, 1) \quad (-2, -3, 4) \quad (-1, 1, -2)$   
Resp.  $R = 286 \text{ lb}, \theta_x = -60^\circ, \theta_y = 78^\circ, \theta_z = 33^\circ$

- 4.7.**  $F \quad 5 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 8$   
Coordenadas  $(2, 2, 3) \quad (5, 1, -2) \quad (-3, -4, 5) \quad (2, 1, -4) \quad (5, 2, 3)$   
Resp.  $R = 13,3 \text{ lb}, \theta_x = 33^\circ, \theta_y = 70^\circ, \theta_z = 66^\circ$

**4.8.**  $F \quad 1000 \quad 1500 \quad 1800$   
 Coordenadas  $(-5, 2, 1) \quad (6, -3, -2) \quad (-2, -1, -1)$   
*Resp.*  $R = 1780 \text{ lb}, \theta_x = -52^\circ, \theta_y = -55^\circ, \theta_z = -57^\circ$

**4.9.**  $F \quad 40 \quad 80 \quad 30 \quad 20$   
 Coordenadas  $(6, 5, 4) \quad (1, -3, -2) \quad (8, 10, -7) \quad (-10, -9, -10)$   
*Resp.*  $R = 80,1 \text{ lb}, \theta_x = 49^\circ, \theta_y = -67^\circ, \theta_z = -51^\circ$

- 4.10.** Hallar la resultante de las tres fuerzas de la Figura 4.10. Obsérvese que las rectas de acción están contenidas en los tres planos coordenados y pasan por el origen.  
*Resp.*  $R = 19,7 \text{ lb}, \theta_x = 43^\circ, \theta_y = 56^\circ, \theta_z = 66^\circ$

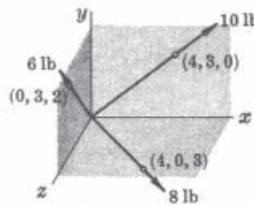


Figura 4.10

En los Problemas 4.11 a 4.14, hallar la resultante y las coordenadas del punto de intersección de su recta de acción con el plano  $xz$ . Las fuerzas están en newtons y son paralelas al eje  $y$ . Las coordenadas de los puntos de intersección de las rectas de acción con el plano  $xz$  están en metros.

**4.11.**  $F \quad 100 \quad 150 \quad 200 \quad 300$   
 $(x, z) \quad (3, -2) \quad (1, 6) \quad (2, -3) \quad (-1, -1)$   
*Resp.*  $R = 750 \text{ N}, \bar{x} = 0,733 \text{ m}, \bar{z} = -0,267 \text{ m}$

**4.12.**  $F \quad -25 \quad 18 \quad -12 \quad -30 \quad 36$   
 $(x, z) \quad (1, 2) \quad (2, -1) \quad (0, 0) \quad (-6, -2) \quad (3, 2)$   
*Resp.*  $R = -13 \text{ N}, \bar{x} = -23,0 \text{ m}, \bar{z} = -4,92 \text{ m}$

**4.13.**  $F \quad 3 \quad -4 \quad 2 \quad -5$   
 $(x, z) \quad (2, 5) \quad (1, -5) \quad (3, 3) \quad (-4, -4)$   
*Resp.*  $R = -4 \text{ N}, \bar{x} = -7,00 \text{ m}, \bar{z} = -15,3 \text{ m}$

**4.14.**  $F \quad +10 \quad +20 \quad -30$   
 $(x, z) \quad (1, 1) \quad (2, -5) \quad (3, -4)$   
*Resp.*  $C_x = -30 \text{ m}\cdot\text{N}, C_z = -40 \text{ m}\cdot\text{N}$

- 4.15.** Cinco pesos de 20, 15, 12, 6 y 10 lb descansan en una mesa en los puntos de coordenadas  $(0, 5; 15^\circ)$ ,  $(1, 5; 90^\circ)$ ,  $(0, 8; 185^\circ)$ ,  $(0, 7; 262^\circ)$  y  $(1, 2; 340^\circ)$ , respectivamente. En los paréntesis, el primer número representa la distancia radial al centro de la mesa, medida en pies y el ángulo está medido en sentido antihorario desde un radio de referencia mirando la mesa desde arriba. Calcular el peso resultante.

*Resp.*  $R = 63 \text{ lb } (\downarrow), r = 0,3, \theta = 56^\circ$

- 4.16.** Hallar la resultante del sistema de la Figura 4.11. Las fuerzas están en libras y las distancias en pies.  
*Resp.*  $R = 40,3 \text{ lb}, \cos \theta_x = +0,594, \cos \theta_y = +0,673, \cos \theta_z = -0,428$  en el origen,  
 $C = 251 \text{ lb}\cdot\text{ft}, \cos \phi_x = -0,660, \cos \phi_y = +0,633, \cos \phi_z = +0,396$

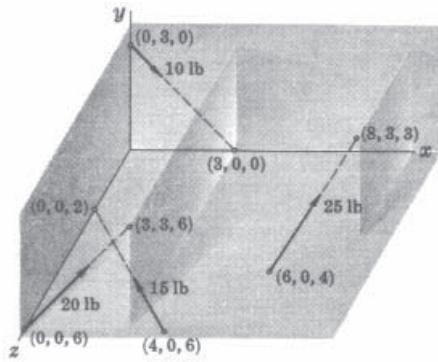


Figura 4.11

- 4.17.** En el Problema 4.4, hallar el par  $C$  por suma de los momentos de las tres fuerzas respecto al origen, calculados mediante productos vectoriales. Téngase presente que para calcular el momento de una fuerza respecto a un centro de momentos, el vector de posición  $\mathbf{r}$  debe situarse en el centro de momentos con el extremo en un punto *cualquiera* de la recta de acción de la fuerza. Se recomienda comprobarlo empleando más de un punto de la recta de acción de una de las fuerzas.
- 4.18.** Hallar la resultante de las tres fuerzas de la Figura 4.12. Las coordenadas están en metros. Tomar el origen como origen de momentos.

*Resp.*  $\mathbf{R} = 3530\mathbf{i} + 267\mathbf{j} + 1200 \text{ N}$  en el origen y  $\mathbf{C} = -3200\mathbf{i} + 4810\mathbf{j} - 534 \text{ m}\cdot\text{N}$

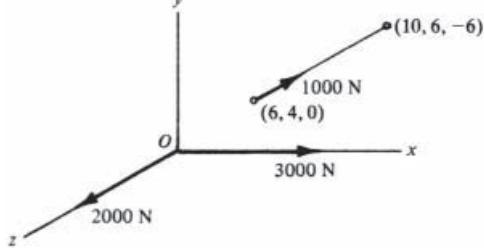


Figura 4.12

- 4.19.** Sustituir las tres fuerzas de la Figura 4.13 por su resultante  $\mathbf{R}$  en  $O$  y un par.
- Resp.*  $\mathbf{R} = 200\mathbf{i} - 400\mathbf{j} - 500 \text{ N}$   
 o bien  $R = 671 \text{ N}$  con  $\cos \theta_x = 0,298$ ,  $\cos \theta_y = -0,597$ ,  $\cos \theta_z = -0,745$   
 $\mathbf{C} = 1500\mathbf{j} - 2400 \text{ m}\cdot\text{N}$   
 o bien  $C = 2830 \text{ m}\cdot\text{N}$  con  $\cos \phi_x = 0$ ,  $\cos \phi_y = 0,530$ ,  $\cos \phi_z = -0,848$

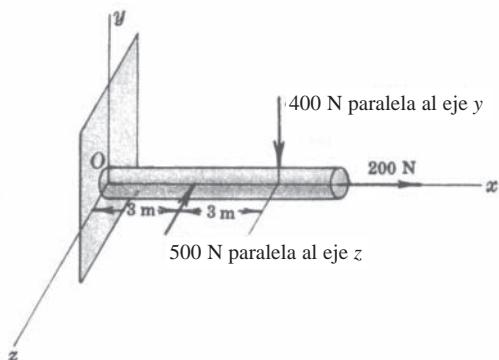


Figura 4.13

- 4.20.** Dadas las dos fuerzas  $\mathbf{F}_1 = 20\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 60$  lb, aplicada en  $(0, -1, +1)$  y  $\mathbf{F}_2 = 30\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 40$  lb, aplicada en  $(-1, -1, -1)$ , y el par de momento  $-80$  lb·ft en el plano  $xy$ , hallar el sistema resultante fuerza-par. Las coordenadas están en pies.

*Resp.*  $\mathbf{R} = 50\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 20$  lb,  $\mathbf{C} = 10\mathbf{i} - 50\mathbf{j} - 50$  lb·ft

- 4.21.** Sustituir las tres fuerzas de la Figura 4.14 por una resultante en  $A$  y un par.

*Resp.*  $\mathbf{R} = 80\mathbf{i} - 100\mathbf{j} - 50$  lb,  $\mathbf{C} = 100\mathbf{i} + 100\mathbf{j} - 200$  lb·ft

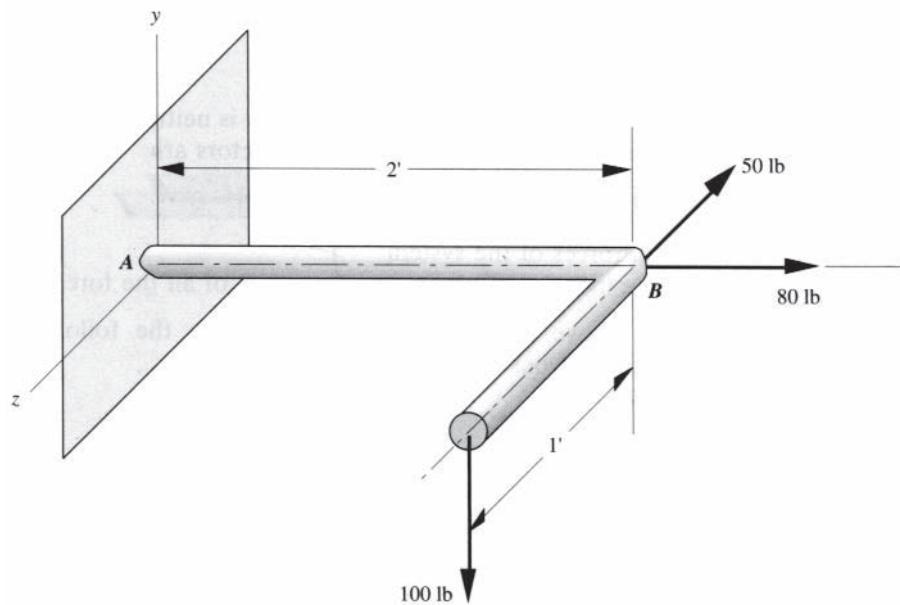


Figura 4.14

- 4.22.** Repetir el Problema 4.21 con la fuerza resultante aplicada en  $B$  y no en  $A$ .

*Resp.*  $\mathbf{R} = 80\mathbf{i} - 100\mathbf{j} - 50$  lb,  $\mathbf{C} = 100\mathbf{i}$  lb·ft

# EQUILIBRIO DE SISTEMAS DE FUERZAS COPLANARIAS

5

## 5.1 EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS COPLANARIAS

Un sistema de fuerzas coplanarias está en equilibrio cuando son nulos la fuerza  $\mathbf{R}$  y el par  $\mathbf{C}$ , o sea, si se cumplen a la vez las condiciones siguientes

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \sum \mathbf{M} = 0$$

donde  $\sum \mathbf{F}$  = vector suma de todas las fuerzas

$\sum \mathbf{M}$  = vector suma de los momentos (respecto a un punto cualquiera) de todas las fuerzas.

Las dos ecuaciones vectoriales precedentes pueden aplicarse directamente, o pueden emplearse las siguientes ecuaciones escalares equivalentes para los tres tipos de sistemas de fuerzas coplanarias.

## 5.2 CUERPOS DE DOS Y TRES FUERZAS

Para que un cuerpo sometido a dos fuerzas esté en equilibrio, dichas fuerzas deben ser colineales, de igual módulo y de sentido contrario. Por tanto, la fuerza que un cuerpo de dos fuerzas ejerce sobre otro cuerpo en contacto con él ha de tener la dirección de la recta definida por los puntos de aplicación de las dos fuerzas.

Para que un cuerpo sometido a tres fuerzas esté en equilibrio, dichas fuerzas deben ser coplanarias y concurrentes, o bien coplanarias y paralelas.

## 5.3 SISTEMAS CONCURRENTES

Cualquiera de los siguientes sistemas de ecuaciones asegura el equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes; o sea, que la resultante sea cero. Se supone que el punto de concurrencia es el origen.

Sistema	Ecuaciones de equilibrio	Comentarios
A	(1) $\sum F_x = 0$ (2) $\sum F_y = 0$	$\sum F_x$ = suma algebraica de las componentes $x$ de las fuerzas. $\sum F_y$ = suma algebraica de las componentes $y$ de las fuerzas.
B	(1) $\sum F_x = 0$ (2) $\sum M_A = 0$	$\sum M_A$ = suma algebraica de los momentos de las fuerzas respecto al punto $A$ , que puede estar situado en cualquier lugar del plano, excepto sobre el eje $y$ .
C	(1) $\sum M_A = 0$ (2) $\sum M_B = 0$	$\sum M_A$ y $\sum M_B$ = sumas algebraicas de los momentos de las fuerzas respecto a $A$ y a $B$ , que pueden estar situados en cualquier lugar del plano, con la condición de que $A$ , $B$ y el origen no estén alineados.

Si un cuerpo en equilibrio está únicamente sometido a tres fuerzas coplanarias no paralelas, éstas deben ser concurrentes.

#### 5.4 SISTEMAS PARALELOS

Cualquiera de los siguientes sistemas de ecuaciones asegura el equilibrio de un sistema paralelo; o sea, que la resultante no es ni una fuerza ni un par.

Sistema	Ecuaciones	Comentarios
A	(1) $\sum F = 0$	$\sum F$ = suma algebraica de las fuerzas paralelas a las rectas de acción de las fuerzas.
	(2) $\sum M_A = 0$	$\sum M_A$ = suma algebraica de los momentos de las fuerzas respecto a un punto cualquier $A$ del plano.
B	(1) $\sum M_A = 0$ (2) $\sum M_B = 0$	$\sum M_A$ y $\sum M_B$ = sumas algebraicas de los momentos de las fuerzas respecto a dos puntos $A$ y $B$ del plano tales que la recta determinada por ellos no sea paralelo a las fuerzas del sistema.

#### 5.5 SISTEMAS NO CONCURRENTES Y NO PARALELOS

Cualquiera de los siguientes sistemas de ecuaciones asegura el equilibrio de un sistema no concurrente y no paralelo; o sea, no equivalente ni a una fuerza ni a un par.

Sistema	Ecuaciones	Comentarios
A	(1) $\sum F_x = 0$	$\sum F_x$ = suma algebraica de las componentes $x$ de las fuerzas.
	(2) $\sum F_y = 0$	$\sum F_y$ = suma algebraica de las componentes $y$ de las fuerzas.
	(3) $\sum M_A = 0$	$\sum M_A$ = suma algebraica de los momentos de las fuerzas respecto a un punto cualquier $A$ del plano.
B	(1) $\sum F_x = 0$	$\sum F_x$ = suma algebraica de las componentes $x$ de las fuerzas.
	(2) $\sum M_A = 0$	$\sum M_A$ y $\sum M_B$ = sumas algebraicas de los momentos de las fuerzas respecto a dos puntos del plano $A$ y $B$ tales que la recta determinada por ellos no sea perpendicular al eje $x$ .
	(3) $\sum M_B = 0$	
C	(1) $\sum M_A = 0$	$\sum M_A$ , $\sum M_B$ y $\sum M_C$ = sumas algebraicas de los momentos de las fuerzas respecto a tres puntos del plano $A$ , $B$ y $C$ , no colineales.
	(2) $\sum M_B = 0$	
	(3) $\sum M_C = 0$	

#### 5.6 OBSERVACIONES - DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

Las siguientes observaciones pueden ser de ayuda para resolver problemas:

1. Diagramas de cuerpo libre. El sistema de fuerzas que se analiza mantiene en equilibrio un cuerpo o sistema de cuerpos. Un diagrama de cuerpo libre es un esquema del cuerpo (cuerpos) en el que se indican

todas las fuerzas externas que actúan en el cuerpo (cuerpos). Incluye (a) todas las fuerzas activas, tales como cargas y pesos, y (b) todas las fuerzas de reacción. Estas últimas son las ejercidas por el suelo, las paredes, las articulaciones, los rodillos, los cables u otros dispositivos. En un rodillo o en un soporte aguzado la reacción es perpendicular al elemento. En una articulación, la reacción puede tener cualquier dirección y se representa por una fuerza en una dirección desconocida, o mediante las componentes de la reacción de la articulación, por ejemplo,  $A_x$  y  $A_y$ , en un plano.

2. Adviértase, además, que si la dirección de la reacción se conoce, se elige un sentido sobre su recta de acción. Si se obtiene un resultado de signo positivo, es que se eligió el sentido correcto. Si el resultado es negativo, es que el sentido correcto es el opuesto al elegido.
3. Puede que no sea necesario resolver un sistema de tres ecuaciones para obtener una solución. Si se elige convenientemente el centro de momentos, por ejemplo, podría ocurrir que se obtuviera una ecuación con una sola incógnita.
4. Los ejes  $x$  e  $y$  en las ecuaciones anteriores no han de ser necesariamente horizontal y vertical, respectivamente. En realidad, si un sistema está en equilibrio, la suma algebraica de las componentes escalares del sistema en cualquier dirección debe ser cero.
5. En los diagramas, una fuerza se identifica por su módulo, si su dirección y sentido son evidentes.
6. En un resorte, la fuerza es igual al producto de la constante recuperadora por la deformación respecto a la longitud libre o longitud no deformada. En el sistema tradicional de EE. UU,  $k$  se expresa en lb/in; así pues,  $F = [k(\text{lb/in})][x(\text{in})] = kx(\text{lb})$ . En unidades SI,  $k$  se expresa en N/m o en N/mm; así pues,  $F = [k(\text{N/m})][x(\text{m})] = kx(\text{N})$ .

### Problemas resueltos

- 5.1.** En la Figura 5.1(a) la lámpara de 25 lb está sostenida por dos cables  $AB$  y  $AC$ . Hallar la tensión en cada cable.

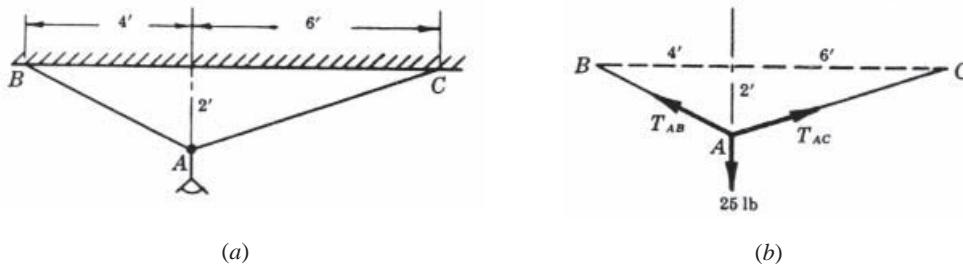


Figura 5.1

#### SOLUCIÓN

La Figura 5.1(b) muestra el diagrama de cuerpo libre del nudo en  $A$  con la fuerza de 25 lb (peso de la lámpara) actuando en dirección vertical y sentido descendente y las tensiones en las direcciones  $AC$  y  $AB$ .

Empleando el sistema de ecuaciones A para un *sistema concurrente*, se obtiene

$$\sum F_x = 0 = +T_{AC} \frac{6}{\sqrt{40}} - T_{AB} \frac{4}{\sqrt{20}} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = +T_{AC} \frac{2}{\sqrt{40}} + T_{AB} \frac{2}{\sqrt{20}} - 25 \quad (2)$$

Se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas. El problema es, por consiguiente, estáticamente determinado; o sea, puede resolverse.

De la ecuación (1),  $T_{AC} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$   $T_{AB} = 0,942T_{AB}$ . Sustituyendo en (2),

$$0,942T_{AB} \frac{2}{\sqrt{40}} + T_{AB} \frac{2}{\sqrt{20}} - 25 = 0$$

de donde  $T_{AB} = 33,6$  lb y  $T_{AC} = 0,942T_{AB} = 31,7$  lb.

La solución podría obtenerse utilizando los sistemas B o C para *sistemas concurrentes*. Eligiendo el centro de momentos sobre una de las fuerzas desconocidas se obtiene una ecuación con una sola incógnita. Tomando, por ejemplo, el punto B como centro de momentos resulta

$$\sum M_B = 0 = -25 \times 4 + T_{AC} \times \frac{2}{\sqrt{40}} \times 4 + T_{AC} \times \frac{6}{\sqrt{40}} \times 2, \quad \text{o sea,} \quad T_{AC} = 31,7 \text{ lb}$$

El momento de la fuerza  $T_{AC}$  es igual al momento de sus componentes respecto al punto B. Otro centro de momentos, C, por ejemplo, conduce a una ecuación con  $T_{AB}$  como única incógnita.

- 5.2.** Calcular la fuerza horizontal  $P$  necesaria para que el rodillo de 100 lb de peso de la Figura 5.2(a) supere el obstáculo de 2 in. El rodillo es liso.

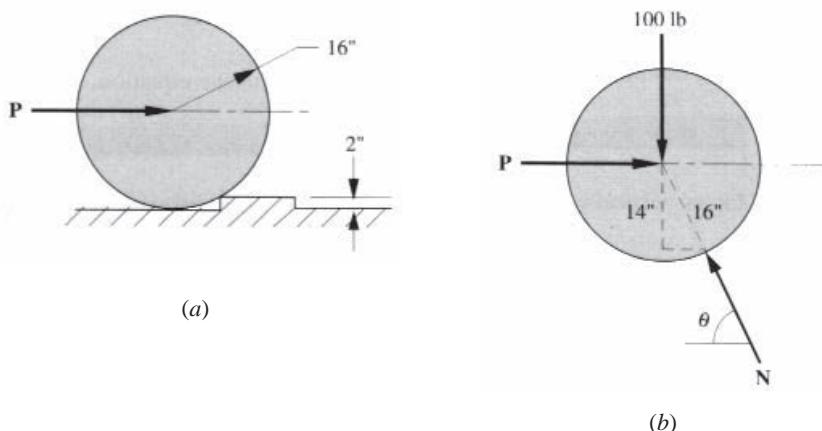


Figura 5.2

#### SOLUCIÓN

En la Figura 5.2(b) se muestra el diagrama de cuerpo libre. En el instante en que el rodillo empieza a superar el obstáculo cesa el contacto con el suelo y la reacción  $N$  se concentra en el vértice del obstáculo y es normal a la superficie del rodillo. El ángulo  $\theta = \arcsen(14/16) = 61^\circ$ . Las ecuaciones del equilibrio son

$$\sum F_v = N \sen 61^\circ - 100 = 0 \quad N = 114,3 \text{ lb}$$

$$\sum F_h = P - N \cos 61^\circ = 0 \quad P = 55,4 \text{ lb}$$

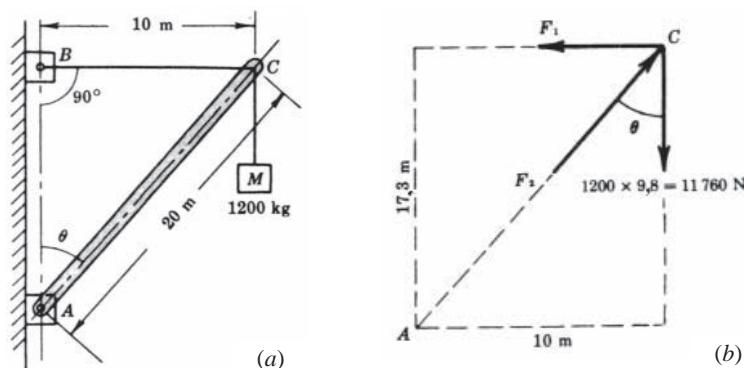


Figura 5.3

- 5.3.** Una pluma de 20 m de largo sostiene una carga de 1200 kg, tal como se muestra en la Figura 5.3(a). El cable horizontal  $BC$  mide 10 m. Calcular las fuerzas en el cable y en la pluma.

**SOLUCIÓN**

Tanto el cable como la pluma son cuerpos de dos fuerzas. Así pues, la fuerza  $F_1$  en el cable tiene la dirección del cable y la fuerza  $F_2$  en la pluma tiene la dirección de la pluma. Se han dibujado las puntas de flecha tal como se indica en la Figura 5.3(b), para que las fuerzas sean de tensión en el cable y de compresión en la pluma.

$$AB = \sqrt{(20)^2 - (10)^2} = 17,3 \text{ m} \quad \cos \theta = \frac{17,3}{20} = 0,866$$

Tomando momentos respecto a  $A$ , únicamente interviene una incógnita en la ecuación.

$$\sum M_A = 0 = +(F_1 \times AB) - (11760 \times 10) \quad 0 = F_1(17,3) - 117600 \quad F_1 = 6800 \text{ N}$$

Sumando las componentes verticales de las fuerzas,

$$\sum F_v = 0 = -11760 + F_2 \cos \theta, 0 = -11760 + 0,866F_2, F_2 = 13600 \text{ N}$$

- 5.4.** Hallar las fuerza en los miembros  $AB$  y  $AC$  de la Figura 5.4(a) sometidos a las dos fuerzas de 1000 lb cada una, una horizontal y la otra vertical.  $AB$  y  $BC$  forman con la horizontal los ángulos  $\theta$  y  $\beta$ , respectivamente.

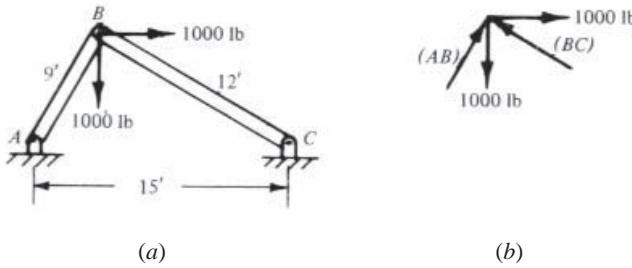


Figura 5.4

**SOLUCIÓN**

En el diagrama de cuerpo libre de la Figura 5.4(b), se supone que  $(AB)$  y  $(BC)$  son fuerzas de compresión. Las ecuaciones de equilibrio son

$$\sum F_x = 0 = (AB) \cos \theta - (BC) \cos \beta + 1000$$

$$\sum F_y = 0 = (AB) \sin \theta + (BC) \sin \beta - 1000$$

$$\cos \theta = 9/15 = \frac{3}{5} \quad \cos \beta = 12/15 = \frac{4}{5} \quad \sin \theta = \frac{4}{5} \quad \sin \beta = \frac{3}{5}$$

Sustituyendo queda

$$\frac{3}{5}(AB) - \frac{4}{5}(BC) + 1000 = 0$$

$$\frac{4}{5}(AB) + \frac{3}{5}(BC) - 1000 = 0$$

O sea,

$$(AB) = 200 \text{ lb compresión}$$

$$(BC) = 1400 \text{ lb compresión}$$

- 5.5.** En la Figura 5.5(a) la barra  $AB$  de 10 lb/ft de peso está sostenida por un cable  $AC$  y articulada en  $B$ . Calcular la reacción en  $B$  y la tensión en el cable.

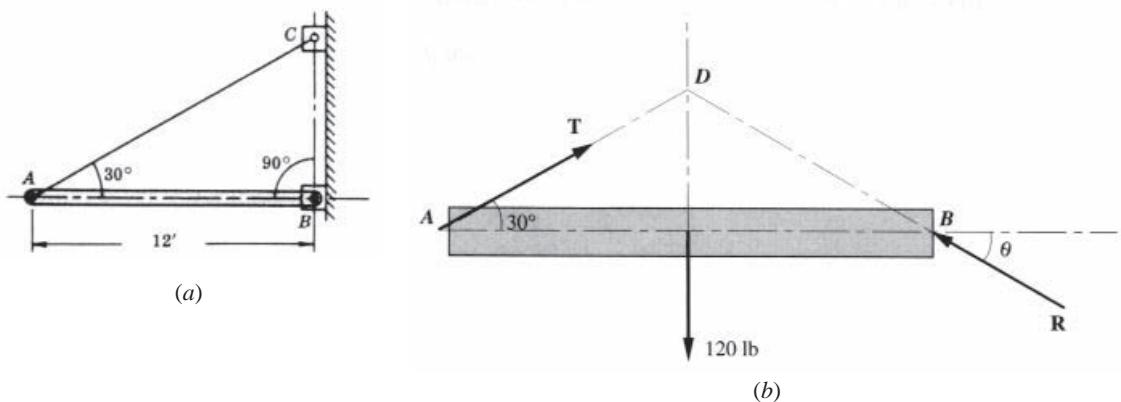


Figura 5.5

**SOLUCIÓN**

La tensión en el cable tiene la dirección del cable (cuerpo de dos fuerzas). La pluma no es un cuerpo de dos fuerzas, puesto que hay tres fuerzas aplicadas en tres puntos. En el diagrama de cuerpo libre de la Figura 5.5(b) la fuerza en *B* es de módulo y dirección desconocidos. Al ser tres las fuerzas no paralelas que actúan en la pluma, éstas deben ser concurrentes en un punto, el punto *D* en este caso. Por trigonometría,  $\theta = 30^\circ$ . Las ecuaciones de equilibrio son

$$\begin{aligned} F_x &= T \cos 30^\circ - R \cos 30^\circ = 0 \\ F_y &= T \sin 30^\circ + R \sin 30^\circ - 120 = 0 \end{aligned}$$

De donde  $T = R = 120$  lb.

- 5.6.** *A* y *B*, de pesos respectivos 40 lb y 30 lb, están en reposo sobre los dos planos lisos de la Figura 5.6. Están conectados por una cuerda sin peso que pasa por una polea sin rozamiento. Hallar el ángulo  $\theta$  y la tensión en la cuerda para que exista equilibrio.

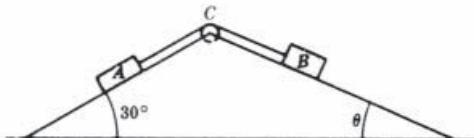


Figura 5.6

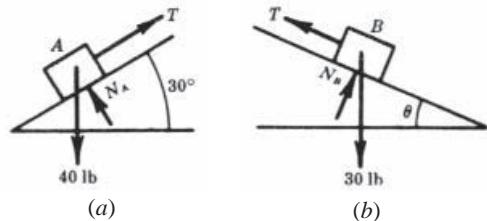


Figura 5.7

**SOLUCIÓN**

En las Figuras 5.7(a) y (b) se representan los diagramas de cuerpo libre.

En la Figura 5.7(b) hay tres incógnitas:  $T$ ,  $N_B$  y  $\theta$ . Como únicamente disponemos de dos ecuaciones, parece que el sistema sea estáticamente indeterminado. Pero  $T$  puede calcularse utilizando la Figura 5.7(a) donde hay sólo dos incógnitas, con lo que se deshace la indeterminación.

La suma de las fuerzas paralelas al plano a  $30^\circ$  conduce a la ecuación de equilibrio

$$\sum F_{\parallel} = 0 = +T - 40 \sin 30^\circ \quad \text{o sea,} \quad T = 20 \text{ lb}$$

Volviendo a la Figura 5.7(b) y sumando las fuerzas paralelas al plano, se tiene

$$\sum F_{\parallel} = 0 = +T - 30 \sin \theta \quad \sin \theta = \frac{T}{30} = \frac{2}{3} \quad \theta = 41,8^\circ$$

- 5.7.** Una viga esbelta uniforme de masa  $M$  tiene el centro de gravedad en el punto indicado en la Figura 5.8(a). La arista en la que se apoya es aguzada, por lo cual, la reacción  $N$  es perpendicular a la viga. La pared vertical de la izquierda es lisa. ¿Cuál es el ángulo  $\theta$  de equilibrio?

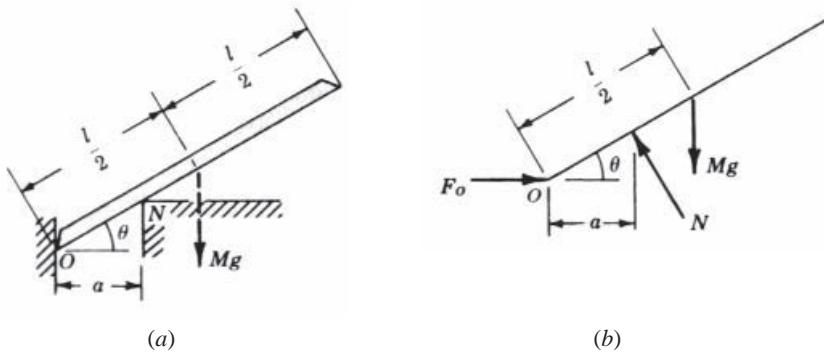


Figura 5.8

**SOLUCIÓN**

En la Figura 5.8(b) se representa el diagrama de cuerpo libre.

Sumando momentos respecto al punto  $O$

$$\sum M_O = 0 = +N \frac{a}{\cos \theta} - Mg(\frac{1}{2}l \cos \theta)$$

Sumando las componentes verticales de las fuerzas

$$\sum F_v = 0 = N \cos \theta - Mg, \quad \text{o sea,} \quad N = \frac{Mg}{\cos \theta}$$

Sustituyendo  $N = MG/\cos \theta$  en la primera ecuación, se obtiene

$$\frac{Mga}{\cos^2 \theta} - \frac{Mgl \cos \theta}{2} = 0, \quad \text{o sea,} \quad \cos \theta = \sqrt[3]{\frac{2a}{l}}$$

- 5.8.** Una viga ligera se carga con cargas concentradas como se muestra en la Figura 5.9(a). Hallar las reacciones en  $A$  y en  $B$ .

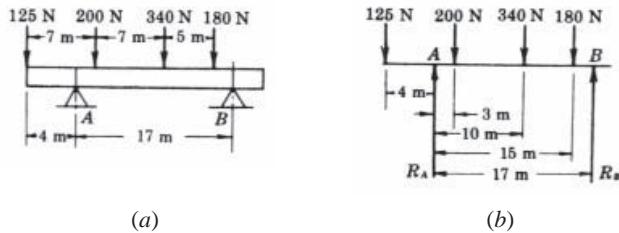


Figura 5.9

**SOLUCIÓN**

Para hallar las reacciones  $R_A$  y  $R_B$ , indicadas en la Figura 5.9(b), es aconsejable tomar momentos respecto a  $A$  y luego respecto a  $B$ . De este modo, cada ecuación contiene únicamente una incógnita. Las reacciones se obtienen independientemente una de otra. La suma de las fuerzas debe ser cero, lo que permite una fácil comprobación. Otra opción es hallar una reacción mediante una ecuación de momentos y a continuación hallar la otra reacción por suma de fuerzas. Tal procedimiento es, por supuesto correcto. Pero los autores prefieren las dos sumas de momentos y reservar la suma de fuerzas como ecuación de comprobación. Siguiendo este procedimiento, las dos ecuaciones son

$$\sum M_A = 0 = +(125 \times 4) - (200 \times 3) - (340 \times 10) - (180 \times 15) + R_B \times 17, \quad \text{o sea,} \quad R_B = 365 \text{ N} \quad (I)$$

$$\sum M_B = 0 = + (125 \times 21) - R_A \times 17 + (200 \times 14) + (340 \times 7) + (180 \times 2), \text{ o sea, } R_A = 480 \text{ N} \quad (2)$$

Comprobación:  $\Sigma F = -125 + 480 - 200 - 340 - 180 + 365 = 0$ . Esta suma debe ser cero, dentro de los límites de la precisión. Puesto que lo es, las reacciones de la viga son correctas.

- 5.9.** Hallar las reacciones en la viga sometida a las cargas concentradas y distribuidas de la Figura 5.10.

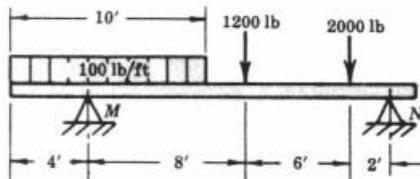


Figura 5.10

#### SOLUCIÓN

Obsérvese que la carga de 100 lb/ft se ha sustituido en el diagrama de cuerpo libre (Figura 5.11) por una carga concentrada de 1000 lb en su punto medio. Esto puede hacerse únicamente para calcular las reacciones en la viga.

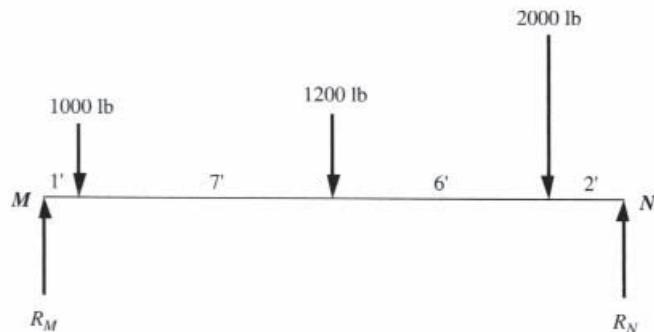


Figura 5.11

Las ecuaciones de equilibrio son

$$\sum M_M = 16R_N - 1000 - (8)(1200) - (14)(2000) = 0, \quad R_N = 2410 \text{ lb}$$

$$\sum M_N = -16R_M + (15)(1000) + (8)(1200) + (2)(2000) = 0, \quad R_M = 1790 \text{ lb}$$

- 5.10.** Hallar la fuerza P necesaria para mantener en equilibrio una masa de 10 kg mediante el sistema de poleas de la Figura 5.12(a). Se supone que todas las poleas son del mismo tamaño.

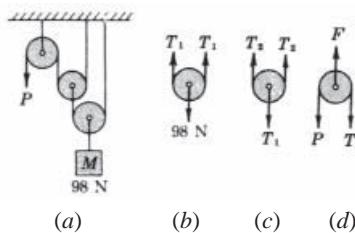


Figura 5.12

#### SOLUCIÓN

La Figura 5.12(b) es el diagrama de cuerpo libre de la polea inferior. La fuerza gravitatoria de  $10 \times 9,8 \text{ N}$  actúa hacia abajo. Las fuerzas que actúan en la cuerda a cada lado de la polea son ascendentes. Puesto que la cuerda es continua y se supone que no existe rozamiento en la polea, la tensión en los dos extremos

de la cuerda es la misma. La tensión  $T_1$  es, por tanto, de 49 N, ya que la suma de las fuerzas verticales da  $\Sigma F_v = 0 = +2T_1 - 98$ .

Seguidamente se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la polea central [Figura 5.12(c)]. Por el mismo razonamiento, la tensión de la cuerda en esta polea es  $T_2$ . Sumando las fuerzas verticales se obtiene la ecuación  $\Sigma F_v = 0 = +2T_2 - T_1 = 2T_2 - 49$ , de donde  $T_2 = 24,5$  N.

Por último, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la polea superior [Figura 5.12(d)]. Puesto que la cuerda es continua,  $P = T_2$ , o sea,  $P = 24,5$  N.

- 5.11.** La viga rígida de la Figura 5.13(a) está articulada en  $A$  y apoyada en sendos muelles en  $B$  y  $C$ . Si la constante de éstos es de 20 lb/in, hallar la reacción en  $A$  y la fuerza en cada muelle. La carga uniformemente distribuida es de 20 lb/ft.

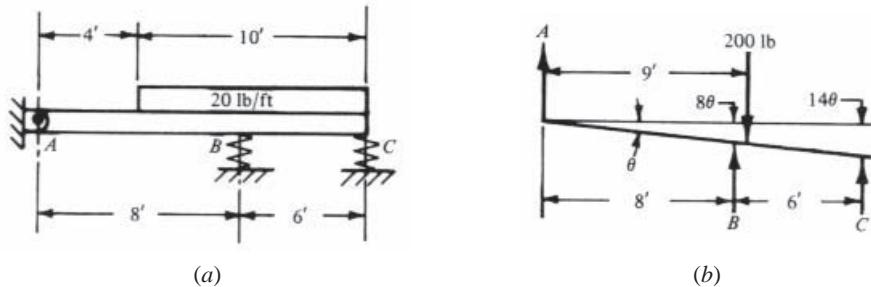


Figura 5.13

#### SOLUCIÓN

Se supone que el ángulo  $\theta$  es pequeño [Figura 5.13(b)], de modo que las deformaciones de los muelles son  $8\theta$  y  $14\theta$ . La fuerza en  $B$  es, por tanto,  $8\theta \times 20 \times 12 = 1920\theta$  lb. Análogamente, la fuerza en  $C$  es  $14\theta \times 240 = 3360\theta$  lb. Para calcular  $\theta$  se suman los momentos respecto a  $A$ .

$$\sum M_A = 0 = -200 \times 9 + 1920\theta \times 8 + 3360\theta \times 14, \quad \text{o sea,} \quad 0,0288 \text{ rad}$$

$$\text{Fuerza } B = 1920\theta = 55,3 \text{ lb}$$

$$\text{Fuerza } C = 3360\theta = 96,8 \text{ lb}$$

Para hallar la reacción en  $A$ , se suman las fuerzas verticales como sigue:

$$\sum F = 0 = A + 55,3 + 96,8 - 200, \quad \text{o sea,} \quad A = 47,9 \text{ lb} (\uparrow)$$

- 5.12.** Una viga en voladizo de 3,8 m de largo y de masa 10 kg/m soporta una carga concentrada de 1000 N en su extremo libre. El otro extremo de la viga está empotrado en una pared de 0,8 m de espesor. ¿Cuáles son las reacciones en  $A$  y en  $B$ ? [Figura 5.14(a)].

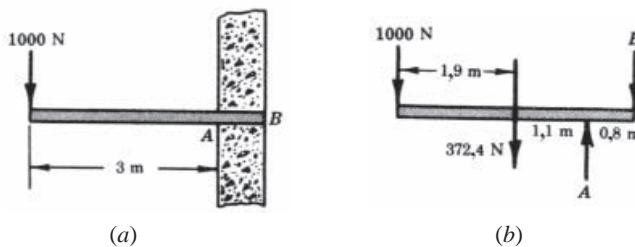


Figura 5.14

#### SOLUCIÓN

Se supone que la viga se flexiona, de manera que la pared presiona hacia arriba en  $A$  y hacia abajo en  $B$ . En el diagrama de cuerpo libre de la Figura 5.14(b) se representa el peso de 372,4 N ( $3,8 \text{ m} \times 10 \text{ kg/m} \times 9,8 \text{ m/s}^2$ ) en el centro.

Para hallar la reacción  $A$ , se suman los momentos respecto a  $B$  y se obtiene

$$\sum M_B = 0 = +1000 \times 3,8 + 372,4 \times 1,9 - 0,8A \quad A = 5630 \text{ N}$$

Para hallar la reacción  $B$ , se suman los momentos respecto a  $A$  y se obtiene

$$\sum M_A = 0 = +1000 \times 3,0 + 372,4 \times 1,1 - 0,8B \quad B = 4260 \text{ N}$$

- 5.13.** Los bloques  $A$  y  $B$  pesan 400 y 200 lb, respectivamente. Descansan en un plano inclinado  $30^\circ$  y están atados a un poste que se mantiene perpendicular al plano gracias a una fuerza  $P$ , paralela al plano [Figura 5.15(a)]. Se supone que todas las superficies son lisas y que las cuerdas son paralelas al plano. Hallar  $P$ .

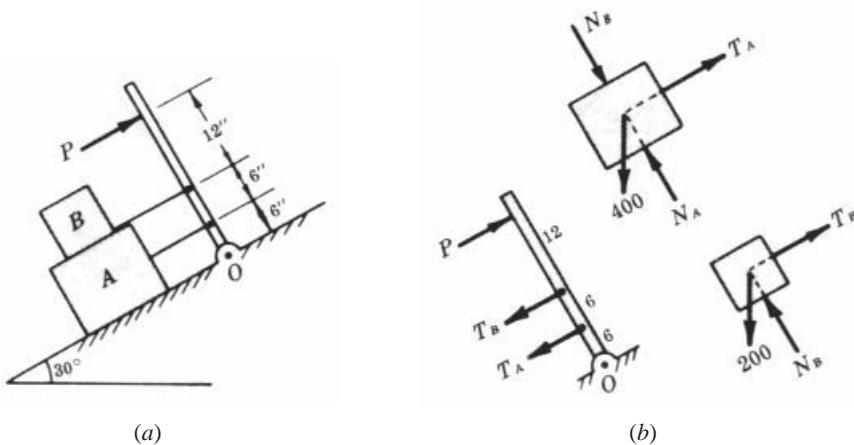


Figura 5.15

#### SOLUCIÓN

En la Figura 5.15(b) se representan los diagramas de cuerpo libre de  $A$ ,  $B$  y del poste. Se observa que pueden calcularse  $T_A$  y  $T_B$  sumando las fuerzas paralelas al plano. Así,  $T_A = 400 \operatorname{sen} 30^\circ = 200 \text{ lb}$ . Análogamente,  $T_B = 100 \text{ lb}$ .

En el diagrama de cuerpo libre del poste, se suman los momentos respecto a  $O$  y se obtiene  $-P \times 24 + T_B \times 12 + T_A \times 6 = 0$ . Se sustituyen  $T_A$  y  $T_B$  y se obtiene  $P = 100 \text{ lb}$ .

- 5.14.** Se aplica una fuerza vertical  $F$  de 50 N a una palanca acodada en el punto  $A$ , tal como se muestra en la Figura 5.16(a). Una fuerza  $P$ , aplicada en  $B$ , evita que la palanca gire alrededor del punto  $O$ . Calcular la fuerza  $P$  y la reacción  $R$  en  $O$ .

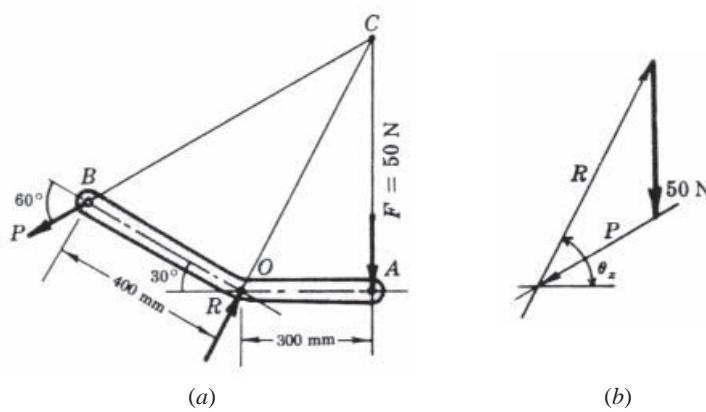


Figura 5.16

**SOLUCIÓN**

Puesto que la palanca está en equilibrio y sobre ella actúan únicamente tres fuerzas, éstas deben ser concurrentes. Ello quiere decir que la reacción  $R$  pasa por el punto  $C$  de corte de  $F$  y  $P$ .

En la Figura 5.16(b) se representa el triángulo de las fuerzas. La reacción  $R$  es paralela a la recta  $OC$ . En el triángulo se mide  $P = 43,0 \text{ N}$  y  $R = 80,8 \text{ N}$  con  $\theta_x = 62,5^\circ$ .

- 5.15.** Hallar las reacciones en la viga cargada de la Figura 5.17(a). Las cargas están en kilonewtons (kN). Se desprecian el espesor y la masa de la viga.

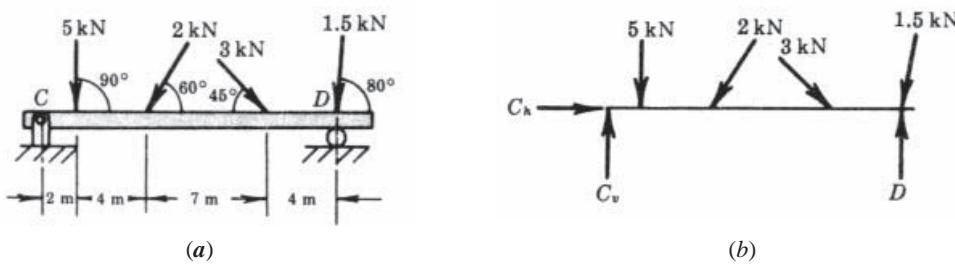


Figura 5.17

**SOLUCIÓN**

En el diagrama de cuerpo libre, Figura 5.17(b), se suponen positivas las componentes horizontal y vertical  $C_h$  y  $C_v$  de la reacción de la articulación en  $C$ . La reacción del apoyo de rodillo en  $D$  es perpendicular a la viga.

La suma de fuerzas horizontales da una ecuación cuya única incógnita es  $C_h$ :

$$\sum F_h = 0 = C_h - 2 \cos 60^\circ + 3 \cos 45^\circ - 1,5 \cos 80^\circ \quad C_h = -0,86 \text{ kN}$$

Ello significa que  $C_h$  actúa hacia la izquierda, contra lo supuesto.

Para hallar  $D$ , se toman momentos respecto a  $C$ ; lo que da una ecuación con  $D$  como única incógnita:

$$\sum M_C = 0 = -5 \times 2 - (2 \sin 60^\circ) \times 6 - (3 \sin 45^\circ) \times 13 - (1,5 \sin 80^\circ) \times 17 + D \times 17$$

Nótese que el momento de cada fuerza respecto a  $C$  es el momento sólo de la componente vertical respecto a  $C$ , porque las componentes horizontales pasan por  $C$ . Despejando  $D$  en esta ecuación de momentos, resulta  $D = 4,3 \text{ kN}$ .

Para hallar  $C_v$ , se suman los momentos respecto a  $D$ :

$$\sum M_D = 0 = -C_v \times 17 + 5 \times 15 + 2 \sin 60^\circ \times 11 + 3 \sin 45^\circ \times 4 \quad C_v = 6,03 \text{ kN}$$

Pueden comprobarse los valores hallados de  $C_v$  y  $D$  sumando las fuerzas verticales, ya que no hemos empleado aún esta ecuación. La suma,  $\sum F_v$ , debe ser nula al sustituir los valores de  $C_v$  y  $D$ :

$$\sum F_v = 6,03 - 5 - 2 \times 0,866 - 3 \times 0,707 - 1,5 + 4,30 = -0,02$$

Puesto que este resultado está dentro de los límites de precisión del problema, los valores están suficientemente comprobados.

- 5.16.** Hallar las reacciones en  $A$  y en  $B$  de la viga de la Figura 5.18(a).

**SOLUCIÓN**

En la Figura 5.18(b) se representa el diagrama de cuerpo libre. Las ecuaciones de equilibrio son

$$\sum M_A = 4R - (1)200 - (3)200 + 500 = 0 \quad R_B = 75 \text{ N}$$

$$\sum M_B = -4R + (3)200 + (1)200 + 500 = 0 \quad R_A = 325 \text{ N}$$

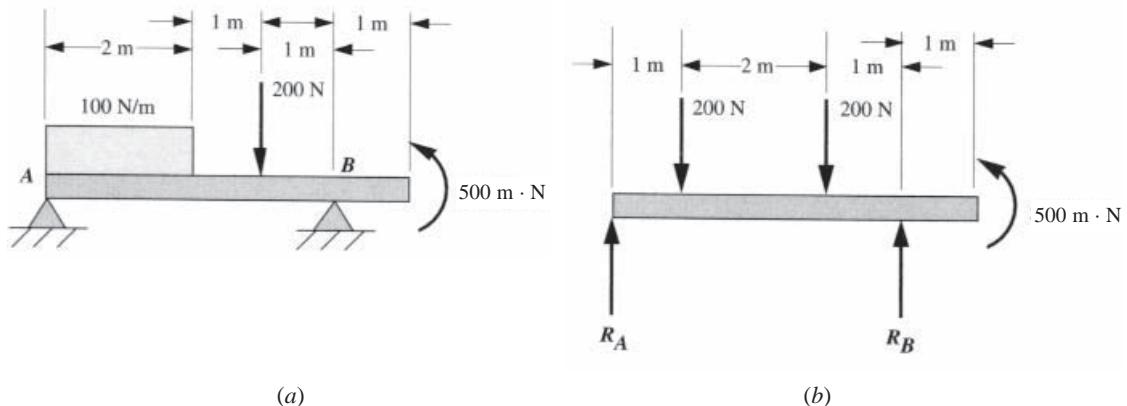


Figura 5.18

- 5.17.** Hallar la tensión en el cable  $AB$  que evita que deslice el poste  $CD$ . En la Figura 5.19(a) se indican los datos esenciales. El peso del poste es de 18 lb. Se supone que todas las superficies son lisas.

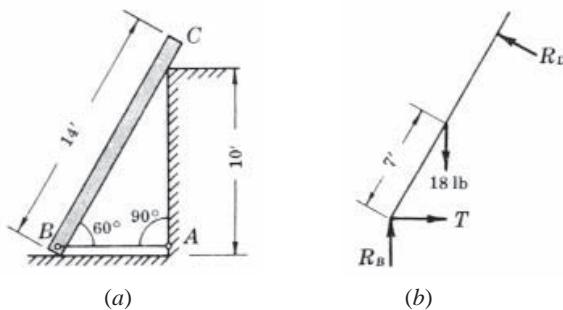


Figura 5.19

#### SOLUCIÓN

La Figura 5.19(b) es el diagrama de cuerpo libre. Obsérvese que  $R_D$  es perpendicular al poste y que  $R_B$  es perpendicular al suelo porque se ha supuesto que en las superficies no hay rozamiento.

Un procedimiento consiste en calcular los momentos respecto a  $B$  para hallar  $R_D$  y a continuación sumar las fuerzas horizontales para hallar  $T$ . Se obtienen así las siguientes ecuaciones:

$$\sum M_B = 0 = -18(7 \cos 60^\circ) + R_D \frac{10}{\cos 30^\circ} \quad \sum F_h = 0 = T - R_D \cos 30^\circ = T - 5,46(0,866)$$

de donde  $R_D = 5,46$  lb,  $T = 4,72$  lb.

- 5.18.** Hallar las siguientes fuerzas de la armadura en A de la Figura 5.20(a): (1) las reacciones del suelo en A y E, (2) las reacciones de la articulación C sobre la barra  $CE$ , (3) las reacciones de la articulación B sobre la barra  $AC$ . Se supone que el suelo es liso y que los pesos de los miembros son despreciables.

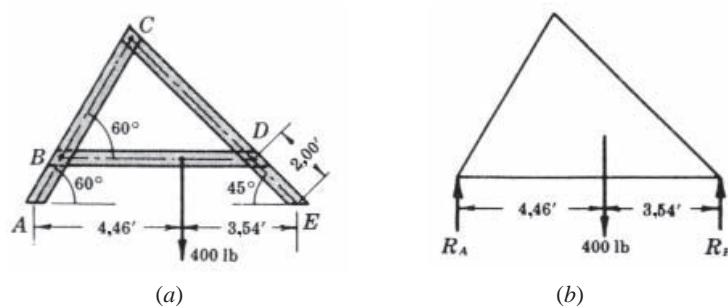


Figura 5.20 (Continúa)

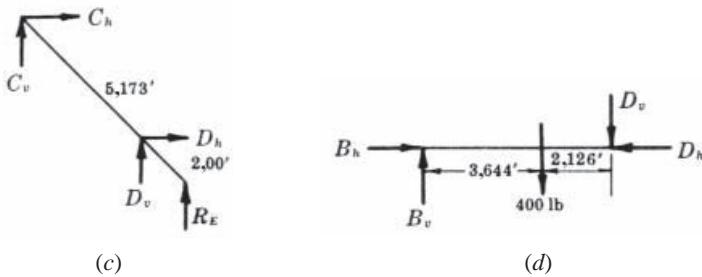


Figura 5.20 (Continuación)

**SOLUCIÓN**

Para hallar las reacciones del suelo en  $A$  y en  $E$ , se considera el marco completo como cuerpo libre [Figura 5.20(b)]. El modo en el que la armadura distribuye internamente la carga de 400 lb no influye en la determinación de las reacciones externas en  $A$  y en  $E$ . Tomando momentos en  $A$  y en  $E$ , se obtienen los siguientes resultados

$$\sum M_A = 0 = R_E \times 8,00 - 400 \times (8,00 - 3,54) \quad R_E = 223 \text{ lb}$$

$$\sum M_E = 0 = -R_A \times 8,00 + 400 \times 3,54 \quad R_A = 177 \text{ lb}$$

Se comprueba que la suma de las fuerzas verticales es cero.

Para responder a las partes (2) y (3) del problema, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del miembro  $CE$  [Figura 5.20(c)]. Suponemos que las reacciones en  $CE$  son las indicadas. En la figura hay cuatro incógnitas y únicamente tres ecuaciones válidas. Debe emplearse otro diagrama de cuerpo libre que incluya alguna de las mismas incógnitas. Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del miembro  $BD$  [Figura 5.20(d)] donde a las reacciones en  $D$  de  $BD$  se les asignan sentidos opuestos que en la Figura 5.20(c).

En la Figura 5.20(d), la longitud de 2,126' se obtiene restando la proyección horizontal de la longitud de 2,00' de la de 3,54'. Se obtiene la otra longitud de modo similar.

Para la Figura 5.20(c) pueden escribirse las siguientes ecuaciones:

$$\sum F_h = 0 = +C_h + D_h \quad (1)$$

$$\sum F_v = 0 = +C_v + D_v + 223 \quad (2)$$

$$\sum M_D = 0 = +223 \times 2 \cos 45^\circ - C_v \times 5,173 \cos 45^\circ - C_h \times 5,173 \sin 45^\circ \quad (3)$$

Para la Figura 5.20(d) pueden escribirse las siguientes ecuaciones:

$$\sum M_B = 0 = -400 \times 3,644 - D_v \times 5,770 \quad (4)$$

$$\sum M_D = 0 = -B_v \times 5,770 + 400 \times 2,126 \quad (5)$$

$$\sum F_h = 0 = +B_h - D_h \quad (6)$$

Para resolver las ecuaciones anteriores, se eligen ecuaciones con una sola incógnita.

$$\text{De (4), } D_v = \frac{-400 \times 3,644}{5,770} = -252,6 \text{ lb}$$

$$\text{De (5), } B_v = \frac{400 \times 2,126}{5,770} = 147,4 \text{ lb}$$

Se sustituye  $D_v = -252,6$  lb en la ecuación (2) y se obtiene  $C_v = -223 - (-252,6) = 29,6$  lb.

Se sustituye  $C_v = 29,6$  lb en la ecuación (3) y se obtiene  $C_h = 56,6$  lb.

De (6) y (1),  $B_h = +D_h = +(-C_h) = +(-56,6) = -56,6$  lb.

Resumimos los resultados, haciendo énfasis en los signos:

1. Reacciones del suelo:

$$R_A = 177 \text{ lb } (\uparrow) \quad R_E = 223 \text{ lb } (\uparrow)$$

2. Reacciones de la articulación en  $C$  sobre  $CE$ . Se supone que actúan sobre  $CE$  en sentido positivo:

$$R_A = 56,6 \text{ lb} (\rightarrow) \quad C_v = 29,6 \text{ lb} (\uparrow)$$

3. En la Figura 5.20(d) las reacciones de la articulación *B* se representaron actuando sobre *BD*. Por consiguiente, sobre *AC* actúan en el sentido contrario. Al hallar las reacciones sobre *BD* hallamos que  $B_h = -56,6$  lb, o sea, hacia la izquierda;  $B_v = -147,4$  lb, o sea, hacia arriba. Por tanto, sobre *AC* las reacciones de la articulación son

$$B_h = 56,6 \text{ lb} (\rightarrow) \quad B_v = 147,4 \text{ lb} (\uparrow)$$

*Nota:* En el Apéndice C se incluye un programa informático para la resolución al Problema 5.18

- 5.19. Un cilindro de 1m de diámetro y 10 kg de masa está alojado entre dos piezas cruzadas en ángulo de  $60^\circ$ , como se muestra en la Figura 5.21(a). Hallar la tensión en la cuerda horizontal *DE*, suponiendo que el suelo es liso.

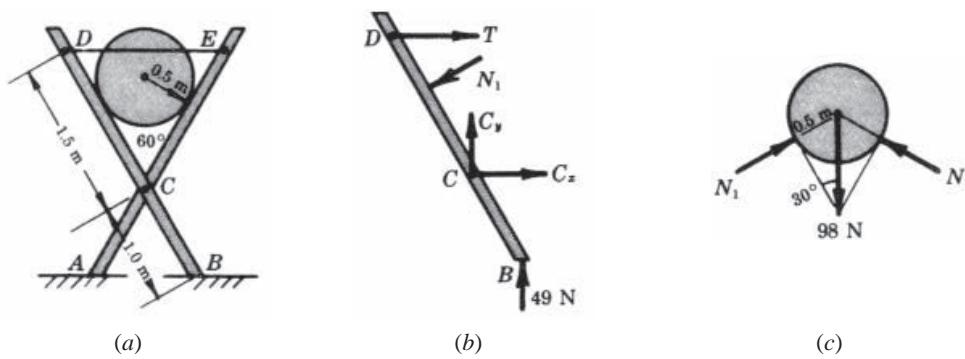


Figura 5.21

#### SOLUCIÓN

Se considera la estructura completa como cuerpo libre. Por simetría es evidente que  $A = B = 49 \text{ N} (\uparrow)$  (el peso es  $10 \times 9,8 = 98 \text{ N}$ ).

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del brazo *BD* con la tensión de la cuerda *T* y las reacciones  $C_x$  y  $C_y$  del pasador *C* [Figura 5.21(b)]. La reacción *N* del cilindro es perpendicular al brazo.

Si se conociera  $N_1$  podría calcularse la tensión *T* sumando momentos respecto a *C*. Pero  $N_1$  puede hallarse con el diagrama de cuerpo libre del cilindro [Figura 5.21(c)]. Por geometría,  $N_1$  pasa por el centro del cilindro. Por tanto, la suma de las fuerzas verticales da

$$\sum F_v = 0 = 2N_1 \operatorname{sen} 30^\circ - 98 \quad N_1 = 98 \text{ N}$$

Obsérvese también que la distancia perpendicular de  $N_1$  a *C* es  $0,5/(\operatorname{tg} 30^\circ) = 0,866 \text{ m}$ .

Volviendo al diagrama de cuerpo libre del brazo *BD* y sumando momentos respecto a *C*, se obtiene

$$\sum M_c = 0 = -T \times 1,5 \cos 30^\circ + 98 \times 0,866 + 49 \times 1 \operatorname{sen} 30^\circ \quad T = 84,2 \text{ N}$$

#### Problemas propuestos

- 5.20. Un peso de 100 lb cuelga del techo con una cuerda. De él tira una fuerza horizontal de modo que la cuerda forma un ángulo de  $70^\circ$  con el techo. Hallar la fuerza horizontal *H* y la tensión *T* en la cuerda. Resolver gráfica y analíticamente. *Resp.*  $H = 36,4 \text{ lb}$ ,  $T = 106 \text{ lb}$ .
- 5.21. Una banda de goma tiene una longitud libre de 8 in. Se estira hasta que su longitud llega a 10 in, como se muestra en la Figura 5.22. La fuerza horizontal es de 6 oz. ¿Cuál es la tensión en la banda? *Resp.*  $T = 5 \text{ oz}$

- 5.22.** Tal como se muestra en la Figura 5.23, un trozo de barra redonda está soldado en *A* a un alzaprima para que sirva de fulcro. Se requiere una fuerza *P* de 1200 N para elevar el lado izquierdo de una caja *B*. Para elevar el lado derecho se emplea la misma alzaprima, en cuyo caso *P* es de 1000 N. ¿Cuál es la masa de la caja? *Resp.*  $M = 2240 \text{ kg}$
- 5.23.** El peso *A* de la Figura 5.24 es de 32,8 lb y está en reposo sobre una superficie lisa. El peso *B* es de 14,3 lb. Hallar las tensiones en  $S_1$  y  $S_2$  y la reacción normal en *A* de la superficie horizontal. *Resp.*  $S_1 = 12,4 \text{ lb}$ ,  $S_2 = 14,3 \text{ lb}$ ,  $N = 25,7 \text{ lb}$

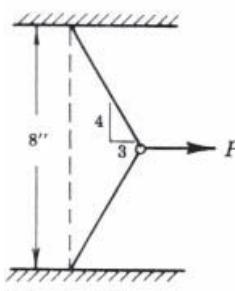


Figura 5.22

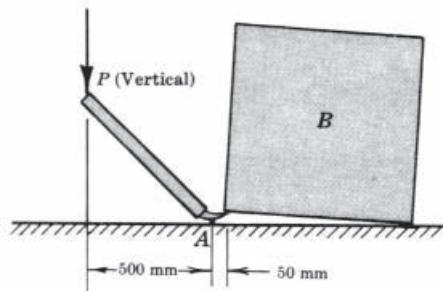


Figura 5.23

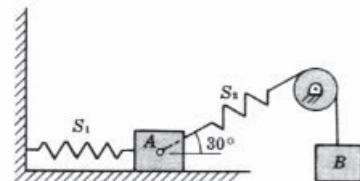


Figura 5.24

- 5.24.** Dos vientos están atados a un perno de anclaje, como se muestra en la Figura 5.25. ¿Qué fuerza ejerce éste sobre la cimentación? *Resp.*  $P = 1030 \text{ lb}$ ,  $\theta_x = 135^\circ$
- 5.25.** Tres fuerzas concurrentes son de módulos respectivos 40, 60 y 50 N. Hallar los ángulos que forman entre sí para que estén en equilibrio. *Resp.*  $97^\circ$ ,  $138^\circ$ ,  $125^\circ$
- 5.26.** En la Figura 5.26 se representa una polea, de la que cuelga un peso *W*<sub>1</sub>, que desliza por un cable cuyo extremo izquierdo está fijo a un soporte y cuyo extremo derecho, tras pasar por una polea fija, está unido a un peso *W*. La distancia horizontal entre el soporte de la izquierda y la polea es *L*. Las dimensiones de la polea son despreciables. Expresar la flecha en el centro en función de *W*, *W*<sub>1</sub> y *L*. *Resp.*  $d = \frac{1}{2}L / \sqrt{(2W/W_1)^2 - 1}$

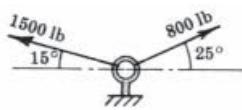


Figura 5.25

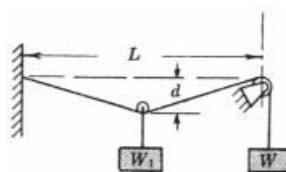


Figura 5.26

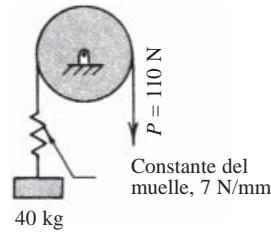


Figura 5.27

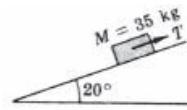


Figura 5.28

- 5.27.** En la Figura 5.27, ¿cuál es la reacción normal entre la masa que se apoya en el suelo y el suelo? Se supone que la polea es de masa despreciable y sin rozamiento en los cojinetes. *Resp.*  $N = 282 \text{ N}$
- 5.28.** En la Figura 5.28, ¿cuál es la fuerza *T* paralela al plano liso necesario para que la masa *M* de 35 kg esté en equilibrio? *Resp.*  $T = 117,6 \text{ N}$
- 5.29.** En la Figura 5.29, un peso de 80 lb cuelga de una barra ligera *AB*, soportada por un cable *CB* y una articulación *A*. Hallar la tensión en el cable y la reacción en *A* sobre la barra *AB*. *Resp.*  $T = 197 \text{ lb}$ ,  $A_x = 180 \text{ lb}$ ,  $A_y = 0 \text{ lb}$

- 5.30.** En la Figura 5.30, tres esferas de 2 kg de masa y 350 mm de diámetro cada una están en una caja de 760 mm de ancho. Hallar (a) la reacción de *B* sobre *A*, (b) la reacción de la pared sobre *C*, y (c) la reacción del suelo sobre *B*.

*Resp.* (a) 12,1 N en la dirección de la recta que une los centros, (b) 7,09 N ( $\leftarrow$ ) y (c) 29,4 N ( $\uparrow$ )

- 5.31.** En la Figura 5.31, dos miembros rígidos *AB* y *BC* articulados entre sí como se muestra soportan un peso de 500 lb. Hallar las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  en los miembros *AB* y *BC*, respectivamente, mediante el diagrama de cuerpo libre del pasador *B*. *Resp.*  $F_1 = 433$  lb *C*,  $F_2 = 250$  lb *C*

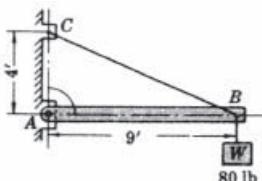


Figura 5.29

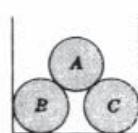


Figura 5.30

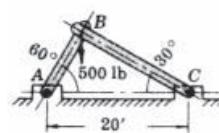


Figura 5.31

- 5.32.** ¿Qué fuerza horizontal hay que aplicar al centro de una rueda de 20 kg de masa y 1 m de diámetro para que salve un bloque de 150 mm de altura? En el instante de movimiento imminentes, la fuerza entre la rueda y el suelo es cero. Téngase en cuenta que la reacción del bloque sobre la rueda debe pasar por el centro de ésta. *Resp.*  $F = 200$  N

- 5.33.** El cilindro de la Figura 5.32 pesa 339 lb. ¿Qué fuerza  $T$  se necesita para que el cilindro supere el bloque *A*? *Resp.*  $T = 403$  lb

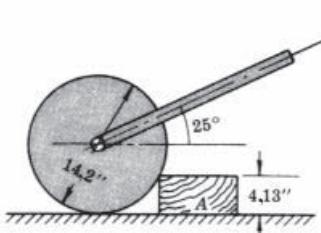


Figura 5.32

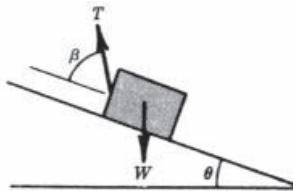


Figura 5.33

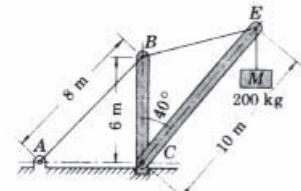


Figura 5.34

- 5.34.** En la Figura 5.33, expresar la fuerza  $T$  necesaria para mantener el peso en equilibrio en función de  $\theta$ ,  $\beta$  y  $W$ . Obtener también una expresión para la reacción del plano sobre  $W$ . Se supone que no existe rozamiento entre el peso y el plano.

*Resp.*  $T = W \operatorname{sen} \theta / \cos \beta$ ,  $N = W \cos (\theta + \beta) / \cos \beta$

- 5.35.** La grúa de la Figura 5.34 soporta una masa *M* de 200 kg. Hallar las fuerzas en el cable *BE* y en la pluma *CE*, mediante el diagrama de cuerpo libre de la articulación *E*. *Resp.*  $BE = 2450$  N tracción,  $CE = 3360$  N compresión

- 5.36.** Si la estructura del Problema 5.31 se apoya en un plano liso y se unen *A* y *C* con un cable, suprimiendo las articulaciones, hallar la tensión en el cable *AC*. *Resp.*  $T = 217$  lb

- 5.37.** Un cilindro liso de 50 kg está en reposo en el interior de una caja de paredes lisas perpendiculares entre sí. Si se gira la caja 45°, ¿cuál es la reacción del fondo sobre el cilindro?  
*Resp.* 693 N

- 5.38.** Una viga de 12 ft está simplemente apoyada por sus extremos. La viga soporta una carga uniforme de 200 lb/ft a lo largo de la misma y un par horario de 2000 ft-lb en su centro. Hallar las reacciones en los extremos. *Resp.*  $R_L = 1033$  lb,  $R_R = 1367$  lb

- 5.39.** Hallar las reacciones en la viga cargada de la Figura 5.35. La carga uniformemente distribuida es de 300 kg/m. La masa de la viga es despreciable. *Resp.*  $R_A = 3540 \text{ N}$ ,  $R_B = 930 \text{ N}$

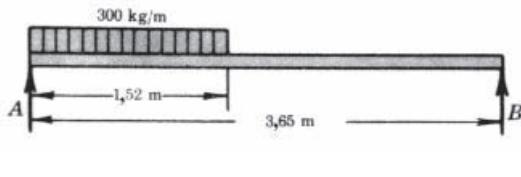


Figura 5.35

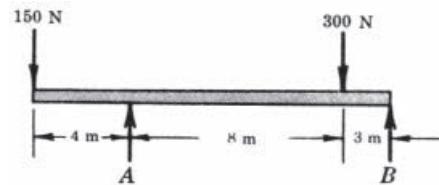


Figura 5.36

- 5.40.** Hallar las reacciones en la viga de la Figura 5.36. Considerar únicamente las dos cargas concentradas. *Resp.*  $R_A = 286 \text{ N}$ ,  $R_B = 164 \text{ N}$

- 5.41.** La barra A mostrada en la Figura 5.37 pesa 30 lb/ft y mide 12 ft de largo. El extremo izquierdo está empotrado en una pared de 14 in de espesor. La polea de 2 ft de diámetro pesa 40 lb. La tensión  $T$  en la cuerda es de 80 lb. Hallar las reacciones en los puntos B y C de la barra, la cual encaja holgadamente en la pared. *Resp.*  $R_C = 3910 \text{ lb} (\uparrow)$ ,  $R_B = 3350 \text{ lb} (\downarrow)$

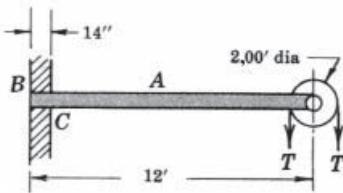


Figura 5.37

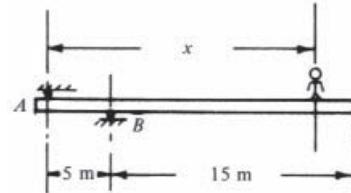


Figura 5.38

- 5.42.** En la Figura 5.38, ¿qué longitud del tablón puede recorrer una persona de 80 kg si la fuerza de aplastamiento permitida sobre los rodillos en A y B es de 1500 N? Se desprecia el peso del tablón. *Resp.*  $x = 14,6 \text{ m}$

- 5.43.** En la Figura 5.39, ¿qué fuerza  $P$  se precisa para levantar la masa  $M$  de 90 kg a velocidad constante? *Resp.*  $P = 441 \text{ N}$

- 5.44.** En la Figura 5.40, ¿qué fuerza  $P$  se precisa para mantener en equilibrio el peso de 600 lb? *Resp.*  $P = 200 \text{ lb}$

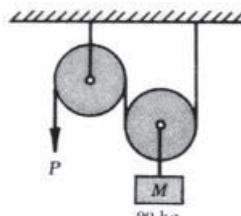


Figura 5.39

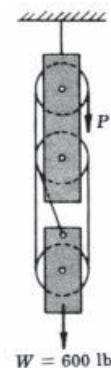


Figura 5.40

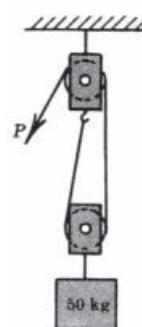


Figura 5.41

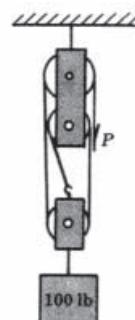


Figura 5.42

- 5.45.** El bloque superior de la Figura 5.41 cuelga de un soporte fijo. La cuerda está atada al extremo inferior del chasis del bloque superior y luego pasa por la polea del bloque inferior. Seguidamente

pasa por la polea del bloque superior y está sujeta por una fuerza  $P$ . Demostrar que en el equilibrio la fuerza  $P$  es de 245 N cuando se cuelga una masa de 50 Kg del chasis del bloque inferior.

- 5.46.** El bloque superior de la Figura 5.42 consta de dos poleas y el bloque inferior de una. La cuerda está atada a la parte superior del chasis del bloque inferior, pasa alrededor de una de las poleas del bloque superior, vuelve a la polea del bloque inferior y finalmente pasa alrededor de la segunda polea del bloque superior, donde está sujeta por una fuerza  $P$ . Demostrar que en el equilibrio la fuerza  $P$  es de 33,3 lb cuando se cuelga un peso de 100 lb del chasis del bloque inferior.
- 5.47.** En la Figura 5.43 se muestra un sistema de palancas que soportan una carga de 80 N. Hallar las reacciones en  $A$  y en  $B$  sobre la palanca. *Resp.  $R_A = -71,1$  N,  $R_B = +124$  N*

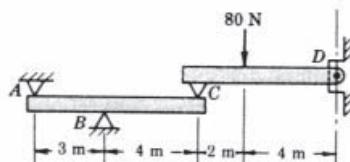


Figura 5.43

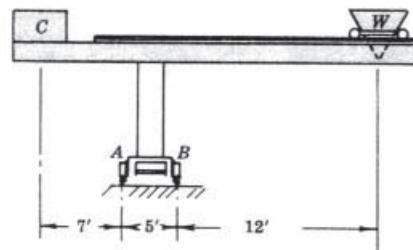


Figura 5.44

- 5.48.** Las ruedas de una grúa móvil se mueven sobre raíles como se muestra en la Figura 5.44. El peso de la grúa es de 10 toneladas (10 T), con su centro de gravedad a 3 ft a la derecha de  $A$ . El contrapeso  $C$  es de 4 T, con centro de gravedad a 7 ft a la izquierda de  $A$ . ¿Qué peso máximo  $W$  a 12 ft a la derecha de  $B$  puede ser desplazado sin volcar?
- Resp.  $W = 5,67$  T*

- 5.49.** Una persona de 70 kg de masa, representada por  $M$  sostiene una masa de 25 kg (Figura 5.45). Se supone que no existe rozamiento en la polea. La plataforma donde la persona está de pie cuelga de dos cuerdas en  $A$  y de dos cuerdas  $B$ . ¿Cuál es la tensión de cada una de las cuerdas en  $A$ ?
- Resp.  $A = 147$  N*

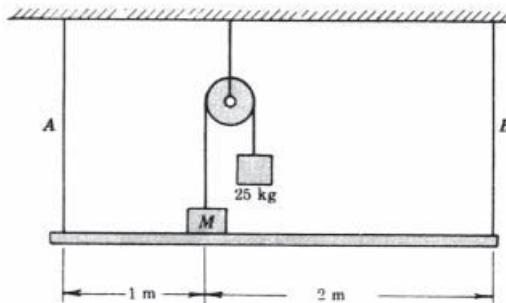


Figura 5.45

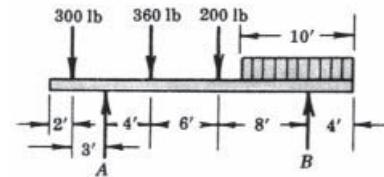


Figura 5.46

- 5.50.** La viga de extremos en voladizo de la Figura 5.46 pesa 32 lb/ft y está sometida a una carga uniformemente distribuida de 200 lb/pie y tres cargas concentradas, tal como se muestra. Hallar las reacciones en la viga. Téngase en cuenta el peso de la viga.
- Resp.  $R_A = 1280$  lb,  $R_B = 2440$  lb*

- 5.51.** En la Figura 5.47 se representa un aparato diferencial de cadena. La unidad superior conectada al soporte consiste en dos poleas encajadas de diámetros  $d_1$  y  $d_2$ . La polea inferior tiene un diámetro  $\frac{1}{2}(d_1 + d_2)$ . El peso está sujeto a la polea inferior. Por las poleas pasa una cadena continua.

nua, tal como se muestra. Se supone que no existe tensión en el lado laxo (parte de la cadena situada a la derecha de la polea superior más pequeña). ¿Qué fuerza mínima es necesaria para iniciar el ascenso del peso?

$$\text{Resp. } P = \frac{1}{2}W(d_2 - d_1)/d_2$$

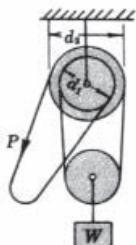


Figura 5.47

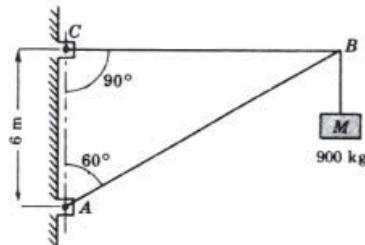


Figura 5.48

- 5.52. En la Figura 5.48,  $AB$  es una barra rígida y  $CB$  es un cable. Si  $M$  es de 900 kg, ¿cuál es la reacción de la articulación  $A$  sobre  $AB$ ? ¿Cuál es tensión en el cable?

$$\text{Resp. } A_h = 15,3 \text{ kN}, A_v = 8,82 \text{ kN}, T = 15,3 \text{ kN}$$

- 5.53. Se aplica una fuerza horizontal  $F$  de 5 lb al martillo de la Figura 5.49. Se supone que el martillo pivota alrededor del punto  $A$ , ¿qué fuerza se ejerce en el clavo vertical para extraerlo del suelo horizontal?  $\text{Resp. } P = 15,8 \text{ lb}$

- 5.54. Hallar la fuerza  $P$  necesaria para mantener en equilibrio la palanca acodada de la Figura 5.50. El rozamiento en el pivote  $O$  es despreciable.  $\text{Resp. } P = 52,2 \text{ N}$

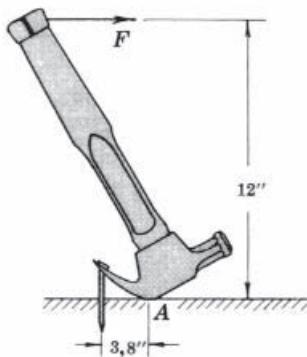


Figura 5.49

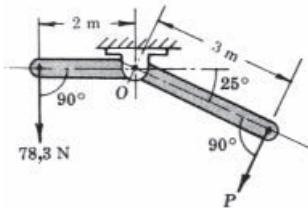


Figura 5.50

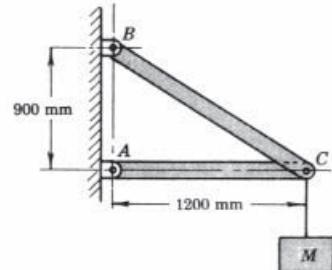


Figura 5.51

- 5.55. En la Figura 5.51, la masa  $M$  de 450 kg cuelga del pasador de la articulación  $C$ . Hallar las fuerzas que actúan en los miembros  $AC$  y  $BC$ .  $\text{Resp. } AC = 5880 \text{ N}, BC = 7350 \text{ N}$

- 5.56. Hallar las reacciones en  $A$  y  $B$  sobre la viga de la Figura 5.52.

$$\text{Resp. } A_h = 1,65 \text{ kN}, A_v = 4,60 \text{ kN}, B = 8,71 \text{ kN}$$

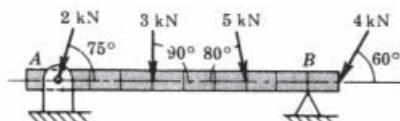


Figura 5.52

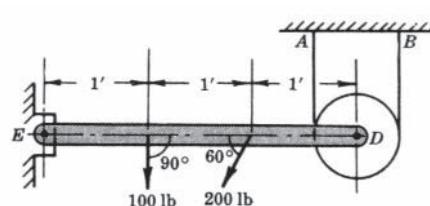


Figura 5.53

- 5.57.** Una viga  $ED$  se carga tal como se muestra en la Figura 5.53. La viga está articulada a la pared en  $E$ . En  $D$  se conecta sin rozamiento una polea de 8 in de diámetro. Se hace pasar una cuerda por la polea cuyos extremos se fijan a dos puntos  $A$  y  $B$  sobre las verticales de los extremos del diámetro horizontal de la polea. Hallar las reacciones de la articulación  $E$  y la tensión en la cuerda.  
*Resp.*  $E = 160 \text{ lb}$ ,  $\theta_x = 51^\circ$ ,  $T = 74,4 \text{ lb}$
- 5.58.** La barra uniforme de 8 ft de la Figura 5.54 pesa 40 lb. El suelo y la pared vertical son lisos. Hallar la tensión de la cuerda  $AC$ . *Resp.*  $T = 11,55 \text{ lb}$

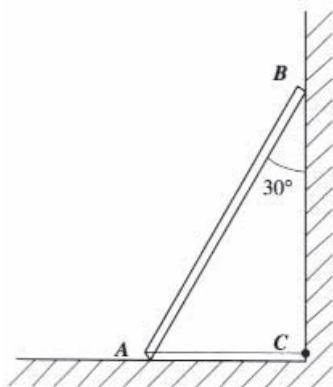


Figura 5.54

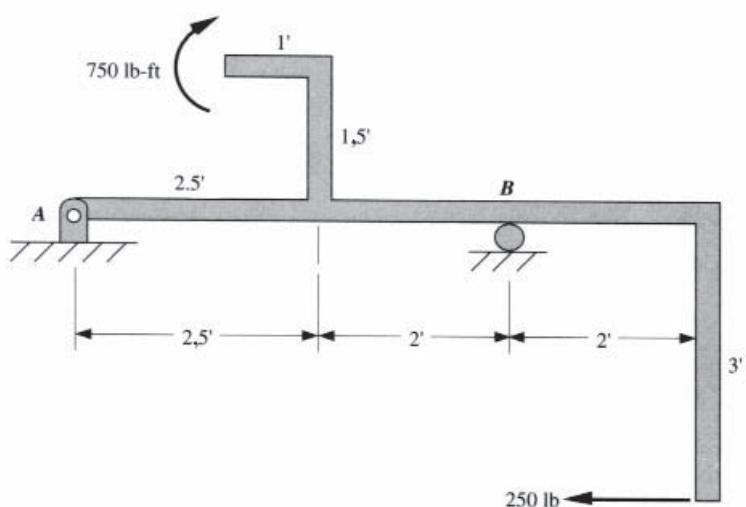


Figura 5.55

- 5.59.** Hallar las reacciones en  $A$  y en  $B$  sobre el soporte de la Figura 5.55.  
*Resp.*  $B = 333 \text{ lb}$ ,  $A_y = -333 \text{ lb}$ ,  $A_x = 250 \text{ lb}$
- 5.60.** Hallar la tensión en el cable  $BC$  de la Figura 5.56. El peso de  $AB$  es despreciable.  
*Resp.*  $T = 1000 \text{ lb}$

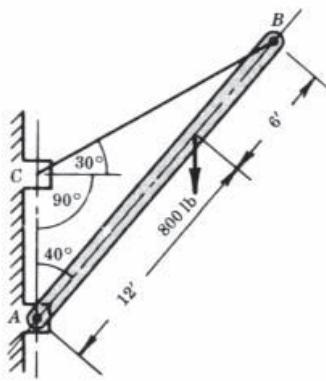


Figura 5.56

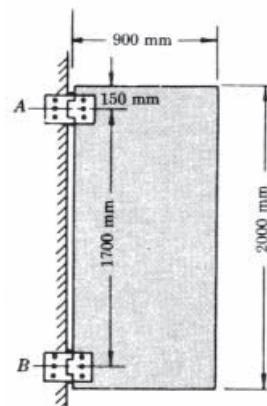


Figura 5.57

- 5.61.** En la Figura 5.57, una puerta uniforme de 18 kg de masa está engoznada en  $A$  y  $B$ . Hallar las reacciones de los goznes  $A$  y  $B$  sobre la puerta. Se supone que las reacciones verticales de  $A$  y  $B$  son iguales. *Resp.*  $A = 99,8 \text{ N}$ ,  $\theta_x = 118^\circ$ ;  $B = 99,8 \text{ N}$ ,  $\theta_x = 62,1^\circ$

- 5.62.** El marco representado en la Figura 5.58 se utiliza para sostener una masa de 200 kg en *F*. Hallar (a) la reacción de *E* sobre *DE*, (B) la reacción de *C* sobre *CF* y (c) la reacción del suelo en *B* sobre *AB*.

*Resp.* (a)  $E = 6570 \text{ N}$ ,  $\theta_x = 207^\circ$ ; (b)  $C = 5960 \text{ N}$ ,  $\theta_x = 189^\circ$ ; (c)  $B_x = 2350 \text{ N}$ ,  $B_y = 1960 \text{ N}$

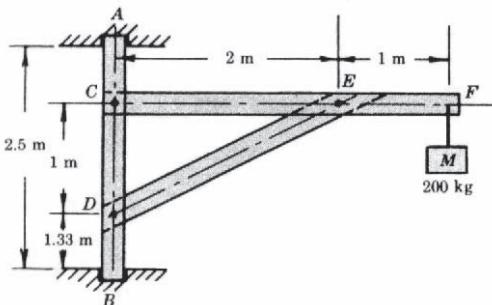


Figura 5.58

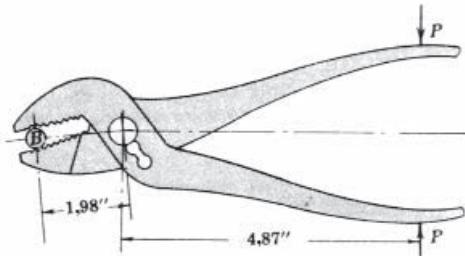


Figura 5.59

- 5.63.** El perno *B* está sujeto por una fuerza de 10 lb perpendicular a las mandíbulas de los alicates, tal como muestra la Figura 5.59. ¿Qué fuerzas *P* han de aplicarse perpendicularmente a las asas para conseguir la fuerza de sujeción? *Resp.*  $P = 4,07 \text{ lb}$

- 5.64.** En la Figura 5.60, hallar las componentes de la reacción de la articulación *A* sobre el marco. El miembro *AB* es horizontal y el miembro *DBC* es vertical. Todas las articulaciones son lisas.

*Resp.*  $A_x = 2730 \text{ N} (\leftarrow)$ ,  $A_y = 250 \text{ N} (\uparrow)$

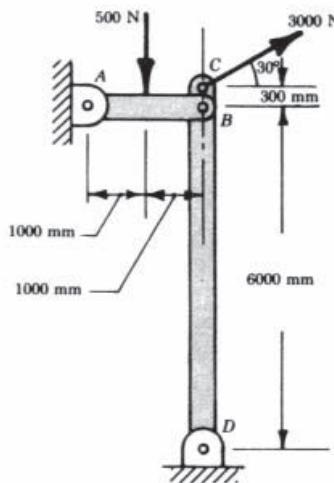


Figura 5.60

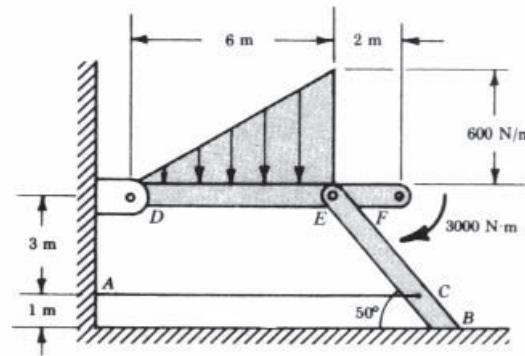


Figura 5.61

- 5.65.** En la Figura 5.61 se representa un marco que soporta una carga distribuida a lo largo de 6 m del miembro horizontal de 8 m de longitud total. En el extremo de *DEF* hay aplicado un momento de 3000 m·N. Hallar la tensión en el cable horizontal *AC*. *Resp.*  $T = 1900 \text{ N}$

- 5.66.** El bastidor de la Figura 5.62 consiste en el miembro vertical *GFHCB* y el miembro horizontal *CDE*, al cual se articulan sin rozamiento las dos poleas que se muestran. Ambas tienen un diámetro de 400 mm. La masa de 50 kg se mantiene en equilibrio mediante una cuerda que pasa por las dos poleas y es paralela en parte de su longitud al miembro de dos fuerzas *FD*. La cuerda *AB* mantiene el equilibrio del bastidor completo. Hallar la tensión *T* en *AB* y el módulo de la reacción de la articulación *C* sobre *CDE*. *Resp.*  $T = 490 \text{ N}$ ,  $C = 1100 \text{ N}$

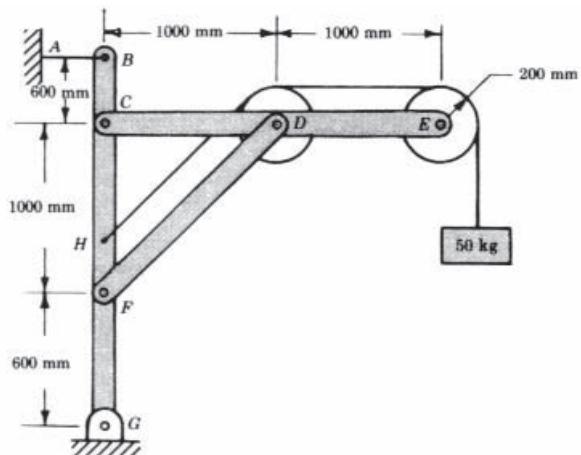


Figura 5.62

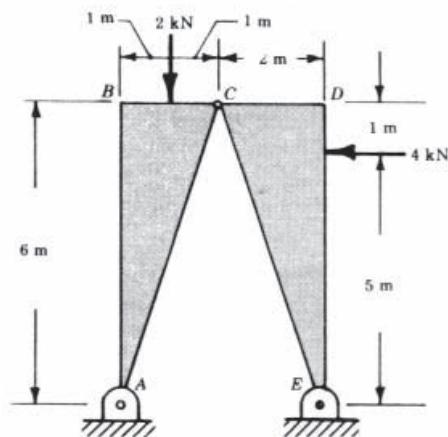


Figura 5.63

- 5.67.** Los cantes de las dos placas triangulares de poco espesor de la Figura 5.63 están dispuestos horizontal y verticalmente, tal como se muestra. Ambas placas están articuladas entre sí en *C* mediante un pasador liso. Una de las cargas es vertical y la otra es horizontal. Hallar el módulo de la reacción del pasador de la articulación *C*. *Resp.*  $C = 4,86 \text{ kN}$
- 5.68.** En la estructura de la Figura 5.64, hallar el módulo de la reacción de la articulación *B* sobre el miembro horizontal *BD*. La superficie lisa en la que se apoya la estructura es horizontal. *Resp.*  $B = 79,4 \text{ kN}$

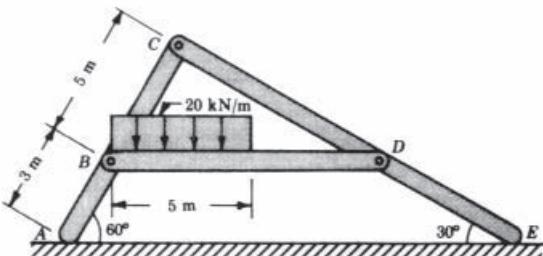


Figura 5.64

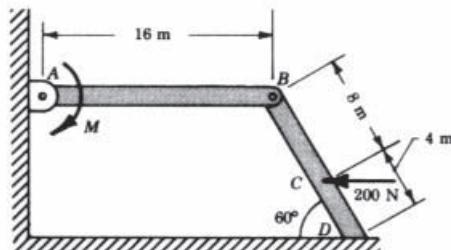


Figura 5.65

- 5.69.** La fuerza horizontal de 200 N de la Figura 5.65 está aplicada en el miembro inclinado *BCD*, cuyo pie descansa en un plano horizontal liso. Su extremo superior se articula en *B* al miembro horizontal *AB*. ¿Qué par *M* debe aplicarse al miembro *AB* para que el sistema se mantenga en equilibrio? ¿Cuánto vale la reacción de la articulación *B*? *Resp.*  $M = 3700 \text{ m-N}$ ,  $B = 306 \text{ N}$
- 5.70.** Hallar las reacciones en una viga horizontal cargada tal como se muestra en la Figura 5.66. El sistema es no concurrente y no paralelo. *Resp.*  $A_x = -0,44 \text{ k}$ ,  $A_y = 2,98 \text{ k}$ ,  $B = 6,27 \text{ k}$

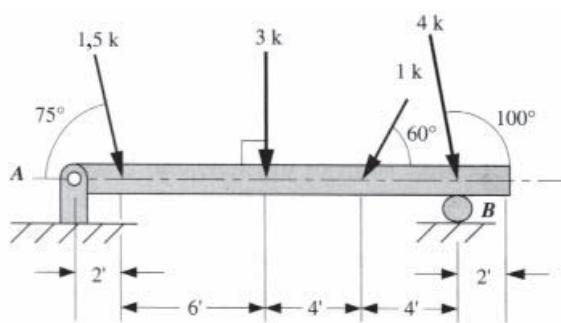


Figura 5.66

# EQUILIBRIO DE SISTEMAS DE FUERZAS NO COPLANARIAS

6

## 6.1 EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS NO COPLANARIAS

Un sistema de fuerzas no coplanarias está en equilibrio cuando son nulos la fuerza  $\mathbf{R}$  y el par  $\mathbf{C}$ ; o sea, si se cumplen a la vez las condiciones siguientes

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \sum \mathbf{M} = 0$$

donde  $\sum \mathbf{F}$  = suma de todas las fuerzas

$\sum \mathbf{M}$  = suma de los momentos (respecto a un punto cualquiera) de todas las fuerzas.

Las dos ecuaciones vectoriales anteriores pueden aplicarse directamente o, en los problemas más sencillos, pueden emplearse las ecuaciones escalares equivalentes para los tres tipos de sistemas no coplanarios.

## 6.2 SISTEMAS CONCURRENTES

El siguiente sistema de ecuaciones asegura el equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes y no coplanarias:

$$\sum F_x = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_y = 0 \tag{2}$$

$$\sum F_z = 0 \tag{3}$$

donde  $\sum F_x$ ,  $\sum F_y$ ,  $\sum F_z$  = sumas algebraicas de las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, de las fuerzas.

$\sum M = 0$  puede aplicarse como alternativa a una de las ecuaciones anteriores. Por ejemplo, si reemplaza a la ecuación (3),  $\sum M$  debe ser la suma algebraica de los momentos de las fuerzas respecto a un eje que no sea paralelo ni corte al eje  $z$ .

## 6.3 SISTEMAS PARALELOS

El siguiente sistema de ecuaciones asegura el equilibrio de un sistema de fuerzas paralelas no coplanarias:

$$\sum F_y = 0 \tag{1}$$

$$\sum M_x = 0 \tag{2}$$

$$\sum M_z = 0 \tag{3}$$

donde  $\sum F_y$  = suma algebraica de las componentes  $y$  de las fuerzas, el cual se elige paralelo a las mismas

$\sum M_x$ ,  $\sum M_z$  = sumas algebraicas de los momentos de las fuerzas respecto a los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente.

## 6.4 SISTEMAS NO CONCURRENTES Y NO PARALELOS

Las condiciones necesarias y suficientes del equilibrio del sistema más general de fuerzas en el espacio de tres dimensiones son las seis ecuaciones siguientes:

$$\sum F_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_x = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_y = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_z = 0 \quad (6)$$

donde  $\sum F_x, \sum F_y, \sum F_z$  = sumas algebraicas de las componentes  $x, y$  y  $z$  de las fuerzas, respectivamente.

$\sum M_x, \sum M_y, \sum M_z$  = sumas algebraicas de los momentos de las fuerzas respecto a los ejes  $x, y$  y  $z$ , respectivamente.

Todos los sistemas estudiados anteriormente son casos particulares de este sistema. No todas las ecuaciones son necesarias en aquellos casos.

### Problemas resueltos

---

- 6.1.** En la Figura 6.1, un poste de 30 ft de altura sostiene un cable en el plano  $xy$ . El cable ejerce una fuerza de 150 lb en el extremo superior del poste a un ángulo de  $10^\circ$  por debajo de la horizontal. Se han sujetado dos vientos de alambre como se muestra. Hallar la tensión en los vientos y la compresión en el poste.

#### SOLUCIÓN

Puesto que el poste está sólo sometido a cargas en los extremos, es un miembro de dos fuerzas con una fuerza axial de compresión  $P$ . En el sistema concurrente mostrado en el diagrama de cuerpo libre de la Figura 6.2,

$$\sum F_z = 0 = +A \cos 60^\circ \sin 30^\circ - B \cos 60^\circ \sin 30^\circ \quad \text{o sea} \quad A = B$$

y

$$\sum F_x = 0 = +150 \cos 10^\circ - B \cos 60^\circ \cos 30^\circ - A \cos 60^\circ \cos 30^\circ$$

Sustituyendo  $B$  por  $A$  y despejando, se obtiene  $A = 171$  lb  $T$ .

Para hallar  $P$ , se suman las fuerzas verticales según  $y$ .

$$\sum F_y = 0 = P - 150 \sin 10^\circ - 2A \sin 60^\circ \quad \text{o sea} \quad P = 322 \text{ lb } C$$

- 6.2.** Repetir el Problema 6.1 empleando  $\sum \mathbf{M}_C = 0$ .

#### SOLUCIÓN

El poste está en equilibrio bajo la acción de las cuatro fuerzas siguientes (Figura 6.3)

$$\mathbf{A} = (-A \cos 60^\circ \cos 30^\circ) \mathbf{i} + (-A \sin 60^\circ) \mathbf{j} + (A \cos 60^\circ \sin 30^\circ) \mathbf{k} \quad (1)$$

$$= -0,433A\mathbf{i} - 0,866A\mathbf{j} + 0,25A\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = (-B \cos 60^\circ \cos 30^\circ) \mathbf{i} + (-B \sin 60^\circ) \mathbf{j} - (-B \cos 60^\circ \sin 30^\circ) \mathbf{k} \quad (2)$$

$$= -0,433B\mathbf{i} - 0,866B\mathbf{j} - 0,25B\mathbf{k}$$

$$\mathbf{C} = C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k} \quad (3)$$

$$\text{La fuerza de 150 lb es } +(150 \cos 10^\circ) \mathbf{i} + (150 \sin 10^\circ) \mathbf{j} = +149\mathbf{i} - 25,9\mathbf{j} \quad (4)$$

El vector de posición de O respecto a C es  $\mathbf{r} = 30\mathbf{j}$ . Luego, aplicando  $\sum \mathbf{M}_C = 0$ .

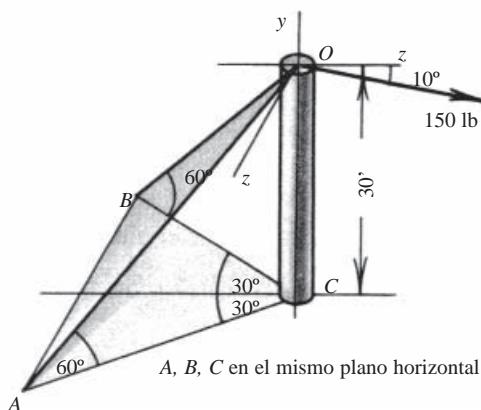


Figura 6.1

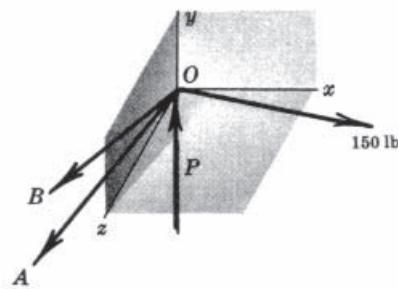


Figura 6.2

$$\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = A \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 30 & 0 \\ -0,433 & -0,866 & +0,25 \end{vmatrix} + B \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 30 & 0 \\ -0,433 & -0,866 & -0,25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 30 & 0 \\ +149 & -25,9 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando los determinantes y agrupando términos,

$$(7,5A - 7,5B)\mathbf{i} + (0)\mathbf{j} + (13A + 13B - 4470)\mathbf{k} = 0$$

o sea,  $7,5A - 7,5B = 0$  y  $13A + 13B - 4470 = 0$ , de donde  $A = 171$  lb  $T$ ,  $B = 171$  lb  $T$ .

Sumando las fuerzas en la dirección  $y$  se obtiene  $C_y$ , que es también la fuerza de compresión en el poste:

$$\sum F_y = C_y - 0,866A - 0,866B - 25,9 = 0, \quad \text{o sea,} \quad C_y = 322 \text{ lb}$$

La suma de los momentos respecto a  $O$  indica que  $C_x = C_z = 0$ .

- 6.3.** Tres alambres sostienen una masa de 6,12 kg (Figura 6.4).  $AB$  y  $AC$  están en el plano  $xz$ . Hallar las tensiones  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ .

### SOLUCIÓN

$$AD = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7 \quad AC = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4,47 \quad AB = 5$$

Primero sumamos las fuerzas en la dirección  $y$  porque esta ecuación contiene una sola incógnita,  $T_1$ .

$$\sum F_y = 0 = -6,12 \times 9,8 + \frac{6}{7}T_1 \quad T_1 = 70 \text{ N}$$

Sumando las fuerzas en las direcciones  $x$  y  $z$ :

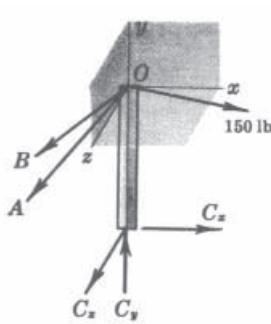


Figura 6.3

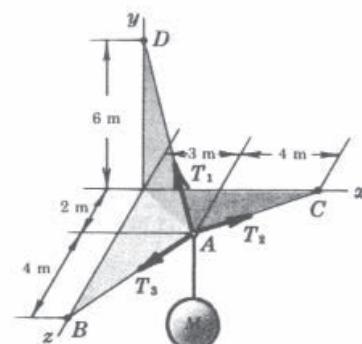


Figura 6.4

$$\sum F_x = 0 = T_2 \frac{4}{4,47} - T_3 \frac{3}{5} - 70 \frac{3}{7}$$

$$\sum F_z = 0 = T_3 \frac{4}{5} - T_2 \frac{2}{4,47} - 70 \frac{2}{7}$$

Multiplicando la ecuación  $\sum F_z$  por 2 y sumándole  $\sum F_x$  se obtiene  $T_3 = 70$  N. Sustituyendo este valor en la ecuación  $\sum F_x$  o  $\sum F_z$  se obtiene  $T_2 = 80,5$  N.

- 6.4.** Resolver el Problema 6.3, expresando las fuerzas en función de los vectores **i**, **j** y **k**.

#### SOLUCIÓN

El punto *A* está en equilibrio bajo la acción de las cuatro fuerzas concurrentes siguientes:

$$\mathbf{T}_1 = -\frac{3}{7}T_1\mathbf{i} + \frac{6}{7}T_1\mathbf{j} + \frac{2}{7}T_1\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_2 = +\frac{4}{4,47}T_2\mathbf{i} + 0 - \frac{2}{4,47}T_2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_3 = -\frac{3}{5}T_3\mathbf{i} + 0 + \frac{4}{5}T_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{W} = -6,12 \times 9,8\mathbf{j} = -60\mathbf{j}$$

Luego,  $\sum \mathbf{F}_y = 0 = \frac{6}{7}T_1\mathbf{j} - 60\mathbf{j}$ , o sea que, en módulo,  $T_1 = 70$  N

En forma vectorial,  $\mathbf{T}_1 = -30\mathbf{i} + 60\mathbf{j} - 20\mathbf{k}$ .

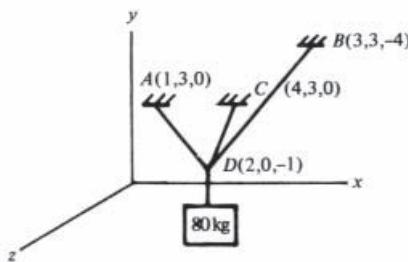
Asimismo

$$\sum \mathbf{F}_x = 0 = -\frac{3}{7}T_1\mathbf{i} + \frac{4}{4,47}T_2\mathbf{i} - \frac{3}{5}T_3\mathbf{i}$$

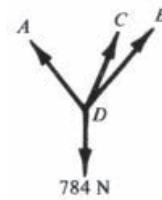
$$\sum \mathbf{F}_z = 0 = -\frac{2}{7}T_1\mathbf{k} - \frac{2}{4,47}T_2\mathbf{k} + \frac{4}{5}T_3\mathbf{k}$$

o sea,  $(4/4,47)T_2 - (3/5)T_3 = (3/7)T_1 = 30$  y  $-(2/4,47)T_2 + (4/5)T_3 = (2/7)T_1 = 20$ , cuyas raíces son  $T_2 = 80,5$  N y  $T_3 = 70,0$  N.

- 6.5.** La masa de 80 kg de la Figura 6.5(a) está sostenida por tres cables concurrentes en *D* (2, 0, -1). Los cables están sujetos en los puntos *A* (1, 3, 0), *B* (3, 3, -4) y *C* (4, 3, 0). Las coordenadas están en metros. Hallar la tracción en el cable unido a *C*.



(a)



(b)

**Figura 6.5**

#### SOLUCIÓN

La tracción en el cable *DC* se calcula fácilmente si igualamos a cero la suma de los momentos respecto a la recta *AB*, ya que respecto a ella los momentos de las fuerzas en *DA* y *DB* son cero porque la cortan. Las

únicas fuerzas con momento no nulo respecto a  $AB$  son la fuerza en  $DC$  y el peso ( $80 \times 9,8$  N en el sentido  $\mathbf{j}$  negativo).

El diagrama de cuerpo libre de la Figura 6.5(b) muestra todas las fuerzas que actúan en el punto  $D$ . La tensión en  $DC$  puede escribirse

$$\mathbf{C} = C \frac{(4-2)\mathbf{i} + (3-0)\mathbf{j} + [0-(-1)]\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (+1)^2}} = C \frac{2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{14}}$$

Para hallar la suma de los momentos respecto a la recta  $AB$ , necesitamos el vector unitario de esa recta. Por tanto,

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{(3-1)\mathbf{i} + (3-3)\mathbf{j} + (-4-0)\mathbf{k}}{\sqrt{20}} = \frac{\mathbf{i} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{5}}$$

Pueden calcularse los momentos de la tracción en  $C$  y del peso respecto a cualquier punto de  $AB$ . Si elegimos el punto  $A$ , el vector de posición de ambas fuerzas es el vector definido por  $A$  y  $D$ . De aquí,

$$\mathbf{r}_{AD} = (2-1)\mathbf{i} + (0-3)\mathbf{j} + (-1-0)\mathbf{k} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

La suma de los momentos de las dos fuerzas es

$$\sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ +1 & -3 & -1 \\ 0 & -784 & 0 \end{vmatrix} + \frac{C}{\sqrt{14}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ +1 & -3 & -1 \\ +2 & +3 & +1 \end{vmatrix} = -784\mathbf{i} - 784\mathbf{k} + \frac{C}{\sqrt{14}}(0\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k})$$

Por último, obtenemos

$$\mathbf{e}_{AB} \cdot \sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$$

$$\text{o sea, } \frac{\mathbf{i} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{5}}(-784\mathbf{i} - 784\mathbf{k}) + \frac{\mathbf{i} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{5}}\left(\frac{C}{\sqrt{14}}(-3\mathbf{j} + 9\mathbf{k})\right) = -784\sqrt{5} + \frac{2 \times 784}{\sqrt{5}} - \frac{18C}{\sqrt{5} \times \sqrt{14}} = 0$$

De donde se obtiene  $C = 163$  N.

Si se elige el punto  $B$  como centro de momentos se llega al mismo resultado.

- 6.6.** Un peso de 200 lb está siendo extraído de un orificio de 4 ft de diámetro. Tres personas regularmente espaciadas alrededor del borde del orificio sostienen tres cuerdas atadas al peso. ¿Qué tracción sufre cada cuerda cuando el peso está a 4 ft del borde? Se supone que (a) todas las personas ejercen la misma tracción, (b) el peso está centrado y (c) las personas sostienen las cuerdas justo en el borde.

### SOLUCIÓN

Las componentes verticales de las tres fuerzas deben sumar 200 lb; o sea,  $3T \cos \theta = 200$  lb, donde  $\theta$  es el ángulo que forma cada cuerda con la vertical. Luego

$$\theta = \operatorname{artg} \frac{2}{4} = 26,6^\circ \quad \text{y} \quad T = 74,5 \text{ lb}$$

- 6.7.** El sistema de la Figura 6.6 está sometido a una carga horizontal  $P$  de 100 N, contenida en el plano  $xy$ . Hallar la fuerza en cada pata.

### SOLUCIÓN

Los cálculos dan  $CE = 5$ ,  $BC = \sqrt{34}$  y  $AC = \sqrt{41}$  m.

Suponemos que las tres fuerzas no coplanares  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  tienen los sentidos indicados.

Sumamos las fuerzas paralelas al eje  $z$  para obtener una relación entre  $F_1$  y  $F_2$ . Tomamos momentos respecto a la recta  $AB$  para calcular  $F_3$ . Sumamos las fuerzas paralelas al eje  $x$  para obtener otra relación entre  $F_1$  y  $F_2$ . Las ecuaciones son

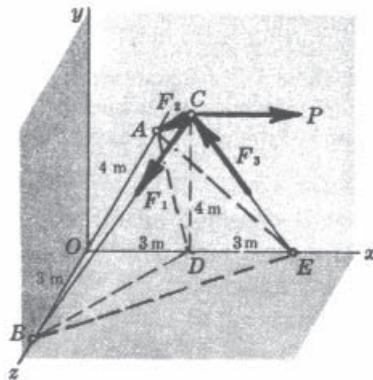


Figura 6.6

$$\sum F_z = 0 = +\frac{3}{\sqrt{34}} F_1 - \frac{4}{\sqrt{41}} F_2$$

$$\sum M_z = 0 = +\frac{4}{5} F_3 \times 6 - 100 \times 4$$

$$\sum F_x = 0 = +100 - \frac{3}{5} F_3 - \frac{3}{\sqrt{34}} F_1 - \frac{3}{\sqrt{41}} F_2$$

Los resultados son:  $F_1 = 55,6$  tracción,  $F_2 = 45,7$  N tracción,  $F_3 = 83,3$  N compresión.

- 6.8.** Resolver el Problema 6.7 empleando notación vectorial.

### SOLUCIÓN

Las cuatro fuerzas pueden expresarse como sigue en las direcciones indicadas:

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{3}{\sqrt{34}} F_1 \mathbf{i} - \frac{4}{\sqrt{34}} F_1 \mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{34}} F_1 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{3}{\sqrt{41}} F_2 \mathbf{i} - \frac{4}{\sqrt{41}} F_2 \mathbf{j} - \frac{4}{\sqrt{41}} F_2 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_3 = -\frac{3}{5} F_3 \mathbf{i} + \frac{4}{5} F_3 \mathbf{j} + 0$$

$$\mathbf{P} = 100 \mathbf{i}$$

Puesto que el sistema está en equilibrio, las sumas de las componentes  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  deben ser cero:

$$-\frac{3}{\sqrt{34}} F_1 - \frac{3}{\sqrt{41}} F_2 - \frac{3}{5} F_3 + 100 = 0$$

$$-\frac{4}{\sqrt{34}} F_1 - \frac{4}{\sqrt{41}} F_2 + \frac{4}{5} F_3 = 0$$

$$+\frac{3}{\sqrt{34}} F_1 - \frac{4}{\sqrt{41}} F_2 = 0$$

La solución del sistema anterior es  $F_1 = 55,6$  N (tracción, como se supuso),  $F_2 = 45,7$  N (tracción, como se supuso),  $F_3 = 83,3$  N (compresión, como se supuso).

*Nota:* En el Apéndice C se incluye un programa para el cálculo del Problema 6.8.

- 6.9.** Una mesa de  $600 \times 600$  mm está montada sobre tres patas. Se aplican cuatro fuerzas, tal como se muestra en la Figura 6.7. Hallar las tres reacciones. Puesto que sólo se dispone de tres ecuaciones independientes en un sistema paralelo, sólo son necesarios tres apoyos.

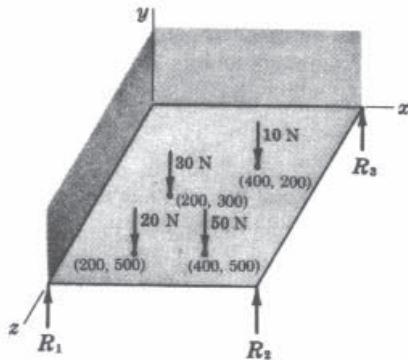


Figura 6.7

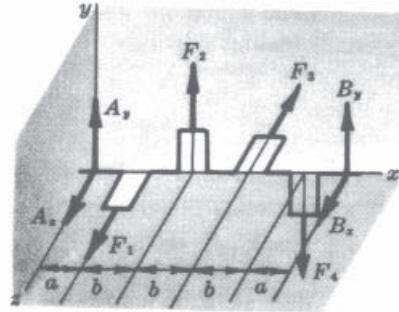


Figura 6.8

**SOLUCIÓN**

Empleando las tres ecuaciones de los sistemas paralelos, resulta el siguiente sistema:

$$\sum F_y = 0 = R_1 + R_2 + R_3 - 20 - 30 - 10 - 50 \quad (1)$$

$$\sum M_x = 0 = -R_1 \times 600 - R_2 \times 600 + 20 \times 500 + 30 \times 300 + 50 \times 500 + 10 \times 200 \quad (2)$$

$$\sum M_z = 0 = +R_2 \times 600 + R_3 \times 600 - 20 \times 200 - 50 \times 400 - 10 \times 400 - 30 \times 200 \quad (3)$$

Después de simplificar, resulta:

$$R_1 + R_2 + R_3 = 110 \quad (1')$$

$$R_1 + R_2 = 76,7 \quad (2')$$

$$R_2 + R_3 = 56,7 \quad (3')$$

Sustituyendo  $R_1 + R_2 = 76,7$  en (1') se obtiene  $76,7 + R_3 = 110$  o sea,  $R_3 = 33,3$  N.

Sustituyendo  $R_2 + R_3 = 56,7$  en (1') se obtiene  $R_1 + 56,7 = 110$  o sea,  $R_1 = 53,3$  N.

Finalmente, de (1'),  $R_2 = 110 - R_1 - R_3 = 23,4$  N.

*Nota:* Otro método de resolución es sumar los momentos respecto a las aristas  $R_1R_2$  y  $R_2R_3$  para hallar  $R_3$  y  $R_1$ , respectivamente.

- 6.10.** Un cigüeñal está sometido a tracciones  $F_1$  y  $F_3$ , paralelas al eje  $z$ , y  $F_2$  y  $F_4$ , paralelas al eje  $y$ . Véase la Figura 6.8. ¿Cuáles son las reacciones en los cojinetes  $A$  y  $B$  si todas las tracciones son de valor  $F$ ?

**SOLUCIÓN**

Se supone que las reacciones en los cojinetes tienen los sentidos positivos de los ejes  $y$  y  $z$ . Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum M_z = 0 = +F_2(a+b) - F_4(a+3b) + B_y(2a+3b) \quad (1)$$

$$\sum M_y = 0 = -F_1(a) + F_3(a+2b) - B_z(2a+3b) \quad (2)$$

$$\sum M_{B_z} = 0 = -A_y(2a+3b) - F_2(a+2b) + F_4(a) \quad (3)$$

$$\sum M_{B_y} = 0 = +A_z(2a+3b) + F_1(a+3b) + F_3(a+b) \quad (4)$$

En un motor real, las fuerzas podrían no ser iguales y de cada una de las ecuaciones anteriores se despejaría la incógnita que contiene. Si todas las fuerzas se suponen iguales

$$B_y = \frac{2b}{2a+3b}F \quad B_z = \frac{2b}{2a+3b}F \quad A_y = \frac{-2b}{2a+3b}F \quad A_z = \frac{-2b}{2a+3b}F$$

El signo menos significa que las componentes  $A_z$  y  $A_y$  realmente actúan hacia atrás y hacia abajo, respectivamente. La reacción total en  $B$  es paralela a la reacción total en  $A$ ; ambas son de igual módulo, pero de sentidos contrarios. Las dos forman un par como era de esperar, ya que  $F_1, F_3$  y  $F_2, F_4$  forman pares cuando se supone que las fuerzas son del mismo módulo.

- 6.11.** Se supone que la puerta de un automóvil que pesa 60 lb es de forma rectangular de 3 ft de ancho por 4 ft de alto, con centro de gravedad en su centro geométrico (Figura 6.9). La puerta está abierta 45°. El viento ejerce una fuerza de 50 lb perpendicular a la puerta y supuestamente concentrada en su centro geométrico. La manija de la puerta está a 28 in de la base y a 3 in del canto derecho. ¿Qué fuerza  $P$ , aplicada en el plano horizontal de la manija y a 20° respecto a la perpendicular a la puerta, es necesaria para mantenerla abierta? ¿Cuáles son las componentes de las reacciones de los goznes en  $A$  y  $B$ ? Tómese el eje  $x$  a lo largo de la puerta y supóngase que el gozne inferior soporta toda la carga vertical, o sea,  $A_y = 0$ .

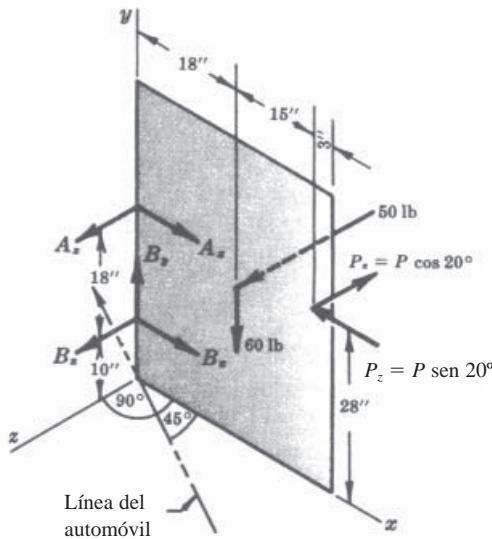


Figura 6.9

### SOLUCIÓN

En la Figura 6.9 se supone que las componentes de los goznes son positivas. Nótese que se ha descompuesto la fuerza  $P$  en dos componentes, una perpendicular y la otra paralela a la puerta.

Tomando momentos respecto al eje  $y$  se obtiene una ecuación con una sola incógnita,  $P_z$ , de donde se puede calcular  $P$ .

Sumando las fuerzas en la dirección  $z$  se obtiene una ecuación en  $A_z$  y  $B_z$ . Tomando momentos respecto al eje  $x$  se obtiene otra ecuación en  $A_z$  y  $B_z$ . Se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones.

Tomando momentos respecto al eje  $z$  y sumando las fuerzas en la dirección  $x$  se obtienen dos ecuaciones en  $A_x$  y  $B_x$ .

Sumando las fuerzas verticales  $x$  se obtiene una ecuación en  $B_y$ .

Las ecuaciones descritas en los párrafos anteriores son:

$$\sum M_y = 0 = -50 \times 18 + P_z \times 33 \quad (1)$$

$$\sum F_z = 0 = A_z + B_z + 50 - P_z \quad (2)$$

$$\sum M_x = 0 = +A_z \times 28 + B_z \times 10 + 50 \times 24 - P_z \times 28 \quad (3)$$

$$\sum M_z = 0 = -B_x + P_x \times 28 - 60 \times 18 - A_x \times 28 \quad (4)$$

$$\sum F_x = 0 = A_x + B_x - P_x \quad (5)$$

$$\sum F_y = 0 = B_y - 60 \quad (6)$$

De la ecuación (1),  $P_z = (50 \times 18)/33 = 27,3$  lb. Pero como  $P \cos 20^\circ = P_z = 27,3$  lb, entonces  $P = 29,1$  lb. Sustituimos  $P_z = 27,3$  lb en (2) y (3) y agrupamos los términos como sigue:

$$A_z + B_z = -50 + 27,3 \quad (2')$$

$$28A_z + 10B_z = -1200 + 765 \quad (3')$$

Resolvemos el sistema de las ecuaciones (2') y (3') y obtenemos  $A_z = -11,6$  lb,  $B_z = -11,1$  lb. Sustituyendo estos resultados en (4) y (5), obtenemos

$$-10B_x + 28(29,1 \times 0,342) - 28A_x = 1080 \quad (4')$$

$$A_x + B_x - 29,1 \times 0,342 = 0 \quad (5')$$

Resolvemos el sistema de (4') y (5') y obtenemos  $A_x = -50$  lb,  $B_x = +60$  lb. De (6),  $B_y = 60$  lb.

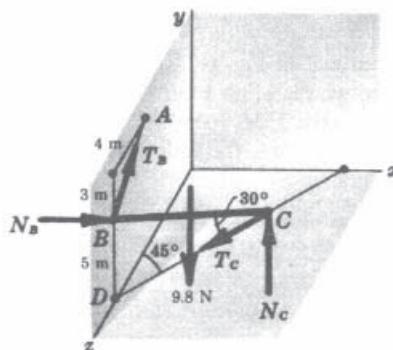


Figura 6.10

- 6.12.** Una barra homogénea  $BC$  de 10 m de largo y de 1 kg de masa se apoya por su extremo  $B$  contra una pared lisa y por su extremo  $C$  en un suelo liso (Figura 6.10). Hallar las tensiones en las cuerdas  $AB$  y  $DC$  que mantienen la barra en equilibrio. Obsérvese en la figura que  $BD$  es perpendicular al eje  $z$  y que  $AB$  está en el plano  $yz$ .

### SOLUCIÓN

Debe completarse el diagrama de cuerpo libre de la barra, añadiendo las reacciones normales de la pared y del suelo,  $N_B$  y  $N_C$ . Se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 = N_B - T_C \cos 45^\circ \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = T_B \times \frac{3}{5} - 9,8 + N_C \quad (2)$$

$$\sum M_z = 0 = -9,8 \times 5 \cos 30^\circ \cos 45^\circ + N_C \times 9,8 \cos 30^\circ \cos 45^\circ - N_B \times 5 \quad (3)$$

Estas tres ecuaciones contienen cuatro incógnitas y a primera vista parece que no pueden resolverse. De todas maneras, al ser una posición estable, la suma de las fuerzas perpendiculares al plano  $BCD$  ha de ser cero. Hay únicamente dos fuerzas ( $N_B$  y  $T_B$ ) que tengan componentes perpendiculares a dicho plano. De aquí,  $T_B \times \frac{4}{5} \times \cos 45^\circ = N_B \cos 45^\circ$ , o sea,  $T_B \times \frac{4}{5} = N_B$ .

Sustituimos este valor en la ecuación (2) y obtenemos  $N_C = 9,8 - \frac{3}{4}N_B$  que, sustituido a su vez en (3), da  $N_B = 3,03$  N. Luego  $T_B = \frac{5}{4} \times 3,03$  N = 3,79 N.

De (1),  $T_C = 3,03/0,707 = 4,29$  N.

- 6.13.** En la Figura 6.11(a) se muestran dos vistas de un torno. En los cojinetes no hay rozamiento. ¿Qué fuerza  $P$  perpendicular a la manivela es necesaria para sostener un peso de 200 lb en la posición mostrada? ¿Cuáles son las reacciones en los cojinetes en  $A$  y  $B$ ?

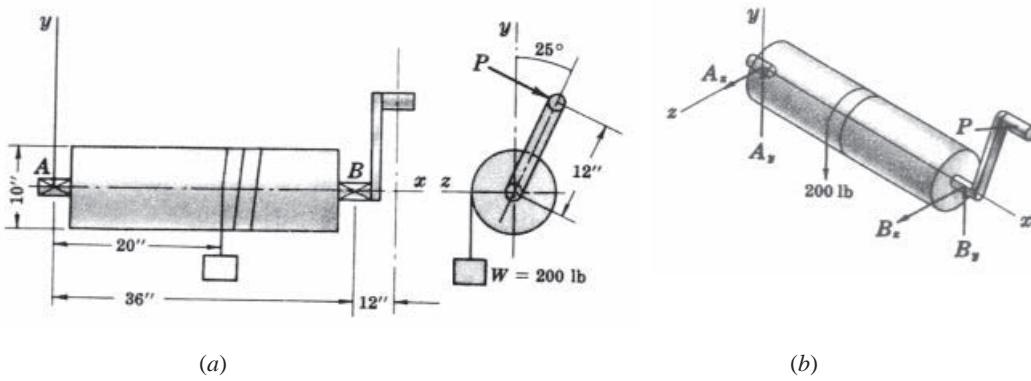


Figura 6.11

### SOLUCIÓN

La Figura 6.11(b) muestra el diagrama de cuerpo libre con todas las fuerzas que actúan en el torno. Como no actúa fuerza alguna en la dirección del eje del torno, no se ha indicado ninguna reacción en los cojinetes en la dirección  $x$ .

Suma de los momentos respecto al eje  $x$ :  $\sum M_x = 0 = -P \times 12 + 200 \times 5$ . De aquí,  $P = 83,3$  lb.

Para hallar las reacciones de los cojinetes, pueden emplearse las cuatro ecuaciones siguientes:

$$\sum M_y = 0 = -B_z \times 36 + P \cos 25^\circ \times 48 \quad (1)$$

$$\sum M_z = 0 = -200 \times 20 + B_y \times 36 - P \sin 25^\circ \times 48 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0 = A_y - 200 + B_y - P \sin 25^\circ \quad (3)$$

$$\sum F_z = 0 = A_z + B_z - P \cos 25^\circ \quad (4)$$

Obsérvese que la fuerza  $P$  (83,3 lb) se ha descompuesto en sus componentes  $P \cos 25^\circ$  y  $P \sin 25^\circ$ , de direcciones  $z$  e  $y$ , respectivamente. El momento de  $P$  respecto al eje  $y$ , por ejemplo, es sólo el momento de su componente  $z$  respecto al eje  $y$  y, por consiguiente, no tiene momento respecto a él.

De (1),  $B_z = 101$  lb; de (2),  $B_y = 158$  lb.

Sustituyendo  $B_y$ ,  $B_z$  y  $P$  en (3) y (4), se obtiene  $A_y = 77,2$  lb y  $A_z = -25,5$  lb.

- 6.14.** Hallar las reacciones en los cojinetes en  $A$  y  $B$  del árbol horizontal de la Figura 6.12(a). Las poleas son solidarias del árbol. Las cargas en la polea mayor son horizontales y en la menor verticales.

### SOLUCIÓN

La Figura 6.12(b) muestra el diagrama de cuerpo libre, con los ejes convenientes. Para hallar  $P$ , se suman los momentos respecto al eje  $x$  y se obtiene

$$P \times 2 - 80 \times 2 + 40 \times 4 - 60 \times 4 = 0, \quad \text{o sea,} \quad P = 120 \text{ lb}$$

A falta de fuerzas externas en la dirección  $x$ ,  $A_x = B_x = 0$ . La suma de los momentos respecto a  $A_z$  da

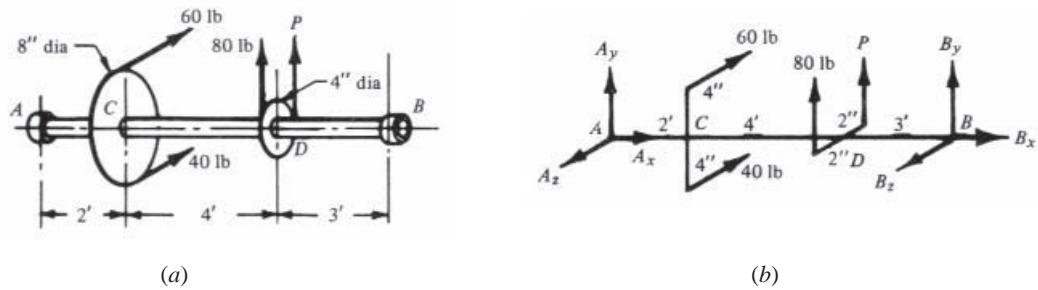


Figura 6.12

$$80 \times 6 + 120 \times 6 + B_y \times 9 = 0$$

$$\text{De aquí, } B_v = -133,3 \text{ lb}$$

La suma de los momentos respecto a  $B_z$  da

$$-80 \times 3 - 120 \times 3 - A_v \times 9 = 0$$

de donde  $A_v = -66,7 \text{ lb}$

Comprobamos que la suma de  $A_y$  y  $B_y$  da 200 lb hacia abajo, igual a la suma de las dos fuerzas hacia arriba que actúan en la polea menor.

Para hallar  $B_z$ , se emplea la suma de momentos respecto a  $A_v$ . Por tanto,

$$-60 \times 2 - 40 \times 2 + B_z \times 9 = 0$$

$$\text{de donde } B_z = -22.2 \text{ lb hacia adelante}$$

Para hallar  $A_z$ , se emplea la suma de momentos respecto a  $B_v$ . Por tanto,

$$-60 \times 7 + 40 \times 7 - A_z \times 9 = 0, \quad \text{o sea.} \quad A_z = 77.8 \text{ lb hacia adelante}$$

Comprobamos que la suma de  $A_z$  y  $B_z$  es 100 lb hacia adelante, igual a la suma de las dos fuerzas hacia atrás que actúan en la polea mayor.

- 6.15.** La viga *EF* de la Figura 6.13 pesa 10 lb/ft, y de su extremo cuelga un peso de 138 lb. Está sostenida por una rótula en *E* y por los cables *AB* y *CD*. Hallar las tensiones en *AB* y *CD* y las reacciones en la rótula

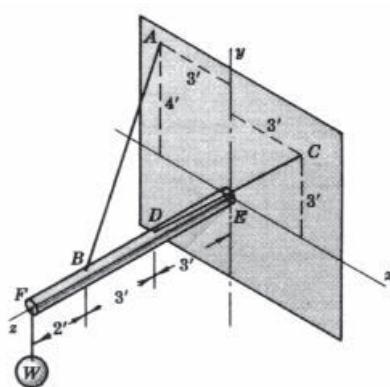


Figura 6.13

## SOLUCIÓN

Elegimos los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  tal como se muestra en la Figura 6.13. Para el equilibrio de la viga, empleamos  $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$  y  $\sum \mathbf{M}_E = \mathbf{0}$ .

Las fuerzas que actúan en el sistema son:

- (1) El peso  $W$  de 138 lb, vertical descendente, que puede escribirse  $-138\mathbf{j}$ .

- (2) El peso  $W$  de la viga de  $8 \times 10$  lb, que puede escribirse  $-80\mathbf{j}$ .  
 (3) La reacción de la rótula que es  $E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}$ .  
 (4) La tensión en  $AB$  que puede escribirse  $A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ , donde

$$A_x = A \cos \theta_x = -\frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 6^2}} A = -\frac{3}{\sqrt{61}} A = -0,384A$$

$$A_y = A \cos \theta_y = +\frac{4}{\sqrt{61}} A = +0,512A$$

$$A_z = A \cos \theta_z = -\frac{6}{\sqrt{61}} A = -0,768A$$

El signo de las componentes queda definido admitiendo tensión en  $AB$ , la cual tira de la viga  $EF$  en el sentido de  $B$  a  $A$ , o sea, en el sentido negativo de  $x$ , positivo de  $y$  y negativo de  $z$ .

- (5) La tensión en  $CD$  puede escribirse  $C_x\mathbf{i} + C_y\mathbf{j} + C_z\mathbf{k}$ , donde

$$C_x = C \cos \theta_x = +\frac{3}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2}} C = +\frac{3}{\sqrt{27}} C = +0,577C$$

$$C_y = C \cos \theta_y = +\frac{3}{\sqrt{27}} C = +0,577C$$

$$C_z = C \cos \theta_z = -\frac{3}{\sqrt{27}} C = -0,577C$$

Es aconsejable resumir las cinco fuerzas y sus vectores de posición respecto al punto  $E$ :

- (1')  $-138\mathbf{j}$  en  $(0, 0, 8)$   
 (2')  $-80\mathbf{j}$  en  $(0, 0, 4)$   
 (3')  $E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}$  en  $(0, 0, 0)$   
 (4')  $-0,384A_x\mathbf{i} + 0,512A_y\mathbf{j} - 0,768\mathbf{k}$  en  $(0, 0, 6)$ .  
 (5')  $+0,577C\mathbf{i} + 0,577C\mathbf{j} - 0,577C\mathbf{k}$  en  $(0, 0, 3)$

La suma de los momentos de estas cinco fuerzas respecto a  $E$  (origen de coordenadas) debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & -138 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -80 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 6 \\ -0,384A & +0,512A & -0,768A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 0,577C & 0,577C & -0,577C \end{vmatrix} = 0$$

o sea,  $8(138)\mathbf{i} + 4(80)\mathbf{i} + [-6(0,512A)\mathbf{i} - 6(0,384A)\mathbf{j}] + [-3(0,577C)\mathbf{i} + 3(0,577C)\mathbf{j}] = 0$

Igualando a cero los coeficientes de  $\mathbf{i}$  y de  $\mathbf{j}$ :

$$1424 - 3,072A - 1,731C = 0 \quad \text{y} \quad -2,304A + 1,731C = 0$$

de donde  $A = 265$  lb y  $C = 353$  lb. De aquí,

$$\mathbf{A} = -0,384(265)\mathbf{i} + 0,512(265)\mathbf{j} - 0,768(265)\mathbf{k} = -102\mathbf{i} + 136\mathbf{j} - 204\mathbf{k}$$

$$\mathbf{C} = 0,577(353)\mathbf{i} + 0,577(353)\mathbf{j} - 0,577(353)\mathbf{k} = 204\mathbf{i} + 204\mathbf{j} - 204\mathbf{k}$$

Para hallar la reacción de la rótula, igualamos a cero los coeficientes de los términos en  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  en la ecuación  $\sum \mathbf{F} = 0$ :

$$E_x - 102 + 204 = 0 \quad -138 - 80 + E_y + 136 + 204 = 0 \quad E_z - 204 - 204 = 0$$

de donde  $E_x = -102$  lb,  $E_y = -122$  lb,  $E_z = +408$  lb.

### Problemas propuestos

- 6.16.** En la Figura 6.14, una masa de 30 kg está sostenida por un miembro,  $CD$ , a compresión y dos a tracción,  $AC$  y  $BC$ .  $CD$  forma un ángulo de  $40^\circ$  con la pared.  $A$ ,  $B$  y  $C$  están en el mismo plano horizontal.  $AE = EB = 1000$  mm. Hallar las fuerzas en  $AC$ ,  $BC$  y  $CD$ .

*Resp.*  $AC = BC = 143$  N T,  $CD = 384$  N C

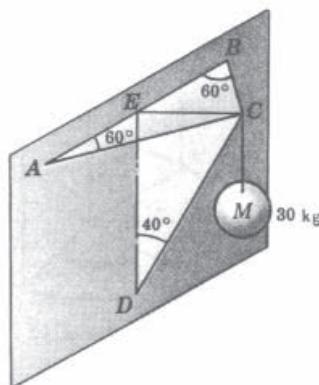


Figura 6.14

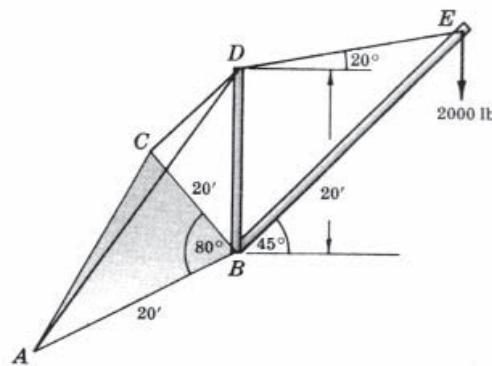


Figura 6.15

- 6.17.** La grúa de la Figura 6.15 consiste en una pluma  $BE$ , una columna  $BD$  (vertical) y tres cables  $AD$ ,  $CD$  y  $DE$ .  $A$ ,  $B$  y  $C$  están en el mismo plano horizontal. El plano que contiene a  $BD$ ,  $BE$  y  $DE$  corta a  $AC$  en su punto medio. Hallar las fuerzas en  $AD$ ,  $CD$  y  $BD$ .

*Sugerencia:* Considerar primero el sistema coplanario y concurrente en  $E$  para hallar la fuerza en  $DE$  y a continuación el sistema concurrente no coplanario en  $D$ .

*Resp.*  $AD = CD = 2910$  lb T,  $BD = 2970$  lb C.

- 6.18.** En el extremo superior del poste  $DB$  de la Figura 6.16 actúa una tracción horizontal de 400 N. El poste está en equilibrio gracias a dos vientos  $AD$  y  $CD$ .  $A$ ,  $B$  y  $C$  están a nivel de suelo. Hallar las fuerzas sobre  $AD$  y  $CD$ . *Resp.*  $AD = 366$  N T,  $CD = 293$  N T.

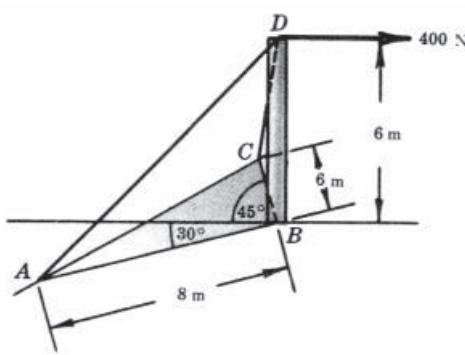


Figura 6.16

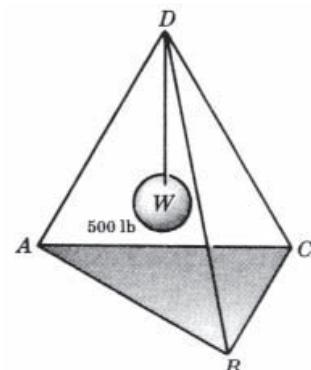


Figura 6.17

- 6.19.** Una cámara de vídeo de 2 kg de masa descansa en un trípode de patas simétricamente espaciadas que forman con la vertical ángulos de  $18^\circ$ . Se supone que el sistema de fuerzas concurre en un punto a 1200 mm por encima del suelo. Hallar la fuerza en cada pata. *Resp.*  $C = 6,87 \text{ N}$
- 6.20.** Un peso de 500 lb cuelga de una cuerda en un trípode de patas de igual longitud (Figura 6.17). Las patas forman un ángulo de  $30^\circ$  con la cuerda.  $A$ ,  $B$  y  $C$  forman un triángulo equilátero en el plano horizontal. Hallar la fuerza en cada pata.  
*Resp.*  $AD = BD = CD = 192 \text{ lb}$   $C$ .
- 6.21.** La mesa circular de 1800 mm de diámetro de la Figura 6.18, soporta una carga de 400 N, localizada en un diámetro que pasa por el soporte  $R_1$  a 300 mm del centro en el lado opuesto de  $R_1$ .  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  están regularmente espaciados. Hallar las fuerzas en los soportes.  
*Resp.*  $R_1 = 44 \text{ N}$ ,  $R_2 = 178 \text{ N}$ ,  $R_3 = 178 \text{ N}$
- 6.22.** Si la tensión máxima admisible en cada cable es de 3500 lb, calcular el peso permisible de la placa circular homogénea de radio 5 ft de la Figura 6.19. *Resp.* 7800 lb

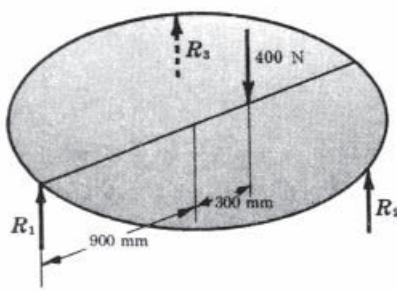


Figura 6.18

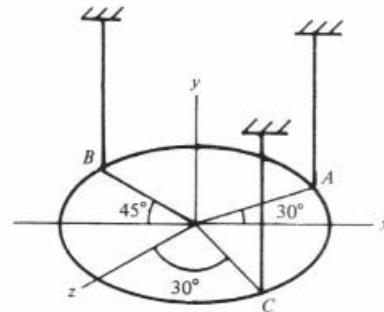


Figura 6.19

- 6.23.** La placa triangular de la Figura 6.20 soporta una carga de 140 N a 1200 mm del vértice izquierdo, sobre la bisectriz del ángulo correspondiente.  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$  son las tensiones en los tres hilos verticales de sujeción. ¿Cuánto valen? *Resp.*  $T_1 = 41,0 \text{ N}$ ,  $T_2 = T_3 = 49,5 \text{ N}$

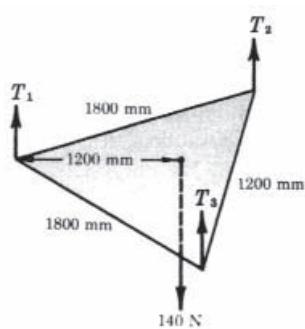


Figura 6.20

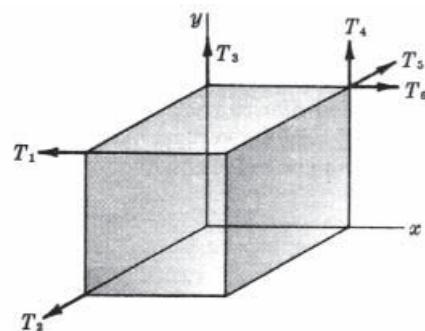


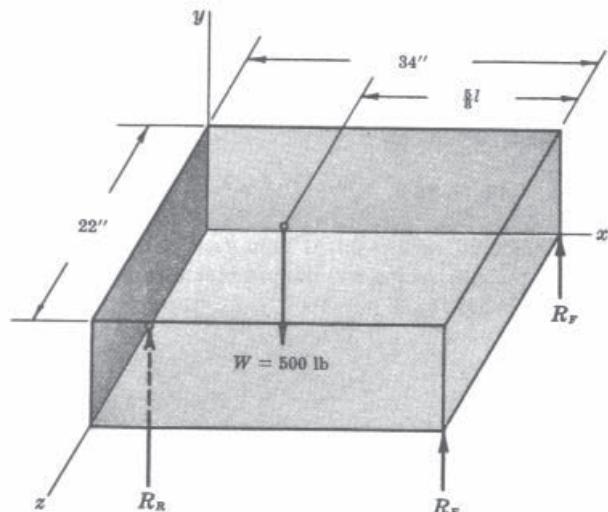
Figura 6.21

- 6.24.** Un cubo uniforme de peso  $W$  está sostenido por seis hilos unidos a sus vértices (Figura 6.21). Los hilos son perpendiculares a las caras, es decir, sus direcciones son aristas del cubo. Hallar la tensión en los hilos para mantener el cubo en equilibrio. *Resp.*  $T = W/2$
- 6.25.** En la Figura 6.22 se representa el esquema en bloque de un motor de 500 lb de peso, cuyo centro de gravedad se encuentra a  $5/8$  de la longitud total de su eje geométrico longitudinal, midiendo desde el frente derecho. Si la base es de 22 in de ancho y 34 in de largo, ¿cuánto valen las

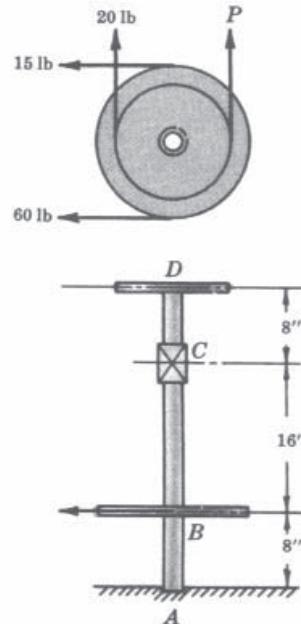
reacciones en los soportes, suponiendo que dos de éstos están situados en los dos vértices delanteros y el otro en el punto medio de la parte posterior del motor.

*Resp.*      $R_F = 94$  lb y  $R_R = 312$  lb

- 6.26.** En la Figura 6.23, un árbol vertical que pesa 40 lb soporta dos poleas que pesan 12 y 19 lb, respectivamente. Los diámetros de las poleas en  $B$  y  $D$  son, respectivamente, 16 y 12 in. Las tracciones de 15 y 60 lb tienen la dirección  $x$ , mientras que la de 20 lb y  $P$  son de dirección  $z$ . El cojinetе en  $C$  y la rangua en  $A$  se suponen sin rozamiento. Hallar la fuerza  $P$  y las reacciones en  $A$  y  $C$ . *Resp.*  $P = 80$  lb,  $A_x = 50$  lb,  $A_y = 61$  lb,  $A_z = -33$  lb,  $C_x = 25$  lb,  $C_z = 133$  lb,  $C_y = 0$



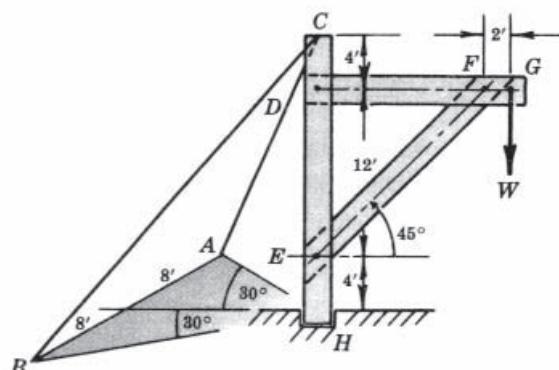
**Figura 6.22**



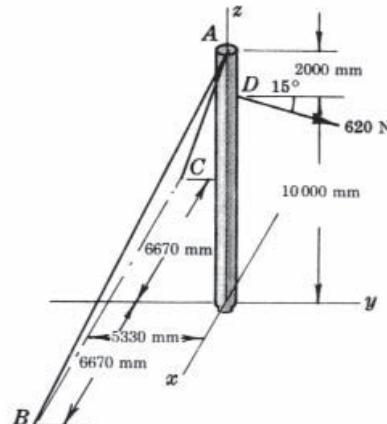
**Figura 6.23**

- 6.27.** En la grúa simple de la Figura 6.24,  $CH$  es vertical,  $GD$  es horizontal y  $AC$  y  $BC$  vientos. Los puntos  $A$  y  $B$  equidistan del plano que contiene a  $CH$ ,  $DG$  y  $EF$ . El peso  $W = 4000$  lb. Hallar la tensión en  $AC$  y la reacción en  $H$ .

Resp.  $AC = 2590 \text{ lb}$   $T, H_x = 2800 \text{ lb}$ ,  $H_y = 8040 \text{ lb}$ ,  $H_z = 0$



**Figura 6.24**



**Figura 6.25**

- 6.28.** El poste vertical de la Figura 6.25 está sometido a una tracción de 620 N en el plano  $yz$  a  $15^\circ$  por debajo de la horizontal. Los vientos  $AB$  y  $AC$  están sujetos a soportes en el plano  $xy$ . El poste descansa en una ranga. ¿Cuál es la tensión de cada cable? *Resp.*  $T_{AB} = T_{AC} = 689$  N
- 6.29.** La escotilla homogénea de la Figura 6.26 pesa 96 lb. ¿Qué tensión en la cuerda es necesaria para mantenerla levantada  $26^\circ$ , tal como se muestra? ¿Cuánto valen las reacciones en los goznes  $A$  y  $B$ ? Se supone que la polea  $D$  está en el eje vertical  $z$ .  
*Resp.*  $T = 52,4$  lb,  $A_x + B_x = -28,8$  lb,  $A_y = +30,0$  lb,  $A_z = +30,7$  lb,  $B_y = -4,3$  lb,  $B_z = +29,9$  lb

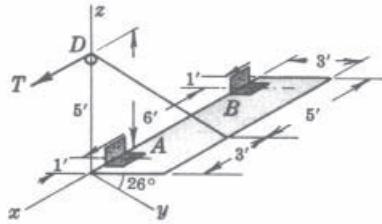


Figura 6.26

- 6.30.** La pluma  $EF$  de la Figura 6.27 es de masa despreciable. Está soportada por los cables  $AB$  y  $CD$  y una ranga en  $E$ . Hallar las tensiones en los dos cables y las reacciones en  $E$ .  
*Resp.* Tensión en  $AB = 9020$  N, tensión en  $CD = 5590$  N,  $E_x = -1600$  N,  $E_y = 8600$  N,  $E_z = -3630$  N

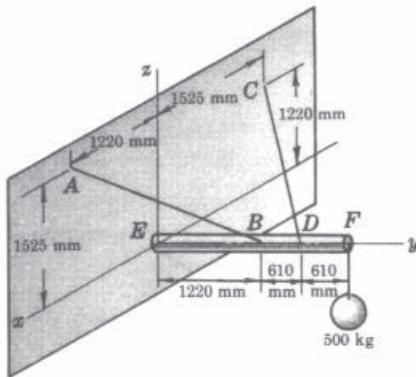


Figura 6.27

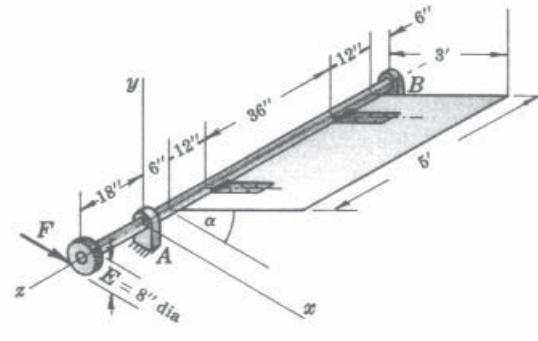


Figura 6.28

- 6.31.** La puerta de la Figura 6.28 está unida a bandas soldadas a la barra  $EB$ . Ésta está soportada por cojinetes en  $A$  y  $B$ , y en su extremo soporta un engranaje  $E$ . Un piñón (no mostrado) ejerce una fuerza horizontal  $F$  en el borde inferior del engranaje  $E$ . Suponiendo que la puerta sea homogénea y que pese 30 lb, hallar la fuerza  $F$  y las reacciones en los cojinetes cuando  $\alpha = 58^\circ$ .  
*Resp.*  $F = 71,5$  lb,  $A_x = -89,5$  lb,  $A_y = 15$  lb,  $A_z = 0$ ,  $B_x = 17,9$  lb,  $B_y = 15$  lb,  $B_z = 0$
- 6.32.** Repetir el Problema 6.31 con  $\alpha = 32^\circ$ .  
*Resp.*  $F = 114,5$  lb,  $A_x = -143,1$  lb,  $A_y = 15$  lb,  $A_z = 0$ ,  $B_x = 28,6$  lb,  $B_y = 15$  lb,  $B_z = 0$
- 6.33.** En el Problema 6.30, si la máxima resistencia de ambos cables es de 8000 N, ¿cuál es la mayor masa permitida en  $F$ ? *Resp.*  $M = 443$  kg

# 7

# CERCHAS Y CABLES

## 7.1 CERCHAS Y CABLES

Son ejemplos de sistemas de fuerzas copланarias en equilibrio (véase el Capítulo 5)

## 7.2 CERCHAS

### Hipótesis

1. Se supone que las cerchas están formadas por barras rígidas en un plano. Esto significa que intervienen sistemas de fuerzas copланarias.
2. Los pesos de los miembros se desprecian, porque son pequeños comparados con las cargas.
3. Las fuerzas se transmiten de una barra a otra a través de pasadores lisos que se ajustan perfectamente a las barras, las cuales, al ser cuerpos de dos fuerzas, pueden estar sometidas a tracción ( $T$ ) o a compresión ( $C$ ).

### Solución por el método de los nudos

En este método se utilizan los diagramas de cuerpo libre de los pasadores de la cercha. Es condición que no actúen en el pasador más de dos fuerzas desconocidas porque, al tratarse de un sistema de fuerzas concurrentes, sólo se dispone de dos ecuaciones. Se procede de articulación en articulación (de nudo en nudo) hasta haber hallado todas las incógnitas.

### Solución por el método de las secciones

En el método de los nudos, se hallan las fuerzas en los distintos miembros utilizando los diagramas de cuerpo libre de los pasadores, tal como acaba de exponerse. En el método de las secciones, se toma el diagrama de cuerpo libre de una parte de la cercha. Para aislar esa parte, debe cortarse un cierto número de miembros, incluyendo miembros de fuerzas desconocidas. Las fuerzas en los miembros cortados actúan como fuerzas externas, asegurando el equilibrio de la parte aislada. Puesto que el sistema es no concurrente y no paralelo, se dispone de tres ecuaciones. Por consiguiente, en una sección no puede haber más de tres fuerzas desconocidas. Hay que asegurarse de haber aislado completamente el cuerpo libre y, al mismo tiempo, de no tener más de tres fuerzas desconocidas.

## 7.3 CABLES

### Parabólico

La carga del cable es de  $w$  unidades de fuerza por unidad de longitud *horizontal*, es decir, lb/ft o N/m. Adquiere así forma parabólica, tal como se muestra en la Figura 7.1. En la figura, los soportes están al mismo nivel. Se desprecian las variaciones de temperatura que harían cambiar la tensión.

A este sistema copланario son aplicables las ecuaciones siguientes:

$$d = \frac{wa^2}{8H} \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{2} wa \sqrt{1 + \frac{a^2}{16d^2}} \quad (2)$$

$$l = a \left[ 1 + \frac{8}{3} \left( \frac{d}{a} \right)^2 - \frac{32}{5} \left( \frac{d}{a} \right)^4 + \frac{256}{7} \left( \frac{d}{a} \right)^6 + \dots \right] \quad (3)$$

donde  $d$  = flecha en pies o metros

$w$  = carga en lb/ft o N/m

$a$  = luz en pies o metros

$H$  = tensión en el punto medio en libras o newtons

$T$  = tensión en los soportes en libras o newtons

$l$  = longitud del cable en pies o metros

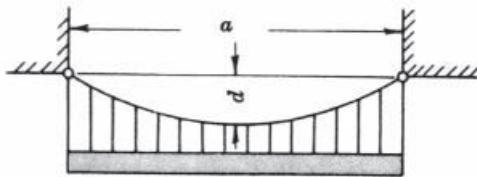


Figura 7.1

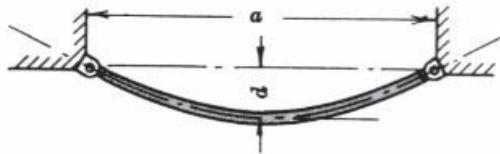


Figura 7.2

### Catenaria

Este cable sostiene una carga en lb/ft o N/m *a lo largo del cable*, en vez de horizontalmente como en el caso parabólico. En este caso, el cable adopta la forma de una curva catenaria tal como se ilustra en la Figura 7.2, en que un cable está suspendido de dos puntos al mismo nivel.

Para resolver este tipo de problemas, despreciando los cambios de temperatura, sea

$T$  = tensión a una distancia  $x$  del punto medio

$s$  = longitud del cable desde el punto medio al punto en que la tensión es  $T$

$w$  = carga en lb/ft o N/m a lo largo del cable, es decir, peso por pie o metro

$a$  = luz en pies o metros

$d$  = flecha en pies o metros

$l$  = longitud total en pies o metros

$H$  = tensión en el punto medio en libras o newtons

$T_{\max}$  = tensión en el soporte en libras o newtons

Con referencia al diagrama de cuerpo libre de una porción de cable a la derecha del centro (Figura 7.3), obsérvese que el eje  $x$  está situado a una distancia  $c$  por debajo del centro del cable. Ello simplifica los cálculos.

Las expresiones aplicables a la catenaria son las siguientes. Obsérvese que  $T$  se convierte en  $T_{\max}$  cuando  $x = a/2$  y  $y = c + d$ .

$$c = \frac{H}{w} \quad (1)$$

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \quad y \quad c + d = c \cosh \frac{a}{2c} \quad (2)$$

$$T = wy \quad y \quad T_{\max} = w(c + d) \quad (3)$$

$$s = c \operatorname{senh} \frac{x}{c} \quad y \quad \frac{l}{2} = c \operatorname{senh} \frac{a}{2c} \quad (4)$$

$$y^2 = c^2 + s^2 \quad y \quad (c + d)^2 = c^2 + \frac{l^2}{4} \quad (5)$$

Los problemas de catenarias que pueden presentarse pueden ser tales que:

- (a) se conocen la luz y la flecha, o sea,  $a$  y  $d$ ;
- (b) se conocen la luz y la longitud, o sea,  $a$  y  $l$ ;
- (c) se conocen la flecha y la longitud, o sea,  $d$  y  $l$ .

En el caso (a) se resuelve (2) por tanteo para hallar  $c$ . Con (3) se obtiene  $T_{\max}$  y con (4) o (5) se calcula  $l$ .

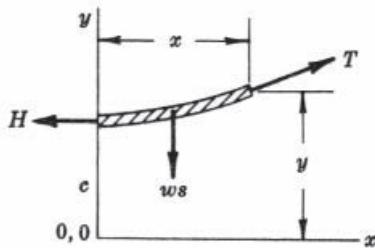


Figura 7.3

En el caso (b) se resuelve (4) por tanteo para hallar  $c$ . Con (5) se obtiene  $d$  y con (3) se calcula  $T_{\max}$ . En el caso (c), en (5) se despeja  $c$ . Con (3) se obtiene  $T_{\max}$  y con (2) o (4) se calcula  $a$ .

### Problemas resueltos

- 7.1.** La cercha simple de la Figura 7.4(a) soporta las dos cargas que se muestran. Hallar las reacciones y las fuerzas en cada miembro.

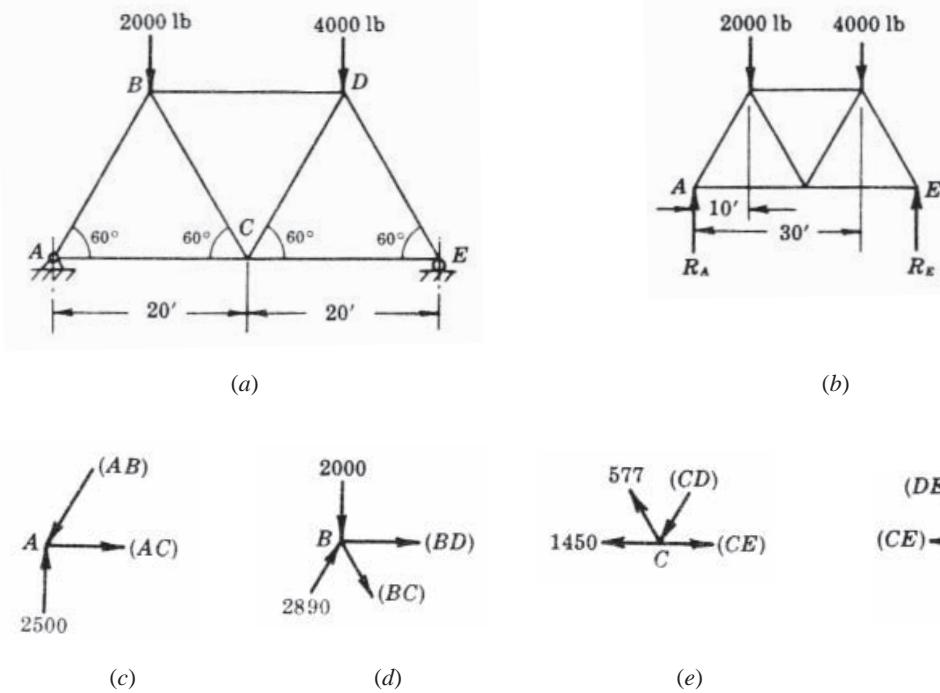


Figura 7.4

### SOLUCIÓN

La Figura 7.4(b) es el diagrama de cuerpo libre de la cercha completa, que permite hallar  $R_A$  y  $R_E$ . Puesto que las dos cargas son verticales y en  $E$  hay un apoyo liso, en  $A$  y en  $E$  las reacciones deben ser verticales, tal como se representan.

$$\sum M_A = 0 = R_E \times 40 - 4000 \times 30 - 2000 \times 10 \quad R_E = 3500 \text{ lb} \quad (1)$$

$$\sum M_E = 0 = -R_A \times 40 + 2000 \times 30 + 4000 + 10 \quad R_A = 2500 \text{ lb} \quad (2)$$

Desde luego, la suma de fuerzas verticales (las dos fuerzas dadas y las dos reacciones calculadas) es cero, lo que comprueba los resultados.

La Figura 7.4(c) es el diagrama de cuerpo libre del nudo A. La reacción de 2500 lb se ha dibujado ascendente. La única fuerza que puede tener componente descendente para equilibrar  $R_A$  es la fuerza en el miembro AB. Se ha indicado con sentido hacia el nudo, lo que significa que la fuerza en el miembro AB es de compresión. Puesto que la fuerza (AB) actúa hacia la izquierda y hacia abajo, alguna fuerza debe tener componente hacia la derecha para equilibrarla. Por consiguiente, el sentido de la fuerza (AC) es hacia la derecha, empujando al nudo. El nudo empuja hacia la izquierda al miembro AC, lo que significa que (AC) es una fuerza de tracción.

Las ecuaciones de equilibrio del sistema concurrente de la Figura 7.4(c) son:

$$\sum F_h = 0 = +(AC) - (AB) \cos 60^\circ \quad (3)$$

$$\sum F_x = 0 = +2500 - (AB) \sin 60^\circ \quad (4)$$

Resolviendo,  $(AB) = +2500/0,866 = +2890$  lb,  $(AC) = (AB) \cos 60^\circ = +1450$  lb. El signo más indica que los sentidos elegidos son los correctos. De aquí,  $(AB) = 2890$  lb C,  $(AC) = 1450$  lb T.

A continuación se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nudo en B [Figura 7.4(d)]. Podría haberse elegido el nudo en C, pero en él habría tres fuerzas desconocidas: (BC), (CD) y (CE). En esta figura el miembro AB está comprimido y debe empujar a la articulación. Los sentidos de las fuerzas (BD) y (BC) son desconocidos. En vez de gastar tiempo tratando de decidir los sentidos, se supone que ambos son de tracción. Un signo más en el resultado indica que se trata de tracción, mientras que un menos indica compresión. Las ecuaciones para este sistema son:

$$\sum F_h = 0 = (BD) + 2890 \cos 60^\circ + (BC) \cos 60^\circ \quad (5)$$

$$\sum F_v = 0 = 2890 \sin 60^\circ - 2000 - (BC) \sin 60^\circ \quad (6)$$

Resolviendo (6),  $(BC) = 577$  lb T. Sustituyendo en (5),  $(BD) = -1730$  lb. Como el signo es negativo, en realidad el miembro está comprimido.

A continuación se dibuja el diagrama de cuerpo libre del nudo en C [Figura 7.4(e)]. Se han incluido los dos valores de (AC) y (BC). Puesto que la componente vertical de (BC) es ascendente, (CD) debe estar comprimido. Si esto no está claro, supóngase que está en tracción y un signo menos indicará que está comprimido. Las ecuaciones son:

$$\sum F_h = 0 = (CE) - 1450 - 577 \cos 60^\circ - (CD) \cos 60^\circ \quad (7)$$

$$\sum F_v = 0 = +577 \sin 60^\circ - (C) \cos 60^\circ \quad (8)$$

Resolviendo,  $(CD) = 577$  lb C y  $(CE) = 2020$  lb T.

El siguiente diagrama de cuerpo libre para calcular la fuerza (DE) puede ser el de D o el de E. La Figura 7.4(f) es el diagrama de cuerpo libre del nudo E. Obsérvese que la fuerza (CE) se ha supuesto desconocida. Se ha hecho deliberadamente para comprobar el valor hallado en el nudo C. Las ecuaciones son:

$$\sum F_x = 0 = 3500 - (DE) \sin 60^\circ \quad (9)$$

$$\sum F_h = 0 = (DE) \cos 60^\circ - (CE) \quad (10)$$

Resolviendo,  $(DE) = 4030$  lb C y  $(CE) = 2020$  lb T.

- 7.2.** Hallar las fuerzas en FH, HG, IG y IK de la cercha cuyo esquema se muestra en la Figura 7.5. Todas las cargas son de 2 kilonewtons (kN). Todos los triángulos son equiláteros de 4 m de lado.

### SOLUCIÓN

En primer lugar, observamos en qué miembros hemos de hallar las fuerzas. Cortamos tantos de esos miembros como sea posible, pero no más de tres en los que sean desconocidas las fuerzas. El primer corte debe

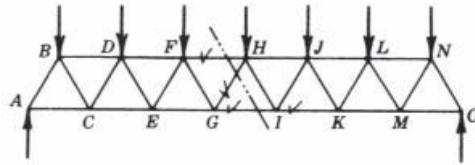


Figura 7.5

pasar por  $FH$ ,  $HG$  y  $GI$ . Puede escogerse entre el diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda y el de la derecha. Se escoge aquél en el que figuren menos fuerzas exteriores, la parte izquierda en este caso. La Figura 7.6 es el diagrama de cuerpo libre de esta parte. Suele ser preferible suponer que las fuerzas desconocidas son tracciones, recordando que un signo menos en el resultado significa compresión. Una flecha alejándose del cuerpo representa que el miembro tira del cuerpo y que, por tanto, está a tracción.

La reacción izquierda de 7 kN se ha obtenido analizando la cercha completa, que es simétrica y está simétricamente cargada.

Al diagrama de cuerpo libre pueden aplicarse tres ecuaciones de equilibrio cualesquiera. La suma de momentos respecto a  $G$  da una ecuación con una sola incógnita, la fuerza ( $FH$ ). La suma de momentos respecto a  $H$  (externo a la figura) da una ecuación con una sola incógnita, la fuerza ( $GI$ ), puesto que los miembros  $FH$  y  $HG$  se cortan en  $H$ . Por último, de la suma de fuerzas verticales se obtiene la fuerza ( $HG$ ). Siguiendo este procedimiento, resulta:

$$\sum M_G = 0 = -(FH) \times 2 \operatorname{tg} 60^\circ - 7 \times 12 + 2 \times 10 + 2 \times 6 + 2 \times 2 \quad (FH) = -13,9 \text{ kN } C \quad (1)$$

$$\sum M_H = 0 = +(GI) \times 2 \operatorname{tg} 30^\circ - 7 \times 14 + 2 \times 12 + 2 \times 8 + 2 \times 4 \quad (GI) = 14,4 \text{ kN } T \quad (2)$$

$$\sum F_v = 0 = +7 - 2 - 2 - 2 + (HG) \operatorname{sen} 60^\circ \quad (HG) = -1,15 \text{ kN } C \quad (3)$$

Como comprobación de los resultados obtenidos con este diagrama de cuerpo libre, sumamos las fuerzas horizontales (ecuación no utilizada en la solución) para asegurarnos de que el resultado es cero.

$$\sum F_h = -13,9 + 14,4 - 1,15 \cos 60^\circ = 0 \quad (4)$$

Para hallar la fuerza en el miembro  $IK$ , cortamos tal como se muestra en la Figura 7.7. Tomamos momentos respecto al punto  $J$ , y obtenemos

$$\sum M_J = 0 = -(IK) \times 2 \operatorname{tg} 60^\circ - 2 \times 4 - 2 \times 8 + 7 \times 10 \quad (IK) = 13,3 \text{ kN } T \quad (5)$$

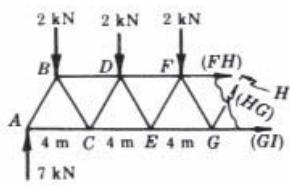


Figura 7.6

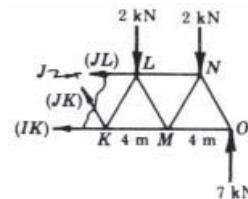


Figura 7.7

- 7.3.** La máxima fuerza permitida (tracción o compresión) en los miembros  $DC$ ,  $DF$  o  $EF$  de la cercha de la Figura 7.8(a) se sabe que es de 40 kips (40 000 lb). Calcular la carga máxima permitida  $P$ .

### SOLUCIÓN

Para emplear el método de las secciones, dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la Figura 7.8(b).

La suma de momentos respecto a  $A$  tiene una sola fuerza  $DF$  en la ecuación; de aquí:  $(DF) = 0$ .

A continuación utilizamos la suma de momentos respecto a  $D$  para hallar  $EF$ . Obsérvese que  $(DC)$  y  $(DF)$  se cortan en  $D$ , y, por tanto, sus momentos son cero. Además, puesto que la recta de acción de  $(EF)$  pasa por  $A$ , su momento es sólo el momento de su componente vertical en  $A$ . Así pues:

$$\sum M_D = 0 = -36P - [(EF) \operatorname{sen} 30^\circ] 36, \quad \text{o sea,} \quad (EF) = -2P$$



Figura 7.8

De la suma de momentos respecto a  $F$  se obtiene  $(DC)$  como sigue (obsérvese que  $CF = 24 \operatorname{tg} 30^\circ = 13,84$  ft)

$$\sum M_F = 0 = (DC) \times 13,84 - 24P, \quad \text{o sea,} \quad (DC) = 1,73P$$

Para hallar la carga máxima  $P$ , hacemos,  $(EF) = 40.000 = 2P$ . Por ello,

$$P = 20.000 \text{ lb}$$

- 7.4.** Hallar las fuerzas en los miembros  $BD$ ,  $CD$  y  $CE$  de la cercha Fink de la Figura 7.9.

#### SOLUCIÓN

Empleamos el método de las secciones para resolver este problema. En primer lugar calculamos la reacción vertical en  $A$  y la reacción en el nudo  $G$  con el diagrama de cuerpo libre de la cercha completa, como se muestra en la Figura 7.10.

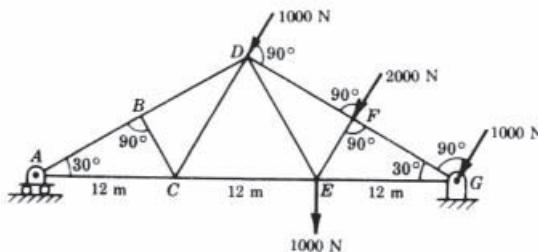


Figura 7.9

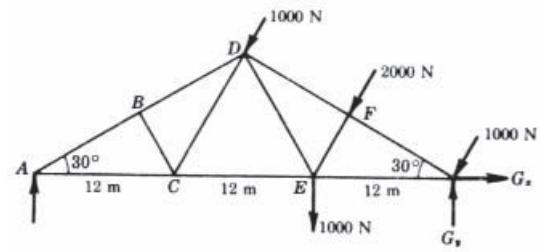


Figura 7.10

Las distancias son,  $FG = 12 \cos 30^\circ = 10,4$  m y  $DG = 18 / (\cos 30^\circ) = 20,8$  m. Para hallar la fuerza en  $A$ , se suman los momentos respecto a  $G$  y se obtiene  $\sum M_G = 0 = +1000 \times 12 + 10,4 + 1000 \times 20,8 - 36A$ . Por tanto,  $A = 1490$  N.

Para calcular  $G_x$ , se suman las fuerzas horizontales y se obtiene  $\sum F_h = 0 = G_x - 4000 \operatorname{sen} 30^\circ$ . Por tanto,  $G_x = 2000$  N. De la suma vertical de fuerzas se obtiene  $G_y = 2970$  N.

Para calcular las fuerzas en los miembros, elegimos la sección representada en la Figura 7.11. Hemos aislado la parte izquierda porque en ella, aparte de las incógnitas, sólo aparece una fuerza conocida en  $A$ .

Para calcular  $(BD)$ , sumamos momentos respecto a  $C$ . Para calcular  $(CE)$ , sumamos momentos respecto a  $D$ . Para calcular  $(CD)$ , sumamos las fuerzas verticales. Las ecuaciones que se obtienen en el orden enunciado son:

$$\sum M_C = 0 = -(BD) \times 6 - 1490 \times 12 \quad (1)$$

$$\sum M_D = 0 = -1490 \times 18 + (CE) \times 10,4 \quad (2)$$

$$\sum F_v = 0 = +1490 + (BD) \cos 60^\circ + (CD) \cos \theta \quad (3)$$

Obsérvese que  $\operatorname{tg} \theta = 6/10,4$ ; por tanto,  $\cos \theta = 0,866$ . De (1),  $(BD) = -2980 \text{ N}$ , es decir, compresión. De (2),  $(CE) = +2580 \text{ N}$ , es decir, tracción, como se supuso.

Sustituimos  $(BD)$  con signo menos en (3) y se obtiene  $(CD) = 0$ .

- 7.5.** Hallar las fuerzas en los miembros de la cercha de la Figura 7.12. Todos los triángulos son equiláteros.

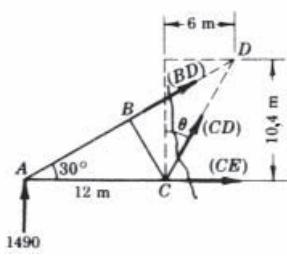


Figura 7.11

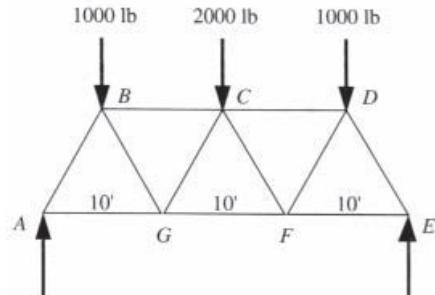


Figura 7.12

### SOLUCIÓN

Por simetría, las reacciones sobre la cercha en  $A$  y  $E$  son ambas de 2000 lb. Los diagramas de cuerpo libre de los nudos en  $A$ ,  $B$  y  $G$  están representados en las figuras 7.13, 14 y 15, respectivamente. Todas las incógnitas se han representado como tracciones. Al calcular las fuerzas internas, un signo más significa tracción y un signo menos, compresión. De la Figura 7.13,

$$\sum F_y = (AB) \operatorname{sen} 60^\circ + 2000 = 0 \quad (AB) = -2309 \text{ lb } C$$

$$\sum F_x = (AG) + (AB) \cos 60^\circ = 0 \quad (AG) = +1155 \text{ lb } T$$

De la Figura 7.14,

$$\sum F_y = -(AB) \cos 30^\circ - 1000 - (BG) \cos 30^\circ = 0 \quad (BG) = +1155 \text{ lb } T$$

$$\sum F_x = -(AB) \operatorname{sen} 30^\circ + (BG) \operatorname{sen} 30^\circ + (BC) = 0 \quad (BC) = -1732 \text{ lb } C$$

De la Figura 7.15,

$$\sum F_y = (BG) \operatorname{sen} 60^\circ + (GC) \operatorname{sen} 60^\circ = 0 \quad (GC) = -1155 \text{ lb } C$$

$$\sum F_x = -(AG) - (BG) \cos 60^\circ + (GC) \cos 60^\circ + (GF) = 0 \quad (GF) = +2309 \text{ lb } T$$

Por la simetría de la estructura y de las cargas,

$$(DE) = (AB) = -2309 \text{ lb } C$$

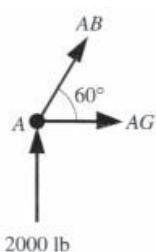


Figura 7.13

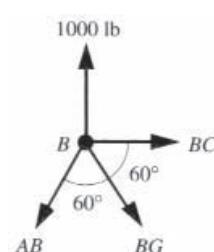


Figura 7.14

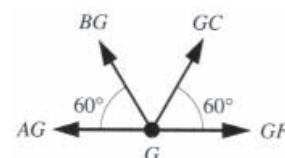


Figura 7.15

$$(FE) = (AG) = + 1155 \text{ lb } T$$

$$(DF) = (BG) = + 1155 \text{ lb } T$$

$$(CD) = (BC) = - 1732 \text{ lb } C$$

$$(CF) = (CG) = - 1155 \text{ lb } C$$

- 7.6.** Hallar las fuerzas en los miembros *BD* y *CD* de la cercha de la Figura 7.16. Todos los triángulos son equiláteros.

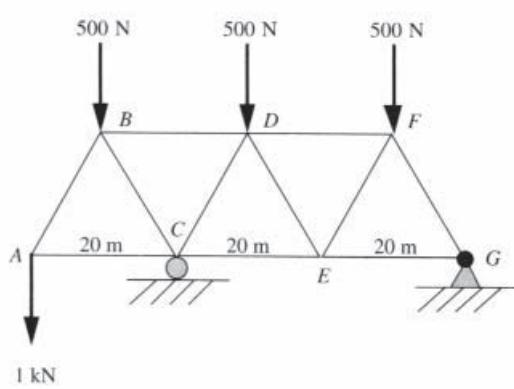


Figura 7.16

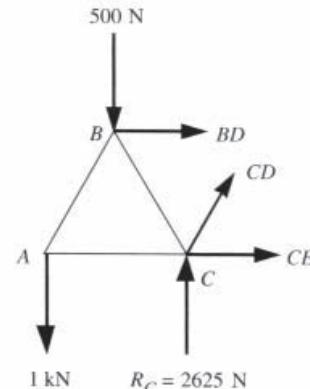


Figura 7.17

### SOLUCIÓN

En este caso conviene aislar una porción de la cercha de la Figura 7.17, tal como se indica en la sección 7.2, y resolverla como un cuerpo libre. Como, en general, las fuerzas en una porción de una cercha son no paralelas ni concurrentes, el número máximo de fuerzas desconocidas no puede ser superior a tres. En el presente problema, para calcular las fuerzas en *BD* y *CD*, en vez de resolver el nudo *A*, luego el *B* y después el *C*, se ha empleado el diagrama de cuerpo libre de la Figura 7.17 en el que dichas fuerzas pueden calcularse de una sola vez, conocida la reacción en *C*.

Empleando la cercha completa de la Figura 7.16 como diagrama de cuerpo libre y tomando momentos respecto a *G*, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum M_G = -40R_C + (60)(1000) + (50)(500) + (30)(500) + (10)(500) = 0$$

$$R_C = 2625 \text{ N}$$

Volviendo a la Figura 7.17, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum M_C = (20)(1000) + (10)(500) - (20 \text{ sen } 60^\circ)(BD) = 0$$

$$(BD) = 1440 \text{ N } T$$

$$\sum F_y = 2625 - 1000 - 500 + (CD) \text{ sen } 60^\circ = 0$$

$$(CD) = -1300 \text{ N } C$$

De modo que el llamado «método de las secciones» permite calcular fuerzas directamente, sin hallar valores intermedios como exige el método de los nudos.

- 7.7.** Cada cable de un puente colgante soporta una carga horizontal de 800 lb/ft. Si la luz es de 600 ft y la flecha de 40 ft, calcular la tensión en los extremos y en el centro. ¿Cuál es la longitud del cable? Se trata de un cable parabólico.

### SOLUCIÓN

La tensión en ambos extremos es la misma.

$$T = \frac{1}{2} wa \sqrt{1 + \frac{a^2}{16d^2}} = \frac{1}{2} \times 800 \times 600 \sqrt{1 + \frac{(600)^2}{16(40)^2}} = 932.000 \text{ lb}$$

$$H = \frac{wa^2}{8d} = \frac{800 \times (600)^2}{8 \times 40} = 900.000 \text{ lb}$$

$$l = a \left[ 1 + \frac{8}{3} \left( \frac{d}{a} \right)^2 - \frac{32}{5} \left( \frac{d}{a} \right)^4 + \frac{256}{7} \left( \frac{d}{a} \right)^6 - \dots \right]$$

La serie converge rápidamente y, normalmente, son suficientes dos o tres términos para la precisión deseada. Conviene comprobarlo como se indica a continuación.

$$\frac{d}{a} = \frac{40}{600} = 0,0667 \quad \left( \frac{d}{a} \right)^2 = 0,0045 \quad \left( \frac{d}{a} \right)^4 = 0,00002$$

Empleando dos términos,  $l = 600[1 + \frac{8}{3}(0,0045)] = 607 \text{ ft}$

Empleando tres términos,  $l = 600[1 + \frac{8}{3}(0,0045) - \frac{32}{5}(0,00002)] = 607 \text{ ft}$

Si se emplearan cuatro términos, el valor se incrementaría ligeramente, pero la contribución de los términos superiores al segundo es despreciable.

- 7.8.** Calcular las tensiones pedidas en el Problema 7.7 sin recurrir a las fórmulas.

### SOLUCIÓN

En el diagrama de cuerpo libre de la mitad derecha del cable (Figura 7.18) aparece la tensión horizontal  $H$  en el punto más bajo, la tensión máxima  $T$  en el soporte y la carga  $800(300) = 240.000 \text{ lb}$ . Puesto que en el cable sólo actúan tres fuerzas, éstas deben ser concurrentes, tal como se muestra. Sumando las fuerzas horizontales y a continuación las verticales,

$$\begin{aligned} \sum F_h &= 0 = T_{\max} \cos \theta - H \\ \sum F_v &= 0 = T_{\max} \sin \theta - 240.000 \end{aligned}$$

de (1)  $T_{\max} \cos \theta = H$  y de (2)  $T_{\max} \sin \theta = 240.000$ . Dividiendo (2) por (1),  $\tan \theta = 240.000/H$ . Pero  $\tan \theta = 40/150$ ; por tanto,  $40/150 = 240.000/H$  y  $H = 900.000 \text{ lb}$ .

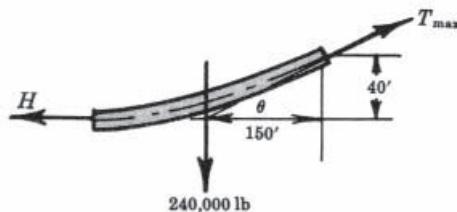


Figura 7.18

Elevando al cuadrado (1) y (2) y sumando,

$$T_{\max}^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = (240.000)^2 + H^2 \quad T_{\max}^2 = (240.000)^2 + (900.000)^2 \quad T_{\max} = 932.000 \text{ lb}$$

- 7.9.** Un cable de  $3 \text{ kg/m}$  está suspendido entre dos soportes a distinta altura, tal como muestra la Figura 7.19. Calcular la tensión máxima.

### SOLUCIÓN

En el diagrama de cuerpo libre de la Figura 7.20 se representa la parte del cable a la derecha del punto más bajo, cuya ubicación es desconocida. Sea  $H$  la tensión desconocida del cable en su punto  $P$  más bajo y  $T$

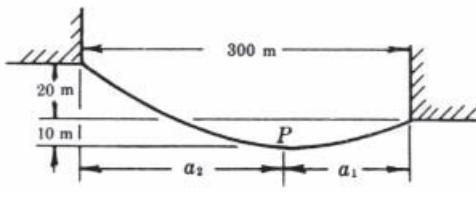


Figura 7.19

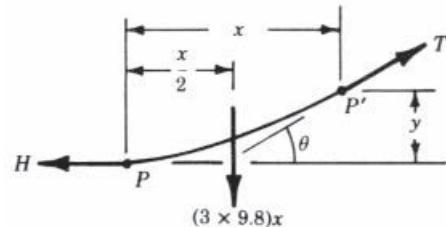


Figura 7.20

la tensión en el punto  $P'$  a una distancia  $x$  a la derecha de  $P$ . El peso del cable para esta distancia  $x$  es  $(3 \times 9.8)x$  y actúa a una distancia  $x/2$  de  $P$ . Sumando las fuerzas horizontales y verticales,

$$\sum F_x = 0 = T \cos \theta - H, \quad \text{o sea, } T \cos \theta = H \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = T \sin \theta - (3 \times 9.8)x, \quad \text{o sea, } T \sin \theta = (3 \times 9.8)x \quad (2)$$

Dividiendo (2) por (1),  $\tan \theta = (3 \times 9.8)x/H$ . Pero del diagrama de cuerpo libre,  $\tan \theta = y/(x/2) = 2y/x$ ; por tanto,  $(3 \times 9.8)x/H = 2y/x$  o sea,  $Hy = (3 \times 9.8)x^2/2$ . Puesto que  $x = a_1$  cuando  $y = 10 \text{ m}$ ,  $10H = (3 \times 9.8)a_1^2/2 = 14.7a_1^2$ . Análogamente, para la parte a la izquierda de  $P$ ,  $30H = 14.7a_2^2$ . Ahora,

$$a_1 + a_2 = 300 \quad \sqrt{\frac{10H}{14.7}} + \sqrt{\frac{30H}{14.7}} = 300 \quad H = 17.72 \text{ kN}$$

y

$$a_1 = \sqrt{\frac{10H}{14.7}} = 110 \text{ m} \quad a_2 = \sqrt{\frac{30H}{14.7}} = 190 \text{ m}$$

Elevando al cuadrado (1) y (2) y sumando,  $T^2 = 864x^2 + H^2$ . Puesto que la máxima tensión se da en el soporte izquierdo donde  $x = -190 \text{ m}$ ,  $T_{\max}^2 = 864(-190)^2 + (17.720)^2$ , o sea,  $T_{\max} = 18.58 \text{ kN}$ .

- 7.10.** Un cable de TV, suspendido entre soportes a la misma altura y separados 20 m, sostiene una carga horizontal de 2 000 N/m. La tensión máxima permitida es de 140 kN. Calcular la longitud necesaria  $l$  del cable y su flecha  $d$ .

#### SOLUCIÓN

$$T = \frac{1}{2}wa\sqrt{1 + \frac{a^2}{16d^2}}, \quad \text{o sea, } 140000 = \frac{1}{2} \times 2000 \times 20 \sqrt{1 + \frac{(20)^2}{16d^2}}$$

Por tanto  $d = 0.72 \text{ m}$

$$\text{Empleando } l = a \left[ 1 + \frac{8}{3} \left( \frac{d}{a} \right)^2 - \frac{32}{5} \left( \frac{d}{a} \right)^4 + \frac{256}{7} \left( \frac{d}{a} \right)^6 - \dots \right]$$

y como  $d/a = 0.72/20 = 0.036$ , despreciamos los términos de exponente superior a 2 y obtenemos  $l = 20.07 \text{ m}$ .

- 7.11.** Un alambre que pesa 10 oz/ft está suspendido entre dos poleas sin rozamiento, como muestra la Figura 7.21. La carga  $P$  es de 500 lb. La distancia entre los centros de las poleas es de 80 ft. Calcular la flecha. Supóngase que la curva es parabólica y despréciese el diámetro de las poleas.

#### SOLUCIÓN

La tensión en la polea es el peso  $P = 500 \text{ lb}$ . Luego

$$500 = \frac{1}{2} \times \frac{10}{16} \times 80 \sqrt{1 + \frac{(80)^2}{16d^2}}, \quad \text{o sea, } d = 1 \text{ ft}$$

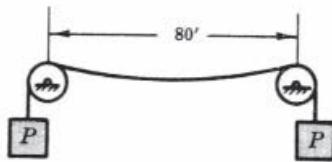


Figura 7.21

- 7.12.** Un cable que pesa 0,518 lb/ft está suspendido entre dos torres de la misma altura, separadas 500 ft. Si la flecha es de 50 ft, ¿cuál es la tensión máxima en el alambre y cuál debería ser su longitud mínima? Se trata de una catenaria.

### SOLUCIÓN

Puesto que conocemos  $a$  y  $d$ , éste es un ejemplo del caso (a) de catenaria, donde de (2) se obtiene

$$c + d = c \cosh \frac{a}{2c}, \quad \text{o sea, } c + 50 = c \cosh \frac{500}{2c}$$

Una solución gráfica es quizás más fácil que tantear valores. Representamos la recta  $c + 50$  y la curva  $c \cosh 500/2c$  en función de  $c$ . La solución es el valor de  $c$  para el que las dos curvas se cortan. Los valores utilizados para trazar las gráficas están tabulados más abajo. Los dos últimos valores de  $c$ , de 150 y de 250, se han añadido para asegurar que las curvas no se cortan para un valor menor de  $c$ .

$c$	$c + 50$	$\frac{500}{2c}$	$\cosh \frac{500}{2c}$	$c \cosh \frac{500}{2c}$
0	50	$\infty$	$\infty$	—
100	150	2,5	6,1323	613,2
200	250	1,25	1,8884	377,7
300	350	0,833	1,3678	410,3
400	450	0,625	1,2018	480,7
500	550	0,500	1,1276	563,8
600	650	0,417	1,0882	652,9
700	750	0,357	1,0644	745,1
800	850	0,313	1,0494	839,5
150	200	1,667	2,7427	411,4
250	300	1,000	1,5431	385,8

En la Figura 7.22 se representan las curvas en función de  $c$ , que se cortan aproximadamente en  $c = 650$ .

Para mayor precisión se podría trazar a mayor escala la porción de gráfica cercana al punto de corte. No obstante, probamos con  $c = 650$  en la ecuación para ajustar mejor la solución:

$$c + 50 = 650 + 50 = 700$$

Pero  $650 \cosh \frac{500}{2 \times 650} = 698,8$

Probamos ahora con  $c = 640$  para obtener  $640 + 50 = 690$ :

$$640 \cosh \frac{500}{2 \times 640} = 689,5$$

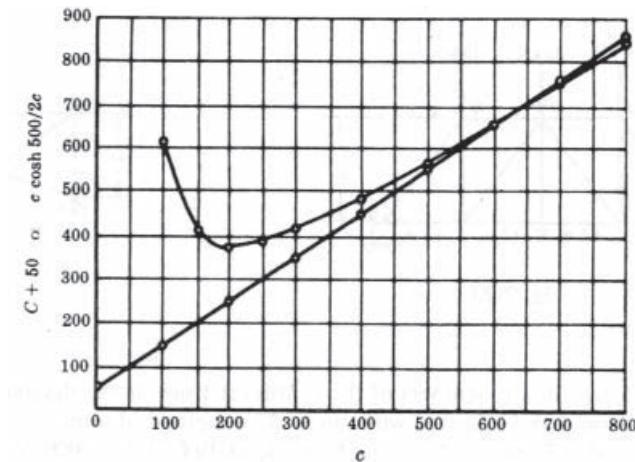


Figura 7.22

Si tomamos  $c = 635$ , comprobamos que este valor es suficientemente aproximado.

Empleando (3):  $T_{\max} = w(c+d) = 0,518(635+50) = 355 \text{ lb}$

Empleando (5):  $(c+d)^2 = c^2 + \frac{1}{4}l^2 \quad (635+50)^2 = (635)^2 + \frac{1}{4}(240)^2 \quad l = 514 \text{ ft}$

*Nota:* El programa informático incluido en el Apéndice C muestra la potencia de esta técnica.

- 7.13.** Un cable de 0,6 kg/m de masa y de 240 m de longitud cuelga con una flecha de 24 m. Calcular la tensión y la luz máximas.

### SOLUCIÓN

Éste es un ejemplo del caso (c) de la Sección 7.3, «Catenaria».

Empleando (5):  $(c+d)^2 = c^2 + \frac{1}{4}l^2 \quad (c+24)^2 = c^2 + \frac{1}{4}(240)^2 \quad c = 288$

Empleando (3):  $T_{\max} = w(c+d) = 0,6 \times 9,8(288+24) = 1835 \text{ N}$

Empleando (4):  $\frac{1}{2}l = c \operatorname{senh} \frac{a}{2c} \quad \frac{1}{2}(240) = 288 \operatorname{senh} \frac{a}{576} \quad a = 234 \text{ m}$

### Problemas propuestos

- 7.14.** La cercha Howe de la Figura 7.23 soporta las tres cargas indicadas. Calcular por el método de los nudos las fuerzas en  $AB$ ,  $BD$ ,  $CD$  y  $EF$ .

*Resp.*  $AB = 25,0 \text{ kN}$   $C$ ,  $BD = 15,0 \text{ kN}$   $C$ ,  $CD = 12,5 \text{ kN}$   $C$ ,  $EF = 22,5 \text{ kN}$   $T$

- 7.15.** Hallar por el método de los nudos las fuerzas en todos los miembros de la cercha en voladizo de la Figura 7.24. Las cargas están en kips. (Empezar a resolver por la articulación  $G$ .)

*Resp.*  $BD = 10.500 \text{ lb}$   $T$ ,  $BC = 4200 \text{ lb}$   $T$ ,  $AC = 14.800 \text{ lb}$   $C$ ,  $DF = 6000 \text{ lb}$   $T$ ,  $DE = 4730 \text{ lb}$   $T$ ,  $CE = 11.100 \text{ lb}$   $C$ ,  $FG = 6000 \text{ lb}$   $T$ ,  $EG = 6330 \text{ lb}$   $C$ ,  $CD = 3490 \text{ lb}$   $C$ ,  $EF = 3000 \text{ lb}$   $C$

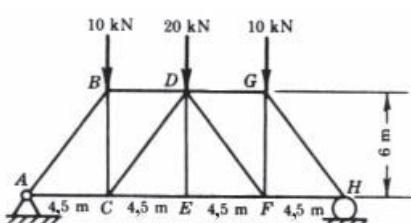


Figura 7.23

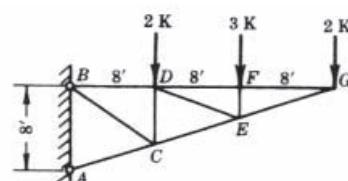


Figura 7.24

- 7.16.** En la cercha de la Figura 7.25, hallar por el método de los nudos las fuerzas en los miembros  $AC$  y  $BD$ . *Resp.*  $AC = 35,3 \text{ kN C}$ ,  $BD = 47,9 \text{ kN T}$

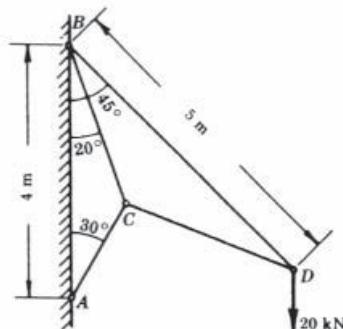


Figura 7.25

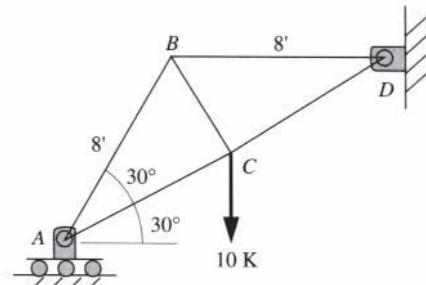


Figura 7.26

- 7.17.** Hallar las fuerzas en todos los miembros de la cercha de la Figura 7.26.  
*Resp.*  $AB = BD = 8,66 \text{ K T}$ ,  $AC = 5 \text{ K T}$ ,  $CD = 10 \text{ K T}$ ,  $CB = 8,66 \text{ K T}$

- 7.18.** La cercha Fink de la Figura 7.27 soporta las cargas indicadas. Calcular por el método de los nudos las fuerzas en todos los miembros.  
*Resp.*  $AB = 10,04 \text{ K T}$ ,  $AC = 9,87 \text{ K C}$ ,  $CD = 8,87 \text{ K C}$ ,  $BD = 3,72 \text{ K T}$ ,  $BE = 6,33 \text{ K T}$ ,  $DF = 8,30 \text{ K C}$ ,  $FG = 9,30 \text{ K C}$ ,  $EG = 8,06 \text{ K T}$

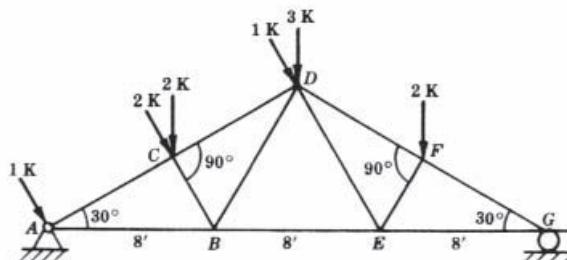


Figura 7.27

- 7.19.** Calcular las fuerzas en  $AB$ ,  $AC$ ,  $EG$  y  $FG$  en la cercha de la Figura 7.28.  
*Resp.*  $AB = 1,73 \text{ kN T}$ ,  $AC = 0,866 \text{ kN C}$ ,  $EG = 2,89 \text{ kN C}$ ,  $FG = 5,77 \text{ kN T}$

- 7.20.** Hallar por el método de los nudos las fuerzas en  $AB$  y  $CD$  de la cercha en voladizo de la Figura 7.29. *Resp.*  $AB = 7,81 \text{ kN T}$ ,  $CD = 7,81 \text{ kN T}$

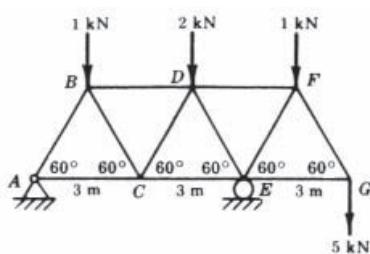


Figura 7.28

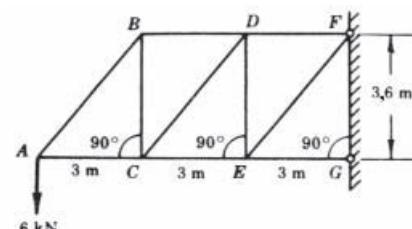


Figura 7.29

- 7.21.** Hallar por el método de los nudos las fuerzas en  $AC$  y  $AB$  de la cercha Howe de la Figura 7.30.  
*Resp.*  $AC = 4,3 \text{ K C}$ ,  $AB = 2,8 \text{ K T}$

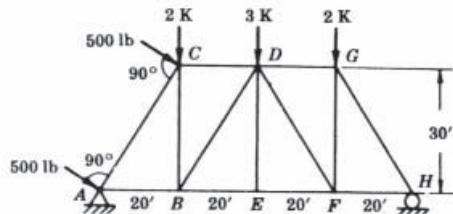


Figura 7.30

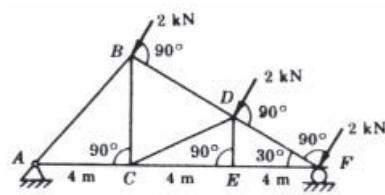


Figura 7.31

- 7.22.** Hallar las fuerzas en los miembros  $AB$  y  $CD$  de la Figura 7.31. *Resp.*  $AB = 3,06 \text{ kN}$   $C, CD = 2,31 \text{ kN}$   $C$

Resolver por el método de las secciones los Problemas 7.23 a 7.26, calculando las fuerzas en los miembros indicados en cada figura.

- 7.23** Figura 7.32. *Resp.*  $DF = 3,46 \text{ kN}$   $C, DE = 0, CE = 3,46 \text{ kN}$   $T$

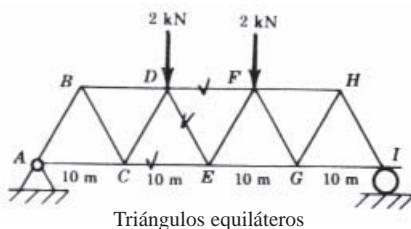


Figura 7.32

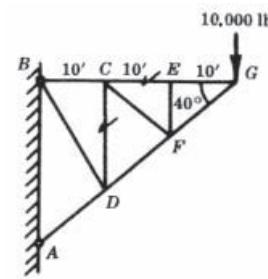


Figura 7.33

- 7.24.** Figura 7.33. *Resp.*  $CE = 11,9 \text{ K}$   $T, CD = 0$

- 7.25.** Figura 7.34. *Resp.*  $DF = 833 \text{ N}$   $C, DE = 322 \text{ N}$   $T$

- 7.26.** Figura 7.35. *Resp.*  $BD = 5000 \text{ lb}$   $C, EF = 0$

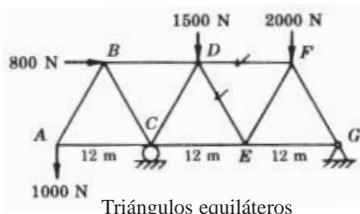


Figura 7.34

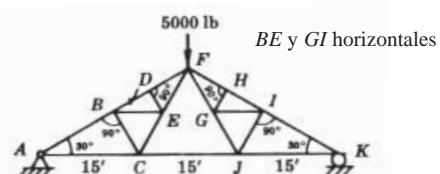


Figura 7.35

- 7.27.** Calcular por el método de las secciones las fuerzas en kips de los miembros  $CE$  y  $DF$  de la cerca de la Figura 7.36. Todos los triángulos son equiláteros.

*Resp.*  $CE = 4,04 \text{ K}$   $T, DF = 4,04 \text{ K}$   $C$

- 7.28.** Resolver por el método de las secciones el Problema 7.15 sólo para los miembros  $CE$  y  $DF$ .

- 7.29.** Resolver el Problema 7.25 por el método de los nudos.

- 7.30.** Calcular las fuerzas en todos los miembros de la Figura 7.37.

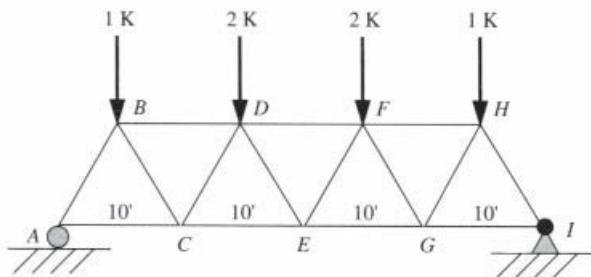


Figura 7.36

*Resp.*  $AB = 4,00 \text{ kN}$   $C$ ,  $AD = 2,00 \text{ kN}$   $C$ ,  $BD = 4,00 \text{ kN}$   $T$ ,  $BC = 3,46 \text{ kN}$   $C$ ,  $CE = 3,46 \text{ kN}$   $C$ ,  $CD = 4,00 \text{ kN}$   $C$ ,  $DE = 2,00 \text{ kN}$   $T$

- 7.31. Un coche está localizado en el tramo  $CD$  como se muestra en la Figura 7.38. Representa una carga de 4000 lb que se distribuye por igual en las cuatro ruedas. Puesto que hay dos cerchas idénticas para soportar los rafles, las cargas en  $C$  y en  $D$  son ambas de 1000 lb. ¿Cuáles son las fuerzas en los miembros de la cercha?

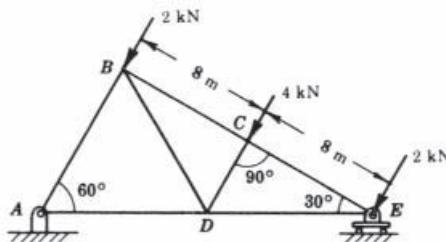


Figura 7.37

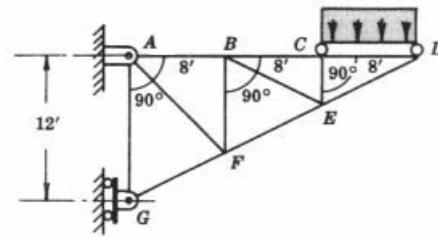


Figura 7.38

*Resp.*  $AB = 3,0 \text{ K T}$ ,  $AF = 0,47 \text{ K T}$ ,  $AG = 1,67 \text{ K T}$ ,  $GF = 3,72 \text{ K C}$ ,  $BF = 0,5 \text{ K C}$ ,  $BC = 2,0 \text{ K T}$ ,  $BE = 1,12 \text{ K T}$ ,  $FE = 3,35 \text{ K C}$ ,  $CE = 1,0 \text{ K C}$ ,  $CD = 2,0 \text{ K T}$ ,  $ED = 2,24 \text{ K C}$ .

- 7.32. En la Figura 7.39, se aplica una carga horizontal de 1800 N a la cercha articulada en  $A$  y con un soporte de rodillo en  $E$ . Hallar las fuerzas en  $AB$  y  $CE$ .

*Resp.*  $CE = 4070 \text{ N T}$ ,  $AB = 1300 \text{ N C}$

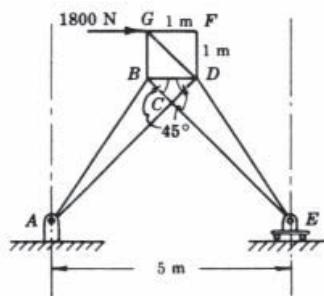


Figura 7.39

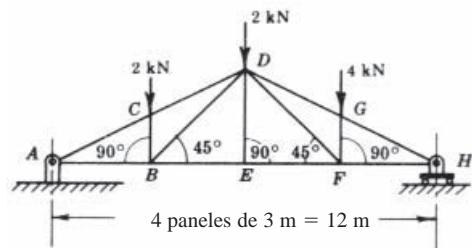


Figura 7.40

- 7.33. Hallar las fuerzas en todos los miembros de la cercha sometida a las tres cargas mostradas en la Figura 7.40.

*Resp.*  $AC = 7,83 \text{ kN C}$ ,  $AB = 7,00 \text{ kN T}$ ,  $BC = 2,00 \text{ kN C}$ ,  $CD = 7,83 \text{ kN C}$ ,  $BD = 2,83 \text{ kN T}$ ,  $DE = 0$ ,  $DG = 10,1 \text{ kN C}$ ,  $DF = 5,67 \text{ kN T}$ ,  $BE = 5,00 \text{ kN T}$ ,  $EF = 5,00 \text{ kN T}$ ,  $FG = 4,00 \text{ kN C}$ ,  $FH = 9,00 \text{ kN T}$ ,  $GH = 10,1 \text{ kN C}$

- 7.34. Hallar las fuerzas en los miembros  $CE$  y  $DE$  de la cercha de la Figura 7.41, articulada en  $A$  y con un soporte de rodillo en  $E$ , cuando se aplica en  $D$  una carga horizontal de 3000 lb.  
*Resp.*  $CE = 943 \text{ lb } T, DE = 2150 \text{ lb } C$

- 7.35. Hallar las fuerzas en los miembros  $BC$ ,  $AD$  y  $CD$  de la cercha de la Figura 7.42. Se supone que las poleas no tienen peso ni rozamiento. Su diámetro es de 2 ft. La carga es de 600 lb y está sostenida por una cuerda inclinada  $30^\circ$  respecto a la horizontal.  
*Resp.*  $BC = 600 \text{ lb } T, CD = 1200 \text{ lb } T, AD = 850 \text{ lb } C$

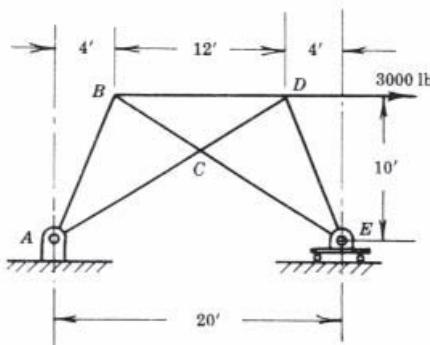


Figura 7.41

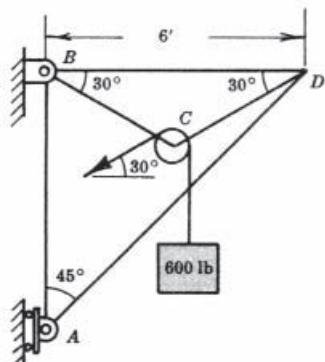


Figura 7.42

- 7.36. Una cercha, articulada en  $A$  y apoyada en un rodillo en  $D$ , está inclinada  $40^\circ$  respecto a la vertical, tal como se muestra en la Figura 7.43. Los miembros  $AC$  y  $CD$  son cables diseñados para soportar una carga máxima de 2000 N (obviamente de tracción). ¿Cuál es el valor máximo de  $M$ ?  
*Resp.*  $180 \text{ kg}$

- 7.37. En la Figura 7.44 la cercha está articulada en  $A$  y se apoya en un rodillo en  $C$ . Hallar las fuerzas que la carga horizontal de 1200 N provoca en todos miembros.

*Resp.*  $AC = 1200 \text{ N } T, AB = 900 \text{ N } T, BC = 1500 \text{ N } C$

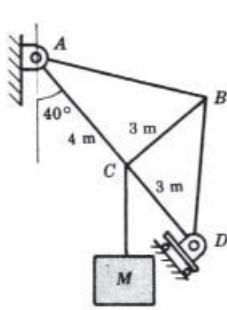


Figura 7.43

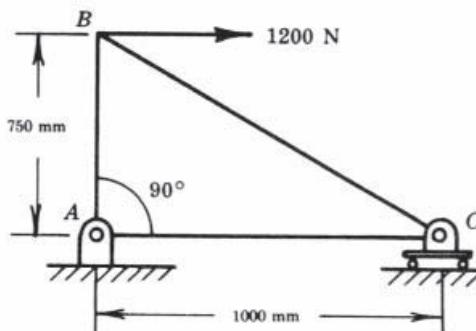


Figura 7.44

- 7.38. Una cercha está articulada en  $A$  y se apoya en un rodillo en  $D$  (véase la Figura 7.45). Hallar en todos los miembros las fuerzas debidas a la carga de 500 N.

*Resp.*  $AB = BD = 417 \text{ N } C, AC = CD = 333 \text{ N } T, BC = 500 \text{ N } T$

- 7.39. Un cable está suspendido entre dos soportes a la misma altura y separados 200 m. La carga es de 100 N por metro horizontal. La flecha es de 12 m. Calcular la longitud del cable y la tensión en el soporte.

*Resp.*  $l = 202 \text{ m}, T = 42,9 \text{ kN}$

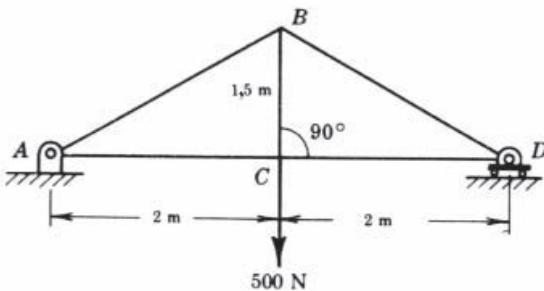


Figura 7.45

- 7.40.** Hallar la flecha de un cable de 100 ft de longitud sostenido por dos soportes al mismo nivel, separados entre sí 99,8 ft. Emplear la ecuación (3) del cable parabólico de la Sección 7.3, despreciando las potencias de  $d/a$  superiores a la segunda.

*Resp.*  $d = 2,73$  ft

- 7.41.** En el problema 7.40 se supone que la carga en el cable es de 0,01 lb por pie horizontal, ¿cuál es la tracción necesaria para sostenerlo en el soporte?

*Resp.*  $T = 4,59$  lb

- 7.42.** La tensión máxima permitida en un cable es de 3000 lb. La flecha no puede ser superior a 10 ft bajo una carga de 100 lb por pie horizontal. ¿A qué distancia deben colocarse los soportes y cuál debe ser la longitud del cable?

*Resp.*  $a = 41,6$  ft,  $l = 47,4$  ft

- 7.43.** La tensión máxima permitida en un cable es de 1000 lb. La flecha no puede ser superior a 4 ft bajo una carga de 1 lb por pie horizontal. ¿A qué distancia deben colocarse los soportes?

*Resp.*  $a = 178$  ft

- 7.44.** La tensión máxima permitida en un cable es de 90 000 lb. La carga es de 200 lb por pie horizontal. Los soportes están a la misma altura y separados 300 ft. ¿Cuál es la mínima flecha permitida?

*Resp.*  $d = 26,6$  ft

- 7.45.** Con los datos del Problema 7.40, calcular la tensión máxima en el cable y su flecha, si el peso es de 0,01 lb por pie lineal de cable.

*Resp.*  $T = 4,4$  lb,  $d = 2,9$  ft

- 7.46.** Un cable de 0,73 kg/m está tendido entre dos soportes separados entre sí 48 m. Si la flecha es de 12 m, calcular la longitud del cable y la tensión máxima.

*Resp.*  $l = 54,9$  m,  $T = 268$  N

- 7.47.** Un cable de transmisión de 230 m de longitud y 0,97 kg por metro lineal está suspendido entre dos torres de la misma altura, separadas 229 m. Calcular la tensión máxima y la flecha.

*Resp.*  $T = 6840$  N,  $d = 9$  m

- 7.48.** Se ha de tender una línea de cable de transmisión entre dos torres de la misma altura, separadas 800 ft. El cable pesa 5 lb/ft y su longitud es de 1000 ft. ¿Cuáles son la flecha y la tensión máxima?

*Resp.*  $d = 266$  ft,  $T_{\max} = 3020$  lb

- 7.49.** Una cuerda de 50 ft de longitud pesa 0,1 lb por pie lineal. ¿Cuál debe ser la distancia entre los soportes para que la tensión máxima sea de 10 lb? Emplear las ecuaciones (3) y (5) del cable «catenaria» de la Sección 7.3.

- 7.50.** Un cable que pesa 0,5 lb/ft está tendido entre dos soportes a la misma altura, separados 160 ft. Si la flecha es de 40 ft, calcular la longitud del cable y su tensión máxima.

*Resp.*  $l = 184$  ft,  $T = 63$  lb

- 7.51.** Un cable parabólico soporta una carga de 200 lb por pie horizontal. La distancia entre los anclajes es de 100 ft, siendo la diferencia de cota entre ellos de 20 ft. La flecha, medida desde el anclaje más bajo, es de 8 ft. Calcular la tensión en los dos anclajes.

*Resp.*  $T_L = 20$  K,  $T_R = 16,7$  K

- 7.52.** Una línea de transmisión que pesa 4 lb/ft, está tendida entre dos torres separadas 2000 ft con un desnivel de 200 ft. La línea está tendida de tal manera que la pendiente en la torre más baja es horizontal. Calcular las tensiones en las dos torres.

*Resp.*  $T_{\max} = 40,8$  K,  $H = 40,0$  K

- 7.53.** Durante una tormenta de hielo se forma un cilindro de hielo en una línea telefónica. La línea está tendida entre postes separados 80 ft. El peso de la línea limpia es de 0,3 lb/ft. ¿Cuánto hielo puede formarse si la flecha no debe exceder de 5 ft y la tensión máxima permitida en la línea es de 6000 lb? Se supone que el hielo forma un cilindro sólido de peso específico 56 lb/ft<sup>3</sup>.

*Resp.* dia. = 10,8 in

- 7.54.** Una cuerda que pesa 1,5 lb/ft está anclada en una pared y pasa por un cilindro sin rozamiento situado a 40 ft de la pared y al mismo nivel del anclaje. La flecha de la cuerda es de 2 ft. ¿Cuál debe ser la longitud del trozo de cuerda que cuelga del cilindro para que no haya deslizamiento?

*Resp.*  $h = 102$  ft

- 7.55.** Hay que tender un cable entre dos torres de la misma altura separadas 800 ft. El peso del cable es de 5 lb/ft y la flecha puede ser como máximo de 270 ft. ¿Cuál es la longitud del cable?

*Resp.* 1010 ft

# FUERZAS EN LAS VIGAS

# 8

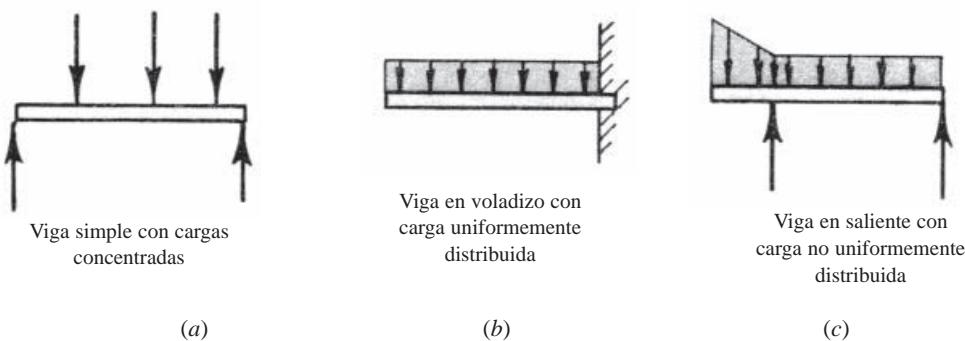
## 8.1 VIGAS

Una viga es un miembro estructural cuya longitud es considerablemente mayor que las dimensiones de la sección transversal. Soporta una carga que generalmente es perpendicular al eje longitudinal, es decir, las cargas y la longitud forman ángulo recto. Las cargas pueden estar distribuidas en un tramo muy corto de la viga, en cuyo caso se dice que son *concentradas*, o pueden estar distribuidas en un tramo finito, en cuyo caso se dice que son *distribuidas*.

A causa de que los criterios de diseño de vigas están generalmente relacionados con su capacidad de sopor tar fuerzas cortantes y momentos flectores, en este capítulo no se consideran las cargas externas no perpendiculares a la viga, responsables de las fuerzas axiales.

## 8.2 TIPOS DE VIGAS

- (a) *Simple*: Los apoyos están en los extremos [Figura 8.1(a)].
- (b) *En voladizo*: Un extremo está empotrado en una pared y el otro está libre (éste es el único tipo considerado aquí) [Figura 8.1(b)].
- (c) *En saliente*: Por lo menos uno de los apoyos no está en el extremo [Figura 8.1(c)].



## 8.3 FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR

La mejor manera de visualizar la fuerza cortante y el momento flector en una sección recta *C-D* de una viga es dividir la viga en dos partes *A* y *B* a la izquierda y a la derecha, respectivamente, de *C-D* (Figura 8.2). El diagrama de cuerpo libre de la parte *A* debe mostrar todas las fuerzas que actúan en *A* y las fuerzas que la parte *B* ejerce sobre la *A* para mantenerla en equilibrio.

Las fuerzas equilibradoras que la parte *B* ejerce sobre la *A* en el diagrama de cuerpo libre son (a) una fuerza vertical *V* y (b) una distribución de fuerzas horizontales que, por ser de suma cero, están representadas sólo por su momento *M*.

La fuerza cortante en la sección *C-D* es la fuerza vertical *V* obtenida al igualar a cero la suma de todas las fuerzas verticales.

El momento *M* en la sección *C-D* se obtiene al igualar a cero la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto a un punto de la sección recta. En los tipos de problemas considerados aquí, puede tomarse cualquier punto de la sección recta como centro de momentos.

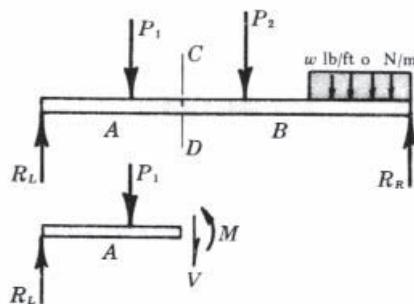


Figura 8.2

En la teoría de vigas es costumbre asignar a  $V$  el signo positivo si actúa hacia abajo en la parte izquierda  $A$  (si se emplea el diagrama de cuerpo libre de la parte derecha  $B$ , el cortante positivo  $V$  debe actuar hacia arriba). El momento flector  $M$  en una sección es positivo si es antihorario en la parte izquierda  $A$  (si se emplea el diagrama de cuerpo libre de la parte derecha  $B$ , el momento positivo  $M$  debe ser horario). En la Figura 8.3 se ilustran estos convenios.

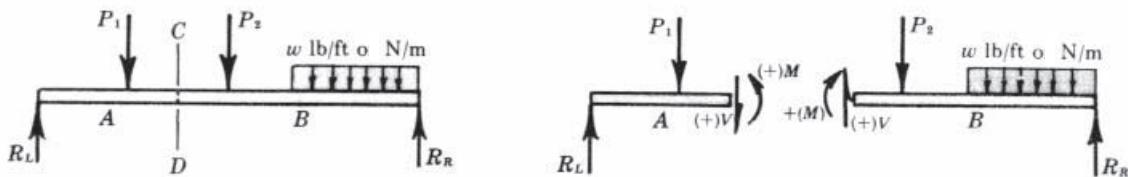


Figura 8.3

La fuerza cortante  $V$  en una sección puede imaginarse como la suma de todas las fuerzas verticales a la izquierda de la sección. Si dicha suma es ascendente, se dice que causa una fuerza cortante positiva (igual ocurre si la suma de las fuerzas a la derecha de la sección es descendente).

El momento flector  $M$  en una sección puede calcularse sumando los momentos respecto a la sección de todas las fuerzas a la izquierda. Una fuerza ascendente a la izquierda de la sección produce un momento flector positivo en la misma. Si se emplea la porción de la derecha, una fuerza ascendente produce también un momento flector positivo (al revés de lo que sucedía al definir los signos de las fuerzas cortantes, en que había un cambio de sentido).

Evidentemente, la fuerza cortante y el momento flector suelen variar con la ubicación de la sección. Véanse los Problemas 8.1 y 8.2.

## 8.4 DIAGRAMAS DE CORTANTES Y DE FLECTORES

Los diagramas de cortantes y de flectores facilitan visualizar la variación de  $V$  y  $M$  a lo largo de la viga. En los problemas más sencillos, pueden dibujarse directamente los diagramas de  $V$  y  $M$ , sumando las fuerzas y los momentos de las fuerzas a la izquierda de la sección (o a la derecha, si se prefiere).

## 8.5 PENDIENTE DEL DIAGRAMA DE CORTANTES

La pendiente en un punto en el diagrama de cortantes es la carga por unidad de longitud en dicho punto, cambiada de signo.

*Demostración:* La Figura 8.4 muestra un tramo  $dx$  de la viga. La carga por unidad de longitud  $w$  puede suponerse constante pues el tramo es infinitesimal. Se supone que a la izquierda  $V$  y  $M$  son positivos y que a la derecha aumentan hasta  $V + dV$  y  $M + dM$ , respectivamente. Debe cumplirse

$$\sum F_v = 0 = +V - wdx - (V + dV)$$

de donde  $dV = -w dx$  o sea  $dV / dx = -w$ .

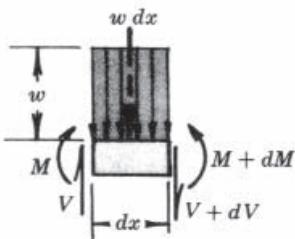


Figura 8.4

## 8.6 VARIACIÓN DEL CORTANTE

La variación del cortante entre dos secciones de una viga sometida a una carga distribuida es igual al área del diagrama de carga entre las dos secciones, cambiada de signo.

*Demostración:* Empleando el mismo diagrama que en la demostración anterior, integramos  $dV = -w dx$  entre  $x_1$  y  $x_2$ . Así pues,

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{x_1}^{x_2} (-w) dx, \quad \text{o sea,} \quad V_2 - V_1 = -\int_{x_1}^{x_2} (+w) dx$$

donde  $\int_{x_1}^{x_2} (+w) dx$  es el área del diagrama de carga entre las dos secciones.

## 8.7 PENDIENTE DEL DIAGRAMA DE FLECTORES

La pendiente del diagrama de flectores en una sección cualquiera de la viga es el valor del cortante en dicha sección.

*Demostración:* Empleando el mismo diagrama que en la demostración anterior, igualamos a cero la suma de momentos respecto al extremo derecho y obtenemos:

$$-M - V dx + w dx \frac{dx}{2} + M + dM = 0$$

Despreciando los infinitésimos de segundo orden, esta expresión queda  $dM = V dx$ , o sea,  $dM / dx = V$ . De aquí se deduce también que el momento es máximo (o mínimo) en los puntos en que el diagrama de cortantes corta al eje de representación.

## 8.8 VARIACIÓN DEL FLECTOR

El cambio del flector entre dos secciones de una viga es igual al área bajo el diagrama de cortantes entre dichas secciones.

*Demostración:* Partiendo de la demostración anterior, integramos  $dM = V dx$  entre  $x_1$  y  $x_2$ .

$$\int_{M_1}^{M_2} dM = \int_{x_1}^{x_2} V dx, \quad \text{o sea,} \quad M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V dx$$

donde  $\int_{x_1}^{x_2} V dx$  es el área bajo el diagrama de cortantes entre las dos secciones.

Véanse los Problemas 8.3-8.5

### Problemas resueltos

- 8.1.** En la viga simple de la Figura 8.5, calcular la fuerza cortante  $V$  y el momento flector  $M$  en la sección  $C-D$  a 2 m del extremo izquierdo.

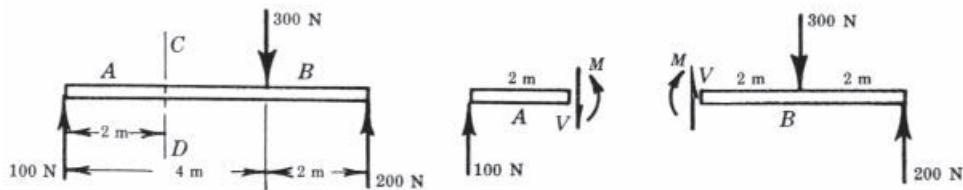


Figura 8.5

**SOLUCIÓN**

Las reacciones son de 100 y 200 N, tal como se muestra. Los diagramas de cuerpo libre de las partes izquierda y derecha de la viga se muestran en la Figura 8.5. Empleando la parte izquierda  $A$ , la fuerza cortante es la suma de las fuerzas de la izquierda, o sea

$$V = +100 \text{ N}$$

Si se emplea la parte derecha  $B$ , la fuerza cortante es la suma de las fuerzas de la derecha (pero ahora fuerzas descendentes dan un cortante positivo); de aquí,

$$V = +100 \text{ N}$$

El momento flector  $M$  en la sección puede calcularse como suma de los momentos de todas las fuerzas verticales a la izquierda. Una fuerza ascendente produce un momento flector positivo en la sección; por tanto, en la Figura 8.5,

$$M = +100(2) = +200 \text{ m-N}$$

Si se emplea la parte derecha  $B$ , una fuerza ascendente produce un momento flector positivo; por tanto, para la parte derecha en la Figura 8.5

$$M = -300(2) + 200(4) = +200 \text{ m-N}$$

- 8.2.** Dibujar los diagramas de cortantes y de flectores del Problema 8.1. Es preciso emplear dos diagramas de cuerpo libre (Figura 8.6).

**SOLUCIÓN**

El diagrama de cuerpo libre  $A_1$  muestra que para  $0 < x < 4\text{m}$ ,  $V = +100 \text{ N}$  y  $M = +100x \text{ m-N}$ . El diagrama de cuerpo libre  $A_2$  muestra que para  $4\text{m} < x < 6\text{m}$ ,  $V = -200 \text{ N}$  y  $M = +100x - 300(x-4) = -200x + 1200 \text{ m-N}$ . Empleando el diagrama de cuerpo libre  $B_2$  resulta  $M = +200(6-x) = -200x + 1200 \text{ m-N}$  (hay que asegurarse de tomar  $x$  como distancia medida desde el extremo izquierdo). El valor de  $M$  en  $x = 4 \text{ m}$  es  $M = +400 \text{ m-N}$ .

La información obtenida permite dibujar los diagramas de cortantes y flectores (Figura 8.7)

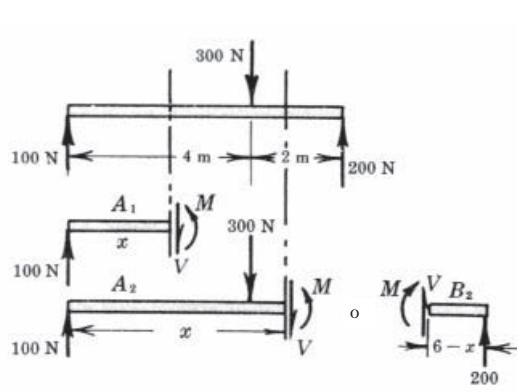


Figura 8.6

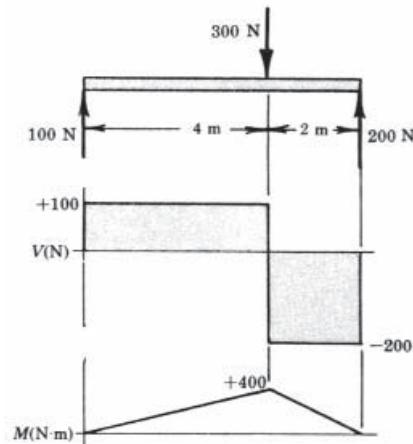


Figura 8.7

- 8.3. Hallar las expresiones de los cortantes y flectores de la viga de la Figura 8.8. Dibujar los diagramas.

**SOLUCIÓN**

Primero calculamos la reacción derecha  $R_R$  igualando a cero la suma de los momentos de todas las fuerzas externas respecto al extremo izquierdo. La fuerza de 196 N/m puede sustituirse (únicamente para hallar las reacciones) por  $196 \times 6 = 1176$  N en su punto medio.

$$\sum M_{R_L} = 18R_R - 4000 - (3)1176 = 0 \quad R_R = 418 \text{ N}$$

$$\sum M_{R_R} = -18R_L - 4000 + (15)1176 = 0 \quad R_L = 758 \text{ N}$$

En el tramo  $0 < x < 6$  m es válido el diagrama de cuerpo libre de la Figura 8.9. Se obtiene:

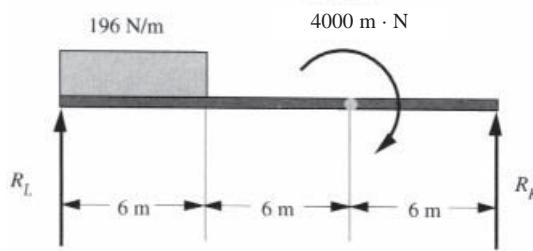


Figura 8.8

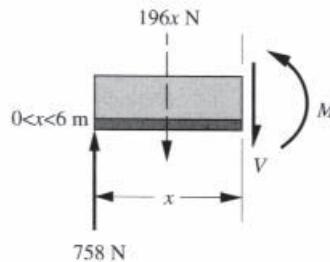


Figura 8.9

La suma vertical de todas las fuerzas que actúan en el diagrama de cuerpo libre nos da:

$$\sum F_V = 758 - 196x - V = 0 \quad V = 758 - 196x \text{ N}$$

$$\sum M_O = -758x + 196x(x/2) + M = 0 \quad M = 758x - 98x^2 \text{ m} \cdot \text{N}$$

La expresión del cortante muestra que  $V$  es la suma de las fuerzas a la izquierda de la sección y la expresión de  $M$  muestra que el flector en una sección es la suma de los momentos de todas las fuerzas verticales y de los pares a la izquierda de la sección.

En la Figura 8.10 se muestran los diagramas de cuerpo libre de las secciones (a) y (b) de la viga. Las ecuaciones son las siguientes:

De la Figura 8.10(a)       $V = -418 \text{ N}$   
 $M = -418x + 3528 \text{ m} \cdot \text{N}$

De la Figura 8.10(b)       $V = -418 \text{ N}$   
 $M = -418x + 7528 \text{ m} \cdot \text{N}$

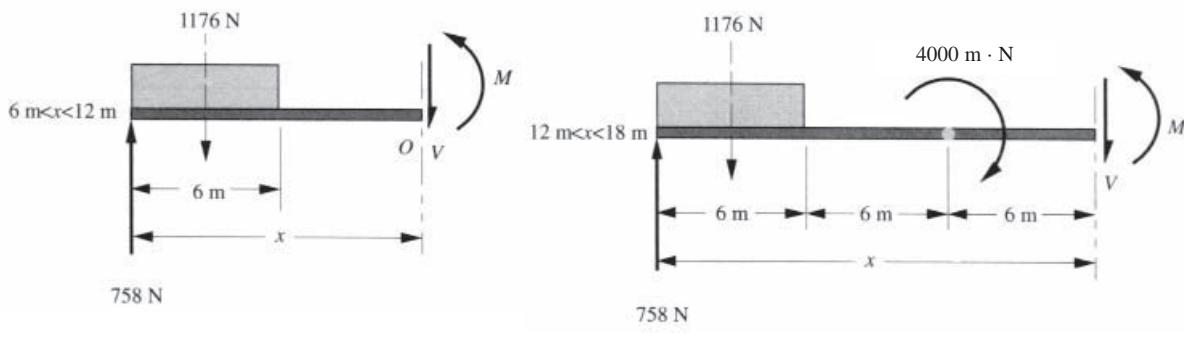


Figura 8.10

En la Figura 8.11 se muestran los diagramas de cortantes y flectores. Para hallar la ubicación y el valor del momento máximo, recordemos que la pendiente del diagrama de flectores coincide con el valor del cor-

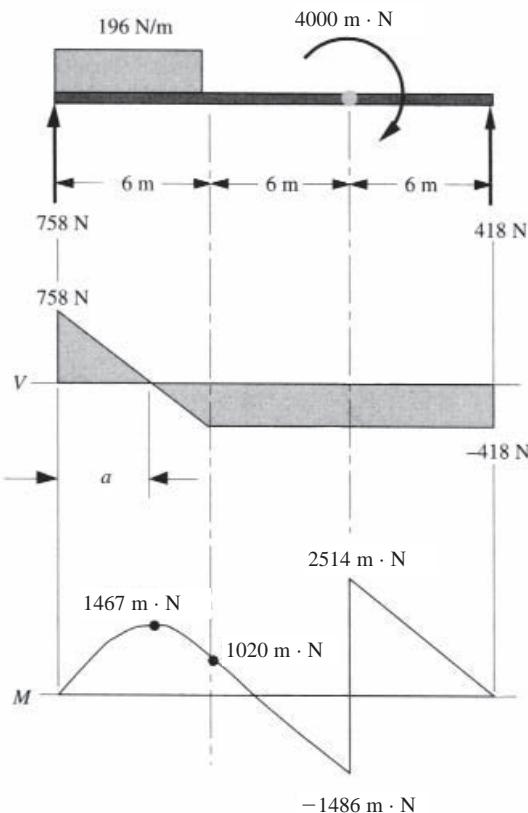


Figura 8.11

tante en ese punto (véase la Sección 8.7). El flector es máximo cuando la pendiente (o fuerza cortante) es nula. Por tanto,

$$758 - 196 a = 0 \quad a = 3,87 \text{ m}$$

en cuyo caso el flector máximo es el área bajo la curva de cortantes de 0 a  $a$  m, o sea:

$$M_{\max} = 758 (3,87)/2 = 1467 \text{ m}\cdot\text{N}$$

Obsérvese que en el extremo derecho del diagrama de los deflectores, el valor calculado, basado en la curva de deflectores, no es exactamente cero. Ello es efecto del redondeo.

- 8.4.** La viga simple de la Figura 8.12 soporta una carga triangular y otra uniforme. Hallar las expresiones de cortantes y deflectores.

#### SOLUCIÓN

Para calcular  $R_1$  y  $R_2$ , situamos la resultante de la carga triangular [ $\frac{1}{2}(120)(9) = 540 \text{ lb}$ ] a dos tercios del vértice (a 6 ft del extremo izquierdo) y la resultante de la carga rectangular [120(10) = 1200 lb] en su punto medio (a 5 ft de  $R_2$ ). Sumamos momentos respecto al extremo izquierdo y obtenemos

$$-\frac{1}{2}(120)(9)(6) - (120)(10)(9 + 5) + 19R_2 = 0$$

de donde  $R_2 = 1055 \text{ lb}$ .

Sumamos ahora los momentos respecto al extremo derecho y obtenemos

$$-\frac{1}{2}(120)(9)(19 - 6) + (120)(10)(5) - 19R_1 = 0$$

Por tanto,  $R_1 = 685 \text{ lb}$ .

Obsérvese, como comprobación, que  $R_1 + R_2 = 1740$  lb, coincide con la suma de las dos cargas  $\left[\frac{1}{2}(120)(9) + (120)(10)\right]$ .

A continuación dibujamos el diagrama de cuerpo libre de una sección de la viga con su carga en el intervalo  $0 < x < 6$  ft (Figura 8.13). Por semejanza de triángulos, calculamos la altura de la carga en  $x$ ,  $(x/9)(120)$  lb/ft. La carga total es  $\frac{1}{2}x(x/9)(120)$  situada a  $x/3$  de la izquierda de la sección. Así pues,

$$V = -\frac{1}{2}x\left(\frac{x}{9}\right)(120) + 685 = -\frac{60}{9}x^2 + 685 \text{ lb}$$

$$M = -\frac{1}{2}x\left(\frac{x}{9}\right)(120)\frac{x}{3} + 685x = -\frac{20}{9}x^3 + 685x \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

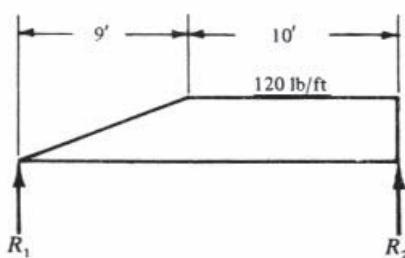


Figura 8.12

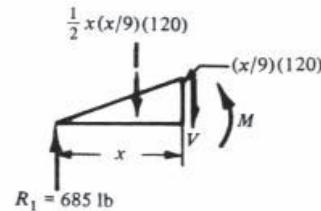


Figura 8.13

Para calcular la fuerza cortante y el momento flector para una sección situada en el intervalo  $9 \text{ ft} < x < 19 \text{ ft}$ , dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la Figura 8.14. La carga triangular equivale a  $\frac{1}{2}(9)(120) = 540$  lb, localizada a 6 ft del extremo izquierdo, o bien, a  $x-6$  a la izquierda de la sección. La carga rectangular vale  $120(x-9)$  y está a  $9 + (x-9)/2 = x/2 + 4,5$  ft del extremo izquierdo, o bien,  $x/2 - 4,5$  ft a la izquierda de la sección. Así pues,

$$V = 685 - 540 - 120(x-9) = -120x + 1225 \text{ lb}$$

$$M = 685x - 540(x-6) - 120(x-9)\left(\frac{x}{2} - 4,5\right) = -60x^2 + 1225x - 1620 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

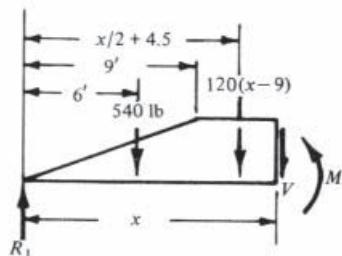


Figura 8.14

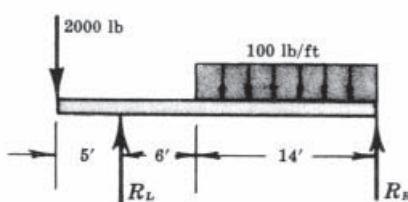


Figura 8.15

Puede comprobarse con estas últimas ecuaciones si el momento en el extremo de la derecha es próximo a cero, como debe ser.

**8.5.** Dibujar los diagramas de cortantes y flectores de la viga de la Figura 8.15.

#### SOLUCIÓN

Sumando momentos respecto a  $R_L$ ,

$$+2000(5) - 1400(13) + 20R_R = 0, \quad \text{o sea,} \quad R_R = 410 \text{ lb}$$

Sumando momentos respecto a  $R_R$ ,

$$+2000(25) - 20R_L + 1400(7) = 0, \quad \text{o sea,} \quad R_L = 2990 \text{ lb}$$

Para dibujar el diagrama de cortantes (Figura 8.16) recordemos que el cortante en cualquier sección es la suma de las fuerzas a la izquierda de la sección, con signo positivo si la fuerza es ascendente.

Para una sección a una distancia muy pequeña  $\varepsilon$  del extremo izquierdo,  $V = -2000$  lb, valor que se mantiene hasta llegar a la reacción de la izquierda. Así pues, a una distancia muy pequeña,  $\varepsilon$ , a la izquierda de la reacción izquierda, es  $V = -2000$  lb; pero a esa misma distancia  $\varepsilon$  a la derecha de esa reacción, es  $V = +990$  lb, valor que se mantiene hasta llegar a la carga distribuida. Entonces, el cortante disminuye (la carga es descendente) a razón de 100 lb/ft. Se anula a 9,9 ft ( $990/100$ ). Su valor a la distancia  $\varepsilon$  a la izquierda del extremo derecho es de  $-410$  lb. Así pues, la reacción de la derecha cierra el diagrama de cortantes.

Para dibujar el diagrama de flectores (Figura 8.16), primero hallamos el momento en el extremo izquierdo (realmente a la distancia  $\varepsilon$  a la derecha del extremo izquierdo). Ese valor es de  $-2000\varepsilon$  lb·ft, o sea, cero en el extremo izquierdo. Desde  $x = 0$  hasta  $x = 5$  ft, el cortante tiene un valor negativo constante, por tanto, la pendiente en el diagrama de flectores es constante y negativa. El momento, justo a la izquierda de la reacción de la izquierda es igual al momento en el extremo izquierdo (cero) más el área bajo el diagrama de cortantes desde el extremo izquierdo hasta la reacción izquierda  $[-5(2000) = -10.000]$  lb·ft].

La fuerza cortante es positiva y constante entre  $x = 5$  ft y  $x = 11$  ft; por tanto, la pendiente en el diagrama de flectores es positiva. La variación del momento es el área en el diagrama de cortantes entre  $x = 5$  ft y  $x = 11$  ft; o sea,  $+6(990) = +5940$ . Así pues, el momento pasa de  $-10.000$  a  $(-10.000 + 5940) = -4060$  lb·ft.

El área de cortantes es positiva en los 9,9 ft siguientes, al final de los cuales ( $V=0$ ) el momento alcanza un máximo. La variación del flector desde  $x = 11$  ft a  $x = 20,9$  ft es el área del triángulo bajo el diagrama de cortantes, que vale,  $\frac{1}{2}(990)(9,9) = 4900$  lb·ft.

Así pues, el valor de  $M$  en  $x = 20,9$  ft es  $(-4060 + 4900) = +840$  lb·ft. Puesto que los cortantes son positivos pero decrecientes en el intervalo  $11 \text{ ft} < x < 20,9$  ft, el diagrama de flectores es de pendiente positiva pero decreciente hasta que el valor del momento flector es de 840 lb·ft.

Para completar el diagrama de momentos flectores, se observa que en el último tramo del diagrama de cortantes el área es negativa, pero que  $V$  crece en valor absoluto. Por tanto, la curva de momentos flectores es de pendiente negativa creciente en valor absoluto. Además, el descenso en la curva de momentos flectores coincide con el valor del área de cortantes, que vale  $\frac{1}{2}(4,1)(410) = 840$  lb·ft, lo que indica que el momento en el extremo derecho es cero, como debe ser.

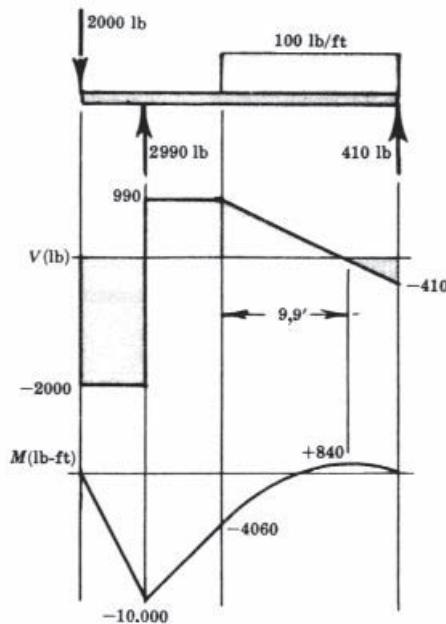


Figura 8.16

### Problemas propuestos

- 8.6.** Una viga en voladizo soporta una carga triangular y otra uniforme (Figura 8.17). Hallar las expresiones de cortantes y flectores.

*Resp.*  $0 < x < 6 \text{ ft}$ ,  $V = -\frac{50}{3}x^2 \text{ lb}$ ,  $M = -\frac{50}{9}x^3 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ ;  $6 \text{ ft} < x < 12 \text{ ft}$ ,  $V = +600 - 200x \text{ lb}$ ,  $M = -1200 + 600x - 100x^2 \text{ lb} \cdot \text{ft}$

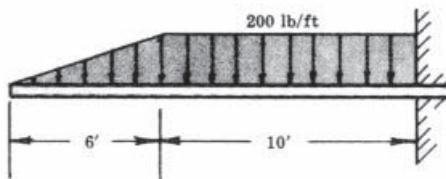


Figura 8.17

- 8.7.** Hallar las expresiones de cortantes y flectores de las vigas de las Figuras 8.18 a 8.24. Comprobar también los diagramas. Todas las distancias  $x$  se miden desde el extremo izquierdo de la viga.

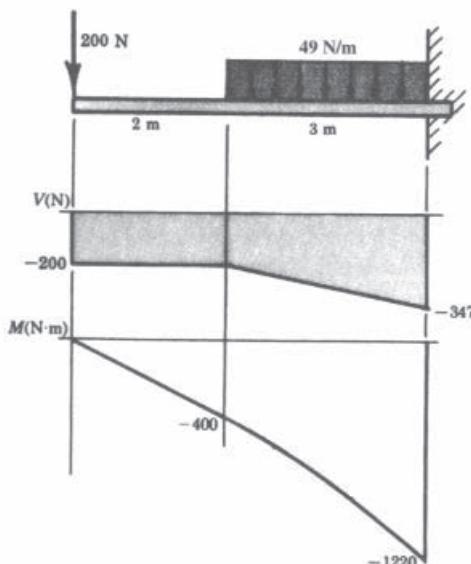


Figura 8.18

*Resp.* (Figura 8.18).

$$0 < x < 2 \text{ m} \quad \begin{cases} V = -200 \text{ N} \\ M = -200x \text{ N} \cdot \text{m} \end{cases}$$

$$2 \text{ m} < x < 5 \text{ m} \quad \begin{cases} V = -102 - 49x \text{ N} \\ M = -98 - 102x - 24,5x^2 \text{ N} \cdot \text{m} \end{cases}$$

*Resp.* (Figura 8.19)

$$0 < x < \frac{l}{2} \quad \begin{cases} V = \frac{3}{4}P \\ M = \frac{3}{4}Px \end{cases}$$

$$\frac{l}{2} < x < L \quad \begin{cases} V = -P/4 \\ M = -P/4(x-l) \end{cases}$$

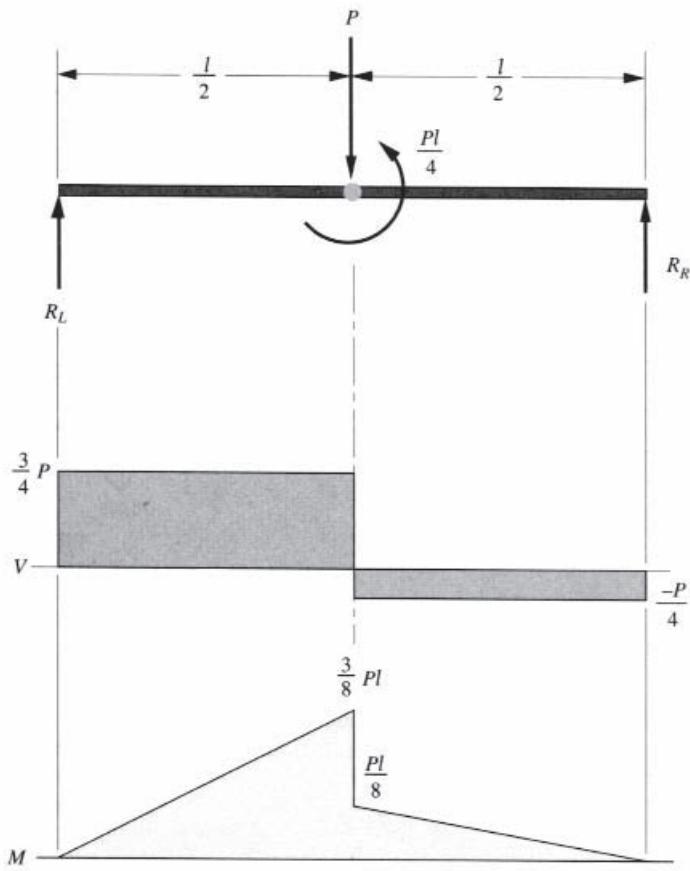


Figura 8.19

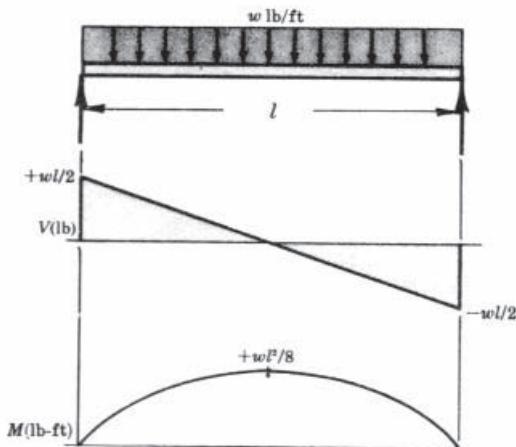


Figura 8.20

$$\text{Resp. (Figura 8.20)} \quad 0 < x < L \quad \begin{cases} V = +wl/2 - wx \text{ lb} \\ M = +wlx/2 - wx^2/2 \text{ lb} \cdot \text{ft} \end{cases}$$

$$\text{Resp. (Figura 8.21)} \quad 0 < x < \frac{l}{2} \quad \begin{cases} V = -P \\ M = -Px \end{cases}$$

$$\frac{l}{2} < x < l \quad \begin{cases} V = -P \\ M = -P(x + l/2) \end{cases}$$

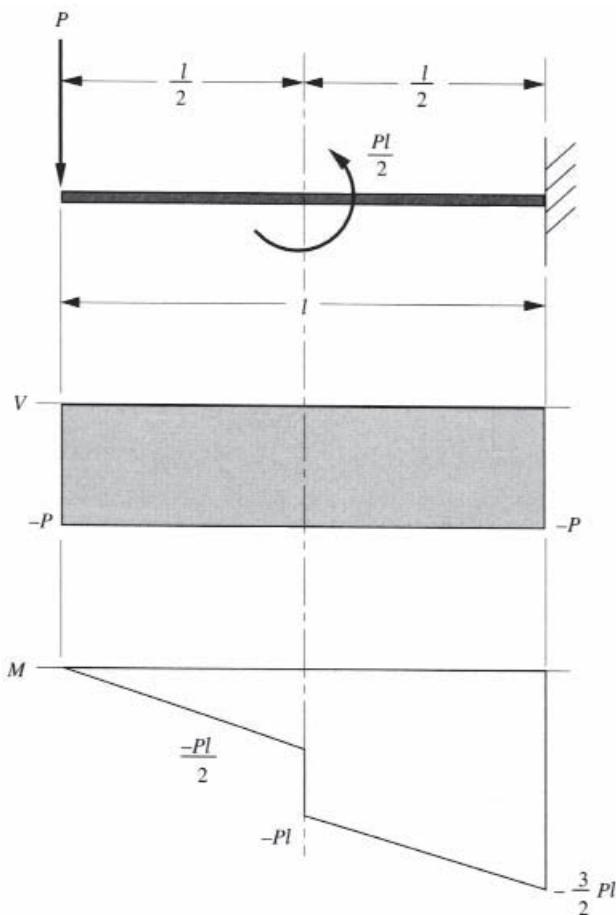


Figura 8.21

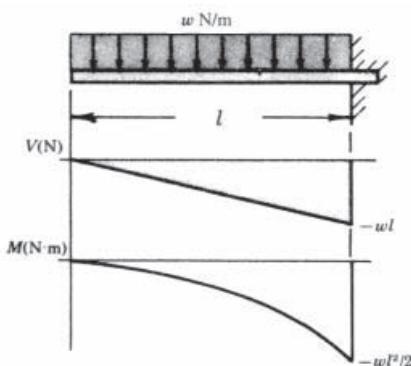


Figura 8.22

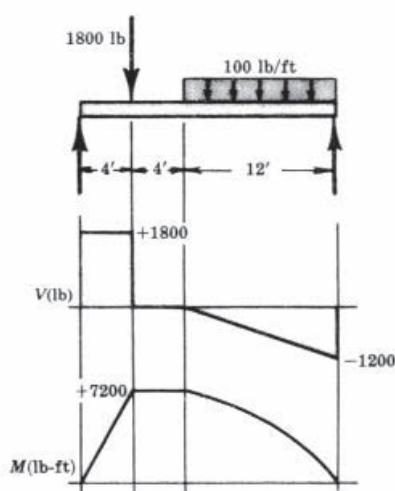


Figura 8.23

$$\text{Resp. (Figura 8.22)} \quad 0 < x < l \quad \begin{cases} V = -wx \text{ N} \\ M = -wx^2 / 2 \text{ m} \cdot \text{N} \end{cases}$$

Resp. (Figura 8.23)

$$0 < x < 4 \text{ ft} \quad \begin{cases} V = +1800 \text{ lb} \\ M = +1800x \text{ lb} \cdot \text{ft} \end{cases}$$

$$4 \text{ ft} < x < 8 \text{ ft} \quad \begin{cases} V = 0 \\ M = 7200 \text{ lb} \cdot \text{ft} \end{cases}$$

$$8 \text{ ft} < x < 20 \text{ ft} \quad \begin{cases} V = -800 - 100x \text{ lb} \\ M = +4000 + 800x - 50x^2 \text{ lb} \cdot \text{ft} \end{cases}$$

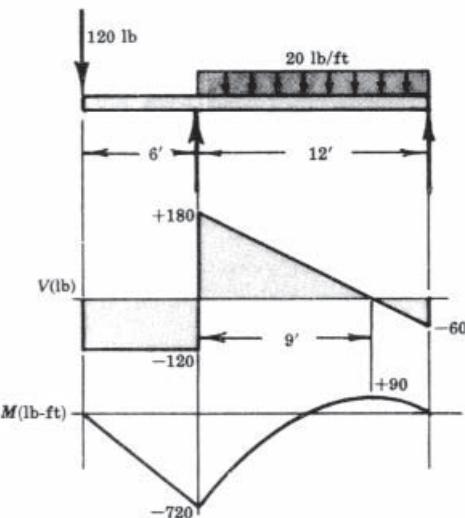


Figura 8.24

Resp. (Figura 8.24)

$$0 < x < 6 \text{ ft} \quad \begin{cases} V = -120 \text{ lb} \\ M = -120x \text{ lb} \cdot \text{ft} \end{cases}$$

$$6 \text{ ft} < x < 18 \text{ ft} \quad \begin{cases} V = +300 - 20x \text{ lb} \\ M = -2160 + 300x + 10x^2 \text{ lb} \cdot \text{ft} \end{cases}$$

# 9

# ROZAMIENTO

## 9.1 CONCEPTOS GENERALES

1. *Rozamiento estático* entre dos cuerpos es la fuerza tangencial que se opone al deslizamiento de un cuerpo respecto a otro.
2. *Rozamiento límite*  $F'$  es el valor máximo del rozamiento estático y que éste alcanza cuando el movimiento es inminente.
3. *Rozamiento cinético* es la fuerza tangencial entre dos cuerpos cuando ya se ha iniciado el movimiento. Es menor que el rozamiento estático.
4. *Ángulo de rozamiento* es el ángulo entre la recta de acción de la reacción total de un cuerpo sobre el otro cuando el movimiento es inminente y la normal a la tangente común entre los dos cuerpos.
5. *Coeficiente de rozamiento estático* es el cociente entre el rozamiento límite  $F'$  y la fuerza normal  $N$ :

$$\mu = \frac{F'}{N}$$

6. *Coeficiente de rozamiento cinético* es el cociente entre el rozamiento cinético y la fuerza normal.
7. *Ángulo de reposo*  $\alpha$  es el ángulo que ha de superar un plano inclinado para que un objeto en reposo sobre él empiece a moverse bajo la acción de la gravedad y la reacción del plano. En la Figura 9.1 se representa tal estado de movimiento inminente.

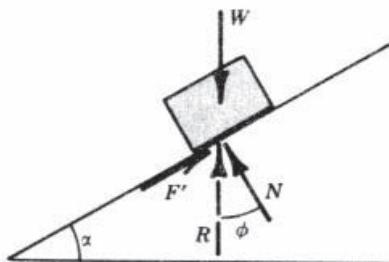


Figura 9.1

En la figura, la resultante  $R$  de  $F'$  y  $N$  tiene el mismo módulo que el peso  $W = Mg$ , pero es de sentido opuesto. Aunque el movimiento es inminente, el cuerpo todavía está en equilibrio. Por trigonometría,  $\alpha = \phi$ . Por tanto, el coeficiente de rozamiento  $\mu$  puede calcularse aumentando la inclinación del plano  $\alpha$  hasta que el movimiento sea inminente. En tal caso,  $\mu = \operatorname{tg} \phi$  y, por tanto,  $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ .

## 9.2 LEYES DEL ROZAMIENTO

- (a) El coeficiente de rozamiento es independiente de la fuerza normal, aunque el rozamiento límite y el rozamiento cinético son proporcionales a dicha fuerza.
- (b) El coeficiente de rozamiento es independiente del área de contacto.
- (c) El coeficiente de rozamiento cinético es menor que el de rozamiento estático.

- (d) A velocidades bajas, el rozamiento es independiente de la velocidad. A velocidades mayores, se observa una disminución del rozamiento.
- (e) La fuerza de rozamiento estático nunca es mayor que la necesaria para mantener el cuerpo en equilibrio. En la resolución de problemas con rozamiento estático debe suponerse que la fuerza de rozamiento es una incógnita independiente, a no ser que el problema especifique claramente que el movimiento es inminente. En tal caso, la fuerza es la de rozamiento límite  $F' = \mu N$ , como se ha indicado en (5).

### 9.3 GATO MECÁNICO

El gato mecánico es un ejemplo de mecanismo por rozamiento. En el tornillo de rosca cuadrada de la Figura 9.2, se presentan dos problemas fundamentales: (a) el momento de la fuerza  $P$  necesaria para elevar la carga y (b) el momento de la fuerza  $P$  necesaria para bajar la carga.

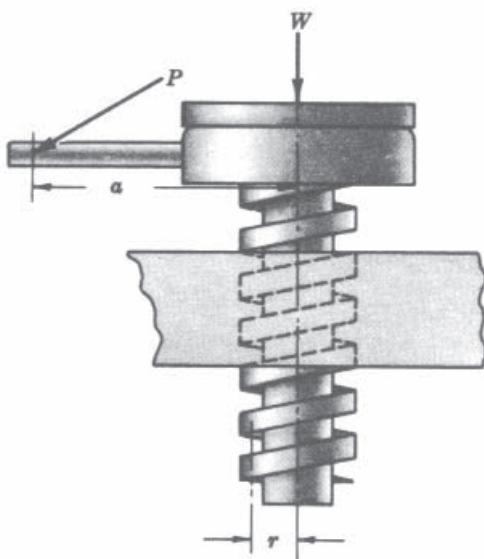


Figura 9.2

En ambos casos el momento de giro tiene la dirección del eje longitudinal del tornillo (vertical en la figura).

En el caso (a) el momento de giro debe vencer al rozamiento y hacer que la carga suba, mientras que en el caso (b) la carga  $W$  facilita que se venza el rozamiento. Para que la carga suba, el tornillo visto desde arriba debe girar en sentido antihorario.

Sea  $\beta$  el ángulo de avance, es decir, el ángulo cuya tangente es el paso dividido por la circunferencia media (el paso es el avance del tornillo en una vuelta). Sea  $\phi$  el ángulo de rozamiento. Las expresiones en los dos casos son:

$$(a) \quad M = Wr \operatorname{tg}(\phi + \beta)$$

$$(b) \quad M = Wr \operatorname{tg}(\phi - \beta)$$

donde  $r$  es el radio medio de la rosca.

Las expresiones anteriores son válidas también si el tornillo gira a velocidad constante. En tal caso,  $\phi$  es, por supuesto, el ángulo de rozamiento cinético. Son aplicables también a un gato mecánico al que se haya añadido un plato para actuar como soporte de la carga. Para ser más precisos, deberíamos añadir otro término en el segundo miembro de cada fórmula que represente el momento necesario para vencer el rozamiento entre el plato y el tornillo. Este término es de la forma  $W\mu r_c$ , donde  $W$  es la carga,  $\mu$  es el coeficiente de rozamiento entre el plato y el tornillo y  $r_c$  es el radio medio de la superficie de apoyo entre el plato y el tornillo. En el Problema 9.14 se aplica esta fórmula. Es una aproximación de la expresión más completa para el momento de rozamiento circunferencial.

## 9.4 ROZAMIENTO EN LAS CORREAS Y CINTAS DE FRENO

El rozamiento en las correas y las cintas de freno se basa también en la utilización de la fricción. Cuando una correa o una cinta pasa por una polea rugosa, las tensiones en la correa o cinta a los dos lados de la polea son diferentes. Cuando está a punto de iniciarse el deslizamiento, es aplicable la siguiente expresión:

$$T_1 = T_2 e^{\mu\alpha}$$

donde  $T_1$  = tensión mayor

$T_2$  = tensión menor

$\mu$  = coeficiente de rozamiento

$\alpha$  = ángulo abarcado en radianes

$e$  = 2,718 (base de los logaritmos naturales).

## 9.5 RESISTENCIA A LA RODADURA

La deformación de la superficie bajo una carga rodante es la causa de la resistencia a la rodadura. En la Figura 9.3 se exagera el efecto. Se empuja una rueda de peso  $W$  y radio  $r$  con una fuerza horizontal  $P$  para que gire alrededor del punto  $A$  y salga de la depresión  $P$ . Naturalmente, éste es un proceso continuo cuando la rueda gira.

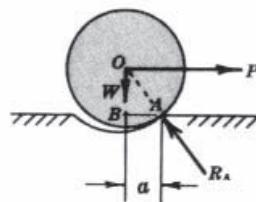


Figura 9.3

Sumando momentos respecto a  $A$  se obtiene la siguiente expresión:

$$\sum M_A = 0 = W \times a - P \times (OB)$$

Puesto que la depresión es en realidad muy pequeña, la distancia  $(OB)$  puede sustituirse por  $r$ ; por tanto,

$$P \times r = W \times a$$

Se observa que la componente horizontal de la reacción  $R$  de la superficie es igual a  $P$  y constituye la resistencia a la rodadura. La distancia  $a$  se denomina coeficiente de resistencia a la rodadura, y se expresa en pulgadas o milímetros. Se han tabulado los coeficientes para varios materiales, pero los resultados no han sido uniformes.

### Problemas resueltos

- 9.1.** La escalera  $AB$  de 12 ft de longitud pesa 30 lb. Se apoya en una pared vertical y en un suelo horizontal, tal como muestra la Figura 9.4(a) ¿Cuál debe ser el coeficiente de rozamiento  $\mu$  para el equilibrio?

#### SOLUCIÓN

El diagrama de cuerpo libre de la Figura 9.4(b) muestra el peso de 30 lb, las fuerzas normales en  $A$  y en  $B$  y las fuerzas de rozamiento límite  $\mu N_A$  y  $\mu N_B$ . Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum F_x = 0 = N_A - \mu N_B \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = N_B + \mu N_A - 30 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 = -30(6 \cos 50^\circ) + N_B(12 \cos 50^\circ) - \mu N_B(12 \sin 50^\circ) \quad (3)$$

Se sustituye el valor de  $N_A$  obtenido de (1) en (2) y se obtiene  $N_B = 30/(1 + \mu_2)$ .  
Se sustituye este valor de  $N_B$  en (3) y se obtiene

$$-30(6 \cos 50^\circ) + \frac{30}{1 + \mu^2}(12 \cos 50^\circ) - \frac{30}{1 + \mu^2} \mu (12 \sin 50^\circ) = 0$$

De aquí resulta  $\mu = 0,36$ .

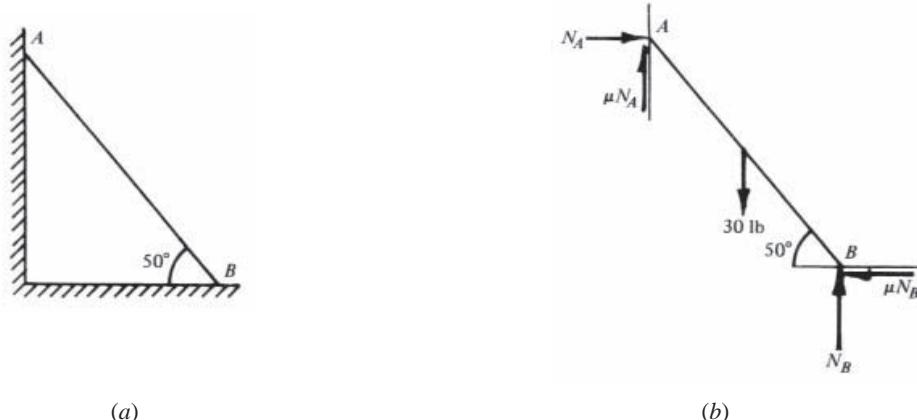


Figura 9.4

- 9.2.** Hallar el ángulo mínimo  $\theta$  para que una escalera homogénea de longitud  $l$ , apoyada en una pared, permanezca en equilibrio si el coeficiente de rozamiento en todas las superficies es  $\mu$ .

#### SOLUCIÓN

Se supone que el deslizamiento es inminente y se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la escalera. Las incógnitas son tres (Figura 9.5):  $N_1$ ,  $N_2$  y  $\theta$ . Las tres ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum F_h = 0 = N_1 - \mu N_2 \quad (1)$$

$$\sum F_v = 0 = N_2 - W + \mu N_1 \quad (2)$$

$$\sum M_B = 0 = -W \frac{1}{2} l \cos \theta + N_2 l \cos \theta - \mu N_2 l \sin \theta \quad (3)$$

Se sustituye  $N_1 = \mu N_2$  en (2) y se obtiene  $N_2 = W/(1 + \mu^2)$ . Este valor de  $N_2$  se sustituye en (3) y se obtiene  $\theta = \text{artg} [1 - \mu^2]/2\mu]$ . Este es el valor crítico de  $\theta$  por encima del cual se produce deslizamiento.

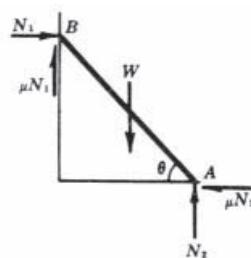


Figura 9.5

- 9.3.** Hallar el valor de  $P$  que provoca el movimiento del bloque de 70 kg de la Figura 9.6(a). El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la superficie horizontal es  $\frac{1}{4}$ .

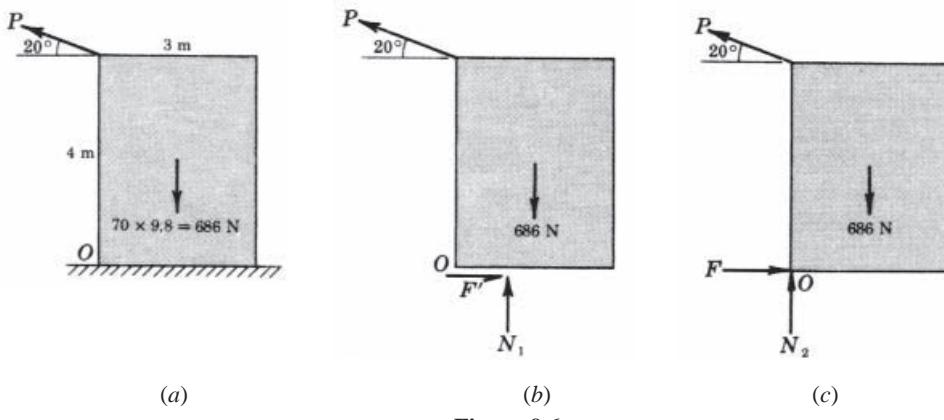


Figura 9.6

**SOLUCIÓN**

Suponiendo que  $P$  se aplica gradualmente, el movimiento puede iniciarse de dos modos: el bloque puede deslizar hacia la izquierda o puede volcar, girando alrededor de la arista en  $O$ .

Primero calculamos el valor de  $P$  para que el bloque deslice hacia la izquierda. El rozamiento es, en este caso, el límite, tal como se muestra en la Figura 9.6(b). Las ecuaciones son:

$$\sum F_v = 0 = P \sin 20^\circ - 686 + N_1 \quad (1)$$

$$\sum F_h = 0 = -P \cos 20^\circ + F' \quad (2)$$

Puesto que  $F' = \mu N_1 = \frac{1}{4} N_1$ , se sustituye en (2). Las ecuaciones son, pues

$$P \sin 20^\circ + N_1 = 686 \quad (3)$$

$$-P \cos 20^\circ + \frac{1}{4} N_1 = 0 \quad (4)$$

es decir,

$$P \sin 20^\circ + N_1 = 686 \quad (5)$$

$$4P \cos 20^\circ - N_1 = 0 \quad (6)$$

Sumando (5) y (6) y se obtiene  $P = 167 \text{ N}$ .

Seguidamente se supone que el bloque vuela, girando alrededor de la arista en  $O$  [Figura 9.6(c)] y se calcula  $P$  para que así sea. Obsérvese que en ese cálculo no se asigna valor a la fuerza de rozamiento. Se la denomina  $F$  (véase la figura) y, puesto que se supone que el bloque vuela, la fuerza normal se sitúa en  $O$ . Las ecuaciones de equilibrio son:

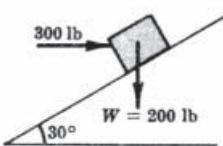
$$\sum M_O = 0 = P \cos 20^\circ \times 4 - 686 \times 3/2 \quad (7)$$

$$\sum F_h = 0 = -P \cos 20^\circ + F \quad (8)$$

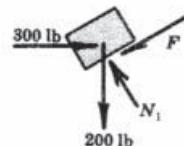
$$\sum F_v = 0 = +P \sin 20^\circ + N_2 - 686 \quad (9)$$

De la ecuación (7) se obtiene directamente  $P = 274 \text{ N}$ . Con este resultado puede darse por acabado el cálculo. Cuando  $P$  crece continuamente a partir de cero, lo primero en producirse es el deslizamiento, puesto que éste se inicia cuando  $P = 167 \text{ N}$ , mientras que el bloque no vuela hasta que  $P = 274 \text{ N}$ .

- 9.4.** ¿Está en equilibrio el bloque de 200 lb de la Figura 9.7(a) con la fuerza horizontal de 300 lb? El coeficiente de rozamiento estático es 0,3.



(a)



(b)

Figura 9.7

**SOLUCIÓN**

En este caso es poco probable que la fuerza de rozamiento sea exactamente la límite. Se supone que la fuerza de 300 lb supera el valor necesario para impedir que el bloque descienda; pero podría ser suficiente para provocar el ascenso. Para averiguar si ocurre esto último, se admite que  $F$  es descendente, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la Figura 9.7(b).

Las ecuaciones de suma de fuerzas paralelas y perpendiculares al plano son:

$$\sum F_{\parallel} = 0 = -F - 200 \sin 30^\circ + 300 \cos 30^\circ \quad (1)$$

$$\sum F_{\perp} = 0 = +N_1 - 200 \cos 30^\circ - 300 \sin 30^\circ \quad (2)$$

Resolviendo el sistema,  $F = 160$  lb;  $N_1 = 323$  lb.

Ello indica que el valor de  $F$  necesario para impedir que el bloque ascienda es de 160 lb. Como quiera que el máximo valor de dicha fuerza es  $F' = 0.3 N_1 = 0.3 \times 323 = 97$  lb, el bloque iniciará el movimiento de ascenso. Lo que ocurre después de iniciado el movimiento es objeto de capítulos posteriores.

- 9.5.** ¿Qué fuerza horizontal  $P$  es necesaria en las cuñas  $B$  y  $C$  para levantar el peso de 20 ton aplicado en  $A$ ? Véase la Figura 9.8(a). Supóngase que  $\mu$  entre las cuñas y el suelo es  $\frac{1}{4}$  y  $\mu$  entre las cuñas y  $A$  es 0,2. Supóngase también que la carga es simétrica.

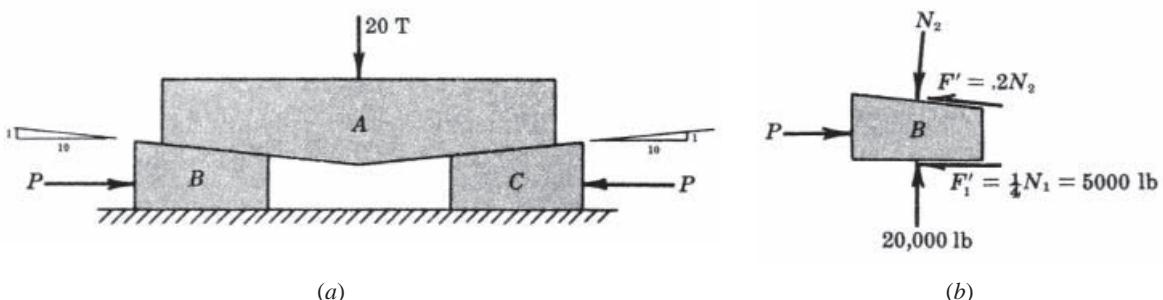


Figura 9.8

**SOLUCIÓN**

Considerando el diagrama de cuerpo libre del conjunto completo, resulta evidente que la fuerza entre el suelo y cada cuña es de 10 ton, o sea, 20.000 lb.

En la Figura 9.8(b) se muestra el diagrama de cuerpo libre de la cuña  $B$ , en el cual la fuerza de 20.000 lb es vertical ascendente y la fuerza de rozamiento entre la cuña y el suelo se opone al movimiento. Puesto que el movimiento es inminente, su valor es  $\frac{1}{4} \times 20.000$  lb = 5000 lb. La fuerza normal de  $A$  sobre  $B$  es perpendicular a las superficies de contacto y  $F'$  se opone al movimiento y su valor es el límite por ser el movimiento inminente. Con ello queda completo el diagrama de cuerpo libre de  $B$ , con sólo las fuerzas que actúan sobre  $B$ . Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum F_h = 0 = P - 5000 - N_2 \frac{1}{\sqrt{101}} - 0,2N_2 \frac{10}{\sqrt{101}} \quad (1)$$

$$\sum F_v = 0 = 20.000 - N_2 \frac{10}{\sqrt{101}} + 0,2N_2 \frac{1}{\sqrt{101}} \quad (2)$$

De (2),  $N_2 = 20.500 \text{ lb}$ , que sustituida en (1) da  $P = 11.100 \text{ lb}$ .

- 9.6.** El bloque  $B$  descansa sobre el bloque  $A$  y está unido a una pared por una cuerda horizontal  $BC$ , tal como muestra la Figura 9.9(a). ¿Qué fuerza  $P$  es necesaria para que el movimiento de  $A$  sea inminente? El coeficiente de rozamiento entre  $A$  y  $B$  es  $\frac{1}{4}$  y entre  $A$  y el suelo es  $\frac{1}{3}$ . Las masas respectivas de  $A$  y  $B$  son 14 kg y 9 kg.

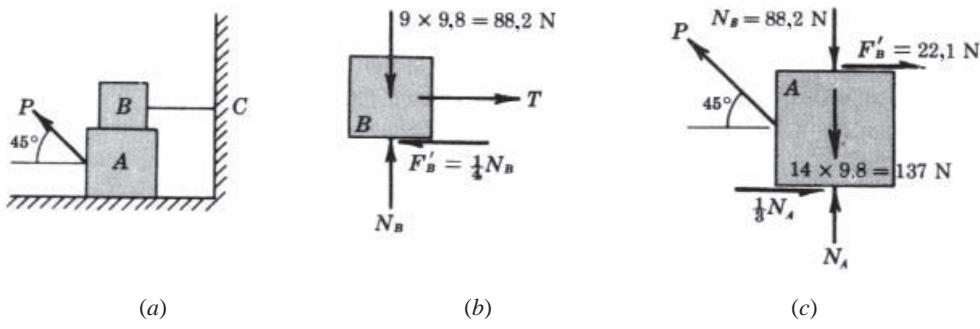


Figura 9.9

#### SOLUCIÓN

Puesto que el movimiento de  $A$  es inminente hacia la izquierda, tenderá a arrastrar a  $B$  con él, debido al rozamiento. El diagrama de cuerpo libre de  $B$  muestra a  $F'_B$  dirigida hacia la izquierda [Figura 9.9(b)].

La suma de fuerzas verticales indica que  $N_B = 88,2 \text{ N}$ . De aquí,  $F'_B = 22,1 \text{ N}$ , y, puesto que  $B$  no se mueve, la tensión  $T$  también es de 22,1 N.

En la Figura 9.9(c) se muestra el diagrama de cuerpo libre de  $A$ , dónde  $F'_B$  actúa hacia la derecha, oponiéndose al movimiento. Las ecuaciones del equilibrio son

$$\sum F_h = 0 = -P \cos 45^\circ + \frac{N_A}{3} + 22,1 \quad (1)$$

$$\sum F_v = 0 = -P \sin 45^\circ + N_A - 137 - 88,2 \quad (2)$$

De la suma de ambas ecuaciones resulta, al ser  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $N_A = 152 \text{ N}$ . Sustituyendo este valor en (2) se obtiene  $P = 104 \text{ N}$ .

- 9.7.** ¿Cuál debe ser el ángulo  $\theta$  para que el movimiento de descenso del bloque de 40 kg sea inminente? El coeficiente de rozamiento  $\mu$  en todas las superficies es  $\frac{1}{3}$ . Véase la Figura 9.10(a).

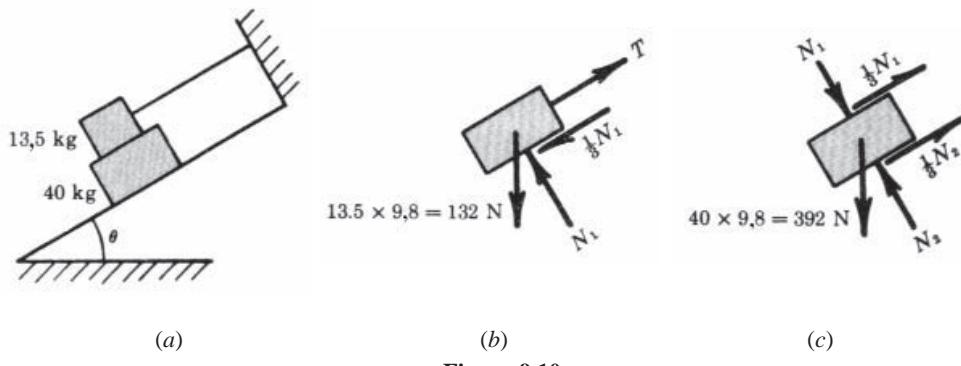


Figura 9.10

#### SOLUCIÓN

Dibujamos los diagramas de cuerpo libre de los dos pesos y sumamos las fuerzas paralelas y perpendiculares al plano. Observamos en el diagrama de cuerpo libre de la masa de 13,5 kg que  $N_1 = 132 \cos \theta$ . Las ecuaciones para la masa de 40 kg son:

$$\sum F_{\parallel} = 0 = -200 \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{3} N_1 + \frac{1}{3} N_2 \quad (1)$$

$$\sum F_{\perp} = 0 = N_2 - 392 \cos \theta - N_1 \quad (2)$$

Sustituimos  $N_1 = 132 \cos \theta$  en (1) y (2), eliminamos  $N_2$  y hallamos  $\theta = 29,1^\circ$ .

- 9.8.** Un cuerpo que pesa 350 lb descansa en un plano inclinado  $30^\circ$  (Figura 9.11). El ángulo de rozamiento estático entre el cuerpo y el plano es de  $15^\circ$ . ¿Qué fuerza horizontal  $P$  se necesita para impedir el descenso por deslizamiento del cuerpo?

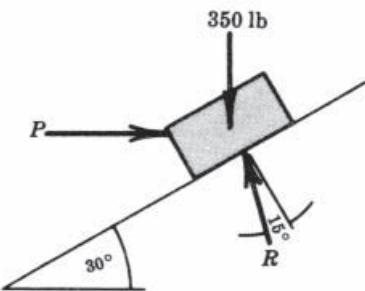


Figura 9.11

#### SOLUCIÓN

Puesto que una ligera disminución de  $P$  permitiría el descenso del cuerpo, empleamos el valor límite del rozamiento  $F'$ . La reacción  $R$  se dibuja formando un ángulo de  $15^\circ$  con la normal y de modo que favorezca a la acción de  $P$ .

Téngase en cuenta que sólo puede emplearse el ángulo de rozamiento estático si el movimiento es inminente.

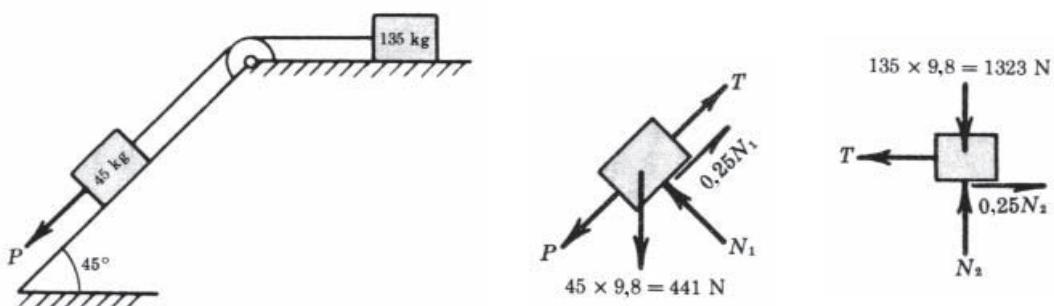
Se obtienen las ecuaciones de equilibrio sumando las fuerzas paralelas y perpendiculares al plano:

$$\sum F_{\parallel} = 0 = P \cos 30^\circ - 350 \operatorname{sen} 30^\circ + R \operatorname{sen} 15^\circ \quad (1)$$

$$\sum F_{\perp} = 0 = R \cos 15^\circ - 350 \cos 30^\circ + P \operatorname{sen} 30^\circ \quad (2)$$

Resolviendo el sistema, multiplicando la primera ecuación por  $\cos 15^\circ$  y la segunda por  $\operatorname{sen} 15^\circ$ , se obtiene  $P = 93,4$  lb.

- 9.9.** En la Figura 9.12(a), hallar la fuerza  $P$  paralela al plano que provoca movimiento inminente. Se supone que el coeficiente de rozamiento es 0,25 y que la polea es lisa.



(a)

(b)

(c)

Figura 9.12

**SOLUCIÓN**

En las Figuras 9.12(b) y (c) se muestran los diagramas de cuerpo libre de las dos masas, donde  $T$  es la tensión en la cuerda. Observamos que  $N_2 = 1323 \text{ N}$  y, por tanto,  $T = 0,25N_2 = 331 \text{ N}$ . Observamos también que  $N_1 = 441 \cos 45^\circ = 312 \text{ N}$ , o sea,  $F'_1 = 78 \text{ N}$ . De la suma de las fuerzas paralelas al plano inclinado, se obtiene  $\Sigma F = P + 441 \times 0,707 - 331 - 78$ , o sea,  $P = 97,2 \text{ N}$ .

- 9.10.** En la Figura 9.13(a), ¿cuál es el mínimo valor de  $P$  que provoca el movimiento inminente? Se supone que el coeficiente de rozamiento es 0,20.

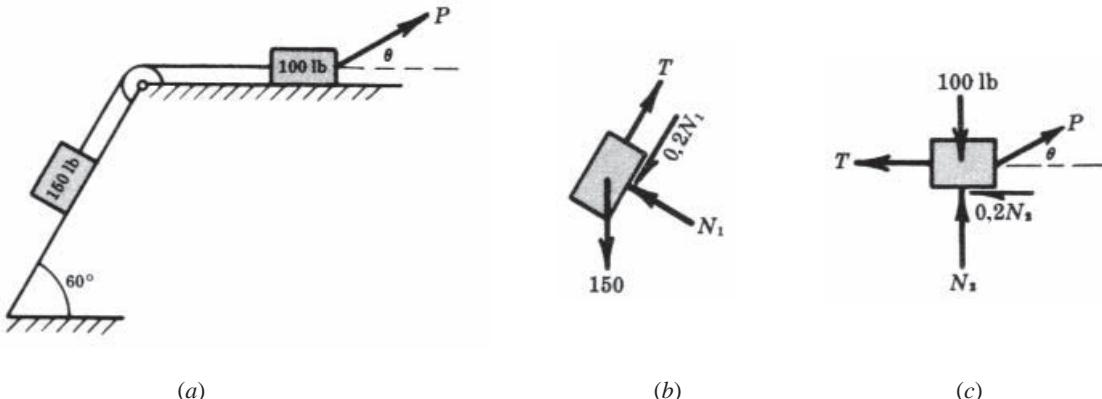


Figura 9.13

**SOLUCIÓN**

Se dibujan los diagramas de cuerpo libre de los dos pesos. Obsérvese que  $P$  se ha dibujado formando un ángulo  $\theta$  desconocido con la horizontal. Se observa que  $N_1 = 150 \cos 60^\circ = 75 \text{ lb}$ ; por tanto,  $T = 0,20N_1 = 150 \cos 30^\circ = 145 \text{ lb}$ . Las ecuaciones del equilibrio del peso de 100 lb son:

$$\sum F_h = 0 = P \cos \theta - 0,20N_2 - 145 \quad (1)$$

$$\sum F_v = 0 = P \sin \theta + N_2 - 100 \quad (2)$$

Eliminando  $N_2$  entre estas dos ecuaciones se obtiene:

$$P = \frac{165}{\cos \theta + 0,20 \sin \theta}$$

$P$  será mínimo cuando el denominador ( $\cos \theta + 0,20 \sin \theta$ ) sea máximo. Igualando a cero la derivada del denominador respecto a  $\theta$ , se halla el valor de  $\theta$  que hace mínimo a  $P$ .

$$\frac{d}{d\theta}(\cos \theta + 0,20 \sin \theta) = -\sin \theta + 0,20 \cos \theta = 0 \quad \text{o sea} \quad \theta = \arctg 0,20 = 11^\circ 20'$$

De aquí resulta que el mínimo valor de  $P$  es:

$$P = \frac{165}{\cos 11^\circ 20' + 0,20 \sin 11^\circ 20'} = 162 \text{ lb}$$

- 9.11.** En la Figura 9.14, ¿provoca la fuerza de 180 N el deslizamiento del cilindro de 100 kg? El coeficiente de rozamiento es 0,25.

**SOLUCIÓN**

Al desconocerse si el cilindro desliza o no, no puede afirmarse que  $F_1 = \mu N_1$  y  $F_2 = \mu N_2$ . En consecuencia,  $F_1$  y  $F_2$  se toman como incógnitas junto con  $N_1$  y  $N_2$ . Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum F_h = 0 = F_1 - N_2 + 180 \quad (1)$$

$$\sum F_v = 0 = N_1 + F_2 - 980 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 = -180 \times 2r + F_2 \times r + N_2 \times r \quad (3)$$

Despejando  $N_1$ ,  $N_2$  y  $F_1$  en función de  $F_2$ , resulta  $N_1 = 980 - F_2$ ,  $N_2 = 360 - F_2$  y  $F_1 = 180 - F_2$ .

Supongamos que  $F_2$  toma su valor máximo, es decir, 0,25  $N_2$  y calculemos  $F_1$ ,  $N_1$  y  $N_2$  con las ecuaciones (1), (2) y (3). Resulta:  $N_2 = 288$  N,  $N_1 = 908$  N y  $F_1 = 108$  N.

Esto significa que si  $F_2$  toma su valor estático máximo,  $F_1$  debe valer 108 N para que el sistema se mantenga en equilibrio. Puesto que el valor máximo de  $F_1$  es 0,25  $N_2$  = 227 N, el cilindro no gira.

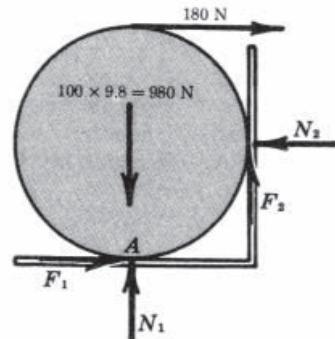


Figura 9.14

- 9.12.** En la Figura 9.15(a), ¿cuál debe ser el coeficiente de rozamiento entre las superficies de sujeción de las tenazas y la masa  $m$  para impedir el deslizamiento?

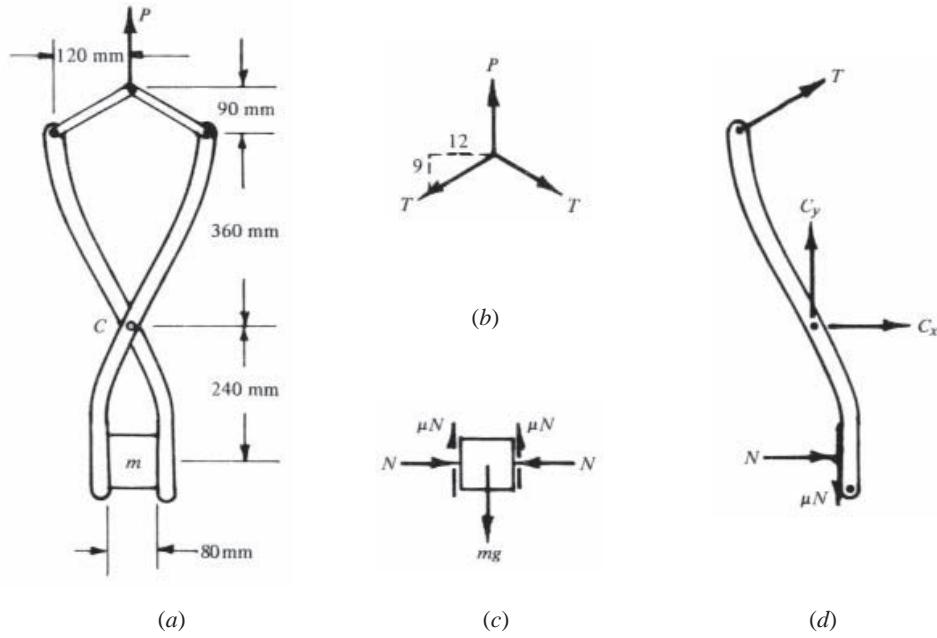


Figura 9.15

#### SOLUCIÓN

El diagrama de cuerpo libre de las tenazas con la masa  $m$  indica que  $P = mg$ .

Del diagrama de cuerpo libre del pasador superior de la Figura 9.15(b) se deduce que:

$$\sum F_y = 0 = P - 2T \times \frac{9}{15}, \quad \text{o sea,} \quad T = \frac{5mg}{6}$$

Del diagrama de cuerpo libre de la masa  $m$  de la Figura 9.15(c) se deduce que:

$$\sum F_y = 0 = 2\mu N - mg, \quad \text{o sea,} \quad \mu N = \frac{mg}{2}$$

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de un brazo de las tenazas [Figura 9.15(d)]. Aquí, tenemos:

$$+\sum M_C = 0 = -T \times \frac{12}{15} \times 360 - T \times \frac{9}{15} \times 120 + N \times 240 - \mu N \times 40$$

$$\text{Sustituyendo, } -\frac{5mg}{6} \times \frac{12}{15} \times 360 - \frac{5mg}{6} \times \frac{9}{15} \times 120 + N \times 240 - \frac{mg}{2} \times 40 = 0$$

$$\text{De aquí, } N = \frac{(240 + 60 + 20)mg}{240} = \frac{4mg}{3}$$

$$\text{Y finalmente, } \mu = \frac{\mu N}{N} = \frac{mg/2}{4mg/3} = 0,38$$

- 9.13.** En la Figura 9.16, el coeficiente de rozamiento entre el bloque de cobre  $A$  y el de aluminio  $B$  es 0,3, y entre el bloque  $B$  y el suelo es 0,2. La masa del bloque  $A$  es 3 kg y la del  $B$  es 2 kg. ¿Qué fuerza  $P$  provoca el movimiento inminente del bloque  $A$ ?

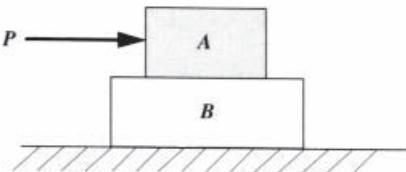


Figura 9.16

#### SOLUCIÓN

Éste es un ejemplo de un tipo de problemas caracterizados por existir múltiples posibilidades de deslizamiento, en los que es posible que el movimiento se inicie en más de un lugar. El procedimiento de análisis puede resumirse en cuatro pasos.

1. Suponer un posible modo de deslizamiento.
2. Calcular el rozamiento necesario para evitar el deslizamiento en todas las demás superficies.
3. Comprobar que el rozamiento en aquellas superficies sea suficiente para evitar el deslizamiento.
4. Si el rozamiento es suficiente, el problema está resuelto. Si el rozamiento no es suficiente para evitar el deslizamiento, se elige un segundo modo de deslizamiento y se repite el proceso.

En este problema suponemos que el deslizamiento inminente se produce en la superficie entre  $A$  y  $B$ , pero no entre  $B$  y el suelo. En la Figura 9.17 se muestran los diagramas de cuerpo libre. Obsérvese que, al suponer que no existe deslizamiento inminente entre el bloque  $B$  y el suelo,  $F'_B \neq 0,2N_B$ . Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \text{Para } A, \quad & \sum F_v = N_A - 29,4 = 0 \\ & \sum F_h = P - 0,3N_A = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } B, \quad & \sum F_v = N_B - N_A - 19,6 = 0 \\ & \sum F_h = 0,3N_A - F_B = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene  $F_B = 8,82 \text{ N}$  y  $N_B = 49 \text{ N}$ . El valor límite del rozamiento es  $F'_B = 0,2 N_B = 9,8 \text{ N}$ . Puesto que para el equilibrio se necesita únicamente una fuerza de rozamiento de 8,82 N, inferior al valor máximo 9,8 N, el bloque B no está en condiciones de movimiento inminente, por lo que la hipótesis inicial es correcta. Si hubiera sido  $F_B > F'_B$  podría producirse deslizamiento y la hipótesis inicial sería incorrecta. En tal caso el proceso debería repetirse con  $F'_B = 0,2 N_B$  y  $F'_A \neq 0,3 N_A$ .

De la ecuación de equilibrio para P,  $P = 8,82 \text{ N}$ .

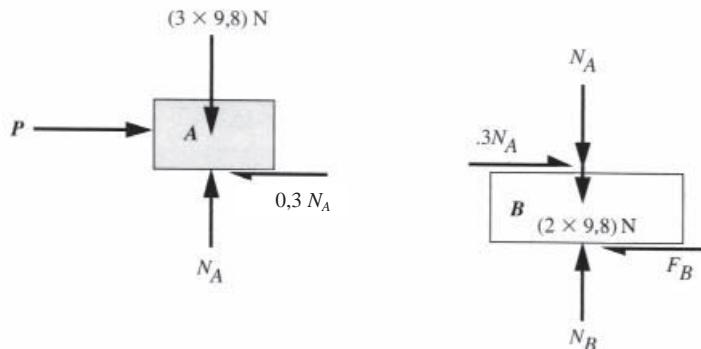


Figura 9.17

- 9.14.** En la Figura 9.18, dos cilindros, ambos de peso  $W$  y radio  $r$ , descansan en una caja de ancho  $3r$ . Las paredes de la caja son lisas. El coeficiente de rozamiento entre el cilindro A y el fondo de la caja es 0,12 y entre los dos cilindros es 0,3. Hallar el par  $M$  que debe aplicarse al cilindro B para que su movimiento sea inminente.

#### SOLUCIÓN

Existen dos posibles modos de deslizamiento inminente del cilindro B:

- (a) rotación antihoraria de B sin rotación de A;
- (b) rotación antihoraria de B con rotación horaria de A.

Elijamos el modo (a) de movimiento inminente. En este caso, en los diagramas de cuerpo libre de la Figura 9.19,  $F_2 = 0,3N_2$  pero  $F_3 \neq 0,12N_3$ . Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \text{Para } A, \quad & \sum F_v = N_3 - N_2 \sin 60^\circ - 0,3N_2 \cos 60^\circ - W = 0 \\ & \sum F_h = N_4 + F_3 - N_2 \cos 60^\circ + 0,3N_2 \sin 60^\circ = 0 \\ & \sum M_O = F_3 r - 0,3N_2 r = 0 \end{aligned}$$

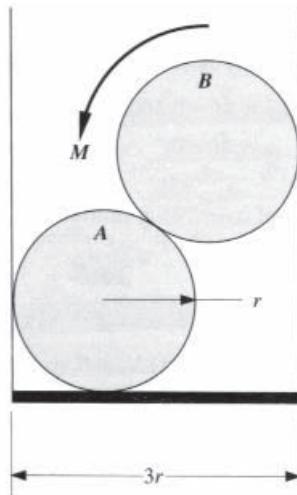


Figura 9.18

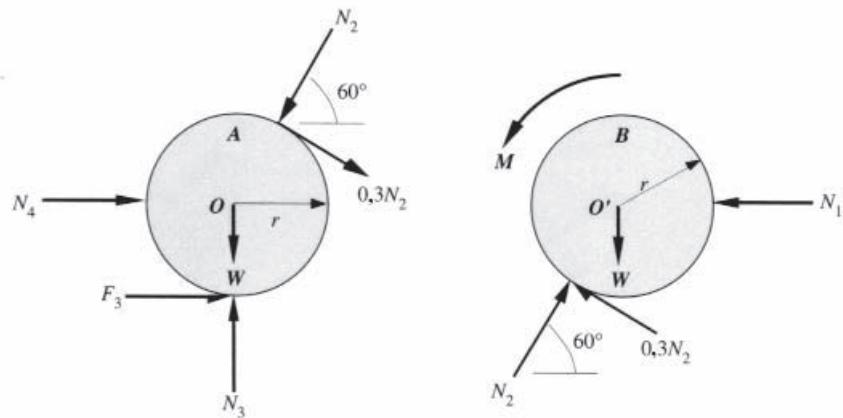


Figura 9.19

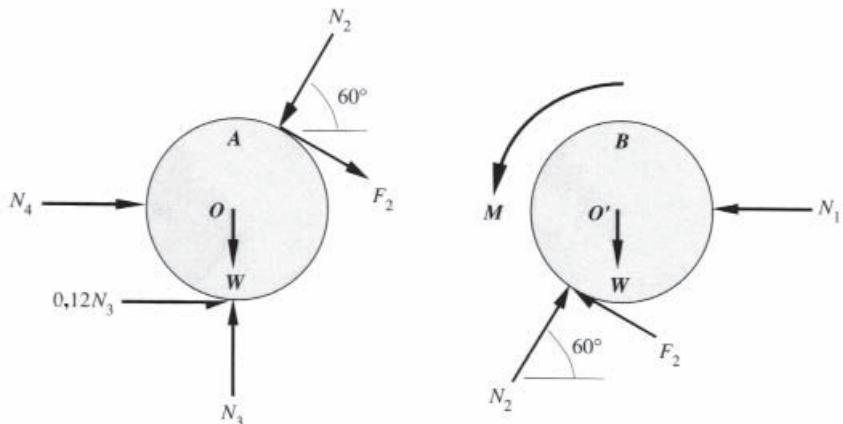


Figura 9.20

Para B,

$$\sum F_v = N_2 \operatorname{sen} 60^\circ + 0,3N_2 \cos 60^\circ - W = 0$$

$$\sum F_h = -N_1 + N_2 \cos 60^\circ - 0,3N_2 \operatorname{sen} 60^\circ = 0$$

$$\sum M_{O'} = M - 0,3N_2 r = 0$$

Despejando  $F_3$  y  $N_3$ , resulta  $F_3 = 0,295W$ ,  $N_3 = 2W$ . Después,  $F'_3 = \mu_3 N_3 = 0,24W$ , y, puesto que  $F_3 > F'_3$  el rozamiento entre el cilindro A y el suelo resulta insuficiente para impedir el deslizamiento, y, por tanto, la hipótesis (a) es falsa. Ello significa que (b) es el modo de movimiento inminente del cilindro B.

En la Figura 9.20 se muestran los diagramas de cuerpo libre. Las ecuaciones de equilibrio son:

Para A,

$$\sum F_v = N_3 - F_2 \cos 60^\circ - N_2 \operatorname{sen} 60^\circ - W = 0$$

$$\sum F_h = N_4 + 0,12N_3 + F_2 \operatorname{sen} 60^\circ - N_2 \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum M_O = 0,12N_3 r - F_2 r = 0$$

Para B,

$$\sum F_v = N_2 \operatorname{sen} 60^\circ + F_2 \cos 60^\circ - W = 0$$

$$\sum F_h = -N_1 + N_2 \cos 60^\circ - F_2 \operatorname{sen} 60^\circ = 0$$

$$\sum M_{O'} = M - F_2 r = 0$$

Despejando  $F_2 = 0,24W$  y  $M = 0,24Wr$ .

Para comprobar que (b) es realmente el modo de deslizamiento, se calculan  $N_2 = 1,02W$  y  $F'_2 = 0,306W$ . Puesto que  $F'_2 > F_2$ , el deslizamiento entre los cilindros no es inminente.

Otro modo de movimiento, además de los dos ya estudiados, consiste en que el cilindro *B* gire sobre el cilindro *A*. Para que ello *no* ocurra,  $N_1$  debe ser positivo. La ecuación de equilibrio de las fuerzas horizontales para el cilindro *B* en la Figura 9.20 da

$$\sum F_h = -N_1 + N_2 \cos 60^\circ - F_2 \sin 60^\circ = 0 \quad N_1 = 0,302W$$

Ello significa que el cilindro *B* no abandona la pared.

Por último, el par *M* que provoca el movimiento inminente es  $M = 0,24Wr$ .

- 9.15.** El diámetro medio de los filetes de un tornillo de rosca cuadrada es 2 in. El paso de rosca es de  $\frac{1}{4}$  in. El coeficiente de rozamiento  $\mu = 0,15$ . ¿Qué fuerza debe aplicarse en el extremo de una palanca de 2 ft, perpendicular al eje longitudinal del tornillo para levantar una carga de 4000 lb? ¿Qué fuerza debe aplicarse para que la carga descienda?

#### SOLUCIÓN

Para elevar la carga, se aplica la fórmula (a) de la Sección 9.3:  $M = Wr \operatorname{tg}(\phi + \beta)$ .

El momento de giro *M* es el producto de la fuerza por la longitud de la palanca.  $\phi$  es el ángulo cuya tangente es 0,15, o sea,  $\phi = 8,5^\circ$ .

$$\beta = \operatorname{artg} \frac{\text{avance}}{\text{perímetro medio}} = \operatorname{artg} \frac{0,25}{\pi/2} = \operatorname{artg} 0,0397 = 2,27''$$

$M = P \times 24 = 4000 \times 1 \operatorname{tg}(8,53^\circ + 2,27^\circ)$ . De aquí,  $P = 21,8$  lb para subir la carga.

Para calcular la fuerza para descender la carga, se aplica la fórmula  $M = Wr \operatorname{tg}(\phi - \beta)$ .

$M = P \times 24 = 4000 \times 1 \operatorname{tg}(8,53^\circ - 2,27^\circ)$ . De aquí,  $P = 18,3$  lb para que la carga descienda.

- 9.16.** Un gato mecánico tiene 4 filetes por pulgada. El radio medio de la rosca es 2,338 in y el diámetro medio de la superficie de apoyo bajo el plato es 3,25 in. El coeficiente de rozamiento para todas las superficies es 0,06. ¿Qué momento de giro se necesita para elevar 1500 lb?

#### SOLUCIÓN

Tal como se ha indicado en la discusión teórica, debe añadirse un término que proporcione el momento adicional necesario para superar el rozamiento entre el plato y el tornillo.

$M = Wr \operatorname{tg}(\phi + \beta) + \mu Wr_c$ , donde  $r_c$  es el radio medio de las superficies de apoyo entre el plato y el tornillo.  $\phi = \operatorname{artg} 0,06 = 3,43^\circ$ .  $\beta = \operatorname{artg} 0,25/(2\pi \times 2,338) = 1,00^\circ$ .

$$M = 1500 \times 2,338 \operatorname{tg}(3,43^\circ + 1,00^\circ) + 0,06 \times 1500 \times (3,25/2) = 418 \text{ lb-in.}$$

- 9.17.** Dos poleas, de 750 mm de diámetro cada una están conectadas por una correa de tal manera que ésta rodea la mitad de sus circunferencias. La tensión en la parte tensa es de 200 N. Si el coeficiente de rozamiento es de 0,25, hallar la tensión en la parte laxa cuando la correa está a punto de deslizar.

#### SOLUCIÓN

El ángulo abarcado por cada polea es de  $180^\circ$ , o sea,  $\pi$  rad. Empleando la ecuación  $T_1 = T_2 e^{\alpha\mu}$ , se obtiene por tanto

$$200 = T_2 \times e^{\pi(0,25)} \quad \text{o sea} \quad T_2 = 91,2 \text{ N}$$

- 9.18.** En la Figura 9.21(a), un tambor de 635 mm de diámetro está rodeado por una cinta de freno tensada con una fuerza vertical *P* de 178 N aplicada en la palanca *AC*. Supóngase que el coeficiente de rozamiento entre el tambor y la banda es  $\frac{1}{3}$ . El rozamiento en las demás superficies es despreciable. Hallar el momento neto de frenado del tambor si la rotación está a punto de iniciarse en el sentido horario.

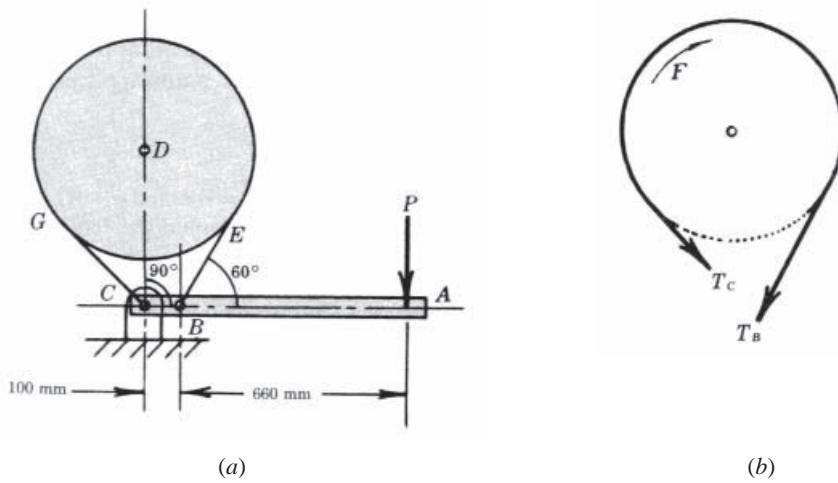


Figura 9.21

**SOLUCIÓN**

Para resolver este problema, con rotación inminente del tambor en sentido horario, obsérvese que la fuerza de rozamiento *sobre* el tambor actúa oponiéndose al movimiento, es decir, en sentido antihorario. Este mismo rozamiento actúa *sobre* la cinta en sentido opuesto, o sea, en sentido horario. Observando el diagrama de cuerpo libre de la correa, la tensión  $T_C$  debe ser mayor que  $T_B$ , puesto que aquella equilibra a  $T_B$  y a  $F$ .

Tomando momentos respecto a  $C$  de las fuerzas que actúan en la palanca, obtenemos

$$\sum M_C = 0 = +T_B \sin 60^\circ \times 100 - 178 \times 760, \quad \text{o sea,} \quad T_B = 1560 \text{ N}$$

Debe hallarse el ángulo que abarca la cinta alrededor del tambor para poder emplear la fórmula de las tensiones. La Figura 9.22 muestra la geometría del problema. Primero hallamos  $\theta$ .

En la Figura 9.22(a)

$$CD = \frac{DF}{\sin 30^\circ} = \frac{DE - DF}{\sin 30^\circ} = \frac{317,5 - HE \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{317,5 - 100 \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 462 \text{ mm}$$

De la Figura 9.22(b),  $u = \operatorname{arsen} GD/CD = \operatorname{arsen} 317,5/462 = 43,4^\circ$ .

De la Figura 9.22(c), el ángulo abarcado  $= 180^\circ + 30^\circ + 43,4^\circ = 4,4227 \text{ rad}$ .

$T_C$  es mayor que  $T_B$ . De aquí,  $T_C = T_B e^{\alpha\mu} = 6814 \text{ N}$ .

Por tanto, el momento de frenado es  $(T_C - T_B) \times 371,5 = (6814 - 1560) \times 317,5 = 1670000 \text{ mm}\cdot\text{N} = 1670 \text{ m}\cdot\text{N}$ .

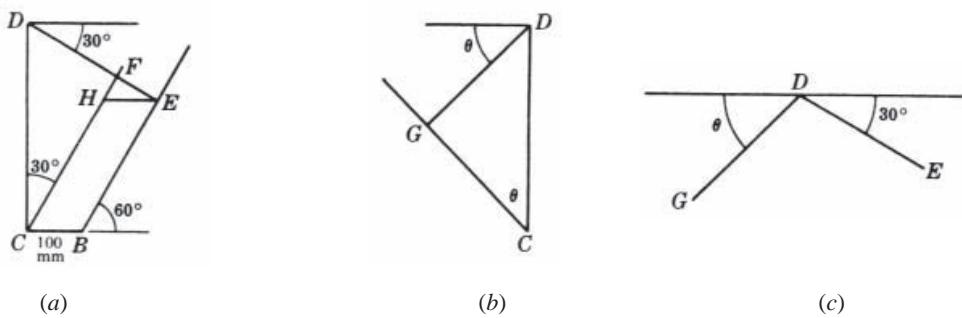


Figura 9.22

- 9.19.** Se sostiene un peso de 1000 lb con una fuerza de 10 lb, aplicada a una cuerda que da cuatro vueltas alrededor de un torno fijo horizontal. Hallar el coeficiente de rozamiento entre la cuerda y el torno.

**SOLUCIÓN**

Empleamos la ecuación  $T_1 = T_2 e^{\alpha\mu}$ , donde  $T_1 = 1000 \text{ lb}$  y  $T_2 = 10 \text{ lb}$ . De aquí,  $e^{\alpha\mu} = 100$ .

Pero  $\alpha = \text{ángulo abarcado} = 4 \times 2\pi \text{ rad}$ .

Además,  $e^{4.605} = 100$ . De aquí,  $\alpha\mu = 8\pi\mu = 4,605$ , o sea,  $\mu = 0,18$ .

- 9.20.** ¿Qué fuerza es necesaria para sostener una masa de 900 kg suspendida de una cuerda que da dos vueltas a un poste? Supóngase que el coeficiente de rozamiento es  $\mu = 0,20$ .

**SOLUCIÓN**

Empleamos la ecuación  $T_1 = T_2 e^{\alpha\mu}$ , donde  $T_1$  es la fuerza mayor ( $900 \times 9,8 \text{ N}$ ). De aquí, la fuerza de sujeción  $T_1 = 8820/e^{\alpha\mu}$  donde  $a = 2 \times 2\pi \text{ rad}$  y  $\mu = 0,20$ . La solución es  $T_2 = 714 \text{ N}$ .

- 9.21.** Una rueda de acero de 760 mm de diámetro rueda por un rail horizontal de acero. Su carga es de 500 N. El coeficiente de resistencia a la rodadura es 0,305 mm. ¿Cuál es la fuerza  $P$  necesaria para que la rueda gire por el carril?

**SOLUCIÓN**

$$P = \frac{Wa}{r} = \frac{500 \times 0,305}{380} = 0,4 \text{ N}$$

- 9.22.** Un árbol circular de diámetro  $D$  in descansa en un soporte tal como muestra la Figura 9.23(a). El árbol soporta un peso de  $W$  lb. Suponiendo que el coeficiente de rozamiento es  $\mu$ , hallar el momento de torsión  $M$ , necesario para que la rotación sea inminente.

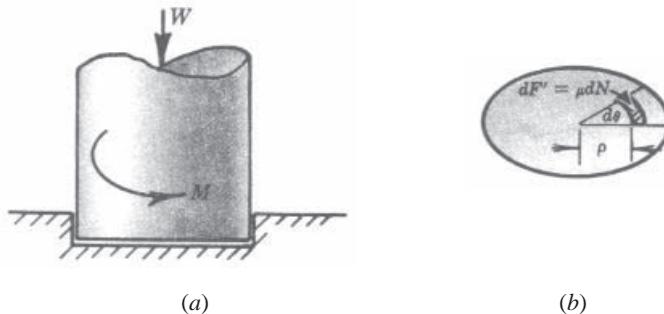


Figura 9.23

**SOLUCIÓN**

En la Figura 9.23(b) se muestra la fuerza de rozamiento  $dF'$  que actúa en el elemento de área  $dA = \rho d\rho d\theta$ . El momento de este rozamiento respecto al eje del árbol es  $\rho dF'$ .

Pero la fuerza normal en ese elemento de área es el producto del área por la carga unitaria (el peso total dividido por el área total). Así, podemos escribir:

$$dF' = \mu dN = \mu \frac{W}{\frac{1}{4}\pi D^2} \rho d\rho d\theta$$

o sea,

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} \rho \frac{4\mu W}{\pi D^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{D/2} \frac{4\mu W}{\pi D^2} \rho^2 d\rho (2\pi) = \frac{8\mu W}{D^2} \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^{D/2} = \frac{\mu WD}{3} \end{aligned}$$

### Problemas propuestos

- 9.23.** Una mordaza ejerce una fuerza normal de 100 N sobre las tres piezas que sujetan, tal como se muestra en la Figura 9.24. ¿Qué fuerza  $P$  puede ejercerse antes de que el movimiento sea inminente? El coeficiente de rozamiento entre las piezas es 0,30.

Resp.  $P = 60$  N

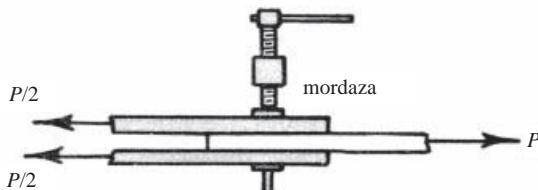


Figura 9.24

- 9.24.** Una escalera homogénea de 18 ft de longitud y 120 lb de peso se apoya en una pared lisa. El ángulo entre la escalera y el suelo es  $70^\circ$ . El coeficiente de rozamiento entre el suelo y la escalera es  $\frac{1}{4}$ . ¿Hasta dónde puede subir una persona de 180 lb sin que la escalera resbale?

Resp. 14,6 ft

- 9.25.** Una persona puede ejercer una tracción horizontal de 100 lb. Un peso de 800 lb reposa sobre una superficie horizontal cuyo coeficiente de rozamiento es 0,20. En la parte superior del bloque está atado el cable vertical de una grúa, tal como se muestra en la Figura 9.25. ¿Cuál es la tensión en el cable si la persona es capaz de provocar el movimiento inminente del bloque hacia la derecha?

Resp.  $T = 300$  lb

- 9.26.** En la Figura 9.26, se emplea la cuña  $B$  para elevar la carga de  $200 \times 9,8$  N que descansa sobre el bloque  $A$ . ¿Qué fuerza horizontal  $P$  se necesita para conseguirlo, si el coeficiente de rozamiento para todas las superficies es 0,2?

Resp. 1510 N

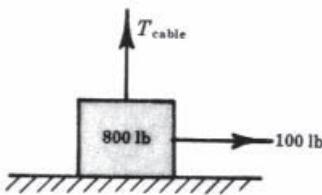


Figura 9.25

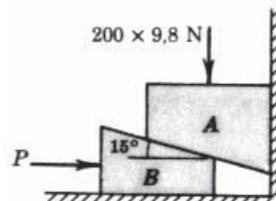


Figura 9.26

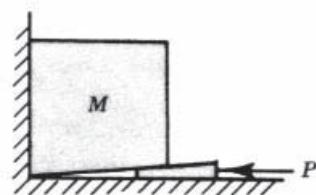


Figura 9.27

- 9.27.** ¿Cuál es la fuerza  $P$  necesaria para que la cuña de  $5^\circ$  levante la masa de 500 kg de la Figura 9.27? El coeficiente de rozamiento para todas las superficies es 0,25.

Resp.  $P = 3190$  N

- 9.28.** En la Figura 9.28, se emplea una cuña de  $5^\circ$  para partir un tronco. El coeficiente de rozamiento entre el tronco y la cuña es 0,2. Si cada martillazo equivale a una fuerza de 200 lb, ¿cuál es la fuerza separadora normal a la cuña?

Resp.  $N = 410$  lb

- 9.29.** En la Figura 9.29, un bloque  $A$  de 45 kg de masa descansa sobre un bloque  $B$  de 90 kg y está atado a una pared  $C$  con una cuerda horizontal. Si el coeficiente de rozamiento entre  $A$  y  $B$  es  $1/4$  y entre  $B$  y la superficie es  $\frac{1}{3}$ , ¿cuál es la fuerza horizontal  $P$  necesaria para mover el bloque  $B$ ?

Resp.  $P = 550$  N

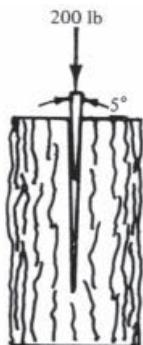


Figura 9.28

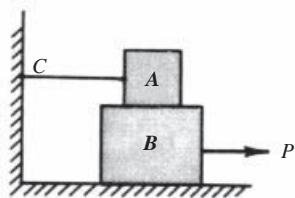


Figura 9.29

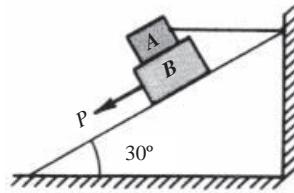


Figura 9.30

- 9.30.** En la Figura 9.30, un bloque *A* de 60 lb descansa sobre un bloque *B* de 80 lb y está atado a una pared *C* con una cuerda horizontal. ¿Qué fuerza *P*, paralela al plano inclinado 30° es necesaria para que el bloque *B* inicie el descenso? Se supone que  $\mu$  es  $\frac{1}{3}$  para todas las superficies.

Resp.  $P = 40,3$  lb

- 9.31.** En la Figura 9.31, el cubo *A* tiene 8 kg de masa y 100 mm de arista. El ángulo  $\theta = 15^\circ$ . Si el coeficiente de rozamiento es 1/4, ¿desliza o vuelca el bloque al aumentar gradualmente la fuerza *P*?  
Resp. Se desliza:  $P_{\text{vuelco}} = 48,0$  N,  $P_{\text{deslizamiento}} = 39,2$  N

- 9.32.** En la Figura 9.32, la masa de *A* es 23 kg y la de *B*, 36 kg. Los coeficientes de rozamiento son 0,60 entre *A* y *B*, 0,20 entre *B* y el plano y 0,30 entre la cuerda y el torno fijo. Hallar la masa máxima *M* antes del movimiento inminente.

Resp.  $M = 18,9$  kg

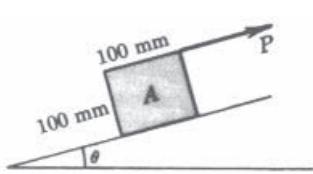


Figura 9.31

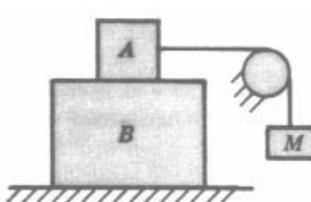


Figura 9.32

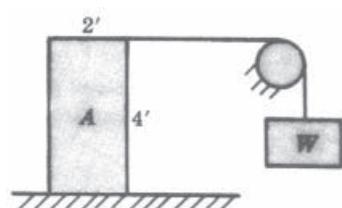


Figura 9.33

- 9.33.** En la Figura 9.33, el cuerpo homogéneo *A* pesa 120 lb. Los coeficientes de rozamiento son 0,30 entre *A* y el suelo; y  $2/\pi$  entre la cuerda y el torno. ¿Qué valor de *W* provoca el movimiento inminente de *A*?

Resp.  $W = 81,5$  lb

- 9.34.** En la Figura 9.34, una cuerda que sostiene un peso *E* de 50 lb pasa por una polea y está atada a un bastidor en *A*. El peso *C* es de 60 lb. ¿Cuál es el mínimo coeficiente de rozamiento  $\mu$  entre la cuerda exterior y la polea para el equilibrio?

Resp.  $\mu = 0,291$

- 9.35.** En la Figura 9.35, la barra homogénea *A* de 18 kg de masa y 2 m de longitud está inclinada 60°. La masa *M* de 7 kg está atada a la barra con una cuerda. En su unión con la barra, la cuerda es horizontal. El coeficiente de rozamiento entre la cuerda y el torno *B* es 0,20. ¿Cuál es el mínimo coeficiente de rozamiento entre la barra y el suelo para el equilibrio?

Resp.  $\mu = 0,284$

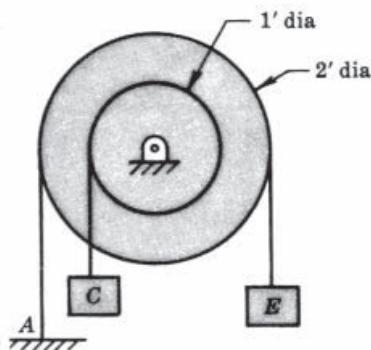


Figura 9.34

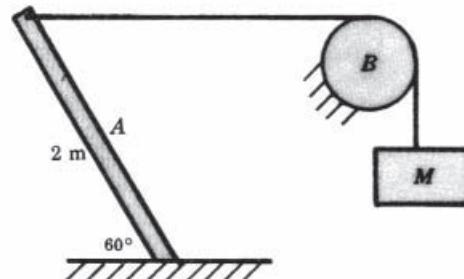


Figura 9.35

- 9.36.** En la Figura 9.36, el ángulo de rozamiento estático entre el bloque de masa  $M$  y el plano es  $\phi$ . ¿Cuál es la expresión de la fuerza  $P$  para subir el bloque por el plano para los ángulos de la figura?

Resp.  $P = [98M \operatorname{sen}(\theta + \phi)]/[\cos(\beta - \phi)]$

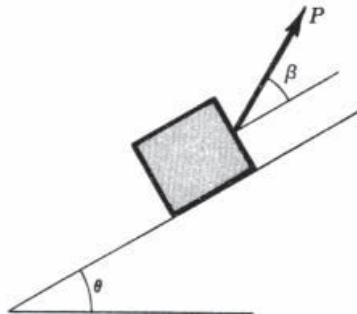


Figura 9.36

- 9.37.** En el Problema 9.36, demostrar que el mínimo valor de  $P$  para un ángulo  $\phi$  dado es  $9,8 M \operatorname{sen}(\theta + \phi)$ .

- 9.38.** Una barra homogénea horizontal, de longitud  $l$  y peso  $w$  lb, descansa, tal como se muestra en la Figura 9.37, con su extremo libre apoyado sobre un bloque de peso  $W$ , que descansa a su vez sobre un plano inclinado un ángulo  $\alpha$ . Hallar el coeficiente de rozamiento  $\mu$  entre el bloque y el plano, necesario para el equilibrio. Se supone que entre la barra y el bloque no existe rozamiento.  
Resp.  $\mu = (\operatorname{sen} 2\alpha)/(w/W + 2 \operatorname{cos}^2 \alpha)$



Figura 9.37

- 9.39.** La Figura 9.38 ilustra la sección de un embrague de cono indicando las superficies coincidentes. Supóngase que el contacto de éstas se produce con una presión normal de 10 psi. El área en contacto es el producto de la dimensión de 2 in por la circunferencia media de las superficies coincidentes, o sea,  $2 \times \pi \times 8$ . La fuerza normal total en libras es 10 veces el área mencionada. Si el coeficiente de rozamiento es  $\mu = 0,35$ , hallar la fuerza de rozamiento entre las superficies coincidentes.

Resp.  $F = 176$  lb

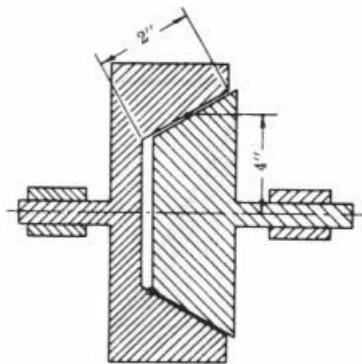


Figura 9.38

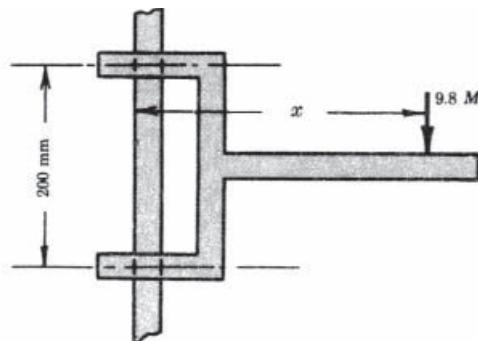


Figura 9.39

- 9.40.** El montacargas de la Figura 9.39 desliza en un árbol vertical de  $75 \text{ mm}^2$ . ¿A qué distancia en la plataforma puede estar situado un peso de  $9.8M$  para que el montacargas deslice sin que se agarre en el árbol. Se supone que  $\mu = 0.25$ . *Resp.*  $x = 438 \text{ mm}$

- 9.41.** En la Figura 9.40, el bloque homogéneo de 360 kg está en equilibrio contra la pared vertical, cuyo coeficiente de rozamiento es 0,25. Se aplica una fuerza  $P$  en el punto medio de la cara derecha en la dirección indicada en la figura. ¿Cuál es el intervalo de valores de  $P$  que no altera el equilibrio? *Resp.*  $5260 \text{ N} < P < 7890 \text{ N}$

- 9.42.** ¿Qué par  $M$  se necesita para que la rueda de peso  $W$  y radio  $r$  de la Figura 9.41 se halle en movimiento inminente? El coeficiente de rozamiento para todas las superficies es  $\mu$ .

$$\text{Resp. } M = \mu Wr(1 + \mu)/(1 + \mu^2)$$

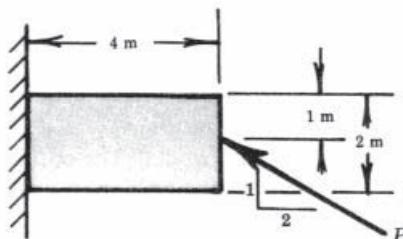


Figura 9.40

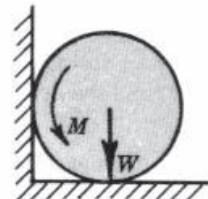


Figura 9.41

- 9.43.** Se ejerce una fuerza vertical  $P$  en una palanca  $AB$  para que no caiga la masa  $M$  de 20 kg, tal como muestra la Figura 9.42. El coeficiente de rozamiento entre la palanca y el torno de 300 mm es de  $\frac{1}{4}$ . Hallar la fuerza  $P$  necesaria para sostener la masa. Despreciar la masa del torno y de la palanca. *Resp.*  $P = 327 \text{ N}$

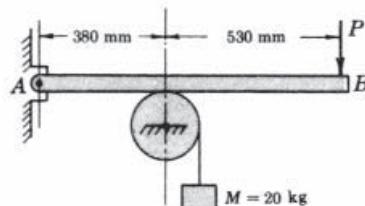


Figura 9.42

- 9.44.** En la Figura 9.43, los pesos de  $W_1$  y  $W_2$  son 50 y 30 lb, respectivamente. Están unidos mediante una cuerda paralela al plano. El coeficiente de rozamiento entre  $W_1$  y el plano es  $\frac{1}{4}$  y entre  $W_2$  y

el plano es  $\frac{1}{2}$ . Calcular el valor del ángulo  $\theta$  para el que hay deslizamiento. ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

*Resp.*  $\theta = 19,0^\circ$ ,  $T = 4,4$  lb

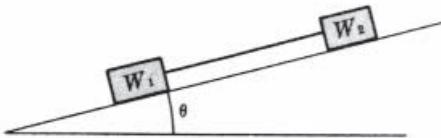


Figura 9.43

- 9.45.** En la Figura 9.44, hallar la fuerza P que provoca el movimiento inminente. El coeficiente de rozamiento con el plano para ambos bloques es 0,25. La fuerza P y las cuerdas son paralelos. No existe rozamiento en la polea.

*Resp.*  $P = 6,6$  N

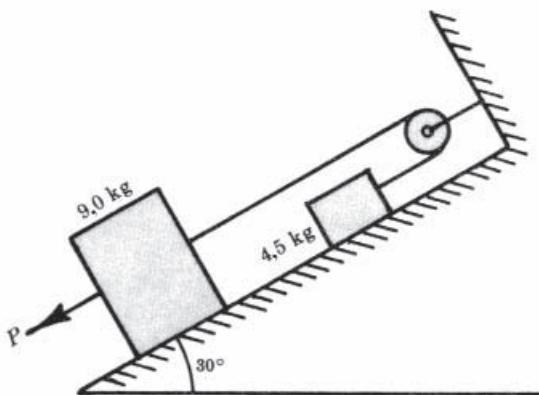


Figura 9.44

- 9.46.** El tambor de la Figura 9.45 está sometido a un par antihorario de 16 in-lb. ¿Qué fuerza horizontal P se necesita para impedir el movimiento? El coeficiente de rozamiento entre ambos miembros frenantes (articulados en B) y el tambor es de 0,40. Se desprecia el peso de los miembros frenantes.

*Resp.*  $P = 4,43$  lb

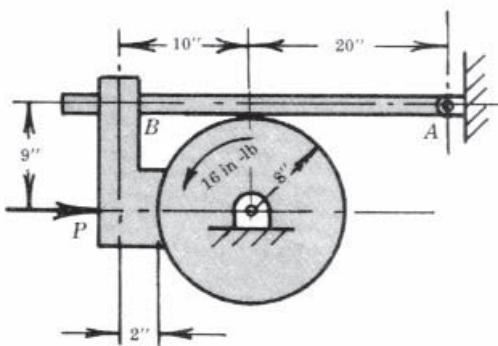


Figura 9.45

- 9.47.** Un cuerpo de 30 kg de masa está en reposo en un plano inclinado  $45^\circ$ . El coeficiente de rozamiento es  $\frac{1}{3}$ . ¿Cuál es el intervalo de valores de la fuerza horizontal P que impide el movimiento ascendente o descendente de la masa?

*Resp.*  $147 \text{ N} < P < 588 \text{ N}$

- 9.48.** Un plano está inclinado un ángulo  $\theta$  respecto a la horizontal. Un cuerpo está en el límite del equilibrio en ese plano. Hallar la mínima fuerza  $P$  para que el cuerpo inicie el ascenso. (Sugerencia:  $\theta = \alpha$ , puesto que es el ángulo de reposo; supóngase también que  $P$  actúa a un ángulo  $\beta$  con el plano.)

Resp.  $P = W \operatorname{sen} 2\theta$

- 9.49.** La barra uniforme de la Figura 9.46 tiene una masa de 35 kg. ¿Qué fuerza  $P$  hacia la derecha se necesita para iniciar su movimiento? El coeficiente de rozamiento para todas las superficies es 0,30.

Resp.  $P = 246$  N

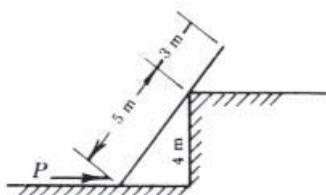


Figura 9.46

- 9.50.** Dos bloques de igual  $W$  peso pueden deslizar sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento entre los bloques y la superficie es  $\mu$ . Una cuerda de longitud  $l$  está suspendida entre los bloques y soporta un peso  $M$  en su punto medio. ¿A qué distancia han de situarse los bloques para que exista equilibrio?

$$\text{Resp. } x = \frac{l\mu(W + M/2)}{\sqrt{(M/2)^2 + \mu^2(W + M/2)^2}}$$

- 9.51.** Un prisma cuya sección recta es un polígono regular de  $n$  lados descansa horizontalmente sobre una de sus caras. Un insecto reptá por el interior. El coeficiente de rozamiento entre el insecto y las caras interiores es  $\mu$ . Demostrar que la cara más alta que el insecto puede escalar (contando como primera la cara inferior horizontal) está dada por la expresión  $n/360 \times \operatorname{artg}(\mu + 360/n)$ .

- 9.52.** Una barra ligera  $A$  está articulada a un prisma  $B$  homogéneo en el punto  $C$ , tal como se muestra en la Figura 9.47. Se aplica una fuerza horizontal  $P$  a 2 ft por encima del plano horizontal. Si el coeficiente de rozamiento entre el plano y la barra, o entre el plano y el prisma es 0,4, ¿cuál es el valor de  $P$  que provoca el movimiento inminente? Considerar el deslizamiento y el vuelco.

Resp.  $P = 209$  lb

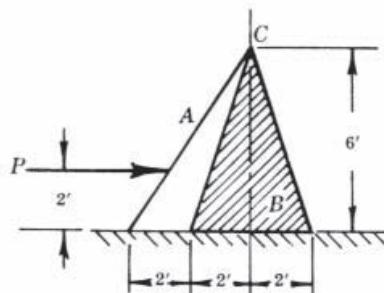


Figura 9.47

- 9.53.** La losa delgada y uniforme de la Figura 9.48 pesa 0,25 lb/in. Con los coeficientes de rozamiento en las superficies de apoyo indicados, ¿qué par  $M$  provoca el movimiento inminente del disco en el sentido antihorario? El radio del disco es 6 in. Resp. 9,72 lb-in

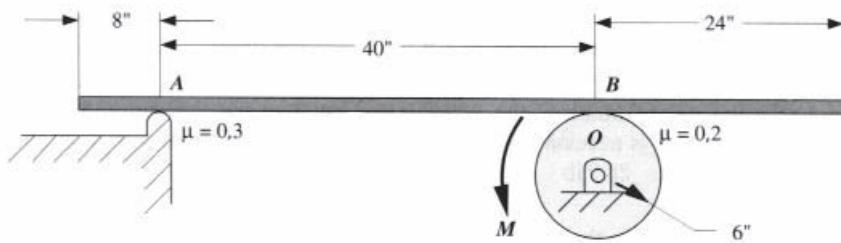


Figura 9.48

- 9.54.** Repetir el problema 9.53 con el par  $M$  en sentido horario y un coeficiente de rozamiento 0,1.  
*Resp.* 7,56 lb-in

- 9.55.** Empleando los resultados del problema 9.53, ¿qué fuerza horizontal provoca el movimiento inminente de la placa hacia la derecha?  
*Resp.* 3,24 lb

- 9.56.** En la Figura 9.49, una barra de 12 lb de peso y de 6 ft de longitud está apoyada a 1 ft de su extremo izquierdo, y su extremo derecho descansa sobre una rueda de 6 in de radio. El peso de la rueda es 4 lb. Los coeficientes de rozamiento son los indicados. Hallar el valor de la fuerza  $P$  que provoca el movimiento inminente de la rueda.  
*Resp.* 0,96 lb

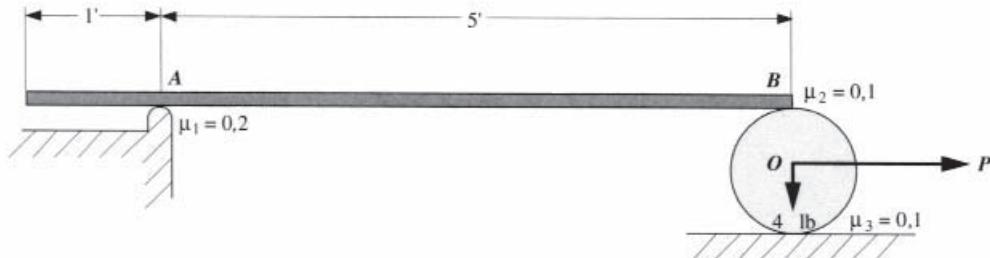


Figura 9.49

- 9.57.** Resolver el problema 9.56 con  $\mu_1 = \mu_2 = 0,15$ . *Resp.* 1,44 lb

- 9.58.** En la Figura 9.50, el bloque  $A$  pesa 15 N y la rueda  $B$ , 20 N.  $A$  y  $B$  y están unidos por un tirante sin peso. El coeficiente de rozamiento bajo  $A$  es 0,25; y bajo  $B$ , 0,15. El diámetro de la rueda es de 1 m. ¿Cuál es el valor del par horizontal  $M$  que provoca el movimiento inminente de  $B$ ?  
*Resp.* 1,5 m·N

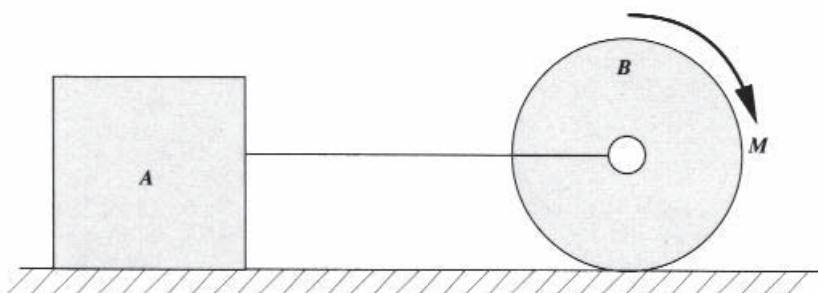


Figura 9.50

- 9.59.** En el problema 9.58, ¿qué coeficiente de rozamiento bajo la rueda *B* provoca el movimiento inmittenente del bloque *A*? ¿Qué momento *M* provoca entonces el movimiento del sistema?

*Resp.*  $\mu_B = 0,19$ ,  $M = 1,87 \text{ m}\cdot\text{N}$

- 9.60.** Un gato mecánico tiene 3 pasos de rosca por pulgada, con un radio medio de 0,648 in. Se utiliza una palanca de 18 in de longitud para levantar una carga de 2400 lb. Si el coeficiente de rozamiento es 0,10, ¿qué fuerza perpendicular al brazo se requiere para (a) elevar la carga y (b) bajar la carga?

*Resp.* (a) 15,9 lb, (b) 1,55 lb

- 9.61.** Supóngase que el radio medio de la superficie de soporte entre el plato y el tornillo en el Problema 9.60 es 1,4 in. ¿Qué valor de *P* es necesario para elevar la carga si el coeficiente de rozamiento entre el plato y el tornillo es 0,07?

*Resp.* 28,9 lb

- 9.62.** Una prensa manual tiene cinco filetes cuadrados por pulgada. El diámetro medio es 1,2 in. Si el coeficiente de rozamiento es 0,08, ¿qué fuerza puede ejercer la prensa si se aplica una fuerza de 20 lb normal a una palanca de 20 in de longitud?

*Resp.* 5000 lb

- 9.63.** El tornillo de una prensa es de seis filetes por pulgada. El diámetro medio es 1,38 in y el coeficiente de rozamiento es 0,14. Si se aplican dos fuerzas de 40 lb, formando un par de brazo 20 in, ¿qué fuerza ejerce la prensa? (Figura 9.51)

*Resp.* 6500 lb

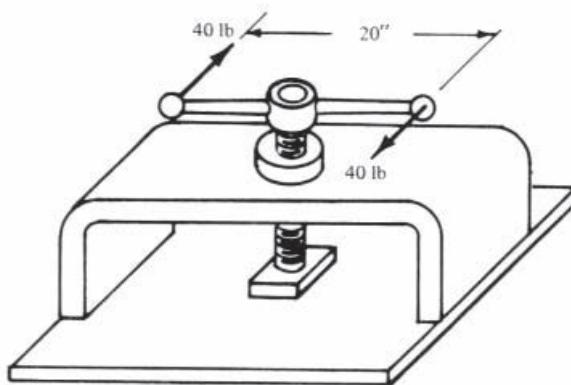


Figura 9.51

- 9.64.** En la Figura 9.52, ¿qué fuerza *P* debe aplicarse perpendicularmente a la palanca del tornillo para sujetar la pieza A con una fuerza de 20 lb? El tornillo es de rosca cuadrada, con 10 filetes por pulgada. El diámetro medio del tornillo es 0,438 in. El coeficiente de rozamiento es 0,20.

*Resp.*  $P = 0,3 \text{ lb}$

- 9.65.** Un gato mecánico de filete cuadrado con un paso de 0,4 in tiene un diámetro medio de 3,0 in. El diámetro medio de la superficie de soporte entre el plato y el tornillo es 3,5 in. El coeficiente de rozamiento en todas las superficies es 0,10, ¿qué fuerza debe aplicarse en el extremo de una palanca de 36 in de largo para elevar 4000 lb? *Resp.*  $P = 43,3 \text{ lb}$

- 9.66.** (a) Hallar la carga que puede elevarse con un gato mecánico de rosca simple y  $2\frac{1}{2}$  filetes por pulgada y un diámetro medio de 3 in cuando se ejerce una fuerza de 200 lb con una barra de 30 in de longitud. Tomar  $\mu = 0,05$ . (b) Si el diámetro medio de la superficie de soporte entre el

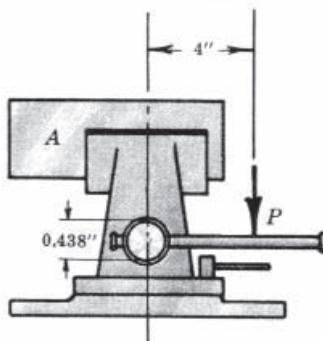


Figura 9.52

plato y el tornillo es  $3\frac{1}{2}$  in y el coeficiente de rozamiento entre esas superficies es 0,12, ¿qué carga puede elevarse con una fuerza de 200 lb?

*Resp.* (a)  $W = 43,100$  lb, (b)  $W = 17,200$  lb

- 9.67.** Un gato mecánico de filete cuadrado de paso 0,3 in tiene un diámetro medio de 2 in. El diámetro interior del plato es 2 in y el exterior 3 in. Si el coeficiente de rozamiento en todas las superficies es 0,15, ¿qué fuerza es necesaria para mover una carga de 5000 lb (a) hacia arriba y (b) hacia abajo? Se emplea una barra de 3 ft de longitud.

*Resp.* (a) 53,7 lb para elevarla, (b) 40,1 lb para bajarla

- 9.68.** Un gato mecánico de filete cuadrado tiene dos filetes por pulgada y 2,4 in de diámetro medio. Con un coeficiente de rozamiento de 0,08, calcular la capacidad del gato si se recomienda aplicar una fuerza máxima de 30 lb con un brazo de palanca de 18 in.

*Resp.*  $W = 3060$  lb

- 9.69.** En la Figura 9.53, el peso de A es 500 lb y el de B, 100 lb. ¿Qué fuerza debe ejercerse perpendicularmente al brazo del gato a 20 in de su eje longitudinal para elevar A? El gato mecánico tiene un avance de 0,32 in y 2,00 in de diámetro medio. El coeficiente de rozamiento entre el gato y el tornillo es 0,15.

*Resp.*  $P = 3,04$  lb

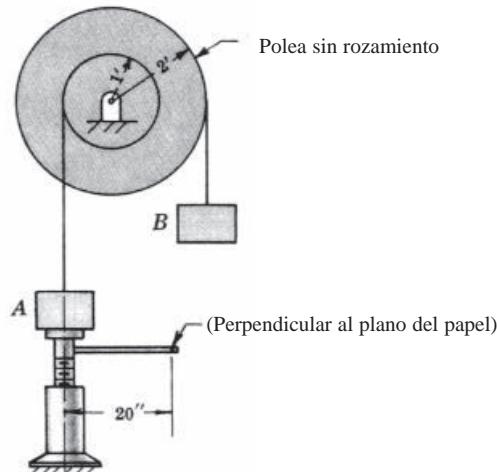
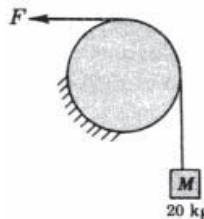


Figura 9.53

- 9.70.** ¿Qué fuerza se necesita para sostener una masa de 50 kg suspendida de una cuerda que da tres vueltas alrededor de un torno fijo? Se supone  $\mu = 0,3$ . *Resp.*  $F = 1,7$  N

- 9.71.** En el Problema 9.70, ¿cuál es la fuerza necesaria para elevar la masa? *Resp.*  $F = 140 \text{ kN}$
- 9.72.** En la Figura 9.54, una masa de 20 kg está atada a una cuerda que da  $\frac{1}{4}$  de vuelta alrededor de un tambor fijo. El coeficiente de rozamiento es 0,25. Hallar (a) el valor de  $F$  que impide que la masa caiga y (b) el valor de  $F$  para que la masa empiece a ascender.  
*Resp.* (a) 132 N, (b) 290 N

**Figura 9.54**

- 9.73.** Un peso  $W$  está atado a una cuerda y ésta está arrollada alrededor de un torno fijo. Cuando el número de vueltas es de dos, la fuerza necesaria para sostener el peso es de 200 lb; y cuando el número de vueltas es de tres, la fuerza necesaria es de 150 lb. ¿Cuál es el peso?  
*Resp.*  $W = 356 \text{ lb}$

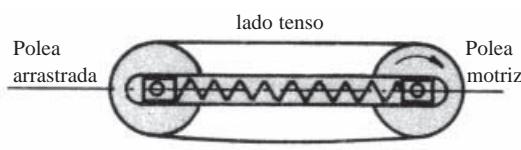
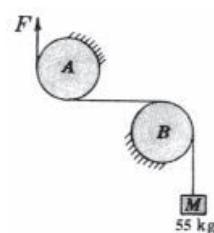
- 9.74.** Un trabajador baja a un foso una parte de una caldera de 400 lb, mediante una cuerda arrollada  $1\frac{1}{4}$  vueltas alrededor de un torno horizontal. Si el coeficiente de rozamiento es 0,35, ¿qué fuerza debe ejercer? *Resp.*  $F = 25,6 \text{ lb}$

- 9.75.** Una tracción de 30 N en el extremo de una cuerda triplemente arrollada alrededor de un poste horizontal sostiene una masa de 100 kg. Calcular el coeficiente de rozamiento entre la cuerda y el poste. *Resp.*  $\mu = 0,185$

- 9.76.** En la Figura 9.55, dos poleas se mantienen separadas mediante un resorte sometido a una fuerza compresiva  $S$ . El diámetro de ambas poleas es  $d$ . El coeficiente de rozamiento entre la correa y la polea es  $\mu$ . Hallar el momento máximo que puede transmitirse.  
*Resp.*  $\text{Momento} = \frac{1}{2} Sd(e^{\mu\pi} - 1)/(e^{\mu\pi} + 1)$

- 9.77.** En la Figura 9.56, una cuerda que da  $\frac{1}{4}$  de vuelta alrededor de un tambor  $B$  y  $1\frac{1}{4}$  vueltas alrededor del tambor  $A$ , sostiene una masa de 55 kg. Suponiendo que el tambor  $B$  es liso y que el coeficiente de rozamiento entre la cuerda y  $A$  es  $\frac{1}{4}$ , ¿cuánto vale la fuerza  $F$ ?

*Resp.*  $F = 75,7 \text{ N}$

**Figura 9.55****Figura 9.56**

- 9.78.** En el problema 9.77 se supone que el coeficiente de rozamiento entre la cuerda y el tambor  $B$  es  $\frac{1}{4}$  y no cero. ¿Cuál es el valor de la fuerza  $F$ ? (Sugerencia: Emplear el diagrama de cuerpo libre de  $B$  para calcular la tensión de la cuerda entre  $A$  y  $B$ .) *Resp.*  $F = 44,8 \text{ N}$

- 9.79.** Una masa de 200 kg está sostenida haciendo pasar una cuerda alrededor de un poste horizontal y ejerciendo una tracción de 220 N. Si el coeficiente de rozamiento entre el poste y la cuerda es  $\frac{1}{4}$ , ¿cuántas vueltas debe dar la cuerda alrededor del poste?

*Resp.* 1,39 vueltas

- 9.80.** En la Figura 9.57, hallar el intervalo de valores de  $T$  para que exista equilibrio. El coeficiente de rozamiento entre la cinta y cada tambor es  $1/\pi$ . La tensión en el otro extremo de la cuerda es 15 N  
*Resp.*  $1,23 \text{ N} < T < 183 \text{ N}$

- 9.81.** En la Figura 9.58, el cuerpo *A* pesa 100 lb y el cuerpo *B*, 300 lb. El coeficiente de rozamiento entre la cuerda y el tambor es 0,25. Hallar el peso mínimo *W* que provoca el movimiento inminente de *B*.  
*Resp.*  $W = 167 \text{ lb}$

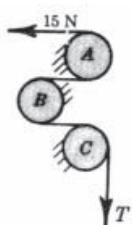


Figura 9.57

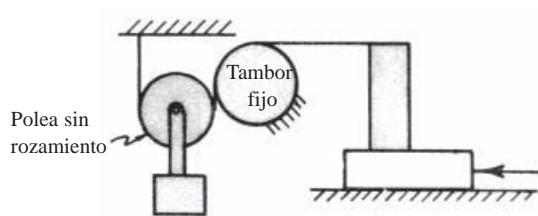


Figura 9.58

- 9.82.** Una plataforma de peso despreciable está sostenida en posición horizontal mediante una cuerda que pasa por tambores fijos, tal como se muestra en la Figura 9.59. Si el coeficiente de rozamiento entre la cuerda y cada tambor es 0,20, calcular a qué distancia del centro puede colocarse un peso de 10 lb sin alterar el equilibrio.

*Resp.*  $x = 1,82 \text{ ft}$

- 9.83.** ¿Qué tracción horizontal se necesita para mover un tren de 1200 ton por una vía horizontal si el coeficiente de resistencia a la rodadura es 0,009 in y el diámetro de las ruedas es 3 ft?

*Resp.*  $P = 1200 \text{ lb}$

- 9.84.** Una cinta de freno rodea a un tambor *D* y está sujetada a una palanca en *B* y *C*, tal como se muestra en la Figura 9.60. El diámetro del tambor es 450 mm. El coeficiente de rozamiento entre la cinta y el tambor es  $\frac{1}{3}$  y la fuerza *P* es 30 N. ¿Qué momento de frenado puede producirse (a) si el tambor gira en sentido horario, (b) si el tambor gira en sentido antihorario?

*Resp.*  $M_a = 10,2 \text{ m-N}, M_b = 29,1 \text{ m-N}$

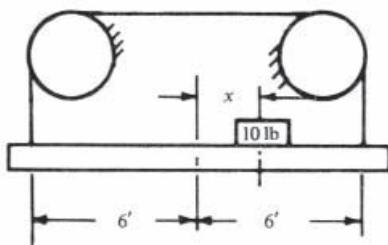


Figura 9.59

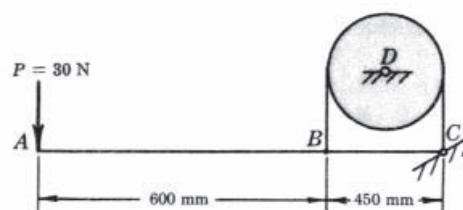


Figura 9.60

- 9.85.** En la Figura 9.61, ¿qué fuerza *P* se necesita para que el freno se oponga al movimiento del tambor bajo la acción del momento *M*? El coeficiente de rozamiento entre el freno y el tambor es  $\mu$  y el ángulo abarcado es  $\alpha$ .  
*Resp.*  $P = (M/rc)/[(\alpha e^{\mu\alpha} - b)/(e^{\mu\alpha} - 1)]$

- 9.86.** Una masa  $M = 90 \text{ kg}$  cuelga de una polea compuesta  $A$  libre de girar en cojinetes sin rozamiento, tal como muestra la Figura 9.62. El coeficiente de rozamiento entre la superficie de frenado  $B$  y la polea es 0,25 ¿Qué fuerza mínima se necesita para evitar el giro?

Resp.  $P = 567 \text{ N}$

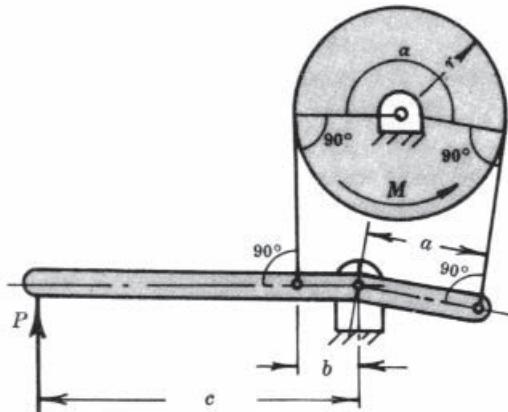


Figura 9.61

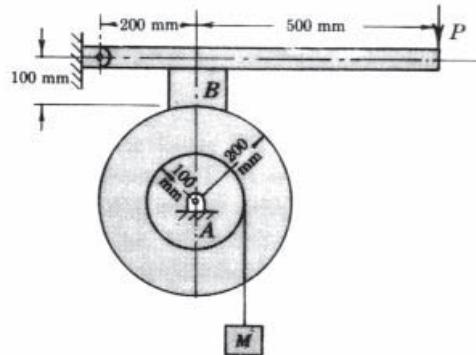


Figura 9.62

- 9.87.** Una masa  $M$  de 1400 kg descansa sobre una viga de roble, apoyada sobre rodillos de 200 mm de diámetro. Suponiendo que el coeficiente de resistencia a la rodadura entre la viga y los rodillos es 0,89 mm, ¿qué fuerza horizontal se necesita para mover la carga en una superficie horizontal?

Resp.  $P = 122 \text{ N}$

- 9.88.** Una rueda de 500 mm de diámetro transporta una carga de 20 000 N. Si se necesita una fuerza horizontal de 20 N para moverla por una superficie plana, calcular el coeficiente de resistencia a la rodadura. Resp.  $a = 0,25 \text{ mm}$

- 9.89.** El diámetro de las ruedas de un automóvil que pesa 3900 lb mide 29 in. Suponiendo que el coeficiente de resistencia a la rodadura entre la cubierta de las ruedas y la carretera es 0,02 in, calcular la fuerza necesaria para vencer el rozamiento por rodadura en una calzada horizontal.

Resp.  $P = 5,4 \text{ lb}$

- 9.90.** Se necesita una fuerza central horizontal de 1,4 N para mover un cilindro de 900 mm de diámetro sobre una superficie horizontal. Suponiendo que el coeficiente de resistencia a la rodadura es 0,635 mm, ¿cuál es la masa del cilindro?

Resp.  $M = 101 \text{ kg}$

- 9.91.** En la Figura 9.63, el cojinete radial soporta una fuerza de 680 lb. Si el coeficiente de rozamiento es 0,20 y se supone que la presión es uniforme, ¿qué par de giro se necesita?

Resp.  $M = 212 \text{ lb-in}$

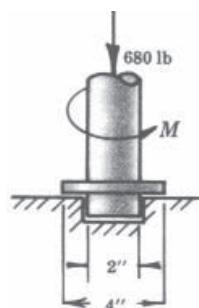


Figura 9.63

# PRIMEROS MOMENTOS Y CENTROIDES

# 10

## 10.1 CENTROIDE DE UN CONJUNTO

El centroide de un conjunto de  $n$  cantidades de la misma naturaleza,  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$ , situadas en los puntos  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  cuyos vectores de posición respecto al origen elegido  $O$  son  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_n$  es un punto cuyo vector de posición  $\bar{\mathbf{r}}$  se define

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \Delta_i}{\sum_{i=1}^n \Delta_i} \quad (1)$$

donde

$\Delta_i$  =  $i$ -ésima cantidad (podría ser, por ejemplo, un elemento de longitud, de área, de volumen o de masa)

$\mathbf{r}_i$  = vector de posición del  $i$ -ésimo elemento

$\sum_{i=1}^n \Delta_i$  = suma de los  $n$  elementos

$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \Delta_i$  = primer momento de todos los elementos respecto a  $O$

En función de las coordenadas  $x, y$  y  $z$ , las coordenadas del centroide son:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta_i}{\sum_{i=1}^n \Delta_i} & \bar{y} &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta_i}{\sum_{i=1}^n \Delta_i} & \bar{z} &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i \Delta_i}{\sum_{i=1}^n \Delta_i} \end{aligned} \quad (2)$$

donde

$\Delta_i$  =  $i$ -ésima cantidad (elemento)

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  = coordenadas del centroide del conjunto

$x_i, y_i, z_i$  = coordenadas del punto  $P_i$  donde se supone concentrada  $\Delta_i$ .

## 10.2 CENTROIDE DE UNA CANTIDAD CONTINUA

El centroide de una cantidad continua puede localizarse empleando el cálculo infinitesimal, considerando elementos infinitesimales de la magnitud (tales como  $dL$  de una línea,  $dA$  de un área,  $dV$  de un volumen o  $dm$  de una masa). Así pues, para una masa  $m$  podemos escribir:

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} \quad (3)$$

En función de las coordenadas  $x, y$  y  $z$ , las coordenadas del centroide de una cantidad continua son:

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{Q_{yz}}{m} \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{Q_{xz}}{m} \quad \bar{z} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{Q_{xy}}{m} \quad (4)$$

donde  $Q_{xy}$ ,  $Q_{yz}$ ,  $Q_{xz}$  = primer momento respecto a los planos  $xy$ ,  $yz$ ,  $xz$ .

El centroide de una masa homogénea coincide con el de su volumen.

En la siguiente tabla se incluyen los primeros momentos  $Q$  de varias cantidades  $\Delta$  respecto a los planos coordenados.

$\Delta$	$Q_{xy}$	$Q_{yz}$	$Q_{xz}$	Dimensiones
Línea	$\int z \, dL$	$\int x \, dL$	$\int y \, dL$	$L^2$
Área	$\int z \, dA$	$\int x \, dA$	$\int y \, dA$	$L^3$
Volumen	$\int z \, dV$	$\int x \, dV$	$\int y \, dV$	$L^4$
Masa	$\int z \, dm$	$\int x \, dm$	$\int y \, dm$	$mL$

donde

$Q_{xy}$ ,  $Q_{yz}$ ,  $Q_{xz}$  = primeros momentos respecto a los planos  $xy$ ,  $yz$  y  $xz$

$L$  = longitud

$m$  = masa

$dL$ ,  $dA$ ,  $dV$ ,  $dm$  = elementos infinitesimales de línea, área, volumen y masa, respectivamente.

Obsérvese que si se trabaja en dos dimensiones, o sea, en el plano  $xy$ ,  $Q_{xy}$  y  $Q_{yz}$  se convierten en  $Q_x$  y  $Q_y$ , respectivamente.

### 10.3 TEOREMAS DE PAPPUS-GULDIN

El primer teorema establece que el área generada por una curva plana al girar alrededor de un eje que no la corta es igual al producto de la longitud de la curva por el camino recorrido por su centroide  $G$  en el giro. Supongamos que la curva  $AB$  de longitud  $L$  contenida en el plano  $xy$  gira un ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $x$  hasta adoptar la posición  $A'B'$  (Figura 10.1). La longitud  $dL$  recorre el camino  $y\theta$ , generando una superficie  $dS = y\theta \, dL$ . Luego  $S = \int dS = \int y \, \theta \, dL = \theta \int y \, dL = \theta \bar{y} L$ . Puesto que  $\theta \bar{y}$  es el camino recorrido por el centroide  $G$  de la curva, queda probado el primer teorema.

El segundo teorema establece que el volumen generado por una superficie plana al girar alrededor de un eje coplanario que no la corta es igual al producto de su área por el camino recorrido por su centroide  $G$  en el giro. Supongamos que la superficie  $ABCD$  de área  $A$  contenida en el plano  $xy$  gira un ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $x$  hasta adoptar la posición  $A'B'C'D'$  (véase la Figura 10.2). El área  $dA$  recorre el camino  $y\theta$ , generando un volumen  $dV = y\theta \, dA$ . Luego  $V = \int dV = \int y \theta \, dA = \theta \int y \, dA = \theta \bar{y} A$ . Puesto que  $\theta \bar{y}$  es el camino recorrido por el centroide  $G$  de la superficie, queda probado el segundo teorema.

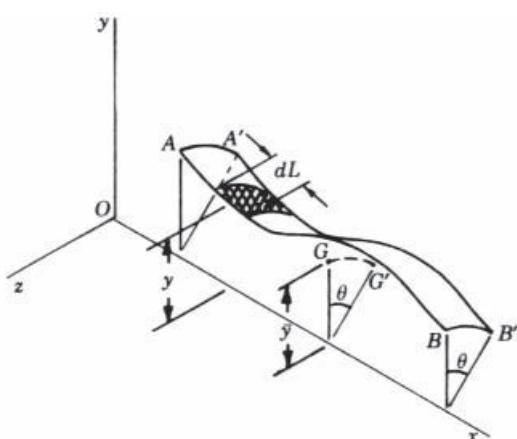


Figura 10.1

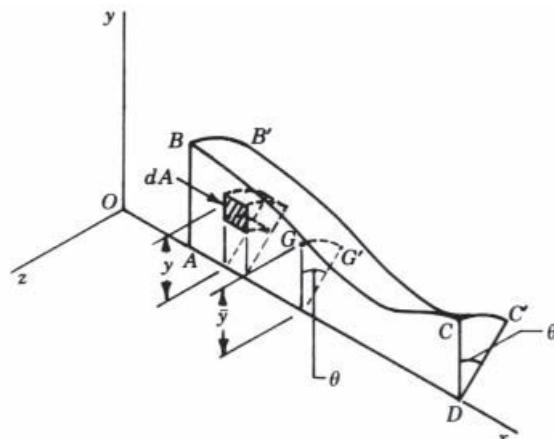


Figura 10.2

## 10.4 CENTRO DE PRESIÓN

Cuando una superficie está sometida a una presión, existe un punto en el cual podría suponerse concentrada la fuerza total con idénticos efectos externos. Este punto es el llamado *centro de presión*. Si la presión está uniformemente distribuida en una superficie, el centro de presión coincide con su centroide.

### Problemas resueltos

- 10.1** Hallar  $Q_x$  y  $Q_y$  de la superficie limitada por la parábola  $y^2 = 4ax$  y las rectas  $y = 0$  y  $x = b$ .

#### SOLUCIÓN

Para hallar  $Q_x$ , tomamos un elemento de superficie paralelo al eje  $x$  de espesor  $dy$  y ancho  $b - x$ , como se muestra en la Figura 10.3.

$$Q_x = \int y dA = \int_0^{2\sqrt{ab}} y(b-x) dy$$

Observamos que el límite superior de  $y$  corresponde a  $x = b$ , de donde  $y = \pm\sqrt{4ab}$ . Elegimos el valor positivo

$$Q_x = \int_0^{2\sqrt{ab}} y \left( b - \frac{y^2}{4a} \right) dy = \frac{b(2\sqrt{ab})^2}{2} - \frac{(2\sqrt{ab})^4}{16a} = ab^2$$

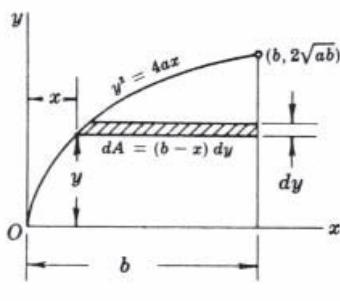


Figura 10.3

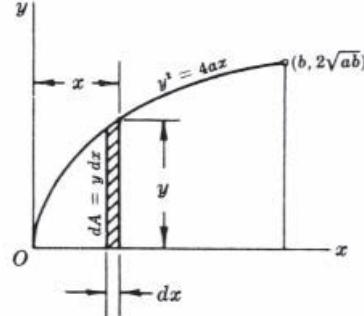


Figura 10.4

Para hallar  $Q_y$ , tomamos un elemento diferencial paralelo al eje  $y$ , que dista  $x$  del eje  $y$  (Figura 10.4). Por tanto,

$$Q_y = \int x dA$$

Pero  $dA$  es el producto de  $y$ , la distancia de la parábola al eje  $x$ , por  $dx$ , el ancho del elemento. Para barrer toda el área dada,  $x$  debe variar entre 0 y  $b$ .

$$Q_y = \int_0^b xy dx = \int_0^b x\sqrt{4ax} dx = 2\sqrt{a} \int_0^b x^{3/2} dx = \frac{2}{5}(2\sqrt{a})x^{5/2}]_0^b = \frac{4}{5}b^2\sqrt{ab}$$

- 10.2.** En el problema anterior, hallar  $Q_x$  y  $Q_y$ , empleando el elemento de área mostrado en la Figura 10.5.

#### SOLUCIÓN

En este caso, deben realizarse las dobles integraciones siguientes:

$$Q_x = \int y dA = \int_0^b \int_0^{2\sqrt{ax}} y dy dx = \int_0^b \left[ \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{2\sqrt{ax}} dx = \int_0^b 2ax dx = ab^2$$

$$Q_y = \int x \, dA = \int_0^b \int_0^{2\sqrt{ax}} dy \, x \, dx = \int_0^b [y]_0^{2\sqrt{ax}} x \, dx = \int_0^b 2\sqrt{ax} x \, dx = \frac{4}{5} b^2 \sqrt{ab}$$

El límite superior de la variable  $y$  debe expresarse en función de  $x$ , como se ha indicado, porque la suma vertical está limitada por una curva de altura variable.

### 10.3 Hallar el primer momento de un cono circular recto respecto a su base (Figura 10.6).

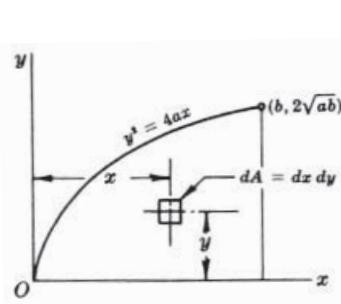


Figura 10.5

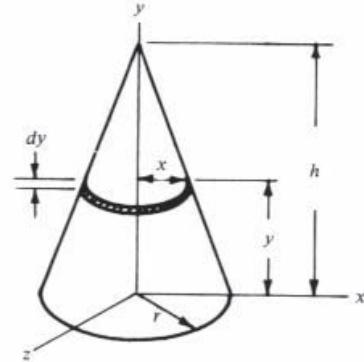


Figura 10.6

#### SOLUCIÓN

Como se muestra en la Figura 10.6, se ha elegido un elemento de volumen paralelo a la base a una distancia  $y$  de la misma.

Cortando por el plano  $xy$  (Figura 10.7) podemos escribir, por semejanza de triángulos,  $x/r = (h - y)/h$ , y luego

$$dV = \pi x^2 dy = \frac{\pi r^2}{h^2} (h - y)^2 dy$$

Para calcular  $Q_{xy}$ , empleamos

$$\begin{aligned} Q_{xy} &= \int y \, dV = \int_0^h y \pi \frac{r^2}{h^2} (h - y)^2 dy \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h (h^2 y - 2hy^2 + y^3) dy \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \left( h^2 \frac{y^2}{2} - 2h \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right)_0^h \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} h^4 \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{12} \pi r^2 h^2 \end{aligned}$$

### 10.4. Localizar el centrode del arco de circunferencia de la Figura 10.8.

#### SOLUCIÓN

Se ha elegido el eje de simetría como eje  $x$ . Las coordenadas polares suelen simplificar la integración. De la figura,

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$x = \frac{Q_y}{L} = \frac{\int x \, dL}{\int dL} = \frac{\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} xr \, d\theta}{\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} r \, d\theta}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} r^2 \cos \theta \, d\theta}{\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} r \, d\theta} \\
 &= \frac{r^2 [\sin \frac{1}{2}\alpha - \sin(-\frac{1}{2}\alpha)]}{r [\frac{1}{2}\alpha - (-\frac{1}{2}\alpha)]} \\
 &= \frac{r (\sin \frac{1}{2}\alpha + \sin \frac{1}{2}\alpha)}{r [\frac{1}{2}\alpha - (-\frac{1}{2}\alpha)]} \\
 &= \frac{2r \sin \frac{1}{2}\alpha}{\alpha}
 \end{aligned}$$

Obsérvese que  $\alpha$  es el ángulo abarcado por el arco de círculo completo.

Si se calculara  $\bar{y}$  del mismo modo, en la integración aparecería un término en coseno que desaparecería cuando se sustituyeran los límites. Por tanto,  $\bar{y} = 0$ . De todos modos, esto último podría haberse deducido directamente, porque el centroide siempre está en el eje de simetría, si lo hay.

Si el arco fuera un semicírculo,  $\alpha$  valdría  $180^\circ$ , o sea,  $\pi$  rad. Entonces

$$\bar{x} = \frac{2r \sin \frac{1}{2}\pi}{\pi} = \frac{2r}{\pi}$$

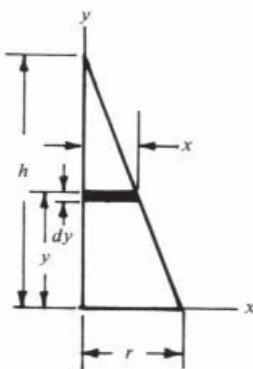


Figura 10.7

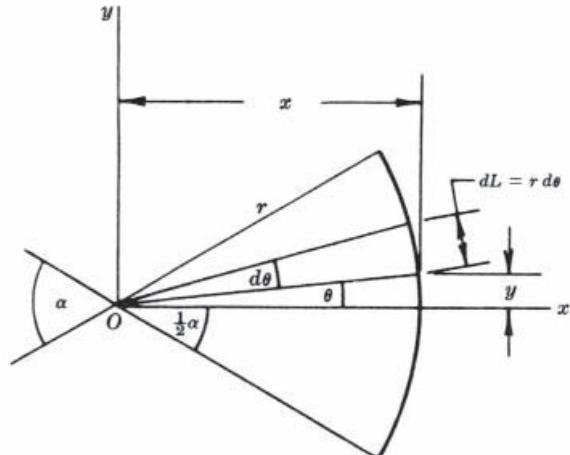


Figura 10.8

**10.5.** Localizar el centroide del alambre curvado de la Figura 10.9.

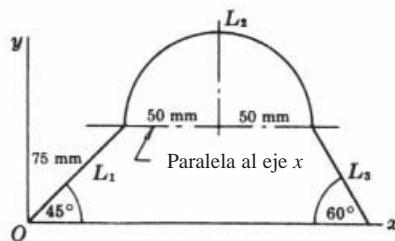


Figura 10.9

#### SOLUCIÓN

Sea

$L_1$  = trozo de 75 mm a  $45^\circ$  del eje  $x$

$L_2$  = trozo semicircular

$L_3$  = trozo a  $60^\circ$  del eje  $x$

$$\text{Longitud de } L_3 = \frac{75 \cos 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 61,2 \text{ mm}$$

Componente	Longitud	$\bar{x}$	$\bar{y}$
$L_1$	75	$(75/2)\cos 45^\circ = 26,5$	$(75/2)\sin 45^\circ = 26,5$
$L_2$	$\pi r = 157$	$75\cos 45^\circ + 50 = 103$	$75\sin 45^\circ + 2r/\pi = 84,9$
$L_3$	61,2	$75\cos 45^\circ + 100 + (61,2/2)\cos 60^\circ = 168,3$	$(61,2/2)\sin 60^\circ = 26,5$

$$\bar{x} = \frac{L_1\bar{x}_1 + L_2\bar{x}_2 + L_3\bar{x}_3}{L_1 + L_2 + L_3} = \frac{(75 \times 26,5) + (157 \times 103) + (61,2 \times 168,3)}{75 + 157 + 61,2} = 97,1 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{L_1\bar{y}_1 + L_2\bar{y}_2 + L_3\bar{y}_3}{L_1 + L_2 + L_3} = \frac{(75 \times 26,5) + (157 \times 84,9) + (61,2 \times 26,5)}{293,2} = 57,8 \text{ mm}$$

Observación: el valor  $2r/\pi$ , empleado para calcular  $\bar{y}_2$ , se ha tomado del Problema 10.4

- 10.6.** Localizar el centroide de la barra conformada como se muestra en la Figura 10.10. Se supone que su sección es despreciable comparada con las dimensiones de la figura.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 10.11 ampliada se detalla la geometría necesaria para localizar el centroide del arco. Se halla en el eje de simetría, que forma un ángulo de  $75^\circ$  con la vertical, y a una distancia del centro del arco  $(2r/\alpha) \sin \frac{1}{2}\alpha$ , donde  $\alpha = 150\pi/180$  rad (véase el Problema 10.4).

Por tanto, la distancia al centroide sobre el radio es  $[2(1)/2,62] \sin 75^\circ = 0,738$  in. La distancia  $\bar{y}$  para el arco es, por consiguiente,  $-0,738 \sin 15^\circ = -0,191$  in.

La longitud del arco es  $r\alpha = 1(2,62) = 2,62$  in.

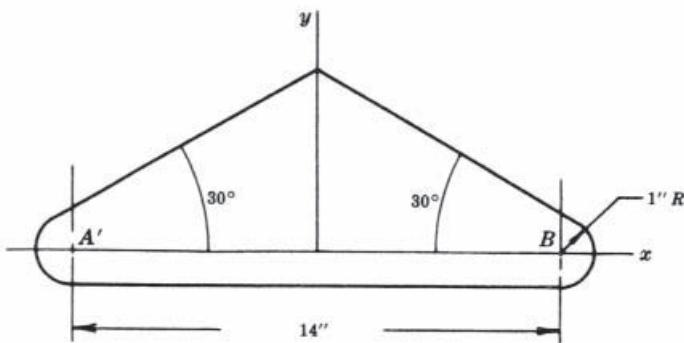


Figura 10.10

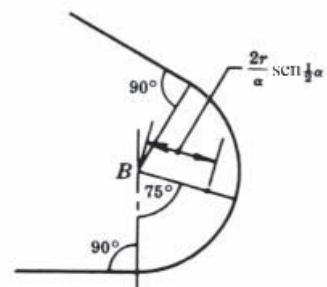


Figura 10.11

La Figura 10.12 ilustra cómo se halla la longitud de la parte recta inclinada.

$$DF = AB = 7 \text{ in}$$

$$BF = BC \cos 30^\circ = 1(0,866) = 0,866 \text{ in}$$

$$FC = BC \sin 30^\circ = 1(0,500) = 0,500 \text{ in}$$

$$DC = DF + FC = 7,5 \text{ in}$$

$$EC = \frac{DC}{\cos 30^\circ} = \frac{7,5}{0,866} = 8,66 \text{ in}$$

El centroide de  $EC$  está en  $G$ , a una distancia  $\bar{y}_{\text{incl}}$  del eje  $x$ , donde

$$\bar{y}_{\text{incl}} = GH + FB = \frac{1}{2}(8,66 \text{ sen } 30^\circ) + 0,866 = 3,03 \text{ in}$$

El centroide de la barra horizontal está por debajo del eje  $x$ . Por tanto,  $\bar{y} = -1$  in.

Por simetría,  $\bar{x}$  en la figura compuesta es 0.

Para hallar  $\bar{y}$  en la figura compuesta, empleamos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{2L_{\text{arc}}\bar{y}_{\text{arc}} + L_{\text{hor}}\bar{y}_{\text{hor}} + 2L_{\text{incl}}\bar{y}_{\text{incl}}}{2L_{\text{arc}} + L_{\text{hor}} + 2L_{\text{incl}}} \\ &= \frac{2(2,62)(-0,191) + 14(-1) + 2(8,66)(3,03)}{2(2,62) + 14 + 2(8,66)} \\ &= 1,02 \text{ in}\end{aligned}$$

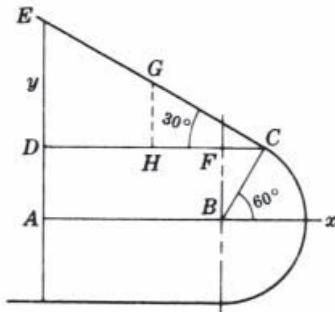


Figura 10.12

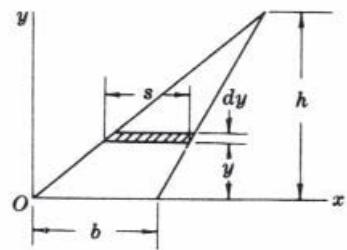


Figura 10.13

### 10.7. Localizar el centroide de un triángulo.

#### Solución

Se elige el elemento de área mostrado en la Figura 10.13, donde  $dA = s dy$ .

Véase que  $s/b = (h - y)/h$ .

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int y dA}{A} = \frac{\int_0^h ys dy}{\frac{1}{2}bh} = \frac{\int_0^h y \left[ \frac{b}{h}(h-y) \right] dy}{\frac{1}{2}bh} = \frac{h}{3}$$

Ahora podría hallarse  $\bar{x}$ , pero generalmente es suficiente saber que el centroide se encuentra en un punto cuya distancia a la base es un tercio de la altura. Se dibujan sendas rectas paralelas a dos lados cualesquiera, a un tercio de la correspondiente altura de distancia del lado. El centroide es la intersección de las dos rectas.

### 10.8 Hallar el centroide de un sector circular de radio $r$ y ángulo abarcado $2\alpha$ . El eje $x$ es de simetría.

Resolver este problema empleando el elemento de área mostrado (a) en la Figura 10.14 y (b) en la Figura 10.15.

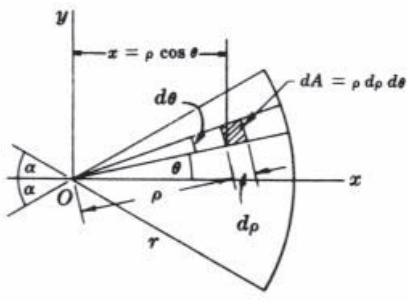


Figura 10.14

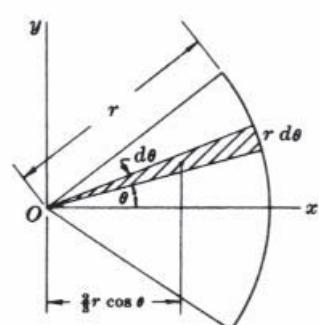


Figura 10.15

**SOLUCIÓN**

(a) Empleando el elemento de área de la Figura 10.14, podemos escribir

$$\bar{x} = \frac{\bar{Q}_y}{A} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^r \rho \cos \theta \rho d\rho d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^r \rho d\rho d\theta} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} [\rho^3 / 3]_0^r \cos \theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} [\rho^2 / 2]_0^r d\theta} = \frac{(r^3 / 3)[\sin \alpha - \sin(-\alpha)]}{(r^2 / 2)[\alpha - (-\alpha)]}$$

$$= \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$$

Para un sector semicircular,  $2\alpha = \pi$  rad y

$$\bar{x} = \frac{2r \sin \pi / 2}{3\pi / 2} = \frac{4r}{3\pi}$$

Por la simetría de la figura,  $\bar{y} = 0$

(b) Empleando el elemento de área de la Figura 10.15, como sabemos que el centroide de un triángulo está a dos tercios de la distancia del vértice (origen) a la base,  $\bar{x}$  es  $\frac{2}{3}r \cos \theta$ .

$$\bar{x} = \frac{\bar{Q}_y}{A} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} (\frac{1}{2}r d\theta r)(\frac{2}{3}r \cos \theta)}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2}r d\theta r} = \frac{\frac{1}{3}r^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta}{\frac{1}{2}r^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$$

**10.9.** Hallar el centroide de la superficie limitada por la parábola  $y^2 = 4ax$  y las rectas  $y = 0$  y  $x = b$ .

**SOLUCIÓN**

Tomamos el elemento de área paralelo al eje  $x$  indicado en la Figura 10.16

$$\bar{x} = \frac{\bar{Q}_y}{A} = \frac{\int_0^b (\frac{1}{2}x) x dy}{\int_0^b x dy} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^b x^2 dy}{\int_0^b x dy} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^b (y^4 / 16a^2) dy}{\int_0^b (y^2 / 4a) dy} = \frac{3b^2}{40a}$$

Análogamente  $\bar{y} = \frac{\bar{Q}_x}{A} = \frac{\int_0^b yx dy}{b^3 / 12a} = \frac{\int_0^b (y^3 / 4a) dy}{b^3 / 12a} = \frac{b^4 / 16a}{b^3 / 12a} = \frac{3}{4}b$

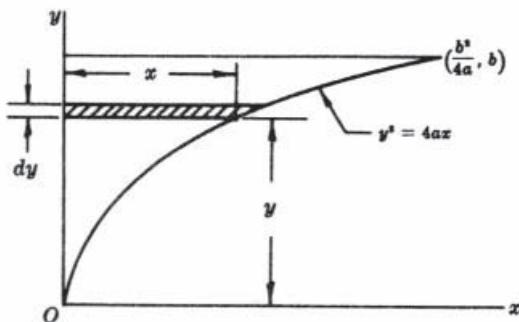


Figura 10.16

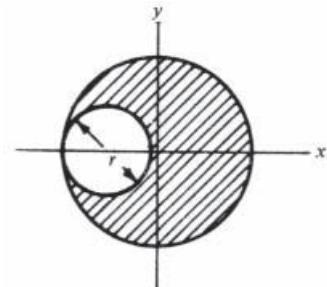


Figura 10.17

**10.10.** Hallar el centroide de la superficie que resulta al eliminar un círculo de diámetro  $r$  de un círculo de radio  $r$ , tal como se muestra en la Figura 10.17.

**SOLUCIÓN**

Por simetría,  $\bar{y} = 0$ , o sea, el centroide está en el eje  $x$ .

Empleando la fórmula para áreas compuestas en la que  $A_L$  es el área del círculo mayor y  $A_S$  la del menor, se obtiene

$$x = \frac{A_L x_L - A_S x_S}{A_L - A_S} = \frac{\pi r^2(0) - (\pi r^2 / 4)(-r/2)}{\pi r^2 - \pi r^2 / 4} = \frac{1}{6}r$$

Por tanto, el centroide está en el eje  $x$  a una distancia  $\frac{1}{6}r$  a la derecha del eje  $y$ .

- 10.11.** Se elimina un semicírculo en el trapezoide mostrado en la Figura 10.18. Hallar el centroide de la superficie resultante.

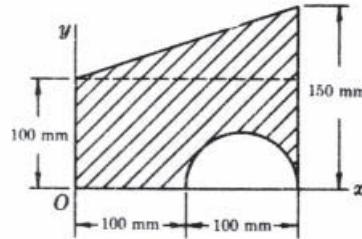


Figura 10.18

#### SOLUCIÓN

El área sombreada se compone de un rectángulo (1) más un triángulo (2) menos un área semicircular (3).

$$\bar{x} = \frac{A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2 - A_3 \bar{x}_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{2 \times 10^4(100) + 5 \times 10^3(133,3) - \pi(50)^2(150)/2}{2 \times 10^4 + 5 \times 10^3 - \pi(50)^2/2} = 98,6 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2 - A_3 \bar{y}_3}{A_1 + A_2 - A_3} \\ &= \frac{2 \times 10^4(50) + 5 \times 10^3(100 + 50/3) - [\pi(50)^2/2][(4 \times 50)/3\pi]}{21070} = 71,2 \text{ mm} \end{aligned}$$

- 10.12.** La superficie de la Figura 10.19(a) gira alrededor del eje  $y$ . Hallar el volumen de la figura generada [Figura 10.19(b)].

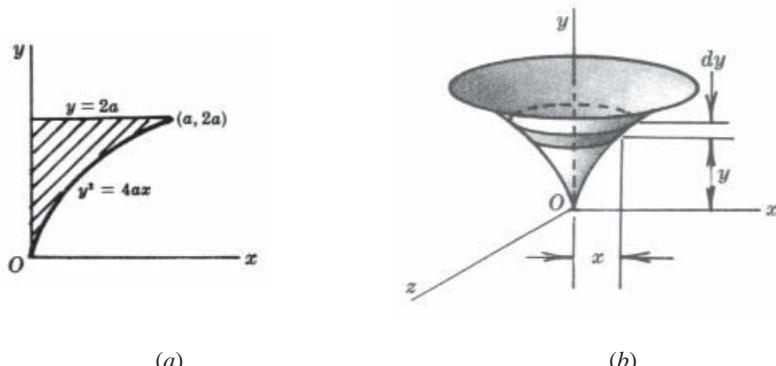


Figura 10.19

#### SOLUCIÓN

Por la simetría de la Figura 10.19(b),  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{z} = 0$ . Elegimos un elemento de volumen paralelo al plano  $xz$ . Su espesor o altura es  $dy$ , su radio es  $x$  y está a una distancia  $y$  del plano  $xz$ .

$$\bar{y} = \frac{Q_{xz}}{V} = \frac{\int_0^{2a} y(\pi x^2 dy)}{\int_0^{2a} \pi x^2 dy} = \frac{\pi \int_0^{2a} y(y^4/16a^2) dy}{\pi \int_0^{2a} (y^4/16a^2) dy} = \frac{y^6/6|_0^{2a}}{y^5/5|_0^{2a}} = \frac{5}{3}a$$

- 10.13.** Localizar  $\bar{x}$  para una pirámide o cono de altura  $h$  y área de la base  $A$ , cuya base yace en el plano  $yz$ .

**SOLUCIÓN**

En la Figura 10.20 elegimos un elemento de volumen que dista  $x$  del plano  $yz$ . Sea  $dx$  su espesor y  $A_x$ , su área, variable con  $x$ .

Por geometría,

$$\frac{A_x}{A} = \frac{(h-x)^2}{h^2}$$

$$\text{Luego, } \bar{x} = \frac{\int x dV}{\int dV} = \frac{\int_0^h x A_x dx}{\int_0^h A_x dx} = \frac{\int_0^h x (A/h^2)(h-x)^2 dx}{\int_0^h (A/h^2)(h-x)^2 dx} = \frac{1}{4}h$$

Así pues, el centroide de una pirámide o cono se halla a una distancia de la base igual a un cuarto de su altura.

- 10.14.** Localizar el centroide del cuarto de cilindro de la Figura 10.21.

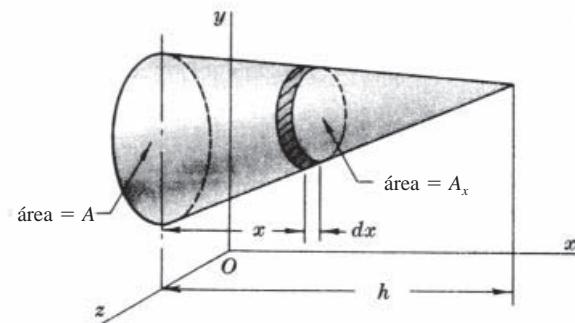


Figura 10.20

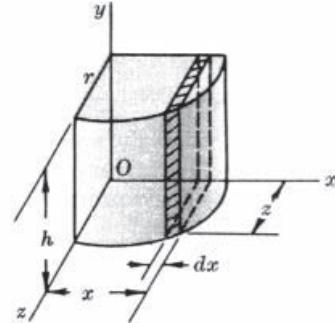


Figura 10.21

**SOLUCIÓN**

Únicamente es necesario calcular el valor de  $\bar{x}$ , ya que  $\bar{z} = \bar{x}$ , y, evidentemente,  $\bar{y}$  es la mitad de la altura  $h$ . Elegimos un elemento de volumen  $dV$  paralelo al plano  $yz$ .

$$dV = zh dx$$

La relación entre  $x$  y  $z$  es  $x^2 + z^2 = r^2$ , ya que, al cortar el sólido por un plano paralelo al plano  $xz$ , resulta un cuadrante de círculo.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int x dV}{\int dV} = \frac{\int_0^r x zh dx}{\int_0^r zh dx} \\ &= \frac{\int_0^r h x (r^2 - x^2)^{1/2} dx}{\int_0^r h (r^2 - x^2)^{1/2} dx} = \frac{h[-\frac{1}{3}(r^2 - x^2)^{3/2}]_0^r}{h[(x/2)(r^2 - x^2)^{1/2} + (r^2/2) \operatorname{sen}^{-1}(x/r)]_0^r} = \frac{4r}{3\pi} \end{aligned}$$

Obsérvese que el resultado es exactamente el mismo que para el centroide de un cuadrante de círculo, como era de esperar, puesto que el único factor que podría afectar a la posición del centroide en el sólido en comparación con el área es la altura  $h$ , pero ésta es factor común en numerador y denominador.

- 10.15.** En una esfera de radio  $R$  se vacía una esfera de radio  $r < R$ . La distancia entre sus centros es  $a$ . Hallar el centroide del volumen resultante.

**SOLUCIÓN**

Este ejemplo ilustra el método empleado en volúmenes compuestos.

$$V_R = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad V_r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Se supone que el origen de coordenadas está en el centro de la esfera mayor y que el semieje  $x$  positivo es el definido por la recta que une los centros de las dos esferas. Entonces  $\bar{x}_R = 0$  y  $\bar{x}_r = a$ .

Aplicando la fórmula,

$$\bar{x} = \frac{V_R \bar{x}_R - V_r \bar{x}_r}{V_R - V_r} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3(0) - \frac{4}{3}\pi r^3(a)}{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{-ar^3}{R^3 - r^3}$$

Es decir, el centroide está en la recta que une los centros y a una distancia  $ar^3/(R^3 - r^3)$  a la izquierda del plano  $yz$ .

- 10.16.** Localizar el centroide del volumen compuesto mostrado en la Figura 10.22. El orificio, de 40 mm, se ha perforado en el centro de la cara superior y perpendicularmente a ella.

**SOLUCIÓN**

De la simetría de la figura,  $\bar{z} = 120$  mm.

Asignemos 1 al paralelepípedo, 2 a la pieza triangular y 3 al cilindro. Se han tabulado como sigue los valores necesarios en las fórmulas.

Forma	$V$	$\bar{x}$	$\bar{y}$
1	$1728 \times 10^3$	60	30
2	$432 \times 10^3$	140	20
3	$7,54 \times 10^3$	60	30

$$\bar{x} = \frac{1728 \times 10^3(60) + 432 \times 10^3(140) - 75,4 \times 10^3(60)}{1728 \times 10^3 + 432 \times 10^3 - 75,4 \times 10^3} = 76,6 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{1728 \times 10^3(30) + 432 \times 10^3(20) - 75,4 \times 10^3(30)}{2084,6 \times 10^3} = 27,9 \text{ mm}$$

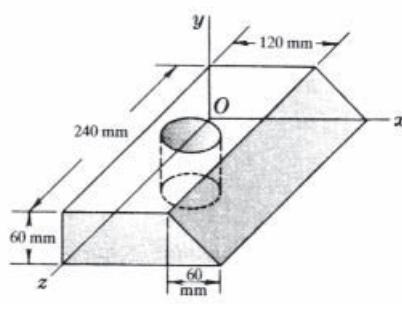


Figura 10.22

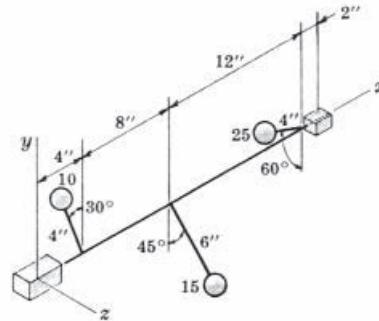


Figura 10.23

- 10.17.** Tres esferas de volúmenes 10, 15 y 25 in<sup>3</sup>, respectivamente, están situadas respecto al árbol tal como se ilustra en la Figura 10.23. Localizar el centroide de los tres volúmenes.

**SOLUCIÓN**

Tomamos el eje  $x$  en la dirección del árbol y tabulamos los datos.

$V$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
10	+4	$44 \cos 30^\circ$	$-4 \sin 30^\circ$
15	+12	$-6 \cos 45^\circ$	$+6 \sin 45^\circ$
25	+24	$-4 \cos 60^\circ$	$-4 \sin 60^\circ$

$$\bar{x} = \frac{(10 \times 4) + (15 \times 12) + (25 \times 24)}{10 + 15 + 25} = 16,4 \text{ in}$$

$$\bar{y} = \frac{(10 \times 4 \times 0,866) + (15 \times 6 \times 0,707) - (25 \times 4 \times 0,500)}{50} = -1,58 \text{ in}$$

$$\bar{z} = \frac{(-10 \times 4 \times 0,500) + (15 \times 6 \times 0,707) - (25 \times 4 \times 0,866)}{50} = -0,86 \text{ in}$$

Este mismo procedimiento se seguiría si las cifras 10, 15 y 25 representaran pesos o masas concentradas en los centros de las esferas correspondientes.

### 10.18. Hallar el centroide de una semiesfera respecto a su base.

#### SOLUCIÓN

Elegimos el plano  $xy$  en la base de la semiesfera y consideramos el elemento de área  $dS$  mostrado en la Figura 10.24. Obsérvese que la anchura  $dL$  del elemento de superficie *no* es vertical sino inclinada. Sea  $\theta = \operatorname{artg}(y/x)$ .

$$\begin{aligned} dL^2 &= dx^2 + dy^2 = \left( \frac{dx}{\sqrt{1+y^2}} \right)^2 + \left( \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} \right)^2 dx^2 \quad \text{o} \quad dL = \sqrt{1+(dy/dx)^2} dx \\ \bar{y} &= \frac{\int y dS}{\int dS} = \frac{\int y (2\pi x dL)}{\int 2\pi x dL} = \frac{\int_0^r 2\pi y x \sqrt{1+(dy/dx)^2} dx}{\int_0^r 2\pi x \sqrt{1+(dy/dx)^2} dx} \end{aligned}$$

La ecuación del círculo en el plano  $xy$  es  $x^2 + y^2 = r^2$ .

Luego,  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ . Derivando,  $dy/dx = -x(r^2 - x^2)^{-1/2}$  y sustituyendo

$$\bar{y} = \frac{2\pi r \int_0^r x dx}{2\pi r \int_0^r x(r^2 - x^2)^{-1/2} dx} = \frac{1}{2}r$$

### 10.19. Hallar el centroide de la superficie de un cono circular recto de altura $h$ respecto a su base (Figura 10.25).

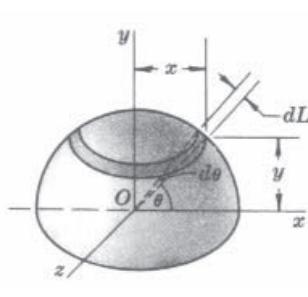


Figura 10.24

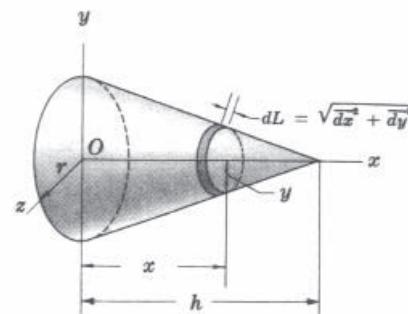


Figura 10.25

**SOLUCIÓN**

En la Figura 10.25, el eje  $x$  coincide con la altura del cono. El elemento de área  $dS$  es  $2\pi y dL$ .

$$x = \frac{Q_{yz}}{S} = \frac{\int x dS}{\int dS} = \frac{\int x 2\pi y dL}{\int 2\pi y dL}$$

Por semejanza de triángulos en el plano  $xy$ ,  $y/r = (h - x)/h$ , siendo  $r$  el radio de la base.

Por tanto,  $dy/dx = r/h$  y  $dL = dx\sqrt{1+(dy/dx)^2} = dx\sqrt{1+r^2/h^2}$ .

Sustituyendo y simplificando,

$$x = \frac{\int_0^h (hx - x^2) dx}{\int_0^h (h-x) dx} = \frac{h}{3}$$

**10.20.** Hallar el centro de masas de la mitad derecha del elipsoide homogéneo  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ .

**SOLUCIÓN**

Se ha elegido el elemento de masa paralelo al plano  $yz$ , tal como se muestra en la Figura 10.26. Sea  $\delta$  la densidad. El elemento de volumen señalado es  $dV = A dx$ , siendo  $A$  el área de una elipse de ejes  $2y$  y  $2z$ , o sea,  $A = \pi yz$ .

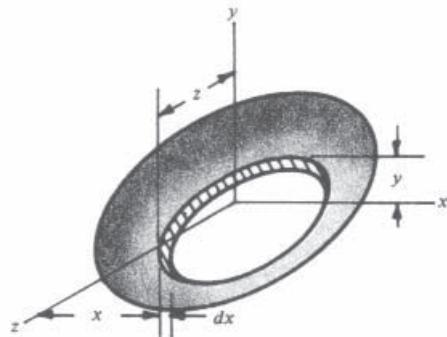


Figura 10.26

$$dm = \delta dV = \delta \pi yz dx$$

Luego,

$$x = \frac{Q_{yz}}{m} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\delta \pi \int_0^a xyz dx}{\delta \pi \int_0^a yz dx}$$

Para expresar  $y$  en función de  $x$ , se hace  $z = 0$  en la ecuación del elipsoide y se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{o sea} \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Análogamente, con  $y = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{o sea} \quad z = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Sustituyendo y simplificando, tenemos

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \left( x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right) dx}{\int_0^a \left( \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right) dx} = \frac{3}{8}a$$

Evidentemente,  $\bar{y} = \bar{z} = 0$ .

- 10.21.** Hallar el centro de masas de una semiesfera cuya densidad varía con el cuadrado de la distancia a la base.

**SOLUCIÓN**

Tomamos el plano  $yz$  en la base de la semiesfera (Figura 10.27). Como la densidad varía con  $x^2$ , será  $\delta = Kx^2$ .

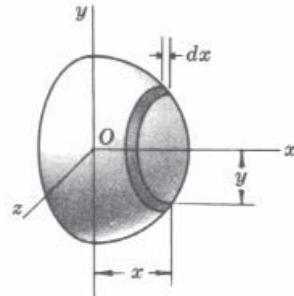


Figura 10.27

Elegimos  $dm$  paralelo al plano  $yz$  a una distancia  $x$  del mismo.

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^r x \delta \pi y^2 dx}{\int_0^r \delta \pi y^2 dx}$$

En el plano  $xy$ , el punto  $(x, y)$  pertenece a una circunferencia de radio  $r$ . Por tanto,  $y^2 = r^2 - x^2$ . Sustituyendo los valores de  $y^2$  y  $\delta$ , la ecuación queda

$$\bar{x} = \frac{\int_0^r x Kx^2 \pi (r^2 - x^2) dx}{\int_0^r Kx^2 \pi (r^2 - x^2) dx} = \frac{\int_0^r x^3 (r^2 - x^2) dx}{\int_0^r x^2 (r^2 - x^2) dx} = \frac{\frac{1}{12} r^6}{\frac{2}{15} r^5} = \frac{5}{8} r$$

- 10.22.** La densidad de los puntos de una varilla delgada varía con la distancia del punto a un extremo. ¿Dónde está el centro de masas?

**SOLUCIÓN**

La densidad es proporcional a la distancia  $x$  del punto al extremo de la varilla, elegido como origen, o sea,  $\delta = Kx$ , donde  $\delta$  es la masa por unidad de longitud.

Para hallar  $dm$ , se multiplica el elemento de longitud en el punto  $x$  por la densidad en ese punto,  $dm = \delta dx = Kx dx$ . Luego

$$x = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^l x Kx dx}{\int_0^l Kx dx} = \frac{\frac{2}{3} l}{l} = \frac{2}{3} l$$

El centro de masas se halla a una distancia del extremo igual a dos tercios de la longitud de la varilla.

- 10.23.** Hallar el área de la superficie del toro generado al girar el círculo de la Figura 10.28 alrededor del eje  $x$ . Emplear los teoremas de Pappus-Guldin.

**SOLUCIÓN**

El centroide de la circunferencia está a una distancia  $d$  del eje  $x$ . Por ello, en una revolución completa el centroide realiza un recorrido circular de radio  $d$ . La longitud recorrida es  $2\pi d$ . La longitud de la curva generatriz es la de la circunferencia  $2\pi r$ . Por tanto, la superficie del toro es  $2\pi d \times 2\pi r = 4\pi^2 rd$ .

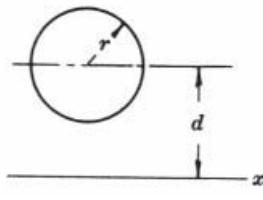


Figura 10.28

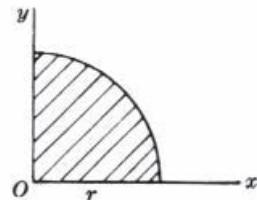


Figura 10.29

**10.24.** Hallar el centroide de un cuadrante de círculo, empleando los teoremas de Pappus-Guldin.

#### SOLUCIÓN

Este problema es una aplicación del teorema inverso. Al girar la superficie de la Figura 10.29 genera una semiesfera cuyo volumen se sabe que es  $\frac{2}{3}\pi r^3$ .

La longitud del camino recorrido por el centroide es el volumen dividido por el área del cuadrante:

$$l = \frac{2\pi r^3 / 3}{\pi r^2 / 4} = \frac{8}{3}r$$

Pero dicha longitud es  $2\pi\bar{y}$ . Por tanto,  $2\pi\bar{y} = 8r/3$ , o sea,  $\bar{y} = 4r/3\pi$ . Este valor ya se obtuvo por cálculo directo en el Problema 10.8.

Por supuesto,  $\bar{x} = \bar{y}$  para el cuadrante de círculo.

**10.25.** En la Figura 10.30, una caja de dimensiones  $l$ ,  $b$  y  $h$  está medio llena de arena de densidad  $\delta$   $\text{kg/m}^3$ . Se supone que la altura de la arena varía linealmente desde cero a la izquierda hasta  $h$  a la derecha. Calcular a qué distancia desde la izquierda se halla el centro de presión.

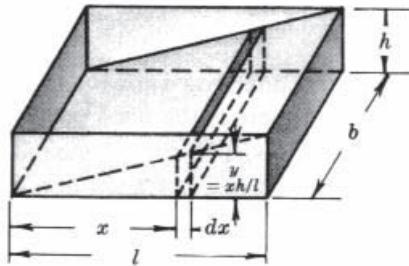


Figura 10.30

#### SOLUCIÓN

Consideramos un elemento de volumen a una distancia  $x$  del extremo izquierdo, tal como se muestra en la figura. La altura es  $y = xh/l$  y el peso de  $dV$  es  $dW = g\delta(xh/l)b dx$ . Para localizar el centro de presión empleamos

$$\bar{x} = \frac{\int x dW}{\int dW} = \frac{(g\delta hb/l) \int_0^l x^2 dx}{(g\delta hb/l) \int_0^l x dx} = \frac{2}{3}l$$

El centro de presión de la arena se halla en la vertical que está a  $2/3l$  del extremo izquierdo y a  $1/2 b$  detrás de la cara delantera. Si situáramos toda la masa de la arena en esta vertical provocaría en los soportes de la caja las mismas reacciones que la masa distribuida.

**10.26. (a)** En la Figura 10.31, una viga soporta un material de  $w \text{ lb/ft}^3$  de peso que alcanza una altura  $y$  que varía de modo conocido con la distancia  $x$  al extremo izquierdo. Hallar la reacción de la derecha  $R_R$ . Se supone que  $b$  es constante y que la altura  $y$  para una  $x$  fija no varía a lo largo de la anchura  $b$ .

- (b) En la parte (a), suponga que  $w = 150 \text{ lb/ft}^3$  y que la altura de la carga varía linealmente desde cero en el extremo izquierdo hasta 2 ft en el extremo derecho (Figura 10.32). La longitud es 8 ft y la anchura  $b$  es 2 ft. Calcular la reacción en cada uno de los dos soportes de la derecha, suponiendo despreciable el peso de la viga.

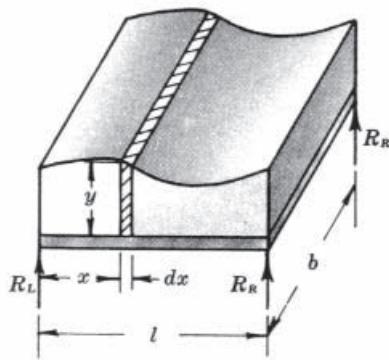


Figura 10.31

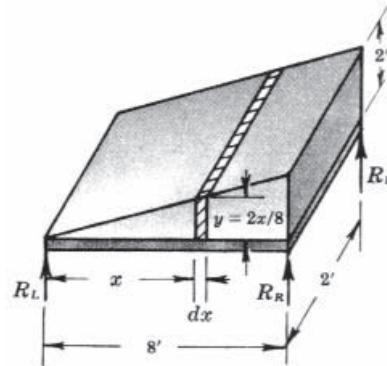


Figura 10.32

**SOLUCIÓN**

- (a) El peso de un elemento de volumen a una distancia  $x$  del extremo izquierdo es  $dW = wby dx$ . El momento de  $dW$  respecto al extremo izquierdo (el plano vertical perpendicular a  $l$ ) es  $x dW = wbyx dx$ .

La suma de los momentos de los pesos de todos los elementos de volumen respecto al extremo izquierdo han de equilibrarse con los momentos en los dos soportes de la derecha  $R_R$ . Así pues,

$$\int_0^l wbyx dx = 2R_R l$$

Para integrar directamente debe expresarse  $y$  en función de  $x$ ; de lo contrario, debe buscarse otro procedimiento.

- (b) La altura de un elemento diferencial de carga a una distancia  $x$  del extremo izquierdo es  $y = 2x/8 = x/4$ .

El momento de la carga total respecto al plano vertical que contiene las dos reacciones de la izquierda es

$$M = \int x dW = \int x (150 dV) = \int_0^8 x \left[ 150 \left( \frac{x}{4} \right) (2) dx \right] = 12.800 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

El momento respecto al extremo izquierdo de las dos reacciones de la derecha debe equilibrar el momento de la carga. Por tanto,

$$2R_R(8) = 12.800 \quad \text{o sea,} \quad R_R = 800 \text{ lb}$$

El momento de la carga puede calcularse también a partir de la carga en libras por pie a lo largo de la viga. Si la carga en el extremo derecho se representa como una altura de 2 ft a lo largo de los 2 ft del ancho de la viga y 1 ft en la dirección  $x$ , concentrada en el extremo derecho, el valor de la carga será  $2 \times 2 \times 1 \times 150 = 600 \text{ lb}$  por pie lineal. Así pues, en este problema la carga varía desde cero en el extremo izquierdo a 600 lb/ft en el extremo derecho.

La carga en un elemento de longitud  $dx$  a una distancia  $x$  del extremo izquierdo vale  $p_x dx$ , donde  $p_x =$  carga por pie lineal en  $x$ . Por semejanza de triángulos,  $p_s/x = 600/8$ , o sea,  $p_x = 75x$ . Luego el momento de la carga total respecto al extremo izquierdo es

$$M = \int_0^8 xp_x dx = \int_0^8 x(75x) dx = 12.800 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

- 10.27.** El depósito de la Figura 10.33(a) está lleno de agua de densidad  $1000 \text{ kg/m}^3$ . La placa cubre un orificio rectangular de 300 mm de alto por 600 mm de ancho. Calcular la fuerza debida al agua

en cada uno de los dos tornillos superiores *B*. (Nota: En la solución, todas las dimensiones están en metros.)

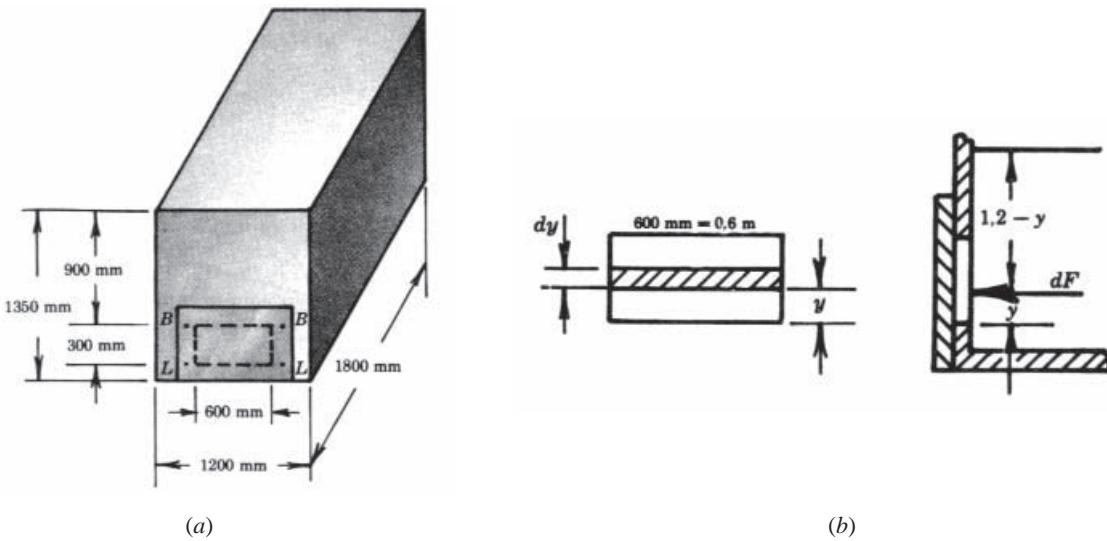


Figura 10.33

#### SOLUCIÓN

En la Figura 10.33 se muestra un elemento de la placa a una distancia *y* por encima de la base del orificio. Puesto que únicamente interesa la superficie de la placa en contacto con el agua, el área del elemento es  $dA = 0,6 \, dy$ . [Observación: Si el ancho de la placa fuera función de *y*, el área del elemento sería  $f(y) \, dy$ .]

La fuerza  $dF$  del agua en el elemento elegido es el producto del área  $dA$  por la presión a la distancia *y* a la base del orificio.

La presión en ese elemento es numéricamente igual al peso de una columna de agua de  $1 \, m^2$  de base y  $(1,2 - y) \, m$  de altura:  $p = 9,8 \times 1000(1,2 - y) \, N/m^2$ . Luego la fuerza en la superficie considerada es  $dF = 9,8 \times 1000(1,2 - y)(0,6) \, dy$ .

El momento de  $dF$  respecto a la base del orificio es  $y \, dF$ . El momento de la fuerza total del agua es  $\int y \, dF$  y debe equilibrarse con el momento de las fuerzas de los tornillos *B* respecto a la base del orificio. Por tanto,

$$2B(0,3) = \int_0^{0,3} y 9,8 \times 1000(1,2 - y)(0,6) \, dy, \quad \text{de donde} \quad B = 441 \, N$$

Puede comprobarse que la fuerza en cada tornillo de la base es de 485 N.

- 10.28.** La Figura 10.34(a) representa una compuerta rectangular que separa líquidos de distinta densidad. Está engoznada por su parte superior y se apoya en un tope en la inferior. Hallar la máxima diferencia de nivel, *d*, para la que se mantiene cerrada.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 10.34(b) se muestra la distribución de la presión en la compuerta. La presión máxima en la base de la izquierda es el peso de una columna de fluido (agua) de 12 ft de altura sobre un pie cuadrado:

$$p_1 = 62,4 \times 12 \, lb/ft^2$$

La fuerza total sobre el lado izquierdo es

$$F_1 = \frac{1}{2} p_1 \times \text{área} = \frac{1}{2} (62,4)(12)(12)(a)$$

donde *a* es el ancho de la compuerta (perpendicular al papel). Esta fuerza ( $F_1$ ) actúa en el centro de presión, que en una distribución triangular se halla en el centroide del triángulo (a 8 ft de la parte superior de la compuerta).

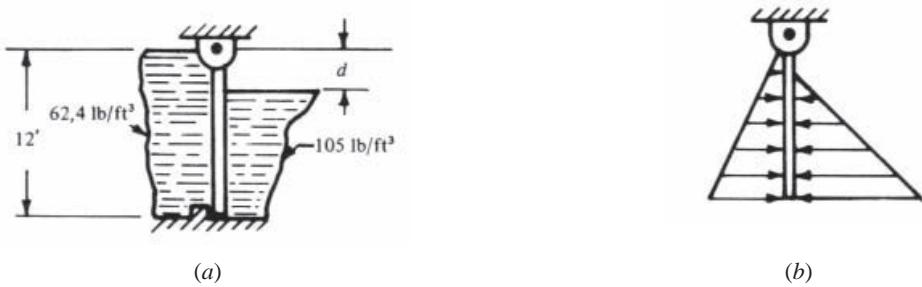


Figura 10.34

La presión máxima en la base de la derecha es el peso de una columna de fluido de un pie cuadrado de base y  $(12 - d)$  ft de altura:

$$p_2 = 105(12 - d) \text{ lb/ft}^2$$

La fuerza total sobre el lado derecho es

$$F_2 = \frac{1}{2} p_2 \times \text{área} = \frac{1}{2}(105)(12 - d)(12 - d)(a)$$

Esta fuerza  $F_2$  actúa en el centro de presión que está a  $\frac{1}{3} \times \text{altura} = \frac{1}{3}(12 - d)$  de la base.

Para tomar momentos respecto al gozne, empleamos un brazo de momento de 8 ft para  $F_1$  y un brazo de momento de  $12 - \frac{1}{3}(12 - d) = 8 + \frac{1}{3}d$  para  $F_2$ . Igualando los dos momentos para el equilibrio, se obtiene

$$\frac{1}{2}(62.4)(12)(12)(a)(8) = \frac{1}{2}(105)(12 - d)^2(a)(8 + \frac{1}{3}d)$$

$$685 = (144 - 24d + d^2)(8 + \frac{1}{3}d) \quad \text{o sea} \quad \frac{1}{3}d^3 - 144d + 467 = 0$$

Esta ecuación se satisface para el valor  $d = 3.33$  ft.

### Problemas propuestos\*

- 10.29.** Un hilo está sujeto entre un punto del eje  $x$  a 4 in a la derecha del origen y otro punto del eje  $y$  a 4 in por encima del origen. Calcular el primer momento del hilo respecto al eje  $x$ .

*Resp.*  $Q = 11.3 \text{ in}^2$

- 10.30.** Hallar  $Q_x$  de la masa  $m$  de media llanta de una rueda (Figura 10.35). Se supone que el grosor de la rueda es pequeño comparado con el radio. Emplear las coordenadas polares que se indican. La densidad es  $\delta$  unidades de masa por unidad de longitud.

*Resp.*  $Q_x = 2\delta r^2 = 2rm/\pi$

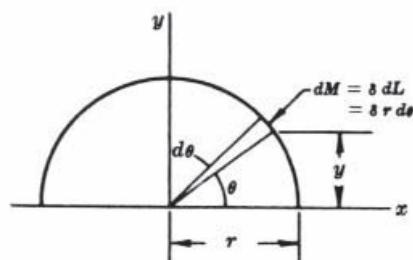


Figura 10.35

\* La tabla de primeros momentos y centroides del Apéndice B puede resultarle útil para la resolución de los problemas numéricos.

**10.31.** Hallar el primer momento de medio círculo respecto a su diámetro.

$$\text{Resp. } Q = \frac{2}{3} r^3$$

**10.32.** Hallar  $Q_x$  y  $Q_y$  de la superficie limitada por  $y^2 = 4ax$ ,  $x = 0$  y  $y = b$ .

$$\text{Resp. } Q_x = b^4/16a, Q_y = b^5/160a^2$$

**10.33.** Hallar  $Q$  de una semiesfera respecto a su base.

$$\text{Resp. } Q = \frac{1}{4}\pi r^4$$

**10.34.** Emplear el resultado del Problema 10.33 para calcular  $Q$  respecto a la base de una semiesfera de 6 in de radio.

$$\text{Resp. } Q = 1020 \text{ in}^4$$

**10.35.** Hallar  $Q_x$  y  $Q_y$  de un cuarto de elipse cuyos ejes mayor y menor son 100 y 75 mm, respectivamente.

$$\text{Resp. } Q_x = 23.400 \text{ mm}^3, Q_y = 31.300 \text{ mm}^3$$

**10.36.** Emplear el resultado del problema 10.3 para calcular el primer momento de un cono circular recto de 75 mm de radio y 100 mm de altura, respecto a su base.

$$\text{Resp. } Q = 14,7 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

**10.37.** Una barra uniforme de 18 in de longitud está doblada por su punto medio a  $90^\circ$ . Localizar su centroide, tomando los lados como ejes.

$$\text{Resp. } \bar{x} = \bar{y} = 2,25 \text{ in}$$

**10.38.** Se supone que la barra del Problema 10.37 está doblada en su punto medio a  $70^\circ$ ; ¿a qué distancia está su centroide de la línea que une sus extremos?

$$\text{Resp. } d = 3,69 \text{ in}$$

**10.39** Un alambre está doblado como muestra la Figura 10.36. Localizar su centro de gravedad.

$$\text{Resp. } \bar{x} = 56,5 \text{ mm}, \bar{y} = 103 \text{ mm}$$

**10.40.** Localizar el centroide de la figura compuesta de líneas de la Figura 10.37.

$$\text{Resp. } \bar{x} = -77,0 \text{ mm}, \bar{y} = 67,6 \text{ mm}$$

**10.41.** Localizar el centroide de una barra uniforme doblada en forma de triángulo (Figura 10.38).

$$\text{Resp. } \bar{x} = 2,52 \text{ in}, \bar{y} = 3,11 \text{ in}$$

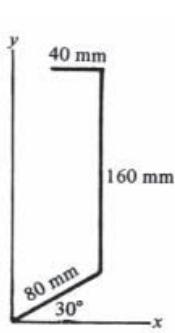


Figura 10.36

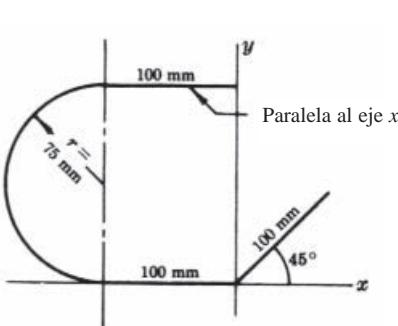


Figura 10.37

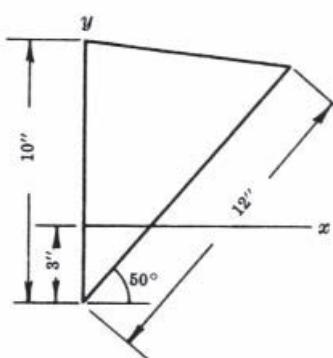


Figura 10.38

**10.42.** Demostrar que los siguientes valores corresponden a las superficies indicadas.

Figura	Área	$Q_x$	$Q_y$	Centroide	
				$\bar{x}$	$\bar{y}$
	$\frac{1}{3}ab$	$\frac{1}{10}ab^2$	$\frac{1}{4}a^2b$	$\frac{3}{4}a$	$\frac{3}{10}b$
	$\frac{2}{3}ab$	$\frac{2}{5}ab^2$	$\frac{1}{4}ba^2$	$\frac{3}{8}a$	$\frac{3}{5}b$
	$\frac{ab}{n+1}$	$\frac{ab^2}{2(2n+1)}$	$\frac{a^2b}{n+2}$	$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{2(2n+1)}b$
	$\frac{n}{n+1}ab$	$\frac{n}{2n+1}ab^2$	$\frac{n}{2(n+2)}a^2b$	$\frac{n+1}{2(n+2)}a$	$\frac{n+1}{2n+1}b$
	$\frac{2}{3}ab$	$\frac{4}{15}ab^2$	$\frac{1}{4}a^2b$	$\frac{3}{8}a$	$\frac{2}{5}b$
	$\frac{\pi ab}{4}$	$\frac{ab^2}{3}$	$\frac{a^2b}{3}$	$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$

**10.43.** Hallar el centroide de la superficie limitada por la curva  $y^3 = 4ax$  y las rectas  $y = 0$  y  $x = b$ .

$$\text{Resp. } x = 3b^2 / 40a, y = \frac{3}{4}b$$

**10.44.** Hallar  $\bar{x}$  para la superficie limitada por la curva  $ay^2 = x^3$  y la recta  $x = a$ .

$$\text{Resp. } \bar{x} = \frac{5}{7}a$$

**10.45.** Localizar el centroide de la superficie limitada por  $y^2 = 2x$  y las rectas  $x = 3$  e  $y = 0$ .

$$\text{Resp. } \bar{x} = 1,8, \bar{y} = \frac{3}{8}\sqrt{6}$$

**10.46.** Hallar el centroide de la superficie limitada por la parábola  $y^2 = 4ax$  y la recta  $y = bx$ .

$$\text{Resp. } \bar{x} = 8a/5b^2, \bar{y} = 2a/b$$

**10.47.** Hallar el centroide de la superficie limitada por la curva  $x^2 = y$  y la recta  $x = y$ .

$$\text{Resp. } \bar{x} = 0,5, \bar{y} = 0,5$$

**10.48.** Localizar el centroide de la superficie limitada por las curvas  $y^3 = 4x$  y  $x^2 = 4y$ .

**10.49.** Calcular la coordenada  $y$  del centroide de la superficie comprendida entre el eje  $x$  y la curva  $y = \sin x$  en el intervalo  $0 \leq x \leq \pi$ .

**10.50.** Hallar  $\bar{x}$  para la superficie limitada por la hipérbola  $xy = c^2$  y las rectas  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ .

$$\text{Resp. } \bar{x} = (b-a)/(\log_e b - \log_e a)$$

**10.51.** Localizar el centroide de la superficie limitada por la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  y las rectas  $x = a$ ,  $y = b$ .  $\text{Resp. } \bar{x} = 0,776a, \bar{y} = 0,776b$

**10.52.** Hallar el centroide de la superficie compuesta de la Figura 10.39.

$$\text{Resp. } \bar{x} = 64,4 \text{ mm}, \bar{y} = 80,6 \text{ mm}$$

**10.53.** Calcular la distancia del centroide de la sección en T de la Figura 10.40 a la recta límite superior.

$$\text{Resp. } d = 2,97 \text{ in}$$

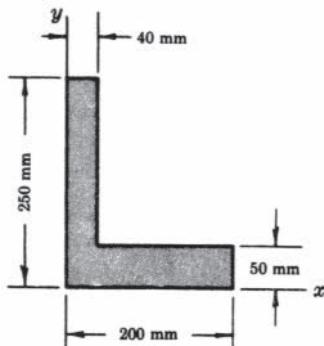


Figura 10.39

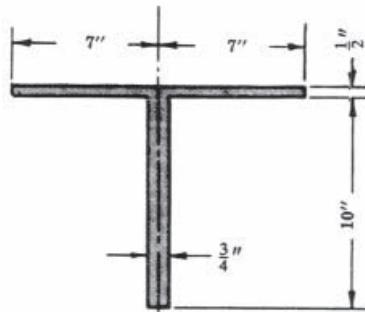


Figura 10.40

**10.54.** Localizar el centroide de la superficie sombreada que resulta al eliminar el triángulo del semicírculo (Figura 10.41).  $\text{Resp. } \bar{x} = 0, \bar{y} = 23,4 \text{ mm}$

**10.55.** Hallar el centroide de la superficie sombreada en la Figura 10.42. La superficie eliminada es semicircular.  $\text{Resp. } \bar{x} = 3,77 \text{ in}, \bar{y} = 2,69 \text{ in}$

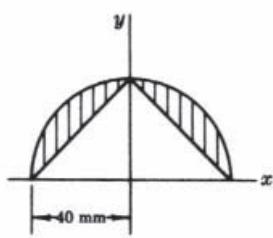


Figura 10.41

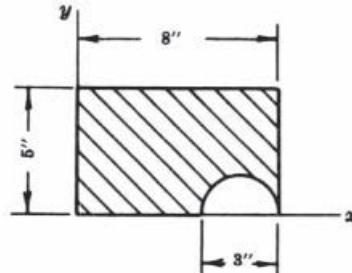


Figura 10.42

Localizar los centroides de las figuras que siguen respecto a los ejes indicados

**10.56.** Figura 10.43. *Resp.*  $\bar{x} = 10,0 \text{ mm}$ ,  $\bar{y} = 110 \text{ mm}$

**10.57.** Figura 10.44. *Resp.*  $\bar{x} = 0 \text{ in}$ ,  $\bar{y} = 4,37 \text{ in}$

**10.58.** Figura 10.45. *Resp.*  $\bar{x} = 11,9 \text{ mm}$ ,  $\bar{y} = 0 \text{ mm}$

**10.59.** Figura 10.46. *Resp.*  $\bar{x} = 1,32 \text{ in}$ ,  $\bar{y} = 3,59 \text{ in}$

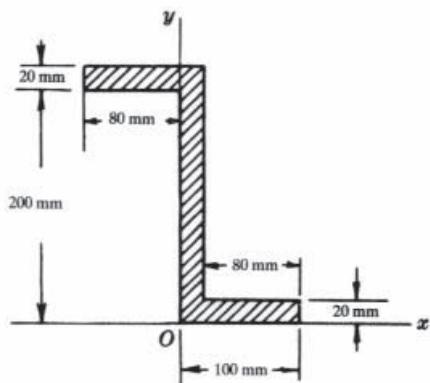


Figura 10.43

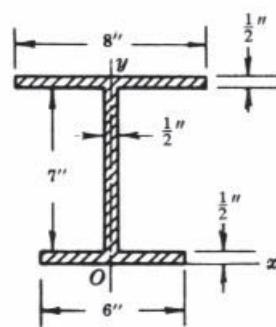


Figura 10.44

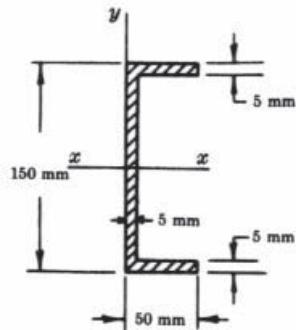


Figura 10.45

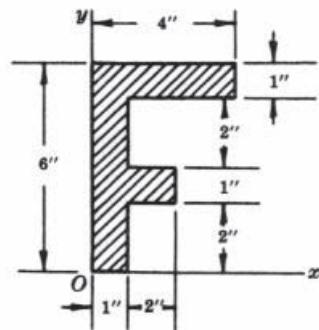


Figura 10.46

**10.60.** Figura 10.47. *Resp.*  $\bar{x} = 99,3 \text{ mm}$ ,  $\bar{y} = 41,1 \text{ mm}$

**10.61.** Figura 10.48. *Resp.*  $\bar{x} = 3 \text{ in}$ ,  $\bar{y} = 3,40 \text{ in}$

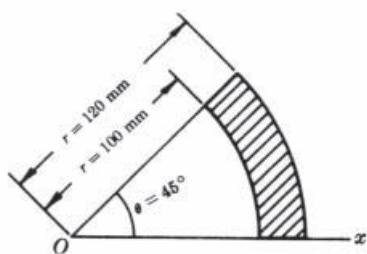


Figura 10.47

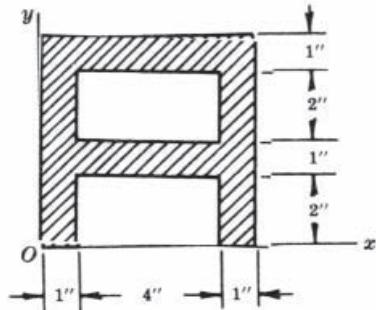


Figura 10.48

**10.62.** Demostrar por integración que el centroide de un cono circular recto está a una distancia de la base igual a un cuarto de su altura.

**10.63.** Se genera un cono girando la superficie limitada por las rectas  $by = ax$ ,  $y = 0$  y  $x = b$  alrededor del eje  $x$ . Calcular  $\bar{x}$  para ese volumen.

$$\text{Resp. } \bar{x} = \frac{3}{4}b$$

**10.64.** Demostrar por integración que el centroide de una semiesfera está a una distancia de la base igual a tres octavos del radio.

**10.65.** La superficie limitada por la parábola  $y^2 = 4ax$  y las rectas  $y = 0$  y  $x = b$  gira alrededor del eje  $x$ . Demostrar que  $\bar{x}$  para el paraboloide así formado es  $\frac{2}{3}b$ .

**10.66.** El primer cuadrante de la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  gira alrededor del eje  $x$ . Demostrar que  $\bar{x}$  para el volumen generado es  $\frac{3}{8}a$ .

**10.67.** La superficie limitada por la hipérbola  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$  y las rectas  $y = 0$ ,  $x = 2a$  gira alrededor del eje  $x$ . Calcular  $\bar{x}$  para el sólido engendrado.

$$\text{Resp. } \bar{x} = \frac{27}{16}a$$

**10.68.** La superficie limitada por la curva  $y = \sin x$  y las rectas  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi/2$  gira alrededor del eje  $x$ . Calcular  $\bar{x}$  para el volumen generado.

$$\text{Resp. } \bar{x} = \pi/4 + 1/2\pi$$

**10.69.** La superficie limitada por la curva  $y = e^x$  y las rectas  $x = 0$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  gira alrededor del eje  $x$ . Localizar el centroide del volumen generado.

$$\text{Resp. } \bar{x} = (be^{2b} - \frac{1}{2}e^{2b} + \frac{1}{2})/(e^{2b} - 1)$$

**10.70.** La superficie limitada por la curva  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  y las rectas  $x = a$ ,  $y = b$  gira alrededor del eje  $x$ . Hallar  $\bar{x}$  para el volumen generado.

$$\text{Resp. } \bar{x} = \frac{3}{4}a$$

**10.71.** Hallar el centroide de un cono circular recto con una base de 100 mm de diámetro y 200 mm de altura.

$$\text{Resp. } d = 50 \text{ mm}$$

**10.72.** Un cono circular recto de 8 in de altura y una base de 6 in de radio está soldado a una semiesfera de 12 in de diámetro de modo que sus bases coinciden. Localizar el centroide de la figura compuesta.

$$\text{Resp. Distancia al vértice del cono} = 8,55 \text{ in}$$

**10.73.** Un cono circular recto de 250 mm de altura y base de 200 mm de diámetro descansa sobre un cilindro circular recto de igual base y 300 mm de altura. Localizar el centroide de la figura compuesta.

$$\text{Resp. Distancia al vértice del cono} = 354 \text{ mm}$$

**10.74.** Una semiesfera de radio  $a$  descansa sobre un cilindro circular recto cuya base tiene también el radio  $a$ . Si la altura del cilindro es  $a$ , localizar el centroide de la figura compuesta.

$$\text{Resp. Distancia a la base del cilindro} = 0,85a$$

**10.75.** Un tronco de cono circular recto tiene 4 ft de altura y sus bases tienen unos radios respectivos de 2 y 4 ft. Localizar su centroide.

$$\text{Resp. Distancia a la base mayor} = 1,57 \text{ ft}$$

- 10.76.** De una semiesfera de radio  $a$  se vacía un cono de la misma base y altura. Demostrar que el centroide de la figura resultante está a una distancia de la base  $\frac{1}{2}a$ .

- 10.77.** Un bloque mide  $600 \times 600 \times 1200$  mm<sup>3</sup>. Se abre un orificio de 150 mm de diámetro y de 460 mm de profundidad en el centro de la cara superior ( $600 \times 600$  mm<sup>2</sup>) y normal a ella. Hallar el centroide de la figura resultante.

Resp. Distancia de la base = 593 mm

- 10.78.** En la Figura 10.49 se representa una pieza torneada. Calcular la distancia de su centroide al extremo izquierdo.

Resp.  $d = 5,48$  in

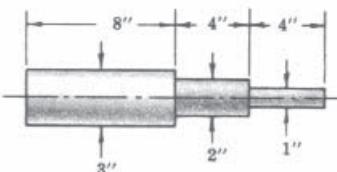


Figura 10.49

- 10.79.** Dos esferas de 5 y 15 in<sup>3</sup>, respectivamente, están conectadas por una pequeña barra de 10 in<sup>3</sup> de volumen. Si la distancia entre los centros es 10 in, ¿a qué distancia de la esfera de 5 in se halla el centroide?

Resp.  $d = 6,67$  in

- 10.80.** Una esfera de 400 mm de radio tiene una cavidad esférica de 100 mm de radio. Si la distancia entre los centros de las esferas es 200 mm, ¿dónde se halla el centroide? Se supone que el sentido positivo del eje va del centro de la esfera al centro de la cavidad.

Resp.  $d = -3,18$  mm.

- 10.81.** Repetir el problema 10.19 situando el vértice en el origen de los ejes.

Resp.  $d = -\frac{2}{3}h$

- 10.82.** Un depósito se compone de un cilindro de 20 ft de diámetro y 20 ft de alto con una base semiesférica y una tapa cónica de 5 ft de alto. Localizar el centro de gravedad del depósito vacío, suponiendo que coincide con el de las superficies externas.

Resp.  $\bar{y} = 17,6$  ft de la base

- 10.83.** Una semiesfera de 75 mm de radio está unida a un cono de igual base y 100 mm de altura. Hallar el centroide de la superficie de la figura compuesta.

Resp. Distancia al vértice = 105 mm

- 10.84.** Un depósito abierto está formado por un cilindro circular recto de 36 in de altura y 20 in de diámetro. La base es un cono invertido de 4 in de altura cuya base coincide con la del cilindro. Hallar el centroide de la superficie compuesta.

Resp. Distancia al vértice = 19,5 in

- 10.85.** El radio de la base de un cono circular recto es 200 mm y su altura 250 mm. Localizar el centroide (a) de su superficie lateral y (b) de su volumen respecto a la base.

Resp. (a)  $d = 83,3$  mm, (b)  $d = 62,5$  mm

- 10.86.** Hallar el centro de masas del primer octante del elipsoide homogéneo  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ .

Resp.  $\bar{x} = \frac{3}{8}a$ ,  $\bar{y} = \frac{3}{8}b$ ,  $\bar{z} = \frac{3}{8}c$

- 10.87.** Localizar el centro de masas de una semiesfera cuya densidad en un punto varía (a) con su distancia a la base y (b) con el cuadrado de la distancia al centro.

Resp. (a)  $d = \frac{8}{15}r$ , (b)  $d = 0,417r$

- 10.88.** Localizar el centro de masas de un cono circular recto cuya densidad en un punto varía proporcionalmente a la distancia del punto a la base.

Resp.  $d = \frac{2}{5}h$

- 10.89.** Un mazo tiene una cabeza cilíndrica de madera de 4 in de diámetro y 6 in de longitud y un mango cilíndrico de madera de  $1\frac{1}{4}$  in de diámetro y 12 in de longitud. ¿Dónde se encuentra el centro de masas respecto al extremo libre del mango? El peso específico de la madera es 50 lb/ ft<sup>3</sup>.

Resp.  $d = 12,7$  in

- 10.90.** Se vacía un cilindro de 50 mm de diámetro y 50 mm de altura en un cono circular recto con base de 200 mm de diámetro y 250 mm de altura. Ambas bases están en el mismo plano. Si el material es acero de 7850 kg/m<sup>3</sup>, ¿a qué distancia de la base se halla el centro de masas de la figura resultante? Resp.  $d = 64,0$  mm

- 10.91.** Cuando está vacío, el centro de masas de un depósito de 2,5 m de diámetro está a 1,2 m por encima de la base. Se llena de aceite (densidad 880 kg/m<sup>3</sup>) hasta una altura de 1,8 m. Localizar el centro de masas del depósito con aceite si la masa del depósito vacío es 3600 kg.

Resp. Distancia por encima de la base = 0,995 m

- 10.92.** Se taladra un orificio de 2 in de diámetro y 6 in de profundidad en el centro de una cara de un cubo de latón de 8 in de arista, perpendicularmente a la cara. El orificio se rellena de plomo. El latón pesa 525 lb/ft<sup>3</sup> y el plomo 710 lb/ft<sup>3</sup>. Localizar el centro de masas de los dos metales respecto a la base.

Resp. 4,04 in

- 10.93.** Se practica un orificio cónico de 2 in de diámetro de base y 1 in de altura en un cilindro de acero (490 lb/ft<sup>3</sup>) de 4 in de diámetro de base y 6 in de altura. La base y los ejes del cilindro y el cono coinciden. El cono se rellena de plomo (710 lb/ft<sup>3</sup>). Localizar el centro de masas respecto a la base. Resp.  $d = 2,97$  in

- 10.94.** En la Figura 10.50, calcular la distancia entre el extremo izquierdo del conjunto y su centro de masas. La densidad del cilindro mayor es de 7850 kg/m<sup>3</sup> y la del menor de 8500 kg/m<sup>3</sup>.

Resp.  $d = 299$  mm

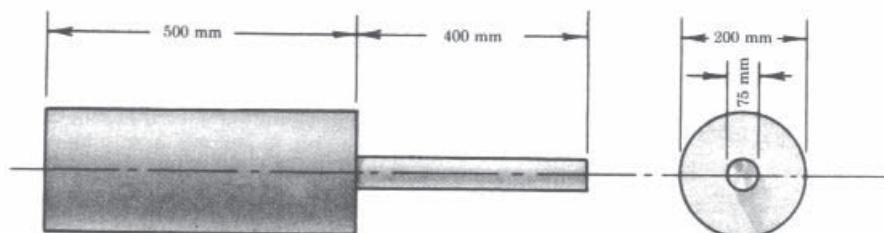


Figura 10.50

- 10.95.** En la Figura 10.51, calcular el área de la superficie generada al girar la semicircunferencia de radio  $r$  alrededor del eje y. Obsérvese que el centroide de la semicircunferencia está a una distancia  $\bar{x} = d + 2r/\pi$ .

Resp.  $S = 2\pi^2rd + 4\pi r^2$

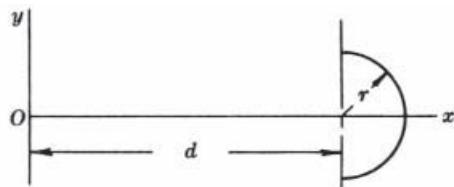


Figura 10.51

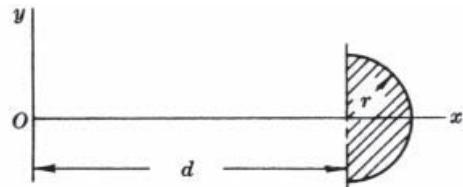


Figura 10.52

- 10.96.** Hallar el volumen que genera un semicírculo de radio  $r$  al girar  $360^\circ$  alrededor del eje  $y$  (Figura 10.52). *Resp.*  $V = \pi^2 r^2 d + \frac{4}{3} \pi r^3$

- 10.97.** Hallar el volumen que genera la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  al girar  $360^\circ$  alrededor de la recta  $x = 2a$ .  
*Resp.*  $V = 4\pi^2 a^2 b$

- 10.98.** La Figura 10.53 muestra el volante de un pequeño compresor. Se supone que la sección recta de la llanta es rectangular, con un canal semicircular de  $\frac{1}{2}$  in de radio. Calcular la distancia desde el centro al centroide de la sección recta AA y emplearla para calcular el volumen de la llanta.  
*Resp.*  $V = 95 \text{ in}^3$

- 10.99.** Un triángulo recto de base  $h$  y altura  $r$  gira  $360^\circ$  alrededor de su base. ¿Qué volumen engendra?  
*Resp.*  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

- 10.100.** En el triángulo ABC de la Figura 10.54

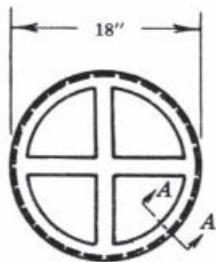


Figura 10.53

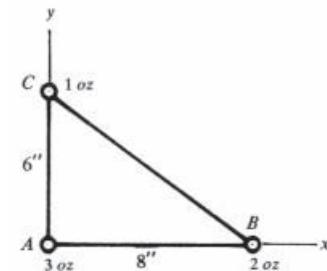
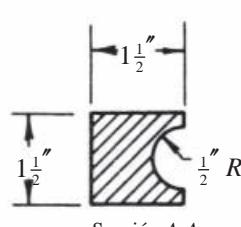


Figura 10.54

- (a) Localizar el centroide de las tres rectas que forman los lados.
- (b) Localizar el centroide del área encerrada
- (c) Se supone que se concentran tres masas de 3, 2 y 1 oz en los puntos A, B y C, respectivamente. Localizar el centro de masas.

*Resp.* (a)  $\bar{x} = 3 \text{ in}$ ,  $\bar{y} = 2 \text{ in}$ ; (b)  $\bar{x} = 2,67 \text{ in}$ ,  $\bar{y} = 3 \text{ in}$ ; (c)  $\bar{x} = 2,67 \text{ in}$ ,  $\bar{y} = 1 \text{ in}$

- 10.101.** Una pared de 6 m de alto está sometida a presión de agua en una de sus caras. Localizar el centro de presión en esa cara. *Resp.* 4 m bajo la superficie

- 10.102.** En el Problema 10.101, ¿cuál es el momento de vuelco respecto a la base del agua en una sección de la pared de 12 m de alto y 1 m de espesor? La densidad del agua es  $1000 \text{ kg/m}^3$ .  
*Resp.*  $4,23 \times 10^6 \text{ m}\cdot\text{N}$  o  $4,23 \text{ m}\cdot\text{MN}$

- 10.103.** Una viga de 12 ft de longitud soporta una carga uniforme de 100 lb por pie lineal en un tramo de 4 ft, medido a partir del extremo izquierdo. A continuación la fuerza crece uniformemente hasta alcanzar un máximo de 300 lb por pie lineal en el extremo derecho. Calcular las reacciones en los extremos. *Resp.*  $R_L = 780 \text{ lb}$ ,  $R_R = 1220 \text{ lb}$

- 10.104.** Una viga soporta una carga uniforme de  $w$  lb/ft en un tercio de su longitud y a continuación la fuerza decrece uniformemente hasta cero en el extremo derecho. ¿Cuál es la fuerza actuante total y cómo se distribuye en los soportes?

Resp.  $P = \frac{2}{3} xl$  lb,  $R_L = \frac{23}{54} wl$  lb,  $R_R = \frac{13}{54} wl$  lb

- 10.105.** En la Figura 10.55, la compuerta  $AB$  de un depósito lleno de agua está inclinada tal como se indica. Su anchura es de 600 mm (perpendicular a la vista). La compuerta está sujetada por un pestillo en  $A$  y bisagras en  $B$ . Calcular (a) la fuerza total perpendicular a la compuerta debida al agua y (b) la fuerza horizontal en el pestillo en  $A$ .

Resp. (a) 11,4 kN, (b) 5,3 kN

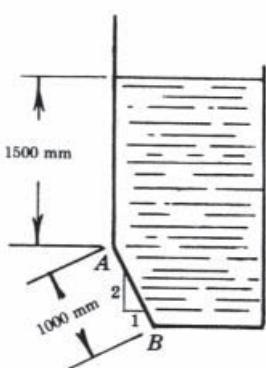


Figura 10.55

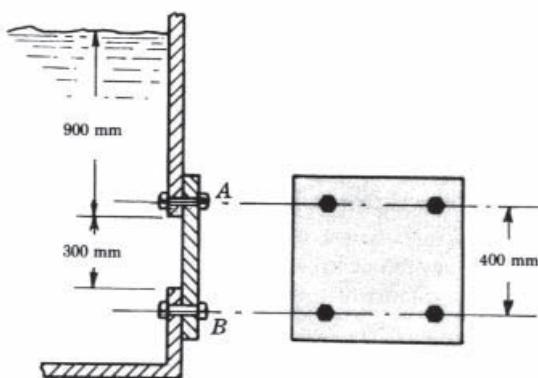


Figura 10.56

- 10.106.** En la Figura 10.56, una placa cubre un orificio de  $300 \text{ mm}^2$  en una pared de un depósito lleno de aceite de  $800 \text{ kg/m}^3$  de densidad. Para sostener la placa se emplean dos tornillos en  $A$  y otros dos en  $B$ . Calcular la fuerza en cada uno de ellos.

Resp. Fuerza de cada tornillo en  $A = 179 \text{ N}$ , en  $B = 192 \text{ N}$

- 10.107.** Se supone que la placa del problema anterior cubre un orificio circular de 300 mm de diámetro. Calcular la fuerza en cada tornillo

Resp. Fuerza de cada tornillo en  $A = 140 \text{ N}$ , en  $B = 150 \text{ N}$

- 10.108.** En la Figura 10.57 se muestra una presa de hormigón. Calcular la reacción del suelo en la base de la presa por pie de longitud. Peso específico del agua =  $62,4 \text{ lb/ft}^3$ , del hormigón =  $150 \text{ lb/ft}^3$ . (Sugerencia: Incluir en el diagrama de cuerpo libre el volumen de agua por encima de la superficie curvada de la presa.)

Resp.  $R_h = 7020 \text{ lb}$ ,  $R_v = 29.000 \text{ lb}$  a  $5,64 \text{ ft}$  a la derecha de  $A$

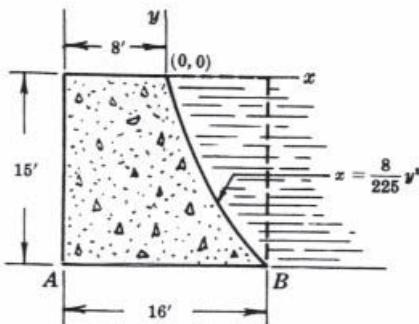


Figura 10.57

- 10.109.** Un canal semicilíndrico de 3 ft de radio está lleno de un líquido de  $100 \text{ lb/ft}^3$ . Una compuerta en el extremo encierra el líquido dentro del canal. Calcular la fuerza resultante en la compuerta y su posición respecto al borde superior

*Resp.*  $F = 1800 \text{ lb}$ ,  $y = 1,77 \text{ ft}$  por debajo del borde superior

- 10.110.** Resolver el problema 10.108 si la superficie de la presa es plana y no parabólica.

*Resp.*  $R_h = 7000 \text{ lb}$ ,  $R_v = 31.000 \text{ lb}$  a 5,92 ft a la derecha de A

- 10.111.** Resolver el problema 10.109 si la sección recta de la presa es un triángulo invertido de 3 ft de altura y 3 ft de base. *Resp.*  $F = 450 \text{ lb}$ ,  $y = 1,5 \text{ ft}$

- 10.112.** En la Figura 10.58 ¿cuál es la altura de la presa y del agua para que el vuelco sea inminente?

*Resp.*  $h = 37,4 \text{ ft}$

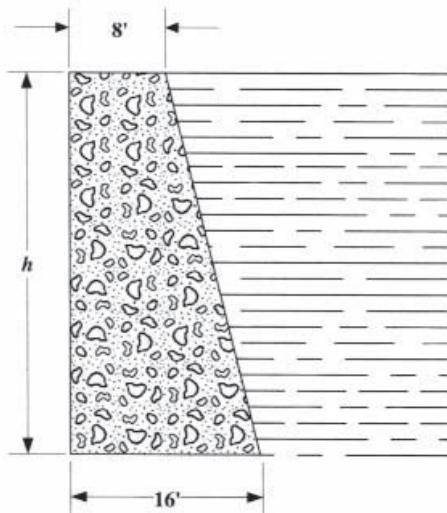


Figura 10.58

# TRABAJOS VIRTUALES

11

## 11.1 DESPLAZAMIENTO VIRTUAL Y TRABAJO VIRTUAL

Por *desplazamiento virtual*  $\delta s$  de una partícula se entiende cualquier variación infinitesimal en su posición compatible con las ligaduras impuestas a la misma. Ese desplazamiento puede ser imaginario; no es necesario que tenga lugar.

El *trabajo virtual*  $\delta U$  efectuado por una fuerza  $F_i$  se define como  $F_i \delta s$ , donde  $F_i$  es la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento  $\delta s$ .

El trabajo virtual  $\delta U$  efectuado por un par de fuerzas de momento  $M$  se define como  $M \delta \theta$ , donde  $\delta \theta$  es el desplazamiento angular (giro) virtual.

## 11.2 EQUILIBRIO

*Equilibrio de una partícula* La condición necesaria y suficiente para el equilibrio de una partícula es que sea nulo el trabajo virtual efectuado por todas las fuerzas que actúan sobre ella durante un desplazamiento virtual cualquiera.

*Equilibrio de un cuerpo rígido* La condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un cuerpo rígido es que sea nulo el trabajo efectuado por todas las fuerzas externas que actúan sobre él durante un desplazamiento virtual cualquiera compatible con los vínculos impuestos al mismo.

*Equilibrio de un sistema de cuerpos rígidos conectados* Se define igual que para un cuerpo rígido. Téngase presente que en un desplazamiento virtual compatible con los vínculos no efectúan trabajo las fuerzas internas, las reacciones en la articulaciones sin rozamiento ni las fuerzas perpendiculares a la dirección del desplazamiento. Las fuerzas externas que si efectúan trabajo (incluidas las de rozamiento si existen) se llaman fuerzas activas o fuerzas aplicadas.

*Equilibrio de un sistema* Existe si la energía potencial  $V^*$  posee un valor estacionario. Así pues, si  $V$  es función de una única variable independiente, tal como  $x$ , la condición  $dV/dx = 0$  da el(los) valor(es) de equilibrio de  $x$ .

## 11.3 EQUILIBRIO ESTABLE

Hay equilibrio estable cuando la energía potencial  $V$  tiene un valor mínimo. Según nos dice la intuición, en la Figura 11.1(a) la cuenta ensartada en el alambre sin rozamiento curvado en forma circular se halla en equilibrio estable cuando está en el punto más bajo, y entonces la energía potencial de la cuenta es mínima pues a cualquier perturbación de la misma le sigue el retorno a la posición más baja. Tomando como referencia el eje  $x$ , la energía potencial de la cuenta para toda posición por debajo del eje  $x$  es

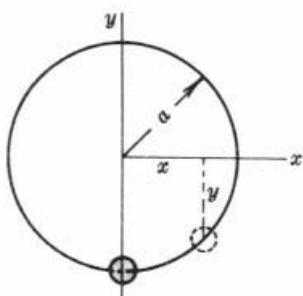
$$V = -Wx = -W\sqrt{a^2 - x^2}$$

Para determinar la posición de equilibrio igualamos  $dV/dx$  a cero:

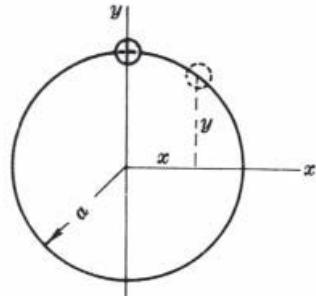
$$\frac{dV}{dx} = +\frac{Wx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$$

\* La energía potencial  $V$  de una masa  $m$  situada a una distancia  $h$  por encima de un plano de referencia (origen) es  $mgh$ . Si  $m$  está por debajo del plano origen,  $V$  es  $-mgh$ .

La energía potencial  $V$  de un muelle de constante  $k$  que se alargue o comprima una longitud  $x$  a partir de su posición no deformada es  $\frac{1}{2}kx^2$ .



(a) Equilibrio estable



(b) Equilibrio inestable

**Figura 11.1**

Por tanto, la solución buscada es  $x = 0$  (la cuenta estará en el punto más bajo). Para determinar el tipo de equilibrio, hay que evaluar  $d^2V/dx^2$  en la posición de equilibrio. Así pues,

$$\frac{d^2V}{dx^2} = +\frac{W}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{Wx^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$$

y para  $x = 0$ , es  $d^2V/dx^2 = +W/a$  (positivo), lo que muestra que el equilibrio es estable.

#### 11.4 EQUILIBRIO INESTABLE

Hay equilibrio inestable cuando la energía potencial  $V$  tiene un valor máximo. Según nos dice la intuición, en la Figura 11.1(b) la cuenta ensartada en el alambre sin rozamiento curvado en forma circular se halla en equilibrio inestable cuando está en el punto más alto, y entonces la energía potencial de la cuenta es máxima. Tomando como referencia el eje  $x$ , la energía potencial de la cuenta para toda posición por encima del eje  $x$  es

$$V = +Wy = +W\sqrt{a^2 - x^2}$$

Para determinar la posición de equilibrio igualamos  $dV/dx$  a cero:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{Wx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$$

Por tanto, la solución buscada es  $x = 0$  (la cuenta estará en el punto más alto). Nótese asimismo que

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{W}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{Wx^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$$

y para  $x = 0$ , es  $d^2V/dx^2 = -W/a$  (negativo), lo que muestra que el equilibrio es inestable.

#### 11.5 EQUILIBRIO NEUTRO

El equilibrio es neutro si el sistema se mantiene invariable en cualquier posición que adopte. Por ejemplo, una cuenta puede situarse en cualquier punto de un alambre horizontal y permanece en ese punto.

#### 11.6 RESUMEN SOBRE EL EQUILIBRIO

Para determinar el(es) valor(es) de la(s) variable(s) para el(es) que un sistema se halla en equilibrio, se expresa la energía potencial  $V$  del sistema en función de la(s) variable(s). En la discusión anterior, la variable era  $x$ . Seguidamente, se hace  $dV/dx = 0$  para hallar los valores de  $x$  correspondientes al equilibrio. Luego, se evalúa  $d^2V/dx^2$  para discriminar el tipo de equilibrio:

$$\frac{d^2V}{dx^2} > 0 \quad \text{equilibrio estable}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} < 0 \quad \text{equilibrio inestable}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0 \quad \text{equilibrio neutro}$$

### Problemas resueltos

- 11.1.** Una escalera de mano homogénea de masa  $M$  y longitud  $l$  se mantiene en equilibrio merced a una fuerza horizontal  $P$ , tal como se muestra en la Figura 11.2. Aplicando el método de los trabajos virtuales, expresar  $P$  en función de  $M$ .

#### SOLUCIÓN

Tomando  $x$  positiva hacia la derecha, el trabajo virtual de  $P$  para un incremento  $\delta x$  es  $-P\delta x$ , ya que  $P$  está dirigida hacia la izquierda.

Tomando  $y$  positiva hacia arriba, el trabajo virtual de la fuerza de la gravedad, que está dirigida hacia abajo, para un incremento  $\delta y$  es  $-Mg \delta y$ .

El trabajo virtual total  $\delta U$  debe ser nulo; por tanto,

$$\delta U = -P \delta x - Mg \delta y = 0 \quad (I)$$

Según la figura,  $x = l \sin \theta$  e  $y = \frac{1}{2}l \cos \theta$ . Entonces,

$$\delta x = l(\cos \theta) \delta \theta \quad y \quad \delta y = -\frac{1}{2}l(\sin \theta) \delta \theta$$

Sustituyendo estos valores en (I), resulta  $P = \frac{1}{2}Mg \operatorname{tg} \theta$ .

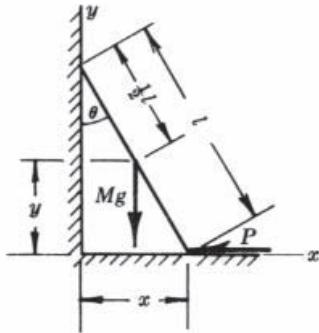


Figura 11.2

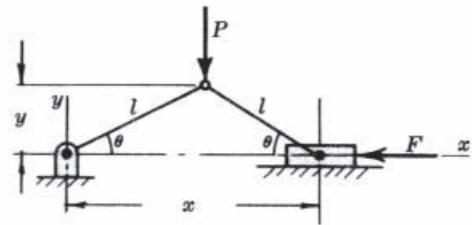


Figura 11.3

- 11.2.** En el mecanismo articulado de la Figura 11.3, expresar la relación entre las fuerzas  $F$  y  $P$  en función del ángulo  $\theta$ .

#### SOLUCIÓN

Tomando  $x$  positiva hacia la derecha, el trabajo virtual de  $F$  para un incremento  $\delta x$  es  $-F \delta x$ , ya que  $F$  está dirigida hacia la izquierda. Tomando  $y$  positiva hacia arriba, el trabajo virtual de  $P$  para un incremento  $\delta y$  es  $-P \delta y$ , ya que  $P$  está dirigida hacia abajo. El trabajo virtual total  $\delta U$  debe ser nulo; por tanto,

$$\delta U = -F \delta x - P \delta y = 0 \quad (I)$$

Según la figura,  $x = 2l \cos \theta$  e  $y = l \sin \theta$ . Entonces,

$$\delta x = -2l(\sin \theta) \delta \theta \quad y \quad \delta y = l(\cos \theta) \delta \theta$$

Sustituyendo estos valores en (I), resulta  $P = 2F \operatorname{tg} \theta$ .

- 11.3.** Por el método de los trabajos virtuales, hallar la relación entre el momento  $M$  aplicado a la manivela  $R$  y la fuerza  $F$  aplicada a la cruceta en el mecanismo de corredera y biela de la Figura 11.4.

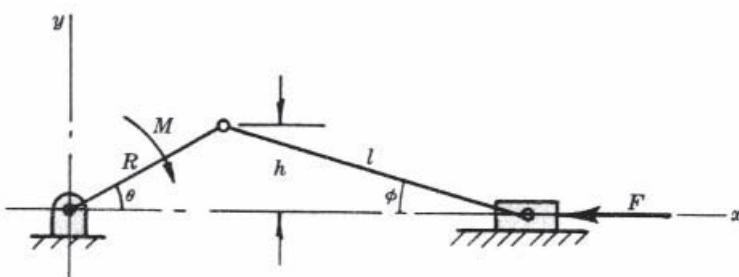


Figura 11.4

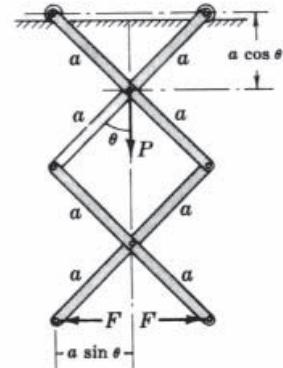


Figura 11.5

### SOLUCIÓN

Tomando  $\theta$  positivo en sentido antihorario, el trabajo virtual de  $M$  para un incremento  $\delta\theta$  es  $M \delta\theta$ . Tomando  $x$  positiva hacia la derecha, el trabajo virtual de  $F$  para un incremento  $\delta x$  es  $-F \delta x$ . El trabajo virtual total  $\delta U$  debe ser nulo; por tanto,

$$\delta U = -M \delta\theta - F \delta x = 0 \quad (I)$$

Pero, según la figura,  $x = R \cos \theta + l \cos \phi$ . Para expresar  $\phi$  en función de  $\theta$ , véase que  $h = R \sen \theta = l \sen \phi$  y, por tanto,

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \sen^2 \phi} = \sqrt{1 - (R/l)^2 \sen^2 \theta}.$$

Introduciendo

$$\delta x = -R(\sen \theta) \delta\theta - \frac{R^2}{l} \frac{\sen \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - (R/l)^2 \sen^2 \theta}} \delta\theta$$

en (I), se obtiene

$$M = FR(\sen \theta) \left[ 1 + \frac{R \cos \theta}{l \sqrt{1 - (R/l)^2 \sen^2 \theta}} \right]$$

- 11.4.** En la Figura 11.5, emplear el método de los trabajos virtuales para hallar el valor de  $F$  que mantiene el sistema articulado en equilibrio bajo la acción de la fuerza  $P$ . Cada biela tiene una longitud  $2a$  y  $\theta = 45^\circ$ .

### SOLUCIÓN

Para el análisis tomamos un ángulo genérico  $\theta$ . Al final le daremos el valor de  $45^\circ$ . Para un incremento  $\delta\theta$  positivo, el punto de aplicación de  $P$  sube y esta fuerza hace un trabajo negativo. El *valor absoluto* de ese incremento infinitesimal es  $|\delta(a \cos \theta)| = a \sen \theta \delta\theta$ . Al mismo tiempo, el trabajo de las fuerzas  $F$  es positivo. El *valor absoluto* del movimiento infinitesimal de cada  $F$  es  $\delta(a \sen \theta) = a \cos \theta \delta\theta$ .

Así pues,  $\delta U = -P(a \sen \theta \delta\theta) + 2F(a \cos \theta \delta\theta) = 0$ .

La solución es  $F = \frac{1}{2}P \operatorname{tg} \theta$ ; para  $\theta = 45^\circ$ ,  $F = 0,5P$ .

- 11.5.** Tres barras homogéneas, de peso 10 lb y 6 ft de largo cada una, se mantienen en la posición de equilibrio que se ilustra en la Figura 11.6 merced a la fuerza horizontal de 15 lb. Hallar los valores de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  en la posición de equilibrio.

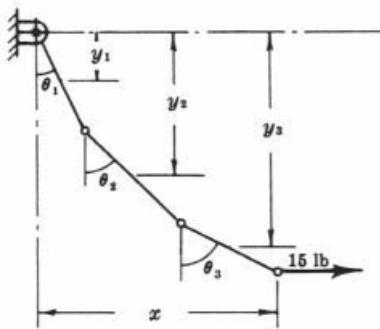
**SOLUCIÓN**

Figura 11.6

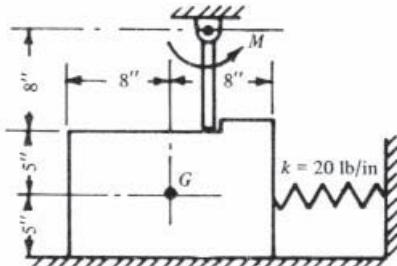


Figura 11.7

Para un incremento  $\delta x$ , el trabajo de la fuerza de 15 lb es positivo. Para cualquier incremento  $\delta y_1$ ,  $\delta y_2$  o  $\delta y_3$ , los trabajos de los pesos de 10 libras son positivos. Por tanto,

$$\delta U = + 15 \delta x + 10 \delta y_1 + 10 \delta y_2 + 10 \delta y_3 = 0$$

Según la figura,

$$x = 6 \operatorname{sen} \theta_1 + 6 \operatorname{sen} \theta_2 + 6 \operatorname{sen} \theta_3$$

$$y = 3 \cos \theta \quad y_2 = 6 \cos \theta_1 + 3 \cos \theta_2 \quad y_3 = 6 \cos \theta_1 + 6 \cos \theta_2 + 3 \cos \theta_3$$

Por tanto,

$$\delta x = 6 \cos \theta_1 \delta \theta_1 + 6 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + 6 \cos \theta_3 \delta \theta_3$$

$$\delta y_1 = -3 \operatorname{sen} \theta_1 \delta \theta_1$$

$$\delta y_2 = -6 \operatorname{sen} \theta_1 \delta \theta_1 - 3 \operatorname{sen} \theta_2 \delta \theta_2$$

$$\delta y_3 = -6 \operatorname{sen} \theta_1 \delta \theta_1 - 6 \operatorname{sen} \theta_2 \delta \theta_2 - 3 \operatorname{sen} \theta_3 \delta \theta_3$$

Sustituyendo,

$$\delta U = + 15 (6 \cos \theta_1 \delta \theta_1 + 6 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + 6 \cos \theta_3 \delta \theta_3)$$

$$- 10 (3 \operatorname{sen} \theta_1 \delta \theta_1) - 10 (6 \operatorname{sen} \theta_1 \delta \theta_1 + 3 \operatorname{sen} \theta_2 \delta \theta_2)$$

$$- 10 (6 \operatorname{sen} \theta_1 \delta \theta_1 + 6 \operatorname{sen} \theta_2 \delta \theta_2 + 3 \operatorname{sen} \theta_3 \delta \theta_3) = 0$$

Para despejar  $\theta_1$ , suponemos que sólo  $\delta \theta_1$  es distinto de cero. Como consecuencia

$$(90 \cos \theta_1 - 30 \operatorname{sen} \theta_1 - 60 \operatorname{sen} \theta_1 - 60 \operatorname{sen} \theta_1) \delta \theta_1 = 0$$

de donde  $\operatorname{tg} \theta_1 = 90/150$ , o sea,  $\theta_1 = 30^\circ 58'$ .

Para despejar  $\theta_2$ , suponemos que sólo  $\delta \theta_2$  es distinto de cero, y así obtenemos

$$(90 \cos \theta_2 - 30 \operatorname{sen} \theta_2 - 60 \operatorname{sen} \theta_2) \delta \theta_2 = 0$$

de donde  $\theta_2 = 45^\circ$ .

Un razonamiento similar da  $(90 \cos \theta_3 - 30 \operatorname{sen} \theta_3) \delta \theta_3 = 0$ , de donde  $\theta_3 = 71^\circ 33'$ .

- 11.6.** El muelle horizontal de la Figura 11.7 está comprimido 5 in en la posición ilustrada. El coeficiente de rozamiento entre el bloque de 100 lb y el plano horizontal es 0,3. Por el método de los trabajos virtuales, hallar el momento  $M$  que debe aplicarse a la barra vertical articulada en su extremo superior al objeto de causar movimiento hacia la derecha.

**SOLUCIÓN**

Supongamos que el bloque se mueve un distancia  $\delta x$  hacia la derecha. El muelle se comprimirá desde 5 in hasta  $5 + \delta x$  in. Ademas, la barra girará un ángulo  $\delta x/8$ . La fuerza normal que el plano ejerce sobre el bloque vale 100 lb y, por tanto, la fuerza de rozamiento vale 30 lb. El trabajo virtual total es la suma del trabajo negativo del rozamiento, el trabajo negativo del muelle y el trabajo positivo del momento. Por tanto,

$$\delta U = -30 \delta x - \frac{1}{2}(20)[(5 + \delta x)^2 - 5^2] + M \frac{\delta x}{8} = 0$$

$$\text{o sea, } -30 \delta x - 10(25 + 10 \delta x + \delta x^2 - 25) + M \frac{\delta x}{8} = 0$$

Como  $\delta x$  es un infinitésimo, despreciamos  $\delta x^2$ , y la expresión queda

$$-30 \delta x - 100 \delta x + M \frac{\delta x}{8} = 0$$

Por tanto,  $M = 1040 \text{ lb}\cdot\text{in}$ .

- 11.7.** En la Figura 11.8(a), aplicar el principio de los trabajos virtuales para hallar las componentes de las reacciones en las articulaciones  $A$  y  $B$ . No hay rozamientos. La fuerza aplicada en  $E$  es horizontal.

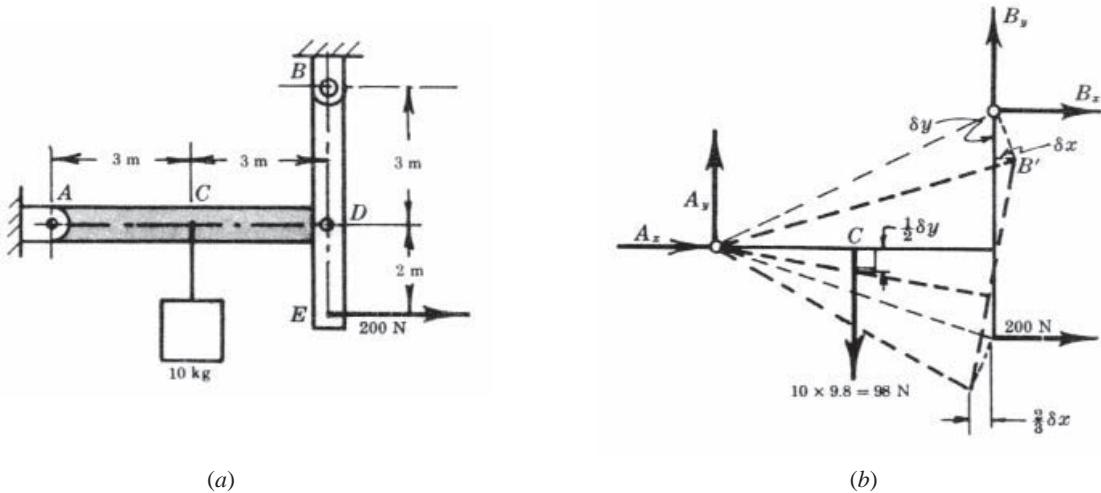


Figura 11.8

### SOLUCIÓN

La Figura 11.8(b) es el diagrama de cuerpo libre con el pasador  $B$  eliminado y el sistema sometido a un giro virtual  $\delta\theta$  en torno al pasador  $A$ . El desplazamiento virtual de  $B$  a  $B'$  puede considerarse compuesto de un desplazamiento  $\delta y$ , hacia abajo, y un desplazamiento virtual  $\delta x$ , hacia la derecha. Para el pequeño giro considerado, todos los puntos del miembro  $BDE$  descenden una distancia  $\delta y$ ; por tanto, el desplazamiento del punto  $C$  es la mitad que el del punto  $D$ . Como la barra  $BDE$  rota un ángulo  $\delta\theta$ , el punto  $E$  sufre un desplazamiento horizontal que es dos tercios el del punto  $B$  ( $\frac{2}{3} \delta x$ ). Las reacciones en la articulación  $A$  no trabajan. El trabajo virtual es

$$\delta U = +98(\frac{1}{2} \delta y) - B_y \delta y + B_x \delta x - 200(\frac{2}{3} \delta x) = 0$$

$$\text{o bien, } \delta U = (49 - B_y) \delta y + (B_x - 133) \delta x = 0$$

Ahora bien, como  $\delta x$  y  $\delta y$  son desplazamientos virtuales arbitrarios y completamente independientes, para que  $\delta U$  sea nulo son condiciones necesarias y suficientes que

$$49 - B_y = 0 \quad \text{y} \quad B_x - 133 = 0$$

De aquí,  $B_x = 49 \text{ N} (\uparrow)$  y  $B_y = 133 \text{ N} (\rightarrow)$ .

Las ecuaciones de equilibrio pueden aplicarse así:

$$\sum F_x = A_x + B_x + 200 = 0 \quad \text{o sea, } A_x = 333 \text{ N} (\leftarrow)$$

$$\sum F_y = A_y - 98 + B_y = 0 \quad \text{o sea, } A_y = 49 \text{ N} (\uparrow)$$

De no aplicar el método de los trabajos virtuales, habría sido necesario utilizar los diagramas de cuerpo libre de las distintas partes en que puede descomponerse el sistema.

- 11.8.** Dos pesos  $W$  y  $w$  están sujetos como se muestra en la Figura 11.9 a una barra de peso despreciable pivotada en torno a un eje que pasa por  $O$  y es perpendicular al plano del papel. Analizar el equilibrio.

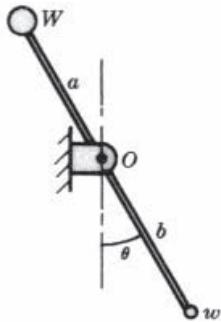


Figura 11.9

**ANÁLISIS**

Como posición de referencia tomamos la correspondiente a  $\theta = 0^\circ$ . Así, para un ángulo  $\theta$ ,  $W$  ha perdido una energía potencial  $Wa(1 - \cos \theta)$  y  $w$  ha ganado una energía potencial  $wa(1 - \cos \theta)$ . La energía potencial total  $V$  del sistema para un ángulo  $\theta$  es

$$V = -Wa(1 - \cos \theta) + wa(1 - \cos \theta)$$

Para estudiar el equilibrio, hacemos  $dV/dt = 0$ :

$$\frac{dV}{d\theta} = -Wa \operatorname{sen} \theta + wb \operatorname{sen} \theta = 0$$

Esta condición se cumple si  $\operatorname{sen} \theta = 0$  ( $\theta = 0^\circ$ ), o bien si  $wb = Wa$  ( $\theta$  puede tener cualquier valor).

Para discutir la estabilidad, derivamos otra vez:  $d^2V/d\theta^2 = -Wa \operatorname{cos} \theta + wb \operatorname{cos} \theta$ . Para  $\theta = 0^\circ$ ,  $d^2V/d\theta^2 = -Wa + wb$ . Para que el equilibrio sea estable, ese valor debe ser positivo, o sea,  $wb > Wa$ . El otro estado de equilibrio se da cuando  $wb = Wa$ , es decir, cuando  $d^2V/d\theta^2 = 0$ , que significa equilibrio neutro.

En resumen, si  $wb > Wa$ , el sistema se encuentra en equilibrio estable cuando  $\theta = 0^\circ$ . Si  $wb = Wa$ , el sistema permanece en equilibrio en cualquier posición que adopte.

- 11.9.** En la Figura 11.10, una barra uniforme de longitud  $l$  y peso  $W$  se mantiene en equilibrio mediante un muelle de constante  $k$ . Cuando  $\theta = 0^\circ$ , el muelle no está deformado. Analizar el equilibrio.

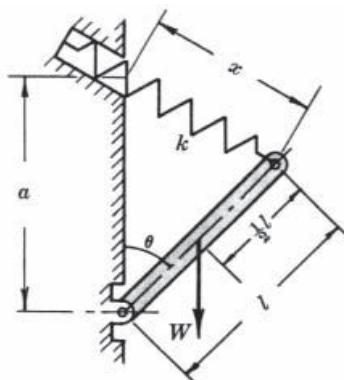


Figura 11.10

**ANÁLISIS**

Tomando como referencia la posición  $\theta = 0^\circ$ , para un ángulo  $\theta$  la barra ha perdido una energía potencial que vale  $\frac{1}{2}wl(1 - \cos \theta)$  y el muelle ha adquirido una energía potencial que vale  $\frac{1}{2}kx^2$ . Por geometría,  $x^2 = a^2 + l^2 - 2al \cos \theta$ . Por tanto, para un ángulo  $\theta$ , la energía potencial del sistema es

$$V = -\frac{1}{2}Wl(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}k(a^2 + l^2 - 2al \cos \theta)$$

$$y \quad \frac{dV}{d\theta} = -\frac{1}{2}Wl \operatorname{sen} \theta + kal \operatorname{sen} \theta$$

que se hace cero para  $\operatorname{sen} \theta = 0$  ( $\theta = 0^\circ$ ) o para  $k = \frac{1}{2}W/a$ .

Ahora derivamos otra vez:  $d^2V/d\theta^2 = -\frac{1}{2}Wl \cos \theta + kal \cos \theta$ . Para  $\theta = 0^\circ$ ,  $d^2V/d\theta^2 = -\frac{1}{2}Wl + kal$ , cantidad que es positiva si  $k > \frac{1}{2}W/a$ . Para cualquier otro ángulo,  $d^2V/d\theta^2$  es cero si  $k = \frac{1}{2}W/a$ .

En conclusión, si  $k = \frac{1}{2}W/a$ , el sistema permanece en equilibrio en cualquier posición que adopte.

- 11.10.** En la Figura 11.11, dos engranajes iguales giran sobre ejes sin rozamiento. Una barra sin peso de 2 ft de longitud, rígidamente unida a uno de ellos, sostiene el peso de 20 lb. El otro engranaje está conectado al muelle vertical de constante  $k = 12 \text{ lb/in}$ . Determinar el(s) ángulo(s) de equilibrio.

#### SOLUCIÓN

Tomando como referencia la posición  $\theta = 0^\circ$  con el muelle sin deformar, para un ángulo  $\theta$  el peso pierde una energía potencial que vale  $Wl(1 - \cos \theta)$  y el muelle gana una energía potencial que vale  $\frac{1}{2}k(r\theta)^2$ . La energía potencial total del sistema es

$$V = -Wl(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}kr^2\theta^2$$

Entonces,

$$\frac{dV}{d\theta} = -Wl \operatorname{sen} \theta + kr^2\theta \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} = -Wl \cos \theta + kr^2$$

La primera derivada es cero si  $\theta = 0^\circ$ , o si  $\operatorname{sen} \theta = (kr^2/Wl)\theta$ .

Para  $\theta = 0^\circ$ ,  $d^2V/d\theta^2 = -Wl + kr^2 = -20(2) + (144)(\frac{1}{2})^2 = -4$  (no estable).

El otro ángulo de equilibrio se obtiene de

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{kr^2}{Wl}\theta = \frac{44(\frac{1}{2})^2}{20(2)}\theta = 0,9\theta$$

ecuación que, resuelta por tanteo, nos da  $\theta = 44,1^\circ$ . En este caso,  $d^2V/d\theta^2 = -20(2) \cos 44,1^\circ + 36 = +7,2$ , lo que indica equilibrio estable.

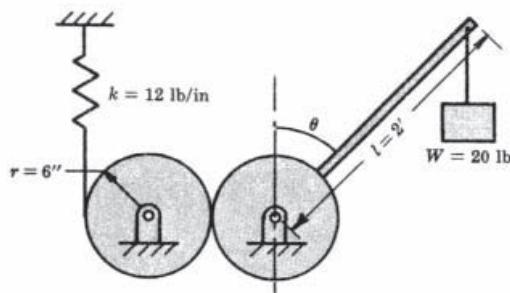


Figura 11.11

- 11.11.** Una cuerda uniforme de masa  $M$  se coloca sobre una esfera de radio  $r$ , tal como se muestra en la Figura 11.12. Calcular la tensión  $T$  en ella cuando se encuentra en un plano horizontal situado a una distancia vertical  $b$  por debajo del vértice. Aplicar el método de los trabajos virtuales.

#### SOLUCIÓN

La cuerda está a una altura  $y$  por encima del plano  $xz$ . Su longitud es  $l = 2\pi x = 2\pi\sqrt{r^2 - y^2}$ .

Si la cuerda sufre un desplazamiento virtual  $\delta y$  hacia abajo, el trabajo virtual efectuado es

$$\delta U = +Mg \delta y + T \delta l = 0$$

Sustituyendo

$$\delta l = \frac{2\pi(\frac{1}{2})(-2y \delta y)}{(r^2 - y^2)^{1/2}} = \frac{-2\pi y \delta y}{(2br - b^2)^{1/2}}$$

resulta

$$T = \frac{Mg(2br - b^2)^{1/2}}{2\pi(r - b)}$$

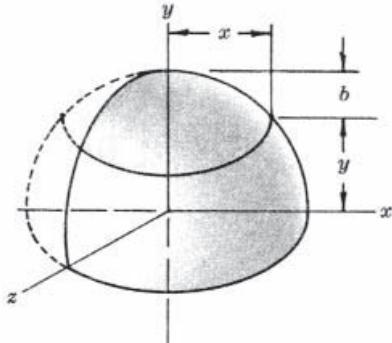


Figura 11.12

### Problemas propuestos

- 11.12.** En la Figura 11.13, aplicar el método de los trabajos virtuales para calcular la fuerza en el travieso horizontal en función de la carga  $P$  y el ángulo  $\theta$ . *Resp.*  $T = \frac{3}{4}P \operatorname{tg} \theta$

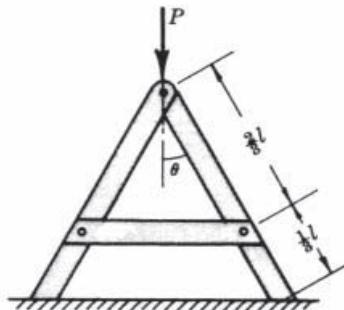


Figura 11.13

- 11.13.** En la Figura 11.14, las masas  $M_1$  y  $M_2$  se mantienen contra los planos ortogonales lisos mediante la barra inextensible rígida de longitud  $l$ . Calcular el ángulo de equilibrio  $\theta$ .  
*Resp.*  $\operatorname{tg} \theta = (M_2/M_1) \cos \theta_1$

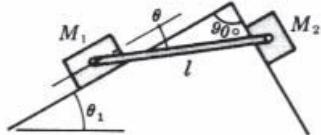


Figura 11.14

- 11.14.** En la Figura 11.15, por el método de los trabajos virtuales, calcular la fuerza  $F$  necesaria para mantener en equilibrio la masa  $M$ .

*Resp.*  $P = \frac{1}{2}Mg$

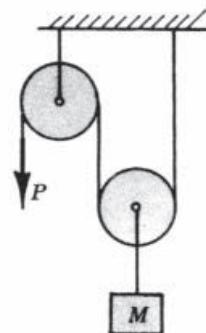


Figura 11.15

- 11.15.** En la Figura 11.16, las barras  $AB$ ,  $AC$ ,  $HK$  y  $KI$  tienen una longitud  $a$ . La longitud de las demás es  $2a$ . Las barras están articuladas mediante pasadores sin rozamiento. Por el método de los trabajos virtuales, hallar la relación entre  $P$  y  $Q$ .

Resp.  $Q = 4P$

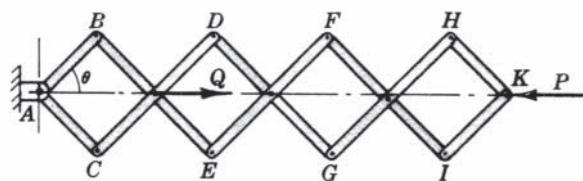


Figura 11.16

- 11.16.** En la Figura 11.17, el extremo libre  $A$  del muelle se alarga 2 in desde la posición no deformada. El extremo  $B$  se alarga 4 in desde la posición no deformada. Si es  $k = 10 \text{ lb/in}$  la constante del muelle, calcular el trabajo efectuado contra la fuerza del muelle al llevar el extremo libre de  $A$  a  $B$ .

Resp.  $U = 60 \text{ in}\cdot\text{lb}$

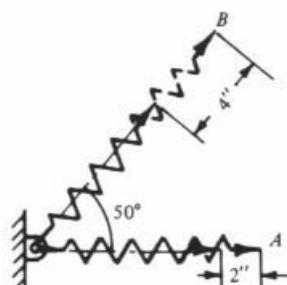


Figura 11.17

- 11.17.** Una cadena de peso  $W$  se coloca sobre un cono circular recto de altura  $h$  y radio de la base  $r$ . Calcular la tensión  $T$  en ella cuando se encuentra en un plano horizontal situado a una distancia vertical  $b$  por debajo del vértice. Resp.  $T = Wh/2\pi r$

- 11.18.** Las dos masas  $m$  y  $M$  están unidas por un hilo inextensible sin peso, tal como se muestra en la Figura 11.18, sobre la superficie cilíndrica lisa. Si el ángulo entre los respectivos radios es  $90^\circ$ , hallar el ángulo  $\theta$  en el equilibrio. ¿Es estable el equilibrio?

Resp.  $\tan \theta = m/M$ ; no

- 11.19.** Supóngase que las masas del problema anterior están conectadas como se ilustra en la Figura 11.19. Hallar el ángulo  $\theta$  en el equilibrio. ¿Qué tipo de equilibrio es?

Resp.  $\sin \theta = m/M$ , inestable

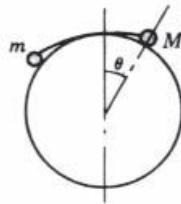


Figura 11.18

- 11.20.** En la Figura 11.20, la escalera de mano homogénea de 20 lb descansa sobre superficies lisas. El muelle está sin deformar cuando  $\theta = 0^\circ$ . Estudiar las condiciones de equilibrio si la constante del muelle es  $k = 50 \text{ lb/ft}$ .

*Resp.*  $\theta = 0^\circ$ , equilibrio estable;  $\theta = 27,2^\circ$ , equilibrio inestable

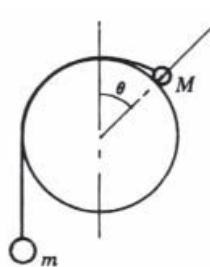


Figura 11.19

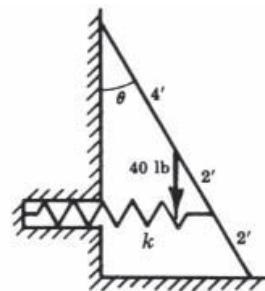


Figura 11.20

- 11.21.** En la Figura 11.21 se representa una balanza de Roberval en la cual  $r_2 > r_1$  y se desprecian los pesos de los componentes. ¿Cuál es la relación entre  $R_1$  y  $R_2$  para que haya equilibrio?

*Resp.*  $R_1 = R_2$

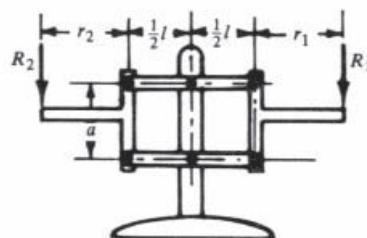


Figura 11.21

- 11.22.** Hallar el ángulo  $\theta$  en el equilibrio del sistema de tres barras articuladas de la Figura 11.22. ¿Qué tipo de equilibrio corresponde a ese ángulo?

*Resp.*  $\theta = 7,59^\circ$ , inestable

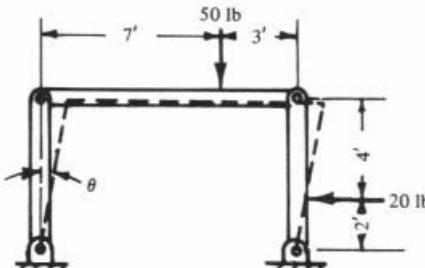


Figura 11.22

- 11.23.** La barra de la Figura 11.23 es homogénea de masa 50 kg y longitud 3 m. ¿Qué valores de la constante  $k$  aseguran un equilibrio estable? En la Figura 11.23, el muelle está sin deformar.  
Resp.  $k > 81,7 \text{ N/m}$

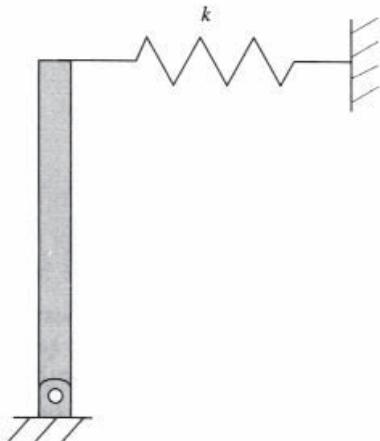


Figura 11.23

# CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

# 12

## 12.1 CINEMÁTICA

La cinemática es el estudio del movimiento independientemente de las fuerzas o de otros factores que influyan en él.

## 12.2 MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Movimiento rectilíneo es el que ejecuta un punto  $P$  al recorrer una línea recta, que por comodidad hacemos aquí coincidir con el eje  $x$ . En esta sección no se emplean símbolos vectoriales.

- (a) La *posición* del punto  $P$  en un instante cualquiera  $t$  se expresa en función de su distancia  $x$  a un origen fijo  $O$  situado en el eje  $x$ . Esa distancia  $x$  es positiva o negativa según el convenio de signos habitual.
- (b) La *velocidad media*  $v_{\text{med}}$  del punto  $P$  durante el intervalo de tiempo de  $t$  a  $t + \Delta t$ , en que su posición pasa de  $x$  a  $x + \Delta x$ , es el cociente  $\Delta x / \Delta t$ . Matemáticamente se expresa

$$v_{\text{med}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1)$$

- (c) La *velocidad instantánea*  $v$  del punto  $P$  en el instante  $t$  es el límite al que tiende la velocidad media cuando el incremento de tiempo tiende a cero. Matemáticamente se expresa

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2)$$

- (d) La *aceleración media*  $a_{\text{med}}$  del punto  $P$  durante el intervalo de tiempo de  $t$  a  $t + \Delta t$ , en que su velocidad varía de  $v$  a  $v + \Delta v$ , es el cociente  $\Delta v / \Delta t$ . Matemáticamente se expresa

$$a_{\text{med}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (3)$$

- (e) La *aceleración instantánea*  $a$  del punto  $P$  en el instante  $t$  es el límite al que tiende la aceleración media cuando el incremento de tiempo tiende a cero. Matemáticamente se expresa

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (4)$$

Asimismo,

$$a = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

- (f) Cuando la *aceleración* es constante,  $a = k$ , se cumplen las siguientes relaciones:

$$v = v_0 + kt \quad (5)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ks \quad (6)$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} k t^2 \quad (7)$$

$$s = \frac{1}{2}(v + v_0)t \quad (8)$$

donde       $v_0$  = velocidad inicial  
 $v$  = velocidad final  
 $k$  = aceleración constante  
 $t$  = tiempo  
 $s$  = desplazamiento

- (g) Un *movimiento armónico simple* es un movimiento rectilíneo cuya aceleración es proporcional y de sentido contrario al desplazamiento. Matemáticamente se expresa

$$a = -K^2x \quad (9)$$

Como ejemplo, la ecuación (9) la satisface un punto que vibra de modo que su desplazamiento  $x$  está dado por

$$x = b \operatorname{sen} \omega t \quad (10)$$

donde       $b$  = amplitud, en unidades lineales  
 $\omega$  = pulsación, en radianes por segundo  
 $t$  = tiempo, en segundos

Así pues, como  $x = b \operatorname{sen} \omega t$ , será  $v = dx/dt = \omega b \cos \omega t$  y  $a = d^2x/dt^2 = -\omega^2 b \operatorname{sen} \omega t = -\omega^2 x$ . Es decir,  $a = -K^2x$ , donde  $K = \omega$ , constante, y el movimiento es armónico simple.

### 12.3 MOVIMIENTO CURVILÍNEO

Movimiento curvilíneo plano es el que se ejecuta siguiendo una curva plana (la trayectoria). La velocidad y la aceleración de un punto que recorre esa curva pueden expresarse en (a) componentes rectangulares, (b) componentes tangencial y normal y (c) componentes radial y transversal.

### 12.4 COMPONENTES RECTANGULARES

El vector de posición  $\mathbf{r}$  de un punto  $P$  que recorre una curva plana se escribe como sigue, en función de los vectores unitarios  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  de los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

Cuando  $P$  se mueve,  $\mathbf{r}$  varía y la velocidad  $\mathbf{v}$  puede expresarse

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

Empleando la notación  $dx/dt = \dot{x}$ ,  $dy/dt = \dot{y}$  y  $d\mathbf{r}/dt = \dot{\mathbf{r}}$ , tenemos

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} \quad (II)$$

La *celeridad* del punto es el módulo de su velocidad  $\mathbf{v}$ ; es decir,

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Si es  $\theta$  el ángulo que el vector  $\mathbf{v}$  forma con el eje  $x$  podemos escribir

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \operatorname{arctg} \frac{dy/dt}{dx/dt} = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx}$$

Así pues, la velocidad es un vector  $\mathbf{v}$  tangente a la trayectoria en el punto  $P$  (Figura 12.1).

La aceleración es un vector  $\mathbf{a}$  que es igual a la variación de  $\mathbf{v}$  por unidad de tiempo; es decir,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}$$

Empleando la notación  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$ ,  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$  y  $\ddot{y} = d^2y/dt^2$ , podemos escribir

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} \quad (12)$$

El módulo del vector aceleración  $\mathbf{a}$  es

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

No debe caerse en el error de suponer que  $\mathbf{a}$  es tangente a la trayectoria en el punto  $P$ .

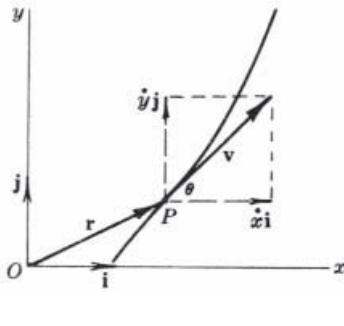


Figura 12.1

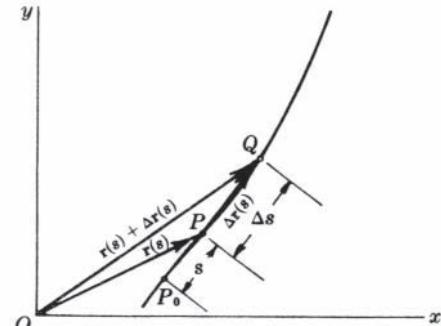


Figura 12.2

## 12.5 COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL

En la sección precedente la velocidad  $\mathbf{v}$  y la aceleración  $\mathbf{a}$  se expresaron en función de los vectores unitarios ortogonales  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  según los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente. A continuación, se expone cómo expresar  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{a}$  en función de los vectores unitarios  $\mathbf{e}_t$ , tangente a la trayectoria en el punto  $P$ , y  $\mathbf{e}_n$ , perpendicular a  $\mathbf{e}_t$ .

En la Figura 12.2, el punto  $P$  se encuentra a una distancia  $s$  de un punto de referencia  $P_0$  medida a lo largo de la curva. El vector  $\mathbf{r}$  de posición de  $P$  es función del escalar  $s$ . Para estudiar esa relación, consideremos un punto  $Q$  de la curva muy próximo a  $P$ .

En la figura se representan los vectores de posición  $\mathbf{r}(s)$  y  $\mathbf{r}(s + \Delta s)$  de los puntos  $P$  y  $Q$ , respectivamente, así como la variación  $\Delta\mathbf{r}(s)$ , que es el segmento rectilíneo dirigido  $PQ$ . La distancia de  $P$  a  $Q$  a lo largo de la curva es  $\Delta s$ . La derivada de  $\mathbf{r}(s)$  respecto a  $s$  se escribe

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}(s)}{\Delta s}$$

Cuando  $Q$  tiende a  $P$ , el cociente de la longitud del segmento rectilíneo  $\Delta\mathbf{r}(s)$  entre la longitud de arco  $\Delta s$  tiende a la unidad. Además, la dirección del segmento rectilíneo  $\Delta\mathbf{r}(s)$  tiende a coincidir con la de la tangente en  $P$  a la trayectoria. Así pues, en el límite, queda definido como sigue un vector unitario  $\mathbf{e}_t$ :

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \mathbf{e}_t \quad (13)$$

Consideremos ahora la variación de  $\mathbf{e}_t$  en función de  $s$ . Tal como se ilustra en la Figura 12.3(a), el centro de curvatura  $C$  se encuentra a una distancia  $\rho$  del punto  $P$ .

Suponiendo  $Q$  muy próximo a  $P$ , los vectores unitarios tangentes en  $P$  y  $Q$  son, respectivamente,  $\mathbf{e}_t$  y  $\mathbf{e}_t + \Delta\mathbf{e}_t$ . Como las tangentes en  $P$  y  $Q$  son tangentes a los correspondientes radios de curvatura, que forman un ángulo  $\Delta\theta$ , el ángulo que forman  $\mathbf{e}_t$  y  $\mathbf{e}_t + \Delta\mathbf{e}_t$  es también  $\Delta\theta$ , tal como se muestra en la Figura 12.3(b). Como  $\mathbf{e}_t$  y  $\mathbf{e}_t + \Delta\mathbf{e}_t$  son los dos unitarios,  $\Delta\mathbf{e}_t$  representa únicamente una variación de dirección (pero no de módulo). Así pues, el triángulo de la Figura 12.3(b) es isósceles y en la Figura 12.3(c) se representa a mayor escala. En la Figura 12.3(c) es evidente que

$$\frac{|\frac{1}{2}\Delta\mathbf{e}_t|}{1} = \sin \frac{1}{2}\Delta\theta \approx \frac{1}{2}\Delta\theta \quad \text{o sea,} \quad |\Delta\mathbf{e}_t| \approx \Delta\theta$$

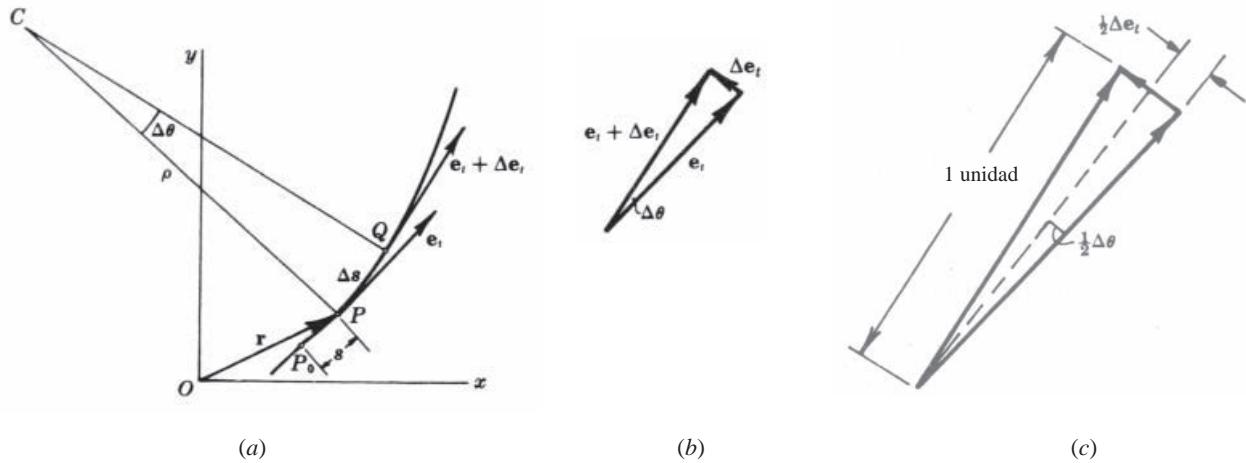


Figura 12.3

Pero según la Figura 12.3(a),  $\Delta s = \rho \Delta\theta$ ; por tanto, podemos escribir  $\Delta s \approx \rho |\Delta e_t|$ . Así pues,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta e_t|}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}$$

Además, en el límite,  $\Delta e_t$  es perpendicular a  $e_t$ , y está dirigido hacia el centro de curvatura  $C$ . Sea  $e_n$  el vector unitario perpendicular a  $e_t$  dirigido hacia el centro de curvatura  $C$ . Entonces,

$$\frac{de_t}{ds} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta e_t|}{\Delta s} e_n = \frac{1}{\rho} e_n \quad (14)$$

Podemos ahora expresar la velocidad  $\mathbf{v}$  en función de los vectores  $e_t$  y  $e_n$ . Teniendo en cuenta (13) y también que  $ds/dt = \dot{s}$  es la celeridad de  $P$  en su trayectoria, podemos escribir

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} e_t \quad (15)$$

La aceleración  $\mathbf{a}$  es la derivada respecto al tiempo de la velocidad  $\mathbf{v}$  definida en (15):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{s} e_t + \dot{s} \frac{de_t}{dt}$$

Pero,

$$\frac{de_t}{dt} = \frac{de_t}{ds} \frac{ds}{dt}$$

y, según (14), esta última igualdad puede escribirse

$$\frac{de_t}{dt} = \frac{\dot{s}}{\rho} e_n$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{a} = \ddot{s} e_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} e_n \quad (16)$$

Adviértase que  $s$  es la variación por unidad de tiempo de la celeridad del punto.

## 12.6 COMPONENTES RADIAL Y TRANSVERSAL

El punto  $P$  que ocupa la partícula en la curva puede ubicarse mediante coordenadas polares con referencia a cualquier punto que se tome como polo. Este, en la Figura 12.4, es el punto  $O$ . Las coordenadas polares son útiles para estudiar el movimiento de los planetas y otros problemas de fuerzas centrales. Ahora debemos expresar la

velocidad  $\mathbf{v}$  y la aceleración  $\mathbf{a}$  en función de los vectores unitarios en la dirección del radio vector y en la dirección perpendicular al radio vector. Téngase en cuenta que el número de díadas de vectores unitarios es infinito puesto que es posible tomar como polo cualquier punto.

El radio vector  $\mathbf{r}$  forma un ángulo  $\phi$  con el eje  $x$ . El vector unitario  $\mathbf{e}_r$  se toma sobre  $\mathbf{r}$  en sentido hacia afuera. El vector unitario  $\mathbf{e}_\phi$  es perpendicular a  $\mathbf{r}$  en el sentido en que  $\phi$  aumenta.

Como el vector  $\mathbf{r}$  tiene un módulo  $r$  en la dirección de  $\mathbf{e}_r$ , podemos escribir

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \quad (17)$$

La velocidad  $\mathbf{v}$  es la derivada respecto al tiempo de esta igualdad (17):

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r$$

donde  $\dot{\mathbf{e}}_r = d\mathbf{e}_r / dt$ .

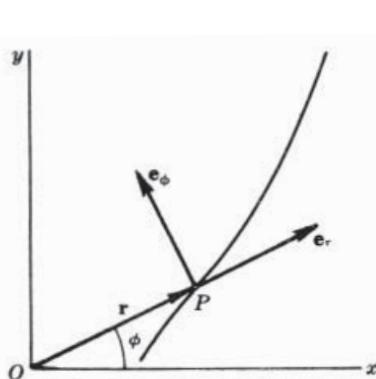
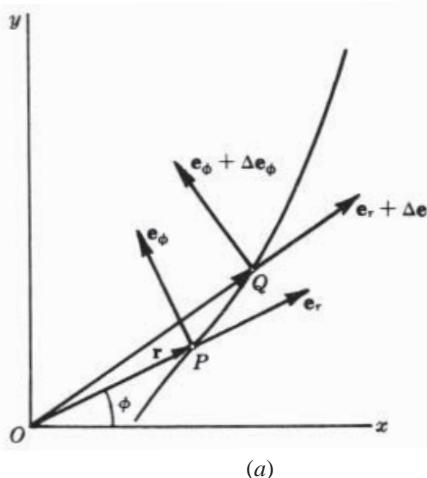
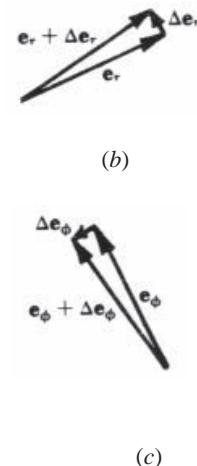


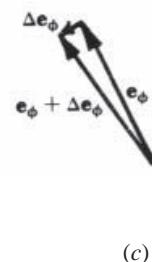
Figura 12.4



(a)



(b)



(c)

Figura 12.5

Para calcular  $\dot{\mathbf{e}}_r$  y  $\dot{\mathbf{e}}_\phi$ , hacemos que  $P$  se desplace hasta un punto  $Q$  muy próximo, al que corresponden los vectores  $\mathbf{e}_r + \Delta\mathbf{e}_r$  y  $\mathbf{e}_\phi + \Delta\mathbf{e}_\phi$ , tal como se muestra en la Figura 12.5(a).

En las Figuras 12.5(b) y (c) se ilustran esos vectores unitarios. Como los triángulos son isósceles, podemos llegar a las conclusiones siguientes razonando de modo similar que respecto a  $\mathbf{e}_r$  y  $\mathbf{e}_\phi$ :  $d\mathbf{e}_r$  tiene en el límite un módulo  $d\phi$  en la dirección de  $\mathbf{e}_\phi$ , y  $d\mathbf{e}_\phi$  tiene en el límite un módulo  $d\phi$  en el sentido contrario a  $\mathbf{e}_r$ . Por tanto,

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{e}}_\phi = \frac{d\mathbf{e}_\phi}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = -\dot{\phi}\mathbf{e}_r$$

donde  $\dot{\phi}$  es la variación por unidad de tiempo del ángulo  $\phi$  que el radio vector  $\mathbf{r}$  forma con el eje  $x$ .

Ahora podemos escribir el vector velocidad como

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \quad (18)$$

Derivando respecto al tiempo esta igualdad (18), se obtiene la aceleración  $\mathbf{a}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\phi\mathbf{e}_\phi + r\ddot{\phi}\mathbf{e}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\mathbf{e}}_\phi \\ &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{r}\phi\mathbf{e}_\phi + r\ddot{\phi}\mathbf{e}_\phi - r\dot{\phi}^2\mathbf{e}_r \end{aligned}$$

donde  $\ddot{\phi}$  es la aceleración angular (derivada respecto al tiempo de la velocidad angular  $\dot{\phi}$ ). Agrupando términos, la expresión anterior queda

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\mathbf{e}_\phi \quad (19)$$

Como caso particular de movimiento curvilíneo, consideremos un punto que describe una trayectoria circular de radio  $R$ . Sustituyendo  $r$  por  $R$  en (18) y (19), y teniendo en cuenta que  $\dot{R} = \ddot{R} = 0$ , obtenemos

$$\mathbf{v} = R\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \quad (\text{tangente a la trayectoria}) \quad (20)$$

$$\mathbf{a} = -R\dot{\phi}^2\mathbf{e}_r + R\ddot{\phi}\mathbf{e}_\phi \quad (21)$$

Así pues, la aceleración tiene una componente tangencial de módulo  $R\ddot{\phi}$  y una componente normal dirigida hacia el centro de módulo  $R\dot{\phi}^2$ .

## 12.7 UNIDADES

En la exposición anterior las unidades se han omitido de propósito. En la tabla siguiente se reúnen las unidades del Sistema Tradicional de EE. UU. y del SI.

Símbolo	EE. UU.	SI
$s, \rho, R, x, y$	ft	m
$v, \dot{x}, \dot{y}, \dot{s}$	ft/s o fps	m/s
$a, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{s}$	ft/s <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>
$\theta, \phi$	radianes (rad)	radianes (rad)
$\omega, \dot{\theta}, \ddot{\phi}$	rad/s	rad/s
$\alpha, \ddot{\theta}, \ddot{\phi}$	rad/s <sup>2</sup>	rad/s <sup>2</sup>

### Problemas resueltos

- 12.1.** Un automóvil cohete se mueve por una pista recta según la ecuación  $x = 3t^2 + t + 2$ , donde  $x$  está en pies y  $t$  está en segundos. Hallar el desplazamiento, la velocidad, y la aceleración en el instante  $t = 4$  s.

#### SOLUCIÓN

$$x = 3t^3 + t + 2 = 3(4)^3 + 4 + 2 = 198 \text{ ft}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 9t^2 + 1 = 9(4)^2 + 1 = 145 \text{ ft/s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 18t = 18(4) = 72 \text{ ft/s}^2$$

- 12.2.** En el Problema 12.1, ¿cuál es la aceleración media durante el quinto segundo?

#### SOLUCIÓN

La velocidad al final del quinto segundo es  $v = 9(5)^2 + 1 = 226$  ft/s. Por tanto, la variación de velocidad durante el quinto segundo es  $226 \text{ ft/s} - 145 \text{ ft/s} = 81 \text{ ft/s}$ .

La aceleración media es

$$a_{\text{med}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{81 \text{ ft/s}}{1 \text{ s}} = 81 \text{ ft/s}^2$$

- 12.3.** Un punto se mueve en línea recta de tal modo que su desplazamiento es  $s = 8t^2 + 2t$ , donde  $s$  está en metros y  $t$  está en segundos. Representar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración en función del tiempo. Estos se denominan diagramas  $s-t$ ,  $v-t$  y  $a-t$ .

**SOLUCIÓN**

Derivando  $s = 8t^2 + 2t$ , resulta  $v = ds/dt = 16t + 2$  y  $a = dv/dt = d^2s/dt^2 = 16$ .

Vemos que la aceleración es constante,  $16 \text{ m/s}^2$ .

Para hallar los valores necesarios para la representación gráfica, construimos la tabla siguiente, donde  $t$  está en segundos,  $s$  está metros y  $v$  está en metros por segundo.

$t$	$t^2$	$8t^2$	$2t$	$s = 8t^2 + 2t$	$16t$	$v = 16t + 2$
0	0	0	0	0	0	2
1	1	8	2	10	16	18
2	4	32	4	36	32	34
3	9	72	6	78	48	50
4	16	128	8	136	64	66
5	25	200	10	210	80	82
10	100	800	20	820	160	162

Estos datos se llevan a los diagramas  $s$ ,  $v$  y  $a$  que se ilustran en esta misma página. Esos diagramas permiten deducir algunas relaciones interesantes. La pendiente de la curva  $s-t$  en un instante  $t$  es la ordenada de la curva  $v-t$  en el mismo instante  $t$ . Ello es consecuencia de que  $v = ds/dt$ .

De modo parecido, la pendiente de la curva  $v-t$  (en este caso concreto, la pendiente es la misma en todos los puntos por tratarse de una recta; es decir,  $16 \text{ m/s}^2$ ) en un instante  $t$  es la ordenada de la curva  $a-t$  en el mismo instante  $t$ . Ello es consecuencia de que  $a = dv/dt$ .

Las dos igualdades recién mencionadas pueden también escribirse como

$$a \, dt = dv \quad \text{y} \quad v \, dt = ds$$

Integrando entre los límites adecuados:

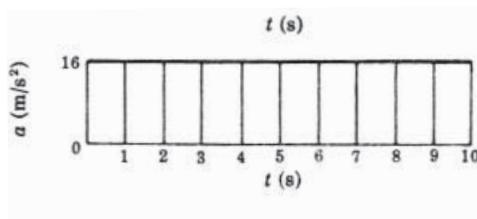
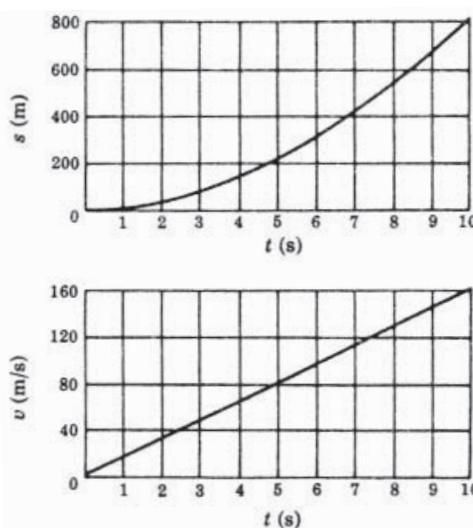
$$\int_{t_0}^t a \, dt = \int_{v_0}^v dv = v - v_0 \quad \text{y} \quad \int_{t_0}^t v \, dt = \int_{s_0}^s ds = s - s_0 \quad (I)$$

donde  $\int_{t_0}^t a \, dt$  = área bajo la curva  $a-t$  en el intervalo de  $t_0$  a  $t$

$\int_{t_0}^t v \, dt$  = área bajo la curva  $v-t$  en el intervalo de  $t_0$  a  $t$

$v - v_0$  = variación de la velocidad durante el mismo intervalo de  $t_0$  a  $t$

$s - s_0$  = distancia recorrida durante el mismo intervalo de  $t_0$  a  $t$



La primera de las igualdades (1) indica que la variación de la ordenada en la curva  $v-t$  durante un intervalo de tiempo cualquiera es igual al área bajo la curva  $a-t$  para ese mismo intervalo. Algo similar puede afirmarse acerca de la variación de la ordenada en la curva  $s-t$  respecto a la segunda de las igualdades (1).

- 12.4.** Un automóvil se acelera uniformemente desde el reposo hasta 60 mi/h en 28 s. Hallar su aceleración y su desplazamiento durante ese tiempo.

#### SOLUCIÓN

Se conocen los datos siguientes:  $v_0 = 60 \text{ mi/h} = 88 \text{ ft/s}$ ,  $t = 28 \text{ s}$ .

Para hallar la aceleración constante  $k$ , empleamos la fórmula  $v = v_0 + kt$ .

$$k = \frac{v - v_0}{t} = \frac{(88 - 0) \text{ ft/s}}{28 \text{ s}} = 3,14 \text{ ft/s}^2$$

Para hallar el desplazamiento únicamente con los datos originales

$$s = \frac{v + v_0}{2} t = \frac{(88 - 0) \text{ ft/s}}{2} \times 28 \text{ s} = 1230 \text{ ft}$$

- 12.5.** Una partícula se mueve en línea recta. Su celeridad aumenta desde cero hasta 30 ft/s en 3 s y luego disminuye hasta cero en 2 s.

(a) Representar la curva  $v-t$ .

(b) ¿Cuál es la aceleración durante los tres primeros segundos y durante los dos segundos siguientes?

(c) ¿Qué distancia recorre en los cinco segundos?

(d) ¿Cuánto tarda en recorrer 50 ft?

#### SOLUCIÓN

(a) En la Figura 12.6 se representa la curva  $v-t$ .

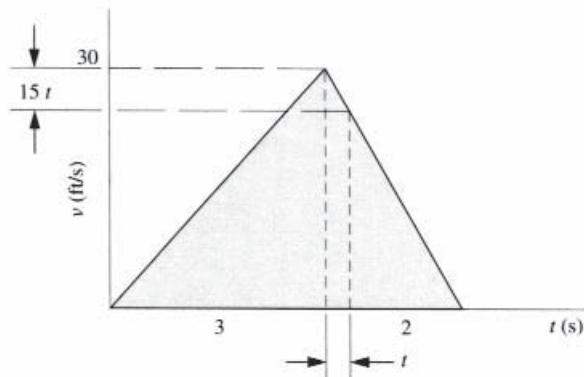


Figura 12.6

- (b) La aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo, que es la pendiente de la curva  $v-t$ . Así pues,

$$\text{en } t = 3 \text{ s} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{30}{3} = 10 \text{ ft/s}^2$$

$$\text{en } t = 5 \text{ s} \quad a = \frac{dv}{dt} = -\frac{30}{2} = -15 \text{ ft/s}^2$$

- (c) La velocidad es la derivada del desplazamiento respecto al tiempo. Así pues,

$$v = \frac{ds}{dt} \quad ds = v dt \quad \Delta s = \int v dt$$

La integral de  $v dt$  es también el área bajo la curva  $v-t$ . Así pues,

$$\text{para } t = 5 \quad s = (30)(3)/2 + (30)(2)/2 = 75 \text{ ft}$$

- (d) La distancia recorrida en los tres primeros segundos es 45 ft, tal como se obtiene del área bajo la curva  $v-t$ . La velocidad se obtiene de la ecuación de la curva  $v-t$  para el intervalo de  $t = 3$  s a  $t = 5$  s. Entonces para los 5 ft adicionales recorridos, el área bajo la curva  $v-t$  es el área del trapezoide delimitado por los trazos discontinuos verticales, que es la suma de las áreas de un rectángulo y un triángulo. Es decir,

$$(30 - 15)t + (15t)\frac{t}{2} = 5$$

Ésta es una ecuación de segundo grado, una de cuyas raíces es  $t = 0,174$  s. La otra raíz es 3,826 s, que es mayor que 2 s, máximo valor que puede tener  $t$ . Por tanto, el tiempo total es  $T = 3 + 0,174 = 3,174$  s.

- 12.6.** Un globo se eleva con una velocidad de 2 m/s cuando se suelta un saco de arena de lastre. Si en ese instante la altura es 120 m, ¿cuánto tarda el saco en llegar al suelo?

#### SOLUCIÓN

En el momento de la suelta, el saco de arena está subiendo con la misma velocidad que el globo. Por tanto,

$$v_0 = +2 \text{ m/s} \quad y = 120 \text{ m} \quad g = a = 9,8 \text{ m/s}^2$$

Resolvemos primero tomando el suelo como origen ( $y = 0$ ), sentido positivo hacia arriba. (Nótese:  $y = 0$  cuando el saco llega al suelo.)

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ 0 &= +120 + 2t + \frac{1}{2}(-9,8)t^2 \end{aligned}$$

Y resulta

$$t = 5,16 \text{ s}$$

Después resolvemos tomando el globo como origen. (Nótese:  $y = -120$  cuando el saco llega al suelo.)

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ -120 &= 0 + 2t + \frac{1}{2}(-9,8)t^2 \end{aligned}$$

Y esto, desde luego, da

$$t = 5,16 \text{ s}$$

- 12.7.** Con una velocidad de 80 ft/s se proyecta una bola verticalmente hacia arriba. Dos segundos después se proyecta otra bola también verticalmente hacia arriba con una velocidad de 60 ft/s. ¿A qué distancia de la superficie terrestre se encuentran?

#### SOLUCIÓN

Si es  $t$  el tiempo que tardan en encontrarse desde que se lanza la primera bola, cuando se encuentren la segunda bola ha viajado durante  $t - 2$  segundos. En el instante  $t$ , los desplazamientos de las bolas serán iguales.

Sean  $s_1$  y  $s_2$  los respectivos desplazamientos de las bolas. Entonces,

$$s_1 = (v_0)_1 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad y \quad s_2 = (v_0)_2 (t - 2) - \frac{1}{2} g (t - 2)^2$$

Igualando  $s_1$  y  $s_2$  y sustituyendo los valores dados de  $(v_0)_1$  y  $(v_0)_2$ , obtenemos

$$80t - 16,1t^2 = 60(t - 2) - 16,1(t - 2)^2 \quad \text{o sea,} \quad t = 4,15 \text{ s}$$

Sustituyendo este valor de  $t$  en la ecuación de  $s_1$  (o de  $s_2$ ), el desplazamiento es

$$s_1 = 80 \text{ ft/s} \times 4,14 \text{ s} - \frac{1}{2}(32,2 \text{ ft/s}^2)(4,14 \text{ s})^2 = 54,6 \text{ ft}$$

- 12.8.** Se lanza una bola formando un ángulo de  $40^\circ$  con la horizontal. ¿Con qué celeridad inicial hay que lanzarla para que aterrice a 100 ft de distancia? Despréciese la resistencia del aire.

**SOLUCIÓN**

Como origen de los ejes  $x$  e  $y$  se toma el punto de lanzamiento. Al despreciar la resistencia del aire, la componente  $x$  de la aceleración es nula, y la componente  $y$  es  $-g$ .

Con  $a_x = 0$  y  $a_y = -32,2 \text{ ft/s}$  en la ecuación (7),

$$x = v_{0x}t \quad \text{e} \quad y = v_{0y}t - \frac{1}{2}(32,2)t^2$$

Dado que cuando  $x = 100$ ,  $y = 0$  y  $v_{0x} = v_0 \cos 40^\circ$ ,  $v_{0y} = v_0 \sin 40^\circ$ , las ecuaciones anteriores quedan

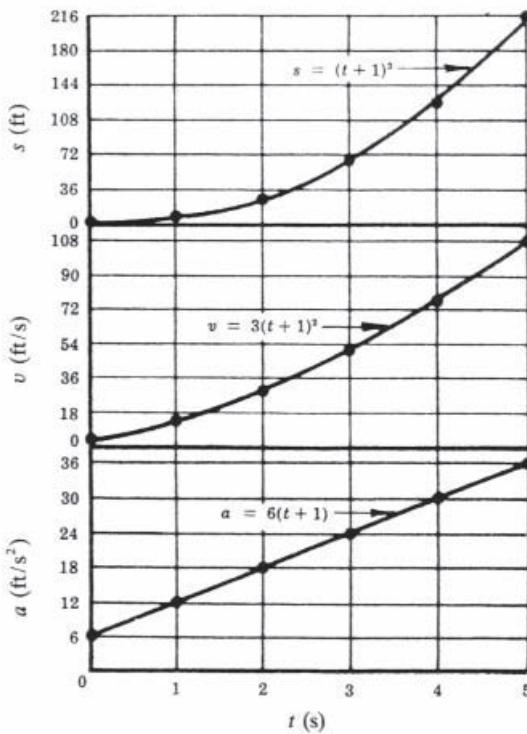
$$100 = v_0 \cos 40^\circ(t)$$

$$0 = v_0 \sin 40^\circ(t) - \frac{1}{2}(32,2)t^2$$

Despejando  $v_0$  en la primera ecuación e introduciendo ese valor en la segunda ecuación, al despejar  $t$  resulta  $t = 2,28 \text{ s}$ . Con este valor, la primera ecuación da

$$v_0 = 57,3 \text{ ft/s}$$

- 12.9.** Una partícula recorre una recta con una aceleración  $a = 6\sqrt[3]{s}$ . Cuando  $t = 2 \text{ s}$ , su desplazamiento es  $s = + 27 \text{ ft}$  y su velocidad es  $v = + 27 \text{ ft/s}$ . Calcular la velocidad y la aceleración en el instante  $t = 4 \text{ s}$ .



**SOLUCIÓN**

Como la aceleración se da en función del desplazamiento, empleamos la ecuación diferencial  $a ds = v dv$ . Entonces,

$$\int 6s^{1/3} ds = \int v dv \quad \text{o sea,} \quad \frac{9}{2}s^{4/3} = \frac{1}{2}v^2 + C_1$$

Como  $v = + 27$  cuando  $s = + 27$ ,  $C_1 = 0$  y  $v = 3s^{2/3}$ .

Ahora, con  $v = ds/dt$ , obtenemos  $ds/s^{2/3} = 3 dt$ ; de donde,  $3s^{1/3} = 3t + C_2$ . Introduciendo la condición  $s = +27$  cuando  $t = 2$ , se obtiene  $C_2 = 3$  y  $s = (t + 1)^3$ .

Por consiguiente, las ecuaciones son  $s = (t + 1)^3$ ,  $v = 3(t + 1)^2$ ,  $a = 6(t + 1)$ . Cuando  $t = 4$  s,  $s = 125$  ft,  $v = 75$  ft/s y  $a = 30$  ft/s<sup>2</sup>.

En la página anterior se representan gráficamente estos valores. Nótese que la ordenada de la curva  $v-t$  en el instante  $t$  es la pendiente de la curva  $s-t$  en ese mismo instante  $t$ . Asimismo, la ordenada de la curva  $a-t$  en el instante  $t$  es la pendiente de la curva  $v-t$  en ese mismo instante  $t$ .

- 12.10.** Una partícula recorre una recta vertical con una aceleración  $a = 2\sqrt{v}$ . Cuando  $t = 2$  s, su desplazamiento es  $s = 64/3$  ft y su velocidad es  $v = 16$  ft/s. Hallar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración cuando  $t = 3$  s.

#### SOLUCIÓN

Como  $a = dv/dt$ , será  $2\sqrt{v} = dv/dt$ . Separando variables,  $2 dt = dv/v^{1/2}$ . Integrando,  $2t + C_1 = 2v^{1/2}$ . Pero  $v = 16$  ft/s cuando  $t = 2$  s; por tanto,  $C_1 = 4$ .

La ecuación queda  $t + 2 = v^{1/2}$ , o bien  $v = (t + 2)^2 = ds/dt$ . Entonces,  $ds = (t + 2)^2 dt$ . Integrando  $s = \frac{1}{3}(t + 2)^3 + C_2$ . Pero  $s = 64/3$  ft cuando  $t = 2$  s; por tanto,  $C_2 = 0$ .

Por consiguiente, las ecuaciones son  $s = \frac{1}{3}(t + 2)^3$ ,  $v = (t + 2)^2$  y  $a = 2(t + 2)$ .

Cuando  $t = 3$  s,  $s = 41,7$  ft,  $v = 25$  ft/s y  $a = 10$  ft/s<sup>2</sup>.

- 12.11.** La aceleración de un punto que recorre una recta vertical está dada por  $a = 12t - 20$ . Se sabe que su desplazamiento es  $s = -10$  m en el instante  $t = 0$ , y  $s = +10$  m en el instante  $t = 5$  s. Deducir la ecuación del movimiento.

#### SOLUCIÓN

Integrando  $a = dv/dt = 12t - 20$ , obtenemos  $v = 6t^2 - 20t + C_1$ . Integrando otra vez, obtenemos  $s = 2t^3 - 10t^2 + C_1 t + C_2$ .

Ahora hay que determinar las constantes de integración. Sustituyendo los valores conocidos de  $s$  y  $t$ :

$$\begin{aligned} -10 &= 2(0)^3 - 10(0)^2 + C_1(0) + C_2 \quad \text{o sea,} & C_1 &= -10 \\ +10 &= 2(5)^3 - 10(5)^2 + C_1(5) + C_2 \quad \text{o sea,} & C_2 &= +4 \end{aligned}$$

La ecuación de movimiento es  $s = 2t^3 - 10t^2 + 4t - 10$ .

- 12.12.** En el sistema de la Figura 12.7(a), hallar la velocidad y la aceleración del bloque 2 en el instante representado.

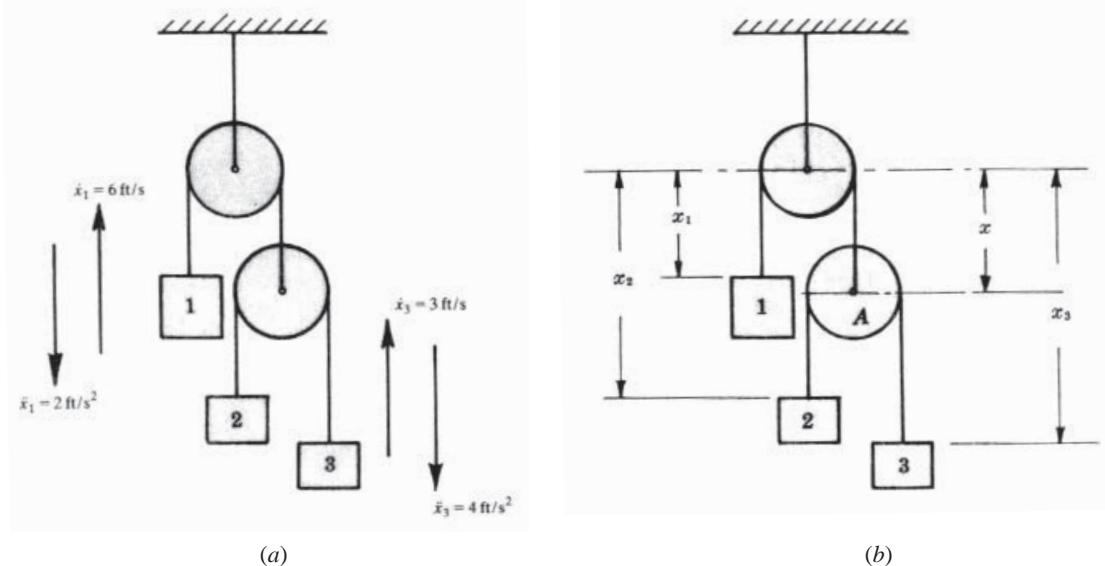


Figura 12.7

**SOLUCIÓN**

En la Figura 12.7(b) se indica la posición de cada peso respecto al soporte fijo. La longitud de la cuerda entre el peso 1 y el punto A es constante e igual a medio perímetro de la polea superior más  $x_1 + x$ . La longitud de la cuerda entre los pesos 2 y 3 es constante e igual a medio perímetro de la polea A más  $x_2 - x + x_3 - x$ .

Así pues,  $x_1 + x = \text{constante}$  y  $x_2 + x_3 - 2x = \text{constante}$ . Al derivar respecto al tiempo:

$$\dot{x}_1 + \dot{x} = 0 \quad (1) \quad \dot{x}_2 + \dot{x}_3 - 2\dot{x} = 0 \quad (3)$$

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x} = 0 \quad (2) \quad \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 - 2\ddot{x} = 0 \quad (4)$$

Tomando como positivo el sentido hacia arriba y sustituyendo  $\dot{x}_1 = 6 \text{ ft/s}$  en (1), hallamos  $\dot{x} = -6 \text{ ft/s}$ . Sustituyendo este valor junto con  $\dot{x}_3 = 3 \text{ ft/s}$  en (3) hallamos  $\dot{x}_2 = 2\dot{x} - \dot{x}_3 = 2(-6) - (3) = -15 \text{ ft/s}$  (o sea, hacia abajo).

Un razonamiento similar para las aceleraciones da

$$\ddot{x} = +2 \quad \text{y} \quad \ddot{x}_2 = 2\ddot{x} - \ddot{x}_3 = 2(+2) - (-4) = 8 \text{ ft/s}^2$$

**12.13.** Demostrar que la curvatura de una curva plana en un punto  $P$  puede expresarse

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

donde  $\rho$  es el radio de curvatura,  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  son las componentes  $x$  e  $y$  de la velocidad de  $P$ , y  $\ddot{x}$  e  $\ddot{y}$  son las componentes  $x$  e  $y$  de la aceleración de  $P$ .

**SOLUCIÓN**

Según el cálculo infinitesimal, la curvatura de una curva cualquiera  $y = f(x)$  en el punto  $P$  es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} \quad (1)$$

$$\text{Pero} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

Sustituyendo en (1) resulta la expresión requerida.

**12.14.** Una partícula describe una trayectoria  $y = 3,6x^2$ , donde  $x$  e  $y$  están en metros. La velocidad tiene una componente  $x$  constante de 2 m/s. Suponiendo que la partícula esté en el origen al iniciarse el movimiento, obtener las componentes del desplazamiento, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

**SOLUCIÓN**

Como  $dx/dt$ , al integrar se obtiene  $x = 2t + C_1$ . Pero  $x = 0$  en  $t = 0$ ; por tanto,  $C_1 = 0$ .

Así pues,  $x = 2t \text{ m}$

Además,  $y = 3,6x^2 = 3,6(2t)^2 = 14,4t^2 \text{ m}$ . Así pues,

$$\frac{dy}{dt} = 18,8t \text{ m/s}$$

$$\text{Finalmente,} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 28,8 \text{ m/s}^2$$

**12.15.** Una partícula describe la trayectoria  $y = 4x^2$  con una celeridad constante  $v$ , donde  $x$  e  $y$  están en metros. ¿Cuál es la componente normal de la aceleración?

**SOLUCIÓN**

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}} = \frac{8}{[1+(8x)^2]^{3/2}} \quad \text{y} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{8v^2}{[1+64x^2]^{3/2}} \text{ m/s}^2$$

**12.16.** Una partícula recorre una trayectoria animada de una velocidad  $\mathbf{v} = 3t^2\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  in/s.

- (a) Hallar las coordenadas de su posición al cabo de cuatro segundos. La partícula está en el origen cuando  $t = 0$ .
- (b) Hallar la ecuación de la trayectoria.
- (c) Hallar la componente de la velocidad en la dirección definida por  $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$  en el instante  $t = 4$  s.

**SOLUCIÓN**

- (a) El vector de posición es la integral del vector velocidad, tal como se deduce de la misma definición de velocidad

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt \quad \text{por lo que} \quad \mathbf{r} = \int \mathbf{v} dt = t^3\mathbf{i} - 2t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

En  $t = 4$  s,  $\mathbf{r} = 64\mathbf{i} - 32\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$  in. Las componentes del vector de posición en  $t = 4$  s serán  $x = 64$  in,  $y = -32$  in y  $z = 8$  in.

- (b) En cada instante  $t$ , las ecuaciones llamadas paramétricas de la posición son los coeficientes de  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ . Así pues,  $x = t^3$ ,  $y = -2t^2$  y  $z = 2t$ . Eliminando  $t$  entre esas ecuaciones, resulta

$$t = x^{1/3} \quad y = -2x^{2/3} \quad \left(\frac{z}{2}\right)^2 = x^{2/3}$$

Al combinar estas ecuaciones, se obtiene

$$y + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = -x^{2/3}$$

o sea,

$$x^{2/3} + y + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 0$$

es la ecuación de la trayectoria. Compruébese que se satisface para  $t = 4$  s.

- (c) El vector unitario en la dirección deseada es

$$\mathbf{e}_L = \frac{4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-3)^2}}$$

Por tanto, en  $t = 4$  s la proyección de  $\mathbf{v}$  sobre  $\mathbf{n}$  es

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_L = \left[ \frac{4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}}{\sqrt{26}} \right] \cdot [3(4)^2\mathbf{i} - 4(4)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}] = 33,3 \text{ in/s}$$

**12.17.** Una partícula describe la trayectoria  $r = 2\theta$  ft. Si es  $\theta = t^2$  rad, hallar su velocidad cuando  $\theta = 60^\circ$ . Aplicar dos procedimientos.

**SOLUCIÓN**

En la Figura 12.8(a) se representa la trayectoria con los vectores unitarios  $\mathbf{e}_r$ , según  $\mathbf{r}$ , y  $\mathbf{e}_\theta$ , perpendicular a  $\mathbf{r}$  y en el sentido en que  $\theta$  aumenta.

- (a) *Coordenadas polares.* Véase la Figura 12.8(b).

Como  $\theta = t^2$ ,  $\dot{\theta} = 2t$ ; como  $r = 2\theta = 2t^2$ ,  $\dot{r} = 4t$ .

Para  $\theta = \pi/3$ , el vector velocidad  $\mathbf{v}$  se calcula como sigue:

$$\theta = \frac{\pi}{3} = t^2 \quad \text{es decir,} \quad t = 1,023 \text{ s}$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta = 4(1,023)\mathbf{e}_r + [2(1,047)][2(1,023)]\mathbf{e}_\theta = 4,09\mathbf{e}_r + 4,28\mathbf{e}_\theta$$

$$y \quad v = \sqrt{(4,09)^2 + (4,28)^2} = 5,92 \text{ ft/s, con } \theta_x = 30^\circ + \operatorname{artg}(4,09 / 4,28) = 73,7^\circ$$

(b) *Coordenadas cartesianas.* Véase la Figura 12.8(c).

$$x = r \cos \theta = 2t^2 \cos \theta = 2t^2 \cos t^2 \quad y = r \sin \theta = 2t^2 \sin \theta = 2t^2 \sin t^2$$

$$\text{Entonces} \quad \dot{x} = 4t \cos t^2 + 2t^2(-\sin t^2)(2t) = -1,66 \text{ ft/s}$$

$$\dot{y} = 4t \sin t^2 + 2t^2(\cos t^2)(2t) = +5,68 \text{ ft/s}$$

en  $t = 1,023$  s ( $\cos t^2 = \cos \pi/3$ ,  $\sin t^2 = \sin \pi/3$ ). Por tanto,

$$v = \sqrt{(-1,66)^2 + (5,68)^2} = 5,92 \text{ ft/s, con } \theta_x = \operatorname{artg} \frac{5,68}{1,66} = 73,7^\circ$$

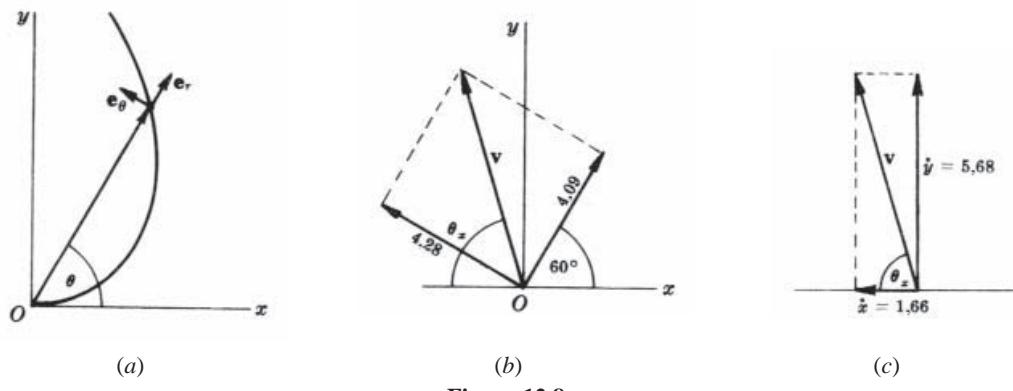


Figura 12.8

**12.18.** En el problema anterior, hallar la aceleración de la partícula por los dos mismos procedimientos.

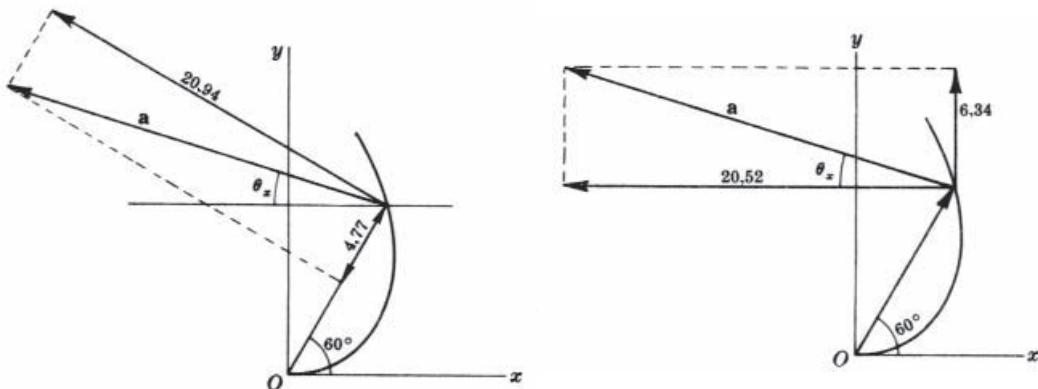
#### SOLUCIÓN

(a) *Coordenadas polares.* Véase la Figura 12.9.

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta = -4,77\mathbf{e}_r + 20,94\mathbf{e}_\theta$$

Como  $\theta = t^2$ ,  $\dot{\theta} = 2t$ ,  $\ddot{\theta} = 2$ ;  $r = 2\theta = 2t^2$ ,  $\dot{r} = 4t$ ,  $\ddot{r} = 4$ ;  $t = 1,023$  s en  $\theta = \pi/3$ . Así pues,

$$a = \sqrt{(-4,77)^2 + (20,94)^2} = 21,5 \text{ ft/s}^2, \quad \text{con } \theta_x = 30^\circ - 12,8^\circ = 17,2^\circ$$



(b) *Coordenadas cartesianas.* Véase la Figura 12.10.

Derivando otra vez respecto al tiempo y particularizando para  $t = 1,023$  ( $t^2 = \pi/3$ ),

$$\ddot{x} = 4 \cos t^2 + 4t(-\operatorname{sen} t^2)(2t) + 12t^2(-\operatorname{sen} t^2) - 4t^3(\cos t^2)(2t) = -20,52 \text{ ft/s}^2$$

$$\ddot{y} = 4 \operatorname{sen} t^2 + 4t(\cos t^2)(2t) + 12t^2(\cos t^2) - 4t^3(-\operatorname{sen} t^2)(2t) = +6,34 \text{ ft/s}^2$$

$$\text{Por tanto, } a = \sqrt{(-20,52)^2 + (6,34)^2} = 21,5 \text{ ft/s}, \quad \text{con } \theta_x = \operatorname{arg} \frac{6,34}{20,52} = 17,2^\circ$$

- 12.19.** En el balancín escocés de la Figura 12.11, la manivela  $OA$  gira con una velocidad angular constante  $\omega$  rad/s. Deducir las expresiones del desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la corredera.

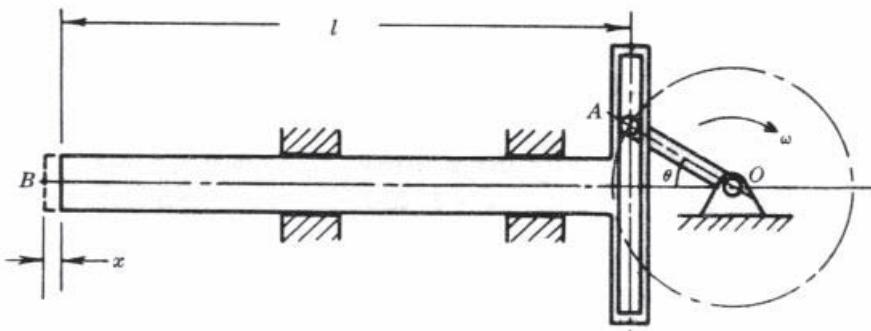


Figura 12.11

#### SOLUCIÓN

Sea  $B$  la posición del extremo izquierdo de la corredera cuando  $\theta = 0^\circ$ . El desplazamiento  $x$  lo escribimos  $x = OB - l - OA \cos \theta$ . Cuando la manivela está horizontal,  $OB = l + OA$ , y así

$$x = l + OA - l - OA \cos \theta = OA(1 - \cos \theta)$$

Sea  $OA = R$ . Además, como la manivela gira con una velocidad angular constante  $\omega$ , la expresión  $\omega t$  puede sustituirse por  $\theta$ . Derivando  $x = R(1 - \cos \omega t)$  resulta

$$v = \frac{dx}{dt} = R\omega \operatorname{sen} \omega t \quad y \quad a = \frac{dv}{dt} = R\omega^2 \cos \omega t$$

- 12.20.** En la Figura 12.12, el brazo oscilante  $OD$  gira en sentido horario con una velocidad angular constante de 10 rad/s. El bloque  $A$  desliza libremente por la ranura del brazo  $OD$  y está articulado al bloque  $B$ , que desliza libremente por la ranura horizontal del armazón. Hallar, para  $\theta = 45^\circ$ , la velocidad total del pasador  $P$  como punto del bloque  $B$  empleando (a) coordenadas cartesianas y (b) coordenadas polares.

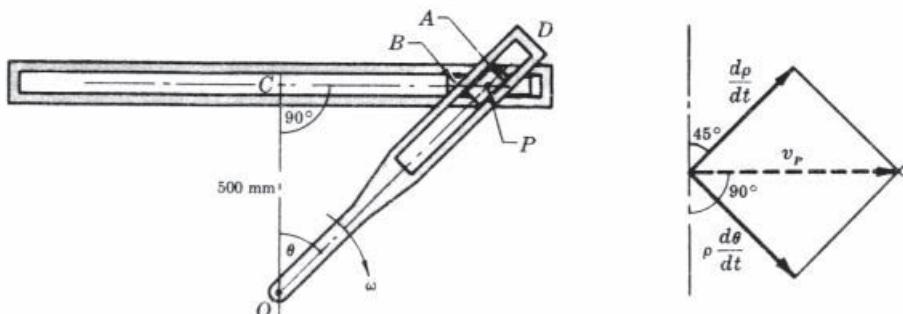


Figura 12.12

**SOLUCIÓN**

Nótese que la velocidad total o absoluta de  $P$  como punto del bloque  $B$  debe ser obligatoriamente horizontal, pues es un punto de  $B$  y todos los puntos de  $B$  se mueven horizontalmente. Pero como punto de  $A$ , su velocidad es la misma.

(a) Sea  $x =$  distancia de  $P$  a  $C$ . Entonces  $x = 0,5 \operatorname{tg} \theta$  y  $v_p = dx/dt = 0,5(\sec^2 \theta)d\theta/dt$ . Cuando  $\theta = 45^\circ$ ,  $v_p = 0,5(\sec^2 45^\circ)10 = 10 \text{ m/s}$ .

(b) Sea  $\rho =$  distancia de  $P$  a  $O$ , que tomamos como polo. Entonces  $\rho = 0,5 \sec \theta$ .

La componente radial de la velocidad según  $OP$  es  $d\rho/dt = 0,5 \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta/dt$ . Para  $\theta = 45^\circ$ , queda  $0,5 \sec 45^\circ \operatorname{tg} 45^\circ \times 10 = 7,07 \text{ m/s}$ . Esta componente tiene el sentido de  $O$  hacia  $P$ .

La componente transversal de la velocidad es  $\rho d\theta/dt = 0,5 \sec \theta d\theta/dt$ . Para  $\theta = 45^\circ$ , queda  $0,5 \sec 45^\circ \times 10 = 7,07 \text{ m/s}$ . Esta componente es perpendicular a  $OP$  y está dirigida hacia abajo y a la derecha porque  $\omega$  es horaria.

En la figura, ambas componentes se representan hacia la derecha. Por tanto,

$$v_p = \sqrt{(d\rho/dt)^2 + (\rho d\theta/dt)^2} = 10 \text{ m/s y es horizontal.}$$

- 12.21.** La barra  $AB$  que se muestra en la Figura 12.13 se mueve de tal modo que su punto más bajo se desplaza horizontalmente hacia la derecha con una velocidad constante  $v_A = 5 \text{ ft/s}$ . ¿Cuál es la velocidad del punto  $B$  cuando  $\theta = 70^\circ$ ? La longitud de la barra es 6,24 ft.

**SOLUCIÓN**

Sean  $x$  e  $y$  las distancias de  $A$  y  $B$  al punto  $O$  en un instante cualquiera durante el movimiento. Como  $x^2 + y^2 = l^2$ , será

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\text{y } v_B = \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt} = -(\cos \theta)(v_A) = -1,82 \text{ ft/s}$$

El signo menos indica que  $B$  se mueve hacia abajo. Nótese que  $v_B$  es independiente de  $l$ .

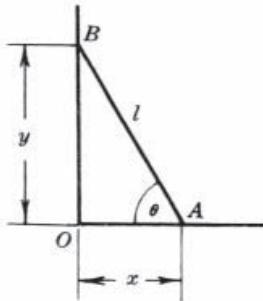


Figura 12.13

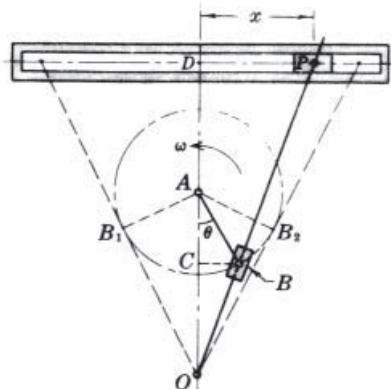


Figura 12.14

- 12.22.** En el *mecanismo de retroceso rápido* de la Figura 12.14, la manivela  $AB$  es accionada a una velocidad angular constante de  $\omega \text{ rad/s}$ . El cursor  $B$  desliza en la biela  $OP$ , haciendo que ésta oscile en torno a la articulación  $O$ . A su vez,  $OP$  desliza en vaivén en torno a  $P$  y además arrastra a lo largo de la ranura horizontal al segundo cursor articulado en  $P$ . Una herramienta de corte sujetada a este segundo cursor está sometida a un movimiento alternativo. Esa herramienta llega a los extremos de su recorrido horizontal cuando  $OP$  es tangente al círculo de la manivela en  $B_1$  y  $B_2$ . El corte tiene lugar mientras el pasador de la manivela se mueve en sentido antihorario desde  $B_2$  a  $B_1$ . La carrera de retorno tiene lugar en el arco restante desde  $B_1$  a  $B_2$ . Como la celeridad es constante, los tiempos de las carreras de trabajo y de retorno son proporcionales a los ángulos descriptos. La carrera de corte se ejecuta durante el ángulo mayor y, por ello, dura más. La carrera de

retorno es más rápida; y de ahí el nombre de mecanismo de retroceso rápido. Hallar las expresiones del desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la herramienta de corte sujetada a  $P$ .

### SOLUCIÓN

De la figura,

$$\frac{x}{BC} = \frac{OD}{OC}$$

Sea  $OD = l$ ,  $AB = R$ ,  $OA = d$ . Entonces,  $BC = R \sin \theta$ ,  $OC = OA - AC = d - R \cos \theta$ . Sustituyendo en la anterior expresión de  $x$ ,

$$\frac{x}{R \sin \theta} = \frac{l}{d - R \cos \theta} \quad \text{o sea,} \quad x = \frac{Rl \sin \theta}{d - R \cos \theta} \quad (I)$$

$$y \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{Rl[(d - R \cos \theta) \cos \theta \, d\theta/dt - \sin \theta (R \sin \theta \, d\theta/dt)]}{(d - R \cos \theta)^2}$$

Como  $d\theta/dt$  es la velocidad angular  $\omega$ , esta última ecuación queda

$$v = \frac{Rl\omega(d \cos \theta - R \cos^2 \theta - R \sin^2 \theta)}{(d - R \cos \theta)^2} \quad \text{o sea,} \quad v = Rl\omega \frac{d \cos \theta - R}{(d - R \cos \theta)^2} \quad (2)$$

$$y \quad a = \frac{dv}{dt} = Rl\omega \frac{(d - R \cos \theta)^2(-d \sin \theta \, d\theta/dt) - (d \cos \theta - R)[2(d - R \cos \theta)R \sin \theta \, d\theta/dt]}{(d - R \cos \theta)^4}$$

$$= \frac{-Rl\omega^2 \sin \theta (d^2 - 2R^2 + Rd \cos \theta)}{(d - R \cos \theta)^3} \quad (3)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) dan el desplazamiento, la velocidad y la aceleración en función del ángulo  $\theta$ . Esta información es necesaria para diseñar los miembros del mecanismo de modo que soporten las fuerzas aceleradoras que se generan en el movimiento.

- 12.23.** Hallar el desplazamiento lineal, la velocidad y la aceleración de la cruceta  $C$  en el mecanismo de biela y manivela de la Figura 12.15 en función de la posición de la manivela  $R$ , la cual gira con una velocidad angular constante.

### SOLUCIÓN

Sea  $C_0$  la posición extrema izquierda de la cruceta, la cual se mueve horizontalmente a lo largo del eje geométrico  $C_0A$ , tal como se muestra en la Figura 12.15. Es evidente que  $x = C_0A - CA$  y  $CA = CD + DA$ .

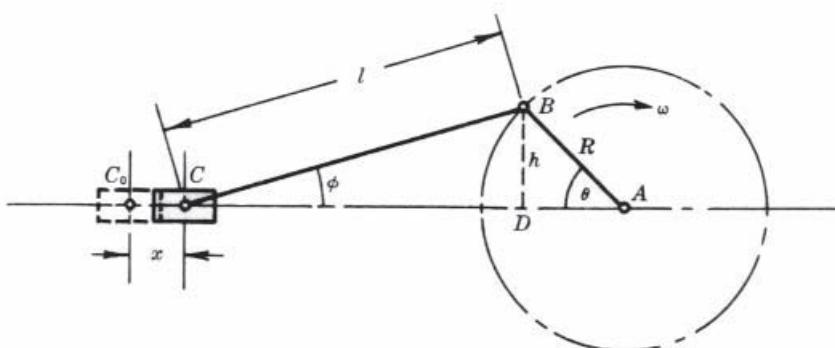


Figura 12.15

Cuando  $C$  está en  $C_0$ ,  $B$  está en el eje geométrico; por tanto,  $C_0A = l + R$ . Asimismo,  $CA = l \cos \phi + R \cos \theta$ . Entonces

$$x = l + R - l \cos \phi - R \cos \theta$$

Observando los triángulos rectángulos  $ADB$  y  $DCB$ , podemos escribir la relación siguiente entre los ángulos  $\phi$  y  $\theta$ :

$$h = l \sen \phi = R \sen \theta$$

$$\text{Entonces } \sen \phi = \frac{R}{l} \sen \theta \quad \text{y} \quad \cos \phi = \sqrt{1 - \sen^2 \phi} = \sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sen^2 \phi}$$

y el desplazamiento es

$$x = l + R - l \sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sen^2 \theta} - R \cos \theta$$

Derivar respecto al tiempo esta expresión es algo engoroso a causa del radical. Sin embargo, para  $R/l < \frac{1}{4}$  se obtienen valores suficientemente aproximados empleando los dos primeros términos del desarrollo en serie de potencias de la raíz cuadrada

$$\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sen^2 \theta} \approx 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{l^2} \right) \sen^2 \theta$$

Con esta sustitución, el desplazamiento queda

$$x = l + R - l + \frac{R^2}{2l} \sen^2 \theta - R \cos \theta = R(1 - \cos \theta) + \frac{R^2}{2l} \sen^2 \theta$$

Derivando resulta

$$v = \frac{dx}{dt} = R \sen \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{R^2}{2l} 2 \sen \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = R\omega \left( \sen \theta + \frac{R}{2l} \sen 2\theta \right)$$

$$y \quad a = \frac{dv}{dt} = R\omega \left( \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{R}{2l} 2 \cos 2\theta \frac{d\theta}{dt} \right) = R\omega^2 \left( \cos \theta + \frac{R}{l} \cos 2\theta \right)$$

- 12.24.** Un punto  $P$  describe un trayectoria circular con una celeridad constante de 12 ft/s. Si el radio de la trayectoria es 2 ft, estudiar el movimiento de la proyección del punto sobre el diámetro horizontal. (Figura 12.16).

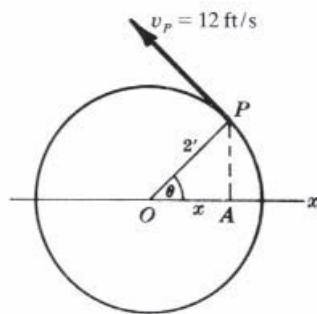


Figura 12.16

#### SOLUCIÓN

El punto  $A$  es la proyección de  $P$  sobre el diámetro horizontal. Se supone que el origen coincide con el centro de la circunferencia. El desplazamiento  $x$  del punto  $A$  es la proyección del radio vector  $OP$  sobre el eje  $x$  (coincidente con el diámetro horizontal).

Como la recta  $OP$  barre ángulos iguales en tiempos iguales (la velocidad angular es constante), la expresión de  $\theta$  podemos escribirla  $\theta = \omega t$ . Por consiguiente, la coordenada  $x$  de  $P$  es

$$x = OP \cos \theta = 2 \cos \omega t$$

La velocidad angular del radio es  $\omega = v/r = 12/2 = 6$  rad/s. Entonces,  $x = 2 \cos 6t$

$$v = \frac{dx}{dt} = -12 \sin 6t \quad y \quad a = \frac{dv}{dt} = -72 \cos 6t$$

La expresión de  $a$  podemos volver a escribirla como  $a = -(36)(2 \cos 6t) = -36x$ . Pero esto significa que el punto  $A$  se mueve de modo que su aceleración  $a$  es proporcional y de signo contrario al desplazamiento  $x$ . Como esta es la condición de movimiento armónico, es evidente que si el punto  $P$  describe una trayectoria circular a celeridad constante, su proyección sobre un diámetro ejecuta un movimiento armónico simple.

- 12.25.** Representar en función del tiempo el desplazamiento, la velocidad y la aceleración del punto  $A$  del Problema 12.24.

#### SOLUCIÓN

La amplitud es el doble del valor máximo del desplazamiento  $x$ , que corresponde al instante en que  $\cos 6t$  asume su valor máximo de uno (positivo o negativo). Por consiguiente, la amplitud es 2.

La amplitud de la velocidad  $v$  es 12 y la amplitud de la aceleración  $a$  es 72.

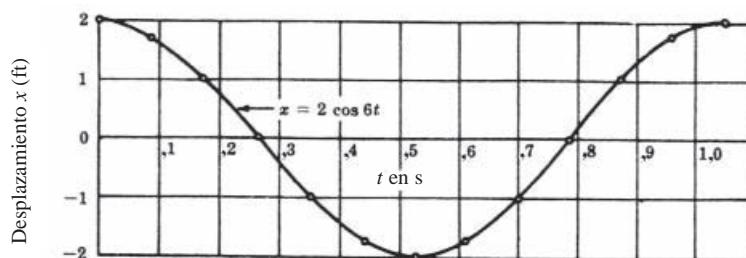
El periodo es el tiempo  $T$  que dura un ciclo. Es evidente que el movimiento se repite a sí mismo cada vez que el radio vector  $OP$  ejecuta un revolución completa  $\theta = 2\pi$  rad. Igualando el argumento  $6t$  al valor  $\theta = 2\pi$  de un ciclo resulta

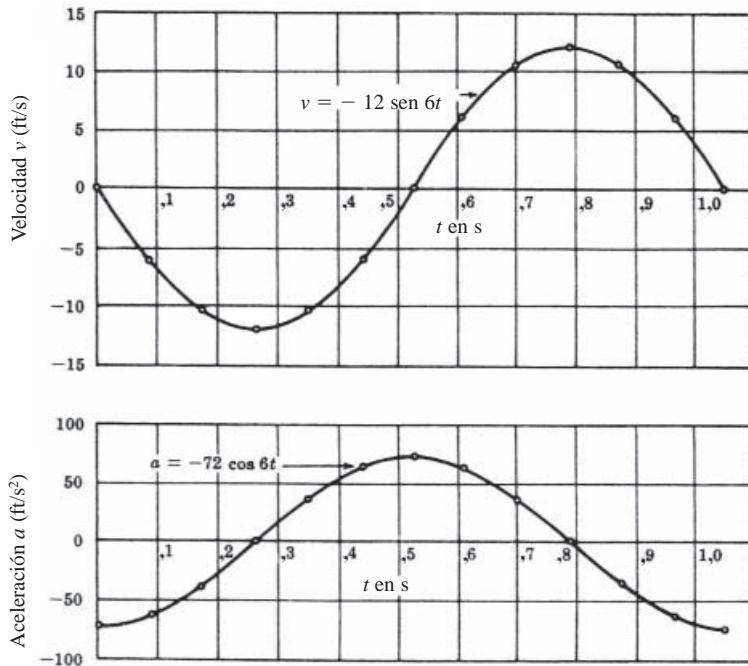
$$6 \text{ rad/s} \times T = 2\pi \text{ rad} \quad \text{o sea,} \quad T = \frac{2\pi}{6} \text{ s} = 1,05 \text{ s}$$

Ahora es posible correlacionar el ángulo  $\theta$  con el tiempo  $t$ . Por ejemplo, cuando  $\theta = \pi/2$  o  $90^\circ$ ,  $t$  es un cuarto de revolución, es decir  $\frac{1}{4} \times 1,05 \text{ s} = 0,263 \text{ s}$ . Procediendo así, se construye la tabla siguiente

$\theta$	$t$	$\cos 6t$ o $\cos \theta$	$\sin 6t$ o $\sin \theta$	$x = 2 \cos 6t$	$v = -12 \sin 6t$	$a = -72 \cos 6t$
$0^\circ$	0	+1,000	0	+2,00	0	-72,0
$30^\circ$	0,088	+0,866	+0,500	+1,73	-6,00	-62,3
$60^\circ$	0,175	+0,500	+0,866	+1,00	-10,4	-36,0
$90^\circ$	0,263	0	+1,000	0	-12	0
$120^\circ$	0,350	-0,500	+0,866	-1,00	-10,4	+36,0
$150^\circ$	0,438	-0,866	+0,500	-1,73	-6,00	+62,3
$180^\circ$	0,525	-1,000	0	-2,00	0	+72,0
$210^\circ$	0,612	-0,866	-0,500	-1,73	+6,00	+62,3
$240^\circ$	0,700	-0,500	-0,866	-1,00	+10,4	+36,0
$270^\circ$	0,788	0	-1,000	0	+12,0	0
$300^\circ$	0,875	+0,500	-0,866	+1,00	+10,4	-36,0
$330^\circ$	0,962	+0,866	-0,500	+1,73	+6,00	-62,3
$360^\circ$	1,05	+1,000	0	+2,00	0	-72,0

Representando gráficamente esos puntos, se consigue una imagen visual del movimiento durante un ciclo. Naturalmente, al aumentar el tiempo, esas curvas se replican en ciclos sucesivos. Las gráficas adjuntas representan el movimiento durante un ciclo.





- 12.26.** Un volante de inercia de 1,2 m de diámetro se acelera uniformemente desde el reposo hasta 2000 rpm en 20 s. ¿Cuál es su aceleración angular?

#### SOLUCIÓN

Al analizar este problema, lo primero es entender que la aceleración a la que se refiere es constante. Ello significa que pueden emplearse las fórmulas de la aceleración constante. Estas, para el movimiento de rotación, son similares a las del movimiento rectilíneo; sólo hay que cambiar  $v$  por  $\omega$ ,  $k$  por  $\alpha$  y  $s$  por  $\theta$ .

El volante arranca del reposo; por tanto,  $\omega_0 = 0$ . Las tres cantidades conocidas son  $\omega_0$ ,  $\omega$  y  $t$ . La cantidad que buscamos es la aceleración angular  $\alpha$ . La fórmula en la que intervienen esas cuatro cantidades es

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Respecto a las unidades, es oportuna ahora una observación: se recomienda, en el SI, que  $\omega$  se exprese en rad/s y  $\alpha$  en rad/s<sup>2</sup>, cuando  $t$  está en segundos

$$\omega_0 = 0 \quad \omega = 2000 \text{ rpm} = \frac{2000 \text{ rev}}{60 \text{ s}} \times 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}} = 209 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\text{Por tanto, } \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{209 \text{ rad/s} - 0 \text{ rad/s}}{20 \text{ s}} = 10,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

- 12.27.** En el Problema 12.26, ¿cuántas revoluciones da el volante para llegar a la celeridad de 2000 rpm?

#### SOLUCIÓN

Para hallar el número de revoluciones  $\theta$ , empleamos la fórmula que relaciona  $\theta$  con las tres cantidades dadas  $\omega_0$ ,  $\omega$  y  $t$ . Desde luego, podríamos emplear una fórmula en la que apareciese la aceleración angular  $\alpha$  recién calculada, pero es aconsejable proceder con los datos del problema para deducir  $\theta$  independientemente de  $\alpha$ , que ocasionalmente podría haberse calculado erróneamente.

$$\theta = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t = \frac{1}{2}(209 \text{ rad/s} + 0 \text{ rad/s})(20 \text{ s}) = 2090 \text{ rad}$$

Para expresar  $\theta$  en revoluciones,

$$\theta = \frac{2090 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad/rev}} = 333 \text{ revoluciones}$$

Con  $\omega$  expresada en rev/s se obtiene el mismo resultado:

$$\theta = \frac{(2000/60) \text{ rev/s} + 0 \text{ rev/s}}{2} \times 20 \text{ s} = 333 \text{ revoluciones}$$

- 12.28.** Hallar la velocidad y la aceleración lineales de un punto del canto del volante del Problema 12.26 al cabo de 0,6 s de iniciarse el movimiento.

#### SOLUCIÓN

La velocidad de un punto del canto se calcula multiplicando el radio por la velocidad angular.

La velocidad angular es  $\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + (10,5 \text{ rad/s}^2)(0,6 \text{ s}) = 6,30 \text{ rad/s}$ .

Cuando  $t = 0,6 \text{ s}$ , el módulo de la velocidad lineal de un punto del canto es

$$v = r\omega = (0,6 \text{ m})(6,30 \text{ rad/s}) = 3,78 \text{ m/s} \quad (\text{tangente al perímetro})$$

Para determinar por completo la aceleración, empleamos las componentes normal y tangencial. La componente tangencial  $a_t$  es  $a_t = r\alpha = (0,6 \text{ m})(10,5 \text{ rad/s}^2) = 6,3 \text{ m/s}^2$ . La componente normal  $a_n$  es  $a_n = r\omega^2 = (0,6 \text{ m})(6,3 \text{ rad/s})^2 = 23,8 \text{ m/s}^2$ . En la Figura 12.17 se representan esas componentes para un punto  $P$  del canto.

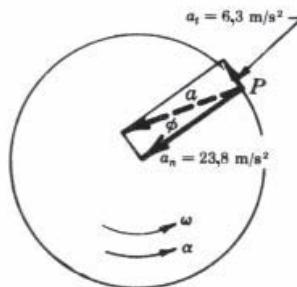


Figura 12.17

La aceleración total  $a$  es la suma vectorial de las dos componentes  $a_t$  y  $a_n$ . Sea  $\phi$  el ángulo entre la aceleración total y el radio. La aceleración normal  $a_n$  está dirigida hacia el centro del círculo.

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(6,3)^2 + (23,8)^2} = 24,6 \text{ m/s}^2$$

$$\phi = \operatorname{artg} \frac{a_t}{a_n} = \operatorname{artg} \frac{6,3}{23,8} = 0,259 \text{ rad} = 14,8^\circ$$

- 12.29.** Una barra esbelta uniforme de 4 ft de longitud gira en un plano horizontal en torno a un eje que pasa por un extremo. Si se acelera uniformemente desde 40 a 60 rpm en un intervalo de 5 s, ¿cuál es la celeridad lineal del centro de la barra al principio y al final de ese tiempo?

#### SOLUCIÓN

La celeridad del centro es  $v = r\omega$ . Así pues, las celeridades al principio y al final son, respectivamente,

$$v_P = r\omega_P = (2 \text{ ft}) \left( \frac{40 \times 2\pi}{60} \text{ rad/s} \right) = 8,38 \text{ ft/s}$$

$$v_F = r\omega_F = (2 \text{ ft}) \left( \frac{60 \times 2\pi}{60} \text{ rad/s} \right) = 12,6 \text{ ft/s}$$

- 12.30.** En el Problema 12.29, hallar las componentes normal y tangencial de la aceleración del centro de la barra a los dos segundos de iniciarse la aceleración.

#### SOLUCIÓN

La aceleración uniforme  $\alpha$  en un instante cualquiera del intervalo de 5 segundos es

$$\alpha = \frac{\omega_F - \omega_P}{t} = \frac{\frac{120}{60}\pi - \frac{80}{60}\pi}{5} = 0,419 \text{ rad/s}^2$$

La velocidad angular  $\omega$  a los dos segundos es

$$\omega = \omega_P + \alpha t = \frac{80}{60}\pi + 0,419(2) = 5,03 \text{ rad/s}$$

Las componentes de la aceleración son

$$a_t = r\alpha = 2(0,419) = 0,838 \text{ ft/s}^2$$

$$a_n = r\omega^2 = 2(5,03)^2 = 50,6 \text{ ft/s}^2$$

- 12.31.** Una rueda de 200 mm de diámetro se detiene por inercia, en 600 s, desde una celeridad de 800 rpm. Hallar la aceleración angular.

#### Solución

Con  $\omega_0 = 800 \text{ rpm} = 83,8 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 0$  y  $t = 600 \text{ s}$ , resulta

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{-83,8 \text{ rad/s}}{600 \text{ s}} = -0,14 \text{ rad/s}^2 \quad (\text{deceleración})$$

La aceleración es negativa. Ello significa que la velocidad angular y la aceleración angular tienen sentidos contrarios, lo que indica que la rueda disminuye de velocidad.

- 12.32.** Una rueda se acelera uniformemente desde el reposo hasta una celeridad de 200 rpm en  $\frac{1}{2}$  s. Seguidamente gira a esa celeridad durante 2 s antes de decelerarse hasta el reposo en  $\frac{1}{3}$  s. ¿Cuántas revoluciones da durante todo ese tiempo?

#### SOLUCIÓN

Desde  $t = 0$  a  $t = \frac{1}{2}$ :  $\theta_1 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t = \frac{1}{2}(0 + 200/60 \text{ rev/s})(\frac{1}{2} \text{ s}) = 0,83 \text{ rev.}$

Desde  $t = \frac{1}{2}$  a  $t = 2\frac{1}{2}$ :  $\theta_2 = \omega t = (200/60 \text{ rev/s})(2 \text{ s}) = 6,67 \text{ rev.}$

Desde  $t = \frac{1}{2}$  al reposo:  $\theta_3 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t = \frac{1}{2}(200/60 \text{ rev/s} + 0)(\frac{1}{3} \text{ s}) = 0,56 \text{ rev.}$

El número total de revoluciones es  $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 8,06 \text{ rev.}$

- 12.33.** En la Figura 12.18 se muestran dos discos de fricción. Deducir la expresión del cociente de velocidades angulares en función de los radios.

#### SOLUCIÓN

Las velocidades lineales de los puntos coincidentes A y B de las dos ruedas son iguales. Si no fuera así, las ruedas resbalarían una con otra.

Las velocidades lineales de los puntos A y B son, respectivamente,

$$v_A = R_1\omega_1 \quad v_B = R_2\omega_2$$

Pero  $v_A = v_B$  si la transmisión es desmodrómica, o sea, sin deslizamiento. Entonces

$$R_1\omega_1 = R_2\omega_2 \quad \text{o sea,} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

- 12.34.** El punto P de la Figura 12.19 describe una trayectoria circular en sentido antihorario de modo que la longitud de arco que recorre es  $s = t^3 + 3$ . El radio de la trayectoria es 4 m. Las unidades de  $s$  y  $t$  son metros y segundos, respectivamente. Hallar las componentes rectangulares de la velocidad ( $v_x$ ,  $v_y$ ) cuando  $t = 1$  s.

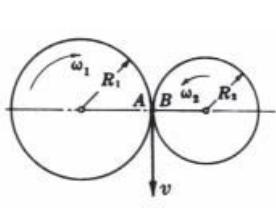


Figura 12.18

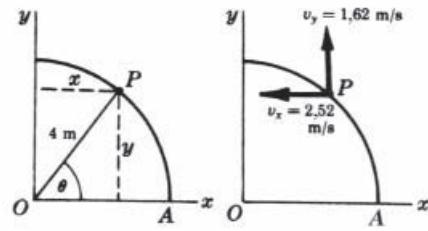


Figura 12.19

**SOLUCIÓN**

Sea  $AP$  la longitud recorrida en 1 s, o sea,  $AP = 1^3 + 3 = 4$  m. Se ve que  $x = 4 \cos \theta$  e  $y = 4 \sin \theta$ . Derivando,  $v_x = (-4 \sin \theta) d\theta/dt$  y  $v_y = (4 \cos \theta) d\theta/dt$ .

Esos valores pueden hallarse con tal que  $\theta$  pueda expresarse en función del tiempo. La relación  $s = r\theta$  da  $\theta = s/r = (t^3 + 3)/4$ , donde  $\theta$  debe estar en radianes. Derivando, se obtiene  $d\theta/dt = 0,75t^2$ . Cuando  $t = 1$  s,  $\theta = 1$  rad y  $d\theta/dt = 0,75$  rad/s.

Sustituyendo, resulta  $v_x = -2,52$  m/s y  $v_y = 1,62$  m/s. El signo negativo indica que la componente  $x$  de la velocidad está dirigida hacia la izquierda. La componente  $y$  de la velocidad está dirigida hacia arriba.

La velocidad total es  $v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = 3,0$  m/s. Este valor podría haberse obtenido directamente de  $v = r d\theta/dt = 4(0,75t^2)$  con  $t = 1$  s, o bien de  $s = t^3 + 3$  y, de aquí,  $v = ds/dt = 3t^2$ .

- 12.35.** En el Problema 12.34, obtener las componentes rectangulares de la aceleración,  $a_x$  y  $a_y$ , cuando  $t = 1$  s.

**SOLUCIÓN**

Derivando la expresión de  $v_x$ , obtenemos  $a_x = -4 \cos \theta (d\theta/dt)^2 - 4 \sin \theta d^2\theta/dt^2$

Como  $d\theta/dt = 0,75t^2$ , será  $d^2\theta/dt^2 = 1,5t$ .

Para  $t = 1$  s,  $a_x = -4(\cos 1)(0,75)^2 - 4(\sin 1)(1,5) = 6,27$  m/s<sup>2</sup>; o sea, hacia la izquierda.

Análogamente,  $a_y = -4 \sin \theta (d\theta/dt)^2 + 4 \cos \theta d^2\theta/dt^2 = +1,35$  m/s<sup>2</sup>; o sea, hacia arriba.

La aceleración total es  $a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = 6,41$  m/s<sup>2</sup>.

Este valor también podría haberse obtenido combinando las componentes tangencial  $a_t$  y normal  $a_n$  de la aceleración. Estas son  $a_t = r\alpha = r d^2\theta/dt^2 = 4(1,5t)$ , es decir, 6 m/s<sup>2</sup>, y  $a_n = r\omega^2 = r(d\theta/dt)^2 = 4(0,75)^2$ , es decir, 2,25 m/s<sup>2</sup>. Por tanto,

$$a = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2} = 6,41 \text{ m/s}^2.$$

Nótese que  $a_t = d^2s/dt^2 = 6t$  y  $v_n = v^2/r = 9t^4/4$  dan los mismos resultados con  $t = 1$ .

- 12.36.** Las componentes  $x$  e  $y$ , en pies, de la posición de un cuerpo son

$$x = 4t^2 - 3t \quad y = t^3 - 10$$

Hallar la velocidad y la aceleración del punto cuando  $t = 2$  s.

**SOLUCIÓN**

Derivando, obtenemos las componentes de la velocidad

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 8t - 3 \quad v_y = 3t^2$$

En  $t = 2$  s,  $v_x = 13$  ft/s y  $v_y = 12$  ft/s. Por tanto,

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = 17,7 \text{ ft/s} \quad y \quad \theta_x = \arg \frac{v_y}{v_x} = \arg \frac{12}{13} = 42,7^\circ$$

donde  $\theta_x$  es el ángulo entre la velocidad total y el eje  $x$ .

Derivando otra vez, obtenemos las componentes de la aceleración:  $a_x = dv_x/dt = 8$  y  $a_y = dv_y/dt = 6t$ . En  $t = 2$  s,  $a_x = 8$  ft/s<sup>2</sup> y  $a_y = 12$  ft/s<sup>2</sup>. Por tanto,

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = 14,4 \text{ ft/s}^2 \quad \text{y} \quad \phi_x = \arctg \frac{a_y}{a_x} = \arctg \frac{12}{8} = 56,3^\circ$$

- 12.37.** Un automóvil se dirige hacia el sur con una velocidad absoluta de 20 mi/h. En el punto  $O$ , situado a 50 ft al este del trayecto recto, hay un observador inmóvil. Cuando el vehículo se encuentra exactamente al oeste del observador, ¿cuál es su velocidad angular relativa al observador? Tras recorrer 50 ft hacia el sur, ¿cuál es su velocidad angular relativa al observador en  $O$ ?

#### SOLUCIÓN

Tal como se ilustra en la Figura 12.20, la velocidad  $v_{A/O}$  del automóvil respecto a  $O$  cuando está en  $A$  es de 20 mi/h, o sea, 29,3 ft/s.

Sin embargo, la velocidad lineal de  $A$  respecto a  $O$  (perpendicular a  $OA$  en este caso) es el producto de la distancia  $OA$  por la velocidad angular de  $A$  respecto a  $O$ . Entonces,

$$\begin{aligned} v_{A/O} &= OA \times \omega_{A/O} \\ 29,3 \text{ ft/s} &= 50 \text{ ft} \times \omega_{A/O} \quad \text{y} \quad \omega_{A/O} = 0,588 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Para la parte siguiente del problema, adviértase que la velocidad absoluta  $v_B$  del vehículo cuando está en  $B$  sigue siendo de 20 mi/h (29,3 ft/s) dirigida hacia el sur. La componente  $v_{B/O}$  (velocidad del automóvil respecto a  $O$  cuando está en  $B$ ) es perpendicular a  $BO$ ; por tanto,  $v_{B/O} = 29,3 \cos 45^\circ = 20,8$  ft/s. Entonces,

$$v_{B/O} = OB \times \omega_{B/O} \quad 20,8 \text{ ft/s} = (50\sqrt{2} \text{ ft})(\omega_{B/O}) \quad \text{y} \quad \omega_{B/O} = 0,294 \text{ rad/s}$$

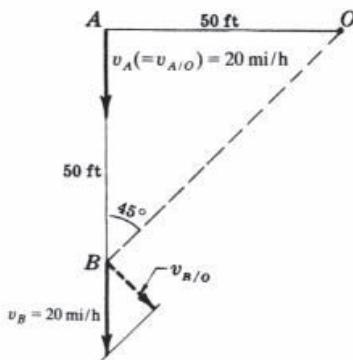


Figura 12.20

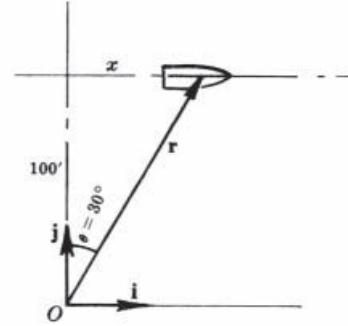


Figura 12.21

- 12.38.** Una embarcación navega a 12 mi/h con rumbo este. A 100 ft al sur del trayecto recto, hay un observador inmóvil. Hallar la velocidad angular de la embarcación relativa al observador para la posición indicada en la Figura 12.21.

#### SOLUCIÓN

Tomamos unos vectores unitarios  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  en las direcciones este y norte, respectivamente. Sea  $\mathbf{r}$  el vector de posición de la embarcación respecto al observador  $O$ . Entonces,

$$\mathbf{r} = xi + 100\mathbf{j} = 100 \operatorname{tg} \theta \mathbf{i} + 100\mathbf{j}$$

La velocidad  $\mathbf{v}$  de la embarcación es

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = 100(\sec^2 \theta)(\dot{\theta})\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$

Como la celeridad es  $v = 12 \text{ mi/h} = 17,6 \text{ ft/s}$  y  $\theta = 30^\circ$ ,

$$17,6 = 100(\sec^2 30^\circ)\theta, \quad \text{o sea,} \quad \omega = \theta = 0,132 \text{ rad/s, } (\text{--})$$

**12.39.** El movimiento de un punto está descrito por las ecuaciones siguientes:

$$v_x = 20t + 5 \quad v_y = t^2 - 20$$

Se sabe, además, que  $x = 5$  m e  $y = -15$  m cuando  $t = 0$ . Hallar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración cuando  $t = 2$  s.

#### SOLUCIÓN

Escribiendo las ecuaciones dadas como  $v_x = dx/dt = 20t + 5$  y  $v_y = dy/dt = t^2 - 20$ , e integrando seguidamente, resultan las expresiones  $x = 10t^2 + 5t + C_1$ ,  $y = \frac{1}{3}t^3 - 20t + C_2$ .

Para determinar  $C_1$ , hacemos  $x = 5$  y  $t = 0$  en la expresión de  $x$ , y así resulta  $C_1 = 5$ .

Para determinar  $C_2$ , hacemos  $y = -15$  y  $t = 0$  en la expresión de  $y$ , y así resulta  $C_2 = -15$ .

Sustituyendo los valores de  $C_1$  y  $C_2$ , las ecuaciones de movimiento quedan

$$x = 10t^2 + 5t + 5 \quad y = \frac{1}{3}t^3 - 20t - 15$$

Derivando  $v_x$  y  $v_y$ , obtenemos las componentes de la aceleración:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 20 \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2t$$

Sustituyendo  $t = 2$  s en las correspondientes expresiones de las componentes del desplazamiento, la velocidad y la aceleración, se obtienen los valores siguientes:  $x = 55$  m,  $y = -53$  m;  $v_x = 45$  m/s,  $v_y = -16$  m/s;  $a_x = 20$  m/s<sup>2</sup>,  $a_y = 4$  m/s<sup>2</sup>.

Los módulos, direcciones y sentidos del desplazamiento, la velocidad y la aceleración pueden hallarse combinando las componentes del modo conocido.

**12.40.** La polea de 100 mm de diámetro de un generador gira merced a una correa que se mueve a 20 m/s con una aceleración de 6 m/s<sup>2</sup>. Del árbol de la polea es solidario un ventilador de 150 mm de diámetro exterior. ¿Cuánto valen la velocidad y la aceleración lineales del borde del ventilador?

#### SOLUCIÓN

En la Figura 12.22, el punto A de la polea tiene la misma velocidad que el punto de la correa con el que coincide en el instante considerado. Por tanto, la velocidad angular  $\omega$  de la polea (y también la del ventilador engranado al mismo árbol) vale  $v/r = 20/0,05 = 400$  rad/s. La velocidad del borde del ventilador será  $v_B = (0,075)(400) = 30$  m/s.

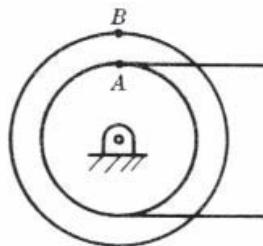


Figura 12.22

La componente tangencial de la aceleración lineal del punto A es igual a la aceleración de la correa; es decir,  $a_t = r\alpha$ , o sea,  $6 = 0,05\alpha$ . De aquí, la aceleración angular  $\alpha$  del sistema es 120 rad/s<sup>2</sup>. Por ello, la aceleración tangencial del punto B será  $(0,075)(400)^2 = 9$  m/s<sup>2</sup>.

Desde luego, posee una componente normal que vale  $r\omega^2 = (0,075)(400)^2 = 12000$  m/s<sup>2</sup>.

Por tanto, el módulo de la aceleración lineal es  $a = \sqrt{(12000)^2 + (9)^2} = 12000$  m/s<sup>2</sup>.

**12.41.** Se lanza una bola formando un ángulo de 40° con la horizontal. ¿Qué altura alcanza si aterriza a 100 ft de distancia? Despréciese la resistencia del aire.

**SOLUCIÓN**

Situamos el origen de los ejes  $x$  e  $y$  en el punto de lanzamiento. Al despreciar la resistencia del aire, la componente  $x$  de la aceleración es nula. La componente  $y$  de la aceleración es  $-g$ .

Según (7), con  $a_x = 0$  y  $a_y = -32,2 \text{ ft/s}^2$ ,

$$x = v_{0x}t \quad \text{e} \quad y = v_{0y}t - \frac{1}{2}(32,2)t^2$$

Dado que cuando  $x = 100$ , es  $y = 0$ ,  $v_{0x} = v_0 \cos 40^\circ$  y  $v_{0y} = v_0 \sin 40^\circ$ , las ecuaciones anteriores quedan

$$100 = v_0 \cos 40^\circ(t)$$

$$0 = v_0 \sin 40^\circ(t) - \frac{1}{2}(32,2)(t)^2$$

Tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones que nos permite obtener  $t = 2,28 \text{ s}$  y  $v_0 = 57,3 \text{ ft/s}$ . La bola llega a su máxima altura para la mitad del alcance; por consiguiente, para  $t = 1,14 \text{ s}$ ,  $y_{\max} = 57,3 \sin 40^\circ(1,14) - \frac{1}{2}(32,2)(1,14)^2 = 21,1 \text{ ft}$ .

**Problemas propuestos**

- 12.42.** Un automóvil viaja a 30 mi/h durante 6 min, luego a 60 mi/h durante 10 min y, finalmente, a 5 mi/h durante 3 min. ¿Cuál es su velocidad media en todo ese tiempo?

*Resp.* 61,3 ft/s

- 12.43.** Un objeto propulsado a reacción ejecuta un movimiento rectilíneo de acuerdo con  $x = 2t^3 - t^2 - 2$ , donde  $x$  está en metros, y  $t$  en segundos. ¿Qué distancia recorre cuando su celeridad varía de 4 m/s a 48 m/s? *Resp.*  $\Delta x = 44 \text{ m}$

- 12.44.** Un cuerpo recorre una recta de modo que su desplazamiento respecto a un punto fijo de la misma recta está dado por  $s = 3t^3 + 2t$ . Calcular el desplazamiento, la velocidad y la aceleración al cabo de tres segundos. *Resp.* 33 ft, 20 ft/s, 6 ft/s<sup>2</sup>

- 12.45.** El movimiento de una partícula está definido por  $s = t^4 - 3t^2 + 2t^2 - 8$ , donde  $s$  está en metros, y  $t$  en segundos. Hallar la velocidad  $\dot{s}$  y la aceleración  $\ddot{s}$  cuando  $t = 2 \text{ s}$ .

*Resp.*  $\dot{s} = +4 \text{ m/s}$ ,  $\ddot{s} = +16 \text{ m/s}^2$

- 12.46.** Una motocicleta viaja entre dos puntos de una carretera recta con una celeridad media de 88 ft/s. Regresa con una celeridad media de 44 ft/s. ¿Cuál es la celeridad media del viaje completo?

*Resp.* 58,7 ft/s

- 12.47.** Un automóvil acelera uniformemente desde el reposo hasta 72 km/h y luego frena decelerándose uniformemente hasta detenerse. Si el tiempo total es 15 s, ¿qué distancia recorre?

*Resp.*  $d = 150 \text{ m}$

- 12.48.** Se dispara una bala con una velocidad en boca de 600 m/s. Si la longitud del cañón es 750 mm, ¿cuál es la aceleración media?

*Resp.* 240 km/s<sup>2</sup>

- 12.49.** Un automóvil acelera uniformemente desde el reposo a razón de 8 ft/s<sup>2</sup>. ¿Cuánto tarda en alcanzar una velocidad de 30 mi/h y en qué distancia? *Resp.* 5,5 s, 121 ft

- 12.50.** Desde un globo que sube a una velocidad constante de 30 ft/s se deja caer una piedra. Si ésta tarda 10 s en llegar a tierra, ¿a qué altura estaba el globo cuando se soltó la piedra?

*Resp.* 1310 ft

- 12.51.** Desde un globo que se eleva con una velocidad constante de 4 m/s, una persona lanza hacia arriba una bola con una velocidad de 1,2 m/s relativa al globo. ¿Cuánto tarda la bola en regresar al globo?

*Resp.*  $t = 0,245$  s

- 12.52.** Con velocidad inicial nula se deja caer una piedra dentro de un pozo. El chapoteo se oye al cabo de 3,63 s. ¿A qué distancia de la superficie del suelo está la superficie del agua? Se supone que la velocidad del sonido es 1090 ft/s.

*Resp.*  $s = 193$  ft

- 12.53.** Desde el techo de un cobertizo de 8 ft de altura, el niño A lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una celeridad de 30 ft/s. En el mismo instante, y desde el suelo, el niño B lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una celeridad de 40 ft/s. Hallar en qué instante ambas bolas están a la misma altura sobre el suelo. ¿Cuál es esa altura?

*Resp.*  $t = 0,8$  s,  $h = 21,7$  ft

- 12.54.** Un camión, que viaja a celeridad constante, pasa junto a un coche policial estacionado. Al instante, el policía inicia la persecución acelerando constantemente hasta las 100 mi/h en 10 segundos, tras lo cual mantiene esa velocidad. Si el policía alcanza al camión en media milla, ¿cuál es la celeridad constante del camión?

*Resp.*  $v = 65$  mi/h

- 12.55.** Un coche policial equipado con radar detecta a un automóvil que viaja a 70 mi/h. El coche policial inicia la persecución a los 30 s de la observación y acelera hasta 100 mi/h en 20 segundos. Suponiendo que las celeridades se mantengan sobre una carretera recta, ¿a qué distancia del puesto de observación acaba la persecución?

*Resp.*  $s = 13.700$  ft

- 12.56.** Sobre una carretera horizontal recta, un automóvil acelera desde el reposo. Un segundo automóvil que arranca del mismo punto 6 s después sin velocidad inicial acelera a  $6 \text{ m/s}^2$  y alcanza al primero a 400 m del punto de partida. ¿Cuál es la aceleración del primer automóvil?

*Resp.*  $a = 2,62 \text{ m/s}^2$

- 12.57.** El avión A sale de un aeropuerto con rumbo norte a 120 mi/h. El avión B sale del mismo aeropuerto 20 min más tarde con rumbo norte a 150 mi/h. ¿Cuánto tarda B en alcanzar a A?

*Resp.*  $t = 1,33$  h

- 12.58.** Una partícula recorre una recta animada de la aceleración que se representa en la Figura 12.23. Hallar el desplazamiento y la velocidad en los instantes  $t = 1, 2, 3$  y  $4$  s. Se supone que la velocidad inicial es  $+3$  ft/s y que el desplazamiento inicial es cero.

*Resp.*  $v_1 = +1$  ft/s,  $s_1 = +2$  ft;  $v_2 = +3$  ft/s,  $s_2 = +4$  ft;  $v_3 = -1$  ft/s,  $s_3 = +5$  ft;  $v_4 = -3$  ft/s,  $s_4 = +3$  ft

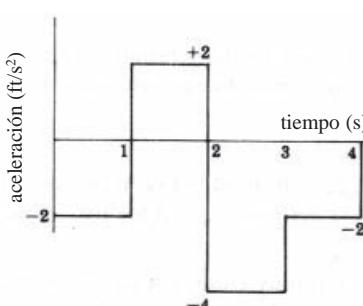


Figura 12.23

- 12.59.** Un partícula de polvo cae desde un ascensor que sube con una velocidad de 3 m/s. Si la partícula llega al fondo en 2 s, ¿a qué altura sobre el fondo estaba el ascensor cuando la partícula empezó a caer? *Resp.  $s = 13,6 \text{ m}$*

- 12.60.** Se dispara hacia arriba una bala con una celeridad de 600 m/s. Teóricamente, ¿a qué altura sube? *Resp.  $18,4 \text{ km}$*

- 12.61.** Desde el borde de un acantilado a 50 ft sobre el nivel del mar, se lanza verticalmente hacia arriba una bola con una celeridad de 30 ft/s. ¿A qué altura sube respecto al nivel del mar? ¿Cuánto tarda en chocar con el agua? ¿Con qué velocidad choca con el agua?

*Resp.  $h = 64,0 \text{ ft}$ ,  $t = 2,93 \text{ s}$ ,  $v = 64,3 \text{ ft/s}$*

- 12.62.** Una partícula se mueve con una aceleración  $a = -6v$ , donde  $a$  está en  $\text{ft/s}^2$  y  $v$ , en  $\text{ft/s}$ . Cuando  $t = 0 \text{ s}$ , es  $s = 0$  y  $v = 9 \text{ ft/s}$ . Calcular el desplazamiento, la velocidad y la aceleración cuando  $t = 0,5 \text{ s}$ .

*Resp.  $s = 1,43 \text{ ft}$ ,  $\dot{s} = v = 0,448 \text{ ft/s}$ ,  $\ddot{s} = a = 2,69 \text{ ft/s}^2$*

- 12.63.** Un cuerpo animado de una velocidad  $v_0$  penetra en un medio que ofrece una resistencia al avance proporcional al cuadrado de la velocidad; o sea,  $a = -kv^2$ . Hallar la velocidad en función del tiempo  $t$ . *Resp.  $v = 1/(kt + 1/v_0)$*

- 12.64.** La celeridad de una partícula es  $v = 2t^3 + 5t^2$ . ¿Qué distancia recorre mientras su celeridad aumenta de 7 a 99 ft/s? *Resp.  $s = 83,3 \text{ ft}$*

- 12.65.** Una partícula se mueve hacia la derecha partiendo del reposo con una aceleración de  $6 \text{ m/s}^2$  hasta que su velocidad es de  $12 \text{ m/s}$  hacia la derecha. Seguidamente se ve sometida a una aceleración de  $12 \text{ m/s}^2$  hacia la izquierda hasta recorrer una distancia de  $36 \text{ m}$  en total. Hallar el tiempo transcurrido. *Resp.  $t = 4,73 \text{ s}$*

- 12.66.** De un grifo, situado a 8 in por encima del sumidero, caen gotas de agua a razón de seis gotas por segundo. Cuando una gota choca con el sumidero, ¿a qué altura sobre el sumidero está la gota siguiente? *Resp.  $h = 7,75 \text{ in}$*

- 12.67.** Una partícula que se mueve con una velocidad ascendente de  $6 \text{ m/s}$  está sometida a una aceleración descendente hasta que su desplazamiento es de  $2 \text{ m}$  por debajo del punto en que empezó a actuar la aceleración. Ésta, a continuación, cesa durante 3 segundos. Seguidamente, sobre la partícula actúa una aceleración ascendente de  $4 \text{ m/s}^2$  durante 5 s. Hallar el desplazamiento y la distancia recorrida. *Resp.  $s = -7,4 \text{ m}$  respecto al punto inicial,  $d = 62,2 \text{ m}$*

- 12.68.** En la Figura 12.24 se representa la curva velocidad-tiempo de un punto que se mueve en línea recta. ¿Qué distancia recorre en los dos segundos? *Resp.  $x = 5,09 \text{ ft}$*

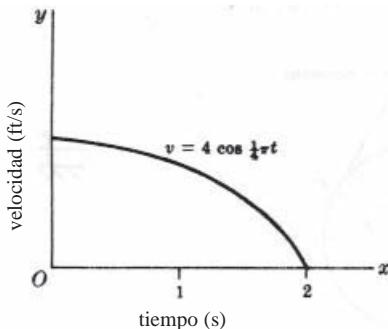


Figura 12.24

- 12.69.** Un objeto se mueve en línea recta con una aceleración constante de  $2 \text{ m/s}^2$ . ¿Cuánto tarda su celeridad en cambiar de 5 a 8 m/s? ¿Qué distancia recorre durante ese tiempo?

Resp.  $t = 1,5 \text{ s}$ ,  $d = 9,75 \text{ m}$

- 12.70.** El movimiento rectilíneo de una partícula está definido por la aceleración  $a = t^3 - 2t^2 + 7$ , donde  $a$  está en  $\text{ft/s}^2$  y  $t$ , en segundos. Cuando  $t = 1 \text{ s}$ , la velocidad es 3,58 ft/s y el desplazamiento, +3,90 ft. Calcular el desplazamiento, la velocidad y la aceleración cuando  $t = 2 \text{ s}$ .

Resp.  $s = 15,9 \text{ ft}$ ,  $v = 9,67 \text{ ft/s}$ ,  $a = 7 \text{ ft/s}^2$

- 12.71.** Un punto se mueve a lo largo del eje  $x$  con una velocidad  $v = x^{1/2} \text{ m/s}$ . Sabiendo que cuando  $t = 0$ , es  $v = 1 \text{ m/s}$ , hallar la posición, la velocidad y la aceleración cuando  $t = 4 \text{ s}$ .

Resp.  $x = 9 \text{ m}$ ,  $v = 3 \text{ m/s}$ ,  $a = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2$

- 12.72.** En el sistema de la Figura 12.25, hallar la velocidad y la aceleración del bloque 3 en el instante considerado. Resp.  $v_3 = 10,5 \text{ ft/s} (\uparrow)$ ,  $a_3 = 5,0 \text{ ft/s} (\uparrow)$

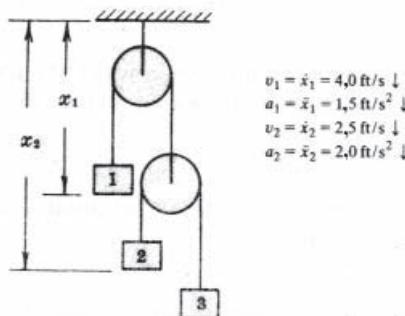


Figura 12.25

- 12.73.** Un punto describe la trayectoria  $y = \frac{1}{3}x^3$  con una celeridad constante de 8 ft/s. ¿Cuáles son las componentes  $x$  e  $y$  de la velocidad, y cuánto vale la velocidad, cuando  $x = 3 \text{ ft}$ ?

Resp.  $\dot{x} = 3,58 \text{ ft/s}$ ,  $\dot{y} = 7,16 \text{ ft/s}$ ,  $a = 3,82 \text{ ft/s}^2$

- 12.74.** Una partícula recorre la trayectoria  $y = \frac{1}{3}x^3 + 2$ . Cuando  $x = 2 \text{ in}$ , la componente  $x$  de la velocidad es 3 in/s. Hallar la velocidad total.

Resp.  $v = 12,4 \text{ in/s}$ ,  $\angle 76^\circ$

- 12.75.** Un punto posee una aceleración normal de  $120 \text{ ft/s}^2$  al recorrer una circunferencia con una celeridad perimetral de  $80 \text{ ft/s}$ . ¿Cuál es el radio de la circunferencia?

Resp.  $r = 53,3 \text{ ft}$

- 12.76.** Un punto  $P$  describe una circunferencia de radio  $a$  con una celeridad constante antihoraria  $v$ , tal como se muestra en la Figura 12.26. Tomando como polo  $O$  en el extremo izquierdo del diámetro horizontal, deducir las expresiones de las componentes radial y transversal de la aceleración. (Sugerencia:  $r = 2a \cos \theta$ .)

Resp.  $a_r = -(v^2/a) \cos \theta$ ,  $a_\theta = -(v^2/a) \operatorname{sen} \theta$

- 12.77.** En el problema anterior, demostrar que la aceleración total es  $v^2/a$ , que es la componente normal en el movimiento circular de un punto a celeridad constante (no hay componente tangencial).

- 12.78.** En el mecanismo de manivela y corredera de la Figura 12.27, la manivela gira a 200 rpm. Hallar la velocidad y la aceleración de la cruceta cuando  $\theta = 30^\circ$ .

Resp.  $v = 7,6 \text{ m/s}$ ,  $a = 260 \text{ m/s}^2$

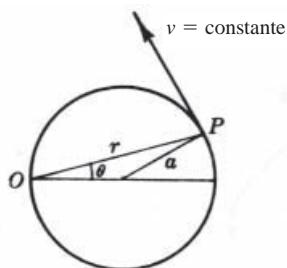


Figura 12.26

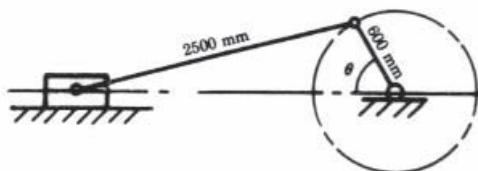


Figura 12.27

- 12.79.** En el Problema 12.78, hallar la velocidad de la cruceta cuando  $\theta = 90^\circ$ . ¿Cuál es la velocidad angular de la biela que enlaza la cruceta con la manivela?

Resp.  $v = 12,6 \text{ m/s}$ , cero

- 12.80.** Una partícula oscila con una aceleración  $a = -kx$ . Hallar  $k$  si es  $v = 2 \text{ ft/s}$  cuando  $x = 0$ , y  $v = 0$  cuando  $x = +2 \text{ ft/s}$ . Resp.  $k = +1$

- 12.81.** Una partícula ejecuta un movimiento armónico simple con una frecuencia de 30 ciclos/min y una amplitud de 6 mm. Hallar la velocidad y la aceleración máximas.

Resp.  $v_{\max} = 18,8 \text{ mm/s}$ ,  $a_{\max} = 59,2 \text{ mm/s}^2$

- 12.82.** Un cuerpo ejecuta un movimiento armónico simple de periodo 6 s y amplitud 4 ft. Hallar la velocidad y la aceleración máximas.

Resp.  $\frac{4}{3}\pi \text{ ft/s}$ ,  $\frac{4}{9}\pi^2 \text{ ft/s}^2$

- 12.83.** Una partícula recorre una circunferencia de 10 ft animada de una celeridad constante de 15 ft/s. ¿Cuál es su aceleración normal? Resp.  $45 \text{ ft/s}^2$

- 12.84.** Los puntos del canto de un volante de inercia de 3 m de diámetro tienen una aceleración normal constante de  $15 \text{ m/s}^2$ . ¿Cuál es la celeridad angular del volante?

Resp.  $3,26 \text{ rad/s}$

- 12.85.** Un punto describe una trayectoria de 3 m de diámetro de modo que el camino recorrido es  $s = 3t^2$ . ¿Cuál es su aceleración al cabo de dos segundos? Resp.  $6 \text{ m/s}^2$

- 12.86.** Una partícula recorre una circunferencia de 4 in de diámetro. La distancia, medida a lo largo del trayecto, está dada por  $s = 8t^2$  in. ¿Cuánto vale el módulo de la aceleración total en el instante en que la partícula ha recorrido la circunferencia por primera vez?

Resp.  $a = 667 \text{ in/s}^2$

- 12.87.** El volante de inercia de un automóvil alcanza una celeridad de 2000 rpm en 45 s. Calcular su aceleración angular, suponiendo que el movimiento es uniforme.

Resp.  $a = 4,65 \text{ rad/s}^2$

- 12.88.** Un rotor de 0,592 in de diámetro gira a 2.000.000 rpm en una cámara de alto vacío. ¿Cuál es la aceleración de un punto del borde?

Resp.  $a_n = 1,08 \times 10^9 \text{ ft/s}^2$

- 12.89.** Un punto recorre una circunferencia con su posición a partir del reposo dada por  $s = t^3 + 5t$ , donde  $s$  y  $t$  son metros y segundos, respectivamente. Sabiendo que el módulo de la aceleración vale  $8,39 \text{ m/s}^2$  cuando  $t = 0,66 \text{ s}$ , ¿cuál es el diámetro de la trayectoria?

Resp.  $d = 10,8 \text{ m}$

- 12.90.** Una barra horizontal de 1,2 m de largo gira alrededor de un eje vertical que pasa por su punto medio. Su velocidad angular varía uniformemente de 0,5 rad/s a 2 rad/s en 20 s. ¿Cuál es la aceleración lineal de un punto del extremo de la barra a los cinco segundos de iniciarse la aceleración?

Resp.  $a_t = 0,045 \text{ m/s}^2$ ,  $a_n = 0,46 \text{ m/s}^2$

- 12.91.** La partícula  $P$  recorre una circunferencia de radio 2,5 m, tal como se muestra en la Figura 12.28. Su celeridad decrece (la componente tangencial de la aceleración tiene así el sentido contrario al de la velocidad) en el instante considerado. Si la aceleración total es la indicada en la figura, hallar la velocidad de  $P$  y la aceleración angular del segmento rectilíneo  $OP$  en ese instante.

Resp.  $v = 6,07 \text{ m/s}$ ,  $\theta_x = 135^\circ$ ;  $\alpha = 3,4 \text{ rad/s}^2$

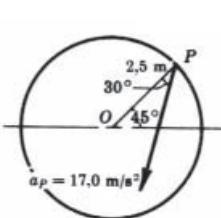


Figura 12.28

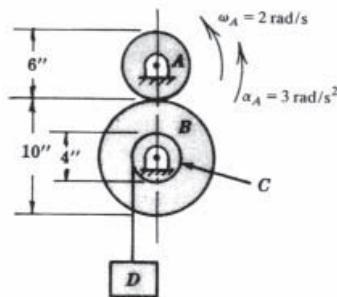


Figura 12.29

- 12.92.** El disco  $A$  mueve sin deslizamiento al disco  $B$ . Hallar la velocidad y la aceleración del peso  $D$  que está unido por una cuerda al tambor  $C$ , el cual está enchavetado al disco  $B$ , tal como se muestra en la Figura 12.29.

Resp.  $v_D = 2,40 \text{ in/s}$  ( $\uparrow$ ),  $a_D = 3,60 \text{ in/s}^2$  ( $\uparrow$ )

- 12.93** La aceleración angular de un rotor está dada por  $\alpha = Kt^{-1/2}$ , donde  $\alpha$  está en radianes y  $t$  está en segundos. Cuando  $t = 1 \text{ s}$ , la velocidad angular es  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  y el ángulo girado es  $\theta = 3,33 \text{ rad}$ . Cuando  $t = 0 \text{ s}$ , el ángulo girado es  $\theta = -4 \text{ rad}$ . Hallar  $\theta$ ,  $\omega$  y  $\alpha$  cuando  $t = 4 \text{ s}$ .

Resp.  $\theta = 46,7 \text{ rad}$ ,  $\omega = 18 \text{ rad/s}$ ,  $\alpha = 2 \text{ rad/s}$

- 12.94.** En función de las componentes  $x$  e  $y$ , el desplazamiento en metros de un punto está dado por

$$x = 2t^2 + 5t \quad \text{e} \quad y = 4,9t^2$$

Hallar la velocidad y la aceleración a los cuatro segundos.

Resp.  $v_x = 21 \text{ m/s}$ ,  $v_y = 39,2 \text{ m/s}$ ;  $a_x = 4 \text{ m/s}^2$ ,  $a_y = 9,8 \text{ m/s}^2$

- 12.95.** Un ciclista se desplaza 250 m hacia el norte y luego 160 m hacia el noroeste. ¿Cuál es el desplazamiento neto? ¿Y la distancia recorrida?

Resp.  $s = 381 \text{ m}$ ,  $72,7^\circ$  norte cuarta noroeste;  $d = 410 \text{ m}$

- 12.96.** El automóvil  $A$  se mueve hacia el noroeste a 100 km/h. El automóvil  $B$  se mueve hacia el este a 60 km/h. Hallar la velocidad de  $A$  respecto a  $B$  y la velocidad de  $B$  respecto a  $A$ .

Resp.  $v_{A/B} = -131\mathbf{i} + 70,7\mathbf{j} \text{ km/h}$ ,  $v_{B/A} = 131\mathbf{i} - 70,7\mathbf{j} \text{ km/h}$

- 12.97.** El cuerpo  $A$  tienen una velocidad de 15 km/h, de oeste a este, respecto al cuerpo  $B$  y éste a su vez tiene una velocidad de 50 km/h, de noreste a suroeste, respecto al cuerpo  $C$ . Hallar la velocidad de  $A$  respecto a  $C$ .

Resp.  $v_{A/C} = 40,8 \text{ km/h}$ , a  $60^\circ$  suroeste

- 12.98.** En la Figura 12.30 un foco giratorio está situado a una altura  $l$  sobre un suelo horizontal. El foco gira constantemente a  $N$  vueltas por minuto en torno a un eje perpendicular al papel. Deducir las

expresiones de la velocidad y la aceleración de la mancha luminosa al moverse por el suelo. En un instante  $t$ , el ángulo entre la altura  $l$  y el rayo luminoso es  $\theta$ .

*Resp.*  $\dot{x} = 0,105lN \sec^2 \theta$ ,  $\ddot{x} = 0,022lN^2 \sec^2 \theta \operatorname{tg} \theta$

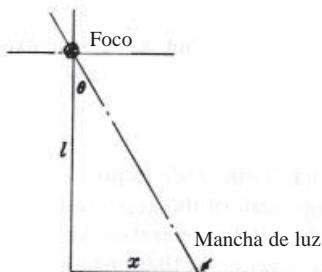


Figura 12.30

- 12.99.** En la Figura 12.31 se representa la curva  $v-t$  de una partícula que se mueve en línea recta. ¿Qué distancia ha recorrido después de 10 s? ¿Cuál es su aceleración a los 9 s?

*Resp.*  $s = 120 \text{ ft}$ ,  $a = -8 \text{ ft/s}^2$

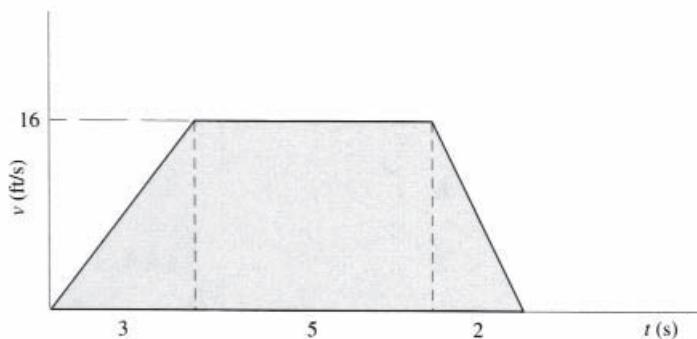


Figura 12.31

- 12.100.** En la Figura 12.32 se representa la curva  $a-t$  de una partícula que se mueve en línea recta. Hallar su velocidad tras haber recorrido 30 m, siendo 10 m/s su velocidad inicial.

*Resp.*  $v = 20 \text{ m/s}$

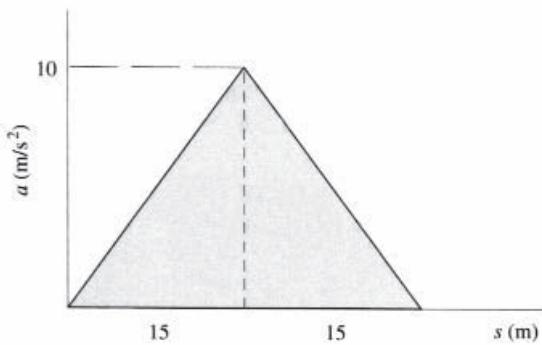


Figura 12.32

- 12.101.** En la Figura 12.33 se representa la curva  $a-t$  de una partícula que se mueve en línea recta. Su desplazamiento y velocidad iniciales son nulos. ¿En qué instante y para qué desplazamiento vuelve al reposo?

*Resp.*  $t = 10 \text{ s}$ ,  $x = 29,3 \text{ m}$

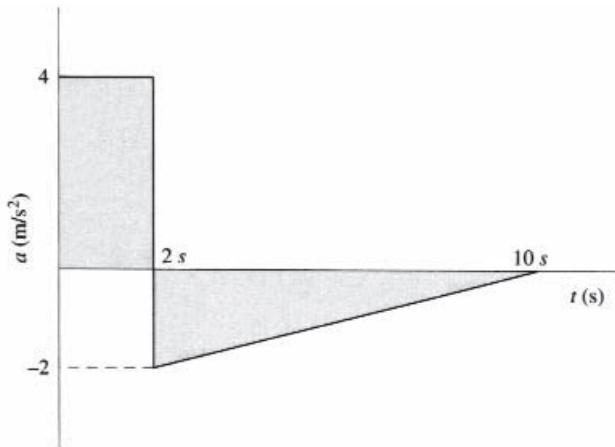


Figura 12.33

- 12.102.** En la Figura 12.34 se representa la curva  $a-s$  de una partícula que se mueve en línea recta. Si, inicialmente,  $s = 0$  y  $v = 4 \text{ m/s}$ , ¿cuál es la velocidad en la posición de 8 m? Y en la de 12 m?  
*Resp.*  $v = 10,6 \text{ m/s}$ ,  $v = 12 \text{ m/s}$

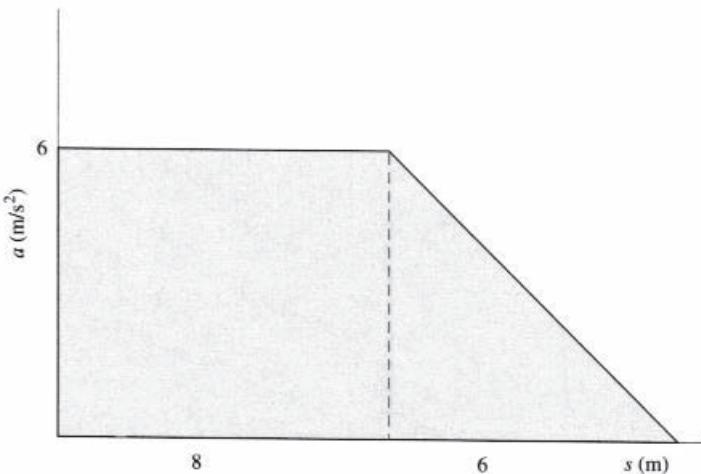


Figura 12.34

- 12.103.** Una partícula parte del reposo para describir una circunferencia de 2 ft de radio. Su aceleración tangencial, en función de la longitud de arco, aumenta linealmente desde cero hasta  $10 \text{ ft/s}^2$  en un recorrido completo de la circunferencia, tras lo cual la aceleración tangencial permanece constante. ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración normal tras el segundo recorrido de la circunferencia?

*Resp.*  $v = 19,4 \text{ ft/s}$ ,  $a_n = 188 \text{ ft/s}^2$

- 12.104.** Un proyectil se dispara con un ángulo de elevación de  $30^\circ$  y una celeridad inicial de  $1500 \text{ ft/s}$ . Despreciando la resistencia del aire, hallar el alcance, el tiempo de vuelo y la altura máxima del proyectil.

*Resp.*  $R = 60,400 \text{ ft}$ ,  $t = 46,6 \text{ s}$ ,  $h = 8760 \text{ ft}$

- 12.105.** Una granada de mortero se dispara sobre una meseta de 300 ft de altura situada a 6000 ft de distancia. ¿A qué distancia del borde la meseta impacta la granada si su celeridad inicial es  $800 \text{ ft/s}$  y la elevación del mortero es  $60^\circ$ ?

*Resp.*  $x = 11.000 \text{ ft}$

- 12.106.** En el Problema 12.105, ¿a qué distancia de la base del precipicio puede colocarse el mortero para que la granada salve justo el borde del precipicio?

*Resp.*  $x = 176$  ft

- 12.107.** Un bateador golpea una pelota comunicándole una velocidad de 100 ft/s a  $40^\circ$  con la horizontal. Un segundo después del bateo, un jugador situado directamente en el trayecto de la pelota, y a 250 ft de distancia, empieza a correr tras la pelota a velocidad constante. ¿A qué velocidad debe correr para atrapar la pelota?

*Resp.*  $v = 18,7$  ft/s

- 12.108.** Un punto describe una trayectoria cuyo vector de posición es  $\mathbf{r} = e^{2t}\mathbf{i} + 40e^{-2t}\mathbf{j}$  m. Hallar la velocidad y la aceleración del punto cuando  $t = 2$  s.

*Resp.*  $\mathbf{v} = 109\mathbf{i} - 5,41\mathbf{j}$  m/s,  $\mathbf{a} = 218\mathbf{i} + 5,41\mathbf{j}$  m/s<sup>2</sup>

- 12.109.** Un punto describe una trayectoria con una velocidad  $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + (2t + 20)\mathbf{j}$  m/s. Cuando  $t = 2$  s, su posición es  $4\mathbf{i} + 75\mathbf{j}$  m. ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria?

*Resp.*  $y = \frac{1}{4}x^2 + 10x + 31$

- 12.110.** En el Problema 12.109, ¿cuál es la aceleración en  $x = 0$ ? *Resp.*  $\mathbf{a} = 2\mathbf{j}$  m/s<sup>2</sup>

- 12.111.** Dada la aceleración  $\mathbf{a} = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$  m/s<sup>2</sup>, ¿cuál es la velocidad en  $t = 2$  s? En  $t = 1$  s, la velocidad es  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$  m/s.

*Resp.*  $\mathbf{v} = \frac{5}{2}\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  m/s

- 12.112.** En el Problema 12.111, ¿cuál es la componente de la aceleración en la dirección de la velocidad en el instante  $t = 2$  s? (Nota: Es la componente tangencial de la aceleración.)

*Resp.*  $a_t = 5,27$  in/s<sup>2</sup>

# DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

# 13

## 13.1 LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON

1. Una partícula se mantiene en estado de reposo o de movimiento uniforme (a velocidad constante) a lo largo de una recta salvo que una fuerza cambie su estado. En otras palabras, una partícula se acelera únicamente si sobre ella actúa una fuerza no equilibrada.
2. La variación por unidad de tiempo del producto de la masa de la partícula por su velocidad es proporcional a la fuerza que actúa sobre la partícula. Ese producto de la masa  $m$  por la velocidad  $\mathbf{v}$  es el momento lineal, o cantidad de movimiento,  $\mathbf{G}$  de la partícula. Así pues, la segunda ley se expresa

$$\mathbf{F} = K \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = K \frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

Si  $m$  es constante, la ecuación anterior queda

$$\mathbf{F} = Km \frac{d\mathbf{v}}{dt} = Kma$$

Si las unidades se eligen de modo que la constante de proporcionalidad sea la unidad,  $K = 1$ , las ecuaciones son

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{G}}{dt} \quad \text{o sea,} \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

3. Para toda acción, o fuerza, hay una reacción, o fuerza, igual y opuesta. En otras palabras, si una partícula ejerce una fuerza sobre una segunda partícula, ésta ejerce sobre la primera una fuerza de igual valor y de sentido contrario.

## 13.2 UNIDADES

- (a) Las unidades dependen del sistema. En ingeniería, el valor de la constante  $K$  que aparece en las fórmulas anteriores se hace que valga uno eligiendo adecuadamente las unidades. En el sistema tradicional de EE. UU. las dos unidades fundamentales son la *libra*,  $lb$ , para la fuerza y *el pie por segundo cada segundo* o  $ft/s^2$  para la aceleración. Entonces, la unidad de masa es una unidad derivada de esas dos. En el caso de una partícula que caiga libremente en las proximidades de la superficie terrestre, la única fuerza que actúa es su peso  $W$ . Su aceleración es la aceleración de la gravedad  $g$  (que se supone  $32,2 \text{ ft/s}^2$  en la mayoría del territorio de EE. UU.). La ecuación de la segunda ley podrá entonces escribirse (sin notación vectorial, porque el movimiento es rectilíneo)

$$W = Kma \quad \text{o sea,} \quad W = (1)mg$$

$$\text{Entonces } m = \frac{W \text{ lb}}{g \text{ ft/s}^2} = \frac{W \text{ lb} \cdot \text{s}^2}{g \text{ ft}}$$

Esta unidad de masa, que es una unidad derivada, se llama *slug*.

- (b) En unidades SI, por coherencia del sistema, el valor de  $K$  es 1 en las ecuaciones anteriores. Así pues,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

donde       $m$  = masa en kilogramos  
                $\mathbf{a}$  = aceleración en  $\text{m/s}^2$   
                $\mathbf{F}$  = fuerza en newtons

### 13.3 ACELERACIÓN

Según la ley de Newton, la aceleración de una partícula puede calcularse mediante la ecuación vectorial

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}}$$

donde       $\Sigma \mathbf{F}$  = suma vectorial de todas las fuerzas actuantes sobre la partícula  
                $m$  = masa de la partícula  
                $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$  = aceleración

### 13.4 PRINCIPIO DE D'ALAMBERT

Jean D'Alambert sugirió en 1743 que la segunda ley de movimiento de Newton, dada en la sección 13.3, podría escribirse

$$\sum \mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0$$

Así pues, una fuerza imaginaria (llamada «fuerza de inercia»), colineal con  $\Sigma \mathbf{F}$  pero de sentido opuesto y módulo  $ma$ , haría que la partícula estuviera en equilibrio si se aplicara a ella. Entonces, podrían aplicarse las ecuaciones de equilibrio. Algunos autores dicen que la partícula se encuentra en equilibrio dinámico. Realmente la partícula *no* está en equilibrio, pero pueden aplicarse las ecuaciones de equilibrio.

### 13.5 PROBLEMAS DE DINÁMICA

Las soluciones a los problemas de dinámica varían según el tipo de sistema de fuerzas. En muchos problemas intervienen fuerzas constantes y los problemas 13.1 a 13.16 son de este tipo. En otros problemas, las fuerzas varían con la posición (lineal o angular) y los problemas 13.17 a 13.22 son de este tipo. El tema de las vibraciones se desarrolla con sistemas de fuerzas que varían no sólo con la distancia, sino también con la velocidad. Los problemas 13.23 y 13.24 tratan con fuerzas que varían con la primera y la segunda potencia de la velocidad.

El tema de la balística se introduce de modo elemental en el Problema 13.25, que trata del movimiento de un proyectil bajo la acción de la fuerza constante de la gravedad. A esta solución pueden añadirse las fuerzas retardadoras que varían con la velocidad del proyectil.

De un objeto se dice que ejecuta un movimiento central si la fuerza que actúa sobre él está siempre dirigida hacia un mismo punto, llamado centro de fuerzas. Los satélites y los planetas son ejemplos de movimientos centrales. Estos se analizan en los problemas 13.26 a 13.31.

#### Problemas resueltos

**En la resolución de los problemas, la ecuación vectorial  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  se sustituye por las correspondientes ecuaciones escalares de los componentes. En los diagramas, los vectores se designan por sus módulos cuando su dirección y sentido son evidentes.**

- 13.1.** Una fuerza de  $F$  tira de una partícula de peso 2 lb a lo largo de un plano inclinado liso, tal como se ilustra en la Figura 13.1(a). Hallar la fuerza del plano sobre la partícula y la aceleración de ésta a lo largo del plano.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 13.1(b) se representa el diagrama de cuerpo libre. La aceleración  $a$  se muestra como un vector de trazo discontinuo paralelo al plano y dirigido hacia arriba. Si su valor resulta negativo, es que la aceleración es paralela al plano pero dirigida hacia abajo.

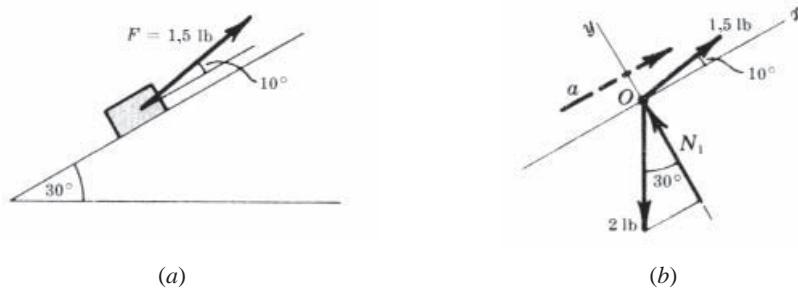


Figura 13.1

Es importante tener presente que el sistema de fuerzas actuantes sobre la partícula no está en equilibrio; si lo estuviera, la partícula no se aceleraría.

Con la segunda ley de Newton se obtienen dos ecuaciones según los ejes  $x$  e  $y$  elegidos, respectivamente, paralelo y perpendicular al plano,

$$\sum F_x = \frac{W}{g} a_x \quad \text{o sea,} \quad 1,5 \cos 10^\circ - 2 \sin 30^\circ = \frac{2}{32,2} a_x$$

$$\sum F_y = \frac{W}{g} a_y \quad \text{o sea,} \quad 1,5 \sin 10^\circ - 2 \cos 30^\circ + N_1 = 0$$

Suponiendo que la partícula no se separe del plano, su velocidad en la dirección  $y$  es nula. Por consiguiente,  $a_y$  debe ser también nula.

La segunda ecuación da la fuerza del plano sobre la partícula,  $N_1 = 1,47$  lb. De la primera ecuación,  $a_x = 7,68$  ft/s<sup>2</sup>.

- 13.2.** Una partícula de 5 kg de masa parte del reposo y alcanza una celeridad de 4 m/s tras recorrer una distancia horizontal de 12 m. Suponiendo un coeficiente de rozamiento de 0,25 y que el movimiento es uniformemente acelerado, ¿cuál es el menor valor de una fuerza horizontal constante  $P$  que lo consigue? (Figura 13.2).

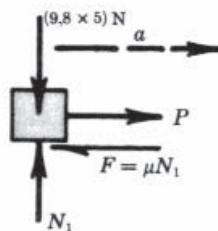


Figura 13.2

#### SOLUCIÓN

Ecuación de movimiento en la dirección horizontal:  $\sum F = P - 0,25N_1 = ma$ .

Por inspección,  $N_1 = 9,8 \times 5 = 49$  N.

Para hallar la aceleración  $a$ , aplicamos la ecuación cinemática

$$v^2 = v_0^2 + 2as.$$

Por tanto, 
$$a = \frac{(4 \text{ m/s})^2}{2(12 \text{ m})} = 0,667 \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo en la ecuación original,  $P = 5(0,667) + 0,25 \times 49 = 15,6$  N.

- 13.3.** Una masa de 2 kg se proyecta hacia arriba por un plano inclinado 20° con una celeridad de 3 m/s, tal como se ilustra en la Figura 13.3(a). Tras recorrer 0,8 m, se detiene. Hallar el coeficiente de rozamiento y también la celeridad del bloque cuando retorna a su posición de partida.



Figura 13.3

**SOLUCIÓN**

En el diagrama de cuerpo libre de la Figura 13.3(a), la fuerza de rozamiento se representa actuando plano abajo. Por inspección, la fuerza normal es  $N = 19,6 \cos 20^\circ = 18,4$  N. Para hallar la aceleración  $a$ , aplicamos la ecuación cinemática  $v^2 = v_0^2 + 2as$ . Por tanto,

$$a = \frac{0 - (+3)^2}{2(0,8)} = -5,63 \text{ m/s}^2$$

Sumando las fuerzas paralelas al plano (sentido positivo, hacia arriba) resulta

$$-19,6 \sin 20^\circ - u(18,4) = 2(-5,63)$$

Así pues,  $u = 0,25$ .

Para encontrar la velocidad de retorno, empleamos la Figura 13.3(b), en la que la fuerza de rozamiento se representa plano arriba. Tomando como positivo el sentido hacia abajo, la ecuación de movimiento queda

$$+19,6 \sin 20^\circ - 0,25(18,4) = 2(a)$$

Por tanto,  $a = 1,05 \text{ m/s}^2$ , plano abajo.

Finalmente,

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad \text{o sea,} \quad v^2 = 0 + 2(1,05)(0,8)$$

De aquí,

$$v = 1,3 \text{ m/s}$$

- 13.4.** Un automóvil que pesa 1800 lb toma una curva de 2000 ft con una celeridad constante de 40 mi/h. Si la carretera no está peraltada, ¿qué fuerza de frotamiento debe ejercer la calzada sobre las ruedas para que éstas mantengan el movimiento a lo largo de la curva?

**SOLUCIÓN**

En la Figura 13.4,  $O$  es el centro de la curva a 2000 ft del vehículo. La fuerzas actuantes sobre éste son el peso  $W$ , la fuerza normal  $N$ , igual a  $W$ , y la fuerza de rozamiento  $F$ . Tomando como positivo el sentido hacia la izquierda, la ecuación de movimiento queda

$$\sum F = \frac{W}{g} a_n = \frac{W}{g} \frac{v^2}{r} \quad \text{o sea,} \quad F = \frac{1800 \text{ lb}}{32,2 \text{ ft/s}^2} \frac{(58,7 \text{ ft/s})^2}{2000 \text{ ft}} = 96,3 \text{ lb}$$

- 13.5.** Un pequeño bloque de masa  $m$  está encima de una plataforma giratoria a una distancia  $r$  del centro, tal como se muestra en la Figura 13.5. Suponiendo un coeficiente de rozamiento  $\mu$  entre la masa y la plataforma, ¿qué velocidad lineal máxima puede tener la masa sin que deslice?

**SOLUCIÓN**

La única fuerza que actúa horizontalmente es el rozamiento  $F$ , que vale  $\mu N$ .

Suma de fuerzas según el radio:  $\sum F = ma_n$ , o bien,  $F = ma_n$ .

Como la fuerza normal  $N$  entre el bloque y la plataforma es igual a  $mg$  y  $a_n = v^2/r$ ,

$$\mu mg = \frac{mv^2}{r} \quad \text{o sea,} \quad v = \sqrt{\mu gr}$$



Figura 13.4

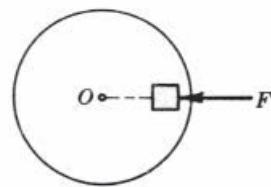


Figura 13.5

- 13.6.** En la Figura 13.6 se ilustra una partícula de masa  $m$  que describe una trayectoria circular en torno al eje  $y$ , trayectoria cuyo plano es horizontal y normal al eje  $y$ . Sin embargo, conforme aumenta la velocidad angular  $\omega$ , la partícula se eleva, con lo que también aumenta el radio  $r$  de su trayectoria circular. El conjunto de la masa  $m$  y el hilo que la sustenta se conoce como péndulo cónico (y a veces esférico). Deducir la relación entre  $\theta$  y  $\omega$  para una velocidad angular constante y calcular la frecuencia en función de  $\theta$ .

#### SOLUCIÓN

Supongamos que la velocidad angular constante de la partícula (o del hilo  $l$ ) es  $\omega$  radianes por segundo.  $\theta$  es el ángulo que forma el hilo con el eje  $y$ . Las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso y la tensión  $T$  del hilo.

Como la partícula se mueve con una velocidad angular constante, su única aceleración lineal es la componente normal  $a_n$  dirigida hacia el centro de la trayectoria (es decir, hacia al punto de corte del plano de la trayectoria con el eje  $y$ ).

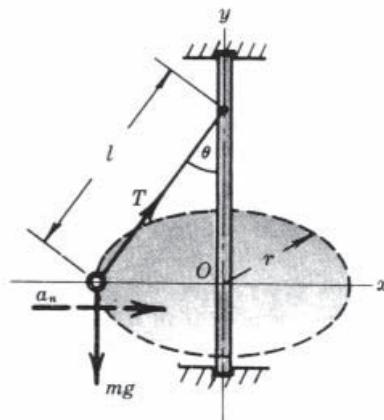


Figura 13.6

Sumando fuerzas según esa normal,  $\sum F_n = T \sin \theta = ma_n$ .  
Como  $a_n = r\omega^2 = (l \sin \theta) \omega^2$ , la ecuación anterior queda

$$T \sin \theta = m(l \sin \theta) \omega^2 \quad (I)$$

Sumando fuerzas en la dirección  $y$ ,  $\sum F_y = T \cos \theta - mg = ma_y = 0$ , o sea,  $T = mg/\cos \theta$ . Sustituyendo este valor de  $T$  en (I),

$$\frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta = m(l \sin \theta) \omega^2 \quad \text{o sea,} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}}$$

Conocido  $\theta$ , de la ecuación anterior puede despejarse  $\omega$ , que es la velocidad angular necesaria para que  $\theta$  se mantenga constante. O bien, si se conoce  $\omega$ , es posible calcular  $\theta$ .

Como  $\omega$  es constante para un ángulo  $\theta$  dado,

$$\text{frecuencia } f = \frac{\omega \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad/rev}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}} \text{ Hz}$$

Esta es la frecuencia alrededor del eje  $y$ .

- 13.7.** Un bloque, asimilable a una partícula de 10 lb de peso, descansa en un plano inclinado que puede girar en torno al eje y [Figura 13.7(a)]. La longitud  $l$  de la cuerda es 2 ft. ¿Cuál es la tensión en la cuerda cuando el plano y el bloque giran con una celeridad angular de 10 rpm?

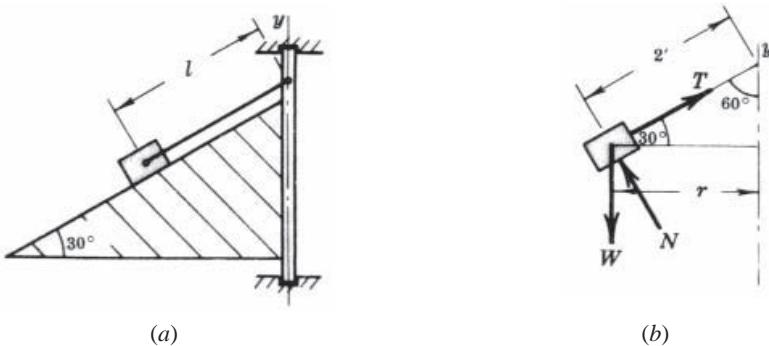


Figura 13.7

**SOLUCIÓN**

Según el diagrama de cuerpo libre de la Figura 13.7(b),  $r = 2 \cos 30^\circ = 1,732$  ft.

La única aceleración presente es la componente normal  $a_n$  dirigida horizontalmente hacia el eje y:

$$a_n = r\omega^2 = (1,732 \text{ ft}) \left( \frac{10 \text{ rev/min} \times 2\pi \text{ rad/rev}}{60 \text{ s/min}} \right)^2 = 1,91 \text{ ft/s}^2$$

Sumando fuerzas horizontalmente según el radio  $r$  y según el eje y, resultan las ecuaciones siguientes:

$$\sum F_x = T \cos 30^\circ - N \sin 30^\circ = \frac{W}{g} a_n = \frac{10}{32,2} \times 1,91 \quad (I)$$

$$\sum F_y = N \cos 30^\circ + T \sin 30^\circ - 10 = \frac{W}{g} a_y = 0 \quad (2)$$

En (2) despejamos  $N$ ,

$$N = \frac{10}{\cos 30^\circ} - T \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$$

y sustituimos en (I)

$$T \cos 30^\circ - \left( \frac{10}{\cos 30^\circ} - T \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \right) \sin 30^\circ = \frac{10}{32,2} \times 1,91 \quad \text{es decir,} \quad T = 5,52 \text{ lb}$$

- 13.8.** En la Figura 13.8(a),  $B$  es un objeto de 4 lb que describe una trayectoria circular horizontal bajo la acción de una cuerda  $AB$  y una barra rígida  $BC$ , que se supone sin peso. En el instante en que  $B$  tiene una celeridad de 6 ft/s, ¿qué fuerzas actúan sobre los miembros portantes  $AB$  y  $BC$ ?

**SOLUCIÓN**

En el diagrama de cuerpo libre de la Figura 13.8(b), se muestra el objeto bajo la acción de su peso, la tracción  $T$  y la compresión  $C$ . La aceleración normal es  $v^2/r = (6)^2/2 = 18 \text{ ft/s}^2$ , hacia la izquierda. La suma de fuerzas nos da las ecuaciones siguientes:

$$\sum F_v = T \cos 40^\circ + C \cos 20^\circ - 4 = 0$$

$$\sum F_h = T \sin 40^\circ - C \sin 20^\circ = \frac{mv^2}{r} = \frac{4}{g} \times 18 = 2,24$$

Este sistema de ecuaciones tiene las raíces

$$T = 4,01 \text{ lb} \quad \text{y} \quad C = 0,99 \text{ lb}$$

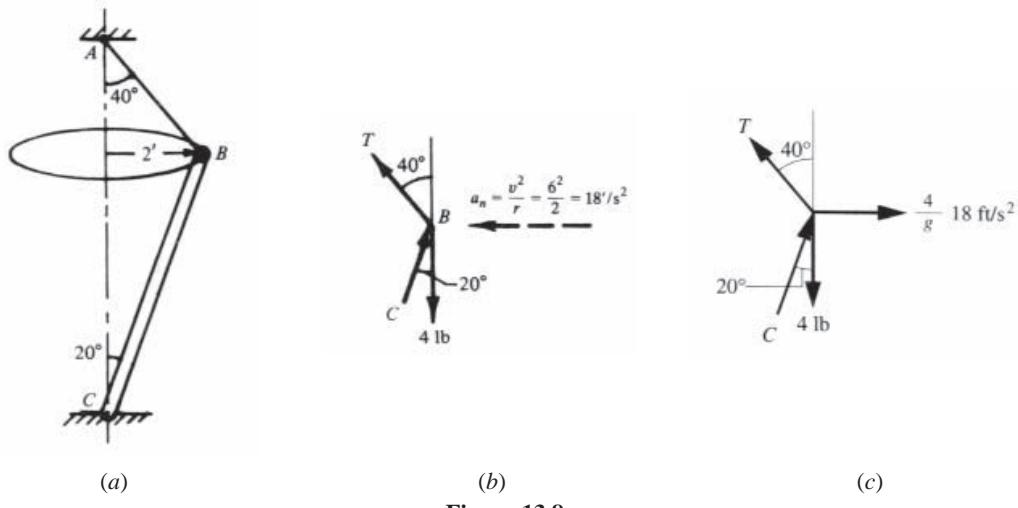


Figura 13.8

En la Figura 13.8(c) se ilustra la resolución por el método de D'Alambert y las «fuerzas de inercia». La figura es el diagrama de cuerpo libre con la fuerza de inercia,  $ma_n = (4/g)(18)$ , aplicada a la partícula dirigida hacia fuera desde el centro de rotación. Así pues,

$$\begin{aligned}\sum F_v &= T \cos 40^\circ + C \cos 20^\circ - 4 = 0 \\ \sum F_h &= -T \sin 40^\circ + C \sin 20^\circ + \frac{4}{g} \times 18 = 0\end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones tiene las raíces

$$T = 4,01 \text{ lb} \quad \text{y} \quad C = 0,99 \text{ lb}$$

En el movimiento circular, la fuerza de inercia recibe el nombre de fuerza centrífuga. A menudo, se considera la fuerza centrífuga como si fuera una verdadera fuerza, ¡pero no lo es!

- 13.9.** En una máquina como la de Atwood, dos masas iguales  $M$  están conectadas a través de una cinta muy liviana (de masa despreciable) que pasa por una polea sin rozamiento, tal como se muestra en la Figura 13.9(a). A uno de los extremos se añade una masa  $m$  mucho menor que  $M$ , con lo que esa masa desciende y la otra, por supuesto, asciende. El tiempo se registra mediante un estilete entintado que se apoya en la cinta y oscila. Estudiar el movimiento.

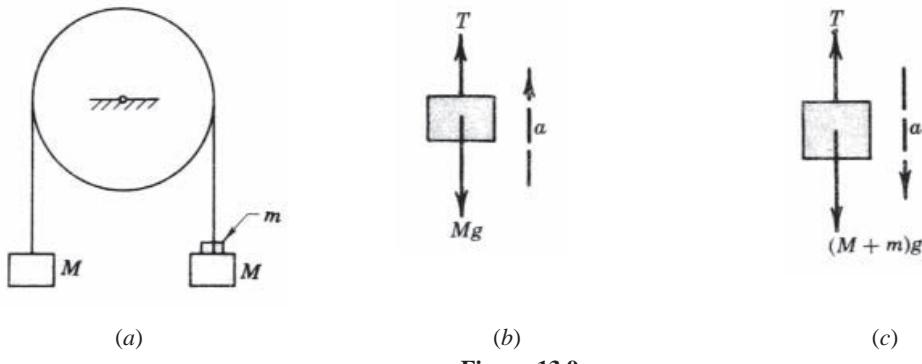


Figura 13.9

### SOLUCIÓN

En las Figuras 13.9(b) y (c) se representan los diagramas de cuerpo libre de los dos sistemas de masas. Como el rozamiento en la polea se supone despreciable, la cinta ejerce sobre ambos la misma fuerza de tracción  $T$ .

Las ecuaciones de movimiento para uno y otro diagrama de cuerpo libre son

$$\sum F = T - Mg = Ma \quad (1)$$

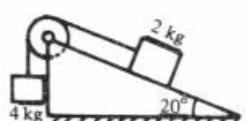
$$\sum F = Mg + mg - T = (M+m)a \quad (2)$$

donde la aceleración es la misma en ambos (si no, la cinta se rompería o se aflojaría). Sumando (1) y (2), se elimina la tracción  $T$  y resulta

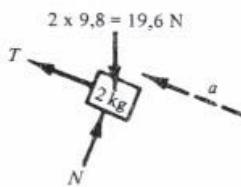
$$mg = 2Ma + ma \quad \text{o sea,} \quad a = \frac{m}{2M+m} g$$

Esta expresión establece la relación entre la aceleración  $g$  de la gravedad en el lugar donde se ejecuta el experimento y la aceleración  $a$  de las masas, que se determina midiendo la distancia y el tiempo sobre la cinta.

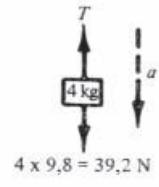
- 13.10.** En la Figura 13.10 se muestra una masa de 2 kg que descansa sobre un plano liso inclinado 20°. Una cuerda paralela al plano pasa por una polea sin masa y sin rozamiento y la une a una masa de 4 kg que cae verticalmente cuando se suelta. ¿Cuál es la celeridad de la masa de 4 kg a los 4 s de partir del reposo?



(a)



(b)



(c)

Figura 13.10

#### SOLUCIÓN

En las Figuras 13.10(b) y (c) se ilustran los diagramas de cuerpo libre, en los que sobre las masas actúa una aceleración del mismo módulo. Además, la tracción  $T$  sobre cada cuerpo libre es la misma.

Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_b = T - 19,6 \operatorname{sen} 20^\circ = 2a$$

$$\sum F_c = 39,2 - T = 4a$$

Sumando, resulta una aceleración

$$a = 5,42 \text{ m/s}^2$$

La velocidad de la masa de 4 kg a los cuatro segundos es

$$v = v_0 + at = 0 + 5,42(4) = 21,7 \text{ m/s}$$

- 13.11.** Los bloques  $A$  y  $B$ , de pesos respectivos 20 y 60 lb, están conectados mediante una cuerda sin peso que pasa por una polea sin rozamiento, tal como se ilustra en la Figura 13.11(a). Suponiendo un coeficiente de rozamiento de 0,30, hallar la velocidad del sistema a los 4 s de partir del reposo.

#### SOLUCIÓN

En las Figuras 13.11(b) y (c) se representan los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos  $A$  y  $B$ , respectivamente. Sumando fuerzas en las direcciones normales y paralelas a los planos, resultan las ecuaciones de movimiento

$$\sum F_{\perp} = N_1 - 20 \cos 30^\circ = \frac{20}{32,2}(0) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{\parallel} = T - 20 \operatorname{sen} 30^\circ - 0,30N_1 = \frac{20}{32,2}a \quad (2)$$

$$\sum F_{\perp} = N_2 - 60 \cos 60^\circ = \frac{20}{32,2}(0) = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_{\parallel} = 60 \sin 60^\circ - T - 0,30N_2 = \frac{60}{32,2}a \quad (4)$$

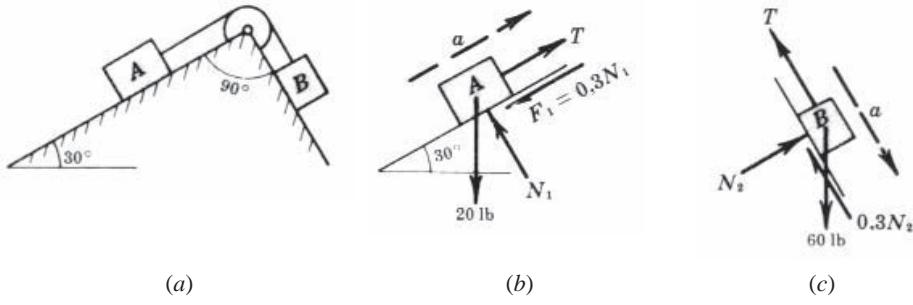


Figura 13.11

De (1) y (3) se despejan  $N_1$  y  $N_2$ . Estos valores se introducen en (3) y (4), que se suman para eliminar  $T$ . Resulta así una aceleración  $a = 11,1 \text{ ft/s}^2$ .

Con la ecuación cinemática  $v = v_0 + at$ , se tiene  $v = 0 + 11,4(4) = 44,4 \text{ ft/s}$ .

- 13.12.** En la Figura 13.12(a), hallar el menor coeficiente de rozamiento entre  $A$  y  $B$  para que no haya resbalamiento entre ambos.  $A$  es una masa de 40 kg,  $B$  es una masa de 15 kg y  $F$  es una fuerza de 500 N paralela al plano inclinado, que es liso.

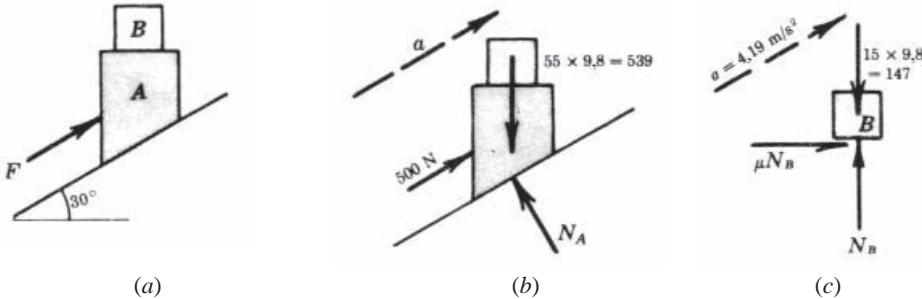


Figura 13.12

### SOLUCIÓN

Para hallar la aceleración  $a$  del sistema, dibujamos el diagrama de cuerpo libre del conjunto de las dos masas, tal como se muestra en la Figura 13.12(b). Sumando fuerzas según el plano,  $500 - 539 \sin 30^\circ = 55a$ , o sea,  $a = 4,19 \text{ m/s}^2$ .

Ahora dibujamos el diagrama de cuerpo libre de  $B$ , tal como se muestra en la Figura 13.12(c). En ésta, sumamos fuerzas según la dirección de la aceleración y según la dirección perpendicular a ella para obtener

$$\sum F_{\perp} = -147 \cos 30^\circ + N_B \cos 30^\circ - \mu N_B \sin 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{\parallel} = \mu N_B \cos 30^\circ + N_B \sin 30^\circ - 147 \sin 30^\circ = (15)(4,19) \quad (2)$$

Multiplicamos (1) por  $\cos 30^\circ$ , y (2) por  $\sin 30^\circ$ . Seguidamente sumamos para obtener  $N_B = 178 \text{ N}$ . Al sustituir en (1) o en (2),  $\mu = 0,30$ .

- 13.13.** Sobre una masa  $A = 16 \text{ kg}$  se ejerce una fuerza horizontal  $P = 70 \text{ N}$ , tal como se muestra en la Figura 13.13(a). Entre  $A$  y el plano horizontal hay un coeficiente de rozamiento de 0,25.  $B$  tiene una masa de 4 kg y su coeficiente de rozamiento con el plano es de 0,50. La cuerda que une ambas masas forma un ángulo de  $10^\circ$  con la horizontal. ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

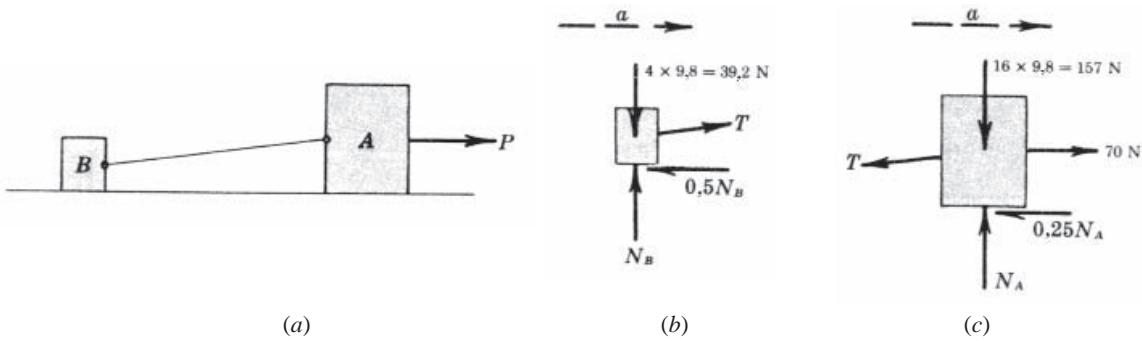


Figura 13.13

**SOLUCIÓN**

Según los dos diagramas de cuerpo libre de las figuras 13(b) y (c), las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_h = 70 - T \cos 10^\circ - 0,25N_A = 16a \quad (1)$$

$$\sum F_v = N_A - 157 - T \operatorname{sen} 10^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_h = T \cos 10^\circ - 0,50N_B = 4a \quad (3)$$

$$\sum F_v = N_B - 39,2 + T \operatorname{sen} 10^\circ = 0 \quad (4)$$

De (2) obtenemos  $N_A$  en función de  $T$ , y la introducimos en (1). De (4) obtenemos  $N_B$  en función de  $T$ , y la introducimos en (3). Entre esas dos nuevas ecuaciones eliminamos  $a$  y obtenemos  $T = 20,5$  N.

- 13.14.** Se deja caer una caja sobre una correa transportadora inclinada  $10^\circ$  con la horizontal que se mueve a 10 ft/s. Si la caja está inicialmente en reposo y el coeficiente de rozamiento entre la caja y la correa es  $\frac{1}{3}$ , ¿cuánto tarda la caja en cesar de resbalar sobre la correa?

**Solución**

En la Figura 13.14, las ecuaciones de movimiento de la caja son

$$\sum F_\perp = 0 = N - W \cos 10^\circ$$

$$\sum F_\parallel = \frac{1}{3}N - W \operatorname{sen} 10^\circ = \frac{W}{g}a$$

Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos  $a = 4,98$  ft/s $^2$ .

Para calcular el tiempo que transcurre hasta que cesa el resbalamiento, aplicamos

$$v = v_0 + at$$

$$10 = 0 + 4,98t$$

Así pues,

$$t = 2,00 \text{ s}$$

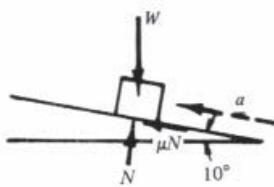


Figura 13.14

- 13.15.** En el sistema de la Figura 13.15, las poleas se suponen carentes de masa y de rozamiento. Los números indican las masas en kilogramos. Hallar la aceleración de cada masa y la tensión en la cuerda fija.

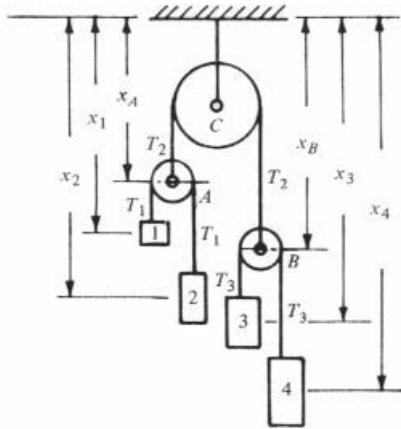


Figura 13.15

**SOLUCIÓN**

Por continuidad y por la hipótesis de ausencia de masa en cuerdas y poleas, podemos escribir  $2T_1 = T_2$  y  $2T_3 = T_2$ . Además, las cuerdas que pasan por las poleas A, B y C son de longitud constante. Por tanto,

$$(x_1 + x_A) + (x_2 - x_A) = K_1 \quad (x_3 - x_B) + (x_4 - x_B) = K_2 \quad (x_A + x_B) = K_3$$

donde  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  son constantes.

Derivando dos veces, resulta

$$a_1 + a_2 = 2a_A \quad a_3 + a_4 = 2a_B \quad a_A + a_B = 0$$

Tomando como positivo el sentido descendente, las ecuaciones de movimiento son

$$1 \times 9,8 - T_1 = a_1 \quad (1)$$

$$2 \times 9,8 - T_1 = 2a_2 \quad (2)$$

$$3 \times 9,8 - T_3 = 3a_3 \quad (3)$$

$$4 \times 9,8 - T_3 = 4a_4 \quad (4)$$

Sustituimos  $T_1 = T_2/2$  en (1) y multiplicamos ésta por 2. Sustituimos  $T_1 = T_2/2$  y  $a_2 = 2a_A - a_1$  en (2). Esas ecuaciones quedan

$$2 \times 9,8 - \frac{2T_2}{2} = 2a_1 \quad (1')$$

$$2 \times 9,8 - \frac{T_2}{2} = 4a_A - 2a_1 \quad (2')$$

Sumando ahora (1') y (2'), obtenemos

$$4 \times 9,8 - 1,5T_2 = 4a_A \quad (5)$$

Sustituimos  $T_3 = T_2/2$  en (3) y multiplicamos ésta por 4. Sustituimos  $T_3 = T_2/2$  y  $a_4 = 2a_B - a_3 = -2a_A - a_3$  en (4) y multiplicamos ésta por 3. Esas ecuaciones quedan

$$4 \times 3 \times 9,8 - \frac{4T_2}{2} = 12a_3 \quad (3')$$

$$3 \times 4 \times 9,8 - \frac{3T_2}{2} = 3[4(-2a_A - a_3)] \quad (4')$$

Sumando ahora (3') y (4'), obtenemos

$$24 \times 9,8 - 3,5T_2 = -24a_A \quad (6)$$

Combinando (5) y (6), resulta  $T_2 = 37,6$  N.

Para calcular las aceleraciones de las masas, sustituimos  $T_1 = T_3 = T_2 / 2 = 18,8 \text{ N}$  en las ecuaciones (1), (2), (3) y (4). Así obtenemos

$$a_1 = -9,0 \text{ m/s}^2 (\uparrow)$$

$$a_2 = 0,4 \text{ m/s}^2 (\downarrow)$$

$$a_3 = 3,53 \text{ m/s}^2 (\downarrow)$$

$$a_4 = 5,1 \text{ m/s}^2 (\downarrow)$$

La tensión en la cuerda fija es  $2T_2 = 75,2 \text{ N}$ .

- 13.16.** Dos masas de 14 kg y 7 kg conectadas por una cuerda flexible e inextensible descansan en un plano liso inclinado  $45^\circ$ , tal como se muestra en la Figura 13.16(a). Cuando se sueltan las masas, ¿cuál es la tensión  $T$  en la cuerda? Supóngase que el rozamiento entre el plano y la masa de 14 kg vale  $\frac{1}{4}$ , y entre el plano y la masa de 7 kg,  $\frac{3}{8}$ .

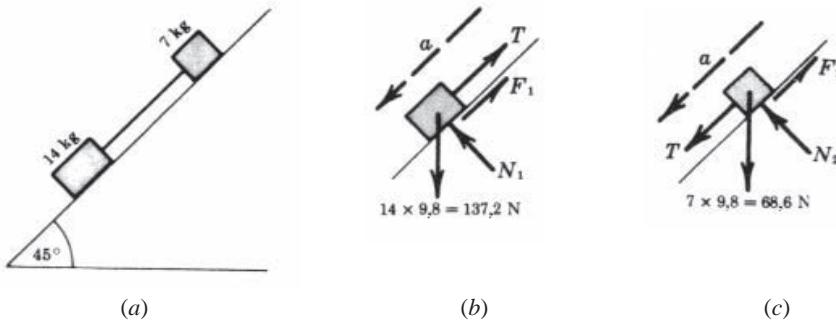


Figura 13.16

### SOLUCIÓN

Los diagramas de cuerpo libre de las dos masas se representan en las Figuras 13.16(b) y (c).

Las ecuaciones de movimiento de la masa de 14 kg son las siguientes, sumando fuerzas paralela y perpendicularmente al plano:

$$\sum F_{\parallel} = 137,2 \operatorname{sen} 45^\circ - F_1 - T = 14a \quad (1)$$

$$\sum F_{\perp} = N_1 - 137,2 \cos 45^\circ = 0 \quad (2)$$

Las ecuaciones de movimiento de la masa de 7 kg son las siguientes:

$$\sum F_{\parallel} = T + 68,6 \operatorname{sen} 45^\circ - F_2 = 7a \quad (3)$$

$$\sum F_{\perp} = N_2 - 68,6 \cos 45^\circ = 0 \quad (4)$$

Supóngase que ambas masas se mueven. Desde luego, si el rozamiento es lo bastante grande, la masa superior puede que no se mueva.

De (2),  $N_1 = 137,2 \times 0,707$ . Luego,  $F_1 = \frac{1}{4}N_1 = 24,3$ .

De (4),  $N_2 = 68,6 \times 0,707$ . Luego,  $F_2 = \frac{3}{8}N_2 = 18,2$ .

Llevando estos valores a (1) y (3), resultan las ecuaciones siguientes

$$137,2 + 0,707 - 24,3 - T = 14a \quad (5)$$

$$T + 68,6 \times 0,707 - 18,2 = 7a \quad (6)$$

Multiplicando (6) por 2 y restándola de (5), obtenemos  $T = 4,0 \text{ N}$ .

- 13.17.** Una partícula de peso  $W$  cuelga de un hilo de longitud  $l$  tal como se ilustra en la Figura 13.17(a). Hallar el periodo y la frecuencia de este péndulo simple.

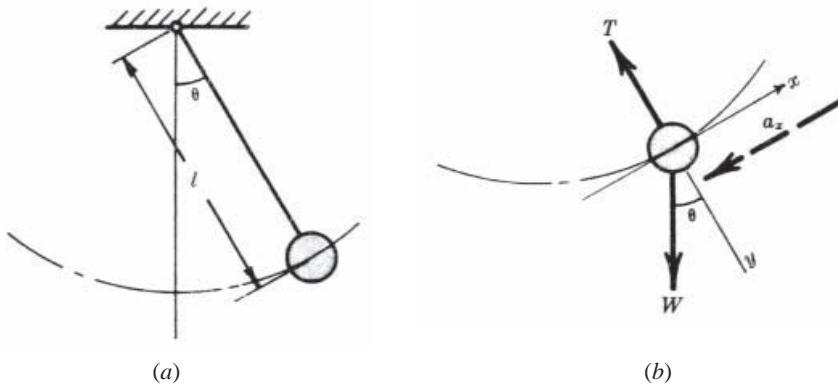


Figura 13.17

**SOLUCIÓN**

Las únicas fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso, verticalmente hacia abajo, y la tracción  $T$  del hilo. La posición de la partícula en un instante  $t$  cualquiera puede especificarse en función del ángulo  $\theta$ .

Tomando como eje  $x$  la tangente a la trayectoria de la partícula en la posición indicada en la Figura 13.17(a), la ecuación de movimiento queda

$$\sum F_x = -W \sin \theta = \frac{W}{g} a_x$$

Así pues, la aceleración es nula cuando  $\theta$  es cero, es decir, en la posición más baja de la partícula.

La ecuación diferencial anterior puede resolverse teniendo en cuenta que  $a_x$  es tangente a la trayectoria y que, por consiguiente, puede escribirse

$$a_x = l\alpha$$

donde  $\alpha$  = aceleración angular del hilo y la partícula. Entonces

$$-W \sin \theta = \frac{W}{g} l\alpha = \frac{W}{g} l \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{o sea,} \quad -\frac{g}{l} \sin \theta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

La resolución de esta ecuación diferencial se simplifica empleando el desarrollo en serie de  $\sin \theta$ ,

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

Para pequeñas rotaciones,  $\sin \theta$  es aproximadamente igual a  $\theta$  expresado en radianes. Así pues, para pequeños desplazamientos, la ecuación de movimiento queda

$$-\frac{g}{l} \theta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Según la teoría de ecuaciones diferenciales, la solución a esta ecuación es de la forma

$$\theta = A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{l}} t + B \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

Las constantes  $A$  y  $B$  deben deducirse en cada problema empleando las correspondientes condiciones de contorno.

La pulsación  $\omega$  en radianes por segundo es  $\sqrt{g/l}$ . La frecuencia es  $(1/2\pi)\sqrt{g/l}$  Hz (ciclos por segundo).

Incidentalmente, un ciclo es el movimiento ejecutado por la partícula desde un punto de partida hasta que vuelve a ese mismo punto. Un ciclo se ejecuta por completo cuando, por ejemplo, la partícula se mueve desde su posición más alta de la izquierda hasta su posición más alta de la derecha y regresa a su posición más alta de la izquierda.

El tiempo que tarda en ejecutarse un ciclo es el periodo  $T$ . Este será, pues, el inverso de la frecuencia  $f$ .

$$T = \frac{1}{f(\text{ciclos por segundo})} = \frac{1}{f} \text{ segundos por ciclo}$$

- 13.18.** Considérese el movimiento de una partícula de masa  $M$  en reposo sobre un plano horizontal liso, tal como se ilustra en la Figura 13.18(a). Está unida a un muelle de constante  $K$  unidades de fuerza por unidad de deformación. Se desplaza una distancia  $x_0$  desde su posición de equilibrio (la tracción o compresión en el muelle es nula en la posición de equilibrio) y luego se suelta con velocidad nula. Estudiar el movimiento.

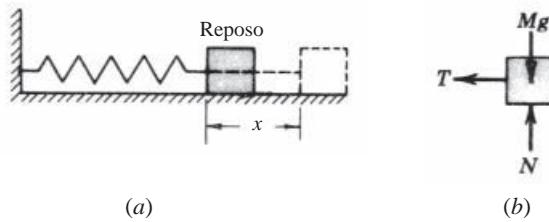


Figura 13.18

**SOLUCIÓN**

La Figura 13.18(b) es el diagrama de cuerpo libre de la partícula con ésta a una distancia  $x$  de la posición de equilibrio. Sobre ella el muelle, alargado una longitud  $x$ , ejerce una fuerza horizontal  $T$ .

Dentro de los límites de la elasticidad del material, se supone que la fuerza del muelle es proporcional a su variación de longitud desde su posición no deformada. Entonces,

$$T = Kx$$

donde  $T$  = fuerza del muelle  
 $K$  = constante del muelle  
 $x$  = variación de longitud del muelle

Sumando fuerzas horizontalmente:  $\sum F_x = -T = Ma_x$ .

Nótese que las fuerzas dirigidas hacia la izquierda y que las distancias a la izquierda de la posición de equilibrio se suponen negativas. En este caso, la distancia  $x$  está hacia la derecha; por tanto,  $a_x$  la escribimos positiva. La fuerza  $T$  apunta hacia la izquierda, es decir, es negativa.

Sustituyendo  $T = Kx$  y  $a_x = d^2x/dt^2$  en la ecuación anterior, ésta queda  $-Kx = M(d^2x/dt^2)$  (un movimiento armónico simple). Esta ecuación diferencial es similar a la del Problema 13.17 y, por ello, su solución es de la forma:

$$x = A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{K}{M}} t + B \cos \sqrt{\frac{K}{M}} t$$

Podemos ahora determinar los valores de  $A$  y  $B$ . Cuando  $t = 0$ , es  $x = x_0$ ; por tanto

$$x_0 = A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{K}{M}} 0 + B \cos \sqrt{\frac{K}{M}} 0 = 0 + B \quad y \quad B = x_0$$

$$y \quad x = A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{K}{M}} t + x_0 \cos \sqrt{\frac{K}{M}} t$$

Para determinar  $A$  hay que derivar  $x$  respecto al tiempo, ya que la otra condición conocida es que  $v = 0$  cuando  $t = 0$ :

$$v = \frac{dx}{dt} = A \sqrt{\frac{K}{M}} \cos \sqrt{\frac{K}{M}} t - x_0 \sqrt{\frac{K}{M}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{K}{M}} t$$

Cuando  $t = 0$ ,  $v = 0$  y  $\operatorname{sen} \sqrt{K/M} 0 = 0$ . Entonces,  $0 = A \sqrt{K/M} \cos 0 - 0$ , y  $A = 0$ . La ecuación de movimiento es  $x = x_0 \cos \sqrt{K/M} t$ . Por supuesto, si la velocidad inicial tuviera un valor distinto de cero,  $v_0$  por ejemplo, sería  $A = v_0 / \sqrt{K/M}$ .

- 13.19.** En el Problema 13.18, (a) calcular la frecuencia  $f$  y el periodo  $T$  del sistema si la masa  $M$  pesa 12 oz y la constante del muelle vale 2 oz/in, y (b) calcular la frecuencia si la masa  $M$  es 0,34 kg y la constante  $K$  vale 22 N/m.

**SOLUCIÓN**

$$(a) f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2/16 \text{ lb/in} \times 12(32,2) \text{ in/s}^2}{2/16 \text{ lb}}} = 1,28 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1,28 \text{ Hz}} = 0,782 \text{ segundos por ciclo}$$

$$(b) f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{22 \text{ N/m}}{0,34 \text{ kg}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{22(\text{kg} \cdot \text{m/s}^2)/\text{m}}{0,34 \text{ kg}}} = 1,28 \text{ Hz}$$

- 13.20.** Una partícula de masa  $m$  descansa en el punto más alto de una esfera lisa de radio  $r$ , tal como se ilustra en la Figura 13.19(a). Suponiendo que empieza a moverse desde el reposo, ¿en qué punto se separa de la esfera?

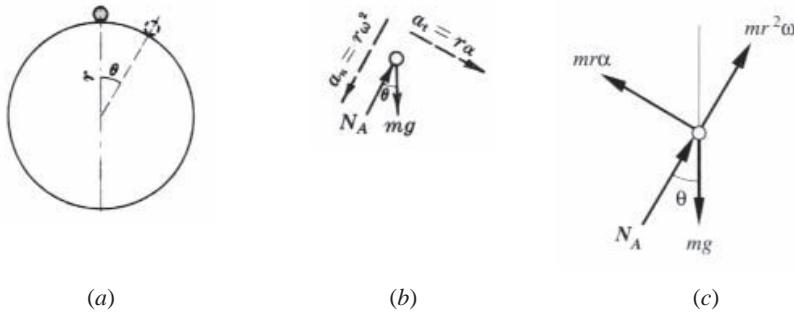


Figura 13.19

**SOLUCIÓN**

Sea  $\theta$  el ángulo descrito en un instante  $t$  cualquiera. En el diagrama de cuerpo libre [Figura 13.19(b)] sólo hay dos fuerzas actuando sobre la partícula: la reacción normal en la dirección del radio y el peso  $mg$ .

Considerando las fuerzas según el radio y según la tangente, resultan las ecuaciones de movimiento

$$\sum F_r = -N_A + mg \cos \theta = mr\omega^2 \quad (1)$$

$$\sum F_t = -mg \sin \theta = mr\alpha \quad (2)$$

Para hallar una solución, hace falta una tercera ecuación. Ésta es la que expresa la relación entre  $\theta$ ,  $\omega$  y  $\alpha$ . A efectos de repaso, la deducimos aquí.

Eliminando  $dt$  entre  $\omega = d\theta/dt$  y  $\alpha = d\omega/dt$  resulta

$$\alpha d\theta = \omega d\omega \quad (3)$$

De (2),  $\alpha = (g/r) \sin \theta$ . Sustituyendo en (3),  $(g/r) \sin \theta d\theta = \omega d\omega$ . Entonces

$$\int_0^\theta \frac{g}{r} \sin \theta d\theta = \int_0^\theta \omega d\omega \quad \text{o sea,} \quad \frac{g}{r} (1 - \cos \theta) = \frac{\omega^2}{2} \quad (4)$$

En la posición en que la esfera se separa, la reacción normal  $N_A$  es nula y, entonces, (1) queda

$$mg \cos \theta = mr\omega^2 \quad \text{o sea,} \quad \frac{g}{r} \cos \theta = \omega^2 \quad (5)$$

Sustituyendo  $\omega^2$  en (4) por su valor (5), obtenemos

$$\frac{g}{r} (1 - \cos \theta) = \frac{g}{2r} \cos \theta \quad \cos \theta = \frac{2}{3} \quad \theta = 0,841 \text{ rad o } 48,2^\circ$$

Otra solución posible resulta al considerar las fuerzas de inercia  $m r \alpha$  y  $m r \omega^2$ , tal como se ilustra en el diagrama de cuerpo libre de la Figura 13.19(c). Las correspondientes ecuaciones de equilibrio son

$$\sum F_v = N_A \cos \theta - mg + m r \omega^2 \cos \theta + m r \alpha \sin \theta = 0$$

$$\sum F_h = N_A \sin \theta + m r \omega^2 \sin \theta - m r \alpha \cos \theta = 0$$

Cuando la partícula abandona la esfera,  $N_A = 0$ . Eliminando  $\omega^2$  entre las ecuaciones del sistema anterior, resulta  $\alpha = (g/r) \sin \theta$ . Eliminando  $\alpha$  en el sistema de ecuaciones resulta  $\omega^2 = (g/r) \cos \theta$ . Sustituyendo el valor de  $\alpha$  recién hallado en la ecuación (3), resulta la ecuación (4), e introduciendo en ésta el valor recién hallado de  $\omega^2$  resulta

$$\frac{g}{r}(1 - \cos \theta) = \frac{g}{2r} \cos \theta$$

Esta ecuación da  $\theta = 48,2^\circ$ .

- 13.21.** Una partícula de masa  $m$  desciende por una rampa lisa y entra en un «doble rizo» de diámetro  $d$ . ¿Qué altura  $h$  debe tener la rampa para que pueda recorrer el doble rizo completo?

#### SOLUCIÓN

En la Figura 13.20(b) se representa el diagrama de cuerpo libre de la partícula en un instante cualquiera de su descenso por la rampa. Las ecuaciones de movimiento en las direcciones paralela y normal a la rampa son

$$\sum F_{\parallel} = mg \sin \theta = ma \quad (1)$$

$$\sum F_{\perp} = N - mg \cos \theta = 0 \quad (2)$$

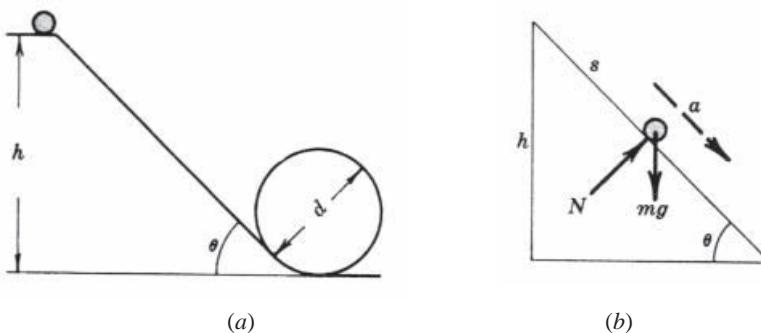


Figura 13.20

De (1), la aceleración es  $a = g \sin \theta$ . Este valor de  $a$  lo sustituimos ahora en la ecuación cinemática  $a ds = v dv$ , donde  $s$  se refiere al desplazamiento a lo largo de la rampa. Entonces,  $g \sin \theta ds = v dv$  y

$$\int_0^s g \sin \theta ds = \int_0^v v dv \quad \text{o sea,} \quad g \sin \theta s = \frac{v^2}{2} \quad (3)$$

La celeridad al pie de la rampa la hallamos sustituyendo  $s$  por  $h / \sin \theta$  en (3):

$$g \sin \theta \frac{h}{\sin \theta} = \frac{v^2}{2} \quad \text{o sea,} \quad v^2 = 2gh \quad (4)$$

Esto revela que la celeridad al pie de la rampa lisa es independiente de la pendiente y es la misma que si la partícula cayese libremente.

Seguidamente, dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la partícula en la cresta del rizo (Figura 13.21).

Las fuerzas actuantes son el peso  $mg$  y la fuerza del rizo según la vertical. Como nos interesa la celeridad mínima, debemos suponer que en este caso  $N_A$  es cero. Expresándolo de modo algo distinto, cuando la celeridad  $v$  aumenta, la aceleración normal  $a_n$  aumenta. Para que aumente el valor de  $a_n$ , debe aumentar también la reacción normal  $N_A$ , ya que  $\sum F_n = ma_n$ .

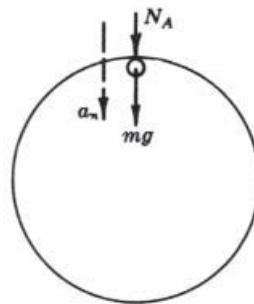


Figura 13.21

Para hallar la celeridad en la cresta del rizo, hacemos uso del hecho recién comprobado de que el movimiento en un trayecto sin rozamiento (como la rampa y los costados del rizo) equivale a un movimiento vertical bajo la única acción de la gravedad. Por tanto, la partícula pierde celeridad al subir por el costado del rizo en una cuantía igual a la que perdería en un movimiento vertical rectilíneo:

$$v_{\text{cresta}}^2 = v_{\text{fondo}}^2 - 2gd$$

Pero la celeridad en el fondo del rizo,  $v_{\text{fondo}}$ , la conocemos por (4) en función de la altura  $h$ . Entonces,

$$v_{\text{cresta}}^2 = 3gh - 2gd = 2g(h-d)$$

Sumando las fuerzas según la vertical cuando la partícula está en la cresta, resulta, teniendo en cuenta que  $N_A = 0$ :

$$\sum F_n = mg = \frac{mv_{\text{cresta}}^2}{d/2} \quad \text{o sea,} \quad mg = \frac{4mg}{d}(h-d)$$

Por tanto,  $h = 5d/4$ . Esto significa que la partícula debe partir de esa altura (o mayor) para conseguir la celeridad mínima. De otro modo, la partícula no seguirá el trayecto circular en la cresta, si no que se «despeñará».

- 13.22.** Una cadena flexible de longitud  $d$  descansa sobre una mesa lisa con una longitud  $c$  que cuelga por el borde redondeado, tal como se muestra en la Figura 13.22(a). El sistema, originalmente en reposo, se abandona a sí mismo. Describir el movimiento. La cadena pesa  $w$  lb/ft. Se supone que la cadena se mantiene en contacto con las superficies.

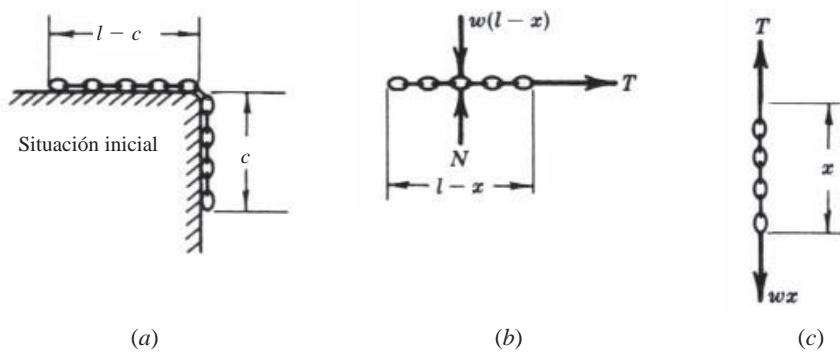


Figura 13.22

### SOLUCIÓN

En las Figuras 13.22(b) y (c) se representan los diagramas de cuerpo libre de los dos trozos de cadena con la misma tracción  $T$  actuando en cada uno. Las ecuaciones de movimiento son

$$T = \frac{w(l-x)}{g} a = \frac{w(l-x)}{g} \frac{d^2x}{dt^2} \quad (I)$$

$$wx - T = \frac{wx}{g} a = \frac{wx}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2)$$

Sumando (1) y (2), obtenemos

$$wx = \frac{wl}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{o sea,} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{g}{l} x$$

(Esto no es un movimiento armónico simple, ¿por qué?)

La solución a esta ecuación diferencial de segundo orden es  $x = Ae^{\sqrt{g/l}t} + Be^{-\sqrt{g/l}t}$ .

Para determinar las constantes  $A$  y  $B$ , adviértase que las condiciones iniciales son  $x = c$  y  $v = 0$ .

Sustituyendo  $x = c$  para  $t = 0$ , obtenemos  $c = A + B$ .

Derivando  $x$  respecto a  $t$ :  $v = dx/dt = A\sqrt{g/l} e^{\sqrt{g/l}t} - B\sqrt{g/l} e^{-\sqrt{g/l}t}$ .

Introduciendo la condición  $v = 0$  para  $t = 0$ , obtenemos  $A - B = 0$ .

Resolviendo el sistema de ecuaciones  $A - B = 0$  y  $c = A + B$ , obtenemos  $A = B = \frac{1}{2}c$ .

La solución es  $x = \frac{1}{2}ce^{\sqrt{g/l}t} + \frac{1}{2}ce^{-\sqrt{g/l}t}$ .

Para hallar la longitud  $x$  colgante en un instante dado, hay que determinar el valor de las funciones exponenciales en ese instante. En el Apéndice C se presenta una solución por computadora.

- 13.23.** Un objeto de peso  $W$  cae en el seno de un medio que ofrece una resistencia  $R$  proporcional a la velocidad. Esto se cumple con gran aproximación para los objetos en movimiento lento. Estudiar el movimiento.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 13.23 se representa el diagrama de cuerpo libre del objeto con el peso  $W$  actuando hacia abajo y la fuerza retardadora  $R$  actuando hacia arriba. Tomando como positivo el sentido descendente para  $x$ ,  $\dot{x}$  y  $\ddot{x}$ , la ecuación diferencial de movimiento es

$$+W - k\dot{x} = \frac{W}{g} x = \frac{W}{g} \frac{d\dot{x}}{dt}$$

Separando variables e integrando,

$$\frac{d\dot{x}}{W/k - \dot{x}} = \frac{kg}{W} dt \quad \text{y} \quad -\ln(W/k - \dot{x}) = \frac{kg}{W} t + C_1$$

Suponiendo  $\dot{x} = \dot{x}_0$  para  $t = 0$ ,  $-\ln(W/k - \dot{x}) = C_1$  y

$$-\ln(W/k - \dot{x}) = \frac{kg}{W} t - \ln(W/k - \dot{x}_0) \quad \text{o sea,} \quad \frac{W/k - \dot{x}}{W/k - \dot{x}_0} = e^{-(kg/W)t}$$

de donde

$$\dot{x} = \frac{W}{k}(1 - e^{-(kg/W)t}) + \dot{x}_0 e^{-(kg/W)t} \quad (I)$$

Como la velocidad límite  $\dot{x}_{\max}$  se da para  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\dot{x}_{\max} = \frac{W}{k} \quad (2)$$

Para hallar la distancia  $x$  en función del tiempo, escribimos (I) como

$$dx = \frac{W}{k}(1 - e^{-(kg/W)t}) dt + \dot{x}_0 e^{-(kg/W)t} dt$$

Integrando,

$$\dot{x} = \frac{W}{k}t - \frac{W}{k}(-W/kg)e^{-(kg/W)t} + \dot{x}_0(-W/kg)e^{-(kg/W)t} + C_2$$

Suponiendo  $x = 0$  cuando  $t = 0$ ,  $0 = 0 + W^2/k^2g - W\dot{x}_0/kg + C_2$  y

$$x = \frac{W}{k}t + \frac{W^2}{k^2g}e^{-(kg/W)t} - \frac{W\dot{x}_0}{kg}e^{-(kg/W)t} - \frac{W^2}{k^2g} + \frac{W\dot{x}_0}{kg}$$

Teniendo en cuenta que  $W/k = \dot{x}_{\max}$ , la expresión anterior queda finalmente

$$x = \frac{W}{k}t + \frac{1}{g}(\dot{x}_{\max}\dot{x}_0 - \dot{x}_{\max}^2)(1 - e^{-(kg/W)t}) \quad (3)$$

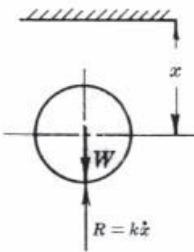


Figura 13.23

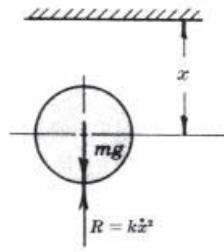


Figura 13.24

- 13.24.** Un objeto de masa  $m$  cae en el seno de un medio que ofrece una resistencia  $R$  proporcional al cuadrado de la velocidad. Esto se cumple con gran aproximación para los objetos que se mueven a gran velocidad. Estudiar el movimiento.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 13.24 se representa el diagrama de cuerpo libre del objeto con el peso  $mg$  actuando hacia abajo y la fuerza retardadora  $R$  actuando hacia arriba. Tomando como positivo el sentido descendente para  $x$ ,  $\dot{x}$  y  $\ddot{x}$ , la ecuación diferencial de movimiento es

$$-mg - k\dot{x}^2 = m\ddot{x} = m \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = m \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x}$$

Separando variables e integrando,

$$\frac{\dot{x} dx}{mg/k - \dot{x}^2} = \frac{k}{m} dx \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} \ln(mg/k - \dot{x}^2) = \frac{k}{m} x + C_1$$

Suponiendo  $\dot{x} = \dot{x}_0$  para  $t = 0$ ,  $-\frac{1}{2} \ln(mg/k - \dot{x}_0^2) = C_1$  y

$$-\frac{1}{2} \ln(mg/k - \dot{x}^2) = \frac{k}{m} x - \frac{1}{2} \ln(mg/k - \dot{x}_0^2)$$

$$\text{Entonces, } -\frac{2k}{m} \dot{x} = \ln \frac{mg/k - \dot{x}^2}{mg/k - \dot{x}_0^2} \quad \text{o sea,} \quad \frac{mg}{k} - \dot{x}^2 = \left( \frac{mg}{k} - \dot{x}_0^2 \right) e^{-(2k/m)x}$$

$$\text{y, } \dot{x}^2 = \frac{mg}{k} (1 - e^{-(2k/m)x}) + \dot{x}_0^2 e^{-(2k/m)x} \quad (I)$$

La velocidad límite  $\dot{x}_{\max}$  se da para  $t \rightarrow \infty$ ; así pues,

$$\dot{x}_{\max} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad (2)$$

- 13.25.** Un proyectil de masa  $m$  recibe una velocidad inicial  $v_0$  que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Hallar el alcance, la altura máxima y el tiempo de vuelo, suponiendo que vuelve al suelo en un punto de la misma horizontal que el punto de disparo. En este caso se desprecia la resistencia del aire.

**SOLUCIÓN**

Como eje  $x$  se toma la horizontal del punto de disparo. El alcance es  $r$ . En la Figura 13.25 se representa el proyectil en un punto  $(x, y)$  de su trayectoria. La única fuerza que actúa sobre él es el peso  $mg$ .

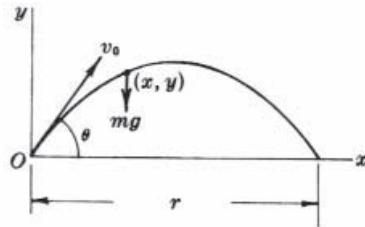


Figura 13.25

Las ecuaciones de movimiento en las direcciones  $x$  e  $y$  son

$$\sum F_x = 0 = m\ddot{x} \quad \text{y} \quad \sum F_y = -mg = m\ddot{y}$$

de donde  $\ddot{x} = 0$  e  $\ddot{y} = -g$ .

Integrando,  $\dot{x} = C_1$  e  $\dot{y} = -gt + C_2$ . Pero  $\dot{x}$  vale constantemente  $v_0 \cos \theta$ , y cuando  $t = 0$ , es  $\dot{y} = v_0 \operatorname{sen} \theta$ . Por tanto,

$$\dot{x} = v_0 \cos \theta \quad \text{e} \quad \dot{y} = -gt + v_0 \operatorname{sen} \theta$$

Integrando otra vez, resulta

$$x = (v_0 \cos \theta)t + C_3 \quad \text{e} \quad y = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 + C_4$$

Como  $x = 0$  e  $y = 0$  cuando  $t = 0$ ,  $C_3 = C_4 = 0$  y las ecuaciones de movimiento son

$$x = (v_0 \cos \theta)t \quad \text{e} \quad y = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Eliminando  $t$  entre estas dos ecuaciones, se obtiene la ecuación de la trayectoria en coordenadas cartesianas. Lo mejor es despejar  $t$  en la ecuación de  $x$  y sustituir ese valor en la ecuación de  $y$ .

Sustituyendo  $t = x/(v_0 \cos \theta)$  en la ecuación de  $y$  resulta

$$y = v_0 \operatorname{sen} \theta \frac{x}{v_0 \cos \theta} - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} = x \operatorname{tg} \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$$

que es la ecuación de una parábola

Para hallar el tiempo de vuelo, se iguala  $y$  a cero. La altura es cero al comienzo del movimiento y también cuando el proyectil choca con el suelo,

$$y = 0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = t(v_0 \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2}gt)$$

Los valores de  $t$  que satisfacen esta ecuación son  $t = 0$  (inicio del vuelo) y  $t = (2v_0 \operatorname{sen} \theta)/g$  (duración del vuelo) obtenido de  $v_0 \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}gt$ .

El alcance puede calcularse introduciendo este último valor de  $t$  en la ecuación de movimiento de  $x$ :

$$x = r = v_0 \cos \theta \left( \frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta}{g} \right) = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta \quad (\text{alcance})$$

Nótese que el alcance máximo para una velocidad inicial dada  $v_0$  se consigue cuando  $\operatorname{sen} 2\theta = 1$ , o sea, cuando  $2\theta = 90^\circ$ . Así pues, para toda  $v_0$  dada, el máximo alcance se consigue con  $\theta = 45^\circ$ .

La altura máxima puede hallarse bien suponiendo que se alcanza cuando ha transcurrido la mitad del tiempo de vuelo (consideración teórica), o bien despejando el tiempo  $t$  cuando se iguala a cero la componente  $y$  de la velocidad. Con la primera opción, al hacer  $t$  igual a la mitad del tiempo de vuelo en la ecuación de movimiento de  $y$ , ésta será  $h$ :

$$h = v_0 \operatorname{sen} \theta \left( \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{g} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g} \quad (\text{altura máxima})$$

- 13.26.** Una partícula de masa  $m$  se mueve bajo la atracción de otra masa  $M$  [Figura 13.26(a)] que suponemos en reposo. Estudiar el movimiento de la masa  $m$  teniendo en cuenta que la distancia entre las dos partículas no es siempre constante.

#### SOLUCIÓN

Respecto a la masa  $M$ , la partícula  $m$  tiene un radio vector  $\mathbf{r}$ . Se indican los vectores unitarios  $\mathbf{e}_r$  y  $\mathbf{e}_\phi$  del sistema de coordenadas polares utilizado. El diagrama de cuerpo libre de la masa  $m$  [Figura 13.26(b)] contiene sólo la fuerza atractiva  $\mathbf{F}$ , dirigida en el sentido negativo de  $\mathbf{e}_r$ . Según la ley de la gravitación de Newton, esa fuerza central es

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (1)$$

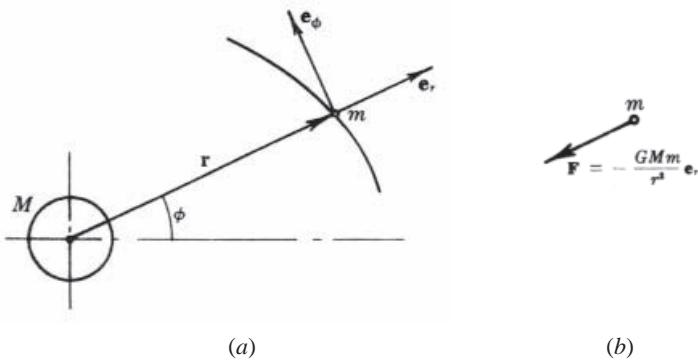


Figura 13.26

donde  $G$  es la constante de gravitación universal:

$$G = 6,658 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) \quad \text{en unidades SI}$$

$$G = 3,43 \times 10^{-8} \text{ lb} \cdot \text{ft}^2/(\text{slug})^2 \quad \text{en unidades EE. UU.}$$

En coordenadas polares, la aceleración  $\mathbf{a}$  es (véase sección 11.6)

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2r\dot{r}\dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi \quad (2)$$

Al introducir (1) y (2) en

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (3)$$

$$\text{resulta} \quad -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{e}_r = +m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + m(r\ddot{\phi} + 2r\dot{r}\dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi \quad (4)$$

Igualando a cero los coeficientes de  $\mathbf{e}_\phi$  y  $\mathbf{e}_r$

$$r\ddot{\phi} + 2r\dot{r}\dot{\phi} = 0 \quad (5)$$

$$\text{y} \quad \frac{-GM}{r^2} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \quad (6)$$

La ecuación (5) es la misma que

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) = 0 \quad (7)$$

Integrando (7),

$$r^2 \dot{\phi} = C \quad \text{constante} \quad (8)$$

Adviértase en la Figura 13.27 que el radio vector  $r$  barre un área  $dA$  cuando describe un ángulo  $d\phi$ . Ese área infinitesimal  $dA$  vale  $\frac{1}{2}r(r d\phi) = \frac{1}{2}r^2 d\phi$ . Dividiendo por  $dt$ ,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\phi} = \frac{1}{2}C$$

Así pues, el radio vector  $\mathbf{r}$  barra áreas iguales en tiempos iguales.

Ahora, para determinar la trayectoria de la masa  $m$ , resolvemos la ecuación (6). Para ello, lo mejor es hacer  $r = 1/u$  y, entonces,  $dr/dt = -1/u^2$  y

$$\dot{r} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{-1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \dot{\phi}$$

Pero, según (8),  $\dot{\phi} = C/r^2 = Cu^2$ ; por consiguiente,

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} Cu^2 = -C \frac{du}{d\phi}$$

$$\text{y } \ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \left( -C \frac{d^2 u}{d\phi^2} \right) Cu^2 = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\phi^2}$$

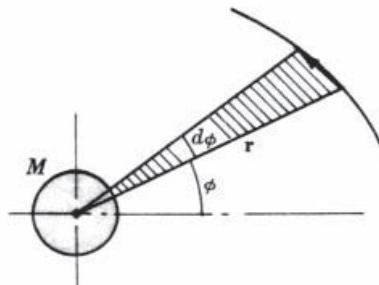


Figura 13.27

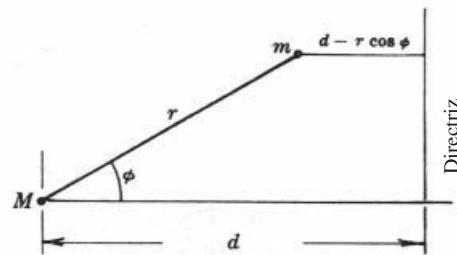


Figura 13.28

Sustituyendo en (6), obtenemos

$$-GMu^2 = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\phi^2} - C^2 u^3$$

o bien,

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{C^2} \quad (9)$$

Podemos suponer que la solución a esta ecuación (9) es de la forma

$$u = A \cos \phi + B \quad (10)$$

Este expresión debemos sustituirla en (9) para determinar las condiciones que permiten que sea una solución; así pues,

$$\frac{du}{d\phi} = -A \operatorname{sen} \phi \quad \frac{d^2 u}{d\phi^2} = -A \cos \phi$$

$$\text{y } -A \cos \phi + A \cos \phi + B = \frac{GM}{C^2}$$

Por tanto,  $B = GM/C^2$ , y la solución a (9) es

$$u = A \cos \phi + \frac{GM}{C^2} \quad \text{donde } u = \frac{1}{r} \quad (II)$$

Según la geometría analítica, esta ecuación (II) es la de una cónica, que es la trayectoria de un punto que se mueve de tal modo que el cociente de su distancia a un punto fijo  $M$  (el foco) entre su distancia a

una recta fija (la directriz) es un valor constante  $e$  (la excentricidad). En la Figura 13.28 se ilustran las distancias que intervienen en la definición

$$e = \frac{r}{d - r \cos \phi} \quad (12)$$

En esta expresión (12) podemos despejar  $1/r$  para obtener

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{d} \cos \phi + \frac{1}{ed} \quad (13)$$

En la tabla siguiente se resumen los tipos de cónicas en función del valor de  $e$ .

$e$	0	$< 1$	1	$> 1$
curva	circunferencia	elipse	parábola	hipérbola

La comparación de (11) y (13) revela que

$$\frac{1}{ed} = \frac{GM}{C^2} \quad \text{o sea,} \quad ed = \frac{C^2}{GM} \quad (14)$$

La ecuación de movimiento es

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{d} \cos \phi + \frac{GM}{C^2} \quad (15)$$

**13.27.** En el problema anterior, la trayectoria de un planeta  $m$  alrededor del Sol  $M$  es elíptica (excentricidad  $e < 1$ ). El Sol ocupa uno de los focos de la elipse. Demostrar que el periodo  $T$  (tiempo que dura una revolución del planeta alrededor del Sol) está dado por

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

donde  $a$  = semieje mayor de la elipse

$G$  = constante de gravitación

$M$  = masa del Sol

#### SOLUCIÓN

La trayectoria es una elipse de semieje mayor  $a$  y semieje menor  $b$ . En la Figura 13.29 se ve que

$$f + g = 2a \quad (1)$$

Además, la ecuación (13) del Problema 13.26 es

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{d} \cos \phi + \frac{1}{ed} \quad (2)$$

Cuando  $\phi = 0^\circ$ ,  $r = g$ ; y cuando  $\phi = 180^\circ$ ,  $r = f$ . Así pues, (2) queda

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{d} \cos 0^\circ + \frac{1}{ed} = \frac{1+e}{ed} \quad \text{y} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{d} \cos 180^\circ + \frac{1}{ed} = \frac{1-e}{ed}$$

Despejando  $f$  y  $g$  en el sistema de estas dos ecuaciones y sustituyendo en (1), hallamos

$$\frac{ed}{1+e} + \frac{ed}{1-e} = 2a \quad \text{o bien,} \quad 1 - e^2 = \frac{ed}{a} \quad (3)$$

Pero según la ecuación (14) del Problema 13.26,  $ed = C^2/GM$ . Por tanto, (3) queda

$$1 - e^2 = \frac{C^2}{GMa}$$

El área de la elipse es  $A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$ . Así pues,

$$A = \pi a^2 \frac{C}{\sqrt{GMa}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \frac{C}{2} \quad (4)$$

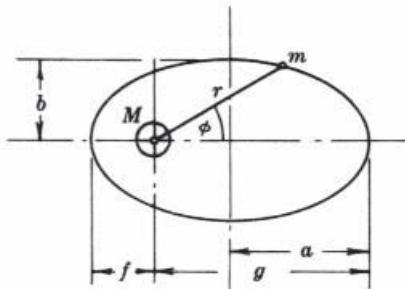


Figura 13.29

Esta expresión (4) da el área barrida en una revolución completa, o sea, durante un tiempo  $T$ . Ese área es también el producto de la velocidad areolar constante  $dA/dt$  por el tiempo  $T$ :  $A = (dA/dt) T$ . Finalmente, sustituyendo aquí  $dA/dt = C/2$ , como vimos en el Problema 13.26, tenemos

$$A = \frac{C}{2} T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \frac{C}{2} \quad \text{o sea,} \quad T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

- 13.28.** Expresar la constante de gravedadión  $G = 6,658 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{g} \cdot \text{s}$  en unidades tradicionales de EE. UU.

#### SOLUCIÓN

$$G = 6,658 \times 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{g} \cdot \text{s}^2} = 6,658 \times 10^{-8} \frac{(3,281 \times 10^{-2} \text{ ft})^3}{(2,205 / 32,2) 10^{-3} \text{ slug} \cdot \text{s}^2} = 3,43 \times 10^{-8} \frac{\text{ft}^3}{\text{slug} \cdot \text{s}^2}$$

Como 1 slug = 1 lb·s<sup>2</sup>/ft,

$$1 \frac{\text{ft}^3}{\text{slug} \cdot \text{s}^2} = 1 \frac{\text{ft}^3}{(\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}) \text{s}^2} = 1 \frac{\text{ft}^4}{\text{lb} \cdot \text{s}^4}$$

Así pues,

$$G = 3,43 \times 10^{-8} \frac{\text{ft}^4}{\text{lb} \cdot \text{s}^4}$$

- 13.29.** El satélite de la Figura 13.30 fue lanzado desde el punto  $A$  de la superficie terrestre. El punto de extinción  $P$ , donde todo el combustible está consumido, se encuentra a 5000 mi del centro de la Tierra  $C$ . Supóngase que la velocidad en  $P$  es  $v_0$ , perpendicular a la prolongación del radio de la Tierra. Hallar  $v_0$  de modo que la órbita del satélite sea (a) circular y (b) parabólica.

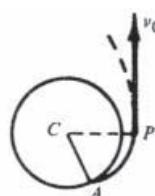


Figura 13.30

**SOLUCIÓN**

(a) Según hemos visto, con la condición (8) del Problema 13.26,

$$C = r^2 \dot{\phi} = r(r\dot{\phi}) = rv_0 = (5000 \times 5280)v_0 \quad (1)$$

En el Problema 13.26, la solución a la ecuación diferencial (9) está dada por la expresión (II) en la forma

$$u = \frac{1}{r} = A \cos \phi + \frac{GM}{C^2} \quad (2)$$

En el mismo problema, la solución a la ecuación (13) se presenta como

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{d} \cos \phi + \frac{1}{ed} \quad (3)$$

Por tanto, vemos que

$$A = \frac{1}{d} \quad \text{y} \quad \frac{1}{ed} = \frac{GM}{C^2} \quad (4)$$

que se combinan para dar

$$e = \frac{AC^2}{GM} \quad (5)$$

donde  $M$ , masa de la Tierra, es  $4,09 \times 10^{13}$  slugs.

Sustituyendo en (2), hallamos

$$\frac{1}{5000 \times 5280} = A \cos 0^\circ + \frac{(3,43 \times 10^{-8})(4,09 \times 10^{23})}{(5000 \times 5280v_0)^2} \quad (6)$$

o sea,

$$A = \frac{1}{5000 \times 5280} \left( 1 - \frac{5,31 \times 10^8}{v_0^2} \right) \quad (7)$$

En la relación (5) introducimos este valor (7) de  $A$  y hacemos  $e = 0$  (órbita circular) y, así, resulta

$$0 = \frac{1}{5000 \times 5280} \left( 1 - \frac{5,31 \times 10^8}{v_0^2} \right) \frac{C^2}{GM} \quad (8)$$

La relación (8) sólo puede satisfacerse si

$$1 - \frac{5,31 \times 10^8}{v_0^2} = 0$$

Así pues,

$$v_0 = 23.000 \text{ ft/s o } 15.700 \text{ mi/h}$$

(b) Para que la trayectoria sea parabólica debe ser  $e = 1$ . Introduciendo este valor en (5), obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{5000 \times 5280} \left( 1 - \frac{5,31 \times 10^8}{v_0^2} \right) \frac{C^2}{GM} \\ &= \frac{1}{5000 \times 5280} \left( 1 - \frac{5,31 \times 10^8}{v_0^2} \right) \frac{(5000 \times 5280)^2 v_0^2}{(3,43 \times 10^{-8})(4,09 \times 10^{23})} \end{aligned}$$

Y, simplificando,

$$v_0 = 32500 \text{ ft/s, o bien, } 22200 \text{ mi/h}$$

Adviértase que una velocidad  $v_0$  de valor mayor que éste daría una excentricidad mayor que 1, lo que significa que el satélite saldría con una trayectoria hiperbólica y nunca regresaría a la Tierra.

- 13.30.** Un satélite consume el combustible al llegar a un punto situado a 500 mi de la superficie terrestre viajando a una velocidad de 36000 ft/s en dirección perpendicular a la prolongación del radio de la Tierra. Hallar la excentricidad de la órbita. Se supone que la Tierra tiene un radio de 3940 mi.

#### SOLUCIÓN

La definición (12) del Problema 13.26 podemos reescribirla  $ed - er \cos \phi = r$ . De aquí, podemos escribir

$$r = \frac{ed}{1+e \cos \phi} = \frac{C^2 / GM}{1+e \cos \phi} \quad (1)$$

Nuestras condiciones iniciales son (a)  $r = 3940 + 500 = 4440$  mi y (b)  $\phi = 0$ . Además  $C = r^2 \dot{\phi} = r(v_0) = 4400 \times 5280 v_0$ ,  $G = 3,43 \times 10^{-8}$ , y  $M = 4,09 \times 10^{23}$ . Por tanto, con  $v_0 = 36.000$  ft/s, podemos escribir (1) como

$$4440 \times 5280 = \frac{(4440 \times 5280 \times 36.000)^2 / (3,43 \times 10^{-8})(4,09 \times 10^{23})}{1+e}$$

$$\text{o sea, } 1+e = \frac{4440 \times 5280 \times (36.000)^2}{(3,43 \times 10^{-8})(4,09 \times 10^{23})}$$

Resulta entonces que la excentricidad de la órbita es  $e = 1,17$  y la trayectoria es una parábola.

- 13.31.** Dado que el periodo  $T$  de tránsito de la Tierra alrededor del Sol es un año y que el perihelio de la Tierra está a 91.340.000 mi del Sol, y su afelio, a 94.450.000 mi, hallar la masa  $M$  del Sol. Se supone que 1 año = 365 días y se ignoran los efectos de los otros planetas.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 13.31 se muestra la Tierra en sus posiciones más cercana y más lejana del Sol (perihelio y afelio, respectivamente). El semieje mayor  $a$  de la elipse se obtiene sumando ambas distancias y dividiendo por 2; ello da  $a = 92,9 \times 10^6$  mi. Empleando la fórmula deducida en el Problema 13.27,

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 (92,9 \times 10^6 \times 5280)^3}{(3,43 \times 10^{-8})(365 \times 24 \times 3600)^2} = 13,7 \times 10^{28} \text{ slugs}$$

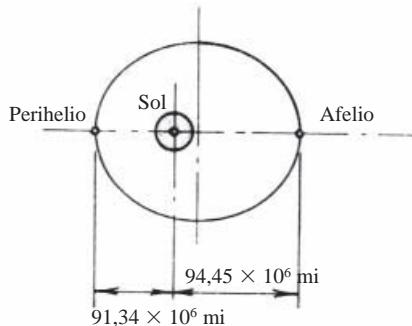


Figura 13.31

#### Problemas propuestos

- 13.32.** Un automóvil que pesa 4000 lb se acelera a razón de 3 ft/s<sup>2</sup> sobre una carretera horizontal. ¿Qué fuerza constante  $F$  (paralela al suelo) se requiere para producir esa aceleración? *Resp. 373 lb*
- 13.33.** Por un plano inclinado 25° se lanza hacia arriba un cuerpo con una velocidad inicial de 15 m/s. Si es 0,25 el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano, hallar la distancia que recorre el cuerpo a lo largo del plano y el tiempo que tarda en llegar al punto más alto.

Resp. 17,7 m, 2,36 s

- 13.34.** Enterrado a 60 ft de la superficie terrestre, se descubre un meteorito que pesa 1000 lb. Suponiendo una velocidad de impacto de 1000 ft/s, ¿cuál fue la fuerza retardadora media de la Tierra sobre el meteorito? *Resp.  $F = 265.000$  lb*

- 13.35.** Con una separación de 10 m, dos partículas de la misma masa se dejan caer desde el reposo por un plano inclinado  $25^\circ$ . El coeficiente de rozamiento entre la partícula superior y el plano es 0,15, y entre la partícula inferior y el plano, 0,25. Calcular el tiempo que tarda la primera en alcanzar a la segunda. *Resp.  $t = 4,74$  s*

- 13.36.** La Figura 13.32 representa un automóvil de 2800 lb de peso al atravesar una depresión de la carretera cuyo radio de curvatura es 50 ft. ¿Qué fuerza total soportan los amortiguadores.  
*Resp.  $N = 6170$  lb*

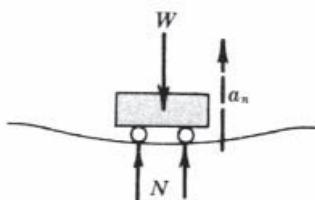


Figura 13.32

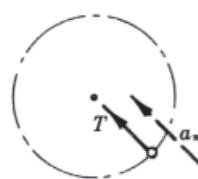


Figura 13.33

- 13.37.** Una lenteja de 25 g de masa describe una circunferencia horizontal suspendida de un hilo de 400 mm de longitud, tal como se ilustra en la Figura 13.33. ¿Cuál es la tensión del hilo cuando la celeridad angular es 30 rad/s?

*Resp.  $T = 90$  N*

- 13.38.** Un peso de 90 lb tiene una velocidad de 30 ft/s sobre una superficie horizontal lisa. Hallar el módulo de la fuerza horizontal capaz de detenerlo en 4 s. *Resp. 21,0 lb*

- 13.39.** La bola de 10 lb de peso de un péndulo cónico cuelga del extremo de una cuerda de 8 ft y describe una trayectoria circular horizontal. Si el peso se balancea de manera que la cuerda forma un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical, ¿cuál es la celeridad lineal de la bola?

*Resp. 8,63 ft/s*

- 13.40.** Dos masas de 40 y 35 kg, respectivamente, están unidas por una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento. Si las masas parten del reposo, hallar la distancia que recorren en 6 s.

*Resp. 11,8 m*

- 13.41.** Una masa de 40 kg es arrastrada por la superficie de una mesa mediante una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento, sujetada al borde de la mesa, y cuyo otro extremo está unido a una masa de 12 kg. Si el coeficiente de rozamiento entre la masa de 40 kg y la mesa es 0,15, hallar la aceleración del sistema y la tensión en la cuerda. *Resp.  $1,13 \text{ m/s}^2, 104 \text{ N}$*

- 13.42.** En la Figura 13.34, el bloque A tiene una masa de 8 kg y descansa en una superficie horizontal lisa, mientras que la masa B unida a la cuerda es de 4 kg. Hallar la aceleración de B y la tensión en la cuerda. No hay rozamiento en la polea.

*Resp.  $a = 3,27 \text{ m/s}^2 (\downarrow), T = 26,2 \text{ N}$*

- 13.43.** Dos bloques están unidos tal como se muestra en la Figura 13.35. El coeficiente de rozamiento entre el bloque A y el plano es 0,30. No hay rozamiento en la polea. Hallar la tensión en la cuerda.

*Resp.  $T = 13,0 \text{ lb}$*

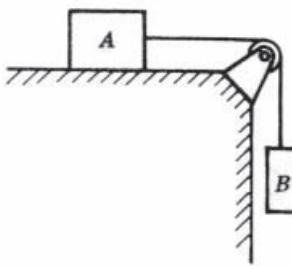


Figura 13.34

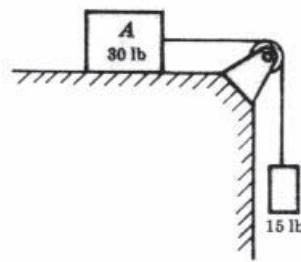


Figura 13.35

- 13.44.** Un bloque  $B$  descansa sobre un bloque  $A$ , del que tira una fuerza horizontal  $P$  paralela a una superficie horizontal lisa. Si el coeficiente de rozamiento entre los bloques es  $\mu$ , hallar la aceleración máxima antes de que haya deslizamiento entre  $A$  y  $B$ .

Resp.  $a = \mu g$

- 13.45.** Una caja de 20 lb se deja caer sobre la carrocería de un camión que se mueve horizontalmente a 30 mi/h. Si es 0,5 el coeficiente de rozamiento, calcular la distancia que recorre el camión antes de que la caja deje de patinar. Resp.  $s = 120$  ft

- 13.46.** Los pesos de 90 y 80 lb de la Figura 13.36 están unidos al sistema de cuerdas y poleas que se representa. Despreciando los pesos de poleas y cuerdas, y en ausencia de rozamiento, calcular las tensiones de las cuerdas. Nótese que la longitud de la cuerda que pasa por las poleas es constante.

$$x_2 + (x_2 - c) + x_1 = \text{constante} - 2 \text{ semicircunferencias}$$

Resp.  $T_1 = 52,8$  lb,  $T_2 = 106$  lb

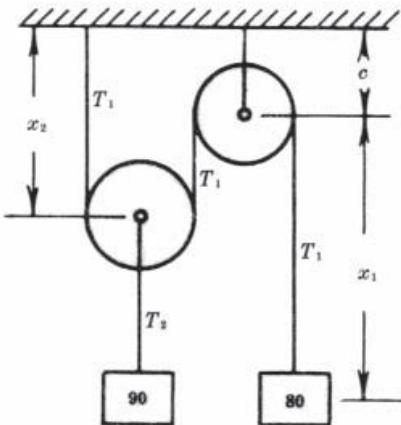


Figura 13.36

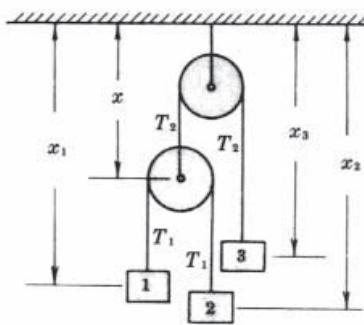


Figura 13.37

- 13.47.** En el sistema de poleas y cuerdas de la Figura 13.37,  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  denotan las posiciones respectivas de los pesos de 1, 2 y 3 lb durante un instante cualquiera después de soltarse el sistema. Despreciando las masas de poleas y cuerdas, y en ausencia de rozamiento, hallar las tensiones  $T_1$  y  $T_2$ .

Resp.  $T_1 = 1,41$  lb,  $T_2 = 2,82$  lb

- 13.48.** En la Figura 13.38,  $A$  y  $B$  pesan 15 y 55 lb, respectivamente. Se supone que el coeficiente de rozamiento entre  $A$  y el plano es 0,25, y entre  $B$  y el plano, 0,10. ¿Qué fuerza ejercen los bloques entre si al deslizar plano abajo? En los diagramas de cuerpo libre,  $P$  es la fuerza desconocida entre  $A$  y  $B$ .

Resp.  $P = 1,3$  lb

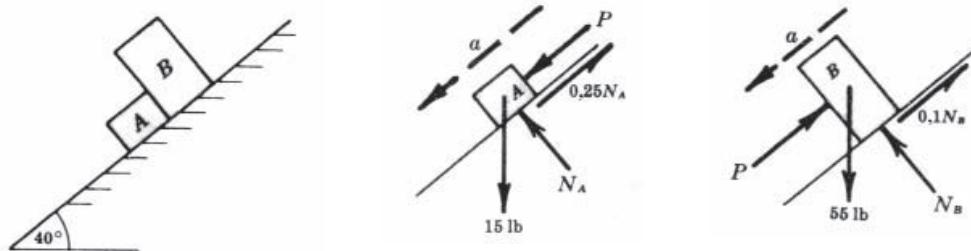


Figura 13.38

- 13.49.** Dos bloques macizos que descansan sobre un plano liso están conectados mediante un cordel, tal como se muestra en la Figura 13.39. Hallar la fuerza máxima  $P$  que puede aplicarse al bloque de 8 lb si la resistencia del cordel es 0,5 lb. Tratar los bloques como partículas.

*Resp.*  $P = 2,35$  lb

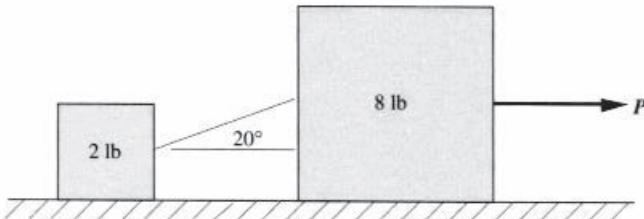


Figura 13.39

- 13.50.** Resolver el Problema 13.46 por el método de D'Alambert.

- 13.51.** Los dos bloques  $A$  y  $B$ , de pesos respectivos 10 y 20 lb, de la Figura 13.40 están conectados por una cuerda flexible y sin peso. El coeficiente de rozamiento entre los bloques y la plataforma giratoria es 0,35. Si la plataforma gira con una celeridad angular constante, hallar para qué valor de ésta empiezan a deslizar los bloques. Calcular también la tensión en la cuerda.

*Resp.*  $\omega = 2,6$  rad/s,  $T = 9,8$  lb

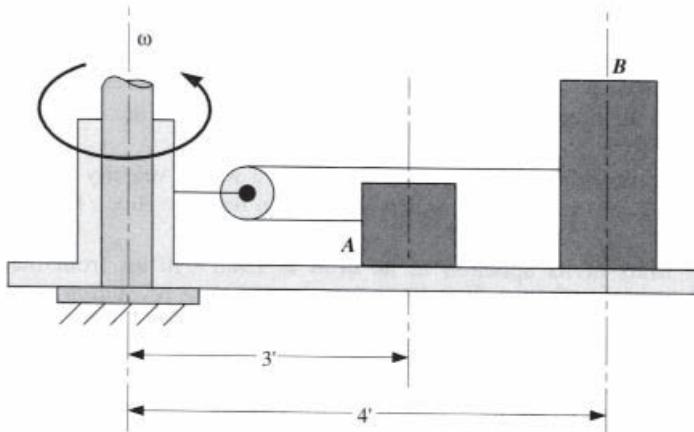


Figura 13.40

- 13.52.** Estando en reposo los dos bloques de la Figura 13.41, al de arriba se aplica una fuerza de 5 lb. Entre ambos el coeficiente de rozamiento es 0,20, y el suelo es liso. (a) Hallar la aceleración de cada bloque. (b) Hallar el tiempo que transcurre hasta que el frente derecho del bloque de arriba se enrassa con el frente derecho del bloque de abajo.

*Resp.*  $a_A = 9,66$  ft/s<sup>2</sup>,  $a_B = 3,22$  ft/s<sup>2</sup>,  $t = 0,28$  s

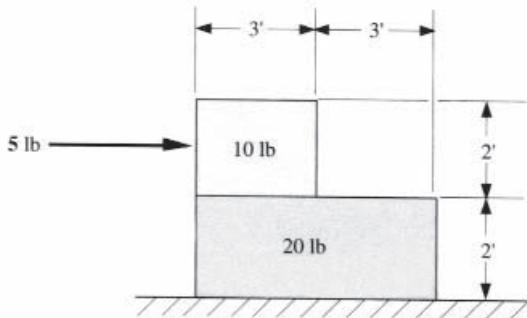


Figura 13.41

- 13.53.** En el Problema 13.52, calcular las aceleraciones si la fuerza de 5 lb se sustituye por una fuerza de 1,5 lb.

*Resp.* Aceleración de ambos bloques: 1,61 ft/s

- 13.54.** En el Problema 13.18, la masa  $M$  se desplaza una distancia  $x_0$  desde el equilibrio y se suelta con una velocidad inicial  $v_0$ . Demostrar que la ecuación de movimiento es

$$x = v_0 \sqrt{M/K} \operatorname{sen} \sqrt{M/K} t + x_0 \cos \sqrt{M/K} t$$

- 13.55.** ¿A qué altura sobre la superficie terrestre funcionaría un péndulo de 1,8 m con un periodo de 2,8 s? Supóngase  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  en la superficie terrestre y que la fuerza gravitatoria varía en proporción inversa al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. Tómese un radio de la Tierra de 6450 km.

*Resp.* 257 km

- 13.56.** En el Problema 13.21, supóngase que la masa es de 14 kg y que el diámetro del rizo mide 12 m. Hallar la reacción vertical de la pista sobre la masa cuando ésta está en la cresta del rizo para (a)  $h = 15 \text{ m}$  y (b)  $h = 18 \text{ m}$ .

*Resp.* (a)  $N = 0$ , (b)  $N_T = 137 \text{ N}$

- 13.57.** Una cadena de 32,2 ft de largo se extiende con la mitad de su longitud sobre una mesa horizontal lisa y la otra mitad colgando libremente. Si la cadena parte del reposo, calcular el tiempo que tarda en abandonar la mesa. (Figura 13.22).

*Resp.*  $t = 1,32 \text{ s}$

- 13.58.** Un cuerpo de masa 1,5 kg cae en el seno de un medio cuya resistencia es  $R = kx$ , con  $k = 0,7 \text{ (N \cdot s)/m}$ . ¿Cuál es la velocidad terminal?

*Resp.*  $\dot{x}_{\max} = 21 \text{ m/s}$

- 13.59.** Una partícula de masa  $m$  se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad  $v_0$  en el seno de un medio cuya resistencia es  $kv$ . Hallar el tiempo que tarda en llegar al reposo.

*Resp.*  $t = (m/k) \ln(1 + kv_0/mg)$

- 13.60.** Una partícula de masa  $m$  se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad  $v_0$  en el seno de un medio cuya resistencia es  $kv^2$ . Hallar el tiempo que tarda en llegar al reposo.

*Resp.*  $t = \sqrt{m/kg} \operatorname{artg} v_0 \sqrt{k/mg}$

- 13.61.** El afelio de Marte en su órbita está a  $154,8 \times 10^8 \text{ mi}$  del Sol, y su perihelio a  $128,8 \times 10^8 \text{ mi}$ . Demostrar que el tiempo de una revolución completa calculado por los métodos de este capítulo es próximo al valor real de 687 días.

**13.62.** El satélite soviético Sputnik I tenía una masa de unos 83 kg y su recorrido orbital en torno a la Tierra variaba en altitud entre 220 y 900 km. Suponiendo un radio de la Tierra de 6340 km, demostrar que el tiempo de una revolución completa es 1,5 h aproximadamente.

**13.63.** El satélite esférico de plástico Echo I se puso en una órbita cuya altura sobre la superficie terrestre variaba de 945 a 1049 mi. Demostrar que el tiempo de una revolución completa era inicialmente de unas dos horas.

**13.64.** Un satélite con el combustible consumido se encuentra a 300 mi sobre la superficie terrestre y se mueve a una velocidad de 30.000ft/s en una dirección perpendicular a la prolongación del radio terrestre. Determinar qué tipo de órbita describe.

*Resp.*  $e = 0,434$ ; órbita elíptica

**13.65.** ¿En qué punto de un viaje de la Tierra a la Luna se igualan las fuerzas que ambas masas ejercen sobre una nave espacial? Se supone que la masa de la Luna es 0,012 veces la masa de la Tierra y que la distancia de la Tierra a la Luna es 239.000 mi.

*Resp.*  $d = 216.000$  mi desde el centro de la Tierra

**13.66.** Sabiendo que el periodo de la Tierra alrededor del Sol es 365 días y que el perihelio y el afelio son  $91,3 \times 10^6$  millas y  $94,4 \times 10^6$  millas, respectivamente, hallar la excentricidad de la órbita terrestre.

*Resp.*  $e = 0,017$

**13.67.** Un satélite meteorológico debe ponerse en órbita circular terrestre a una altitud de 300 millas. Su velocidad inicial en la órbita es paralela a la superficie terrestre. ¿Cuánto debe valer esa velocidad inicial?

*Resp.*  $v_0 = 17.000$  mi/h

**13.68.** Para el satélite del Problema 13.64, calcular la altitud máxima y la velocidad correspondiente.

*Resp.*  $h = 6800$  mi,  $v = 8100$  mi/h

**13.69.** Los satélites de comunicaciones describen una órbita terrestre en un día. Desde la Tierra se les ve inmóviles. Hallar la altitud y la velocidad necesarias para un satélite de comunicaciones.

*Resp.*  $h = 22.300$  mi,  $v = 6870$  mi/h



# CINEMÁTICA DE UN CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO

# 14

## 14.1 MOVIMIENTO PLANO DE UN CUERPO RÍGIDO

Un cuerpo rígido ejecuta un movimiento plano si todos sus puntos se mantienen a una distancia constante de un plano fijo. En la Figura 14.1, se supone que el plano  $XY$  es el plano fijo de referencia. La placa de la figura es representativa de todas las láminas de espesor infinitesimal que forman el cuerpo rígido. La distancia  $Z$  a cualquier punto de la placa permanece constante al moverse ésta.

Se acostumbra a tomar un punto arbitrario  $B$  del cuerpo como origen de un triángulo de referencia no rotatorio  $xyz$ .

El vector de posición  $\mathbf{r}_A$  de un punto cualquiera  $A$  (fijo o en movimiento) de la placa puede ahora escribirse en función del vector de posición  $\mathbf{r}_B$  de  $B$  y del vector  $\mathbf{BA}$ , que se designa  $\boldsymbol{\rho}$ . Así pues,

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\rho}$$

Si, tal como impone la rigidez del cuerpo,  $AB$  es constante, la variación de  $\boldsymbol{\rho}$  con el tiempo está dada por la ecuación (20) del Capítulo 12. Por tanto, podemos escribir

$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_B + \dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\mathbf{r}}_B + \rho\omega\mathbf{e}_\phi \quad (1)$$

donde  $\dot{\mathbf{r}}_B$  = velocidad lineal del polo  $B$  respecto a los ejes fijos  $XYZ$

$\omega$  = módulo de la velocidad angular, o *celeridad* angular, de  $\boldsymbol{\rho}$  alrededor de cualquier recta paralela al eje  $Z$

$\mathbf{e}_\phi$  = vector unitario perpendicular a  $\boldsymbol{\rho}$  y en el sentido en que  $\phi$  aumenta (tal como indica la regla de la mano derecha, o sea, antihorario en torno al eje  $z$ ).

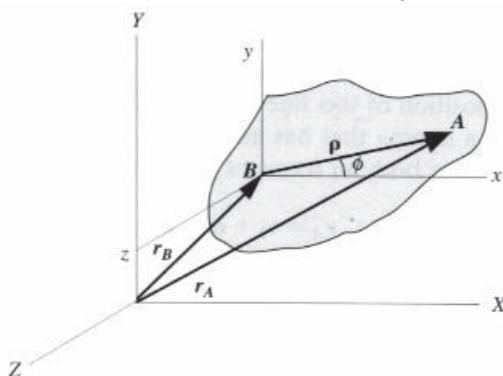


Figura 14.1

La aceleración  $\mathbf{a}_A$  puede hallarse a continuación aplicando la ecuación (21) del Capítulo 12:

$$\mathbf{a}_A = \ddot{\mathbf{v}}_A = \ddot{\mathbf{r}}_A = \ddot{\mathbf{r}}_B - \rho\omega^2\mathbf{e}_r + \rho\alpha\mathbf{e}_\phi \quad (2)$$

donde  $\ddot{\mathbf{r}}_B$  = aceleración lineal del polo  $B$  respecto a los ejes fijos  $XYZ$

$\mathbf{e}_r$  = vector unitario según  $\boldsymbol{\rho}$  dirigido de  $B$  a  $A$

$\mathbf{e}_\phi$  = vector unitario especificado para la ecuación anterior (1)

$\alpha$  = módulo de la aceleración angular de  $\rho$  en torno a cualquier recta paralela al eje Z.

Un procedimiento alternativo para escribir las ecuaciones (1) y (2) puede desarrollarse como sigue:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{k} = \omega\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\alpha} = \ddot{\phi}\mathbf{k} = \dot{\omega}\mathbf{k} = \alpha\mathbf{k}$$

donde  $\omega$  y  $\alpha$  son positivos si sus sentidos son antihorarios en torno al eje  $z$  vistos desde el extremo positivo del eje (regla de la mano derecha).

Entonces, en la ecuación (1) el término  $\rho\omega\mathbf{e}_\phi$  puede sustituirse por el producto vectorial  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$ , al que es idéntico. (Ver Problema 14.1.) Análogamente, en la ecuación (2) la componente  $\rho\alpha\mathbf{e}_\phi$  de la aceleración equivale a  $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}$ . La componente  $2\rho\omega^2\mathbf{e}_r$  es idéntica a  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})$ . Estas sustituciones dan

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} \quad (3)$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p} \quad (4)$$

Las ecuaciones (3) y (4) pueden también escribirse

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \quad (5)$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B} \quad (6)$$

donde  $\mathbf{v}_{A/B}$  y  $\mathbf{a}_{A/B}$  son la velocidad relativa y la aceleración relativa de  $A$  al girar en torno a  $B$ , el cual, como hemos visto, se mueve respecto al triángulo de referencia XYZ.

## 14.2 TRANSLACIÓN

Hay translación cuando la recta  $\mathbf{p}$  que va de  $B$  a  $A$  no gira. Así, al moverse la placa, todas las rectas de ésta permanecen siempre paralelas a sus direcciones originales.

## 14.3 ROTACIÓN

Hay rotación cuando el punto base  $B$  está fijo. Considerando el cuerpo rígido en su totalidad, hay una recta que pasa por  $B$  paralela al eje  $Z$  que está inmóvil en el sistema XYZ. Para describir este movimiento se igualan a cero la velocidad  $\mathbf{v}_B$  y la aceleración  $\mathbf{a}_B$  en las ecuaciones (1) y (2) o en las ecuaciones (3) y (4).

## 14.4 EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN

El eje instantáneo de rotación es la recta de un cuerpo en movimiento plano (o del cuerpo ampliado) que es el lugar geométrico de los puntos de velocidad cero. Es perpendicular al plano del movimiento (paralelo al eje  $Z$  en nuestro sistema). Todos los demás puntos del cuerpo rígido giran alrededor de esa recta en ese *instante*. Es importante darse cuenta de que la posición de esa recta de velocidad cero varía, en general, continuamente. Para ubicar el centro instantáneo  $I$  de una placa animada de una velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , se escriben las velocidades de dos puntos cualesquiera  $A$  y  $C$  del cuerpo tomando  $I$  como punto base. Véase la Figura 14.2. O sea,

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_I + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_A$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_I + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_C$$

Pero  $\mathbf{v}_I$  es cero porque  $I$  es el centro instantáneo. Entonces,  $\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_A$  y  $\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_C$ . Estas ecuaciones revelan que  $\mathbf{p}_A$  es perpendicular a  $\mathbf{v}_A$  ( $I$  está en  $\mathbf{p}_A$ ) y que  $\mathbf{p}_C$  es perpendicular a  $\mathbf{v}_C$  ( $I$  está en  $\mathbf{p}_C$ ). Por consiguiente, el centro instantáneo  $I$  es el punto de intersección de las perpendiculares a  $\mathbf{v}_A$  y  $\mathbf{v}_C$ .

## 14.5 ACELERACIÓN DE CORIOLIS

En la Sección 14.1 se dedujeron la velocidad y la aceleración de un punto de un cuerpo rígido cuando el triángulo de referencia relativo  $xyz$  no giraba. En la Figura 14.3 se representa la placa, en movimiento plano, donde el polo  $B$  es el origen de un triángulo de referencia giratorio. La aceleración de  $P$  está dada por

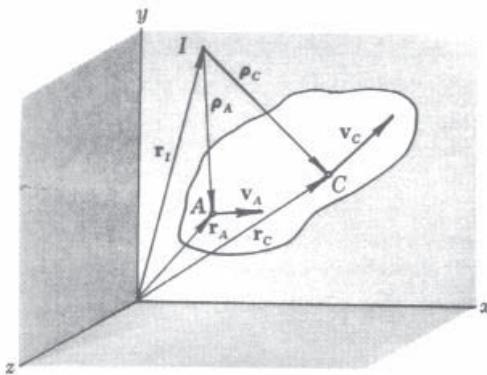


Figura 14.2

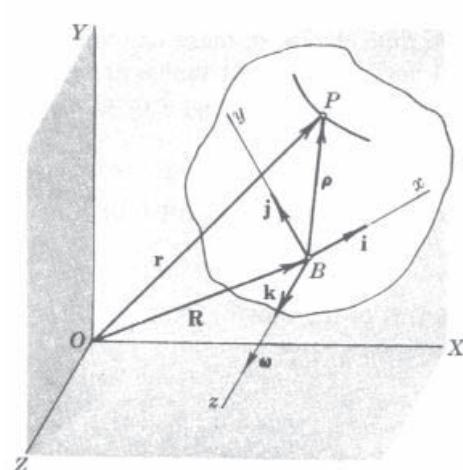


Figura 14.3

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P/\text{rel}} + \mathbf{a}_M + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{P/\text{rel}} \quad (7)$$

donde

$\mathbf{a}_{P/\text{rel}}$  = aceleración relativa de  $P$ , o sea, medida en el sistema giratorio empleando las componentes tangente y normal a la trayectoria

$\mathbf{a}_M$  = aceleración del punto  $M$ , fijo respecto al sistema giratorio, con el que  $P$  coincide en ese instante

$\mathbf{v}_{P/\text{rel}}$  = velocidad relativa del punto  $P$ , o sea, medida en el sistema giratorio (esta velocidad debe necesariamente ser tangente a la trayectoria que describe la partícula del cuerpo considerada)

$\boldsymbol{\omega}$  = velocidad angular de la trayectoria (o de la placa)

$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{P/\text{rel}}$  = componente de Coriolis, cuya dirección y sentido se deducen rotando mentalmente  $\mathbf{v}_{P/\text{rel}}$  dentro del plano de la placa un ángulo de noventa grados en el mismo sentido que  $\boldsymbol{\omega}$ .

En la ecuación (7) se ve que, al referir la aceleración a unos ejes giratorios, aparece un tercer término en la ecuación de la aceleración. La ecuación de la velocidad no varía. Ese tercer término recibe el nombre de componente de Coriolis de la aceleración, o simplemente aceleración de Coriolis, en honor del ingeniero y matemático francés Gustav Coriolis (1792-1843). También se conoce como aceleración complementaria. La aceleración de Coriolis se debe al hecho de que  $\rho$ , medido en el triángulo de referencia giratorio, se define respecto a  $\mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k}$ . Pero los versores  $\mathbf{ijk}$  cambian continuamente de dirección y, por ello, sus derivadas no son nulas.

La demostración de la ley de Coriolis es la siguiente.

En la placa que en la Figura 14.3 se representa paralela al plano fijo  $XY$  sean

$\mathbf{R}$  = vector de posición del punto base  $B$

$\mathbf{r}$  = vector de posición del punto  $P$  en su trayectoria fija respecto a la placa

$\rho$  = radio vector de  $P$  respecto al punto base  $B$

$\boldsymbol{\omega}$  = velocidad angular de la placa en torno al eje  $Z$

Sean  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  los versores de los ejes  $x$  e  $y$ , que están fijos en la placa y por ello giran con una velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}\mathbf{k}$  (nótese que  $\boldsymbol{\omega}$  es la misma para ambos ejes  $z$  y  $Z$ ). Como  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  giran, ambos varían con el tiempo. En la sección 12.6 se demostró que la variación por unidad de tiempo de un vector unitario es un vector unitario perpendicular al anterior de módulo igual a la celeridad angular  $\boldsymbol{\omega}$ . Así pues,  $\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}$  y  $\dot{\mathbf{j}} = -\boldsymbol{\omega}\mathbf{i} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}$ . Ahora, se tiene que

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \rho \quad (8)$$

Seguidamente, esta ecuación (8) la derivamos respecto al tiempo y resulta

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\rho} \quad (9)$$

Pero, para los ejes móviles,

$$\rho = xi + yj \quad (10)$$

$$y \quad \dot{\rho} = \dot{x}i + \dot{y}j + x\dot{i} + y\dot{j} = v_{P/\text{rel}} + \omega \times \rho$$

donde  $\dot{x}i + \dot{y}j = v_{P/\text{rel}}$  y  $x\dot{i} + y\dot{j} = x(\omega \times i) + y(\omega \times j) = \omega \times (xi + yj) = \omega \times \rho$ .

Así pues, la ecuación (9) podemos reescribirla como

$$\dot{r} = \dot{R} + \omega \times \rho + v_{P/\text{rel}} \quad (11)$$

Nótese que los dos primeros términos del segundo miembro de la ecuación (11) dan la velocidad absoluta del punto  $M$  de la trayectoria, fijo en el sistema móvil, que coincide con  $P$  en el instante considerado [cfr. ec. (3)]. La ecuación (11) puede expresarse

$$v_P = v_M + v_{P/\text{rel}} \quad (12)$$

Para deducir la expresión de la aceleración de  $P$ , se deriva la ecuación (9) respecto al tiempo, pero expresando  $\dot{\rho}$  como  $\dot{x}i + \dot{y}j + \omega \times \rho$ :

$$\frac{d(\dot{r})}{dt} = \frac{d(\dot{R})}{dt} + \frac{d}{dt}(x\dot{i} + y\dot{j} + \omega \times \rho)$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \ddot{R} + \ddot{x}i + \ddot{y}j + \dot{x}\dot{i} + \dot{y}\dot{j} + \dot{\omega} \times \rho + \omega \times \dot{\rho} \\ &= \ddot{R} + a_{P/\text{rel}} + \omega \times (x\dot{i} + y\dot{j}) + \alpha \times \rho + \omega \times (x\dot{i} + y\dot{j} + \omega \times \rho) \\ &= \ddot{R} + a_{P/\text{rel}} + \omega \times v_{P/\text{rel}} + \alpha \times \rho + \omega \times v_{P/\text{rel}} + \omega \times (\omega \times \rho) \end{aligned} \quad (13)$$

Los términos primero, cuarto y sexto del segundo miembro de la ecuación (13) dan la velocidad absoluta del punto  $M$  de la trayectoria, fijo en el sistema móvil, que coincide con  $P$  en el instante considerado [cfr ec. (4)]. La ecuación (13) puede escribirse

$$\ddot{r} = a_M + a_{P/\text{rel}} + 2\omega \times v_{P/\text{rel}}$$

que es la misma que la ecuación (7)

### Problemas resueltos

**Como en capítulos anteriores, en los diagramas los vectores se identifican únicamente por sus módulos cuando sus direcciones y sentidos son evidentes**

- 14.1.** Hallar la velocidad lineal  $v$  de un punto cualquiera  $p$  de un cuerpo rígido que gira con una velocidad angular  $\omega$  alrededor de un eje tal como se muestra en la Figura 14.4.

#### SOLUCIÓN

Como punto de referencia, se elige uno *cualquier*  $O$  del eje de rotación. Se representa el radio vector  $\rho$  del punto  $P$  respecto a  $O$ . La velocidad  $v$  del punto  $P$  es un vector tangente a un círculo contenido en el plano perpendicular al eje de rotación. El módulo del vector  $v$  es el producto del radio del círculo por la celeridad angular  $\omega$ . Se ve en la figura que el radio del círculo es  $\rho \sin \theta$ . Por tanto, el módulo de  $v$  es  $\rho \omega \sin \theta$ .

Según la definición de producto vectorial,  $\omega \times \rho$  tiene el mismo módulo  $\rho \omega \sin \theta$  y es perpendicular al plano que contiene a  $\rho$  y a  $\omega$ . Por tanto, resulta que

$$v = \omega \times \rho$$

En el movimiento plano de la placa representado al comienzo de este capítulo,  $\omega$  es perpendicular al plano de la placa y  $\rho$  está en el plano de la placa; por tanto,  $v = \omega \times \rho$  está en el plano de la placa y es perpendicular a  $\rho$ .

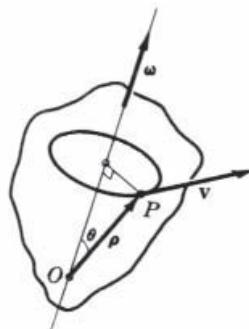


Figura 14.4

- 14.2.** Un volante de 500 mm de diámetro se lleva uniformemente desde el reposo hasta una velocidad de 300 rpm en 20 s. Calcular la velocidad y la aceleración de un punto de la llanta 2 s después del arranque.

#### SOLUCIÓN

Este problema ilustra la aplicación de las ecuaciones de la rotación.

Primero se halla el módulo de la aceleración angular  $\alpha$  que actúa hasta que se alcanza la velocidad de funcionamiento.

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2\pi(300/60)\text{rad/s} - 0}{20\text{ s}} = 1,57 \text{ rad/s}^2$$

Luego se halla la celeridad angular de la rueda a los 2 s del arranque

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha t = 0 + (1,57 \text{ rad/s}^2)(2 \text{ s}) = 3,14 \text{ rad/s}$$

La celeridad de un punto de la llanta es

$$v = r\omega = (0,25 \text{ m})(3,14 \text{ rad/s}) = 0,785 \text{ m/s}$$

El módulo de la aceleración normal de un punto de la llanta es

$$a_n = r\omega^2 = (0,25 \text{ m})(3,14 \text{ rad/s}^2) = 2,46 \text{ m/s}^2$$

El módulo de la aceleración normal de un punto de la llanta es

$$a_t = r\alpha = (0,25 \text{ m})(1,57 \text{ rad/s}^2) = 0,39 \text{ m/s}^2$$

El módulo de la aceleración total de un punto de la llanta es

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(2,46)^2 + (0,39)^2} = 2,49 \text{ m/s}^2$$

El ángulo entre el vector aceleración total y el radio correspondiente al punto es

$$\theta = \arccos \frac{a_n}{a} = \arccos \frac{2,46}{2,49} = 0,155 \text{ rad, o sea, } 8,9^\circ$$

En la Figura 14.5 se representa el resultado.

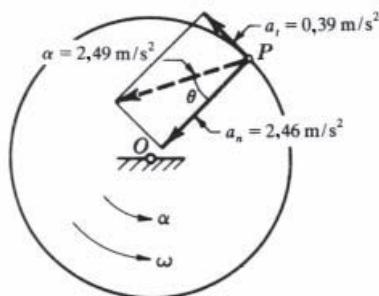


Figura 14.5

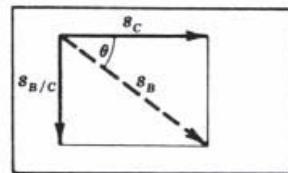


Figura 14.6

- 14.3.** Una bola rueda 2 m sobre un vagón batea en un dirección normal a la trayectoria del vagón. Mientras la bola rueda, el vagón recorre 2,5 m a velocidad constante a lo largo de una vía horizontal recta. ¿Cuál es el desplazamiento absoluto de la bola?

**SOLUCIÓN**

La ecuación vectorial que da el desplazamiento absoluto  $\mathbf{s}_B$  de la bola  $B$  en función del desplazamiento  $\mathbf{s}_C$  del vagón es

$$\mathbf{s}_B = \mathbf{s}_{B/C} + \mathbf{s}_C$$

El desplazamiento  $\mathbf{s}_{B/C}$  de la bola relativo al vagón es de 2 m y perpendicular a la vía. El desplazamiento absoluto del vagón es de 2,5 m y paralelo a la vía. Estas relaciones se representan en la Figura 14.6.

El desplazamiento absoluto  $\mathbf{s}_B$  de la bola es la suma de los dos vectores dados. Su módulo es

$$s_B = \sqrt{(s_{B/C})^2 + (s_C)^2} = \sqrt{(2)^2 + (2,5)^2} = 3,2 \text{ m}$$

El ángulo que el vector  $\mathbf{s}_B$  forma con la vía es  $\theta = \operatorname{artg}(s_{B/C}/s_C) = \operatorname{artg}(2/2,5) = 0,675 \text{ rad o } 38,7^\circ$ .

- 14.4.** El automóvil  $A$  viaja a 20 mi/h por una carretera recta enfilada al noroeste. El automóvil  $B$  viaja a 70 mi/h por una carretera recta enfilada a  $60^\circ$  al sur con respecto al oeste. Véase la Figura 14.7(a). ¿Cuál es la velocidad de  $A$  respecto a  $B$ ? ¿Y la de  $B$  respecto a  $A$ ?

**SOLUCIÓN**

La ecuación vectorial que relaciona las velocidades es

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{A/B} + \mathbf{v}_B$$

Esta ecuación puede también escribirse como sigue, restando  $\mathbf{v}_B$  en ambos miembros:

$$\mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$$

La sustracción vectorial se efectúa sumando a  $\mathbf{v}_A$  el vector opuesto a  $\mathbf{v}_B$ , tal como se indica en la Figura 14.7(b).

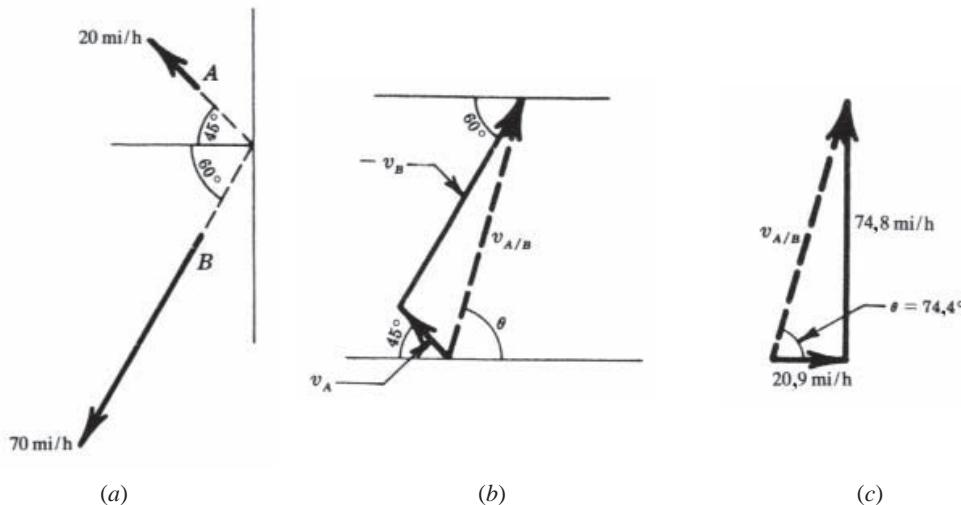


Figura 14.7

Para calcular el valor de las componentes  $x$  e  $y$  de  $\mathbf{v}_{A/B}$ , puede emplearse la tabla siguiente.

Vector	Componente $x$	Componente $y$
$\mathbf{v}_A$	$-20 \times 0,707$	$+20 \times 0,707$
$-\mathbf{v}_B$	$+70 \times 0,500$	$-70 \times 0,866$

La componente  $x$  de  $\mathbf{v}_{A/B}$  es  $+20,9$  mi/h y la componente  $y$  vale  $+74,8$  mi/h. Véase la Figura 14.7(c). Entonces,

$$v_{A/B} = \sqrt{(20,9)^2 + (74,8)^2} = 77,7 \text{ mi/h}$$

El ángulo que  $\mathbf{v}_{A/B}$  forma con la dirección este es  $\theta = \arctg(74,8/20,9) = 74,41^\circ$ .

Para hallar la velocidad de  $B$  respecto a  $A$ , hay que restar  $\mathbf{v}_A$  de  $\mathbf{v}_B$  tal como indica la siguiente ecuación vectorial

$$\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$$

En la Figura 14.8 se representa la sustracción.

Para los cálculos, aquí puede también emplearse una tabla.

Vector	Componente $x$	Componente $y$
$\mathbf{v}_A$	$-70 \times 0,500$	$-70 \times 0,866$
$-\mathbf{v}_B$	$+20 \times 0,707$	$-20 \times 0,707$

La componente  $x$  de  $\mathbf{v}_{B/A}$  es  $-20,9$  mi/h y la componente  $y$  vale  $-74,8$  mi/h. Obviamente,  $\mathbf{v}_{B/A}$  es el vector opuesto a  $\mathbf{v}_{A/B}$ .

- 14.5.** Con una carta local el piloto de un avión determina que el rumbo respecto a tierra para un destino a 95 mi de distancia debe ser  $295^\circ$ . Hay un viento del sur de 20 mi/h (soplado desde el sur). La velocidad aerodinámica (celeridad respecto al aire que se mueve a 20 mi/h hacia el norte) es de 120 mi/h. ¿Qué rumbo respecto al norte geográfico deberá fijar el piloto para llegar a destino y cuánto durará el viaje?

#### SOLUCIÓN

En la Figura 14.9 se representa el rumbo respectivo a tierra de  $295^\circ$  medido en sentido horario desde la línea del norte geográfico. La velocidad del viento de 20 mi/h está dibujada hacia el norte desde el punto de partida. La solución gráfica sea quizás la más fácil. Con centro en el extremo del vector velocidad del viento y con un radio de 120 mi/h, se traza un arco que corta en  $C$  a la línea del rumbo respectivo a tierra.

Se tiene un triángulo de velocidades en el que  $\mathbf{OC} = \mathbf{OW} + \mathbf{WC}$ , lo que no es sino la expresión del hecho de que la velocidad del aparato a lo largo del rumbo respectivo a tierra (cuyo valor se llama velocidad respecto a tierra o velocidad absoluta) es igual a su velocidad respecto al viento (cuyo valor se llama velocidad aerodinámica) más la velocidad del viento respecto a tierra.

En la figura se mide que el ángulo entre la velocidad aerodinámica  $WC$  y la línea del norte geográfico es  $286^\circ$ . Este es el rumbo respectivo al norte geográfico, o rumbo verdadero,  $R.V.$ , o dirección en la que debe aproarse el avión.

Medida a escala, la velocidad respecto a tierra  $OC$  es de 127 mi/h. Por tanto, el tiempo de vuelo estimado es igual a 95 mi dividido por 127 mi/h, o sea, 45 minutos.

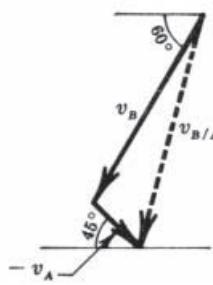


Figura 14.8

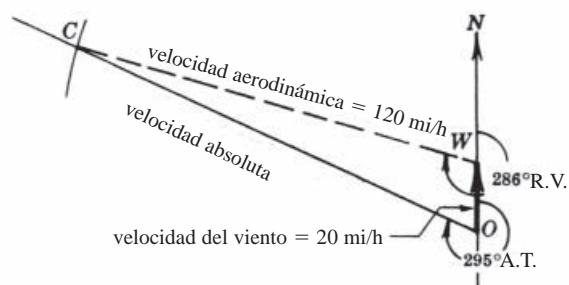


Figura 14.9

- 14.6.** Para compensar la desviación y la variación magnéticas, un piloto calcula que el rumbo verdadero de su avión debe ser  $58^\circ$ . La velocidad aerodinámica es de 250 mi/h. Varios puntos de control

indican que el avión mantiene un rumbo respecto a tierra de  $63^\circ$  con una velocidad absoluta de 295 mi/h. Hallar la dirección y el valor de la velocidad del viento.

#### SOLUCIÓN

Se traza la linea del rumbo verdadero formando un ángulo de  $58^\circ$  con la linea del norte geográfico, tal como se muestra en la Figura 14.10. En ella, se toma **OP** de longitud 250 mi/h a escala. Se traza la línea del rumbo respecto a tierra formando un ángulo de  $63^\circ$  con la linea del norte geográfico que pasa por **O**. En ésta, se toma **OW** de longitud 295 mi/h a escala, como velocidad absoluta. Pero **OW** = **OP** + **PW**, cuya interpretación es que la velocidad absoluta del avión es igual a su velocidad respecto al aire más la velocidad del aire (vector del viento); o sea,  $v_{ABS}(\text{avión}) = v_{aer}(\text{avión}) + v_{aire}$ .

Medida a escala, **PW** da aproximadamente un viento del oeste, o de  $270^\circ$ , de 50 mi/h.

- 14.7.** La varilla de longitud  $l$  se mueve de modo que la velocidad del punto A es de módulo constante y dirigida hacia la izquierda. Hallar su velocidad angular  $\omega$  y su aceleración angular  $\alpha$  cuando forma un ángulo  $\theta$  con la vertical, tal como se muestra en la Figura 14.11.

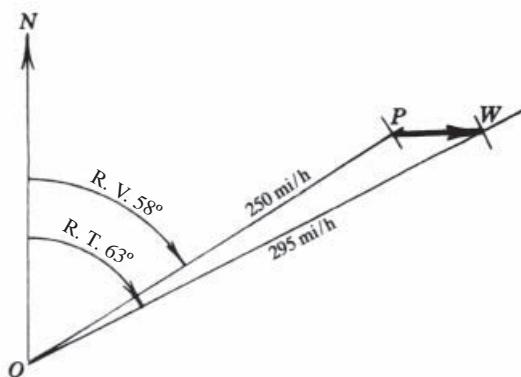


Figura 14.10

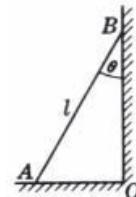


Figura 14.11

#### SOLUCIÓN

La velocidad absoluta  $\mathbf{v}_A$  del punto A hay que expresarla en función de la velocidad de A respecto a B ( $\mathbf{v}_{A/B}$ ) pues este término introduce la cantidad buscada  $\omega$ :

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{A/B} + \mathbf{v}_B$$

En la tabla se resumen los datos conocidos de los vectores.

Vector	Dirección	Módulo
$\mathbf{v}_A$	horizontal	$v_A$
$\mathbf{v}_{A/B}$	$\perp$ varilla	$l\omega$ ( $\omega$ desconocida)
$\mathbf{v}_B$	vertical	desconocido

Las incógnitas son los dos módulos. Se dibuja un triángulo de vectores empezando por  $\mathbf{v}_A$ , que es completamente conocida. Por el extremo (o el origen) de  $\mathbf{v}_A$  se traza una recta perpendicular a la varilla, y por el origen (o el extremo) se traza una recta vertical para cerrar el triángulo tal como se muestra en la Figura 14.12.

El lado vertical se designa  $v_B$  y el perpendicular a la varilla se designa  $v_{A/B}$ , tal como se indica. En este triángulo rectángulo,  $v_{A/B} = v_A / \cos \theta$ . Pero  $v_{A/B} = l\omega$ . Por tanto,  $\omega = v_{A/B}/l = v_A / l \cos \theta$ .

Como  $\mathbf{v}_{A/B}$  apunta hacia arriba y a la izquierda, A debe girar en sentido horario en torno a B; es decir,  $\omega$  es horaria.

A continuación, se halla la aceleración angular  $\alpha$ . El módulo de la componente tangencial de la aceleración de A respecto a B es  $I\alpha$ . La ecuación es  $\mathbf{a}_A = (\mathbf{a}_{A/B})_t + (\mathbf{a}_{A/B})_n + \mathbf{a}_B$ .

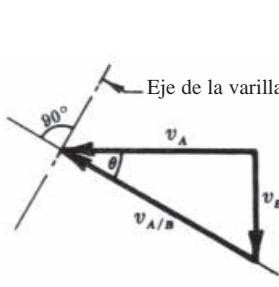


Figura 14.12

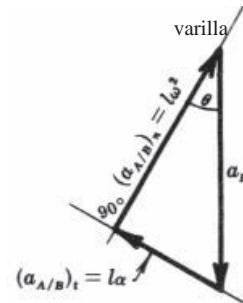


Figura 14.13

Vector	Dirección	Módulo
$\mathbf{a}_A$	ninguna	0, pues $v_A = \text{constante}$
$(\mathbf{a}_{A/B})_t$	$\perp$ varilla	$I\alpha$ ( $\alpha$ desconocida)
$(\mathbf{a}_{A/B})_n$	según la varilla	$l\omega^2$ ( $\omega = v_A/l \cos \theta$ )
$\mathbf{a}_B$	vertical	desconocido

Se indican las dos incógnitas. La suma de los tres vectores del segundo miembro de la ecuación debe ser cero. En la Figura 14.13, se traza primero  $(\mathbf{a}_{A/B})_t$ , que es conocida, y por su origen y su extremo se trazan sendas rectas, una perpendicular a la varilla y la otra, vertical; es decir, formando un ángulo  $\theta$  con  $(\mathbf{a}_{A/B})_n$ . Obsérvese que la aceleración  $(\mathbf{a}_{A/B})_n$  debe estar dirigida de  $A$  a  $B$ .

En este triángulo rectángulo,  $(a_{A/B})_t = I\alpha = I\omega^2 \tan \theta = (v_A^2 \tan \theta)/(l^2 \cos^2 \theta)$ . Y es horaria, porque la componente tangencial  $(\mathbf{a}_{A/B})_t$  indica que  $A$  se acelera en torno a  $B$  en sentido horario.

- 14.8.** La escalera de mano de longitud  $l$  forma un ángulo  $\theta$  con la pared vertical, tal como se muestra en la Figura 14.14(a). Su pie se mueve hacia la derecha con una velocidad constante  $v_A$ . Hallar  $\dot{\theta}$  y  $\ddot{\theta}$  en función de  $v_A$ ,  $l$  y  $\theta$ .

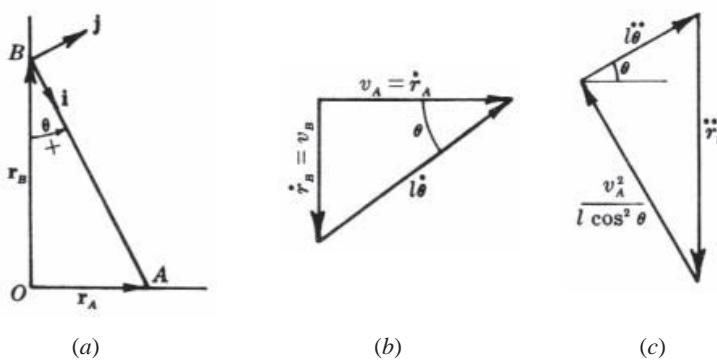


Figura 14.14

### SOLUCIÓN

Sea  $\mathbf{i}$  un vector unitario paralelo a la escalera y  $\mathbf{j}$ , un vector unitario perpendicular a la escalera. Ambos se mueven con ésta. En notación vectorial,

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + l\mathbf{i}$$

Derivando respecto del tiempo, tenemos

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_B + l\dot{\mathbf{i}}$$

En la ecuación anterior,  $\dot{\mathbf{r}}_A$  es  $\mathbf{v}_A$ , que es conocida. Además,  $\mathbf{i}$  es  $\dot{\theta}\mathbf{j}$  (de la derivada respecto al tiempo de un vector unitario se trató en el Capítulo 12), y  $\dot{\mathbf{r}}_B$  debe ser necesariamente vertical. En la Figura 14.14(b) se representa esa relación. Así pues,

$$\cos \theta = \frac{v_A}{l\dot{\theta}} \quad \text{o sea} \quad \dot{\theta} = \frac{v_A}{l \cos \theta} \quad (1)$$

Como  $l\dot{\theta}\mathbf{j}$  tiene el sentido  $\mathbf{j}$  positivo,  $\dot{\theta}$  es positiva (la escalera se mueve en sentido antihorario).

La derivada respecto al tiempo de la ecuación (1) es

$$\ddot{\theta} = \frac{v_A^2 \tan \theta}{l^2 \cos^2 \theta} \quad (2)$$

$\ddot{\theta}$  podría también obtenerse derivando  $\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_B + l\dot{\theta}\mathbf{j}$ , lo que da

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \ddot{\mathbf{r}}_B + l\ddot{\theta}\mathbf{j} - l\dot{\theta}^2\mathbf{i} \quad (3)$$

En (3),  $\ddot{\mathbf{r}}_A$  es nula porque  $\dot{\mathbf{r}}_A$  es constante,  $\ddot{\mathbf{r}}_B$  debe ser necesariamente vertical, con una componente  $\mathbf{j}$  (que vale  $l\ddot{\theta}$ ) positiva y una componente  $\mathbf{i}$  (que vale  $l\dot{\theta}^2 = v_A^2/(l \cos^2 \theta)$ ) negativa. En la Figura 14.14(c) se representan esas relaciones. Entonces

$$\tan \theta = \frac{l\ddot{\theta}}{v_A^2/(l \cos^2 \theta)} \quad \text{o sea} \quad \ddot{\theta} = \frac{v_A^2 \tan \theta}{l^2 \cos^2 \theta}$$

ecuación que coincide con la (2). Como  $l\dot{\theta}\mathbf{j}$  tiene el sentido  $\mathbf{j}$  positivo,  $\ddot{\theta}$  es positiva (la escalera está acelerada en sentido antihorario).

Adviértase que el valor de  $\dot{\theta}$  dado por (1) concuerda (como debe ser) con el calculado para el módulo de  $\omega$  en el Problema 14.7. Asimismo, el valor de  $\ddot{\theta}$  dado por (2) es igual al módulo de  $\alpha$  en el Problema 14.7.

- 14.9.** La varilla de 2,5 m de la Figura 14.15 resbala plano abajo de modo que  $\mathbf{v}_A = 4 \text{ m/s}$ , hacia la izquierda, y  $\mathbf{a}_A = 5 \text{ m/s}^2$ , hacia la derecha. Hallar su velocidad angular  $\omega$  y su aceleración angular  $\alpha$  cuando  $\theta = 30^\circ$ .

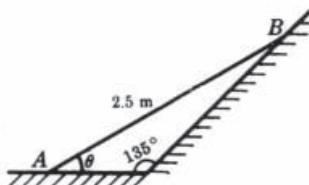


Figura 14.15

#### SOLUCIÓN

Como en el Problema 14.7,

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{A/B} + \mathbf{v}_B$$

En la tabla se resumen los datos:

Vector	Dirección	Módulo
$\mathbf{v}_A$	horizontal	4 m/s hacia la izquierda
$\mathbf{v}_{A/B}$	$\perp$ varilla	$l\omega$ ( $\omega$ desconocida)
$\mathbf{v}_B$	recta de $45^\circ$	desconocido

Se dibuja el triángulo de vectores que se ajusta a la ecuación vectorial anterior (véase la Figura 14.16). Midiendo, se obtiene  $v_{A/B} = 2,93 \text{ m/s}$ . Por tanto,  $\omega = v_{A/B}/l = 1,17 \text{ rad/s}$ . El sentido de  $\omega$  es horario. Para hallar  $\alpha$ , empleamos la ecuación vectorial  $\mathbf{a}_A = (\mathbf{a}_{A/B})_t + (\mathbf{a}_{A/B})_n + \mathbf{a}_B$  con la tabla siguiente,

Vector	Dirección	Módulo
$\mathbf{a}_A$	horizontal	$5 \text{ m/s}^2$ , hacia la derecha
$(\mathbf{a}_{A/B})_t$	$\perp$ varilla	$I\alpha$ ( $\alpha$ desconocida)
$(\mathbf{a}_{A/B})_n$	según la varilla de $A$ a $B$	$l\omega^2 = 2,5(1,17)^2 = 3,42 \text{ m/s}^2$
$\mathbf{a}_B$	recta de $45^\circ$	desconocido

Se dibuja el polígono de vectores que se ajusta a la tabla anterior. Primero, se dibuja  $\mathbf{a}_A$  (véase la Figura 14.17). Luego, por el origen de ese vector se traza  $(\mathbf{a}_{A/B})_n$ . Por el extremo de  $\mathbf{a}_B$  se traza una recta a  $45^\circ$ , y por el extremo de  $(\mathbf{a}_{A/B})_n$  se traza una perpendicular a la varilla con ésta inclinada  $30^\circ$ .

El valor de  $(a_{A/B})_t$  es  $2,75 \text{ m/s}^2$ . Por tanto,  $\alpha = 2,75/2,5 = 1,1 \text{ rad/s}$ . El sentido de  $\alpha$  es antihorario.

*Nota:* En el Apéndice C se ofrece una solución por computador para este problema.

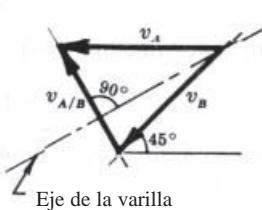


Figura 14.16

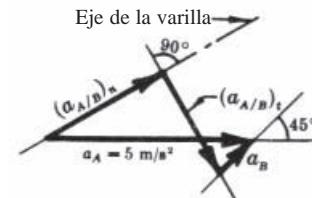


Figura 14.17

- 14.10.** En el mecanismo biela-manivela de la Figura 14.18, la manivela gira a una velocidad constante de 120 rpm. Las longitudes de la biela y la manivela son 24 in y 10 in, respectivamente. Para un ángulo de  $30^\circ$ , hallar la velocidad de la cruceta  $P$ .

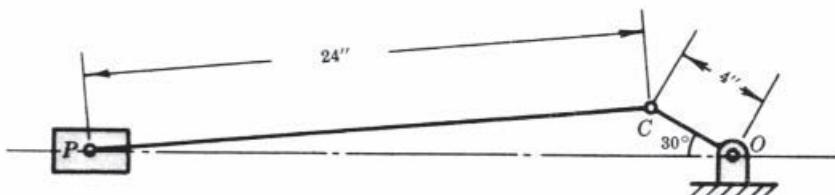


Figura 14.18

#### SOLUCIÓN

La celeridad angular del muñón  $C$  es 120 rpm. Entonces,  $\omega = 2\pi(120/60) = 4\pi \text{ rad/s}$ .

La celeridad lineal del muñón  $C$  es, por consiguiente,  $v = r\omega = (4/12)(4\pi) = 4,19 \text{ ft/s}$ .

En la Figura 14.19 se representa esa velocidad en dirección perpendicular a la manivela. A continuación, vamos a hallar la componente de esa velocidad en la dirección de la biela. Primero hay que hallar el ángulo  $\theta$ . En la figura se ve que  $\theta = 90^\circ - 30^\circ - \beta$ . Pero  $\beta$  puede calcularse aplicando el teorema del seno al triángulo  $PCO$ :

$$\frac{4}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{24}{\operatorname{sen} 30^\circ}$$

de donde  $\beta = 4,8^\circ$  y  $\theta = 60^\circ - 4,8^\circ = 55,2^\circ$ . Por tanto, la componente de la velocidad de  $C$  en la dirección de la biela es  $4,19 \cos 55,2^\circ = 2,39 \text{ ft/s}$ .

Pero todos los puntos de la biela deben tener la misma velocidad a lo largo de su eje geométrico, si no, la biela se aplastaría o se partiría. Por tanto, el punto  $P$ , al ser un punto de la biela, tiene una componente

de velocidad de 2,39 ft/s en la dirección de la misma biela. Sin embargo, su velocidad total tiene la dirección del recorrido de la cruceta. Entonces

$$v_p = \frac{2,39 \text{ ft/s}}{\cos \beta} = \frac{2,39 \text{ ft/s}}{0,9965} = 2,40 \text{ ft/s}$$

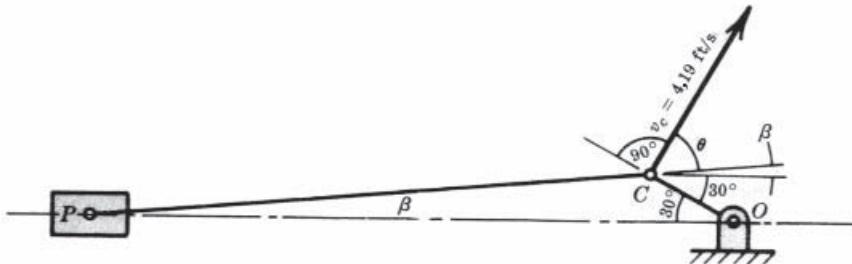


Figura 14.19

**14.11.** En el Problema 14.10, hallar gráficamente la velocidad de la cruceta.

#### SOLUCIÓN

Empleamos la ecuación  $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P/C} + \mathbf{v}_C$ .

En la Figura 14.19,  $\mathbf{v}_C$  se representa perpendicular en  $C$  a la manivela. Su módulo es 4,19 ft/s.

La velocidad absoluta del punto  $P$  está dirigida según la recta que recorre la cruceta (horizontal en la figura). La velocidad  $\mathbf{v}_{P/C}$  de  $P$  respecto a  $C$  es perpendicular a la recta que une  $P$  y  $C$  (la biela). La ecuación para este problema contiene tres vectores, todos por supuesto con módulo, dirección y sentido. Si se conocen cuatro de los seis valores (contando el módulo y el sentido como un solo valor por vector), pueden calcularse los otros dos.

Vector	Dirección	Módulo
$\mathbf{v}_P$	horizontal	?
$\mathbf{v}_{P/C}$	$\perp$ biela	?
$\mathbf{v}_C$	$\perp$ manivela	4,19 ft/s

La tabla revela que puede calcularse el módulo de  $\mathbf{v}_P$ , pues se conocen cuatro de las seis cantidades.

Se dibuja primero el vector  $\mathbf{v}_C$ , cuyos módulo, dirección y sentido se conocen. Por el extremo (o el origen) de  $\mathbf{v}_C$  se dibuja una recta horizontal, y por el origen (o el extremo) se dibuja una recta perpendicular a la biela. Cómo se coloquen los extremos es indiferente. En la Figura 14.20 se representan ambas posibilidades.

Al medir a escala se obtiene  $v_p = 2,40$  ft/s.

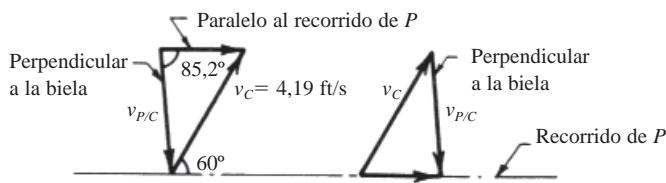


Figura 14.20

**14.12.** En el Problema 14.10, hallar la velocidad de la cruceta por el método de los centros instantáneos.

#### SOLUCIÓN

Respecto al chasis del motor, el centro instantáneo de la biela es el punto en torno al cual todos los puntos de la biela parecen girar en cada instante. El punto  $C$  pertenece a la vez a la manivela y a la biela. Su velo-

ciudad absoluta (respecto al chasis) es la misma se considere como perteneciente a la manivela o a la biela. Sin embargo, por pertenecer a la manivela, su velocidad es perpendicular a ésta. Por consiguiente, como su velocidad es la misma considerado como punto de la biela, el centro instantáneo de la biela se hallará en algún punto de la recta prolongación de la manivela. (La velocidad de un punto en rotación es perpendicular al radio trazado hasta él desde el centro de rotación.)

Análogamente, el punto  $P$  pertenece a la vez a la cruceta y a la biela. Como punto de la cruceta, su velocidad es horizontal. Por tanto, como punto de la biela, su velocidad será la misma (o sea, horizontal). El centro instantáneo de la biela se hallará, por consiguiente, en una perpendicular al recorrido de la cruceta, o sea, en la recta vertical que pasa por  $P$ .

El centro instantáneo  $I$  es el punto de intersección de la vertical que pasa por  $P$  y la prolongación de la manivela, tal como se muestra en la Figura 14.21.

Como  $I$  es el centro de rotación de todos los puntos de la biela, resulta que la velocidad lineal de cada punto concreto será perpendicular a la recta definida por  $I$  y ese punto, y el módulo de la velocidad será proporcional a la distancia desde  $I$  (o sea, desde el centro de rotación) al punto.

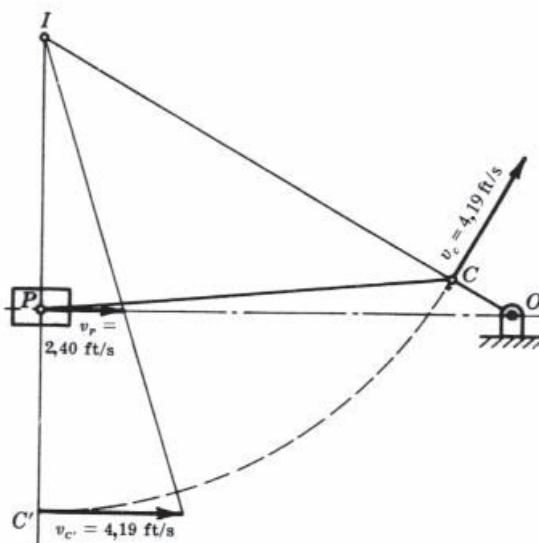


Figura 14.21

Estos hechos se emplean gráficamente como sigue. Se traza un arco de radio  $IC$  hasta que corte a la recta que une  $I$  con el punto cuya velocidad se busca, o sea,  $P$ .  $IC'$  es igual a  $IC$ . Por  $C'$  se traza el vector de módulo 4,19 ft/s perpendicularmente a  $IC'$ . Desde  $I$  se traza una recta patrón hasta el extremo de ese vector. La velocidad del punto  $P$  se obtiene trazando una perpendicular a  $IC' =$  desde  $P$  hasta la recta patrón. Su valor es de 2,40 ft/s.

#### 14.13. Con los resultados del Problema 14.11, hallar la velocidad angular de la biela.

##### SOLUCIÓN

Midiendo directamente en la figura del Problema 14.11 se obtiene  $v_{P/C} = 3,68$  ft/s.

Seguidamente la celeridad angular de la biela se calcula dividiendo  $v_{P/C}$  por la longitud de la biela.

$$\omega = \frac{v_{P/C}}{l} = \frac{3,68 \text{ ft/s}}{2 \text{ ft}} = 1,84 \text{ rad/s}$$

$\omega$  es antihoraria.

#### 14.14 Con los resultados del Problema 14.10, calcular la aceleración de la cruceta en el mecanismo biela-manivela.

##### SOLUCIÓN

Como la velocidad angular de la manivela es constante, la única componente de la aceleración lineal del punto  $C$  es la componente normal dirigida hacia el centro  $O$ . Su módulo es  $r\omega^2$ .

$$(a_C)_n = r\omega^2 = \frac{4}{12}(4\pi)^2 = 52,6 \text{ ft/s}^2$$

La aceleración de  $P$ , que es horizontal, se halla mediante la siguiente ecuación vectorial:

$$(\mathbf{a}_P) = (\mathbf{a}_{P/C}) + (\mathbf{a}_C)$$

La aceleración  $\mathbf{a}_{P/C}$  del punto  $P$  respecto al punto  $C$  es de rotación. Conviene escribirla en función de sus componentes tangencial y normal, respectivamente perpendicular y paralela a la biela. La ecuación es ahora

$$(\mathbf{a}_P) = (\mathbf{a}_{P/C})_n + (\mathbf{a}_{P/C})_t + (\mathbf{a}_C)$$

donde  $n$  y  $t$  designan las componentes normal y tangencial. Intervienen ocho variables y la ecuación puede resolverse si no se desconocen más de dos de ellas. Construimos la tabla siguiente.

Vector	Dirección	Módulo
$\mathbf{a}_C$	según la manivela	5 2,5 ft/s <sup>2</sup>
$(\mathbf{a}_{P/C})_t$	$\perp$ biela	?
$(\mathbf{a}_{P/C})_n$	según la biela	(long. biela) $\times$ ( $\omega_{\text{biela}}$ ) <sup>2</sup>
$\mathbf{a}_P$	horizontal	?

Nótese que el módulo de la componente normal  $(a_{P/C})_n$  es realmente

$$(a_{P/C})_n = (2 \text{ ft})(1,84 \text{ rad/s})^2 = 6,77 \text{ ft/s}^2$$

Se dibuja ahora el diagrama de vectores a partir de los vectores conocidos (tanto en módulo como en dirección y sentido)  $\mathbf{a}_C$  y  $(\mathbf{a}_{P/C})_n$  (véase la Figura 14.22).

Por el origen de  $\mathbf{a}_C$  se traza una horizontal, y por el extremo de  $(\mathbf{a}_{P/C})_n$  se traza una perpendicular a la biela. Esas rectas concurren en un punto  $M$ , que determina las longitudes de  $a_P$  y  $(\mathbf{a}_{P/C})_t$ . Midiendo:  $a_P = 50,0 \text{ ft/s}^2$ .

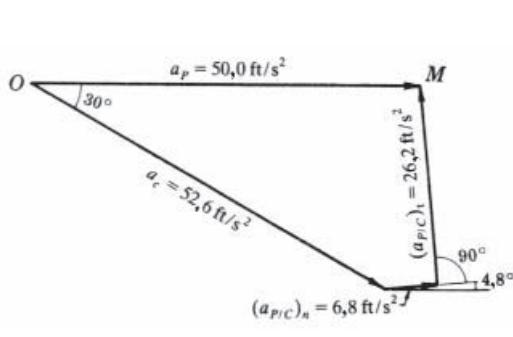


Figura 14.22

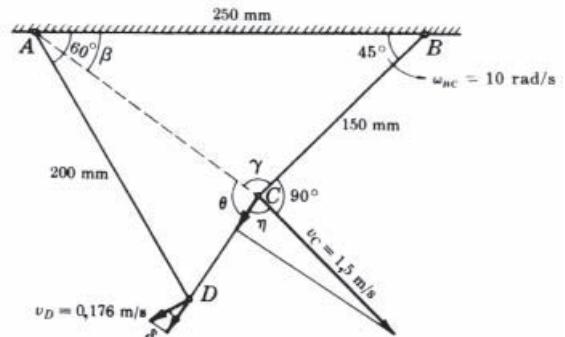


Figura 14.23

- 14.15. Si la velocidad angular de  $BC$  es la indicada en el mecanismo cuádruplo de la Figura 14.23, hallar la velocidad angular de  $AD$  y la velocidad del punto  $D$  en la posición representada.

#### SOLUCIÓN

La velocidad del punto  $C$  como punto de  $BC$  es perpendicular a  $BC$  y su módulo resulta valer

$$v_C = BC \times \omega_{BC} = (0,15 \text{ m})(10 \text{ rad/s}) = 1,5 \text{ m/s}$$

Para hallar la velocidad de  $D$  por descomposición de velocidades, primero calculamos ángulos mediante la Figura 14.23. Por el teorema del coseno

$$AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2 - 2AB \times BC \cos 45^\circ} = \sqrt{(250)^2 + (150)^2 - 2 \times 250 \times 150 \times \cos 45^\circ} = 179 \text{ mm}$$

Por el teorema del seno

$$\frac{BC}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{AC}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{AB}{\operatorname{sen} \gamma}$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{BC \operatorname{sen} 45^\circ}{AC} = \frac{150 \operatorname{sen} 45^\circ}{179} \quad \beta = 36,3^\circ$$

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{AB \operatorname{sen} 45^\circ}{AC} = \frac{250 \operatorname{sen} 45^\circ}{179} \quad \gamma = 99,0^\circ$$

En el triángulo  $ADC$ , ángulo  $DAC = 60^\circ - 36,3^\circ = 23,7^\circ$ . Aplicando el teorema del coseno al triángulo  $ADC$ ,

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{(AD)^2 + (AC)^2 - 2AD \times AC \cos 23,7^\circ} \\ &= \sqrt{(200)^2 + (179)^2 - 2(200)(179) \cos 23,7^\circ} = 80,5 \text{ mm} \end{aligned}$$

Por el teorema del seno,  $CD/\operatorname{sen} 23,7^\circ = AD/\operatorname{sen} \theta = AC/\operatorname{sen} D$ , o bien,  $80,5/\operatorname{sen} 23,7^\circ = 200/\operatorname{sen} \theta = 179/\operatorname{sen} \theta$ . Despejando  $\theta = 87,0^\circ$  y  $D = 63,4^\circ$ .

Es ahora evidente que el ángulo  $\eta$  entre  $CD$  y la velocidad  $\mathbf{v}_C$  es

$$\eta = 360^\circ - (90^\circ + \theta + \gamma) = 360^\circ - (90^\circ + 87,0^\circ + 99,0^\circ) = 84,0^\circ$$

La componente de esta velocidad según la varilla  $CD$  es  $1,5 \cos 84,0^\circ = 0,157 \text{ m/s}$ . Adviértase que esa componente está dirigida de  $C$  a  $D$ . Es también la componente según  $CD$  de la velocidad de  $D$ .

El ángulo  $\delta$  entre el vector velocidad de  $D$  y la varilla  $CD$  es  $\delta = 180^\circ - (90^\circ + 63,4^\circ) = 26,6^\circ$ .

El módulo de la velocidad de  $D$  es  $v_D = 0,157/\cos 26,6^\circ = 0,176 \text{ m/s}$ . Adviértase que esta velocidad está dirigida de tal modo que el brazo  $AD$  gira en sentido horario, mientras que el brazo  $BC$  gira en sentido antihorario.

La celeridad angular de  $AD$  es  $\omega_{AD} = v_D/AD = (0,176 \text{ m})/0,2 \text{ m} = 0,88 \text{ rad/s}$ , horaria.

**14.16.** Resolver gráficamente el Problema 14.15. Véase la Figura 14.24.

#### SOLUCIÓN

La correspondiente ecuación vectorial es  $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_{D/C} + \mathbf{v}_C$ .

Listamos las seis componentes.

Vector	Dirección	Módulo
$\mathbf{v}_D$	$\perp AD$	?
$\mathbf{v}_{D/C}$	$\perp DC$	?
$\mathbf{v}_C$	$\perp BC$	1,5 m/s

Es posible resolver el problema, pues hay sólo dos incógnitas. Se dibuja el vector  $\mathbf{v}_C$ , del que se conocen su módulo y su dirección y sentido. Por su extremo y por su origen, se trazan rectas en las direcciones de  $\mathbf{v}_D$  y  $\mathbf{v}_{D/C}$  hasta que se corten. Este punto determina la velocidad  $\mathbf{v}_D$  a la escala del dibujo. Por tanto,  $v_D = 0,176$ .

**14.17.** Resolver el Problema 14.15, por el método de los centros instantáneos.

#### SOLUCIÓN

Los puntos  $C$  y  $D$  son puntos del brazo  $CD$ . El centro instantáneo de  $CD$  respecto al chasis es la intersección de las rectas perpendiculares a las velocidades absolutas de  $C$  y  $D$ . Pero estas velocidades, sin embargo, son perpendiculares a  $BC$  y  $AD$ . Por tanto, el centro instantáneo  $I$  es el punto de corte de  $BC$  y  $AD$ , tal como se muestra en la Figura 14.26.

La velocidad de  $C$  se representa perpendicular a  $BC$  con un módulo de 1,5 m/s. En la Figura 14.26, se traza un arco de centro en  $I$  y radio  $IC$  que corta en  $C'$  a la recta  $AD$ .

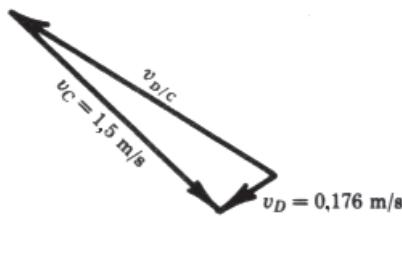


Figura 14.24

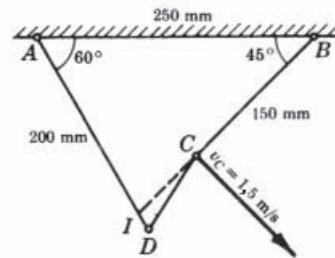


Figura 14.25

En  $C'$  se dibuja un vector perpendicular a  $AD$  y de módulo  $1,5 \text{ m/s}$ . Se traza la recta patrón  $IE$ . La velocidad de  $D$  se determina levantando desde  $D$  una perpendicular a  $AD$ . Su longitud hasta la recta patrón es  $0,176 \text{ m/s}$ .

- 14.18.** En la Figura 14.27 se representa un mecanismo cuádrico con unas longitudes acotadas que están dadas o calculadas. Si la manivela  $AB$  rota a  $3 \text{ rad/s}$  en sentido antihorario, hallar las velocidades lineales de los puntos  $B$  y  $C$  y las velocidades angulares de  $BC$  y  $DC$ .

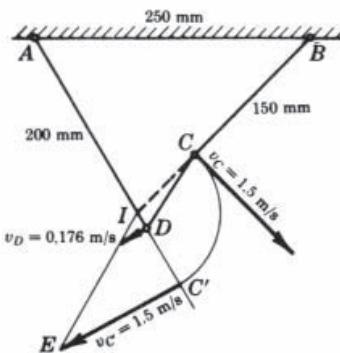


Figura 14.26

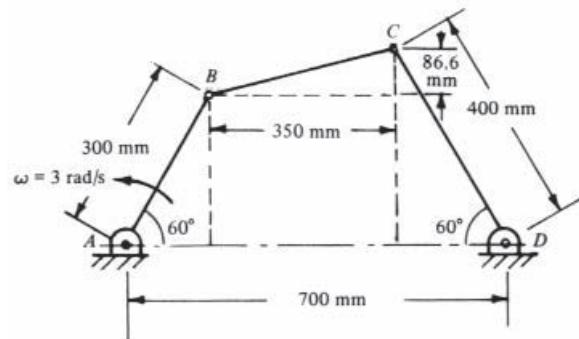


Figura 14.27

### SOLUCIÓN

Como el punto  $B$  está en la manivela  $AB$ , su velocidad es

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{p}_{AB}, \quad \text{o bien,} \quad 3\mathbf{k} \times (300 \times 0,5\mathbf{i} + 3000 \times 0,866\mathbf{j}) = 450\mathbf{j} - 779\mathbf{i} \text{ mm/s}$$

Nótese que el módulo de  $\mathbf{v}_B$  puede calcularse directamente con  $v_B = r\omega = 300(3) = 900 \text{ mm/s}$ . Como este vector es perpendicular a la manivela, está dirigido hacia la izquierda y arriba. Puede escribirse

$$900(-\cos 30^\circ\mathbf{i} + \sin 30^\circ\mathbf{j}) = 450\mathbf{j} - 779\mathbf{i} \text{ mm/s}$$

Expresión que es, por supuesto, la misma que se halla con el producto vectorial.

Para determinar el movimiento de  $BC$ , empleamos

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{B/C} = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{p}_{BC} \quad (I)$$

Para emplear esta ecuación (I), suponemos que  $DC$  rota en sentido antihorario. Esto significa que el punto  $C$  se mueve hacia la izquierda y abajo. Como interviene un ángulo de  $30^\circ$ , escribimos

$$\mathbf{v}_C = -v_C \cos 30^\circ\mathbf{i} - v_C \sin 30^\circ\mathbf{j} = -0,866v_C\mathbf{i} - 0,5v_C\mathbf{j}$$

Seguidamente, suponemos que  $BC$  rota antihorariamente; por tanto, podemos escribir

$$\boldsymbol{\omega}_{BC} = \boldsymbol{\omega}_{BC}\mathbf{k}$$

Téngase en cuenta, además, que

$$\mathbf{p}_{BC} = 350\mathbf{i} + 86,6\mathbf{j}$$

Haciendo estas sustituciones en la ecuación (I), se obtiene

$$\begin{aligned} -0,866v_C\mathbf{i} - 0,5v_C\mathbf{j} &= -779\mathbf{i} + 450\mathbf{j} + \omega_{BC}\mathbf{k} \times (350\mathbf{i} + 86,6\mathbf{j}) \\ \text{o} \quad -0,866v_C\mathbf{i} - 0,5v_C\mathbf{j} &= -779\mathbf{i} + 450\mathbf{j} + 350\omega_{BC}\mathbf{j} - 86,6\omega_{BC}\mathbf{i} \end{aligned} \quad (2)$$

Igualando sucesivamente los términos en  $\mathbf{i}$  y los términos en  $\mathbf{j}$ , resulta

$$-0,866v_C = -779 - 86,6\omega_{BC} \quad (3)$$

$$-0,5v_C = 450 + 350\omega_{BC} \quad (4)$$

Multiplicando (3) por  $350/86,6$  y sumándola a (4), se obtiene  $v_C = 675$  mm/s; luego se calcula  $\omega_{BC}$ , que resulta ser  $-2,25$  rad/s. Esto significa que  $BC$  rota en sentido horario y no antihorario como se supuso al comienzo.

Para calcular  $\omega_{DC}$ , tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} v_C &= \omega_{DC} \times r_{DC} = \omega_{DC}\mathbf{k} \times (-200\mathbf{i} + 346,4\mathbf{j}) \quad \text{o sea} \quad v_C = -675 \times 0,866\mathbf{i} - 675 \times 0,5\mathbf{j} \\ &= -220\omega_{DC}\mathbf{j} - 346,4\omega_{DC}\mathbf{i} \end{aligned} \quad (5)$$

Igualando los términos en  $\mathbf{i}$  o los términos en  $\mathbf{j}$  resulta  $\omega_{DC} = +1,69$  rad/s (antihoraria, como se supuso).

*Nota:* Lo que sigue es otro método para resolver este problema. Se basa en aplicar el teorema del seno a la expresión en velocidades relativas de la ecuación (1)

$$v_C = v_{C/B} + v_B$$

Sabemos que  $v_B$  tiene un módulo de 900 mm/s y que está dirigida hacia la izquierda y arriba formando un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Sabemos también que el módulo de  $v_C$  es de 400 mm/s, con  $\omega_{DC}$  desconocida en este segundo procedimiento. Así pues,  $v_C$  está en una recta que forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal, aunque desconocemos su sentido. Se sabe también que  $v_{C/B}$  es perpendicular a  $BC$ , con un módulo igual al producto de  $\omega_{BC}$  por la longitud  $BC$ . Esta vale  $\sqrt{(350)^2 + (86,6)^2} = 361$  mm. La velocidad de  $C$  respecto a  $B$  (como es perpendicular a  $BC$ ) forma un ángulo con la vertical dado por  $\theta = \text{artg}(86,6/350) = 13,9^\circ$ .

En la Figura 14.28(a) se representa  $v_B$ , que es completamente conocida, dibujada desde un punto arbitrario  $O$  hasta el punto  $R$ , con una longitud de 900 mm/s e inclinada  $30^\circ$ .

Desde  $R$  se traza una recta, formando un ángulo de  $13,9^\circ$  con la vertical. Luego, desde  $O$  se traza otra recta que forme un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Esas rectas concurren en el punto  $S$ .

En la Figura 14.28(b) se reproduce el dibujo para facilitar la aplicación el teorema del seno. En la Figura 14.28(b) vemos que

$$\frac{v_{C/B}}{\sin 60^\circ} = \frac{v_C}{\sin 46,1^\circ} = \frac{900}{\sin 73,9^\circ}$$

Esto da  $v_C = 675$  mm/s, y en consecuencia es  $\omega_{DC} = 1,69$  rad/s horaria. Asimismo,  $v_{C/B} = 812$  mm/s, y en consecuencia es  $\omega_{BC} = 2,25$  rad/s horaria.

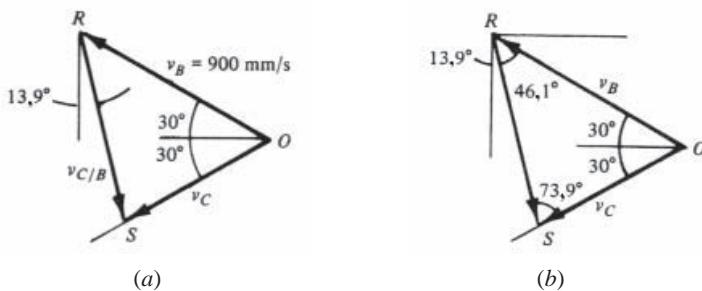


Figura 14.28

- 14.19.** En el Problema 14.18, hallar la aceleración lineal de los puntos  $B$  y  $C$  y las aceleraciones angulares de  $BC$  y  $CD$ .

#### SOLUCIÓN

El mecanismo se representa en la Figura 14.29, con unas componentes de aceleración algunas de las cuales se conocen completamente y de otras sólo se conoce su dirección.

La aceleración de  $C$  como punto de  $BC$  se expresa

$$\mathbf{a}_C = (\mathbf{a}_{C/B})_t + (\mathbf{a}_{C/B})_n + \mathbf{a}_B$$

Adviéntase que  $\mathbf{a}_B$  tiene sólo componente normal. Si hubiera una  $\alpha_{AB}$ , a la ecuación habría que añadir una componente tangencial.

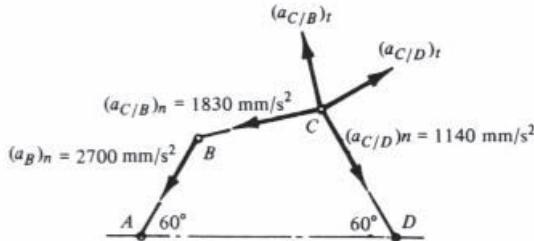


Figura 14.29

Desde luego,  $C$  es un punto de  $DC$  y su aceleración se escribe entonces  $\mathbf{a}_C = (\mathbf{a}_{C/D})_t + (\mathbf{a}_{C/D})_n$ . Por tanto, podemos escribir

$$(\mathbf{a}_{C/D})_t + (\mathbf{a}_{C/D})_n = (\mathbf{a}_{C/B})_t + (\mathbf{a}_{C/B})_n + \mathbf{a}_B \quad (I)$$

De la ecuación (I) se conocen completamente tres de los términos. Estos son las componentes normales de las aceleraciones, pues todas las velocidades angulares se calcularon en el Problema 14.18.

Para hallar la aceleración normal de  $B$ , puede emplearse la ecuación (4) de la sección 14.1, o sea,  $\omega_{AB} \times \omega_{AB} \times \mathbf{p}_{AB}$ ; o bien, emplear  $AB \times (\omega_{AB})^2$ .  $B$  posee una aceleración de  $2700 \text{ mm/s}^2$  dirigida de  $B$  a  $A$ , tal como se muestra.

Análogamente,  $(\mathbf{a}_{C/B})_n$  está dirigida de  $C$  a  $B$  y su módulo es  $BC \times (\omega_{BC})^2 = 361(2,25)^2 = 1830 \text{ mm/s}^2$ . Además,  $(\mathbf{a}_{C/D})_n$  está dirigida de  $C$  a  $D$  y su módulo es  $DC \times (\omega_{DC})^2 = 400(1,69)^2 = 1140 \text{ mm/s}^2$ .

$(\mathbf{a}_{C/B})_t$  es perpendicular a  $BC$  y la suponemos actuando hacia la izquierda y arriba. Si resulta positiva, es que  $\alpha_{BC}$  es antihoraria.

$(\mathbf{a}_{C/D})_t$  es perpendicular a  $DC$  y la suponemos actuando hacia la derecha y arriba. Si resulta positiva, es que  $\alpha_{DC}$  es horaria.

Los cinco vectores que figuran en la ecuación (I) son

$$\mathbf{a}_B = 2700(-\cos 60^\circ \mathbf{i} - \sin 60^\circ \mathbf{j}) = -1350\mathbf{i} - 2340\mathbf{j}$$

$$(\mathbf{a}_{C/D})_n = 1140(\cos 60^\circ \mathbf{i} - \sin 60^\circ \mathbf{j}) = 570\mathbf{i} - 987\mathbf{j}$$

$$(\mathbf{a}_{C/B})_n = 1830(-\cos 13,9^\circ \mathbf{i} - \sin 13,9^\circ \mathbf{j}) = -1780\mathbf{i} - 440\mathbf{j}$$

$$(\mathbf{a}_{C/D})_t = 400\alpha_{DC}(\cos 30^\circ \mathbf{i} + \sin 30^\circ \mathbf{j}) = 346\alpha_{DC}\mathbf{i} + 200\alpha_{DC}\mathbf{j}$$

$$(\mathbf{a}_{C/B})_t = 361\alpha_{BC}(-\sin 13,9^\circ \mathbf{i} + \cos 13,9^\circ \mathbf{j}) = -86,7\alpha_{BC}\mathbf{i} + 350\alpha_{BC}\mathbf{j}$$

Ahora, la ecuación (I) queda

$$346\alpha_{DC}\mathbf{i} + 200\alpha_{DC}\mathbf{j} + 570\mathbf{i} - 987\mathbf{j} = -86,7\alpha_{BC}\mathbf{i} + 350\alpha_{BC}\mathbf{j} - 1780\mathbf{i} - 440\mathbf{j} - 1350\mathbf{i} - 2340\mathbf{j} \quad (2)$$

Igualando los coeficientes de los términos en  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  de esta ecuación (2), tenemos

$$346\alpha_{DC} + 570 = -86,7\alpha_{BC} - 1780 - 1350 \quad (3)$$

$$200\alpha_{DC} - 987 = 350\alpha_{BC} - 440 - 2340 \quad (4)$$

Y, simplificando:

$$346\alpha_{DC} + 86,7\alpha_{BC} = -3700 \quad (3')$$

$$200\alpha_{DC} - 350\alpha_{BC} = -1790 \quad (4')$$

De aquí, el módulo de  $\alpha_{DC}$  es  $10,5 \text{ rad/s}^2$ . Como su signo es negativo, es antihoraria (sentido contrario al atribuido originalmente).

Asimismo, el módulo de  $\alpha_{BC}$  es  $0,87 \text{ rad/s}^2$ . Como su signo es negativo, es horaria (sentido contrario al atribuido originalmente).

- 14.20.** Una rueda de 3 m de diámetro rueda hacia la derecha sobre un plano horizontal con una velocidad angular de  $8 \text{ rad/s}$  (horaria, desde luego) y una aceleración angular antihoraria de  $4 \text{ rad/s}^2$ , tal como se representa en la Figura 14.30. El segundo dato simplemente informa de que la velocidad

angular de la rueda es decreciente. Hallar la velocidad y la aceleración lineales del punto más alto,  $B$ , de la rueda.

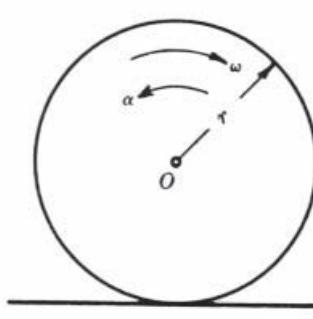


Figura 14.30

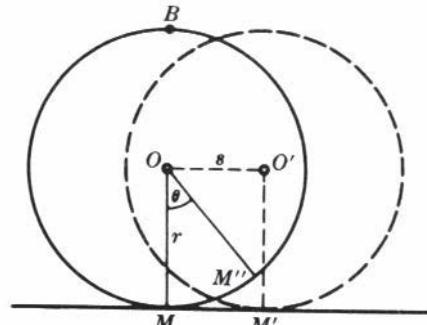


Figura 14.31

### SOLUCIÓN

El dibujo de la Figura 14.31 ilustra el problema. Por comodidad, como punto base del movimiento relativo elegimos el punto  $O$ .

Primero hay que demostrar que la velocidad y la aceleración del centro  $O$  de una rueda que gira sobre una superficie pueden expresarse, respectivamente, en función de  $\omega$  y  $\alpha$ , dados, y la distancia de  $O$  a la superficie de rodadura (1,5 m en este caso).

En la Figura 14.31,  $O$  se desplaza una distancia  $s$  hasta  $O'$ . A causa de la rodadura, el arco  $MM''$  de rueda entra en contacto con el tramo  $MM'$  de la superficie horizontal. Por tanto, el arco  $MM''$ , que vale  $r\theta$ , es igual a  $OO'$ , o sea, a  $s$ .

Por consiguiente,  $s = r\theta$ , donde  $s$  es la distancia recorrida por el centro  $O$ ,  $r$  es el radio de la rueda, y  $\theta$  es el ángulo girado por la rueda.

Al derivar, resulta

$$v_O = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega \quad \text{y} \quad a_O = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

Aplicando estas expresiones al problema:

$$v_O = (1,5 \text{ m})(8 \text{ rad/s}) = 12 \text{ m/s}$$

$$a_O = (1,5 \text{ m})(4 \text{ rad/s}^2) = 6 \text{ m/s}^2$$

$v_O$  está dirigida hacia la derecha y  $a_O$  está dirigida hacia la izquierda.

La ecuación de velocidades a emplear es

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{B/O} + \mathbf{v}_O$$

La velocidad de  $B$  respecto a  $O$  es perpendicular al radio  $OB$  y hacia la derecha (pues  $OB$  se mueve en sentido horario). Su módulo es

$$v_{B/O} = OB \times \omega = (1,5 \text{ m})(8 \text{ rad/s}) = 12 \text{ m/s}$$

Por consiguiente, la velocidad absoluta  $\mathbf{v}_B$  consta de dos componentes ( $\mathbf{v}_{B/O}$  y  $\mathbf{v}_O$ ), ambas horizontales hacia la derecha y ambas de módulo 12 m/s. Por tanto,  $\mathbf{v}_O$  está dirigida horizontalmente hacia la derecha y su módulo vale 24 m/s.

Para hallar la aceleración absoluta  $\mathbf{a}_B$ , se aplica la ecuación

$$\mathbf{a}_B = (\mathbf{a}_{B/O})_t + (\mathbf{a}_{B/O})_n + \mathbf{a}_O$$

La aceleración relativa  $(\mathbf{a}_{B/O})_t$  está dirigida horizontalmente hacia la izquierda (ya que la aceleración angular de  $OB$  es antihoraria). Su módulo es igual a  $OB$  multiplicada por el módulo de  $\alpha$ , o sea,

$$(a_{B/O})_t = (1,5 \text{ m})(4 \text{ rad/s}^2) = 6 \text{ m/s}^2 \quad (\text{hacia la izquierda, } \leftarrow)$$

$(\mathbf{a}_{B/O})_n$  está dirigida hacia  $O$  en el instante considerado y su módulo es igual a  $OB$  multiplicada por el cuadrado de la celeridad angular  $\omega$ :

$$(a_{B/O})_n = (1,5 \text{ m})(8 \text{ rad/s})^2 = 96 \text{ m/s}^2 \quad (\text{hacia abajo, } \downarrow)$$

En la Figura 14.32 se presentan los hechos más claramente.

La aceleración de  $B$  puede determinarse gráfica o analíticamente. Para el cálculo analítico, se tienen en cuenta la componente horizontal de  $6 + 6 = 12 \text{ m/s}^2$ , hacia la izquierda, y la componente vertical de  $96 \text{ m/s}^2$ , hacia abajo. Por consiguiente,

$$a_B = \sqrt{(a_h)^2 + (a_v)^2} = \sqrt{(12)^2 + (96)^2} = 96,7 \text{ m/s}^2$$

y  $\operatorname{tg} \phi = 12/96$ , o sea,  $\phi = 0,124 \text{ rad } (7,12^\circ)$ .



Figura 14.32

- 14.21.** En el Problema 14.20, ¿cuáles son la velocidad y la aceleración del punto  $A$ , a 0,6 m del centro y en un radio que forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal? Véase la Figura 14.33.

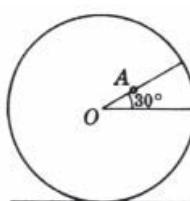


Figura 14.33

#### SOLUCIÓN

Se aplican las ecuaciones habituales:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{B/O} + \mathbf{v}_O \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_B = (\mathbf{a}_{B/O})_t + (\mathbf{a}_{B/O})_n + \mathbf{a}_O \quad (2)$$

Se tabulan los seis elementos de la ecuación de velocidades (1)

Vector	Dirección	Módulo
$\mathbf{v}_A$	?	?
$\mathbf{v}_{A/O}$	$\perp$ OA	$OA \times \omega = (0,6 \text{ m})(8 \text{ rad/s}) = 4,8 \text{ m/s}$
$\mathbf{v}_O$	horizontal	$12 \text{ m/s } (\rightarrow)$

En la Figura 14.34 se representa la ecuación (1).

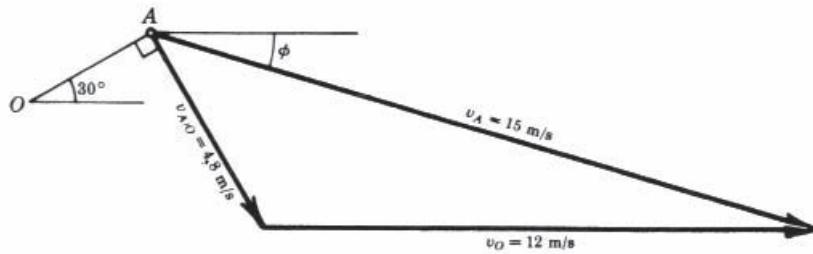


Figura 14.34

Módulo de la componente horizontal de  $\mathbf{v}_A$ :  $4,8 \sin 30^\circ + 12 = 14,4 \text{ m/s}$ .

Módulo de la componente vertical de  $\mathbf{v}_A$ :  $4,8 \cos 30^\circ = 4,16 \text{ m/s}$ .

Por tanto,  $v_A = \sqrt{(14,4)^2 + (4,16)^2} = 15 \text{ m/s}$  y  $\phi = \operatorname{artg}(4,16/14,4) = 0,281 \text{ rad o } 16,1^\circ$ .

Seguidamente, se tabulan los seis elementos de la ecuación de aceleraciones (2.).

Vector	Dirección	Módulo
$\mathbf{a}_A$	?	?
$(\mathbf{a}_{A/O})_t$	$\perp OA$	$OA \times \alpha = 0,6 \text{ m} \times 4 \text{ rad/s}^2 = 2,4 \text{ m/s}^2$
$(\mathbf{a}_{A/O})_n$	según $OA$	$OA \times \omega^2 = 0,6 \text{ m} \times (8 \text{ rad/s})^2 = 38,4 \text{ m/s}^2$
$\mathbf{a}_O$	horizontal	$6 \text{ m/s}^2 (-)$

En la Figura 14.35 se representa la ecuación (2).

Para obtener el módulo de  $\mathbf{a}_A$ , tenemos en cuenta que los módulos de sus componentes horizontal y vertical son

$$(a_A)_h = -6 - 38,4 \cos 30^\circ - 2,4 \sin 30^\circ = -40,5 \text{ m/s}^2$$

$$(a_A)_v = -38,4 \sin 30^\circ + 2,4 \cos 30^\circ = -17,1 \text{ m/s}^2$$

Por tanto,  $a_A = \sqrt{(-40,5)^2 + (-17,1)^2} = 44,0 \text{ m/s}^2$  con  $\phi = \operatorname{artg}(-17,1/-40,5) = 0,4 \text{ rad o } 22,9^\circ$ .

Obsérvese que  $\phi$  está por debajo del semieje  $x$  negativo.

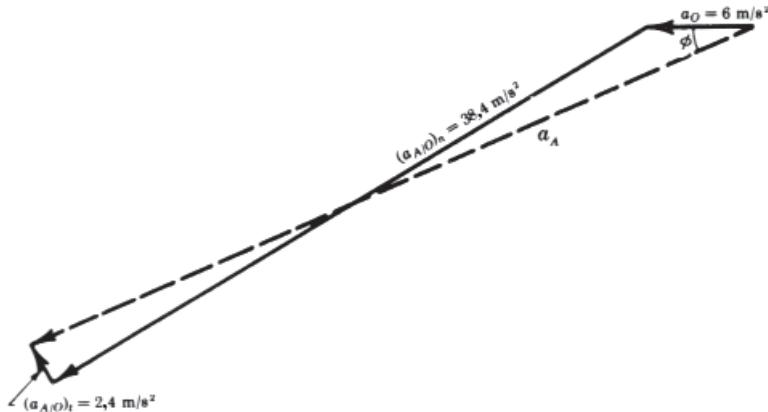


Figura 14.35

- 14.22. Un cilindro con su árbol rueda por efecto de un peso  $W$  tal como se muestra en la Figura 14.36. ¿Qué distancia horizontal  $s_O$  recorre el centro del cilindro cuando el peso baja 10 ft? Se supone que no hay rozamiento en los cojinetes de la polea.

**SOLUCIÓN**

El punto  $I$  es el centro instantáneo entre el cilindro y la superficie sobre la que rueda. Por tanto, el segmento de arco descrito por  $A$ , que es igual a lo que desciende  $W$ , puede expresarse como  $5\theta$ , siendo  $AI = 5$  ft el radio, y  $\theta$  el ángulo girado en torno a  $I$ . Como  $5\theta = 10$ ,  $\theta = 2$  rad y  $s_O = 3\theta = 6$  ft (hacia la derecha).

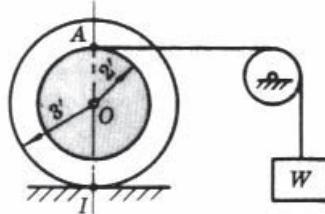


Figura 14.36

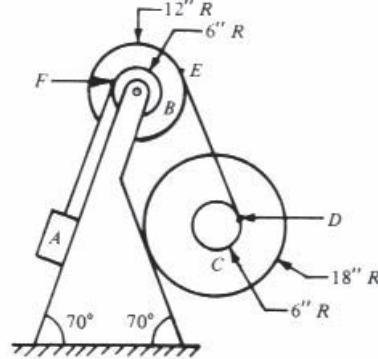


Figura 14.37

- 14.23.** El peso  $A$  de la Figura 14.37 desliza sobre un plano liso. Ese peso está sujeto a una cuerda arrollada en torno al escalón pequeño de la polea  $B$ , que gira sobre cojinetes sin rozamiento. Otra cuerda, arrollada en torno al escalón grande de la polea  $B$ , está a su vez arrollada en torno al más pequeño  $C$  de dos cilindros solidarios. El centro de  $C$  desciende por el plano con una celeridad de 12 in/s y una aceleración de 18 in/s<sup>2</sup>, ambas plano abajo. Hallar la velocidad y aceleración del peso  $A$ . Se supone que las cuerdas son paralelas a los planos, tal como se muestra.

**SOLUCIÓN**

El punto  $E$  de la cuerda  $DE$  tiene la misma celeridad que el punto  $D$ , que está en el cilindro. Como punto del cilindro,  $D$  tiene una celeridad de  $[(18 + 6)/18] \times 12 = 16$  in/s. El punto coincidente de la polea tiene la misma celeridad que  $E$  (16 in/s). Por ello, la velocidad del punto  $F$  será  $(6/12) \times 16 = 8$  in/s. Esta será, pues, la velocidad del peso  $A$ ; o sea, 8 in/s plano arriba.

La componente de la aceleración del punto  $D$  paralela al plano es  $(24/18) \times 18 = 24$  in/s. Este valor será también el módulo de la componente tangencial de la aceleración del punto  $E$ .

Finalmente, la componente tangencial de la aceleración del punto  $F$  es  $(6/12) \times 24 = 12$  in/s<sup>2</sup>. Entonces la aceleración del punto  $F$  es  $6/12 \times 12 = 6$  in/s<sup>2</sup>. Así pues, la aceleración del peso  $A$  es de 12 in/s<sup>2</sup>, dirigida plano arriba.

- 14.24.** Resolver el Problema 14.23 si la cuerda  $ED$  se desenrolla desde el punto más bajo del cilindro pequeño y no desde el más alto. La polea se sitúa de modo que la cuerda  $ED$  queda paralela al plano.

**SOLUCIÓN**

La celeridad del punto  $D$  en su nueva posición es  $[(18 - 6)/18] \times 12 = 8$  in/s. La celeridad del punto  $F$  es  $(6/12) \times 8 = 4$  in/s. Así pues, la velocidad del peso  $A$  es de 4 in/s plano arriba.

La componente de la aceleración del punto  $D$  en su nueva posición es  $(12/18) \times 18 = 12$  in/s<sup>2</sup>. Así pues, la aceleración del peso  $A$  es de 6 in/s<sup>2</sup>, dirigida plano arriba.

- 14.25.** En la Figura 14.38, estudiar el movimiento del cilindro de radio  $r$  al rodar sobre la superficie de radio  $R$ .

**SOLUCIÓN**

Sea  $OGP$  la posición inicial y  $OG'B$  la posición al cabo de un cierto tiempo. El punto  $P$  se habrá trasladado al punto  $P'$  y, dado que se supone que hay rodadura pura, el arco  $BCP'$  del cilindro debe ser igual al arco  $PB$  de la superficie.

El ángulo  $\theta$  es el ángulo girado por  $G'P'$  respecto a su posición original  $GP$  (o a  $G'C$  que es paralela a  $GP$ ). El ángulo  $\phi$  es el ángulo girado por la recta  $OGP$  en el mismo intervalo de tiempo. Por tanto,  $\theta + \phi$  es el ángulo que gira, en total, la recta  $G'P'$ .

Arco  $BCP' = \text{arco } PB$ , o bien,  $r(\theta + \phi) = R\phi$ .

Despejando aquí

$$\theta = \frac{R-r}{r} \phi$$

$$\text{Por tanto, } \frac{d\theta}{dt} = \frac{R-r}{r} \frac{d\phi}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{R-r}{r} \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

Si la celeridad lineal del punto  $G$  es  $v_G$  y el módulo de su aceleración lineal tangente a su trayectoria circular (de radio  $R - r$ ) es  $(a_G)$ , la celeridad angular  $d\phi/dt$  y el módulo de la aceleración angular  $d^2\phi/dt^2$  de  $G$  se calculan como sigue (vuelva a tenerse en cuenta que  $G$  describe una trayectoria circular de radio  $R - r$ ):

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v_G}{R-r} \quad \text{y} \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{(a_G)_t}{R-r}$$

La celeridad angular  $d\theta/dt$  y el módulo de la aceleración angular  $d^2\theta/dt^2$  de cualquier punto del cilindro respecto a su centro serán

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{R-r}{r} \frac{d\phi}{dt} = \frac{v_G}{r} \quad \text{y} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{(a_G)_t}{r}$$

La velocidad absoluta y la aceleración absoluta de un punto cualquiera del cilindro puede ahora calcularse refiriendo el movimiento de ese punto primero al centro y añadiendo después el movimiento del centro.

Por ejemplo, la velocidad  $\mathbf{v}_B$  del punto de contacto  $B$  es igual a la suma de la velocidad de  $B$  respecto al centro (de módulo  $r d\theta/dt$ ) y la velocidad del centro  $\mathbf{v}_G$ . Si la rueda sube por el plano,  $d\theta/dt$  es horaria, y  $r d\theta/dt$  es, por ello, tangente al cilindro y dirigida hacia abajo y a la izquierda. Su módulo es  $r d\theta/dt$  o  $r(v_G/r) = v_G$ . Este se suma a la velocidad de  $G$ , que tiene el mismo módulo y la misma dirección, pero sentido contrario. Resulta así que la velocidad absoluta de  $B$  es nula; o sea,  $B$  es el centro instantáneo.

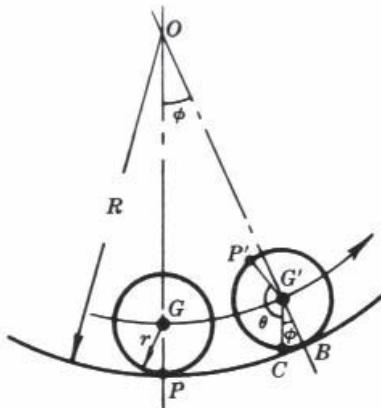


Figura 14.38

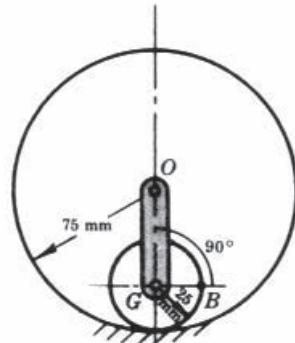


Figura 14.39

- 14.26.** En un tren de engranajes epíclooidales, el brazo se mueve con una celeridad angular horaria de 6 rad/s y una aceleración angular antihoraria de 10 rad/s<sup>2</sup>. Hallar la velocidad y la aceleración lineales del punto  $B$  en la posición representada en la Figura 14.39.

#### SOLUCIÓN

Se demostró en el problema anterior que los módulos de la velocidad angular  $\omega$  y la aceleración angular  $\alpha$  del engranaje pequeño en torno a su propio centro están dadas por

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{R-r}{r} \frac{d\phi}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{R-r}{r} \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

donde  $\phi$  es el ángulo girado por el brazo  $OG$ . Por tanto,  $\omega = [(75 - 25)/25] \times 6 = 12 \text{ rad/s}$  (antihoraria) y  $\alpha = [(75 - 25)/25] \times 10 = 20 \text{ rad/s}^2$  (horaria). Por inspección, si el brazo rota en sentido horario, el engranaje pequeño gira en sentido antihorario.

La velocidad  $\mathbf{v}_B$  del punto  $B$  es la suma (vectorial) de su velocidad relativa respecto a  $G$  más la velocidad de  $G$ .  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{B/G} + \mathbf{v}_G$ . Sigue la tabla.

Vector	Dirección	Módulo
$\mathbf{v}_B$	?	?
$\mathbf{v}_{B/G}$	(↑)	$r\omega = 300 \text{ mm/s}$
$\mathbf{v}_G$	(←)	$(R - r)6 = 300 \text{ mm/s}$

La suma efectuada gráficamente en la Figura 14.40 da  $424 \text{ mm/s}$ .

La aceleración  $\mathbf{a}_B$  del punto  $B$  es la suma (vectorial) de su aceleración relativa a  $G$  (dos componentes: normal y tangencial) más la aceleración de  $G$ .

$$\mathbf{a}_B = (\mathbf{a}_{B/G})_t + (\mathbf{a}_{B/G})_n + (\mathbf{a}_G)_t + (\mathbf{a}_G)_n$$

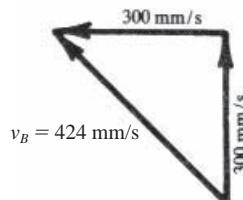


Figura 14.40

Sigue la tabla.

Vector	Dirección	Módulo
$(\mathbf{a}_{B/G})_t$	(↓)	$r\alpha = 500 \text{ mm/s}^2$
$(\mathbf{a}_{B/G})_n$	(←)	$r\omega^2 = 3600 \text{ mm/s}^2$
$(\mathbf{a}_G)_t$	(→)	$(R - r)10 = 500 \text{ mm/s}^2$
$(\mathbf{a}_B)_n$	(↑)	$(R - r)6^2 = 1800 \text{ mm/s}^2$

No es necesario construir un diagrama vectorial. Sumando según la vertical, tenemos  $1800 - 500 = 1300 \text{ mm/s}^2$  (↑). La suma según la horizontal da  $3100 \text{ mm/s}^2$  (←). Así pues, la aceleración absoluta de  $B$  está dirigida hacia la izquierda y arriba con un módulo de  $3360 \text{ mm/s}^2$ .

*Nota:* La velocidad absoluta de  $\mathbf{v}_B$  puede también determinarse por el método del centro instantáneo, siendo éste el punto de tangencia de ambos círculos (ver problema anterior). Aunque la velocidad absoluta del centro instantáneo sea cero, su aceleración absoluta no lo es.

- 14.27.** En la Figura 14.41, la arandela se desliza hacia fuera por la varilla con una velocidad de  $4 \text{ m/s}$  cuando dista  $2 \text{ m}$  del punto  $O$ . Su velocidad a lo largo de la varilla aumenta a razón de  $3 \text{ m/s}^2$ . La varilla lleva una velocidad angular antihoraria de  $5 \text{ rad/s}$  y una aceleración angular horaria de  $10 \text{ rad/s}^2$ . Hallar la aceleración absoluta del punto  $P$  de la arandela

#### SOLUCIÓN

Según la ley de Coriolis, la aceleración absoluta de  $P$  se expresa

$$\mathbf{a}_P = (\mathbf{a}_{P/\text{var}})_t + (\mathbf{a}_{P/\text{var}})_n + (\mathbf{a}_M)_t + (\mathbf{a}_M)_n + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{P/\text{var}}$$

donde  $(\mathbf{a}_{P/\text{var}})_t =$  aceleración de  $P$  paralela a su trayectoria respecto a la varilla; es decir,  $3 \text{ m/s}^2$  hacia fuera según la varilla  
 $(\mathbf{a}_{P/\text{var}})_n =$  aceleración de  $P$  normal a su trayectoria a lo largo de la varilla; es decir, cero, pues se mueve siguiendo una recta  
 $(\mathbf{a}_M)_t =$  componente tangencial de la aceleración del punto  $M$  de la varilla que coincide con  $P$  en el instante considerado; módulo  $ra = 2(10) = 20 \text{ m/s}$ , hacia abajo a la derecha  
 $(\mathbf{a}_M)_n =$  componente normal de la aceleración del punto  $M$  de la varilla que coincide con  $P$  en el instante considerado; módulo  $rw^2 = 2(5)^2 = 50 \text{ m/s}^2$ , según la varilla y hacia  $O$   
 $2\omega \times \mathbf{v}_{P/\text{var}} =$  aceleración complementaria, o de Coriolis, cuyo módulo se indica y con una dirección y sentido que se obtiene rotando  $\mathbf{v}_{P/\text{var}}$  noventa grados en el mismo sentido que  $\omega$  (antihorario en este problema); módulo  $2(5)(4) = 40 \text{ m/s}^2$ , hacia arriba a la izquierda.

En el diagrama vectorial se indican cada una de esas aceleraciones y su suma  $\mathbf{a}_p$  (véase la Figura 14.42). Entonces,  $a_p = 51 \text{ m/s}^2$ , con  $\theta = 22^\circ$ .

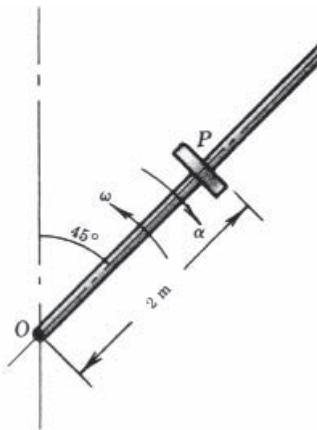


Figura 14.41

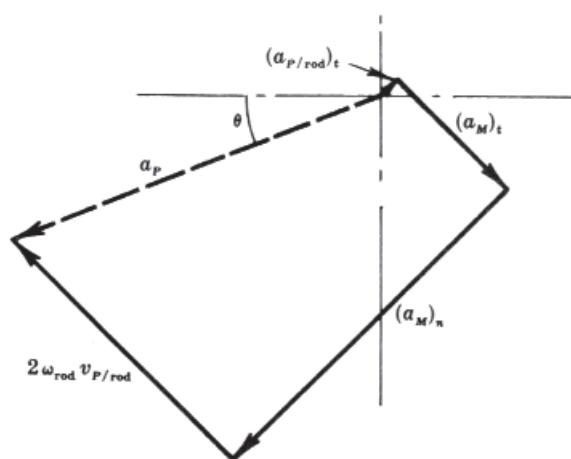


Figura 14.42

- 14.28.** En un instante dado, el centro de curvatura de un álabe de rotor de turbina ocupa la posición que se muestra en la Figura 14.43. Una partícula  $P$ , a 8 in del centro  $O$ , tiene una velocidad de  $10 \text{ in/s}$  y una aceleración de  $20 \text{ in/s}^2$  dirigida hacia fuera y tangente al álabe. Hallar la aceleración de  $P$  si el rotor lleva una velocidad angular antihoraria de  $2 \text{ rad/s}$  y una aceleración angular horaria de  $3 \text{ rad/s}^2$ .

#### SOLUCIÓN

Según la ley de Coriolis, la aceleración absoluta de  $P$  es

$$\mathbf{a}_p = (\mathbf{a}_{P/\text{álabe}})_t + (\mathbf{a}_{P/\text{álabe}})_n + (\mathbf{a}_M)_t + (\mathbf{a}_M)_n + 2\omega_{\text{álabe}} \times \mathbf{v}_{P/\text{álabe}}$$

donde  $(\mathbf{a}_{P/\text{álabe}})_t = 20 \text{ in/s}^2$  hacia fuera y  $\perp PC$   
 $(\mathbf{a}_{P/\text{álabe}})_n = (v_{P/\text{álabe}})^2/PC = (10)^2/8 = 12,5 \text{ m/s}^2$  dirigida de  $P$  a  $C$   
 $(\mathbf{a}_M)_t =$  componente tangencial de la aceleración del punto  $M$  del álabe que coincide con  $P$  en ese instante; módulo  $OP \times \alpha = 8 \times 3 = 24 \text{ in/s}^2$ , hacia abajo a la derecha y  $\perp OP$   
 $(\mathbf{a}_M)_n =$  componente normal de la aceleración del punto  $M$  del álabe que coincide con  $P$  en ese instante; módulo  $OP \times \omega^2 = 8(2)^2 = 32 \text{ in/s}^2$ , dirigida de  $P$  a  $C$   
 $(\mathbf{v}_{P/\text{álabe}}) = 10 \text{ in/s, hacia fuera } \perp PC$   
 $(\omega_{\text{álabe}}) = 2 \text{ rad/s, antihoraria}$   
 $2\omega_{\text{álabe}} \times \mathbf{v}_{P/\text{álabe}} = 2(2)(10) = 40 \text{ in/s}^2$  dirigida de  $C$  a  $P$ ; la dirección y el sentido se obtienen rotando  $\mathbf{v}_{P/\text{álabe}}$ , que es  $\perp OP$  y hacia fuera, noventa grados en el sentido de  $\omega_{\text{álabe}}$ , o sea, antihoraria en el plano del papel.

Al sumar estas componentes resulta un vector de módulo  $a_p = 21 \text{ in/s}^2$  y  $\theta_x = 215^\circ$ . Véase la Figura 14.44.

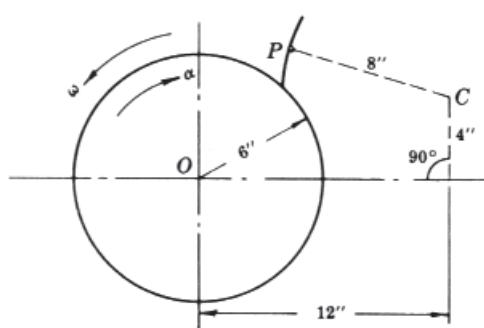


Figura 14.43

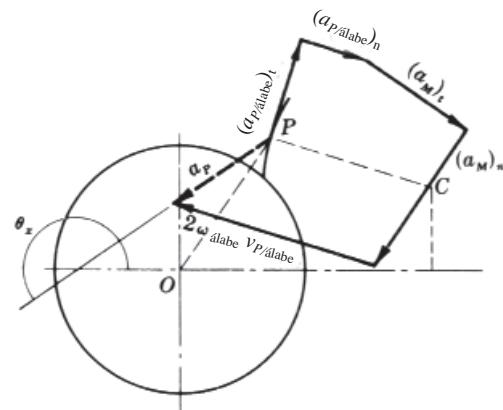


Figura 14.44

### Problemas propuestos

- 14.29.** Un cuerpo rígido gira a 12 rad/s en torno a un eje que pasa por el origen, cuyos cosenos directores son 0,421, 0,365 y 0,832 respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. ¿Qué velocidad lleva un punto del cuerpo cuyo vector de posición (respecto al origen) es  $\mathbf{r} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ?  
*Resp.*  $\mathbf{v} = -47,4\mathbf{i} + 0,26\mathbf{j} + 23,9\mathbf{k}$  m/s

- 14.30.** Un cuerpo rígido gira a 200 rpm en torno a la recta  $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ , uno de cuyos puntos es el origen. ¿Cuál es la velocidad lineal del punto  $P(3, 3, -1)$ ?  
*Resp.*  $\mathbf{v} = -37,0\mathbf{i} + 53,6\mathbf{j} + 49,3\mathbf{k}$  m/s

- 14.31.** Hallar las velocidades angulares, en rad/s, del segundero y minutero de un reloj de pulsera clásico. *Resp.* 0,105 rad/s; 0,0018 rad/s

- 14.32.** Un cuerpo rígido gira a razón de 60 rpm en torno a una recta definida por el origen y el punto  $(3, 0, 5)$ , con las coordenadas en pies. Hallar la velocidad lineal, en ft/s, del punto  $(1, -2, 2)$  del cuerpo. *Resp.*  $10,8\mathbf{i} - 1,08\mathbf{j} - 6,47\mathbf{k}$  ft/s

- 14.33.** Véase la Figura 14.45. Las barras iguales  $AB$  y  $CD$  giran libremente en torno a sus pasadores del chasis. La longitud de la barra  $BD$  es igual a la distancia  $AC$ .  $AB$  posee una velocidad angular antihoraria constante de 10 rpm. Especificar el movimiento de  $BD$ .

*Resp.* Para todos los puntos de  $BD$ ,  $v = 753$  in/min ( $\rightarrow$ ), y  $a = 47300$  in/min<sup>2</sup> ( $\uparrow$ )

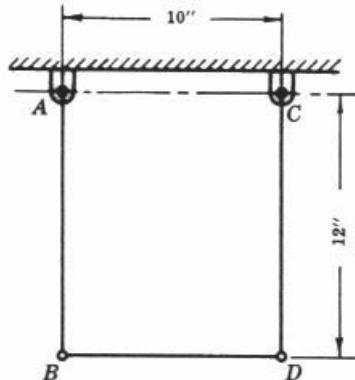


Figura 14.45

- 14.34.** En un momento dado, un árbol gira a 50 rpm en torno a un eje fijo; 20 s después, gira a 1050 rpm. ¿Cuánto vale la aceleración angular media en rad/s<sup>2</sup>?  
*Resp.*  $\alpha = 5,23 \text{ rad/s}^2$

- 14.35.** Un volante de 500 mm de diámetro arranca con una aceleración angular constante de 2 rad/s<sup>2</sup>. Hallar las aceleraciones normal y tangencial de un punto de la llanta a los 3 s del arranque.  
*Resp.*  $a_t = 500 \text{ mm/s}^2, a_n = 9000 \text{ mm/s}^2$

- 14.36.** Una partícula está en reposo sobre el plato de un tocadiscos a una distancia  $r$  del centro. Suponiendo que el plato esté animado de una aceleración angular constante  $C$ , hallar los módulos de las componentes normal y tangencial de la aceleración de la partícula en el instante  $t$  después del arranque.  
*Resp.*  $a_n = C^2/rt^2, a_t = Cr$

- 14.37.** Un rotor se decelera uniformemente desde 1800 rpm hasta el reposo en 320 s. Hallar la deceleración angular y los radianes rotados hasta llegar al reposo.  
*Resp.*  $a = -0,589 \text{ rad/s}^2, \theta = 30.100 \text{ rad}$

- 14.38.** Una barra gira a 5 rad/s en sentido horario en torno a su extremo articulado y sufre una deceleración angular constante. Al cabo de un tiempo, está desplazada 8 rad en sentido antihorario y ha rotado un total de 20,5 rad. ¿Cuál es la velocidad angular al final de ese intervalo?  
*Resp.*  $\omega = 7,58 \text{ rad/s}$

- 14.39.** El torno de la Figura 14.46 se usa para iar el peso  $W$  a una altura de 6 ft. Se acelera uniformemente desde el reposo hasta 15 rpm en 1,5 s, y luego gira a la velocidad constante de 15 rpm. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido en total?  
*Resp.*  $t = 6,48 \text{ s}$

- 14.40.** Véase la Figura 14.47. El mecanismo de elevación consiste en un torno de 1200 mm de diámetro alrededor del cual se arrolla el cable. Solidario del torno hay un engranaje de 900 mm de diámetro primitivo. El engranaje está accionado por un piñón de 300 mm de diámetro primitivo. La aceleración de la masa es de 6 m/s<sup>2</sup> hacia arriba. ¿Cuál es la aceleración angular del piñón?  
*Resp.*  $\alpha = 30 \text{ rad/s}^2 (\curvearrowleft)$

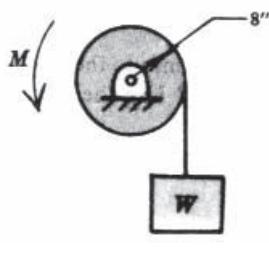


Figura 14.46

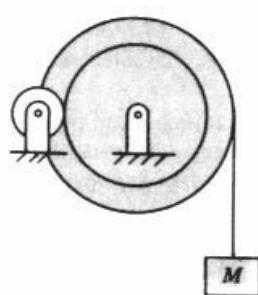


Figura 14.47

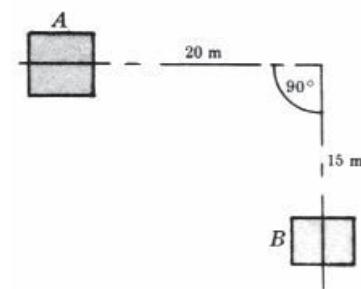


Figura 14.48

- 14.41.** La lluvia cae verticalmente a 5 ft/s. Una persona camina sobre un suelo horizontal con una celeridad de 4 ft/s. ¿Cuál es la velocidad de la lluvia respecto a la persona y a qué ángulo respecto a la vertical hay que sostener un paraguas?  
*Resp.* 6,4 ft/s, 38,6°

- 14.42.** Una persona camina a 3 km/h en dirección este. El viento parece proceder del norte. Cuando ampara el paso hasta 1 km/h, el viento parece proceder del noroeste. ¿Qué celeridad lleva el viento?  
*Resp.*  $v = 3,61 \text{ km/h}$

- 14.43.** En la Figura 14.48 la masa  $A$  se mueve hacia la derecha desde la posición que se indica. La masa  $B$  parte de  $B$  en el mismo instante moviéndose verticalmente hacia arriba a 20 m/s. Hallar la velocidad de  $A$  relativa a  $B$  a los 2 s de iniciarse el movimiento.

Resp.  $v_{A/B} = 25$  m/s,  $\theta_x = 307^\circ$

- 14.44.** Véase la Figura 14.49. Los puntos  $O$  y  $P$  son de una placa delgada que se mueve en el plano  $xy$ .

Del punto  $O$  se sabe que tiene la velocidad indicada. Hallar la velocidad absoluta del punto  $P$ .

Resp.  $v_P = 0$

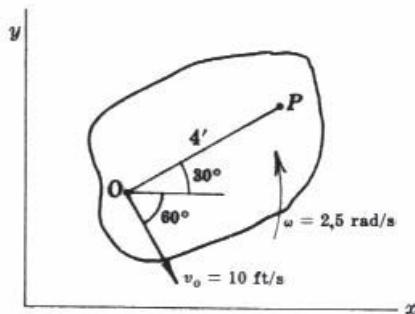


Figura 14.49

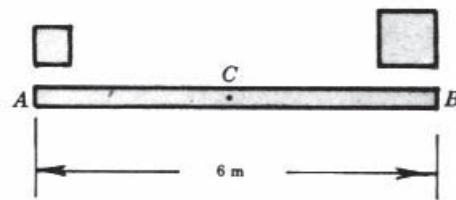


Figura 14.50

- 14.45.** La barra de hierro de la Figura 14.50 es atraída por dos imanes potentes pero distintos, de tal modo que el extremo  $A$  adquiere una aceleración vertical de  $4 \text{ m/s}^2$ , y el extremo  $B$  una aceleración vertical de  $6 \text{ m/s}^2$ . Hallar la aceleración del centro y la velocidad angular de la barra.

Resp.  $a_C = 5 \text{ m/s}^2$  (8),  $\alpha = 0,333 \text{ rad/s}^2$  (↙)

- 14.46.** Una escalera de mano de longitud  $l$  está apoyada en una pared vertical. El pie se aleja de la pared sobre un suelo horizontal con una velocidad constante  $v_0$ . Hallar la velocidad y la aceleración del extremo superior de la escalera. (Sugerencia:  $x = v_0 t$ .)

Resp.  $\dot{x} = \frac{-v_0 t}{\sqrt{l^2 - v_0^2 t^2}}$ ,  $\ddot{x} = \frac{-v_0^2 l^2}{(l^2 - v_0^2 t^2)^{3/2}}$

- 14.47.** Una escalera de mano de longitud  $l$  forma un ángulo  $\theta$  con el suelo horizontal y está apoyada en una pared vertical. Demostrar que su centro se mueve describiendo un círculo de radio  $\frac{1}{2}l$ .

- 14.48.** La barra  $AB$  de la Figura 14.51 resbala de modo que su extremo inferior  $A$  lleva una velocidad de 400 mm/s sobre el suelo horizontal. ¿Cuál es su velocidad angular en el plano de la figura? Emplear el método del centro instantáneo. Resp.  $\omega = 0,293 \text{ rad/s}$  (↙)

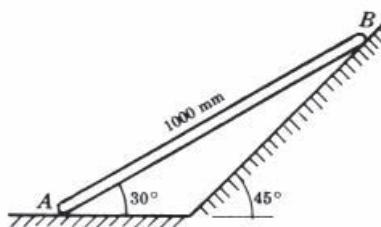


Figura 14.51

- 14.49.** El extremo superior de una escalera de mano de 10 ft de largo resbala hacia abajo por una pared lisa mientras su pie resbala por un suelo horizontal liso perpendicular a la pared. Demostrar que la velocidad de su centro es paralela a la escalera cuando ésta forma un ángulo de  $45^\circ$  con la horizontal.

- 14.50.** En la Figura 14.52, la velocidad del punto *A* es de 5 m/s y su aceleración es de 8 m/s<sup>2</sup>, ambas hacia la derecha. ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración del punto *B*?  
*Resp.*  $v_B = 8,66 \text{ m/s} (\downarrow)$ ,  $a_B = 3,39 \text{ m/s}^2 (\downarrow)$

- 14.51** La manivela *CB* del mecanismo biela-manivela gira a la velocidad constante horaria de 30 rpm. Hallar la velocidad de la cruceta *A* en la posición representada en la Figura 14.53. Resolver por dos métodos.  
*Resp.*  $v_A = 9,68 \text{ in/s} (\rightarrow)$

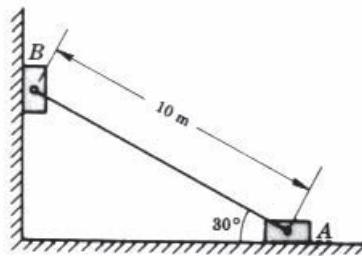


Figura 14.52

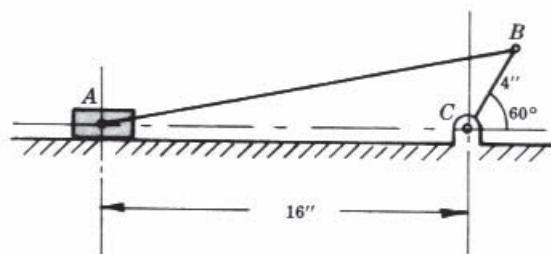


Figura 14.53

- 14.52.** En el mecanismo biela-manivela de la Figura 14.54, la manivela gira en sentido horario a 120 rpm. ¿Qué velocidad lleva la cruceta cuando la manivela está en la posición de 60°? Resolver por dos métodos.

*Resp.* 10,3 ft/s ( $\rightarrow$ )

- 14.53.** En la Figura 14.55, la velocidad lineal de la cruceta (o de la corredera) es de 2,4 m/s a lo largo del plano horizontal. Por el método del centro instantáneo, hallar la velocidad angular de la manivela *AB* en la posición representada.

*Resp.*  $\omega = 2,44 \text{ rad/s} (\curvearrowleft)$

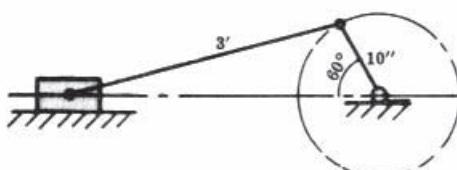


Figura 14.54

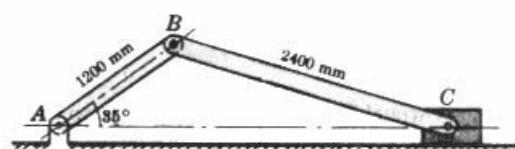


Figura 14.55

- 14.54.** Una barra desliza sobre un poste vertical y está unida a un bloque *A* que se mueve hacia la derecha a una velocidad constante *C*. Véase la Figura 14.56. Hallar la velocidad angular  $\dot{\theta}$  de la barra.

*Resp.*  $\dot{\theta} = -(C/a) \operatorname{sen}^2 \theta$

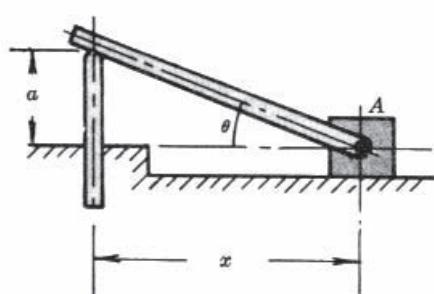


Figura 14.56

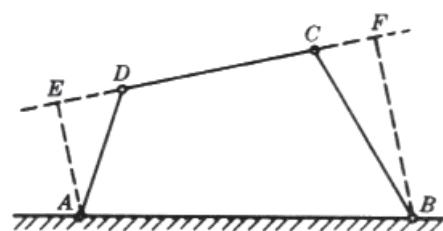


Figura 14.57

- 14.55.** En el sistema articulado de la Figura 14.57, los pasadores *A* y *B* están fijos. La barra *A* rota con una celeridad angular  $\omega_A$ . Demostrar que la celeridad angular  $\omega_B$  de la barra *BC* es  $\omega_B = \omega_A (AE/BF)$ , donde *AE* y *BF* son perpendiculares a *DC*.

- 14.56.** En el sistema de barras articuladas (mecanismo cuádrico) de la Figura 14.58, la velocidad angular de *AB* es de 8 rad/s en sentido horario. Hallar las velocidades angulares de *CD* y *BC*.

Resp.  $\omega_{CD} = 12,0$  rad/s ( $\curvearrowright$ ),  $\omega_{BC} = 0$

- 14.57.** En la posición representada en la Figura 14.59, la manivela *AB* se mueve a 2 rpm en sentido horario. ¿Cuál es la velocidad angular del brazo *CD*? Resolver por dos métodos.

Resp.  $\omega_{CD} = 3,28$  rpm ( $\curvearrowleft$ )

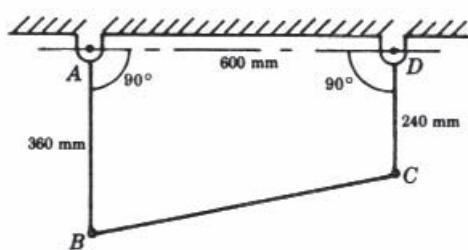


Figura 14.58

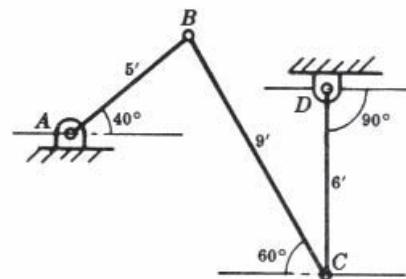


Figura 14.59

- 14.58.** En el sistema articulado de la Figura 14.60, la barra *AB* está limitada a moverse horizontalmente y la barra *CD* gira en torno al punto *D*. Si el extremo izquierdo de la barra horizontal tiene una velocidad hacia la izquierda de 24 in/s y una aceleración hacia la derecha de 40 in/s<sup>2</sup>, ¿cuáles son la velocidad y la aceleración angulares de *CD*?

Resp.  $\omega = 5,33$  rad/s ( $\curvearrowright$ ),  $\alpha = 73,3$  rad/s<sup>2</sup> ( $\curvearrowleft$ )

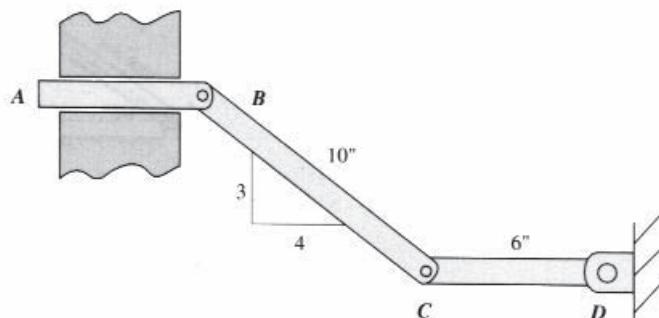


Figura 14.60

- 14.59.** Una rueda de 3 m de diámetro rueda sin deslizar. La velocidad y la aceleración de su centro son 8 m/s y 5 m/s<sup>2</sup> hacia la derecha. ¿Cuál es la aceleración del punto más alto?

Resp.  $a = 43,8$  m/s<sup>2</sup>,  $\theta_x = 283^\circ$

- 14.60.** Una rueda de 300 mm de diámetro rueda hacia la derecha sin deslizar sobre un plano horizontal. Su celeridad angular es 30 rpm. ¿Cuál es la velocidad de (a) su punto más alto y (b) el punto delantero de su diámetro horizontal?

Resp. (a)  $v = 0,942$  m/s,  $\theta_x = 0^\circ$ ; (b)  $v = 0,666$  m/s,  $\theta_x = 315^\circ$

- 14.61.** El bloque de la Figura 14.61 se mueve, tal como se muestra, sobre dos rodillos de 4 in de diámetro. Si está animado de una velocidad de 3,0 ft/s y una aceleración de 2,0 ft/s, ambas hacia la derecha, hallar la velocidad y la aceleración del centro de uno de los rodillos.

Resp.  $v = 1,5 \text{ ft/s} (\rightarrow)$ ,  $a = 1,0 \text{ ft/s}^2 (\rightarrow)$

- 14.62.** El disco de la Figura 14.62 rueda sin deslizar sobre el plano horizontal. Su centro tiene una aceleración horizontal hacia la izquierda de  $4 \text{ ft/s}^2$ . Hallar la aceleración del punto  $P$  en el instante en que la velocidad del centro es de 3 ft/s ( $\leftarrow$ ).

Resp.  $a = 7,32 \text{ ft/s}^2$ ,  $\theta_x = 183^\circ$



Figura 14.61

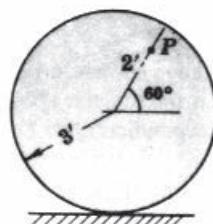


Figura 14.62

- 14.63.** Una rueda compuesta rueda sin deslizar con una velocidad angular horaria de 30 rpm. Véase la Figura 14.63. Hallar las velocidades absolutas de los puntos  $A$  y  $B$ . Resolver por dos métodos.

Resp.  $v_A = 2,22 \text{ m/s}$ ,  $\theta_x = -45^\circ$ ;  $v_B = 4,71 \text{ m/s} (\rightarrow)$

- 14.64.** La rueda compuesta de la Figura 14.64 rueda sin deslizar sobre el plano horizontal. Si lleva una velocidad angular horaria de 20 rad/s, hallar las velocidades absolutas de sus puntos más alto y más bajo. Resp.  $v_A = 35 \text{ ft/s} (\rightarrow)$ ,  $v_B = 15 \text{ ft/s} (\leftarrow)$

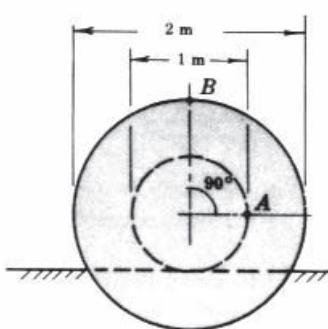


Figura 14.63

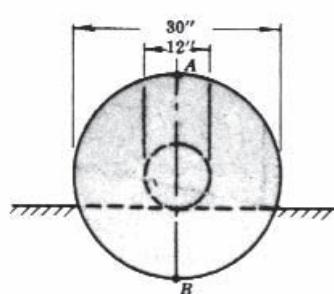


Figura 14.64

- 14.65.** La rueda de la Figura 14.65 se mueve de tal modo que su centro tiene una velocidad horizontal hacia la derecha de 4 m/s. Su velocidad angular es horaria y vale 4 rad/s. Hallar las velocidades absolutas de los puntos  $P$  y  $Q$ . Resp.  $v_P = 5,32 \text{ m/s}$ ,  $\theta_x = 25,0^\circ$ ;  $v_Q = 0$

- 14.66.** La rueda compuesta de la Figura 14.66 rueda sin deslizar sobre el plano horizontal. La cuerda arrollada en torno al eje está sujetada como se muestra al peso  $C$ . La velocidad de éste varía uniformemente de 2 ft/s hacia abajo a 6 ft/s hacia abajo. Hallar el ángulo que gira  $A$  en el intervalo. Resp.  $\theta = 8 \text{ rad} (\curvearrowright)$

- 14.67.** El cilindro  $C$  que se muestra en la Figura 14.67 tiene un diámetro de 500 mm y rueda sin deslizar sobre el suelo horizontal. En la polea  $B$  no hay rozamientos. Si  $A$  se desplaza 100 mm hacia abajo, ¿qué ángulo gira  $C$ ?

Resp.  $\theta = 0,4 \text{ rad} (\curvearrowright)$

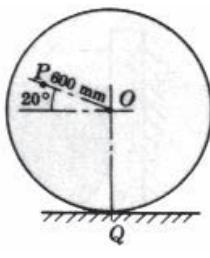


Figura 14.65

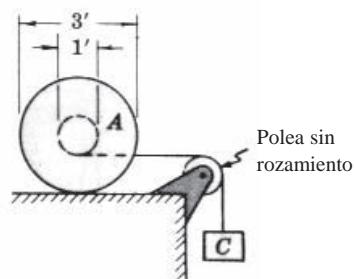


Figura 14.66

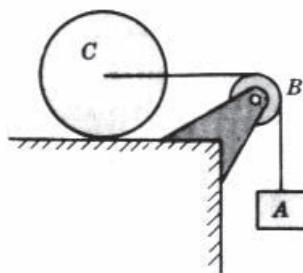


Figura 14.67

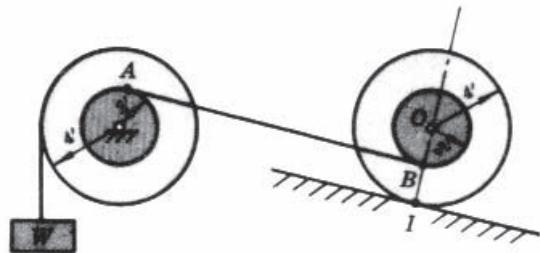


Figura 14.68

- 14.68.** En el problema anterior, la velocidad y la aceleración de *A* son 100 mm/s y 50 mm/s<sup>2</sup>, respectivamente. ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración angulares del cilindro *C*?

Resp.  $\omega = 0,4 \text{ rad/s}$  ( $\curvearrowright$ ),  $\alpha = 0,2 \text{ rad/s}^2$  ( $\curvearrowright$ )

- 14.69.** En la Figura 14.68, el peso *W* cuelga de la polea, que gira sobre cojinetes sin rozamiento. Cuando gira la polea, la cuerda *AB* procedente del eje del cilindro se arrolla en ella. Desde el reposo, el peso desciende con una aceleración constante de 16 ft/s<sup>2</sup>. Hallar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración del centro *O* del cilindro al cabo de 3 s. La cuerda *AB* es paralela al plano inclinado.

Resp.  $s_0 = 72 \text{ ft}$ ,  $v_0 = 48 \text{ ft/s}$ ,  $a_0 = 16 \text{ ft/s}^2$

- 14.70.** Resolver el Problema 14.69 si la cuerda *AB* se desenrolla desde el punto más alto del eje y no desde el más bajo. La polea se sitúa de modo que *AB* sigue paralela al plano.

Resp.  $s_0 = 12 \text{ ft}$ ,  $v_0 = 16 \text{ ft/s}$ ,  $a_0 = 5,33 \text{ ft/s}^2$

- 14.71.** En la Figura 14.69, la válvula *A* es accionada por la excéntrica que gira a 30 rpm en sentido antihorario. Expresar su velocidad y su aceleración en función del ángulo  $\phi$ .

Resp.  $\dot{x} = 7,85 \operatorname{sen} \phi \text{ in/s}$  ( $\rightarrow$ ),  $\ddot{x} = 24,6 \cos \phi \text{ in/s}^2$  ( $\rightarrow$ )

- 14.72.** En la Figura 14.70, el engranaje de cremallera *A* está inmóvil mientras que el engranaje de cremallera *B* tiene una velocidad de 600 mm/s y una aceleración de 450 mm/s<sup>2</sup>, ambas descendentes. Hallar la velocidad y la aceleración del centro del piñón, y la aceleración de su punto de contacto *C*.

Resp.  $v_0 = 300 \text{ mm/s}$  ( $\downarrow$ ),  $a_0 = 225 \text{ mm/s}^2$  ( $\downarrow$ ),  $a_C = 1000 \text{ mm/s}^2$  a  $\theta_x = 207^\circ$

- 14.73.** En la Figura 14.71, la placa superior se mueve hacia la izquierda con una celeridad de 5 ft/s y una aceleración lineal de 4 ft/s<sup>2</sup>. La placa inferior se mueve también hacia la derecha, con una celeri-

dad de 5 ft/s y una aceleración lineal de 3 ft/s<sup>2</sup>. ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración angulares del disco de 4 ft? Entre el disco y las placas no hay deslizamientos.

*Resp.*  $\omega = \frac{5}{4}$  rad/s ( $\curvearrowright$ ),  $\alpha = \frac{1}{4}$  rad/s ( $\curvearrowright$ )

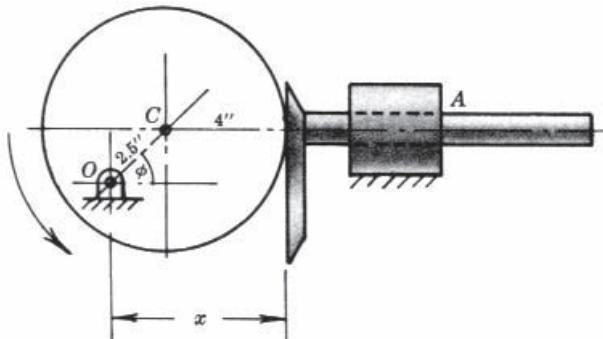


Figura 14.69

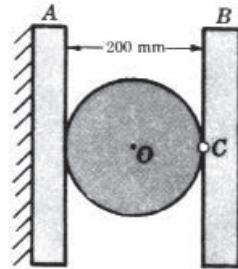


Figura 14.70

- 14.74.** Resolver el Problema 14.73 si la placa inferior se mueve hacia la izquierda, con una celeridad de 5 ft/s y una aceleración de 3 ft/s<sup>2</sup>.

*Resp.*  $\omega = \frac{15}{4}$  rad/s ( $\curvearrowright$ ),  $\alpha = \frac{7}{4}$  rad/s<sup>2</sup> ( $\curvearrowright$ )

- 14.75.** En la Figura 14.72, el disco rueda sin deslizar sobre el plano horizontal con una velocidad angular horaria de 10 rpm y una aceleración angular antihoraria de 6 rad/s<sup>2</sup>. La barra AB esta sujetada como se muestra. La recta OA es horizontal. El punto B se mueve sobre el plano horizontal representado. Hallar su velocidad y su aceleración en la posición representada.

*Resp.*  $v_B = 1,1$  m/s ( $\rightarrow$ ),  $a_B = 7,47$  m/s<sup>2</sup> ( $\leftarrow$ )

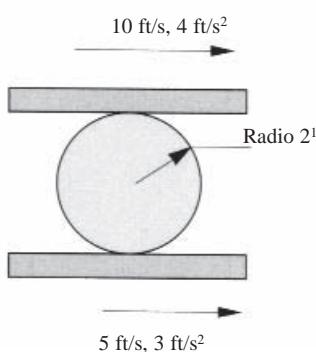


Figura 14.71

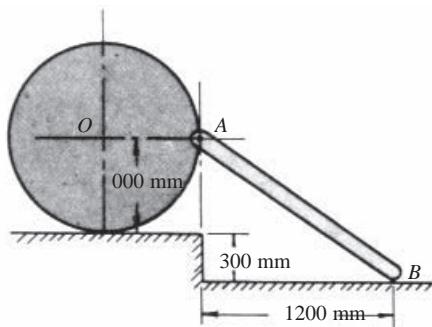


Figura 14.72

- 14.76** La barra AB de 8 ft de la Figura 14.73 está unida en B con un pasador liso al cilindro de 4 ft de diámetro, que rueda hacia abajo por el plano inclinado 30° con una velocidad constante de su centro de 12 ft/s. El extremo A desliza sobre el plano liso, que forma un ángulo de 60° con la horizontal. Para la posición representada, en que la barra está horizontal, hallar la velocidad y la aceleración angulares de la misma.

*Resp.*  $\omega = 6$  rad/s ( $\curvearrowright$ ),  $\alpha = 62,4$  rad/s ( $\curvearrowright$ )

- 14.77.** La manivela OB de la Figura 14.74 gira con una velocidad angular horaria constante de 6 rad/s. El disco C gira sin deslizamiento por dentro del círculo inmóvil. Hallar (a) la velocidad angular del disco C y (b) la aceleración absoluta del punto P en la posición indicada, en que la manivela OB está horizontal y P es el punto más alto del disco C.

*Resp.* (a)  $\omega_C = 18$  rad/s ( $\curvearrowright$ ), (b)  $a_P = 341$  ft/s<sup>2</sup> a  $\theta_x = 252^\circ$

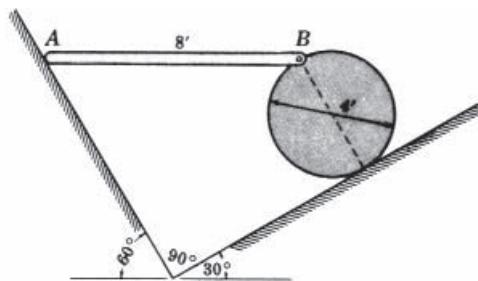


Figura 14.73

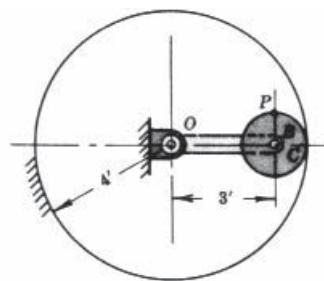


Figura 14.74

- 14.78.** Una cuenta se mueve por una varilla de modo que  $r = 0,5t^2$ . A la vez, la varilla se mueve de modo que  $\theta = t^2 + t$ . Hallar las componentes radial y transversal de la velocidad y aceleración de la cuenta en el instante  $t = 2$  s. Se supone que  $r$  está en metros.

*Resp.*  $v_r = 2$  m/s,  $v_\theta = 10$  m/s,  $a_r = -49$  m/s $^2$ ,  $a_\theta = 24$  m/s $^2$

- 14.79.** Una varilla gira en un plano horizontal con una velocidad horaria de 2 rad/s en torno a un eje que pasa por uno de sus extremos. A lo largo de la varilla se desliza una arandela con una celeridad constante de 4 ft/s. Hallar las componentes radial y transversal de la aceleración en el instante en que la arandela está a 2 ft del eje vertical. *Resp.*  $a_r = -8$  ft/s $^2$ ,  $a_\theta = 16$  ft/s $^2$

- 14.80.** En la Figura 14.75, la bola  $P$  se mueve con una velocidad constante descendente de 2 m/s a lo largo de la ranura lisa tallada como se muestra en el disco que gira con una velocidad angular horaria de 3 rad/s y una aceleración angular antihoraria de 8 rad/s $^2$ . Hallar la aceleración de  $P$  en la posición representada.

*Resp.*  $a = 14,9$  m/s $^2$ , con  $\theta_x = 171^\circ$

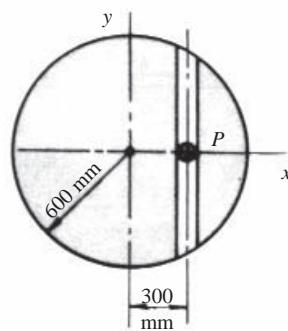


Figura 14.75

- 14.81.** Con una celeridad de 600 mm/s, una partícula recorre el perímetro de un disco de 1200 m de diámetro que gira en sentido contrario con la velocidad angular (horaria) de 2 rad/s. Véase la Figura 14.76. El disco tiene una aceleración angular horaria de 4 rad/s $^2$ . Hallar la aceleración de la partícula en la posición representada. *Resp.*  $a = 2,47$  m/s $^2$ , con  $\theta_x = 256^\circ$

- 14.82.** Con una celeridad constante de  $v$  ft/s, un insecto recorre el perímetro de un disco de radio  $r$ . El disco gira en sentido contrario con una velocidad angular constante de  $\omega$  rad/s. ¿Cuál es la aceleración absoluta del insecto? *Resp.*  $(v - r\omega)^2/r$

- 14.83** Con una celeridad constante  $v$ , un insecto recorre un diámetro de un disco de diámetro  $r$  que gira con una velocidad angular constante  $\omega$ . ¿Cuál es la aceleración absoluta del insecto cuando llega al canto del disco?

*Resp.*  $a = \omega\sqrt{r^2\omega^2 + 4v^2}$

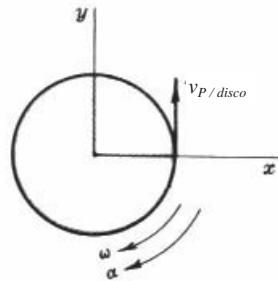


Figura 14.76

- 14.84.** En la Figura 14.77, el miembro *A* desliza por dentro de un collarín articulado a *PC* en *P*, cuya distancia a *C* permanece fija. Si *M* es el punto del miembro *AD* coincidente con *P* en el instante considerado, la velocidad y la aceleración de *P* respecto a *M* serán horizontales. Hallar la velocidad y la aceleración angulares del miembro *CP*.

Resp. (a)  $\omega_{CP} = 10 \text{ rad/s}$  (↙), (b)  $\alpha_{CP} = 75 \text{ rad/s}^2$  (↙)

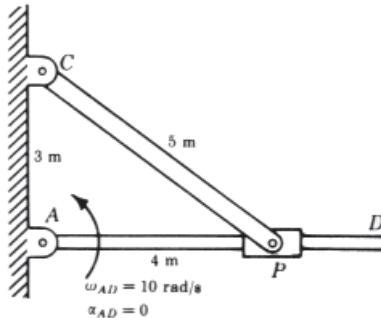


Figura 14.77

- 14.85.** En la Figura 14.78, el miembro *CD* desliza por dentro de un collarín articulado a *AP* en *P*, cuya distancia a *A* permanece fija. En este problema, *M* es el punto de *CD* coincidente con *P*; por ello, la velocidad y la aceleración de *P* respecto a *M* están en la recta *CD*. Hallar la velocidad y la aceleración angulares del miembro *CD*.

Resp. (a)  $\omega_{CD} = 6,4 \text{ rad/s}$  (↙), (b)  $\alpha_{CD} = 13,4 \text{ rad/s}^2$  (↙)

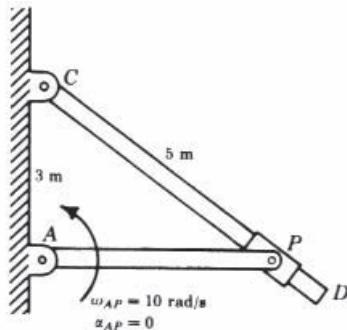


Figura 14.78

- 14.86.** La varilla *AB* de la Figura 14.79 está articulada en *B* y apoyada en la rueda de 8 in de radio. Ésta rueda sin deslizar con una velocidad angular horaria de 12 rad/s y una aceleración angular anti-horaria de 3 rad/s<sup>2</sup>. ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración angulares de la varilla *AB*?

Resp.  $\omega = 1,6 \text{ rad/s} (\curvearrowright)$ ,  $\alpha = 19,7 \text{ rad/s}^2 (\curvearrowleft)$

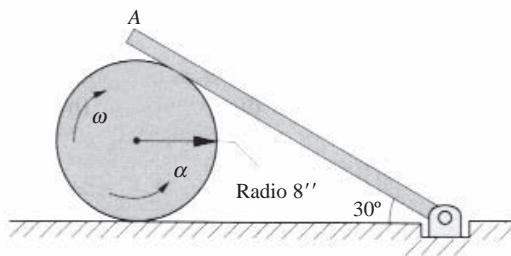


Figura 14.79

- 14.87.** En la Figura 14.80, las dos varillas AB y CD giran en torno a A y D, respectivamente. La varilla de 30 in puede deslizarse libremente por el collarín B y está articulada en C. Si AB tiene una celeridad angular horaria constante de 10 rad/s y CD tiene una celeridad angular antihoraria constante de 8 rad/s, ¿cuáles son la celeridad y la aceleración angulares de la varilla de 30 in?

Resp.  $\omega = 0,353 \text{ rad/s} (\curvearrowright)$ ,  $\alpha = 0,78 \text{ rad/s}^2 (\curvearrowleft)$

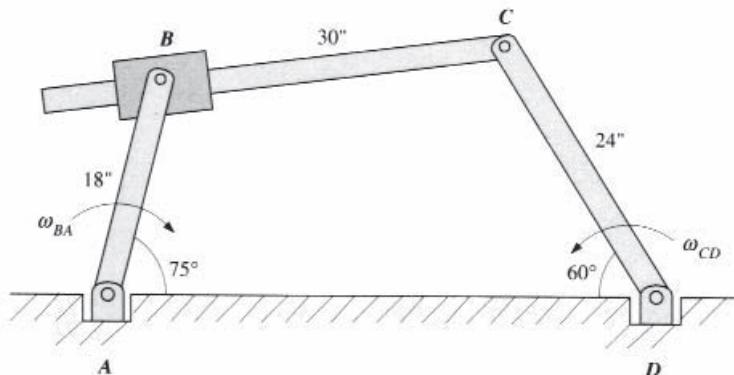


Figura 14.80

# MOMENTOS DE INERCIA

# 15

## 15.1 MOMENTO DE INERCIA AXIAL DE UN ELEMENTO DE ÁREA

El momento de inercia axial  $I$  de un elemento de área plana respecto a un eje **de su plano** es el producto del área del elemento por el cuadrado de su distancia a ese eje. El momento de inercia se conoce también como momento estático de segundo orden y también como segundo momento.

En la Figura 15.1, los momentos de inercia son

$$dI_x = y^2 dA$$

$$dI_y = x^2 dA$$

## 15.2 MOMENTO DE INERCIA POLAR DE UN ELEMENTO DE ÁREA

El momento de inercia polar  $J$  de un elemento respecto a un eje **perpendicular a su plano** es el producto del área del elemento por el cuadrado de su distancia a ese eje. Podemos considerar esto también como el momento de inercia respecto al eje  $z$ .

En la Figura 15.1, el momento de inercia polar es

$$dJ = \rho^2 dA = (x^2 + y^2) dA = dI_y + dI_x$$

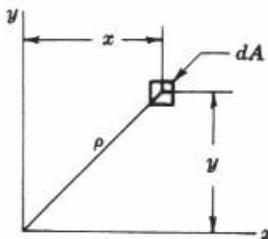


Figura 15.1

## 15.3 PRODUCTO DE INERCIA DE UN ELEMENTO DE ÁREA

En la figura, el producto de inercia de un elemento de área se define:

$$dI_{xy} = xy dA$$

## 15.4 MOMENTO DE INERCIA AXIAL DE UN ÁREA

El momento de inercia axial de un área es la suma de los momentos de inercia axiales de todos sus elementos:

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

## 15.5 RADIO DE GIRO DE UN ÁREA

El radio de giro de un área respecto a un eje está dado por la expresión  $k = \sqrt{I/A}$ .

## 15.6 MOMENTO DE INERCIA POLAR DE UN ÁREA

El momento de inercia polar de un área es la suma de los momentos de inercia polares de todos sus elementos:

$$J = \int \rho^2 dA$$

## 15.7 PRODUCTO DE INERCIA DE UN ÁREA

El producto de inercia de un área es la suma de los productos de inercia de todos sus elementos:

$$I_{xy} = \int xy dA$$

## 15.8 TEOREMA DE STEINER O DE LOS EJES PARALELOS

El teorema de Steiner, también conocido como teorema de los ejes paralelos, afirma que el momento de inercia axial o polar de un área respecto a un eje cualquiera es igual al momento de inercia axial o polar del área respecto al eje paralelo al anterior que pasa por el centroide del área más el producto del área por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes paralelos.

En la Figura 15.2,  $x$  e  $y$  son los ejes de origen  $O$ , mientras que  $x'$  e  $y'$  son ejes paralelos y coplanarios de los anteriores cuyo origen es el centroide  $G$

$$\begin{aligned} I_x &= \bar{I}_{x'} + Am^2 \\ I_y &= \bar{I}_{y'} + An^2 \\ I_O &= \bar{J} + Ar^2 \end{aligned}$$

El producto de inercia de un área respecto a dos ejes cualesquiera es igual al producto de inercia respecto a dos ejes centroidales paralelos a los anteriores más el producto del área por las distancias entre los respectivos ejes:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + Amn$$

donde  $m$  y  $n$  son las coordenadas de  $G$  relativas a los ejes  $(x, y)$  de origen  $O$ , o las coordenadas de  $O$  relativas a los ejes  $(x', y')$  de origen  $G$ . En el primer caso,  $m$  y  $n$  son positivas, mientras que en el segundo caso, son negativas. En ambos casos, su producto es positivo (Figura 15.2).

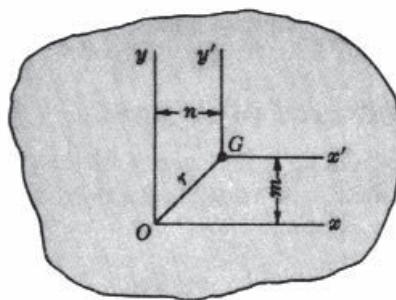


Figura 15.2

## 15.9 ÁREAS COMPUESTAS

El momento de inercia, o el producto de inercia, axial o polar de un área compuesta es la suma de los momentos de inercia, o de los productos de inercia, axiales o polares de las áreas que componen el área total.

Todas las magnitudes anteriormente definidas tienen las dimensiones de una longitud a la cuarta potencia. En el Sistema Tradicional de EE. UU., se expresan habitualmente en in<sup>4</sup>. Las unidades SI son m<sup>4</sup> o mm<sup>4</sup>. En este caso se aconseja emplear 10<sup>6</sup> mm<sup>4</sup> (especialmente en tablas que listan propiedades en unidades SI).

## 15.10 EJES ROTADOS

El momento de inercia de un área cualquiera respecto a unos ejes girados ( $x'$ ,  $y'$ ) puede expresarse como sigue en función de los momentos y productos de inercia respecto a los ejes ( $x$ ,  $y$ ):

$$I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

donde

$I_x$ ,  $I_y$  = momentos de inercia respecto a los ejes ( $x$ ,  $y$ )

$I_{x'}$ ,  $I_{y'}$  = momentos de inercia respecto a los ejes ( $x'$ ,  $y'$ ), que tienen el mismo origen que los ejes ( $x$ ,  $y$ ) pero girados un ángulo  $\theta$  respecto a éstos

$I_{xy}$  = producto de inercia respecto a los ejes ( $x$ ,  $y$ )

$I_{x'y'}$  = producto de inercia respecto a los ejes ( $x'$ ,  $y'$ )

Estas fórmulas se demuestran en el Problema 15.21.

Para toda área, los momentos de inercia máximo y mínimo corresponden a los llamados ejes principales, que son los ejes ( $x'$ ,  $y'$ ) para los que  $2\theta' = \text{artg}[-2I_{xy}/(I_x - I_y)]$ .

$$I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(I_x - I_y)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{y'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \mp \sqrt{\frac{1}{4}(I_x - I_y)^2 + I_{xy}^2}$$

En el Problema 15.22 se exponen los detalles.

## 15.11 CÍRCULO DE MOHR

El círculo de Mohr es un artificio que hace innecesario memorizar las fórmulas de la rotación de ejes. Se trata en los problemas 15.23 y 15.24.

## 15.12 MOMENTO DE INERCIA AXIAL DE UN ELEMENTO DE MASA

El momento de inercia axial de un elemento de masa es el producto de la masa del elemento por el cuadrado de la distancia del elemento al eje.

## 15.13 MOMENTO DE INERCIA AXIAL DE UNA MASA

El momento de inercia axial de una masa es la suma de los momentos axiales de todos sus elementos. Así pues, para una masa de la cual  $dm$  es un elemento de coordenadas ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), son válidas las definiciones siguientes (Figura 15.3):

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_y = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

donde  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  = momentos de inercia axiales (respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente).

Para una placa delgada que pueda suponerse contenida en el plano  $xy$ , se cumplen las relaciones siguientes:

$$I_x = \int y^2 dm$$

$$I_y = \int x^2 dm$$

$$J_O = \int \rho^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = I_x + I_y$$

**Tabla 15.1.** Momentos de inercia de áreas.

Figura	Área y momento	Figura	Área y momento
RECTÁNGULO	$A = bh$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$ $I_b = \frac{1}{3}bh^3$	TRIÁNGULO	$A = \frac{1}{2}bh$ $I_x = \frac{1}{36}bh^3$ $I_b = \frac{1}{12}bh^3$
RECTÁNGULO HUECO	$A = BH - bh$ $I_x = \frac{1}{12}(BH^3 - bh^3)$	ELIPSE	$A = \pi ab$ $I_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$
CÍRCULO	$A = \pi r^2$ $I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$	SEMIELIPSE	$A = \frac{1}{2}\pi ab$ $I_x = 0,11ab^3$
SEMICÍRCULO	$A = \frac{1}{2}\pi r^2$ $I_x = 0,11r^4$	CUARTO DE CÍRCULO	$A = \frac{1}{4}\pi r^2$ $I_x = 0,055r^4$

donde  $I_x, I_y$  = momentos de inercia respecto a los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente, y  $J_O$  = momento de inercia respecto al eje  $z$ .

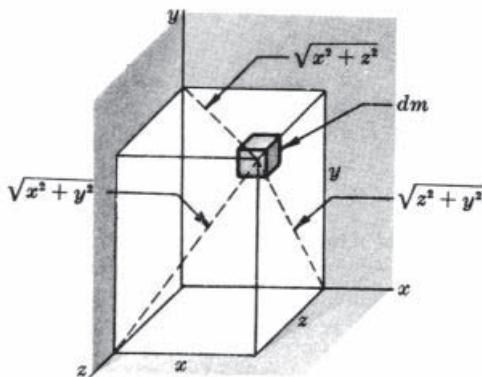


Figura 15.3

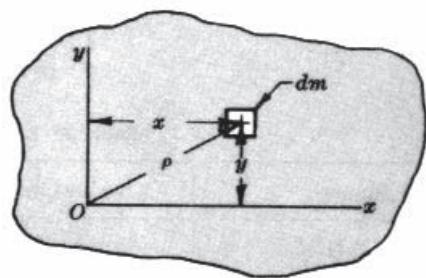


Figura 15.4

### 15.14 RADIO DE GIRO DE UNA MASA

El radio de giro  $k$  de un cuerpo respecto a un eje es  $k = \sqrt{I/m}$ , es decir, la raíz cuadrada del cociente de su momento de inercia dividido por su masa.

### 15.15 PRODUCTO DE INERCIA DE UNA MASA

El producto de inercia de una masa es la suma de los productos de inercia de sus elementos (Figura 15.4):

$$I_{xy} = \int xy \, dm$$

El producto de inercia es nulo si uno de los ejes, o los dos, es un eje de simetría.

### 15.16 TEOREMA DE STEINER PARA UNA MASA

El teorema de Steiner, o de los ejes paralelos, afirma que el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje es igual al momento de inercia  $\bar{I}$  respecto al eje paralelo al anterior que pasa por el centro de gravedad del cuerpo más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes paralelos.

### 15.17 MASAS COMPUESTAS

El momento de inercia, o el producto de inercia, axial o polar de una masa compuesta, respecto a un eje, es la suma de los momentos de inercia, o de los productos de inercia, axiales o polares de las masas que componen la masa total respecto a los mismos ejes.

Todas las magnitudes anteriormente definidas para una masa tienen las dimensiones de masa por longitud al cuadrado. En el Sistema Tradicional de EE.UU., se expresan habitualmente en slug·ft<sup>2</sup>, o en lb·s<sup>2</sup>·ft. La unidad SI es kg · m<sup>2</sup>.

#### Problemas resueltos

- 15.1.** Hallar el momento de inercia de un rectángulo de base  $b$  y altura  $a$  respecto a un eje centroidal paralelo a la base (véase la Figura 15.5).

#### SOLUCIÓN

Tomando un elemento de área  $dA$  paralelo a la base, situado a una distancia  $y$  del eje centroidal  $x$ , como se indica en la Figura 15.6:

$$I_x = \bar{I} = \int y^2 \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b \, dy = \frac{1}{12} bh^3$$

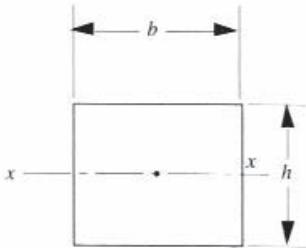


Figura 15.5

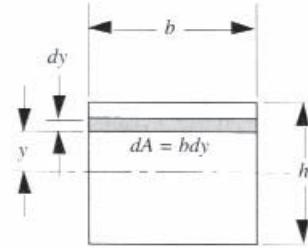


Figura 15.6

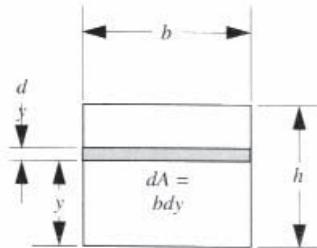


Figura 15.7

- 15.2.** Hallar el momento de inercia del rectángulo del Problema 15.1 respecto a la base (Figura 15.7).

**SOLUCIÓN**

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = \frac{1}{3} bh^3$$

- 15.3.** Hallar el momento de inercia de un rectángulo respecto a su base mediante el teorema de los ejes paralelos (Figura 15.8). Tómese como dato el resultado del Problema 15.1.

**SOLUCIÓN**

$$I_x = \bar{I} + A(\frac{1}{2}h)^2 = \frac{1}{12}bh^3 + bh(\frac{1}{4}h^2) = \frac{1}{3}bh^3$$

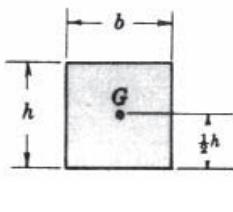


Figura 15.8

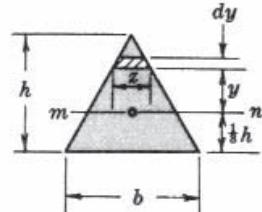


Figura 15.9

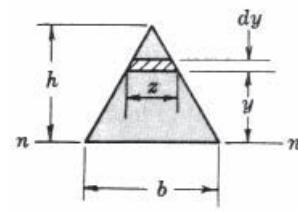


Figura 15.10

- 15.4.** Hallar el momento de inercia de un triángulo de base  $b$  y altura  $h$  respecto a un eje centroidal paralelo a la base (Figura 15.9).

**SOLUCIÓN**

$$I_{mn} = \int y^2 dA = \int_{-h/3}^{2h/3} y^2 z dy = \int_{-h/3}^{2h/3} y^2 \frac{b}{h} (\frac{2}{3}h - y) dy = \frac{1}{36}bh^3$$

ya que, por semejanza de triángulos,  $b/h = z/(\frac{2}{3}h - y)$  o  $z = (b/h)(\frac{2}{3}h - y)$ .

- 15.5.** Hallar el momento de inercia de un triángulo de base  $b$  y altura  $h$  respecto a la base (Figura 15.10).

**SOLUCIÓN**

$$I_b = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 z dy = \int_0^h y^2 \frac{b}{h} (h - y) dy = \frac{1}{12}bh^3$$

ya que, por semejanza de triángulos,  $z/(h - y) = b/h$ , o sea,  $z = (b/h)(h - y)$ .

- 15.6.** Con el resultado del Problema 15.5 (un problema de integración relativamente sencillo), hallar el momento de inercia de un triángulo respecto a un eje centroidal paralelo a la base (Figura 15.11).

**SOLUCIÓN**

En realidad, se trata de aplicar al revés el teorema de los ejes paralelos:

$$I = I_b - A(\frac{1}{3}h)^2 = \frac{1}{12}bh^3 - (\frac{1}{2}bh)(\frac{1}{3}h)^2 = \frac{1}{36}bh^3$$

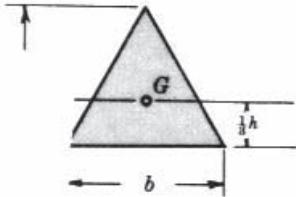


Figura 15.11

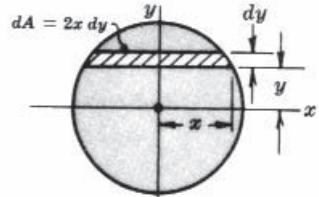


Figura 15.12

- 15.7.** Hallar el momento de inercia de un círculo de radio  $r$  respecto a un diámetro (Figura 15.12).

**SOLUCIÓN**

$$\begin{aligned} I_x &= \int y^2 dA = 2 \int_0^r y^2 (2x dy) = 4 \int_0^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2} dy \\ &= 4 \left[ -\frac{1}{4} y \sqrt{(r^2 - y^2)^3} + \frac{1}{8} r^2 \left\{ y \sqrt{r^2 - y^2} + r^2 \operatorname{arsen}(y/r) \right\} \right]_0^r \\ &= 4 \left[ 0 + \frac{1}{8} r^2 (0 + r^2 \operatorname{arsen} 1) + 0 - \frac{1}{8} r^2 (0 + 0) \right] = 4(\frac{1}{8} r^4)(\frac{1}{2} \pi) = \frac{1}{4} \pi r^4 \end{aligned}$$

Obsérvese que la integral podría haberse evaluado entre  $-r$  y  $r$ , en vez de como dos veces la integral entre 0 y  $r$ . Ello es factible porque el momento de inercia de las dos mitades del área es igual al momento de inercia del área total.

- 15.8.** Hallar el momento de inercia de un círculo de radio  $r$  respecto a un diámetro, empleando el elemento de área  $dA$  que se indica en la Figura 15.13.

**SOLUCIÓN**

$$I_x = \bar{I} = \int y^2 dA$$

donde  $y = \rho \operatorname{sen} \theta$  y  $dA = \rho d\rho d\theta$ . Entonces,

$$\begin{aligned} I_x &= \bar{I} = \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^r \\ &= \frac{1}{4} r^4 [\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{4} r^4 (\pi - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4\pi - 0 + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 0) = \frac{1}{4} \pi r^4 \end{aligned}$$

Este problema ilustra lo sencillo que es calcular momentos de inercia si se elige adecuadamente el elemento de área.

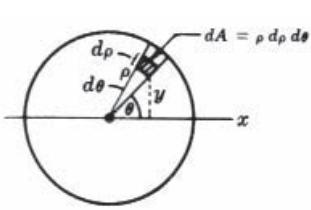


Figura 15.13

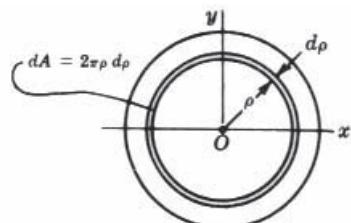


Figura 15.14

- 15.9.** Hallar el momento de inercia de un círculo de radio  $r$  respecto a un eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano del círculo (Figura 15.14).

**SOLUCIÓN**

Como área infinitesimal, tomamos una corona circular de radio  $\rho$  y espesor  $d\rho$ . Por tanto,  $dA$  es igual al perímetro  $2\pi\rho$  multiplicado por el espesor  $d\rho$ .

$$\bar{J} = \int \rho^2 dA = \int_0^r \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi [\frac{1}{4}\rho^4]_0^r = \frac{1}{2}\pi r^4$$

Llegados a este punto, es posible deducir el momento de inercia respecto a un diámetro. Dado que  $\bar{J} = I_x + I_y$  y  $I_x = I_y$  es  $I_x = \frac{1}{2}\bar{J} = \frac{1}{4}\pi r^4$

**15.10.** Hallar los momentos de inercia axial y polar de la elipse representada en la Figura 15.15.

**SOLUCIÓN**

$$I_x = \int y^2 dA = \int_{-b}^b y^2 (2x dy)$$

$$\text{donde } x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \text{ o } x = (a/b)\sqrt{b^2 - y^2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{-b}^b y^2 (2a/b)\sqrt{b^2 - y^2} dy \\ &= (2a/b) \left[ -\frac{1}{4}y\sqrt{(b^2 - y^2)^3} + \frac{1}{8}b^2 \left\{ y\sqrt{b^2 - y^2} + b^2 \arcsin(y/b) \right\} \right]_{-b}^b = \frac{1}{4}\pi ab^3 \end{aligned}$$

$$\text{Una integración similar daría } I_y = \frac{1}{4}\pi a^3 b. \text{ Desde luego, } J = I_x + I_y = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2).$$

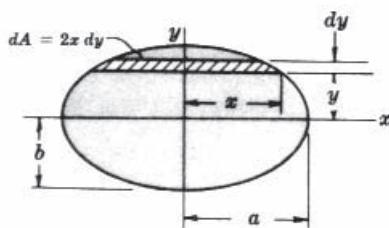


Figura 15.15

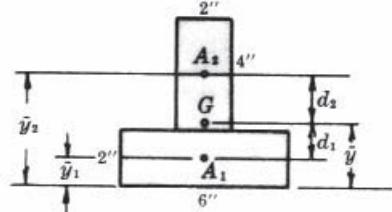


Figura 15.16

**15.11.** Hallar el momento de inercia de la sección en  $T$  de la Figura 15.16 respecto al eje centroidal paralelo a la base.

**SOLUCIÓN**

El primer paso es ubicar el centroide  $G$  dividiendo en dos partes el área de la sección, tal como se muestra en la figura.

Parte	Área	Distancia de la base al centroide
$A_1$	12	1
$A_2$	8	4

$$\text{Por tanto, } (A_1 + A_2)\bar{y} = A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2, (12+8)\bar{y} = 12 \times 1 + 8 \times 4 \text{ e } \bar{y} = 2,2 \text{ in}$$

Seguidamente, teniendo en cuenta que  $I = \frac{1}{12}bh^3$ , para cada parte se halla  $I$  respecto a su propio eje centroidal paralelo a la base:

$$I_1 = \frac{1}{12}(6)(2^3) = 4 \text{ in}^4 \quad I_2 = \frac{1}{12}(2)(4^3) = 10,7 \text{ in}^4$$

El último paso es transferir el momento de inercia de cada parte respecto a su eje centroidal al eje que pasa por  $G$  y obtener así  $\bar{I}$  del área total. Según el teorema de los ejes paralelos ( $d_1 = 2,2 - 1 = 1,2$ ;  $d_2 = 4 - 2,2 = 1,8$ ),

$$\bar{I} = (I_1 + A_1 d_1^2) + (I_2 + A_2 d_2^2) = (4 + 12 \times 1,44) + (10,7 + 8 \times 3,24) = 57,9 \text{ in}^4$$

- 15.12.** Hallar el momento de inercia del área compuesta de la Figura 15.17 respecto al eje centroidal paralelo a la base.

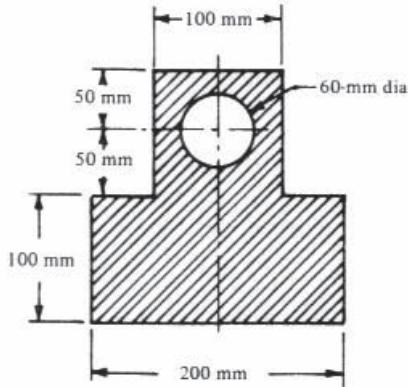


Figura 15.17

#### SOLUCIÓN

El primer paso es ubicar el centroide del área compuesta. Sean  $T$  el área rectangular superior,  $B$  el área rectangular inferior y  $C$  el área circular. Tomando como referencia la base, tenemos

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{A_T \bar{y}_T + A_B \bar{y}_B - A_C \bar{y}_C}{A_T + A_B - A_C} \\ &= \frac{(100 \times 100)(150) + (200 \times 100)(50) - [\pi(60)^2 / 4](150)}{(100 \times 100) + 200 \times 100 - \pi(60)^2 / 4} = 76,4 \text{ mm}\end{aligned}$$

La distancia  $d_T$  desde el centroide de la superficie superior al centroide del área común es

$$150 - 76,4 = 73,6 \text{ mm}$$

Análogamente,

$$d_B = 76,4 - 50 = 26,4 \text{ mm}$$

$$\text{y} \quad d_C = 150 - 76,4 = 73,6 \text{ mm}$$

Los momentos de inercia de cada área componente respecto al respectivo eje centroidal paralelo a la base del área compuesta son los siguientes:

$$I_T = \frac{1}{12} b_T h_T^3 = \frac{1}{12}(100)(100)^3 = 8,33 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_B = \frac{1}{12} b_B h_B^3 = \frac{1}{12}(200)(100)^3 = 16,67 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_C = \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{4} \pi (30)^4 = 0,64 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}I &= (I_T + A_T d_T^2) + (I_B + A_B d_B^2) - (I_C + A_C d_C^2) \\ &= [8,33 \times 10^6 + (100)(100)(73,6)^2] + [16,67 \times 10^6 + (200 \times 100)(26,4)^2] \\ &\quad - \left[ 0,64 \times 10^6 + \frac{\pi(60)^2}{4}(73,6)^2 \right] = 77,1 \times 10^6 \text{ mm}^4\end{aligned}$$

- 15.13.** Hallar el momento de inercia de la sección en  $U$  de la Figura 15.18 respecto al eje centroidal paralelo a la base  $b$ .

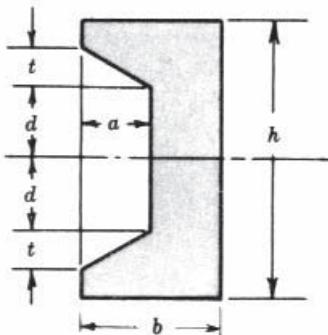


Figura 15.18

**SOLUCIÓN**

En este caso, por simetría, el eje centroidal está a media altura.

Suponemos el canal formado por un rectángulo de base  $b$  y altura  $h$  al que se han suprimido dos triángulos de altura  $t$  y base  $a$  y un rectángulo de base  $a$  y altura  $2d$  (Figura 15.19).

Para hallar el momento de inercia  $I_x$  de la U, al momento de inercia  $I_1$  del rectángulo grande le restamos los momentos de inercia,  $I_2$  e  $I_3$ , de los triángulos y el momento de inercia,  $I_4$ , del rectángulo pequeño. Es decir,

$$I_x = I_1 - (I_2 + I_3 + I_4)$$

Entonces,

$$I_1 = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_2 = I_3 = \frac{1}{36}at^3 + \frac{1}{2}at(d + \frac{1}{3}t)^2 = \frac{1}{36}at^3 + \frac{1}{2}atd^2 + \frac{1}{3}at^2d + \frac{1}{18}at^3$$

$$I_4 = \frac{1}{12}a(2d)^3 = \frac{2}{3}ad^3$$

$$\text{e } I_x = \frac{1}{12}bh^3 - atd^2 - \frac{2}{3}at^2d - \frac{1}{6}at^3 - \frac{2}{3}ad^3$$

Desde luego, este resultado impresiona menos cuando se sustituyen valores numéricos.

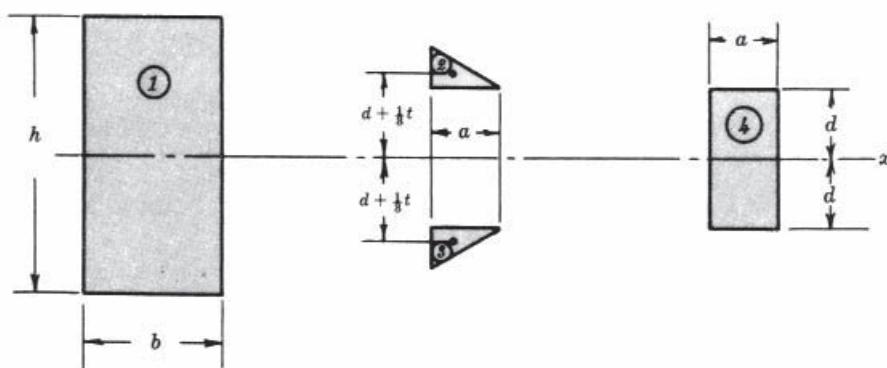


Figura 15.19

- 15.14.** Una columna está constituida por tablones de 2 in tal como se muestra en la Figura 15.20. Hallar su momento de inercia respecto a un eje centroidal paralelo a un lado.

**SOLUCIÓN**

Se ve que el centroide se encuentra en el centro. Para hallar  $\bar{I}$ , basta con multiplicar por dos la suma de los momentos de inercia de las áreas 1 y 2 respecto a una recta que pase por el centro.

$$I_1 = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 = \frac{1}{12}(2)(8^3) = 85,3 \text{ in}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_2 d_2^2 = \frac{1}{12}(4)(2^3) + (8)(3^2) = 74,7 \text{ in}^4$$

$$\bar{I} = 2(85,3 + 74,7) = 320 \text{ in}^4$$

Otro procedimiento es restar al momento de inercia del cuadrado exterior el momento de inercia del cuadrado interior, ambos respecto a un eje que pase por el centro y sea paralelo a un lado:

$$\bar{I} = I_O - I_i = \frac{1}{12} b_O h_O^3 - \frac{1}{12} b_i h_i^3 = \frac{1}{12}(8)(8^3) - \frac{1}{12}(4)(4^3) = 320 \text{ in}^4$$

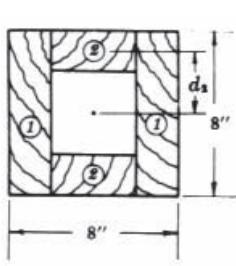


Figura 15.20

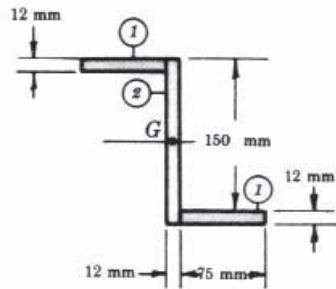


Figura 15.21

- 15.15.** Hallar el momento de inercia de la sección angular doble de la Figura 15.21 respecto al eje centroidal horizontal. ¿Cuánto vale el radio de giro?

#### SOLUCIÓN

En este caso, el eje centroidal es eje de simetría. El momento de inercia buscado  $\bar{I}$  será igual a la suma de los momentos de inercia del área 2 y las dos áreas 1.

$$A = (162)(12) + 2(75 \times 12) = 3,74 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$I_1 = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + A_1 d_1^2 = \frac{1}{12}(75)(12)^3 + (75 \times 12)(75)^2 = 5,07 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 = \frac{1}{12}(12)(162)^3 = 4,25 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}_2 = 2I_1 + I_2 = 14,4 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$k = \sqrt{\frac{\bar{I}}{A}} = \sqrt{\frac{14,4 \times 10^6}{3,74 \times 10^3}} = 62,1 \text{ mm}$$

- 15.16.** ¿Cuál es el producto de inercia respecto a dos lados adyacentes de un rectángulo de base  $b$  y altura  $h$ ?

#### SOLUCIÓN

Tal como se muestra en la Figura 15.22(a), los ejes  $x$  e  $y$  se colocan sobre dos lados adyacentes.

Si denotamos por  $I_{xy}$  el producto de inercia, podemos escribir

$$I_{xy} = \int xy \, dA = \int_0^h \int_0^b xy \, dx \, dy = [\frac{1}{2}x^2]_0^b [\frac{1}{2}y^2]_0^h = \frac{1}{4}b^2h^2$$

Si el eje  $y$  lo colocamos, como en la Figura 15.22(b), sobre el lado derecho del rectángulo, será

$$I_{xy} = \int_0^h \int_{-b}^0 xy \, dx \, dy = [\frac{1}{2}x^2]_{-b}^0 [\frac{1}{2}y^2]_0^h = (0 - \frac{1}{2}b^2)(\frac{1}{2}h^2 - 0) = -\frac{1}{4}b^2h^2$$

Así pues, el producto de inercia puede ser positivo o negativo, según la posición que ocupe el área respecto a los ejes.

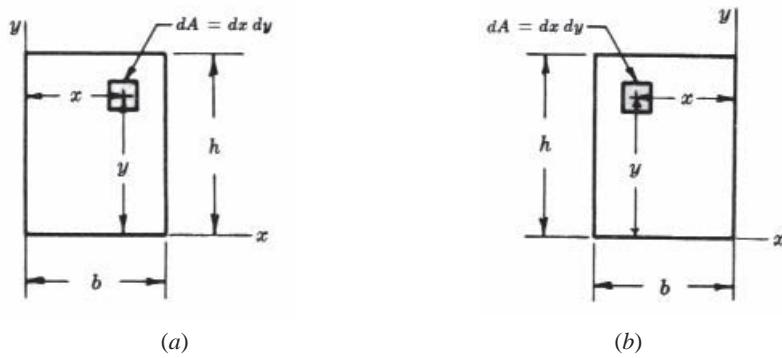


Figura 15.22

- 15.17.** Hallar el producto de inercia de un rectángulo de base  $b$  y altura  $h$  respecto a dos ejes centroidales paralelos a los lados.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 15.23, se ve que los límites de integración de  $x'$  son  $-b/2$  y  $b/2$ ; los límites de integración de  $y'$  son  $-h/2$  y  $h/2$ . Por tanto,

$$I_{x'y'} = \int x'y' dA = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} x'y' dx' dy' = 0$$

Esto podría haberse deducido también a partir del resultado del Problema 15.16, aplicando el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia:

$$I_{xy} = I_{x'y'} + A(\frac{1}{2}b)(\frac{1}{2}h)$$

donde  $\frac{1}{2}b$  y  $\frac{1}{2}h$  son las distancias entre los ejes  $x$ ,  $y$  y los ejes  $x'$ ,  $y'$ .

$$I_{x'y'} = \frac{1}{4}b^2h^2 - bh(\frac{1}{2}b)(\frac{1}{2}h) = 0$$

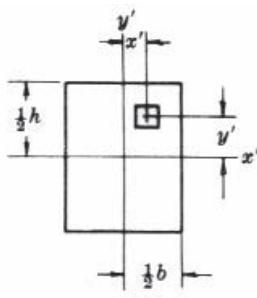


Figura 15.23

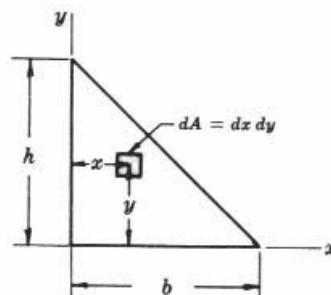


Figura 15.24

- 15.18.** Hallar el producto de inercia de un triángulo rectángulo respecto a los catetos (Figura 15.24).

#### SOLUCIÓN

Por definición,

$$I_{xy} = \int_0^h \int_0^x xy dx dy$$

El límite superior de integración de  $x$  es función de  $y$ . Por consiguiente, hay que obtenerlo de la ecuación de la recta que representa a la hipotenusa, y ésta es

$$y = -\frac{h}{b}x + h, \quad \text{o sea,} \quad x = -\frac{b}{h}(y-h)$$

$$I_{xy} = \int_0^h \int_0^{-(b/h)(y-h)} xy \, dx \, dy = \int_0^h [\frac{1}{2}x^2]_0^{-(b/h)(y-h)} y \, dy = \int_0^h \frac{b^2}{2h^2} (y^2 - 2yh + h^2) y \, dy = \frac{1}{24} b^2 h^2$$

- 15.19.** Hallar el producto de inercia de un cuadrante de círculo de radio  $r$  respecto a los radios limítrofes. Emplear (a) el elemento de área indicado en la Figura 15.25, y (b) el elemento de área indicado en la Figura 15.26.

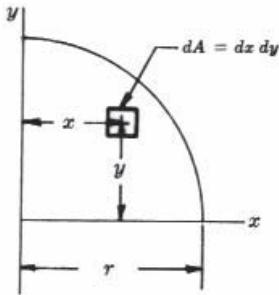


Figura 15.25

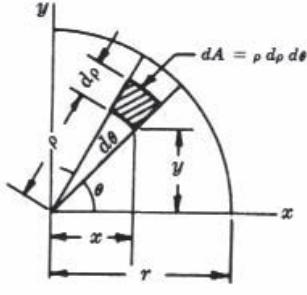


Figura 15.26

**SOLUCIÓN**

(a) Por definición,

$$I_{xy} = \int_0^r \int_0^x xy \, dx \, dy$$

Aquí, la doble integración implica una suma previa respecto a la variable  $x$ , la cual depende de  $y$  a través de la ecuación  $x^2 + y^2 = r^2$ . Sustituyendo,

$$I_{xy} = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} xy \, dx \, dy = \int_0^r [\frac{1}{2}x^2]_0^{\sqrt{r^2-y^2}} y \, dy = \int_0^r \frac{1}{2}(r^2 - y^2)y \, dy = \frac{1}{8}r^4$$

(b) Como antes,

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iint xy \, dA = \int_0^r \int_0^{\pi/2} \rho \cos \theta \rho \sin \theta \rho \, d\rho \, d\theta \\ I_{xy} &= \int_0^{\pi/2} [\frac{1}{4}\rho^4]_0^r \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{4}r^4 [\frac{1}{2}\sin^2 \theta]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}r^4 \end{aligned}$$

- 15.20.** En el Problema 15.19, hallar el momento de inercia de un cuadrante de círculo de radio  $r$  igual a 50 mm.

**SOLUCIÓN**

$$I_{xy} = \frac{1}{8}r^4 = \frac{1}{8}(50)^4 = 7,81 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

- 15.21.** Demostrar que los momentos y el producto de inercia de un área para unos ejes rotados  $(x', y')$  pueden expresarse como sigue

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \\ I_{y'} &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \\ I_{x'y'} &= \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \end{aligned}$$

donde  $I_x, I_y$  = momentos de inercia respecto a los ejes  $(x, y)$

$I_x, I_{y'}$  = momentos de inercia respecto a los ejes  $(x', y')$

$I_{xy}$  = producto de inercia respecto a los ejes  $(x, y)$

$I_{x'y'}$  = producto de inercia respecto a los ejes  $(x', y')$

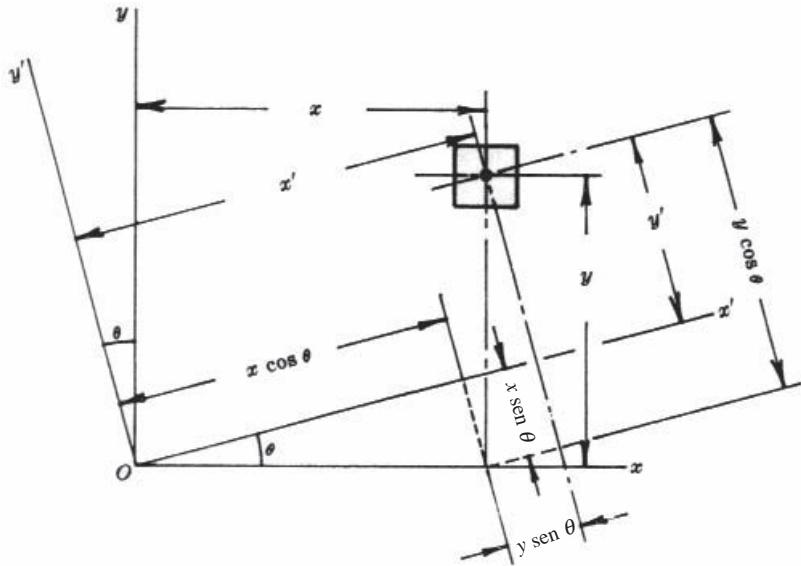


Figura 15.27

**SOLUCIÓN**

En la Figura 15.27 se identifica un elemento de área  $dA$ . Por definición

$$I_{x'} = \int y'^2 dA \quad I_{y'} = \int x'^2 dA \quad I_{x'y'} = \int x'y' dA \quad (1)$$

Pero, según la figura,  $x' = x \cos \theta + y \sen \theta$  e  $y' = -x \sen \theta + y \cos \theta$ . Elevando al cuadrado

$$x'^2 = x^2 \cos^2 \theta + 2xy \cos \theta \sen \theta + y^2 \sen^2 \theta$$

$$y'^2 = x^2 \sen^2 \theta - 2xy \sen \theta \cos \theta + y^2 \cos^2 \theta$$

Asimismo,  $x'y' = -x^2 \cos \theta \sen \theta - xy \sen^2 \theta + xy \cos^2 \theta + y^2 \cos \theta \sen \theta$   
Sustituyendo en (1),

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int x^2 \sen^2 \theta dA - \int xy \sen 2\theta dA + \int y^2 \cos^2 \theta dA \\ I_{y'} &= \int x^2 \cos^2 \theta dA + \int xy \sen 2\theta dA + \int y^2 \sen^2 \theta dA \\ I_{x'y'} &= \int -x^2 \cos \theta \sen \theta dA + \int y^2 \sen \theta \cos \theta dA + \int xy(\cos^2 \theta - \sen^2 \theta) dA \end{aligned}$$

Como las integrales de superficie no dependen de  $\theta$ , al tener en cuenta que  $I_x = \int y^2 dA$ ,  $I_y = \int x^2 dA$  e  $I_{xy} = \int xy dA$ , las expresiones anteriores pueden escribirse

$$I_{x'} = I_y \sen^2 \theta - I_{xy} \sen 2\theta + I_x \cos^2 \theta$$

$$I_{y'} = I_y \cos^2 \theta + I_{xy} \sen 2\theta + I_x \sen^2 \theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sen 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

Además, como  $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$  y  $\sen^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ , obtenemos finalmente

$$I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\theta - I_{xy} \sen 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\theta + I_{xy} \sen 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sen 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

- 15.22.** Obtener, en el Problema 15.21, los valores de  $I_{x'}$  e  $I_{y'}$  correspondientes a los ejes principales (que son los ejes que dan los valores máximo y mínimo de  $I$ ).

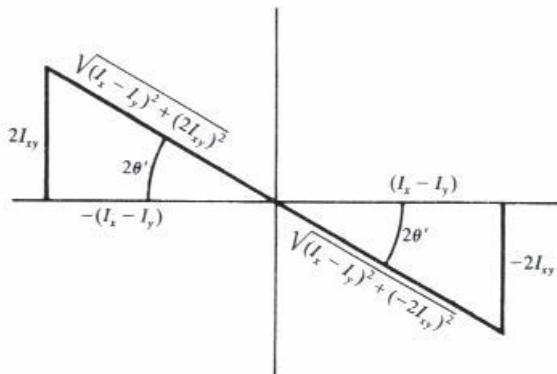
**SOLUCIÓN**

Para determinar el valor de  $\theta$  que hace máximo a  $I_{x'}$ , derivamos respecto a  $\theta$  la expresión de  $I_{x'}$  y la expresión resultante la igualamos a cero. Entonces

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = \frac{1}{2}(I_x - I_y)(-2 \operatorname{sen} 2\theta) - I_{xy}(2 \cos 2\theta) = 0, \quad \text{o sea,} \quad \operatorname{tg} 2\theta' = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Para este valor  $\theta'$  de  $\theta$ , el valor de  $I_{x'}$  es máximo (o mínimo). Ahora, es necesario calcular  $\operatorname{sen} 2\theta'$  y  $\cos 2\theta'$ . Para ello, lo más sencillo es observar que, en la Figura 15.28,

$$\cos 2\theta' = \pm \frac{I_x - I_y}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} \quad \operatorname{sen} 2\theta' = \mp \frac{2I_{xy}}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}$$



**Figura 15.28**

Sustituyendo estos valores y simplificando, obtenemos

$$I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}$$

Derivando ahora  $I_{y'}$  respecto a  $\theta$ , se ve que  $I_{y'}$  resulta máximo (o mínimo) para el mismo valor  $\theta'$ . Ahora, al sustituir los valores de  $\operatorname{sen} 2\theta'$  y  $\cos 2\theta'$ , resulta

$$I_{y'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \mp \sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}$$

Como  $I_{y'}$  tiene un signo negativo antes del radical para el valor de  $\theta'$  que da a  $I_{x'}$  un signo positivo delante del radical, podemos consolidar los resultados afirmando que, respecto a los ejes principales ( $x'$ ,  $y'$ ), un valor, por ejemplo  $I_{x'}$ , es máximo, mientras que el otro valor,  $I_{y'}$ , es mínimo. Adviértase, además, que para ese valor  $\theta'$  (ejes principales),

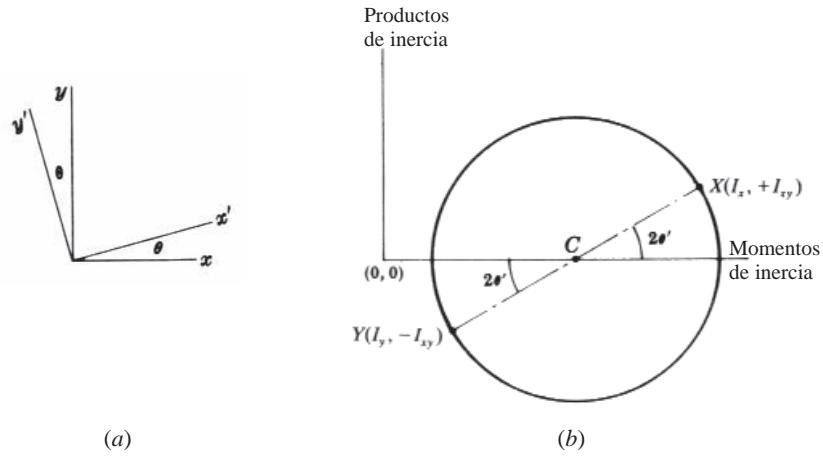
$$I_{x'y'} = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \operatorname{sen} 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

- 15.23.** Dados  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_{xy}$  para un área respecto a unos ejes ( $x$ ,  $y$ ), hallar gráficamente mediante el círculo de Mohr los valores  $I_{x'}$ ,  $I_{y'}$  e  $I_{x'y'}$  para unos ejes ( $x'$ ,  $y'$ ) girados en sentido antihorario un ángulo  $\theta$  respecto a los ejes ( $x$ ,  $y$ ).

**SOLUCIÓN**

En la Figura 15.29(a) se muestra la posición relativa de los ejes. En la Figura 15.29(b) se ha dibujado un par de ejes de representación ortogonales, tales que todo momento de inercia  $I$  estará situado a la derecha del eje vertical, mientras que un producto de inercia puede estar por encima o por debajo del eje horizontal.

Supongamos que  $I_x > I_y$ , con  $I_{xy}$  positivo. Situamos el punto  $X$  de coordenadas  $(I_x, +I_{xy})$  y el punto  $Y$  de coordenadas  $(I_y, -I_{xy})$ . Trazamos la recta  $XY$  que corta al eje horizontal en el punto  $C$ , tal como se indica. Seguidamente (Figura 15.30), dibujamos el círculo de centro  $C$  y diámetro  $XY$ .



**Figura 15.29**

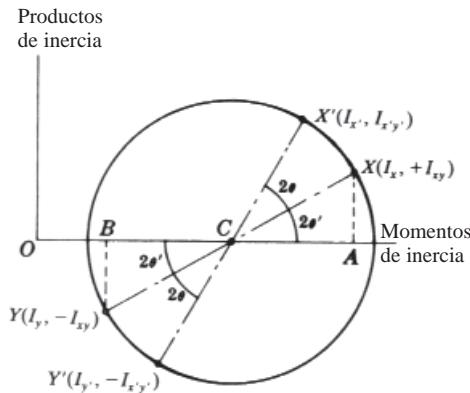


Figura 15.30

Por último, trazamos el diámetro  $X'Y'$  que forma un ángulo antihorario  $2\theta$  con el diámetro  $XY$ . Las coordenadas de  $X'$  e  $Y'$  nos dan los valores de  $I_x'$ ,  $I_y'$  e  $I_{x'y'}$ .

Esos valores pueden obtenerse como sigue. Trazando las rectas verticales  $XA$  e  $YB$ , ocurre que  $BC = CA = \frac{1}{2}(I_x - I_y)$ . Además, la distancia  $XA$  es  $I_{xy}$ . El radio  $CX$  del círculo es la hipotenusa del triángulo rectángulo  $ACX$ , y ese radio vale  $\sqrt{[\frac{1}{2}(I_x - I_y)]^2 + I_{xy}^2}$ .

Ahora bien, la coordenada  $I$  de  $X'$  es igual a la distancia de  $O$  al centro  $C$  del círculo, o sea,  $\frac{1}{2}(I_x + I_y)$ , más la proyección horizontal de  $CX'$ . Pero  $CX'$  es un radio que forma un ángulo  $(2\theta + 2\theta')$  con el eje horizontal  $I$ . Por su parte,  $2\theta'$  es el ángulo deducido en el Problema 15.22 al tratar de los ejes principales.

$$\begin{aligned} \text{Proyección de } CX' &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2} [\cos(2\theta + 2\theta')] \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2} [\cos 2\theta \cos 2\theta' - \sin 2\theta \sin 2\theta'] \end{aligned} \quad (1)$$

Sustituyendo

$$\cos 2\theta' = \frac{CA}{CX} = \frac{\frac{1}{2}(I_x - I_y)}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}} \quad y \quad \sin 2\theta' = \frac{AX}{CX} = \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}}$$

en la ecuación (1) y simplificando, resulta

proyección de  $CX' = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$

$$\text{Así pues, } I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

Análogamente,  $I_{y'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\theta + I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$

Adviértase que el máximo  $I$  se da en el extremo derecho del diámetro horizontal del círculo, con un valor igual a la distancia  $OC$  más el radio. Por tanto,

$$I_{\max} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \sqrt{[\frac{1}{2}(I_x - I_y)]^2 + I_{xy}^2}$$

El valor mínimo corresponde al extremo izquierdo del diámetro y vale

$$I_{\min} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \sqrt{[\frac{1}{2}(I_x - I_y)]^2 + I_{xy}^2}$$

- 15.24.** Hallar los momentos de inercia centroidales principales del perfil angular de alas desiguales representado en la Figura 15.31.

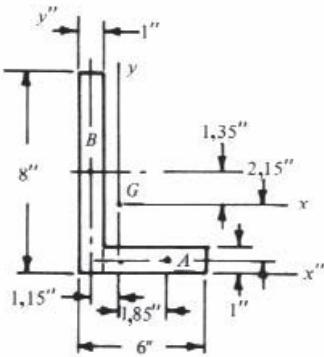


Figura 15.31

#### SOLUCIÓN

Primero ubicamos el centroide del angular respecto a los ejes ( $x''$ ,  $y''$ ) indicados. El perfil se ha dividido en las porciones  $A$  y  $B$ .

$$\bar{x}'' = \frac{5(1)(3,5) + 8(1)(0,5)}{5(1) + 8(1)} = 1,65 \text{ in}$$

$$\bar{y}'' = \frac{5(1)(0,5) + 8(1)(4)}{13} = 2,65 \text{ in}$$

Luego trazamos los ejes ( $x$ ,  $y$ ) con origen en el centroide  $G$  cuyas coordenadas acaban de calcularse. Mediante el teorema de los ejes paralelos, calculamos  $I_x$  e  $I_y$  por transferencia desde los ejes centroidales paralelos de las porciones  $A$  y  $B$ :

$$I_x = \frac{1}{12}(5)(1)^3 + 5(2,15)^2 + \frac{1}{12}(1)(8)^3 + 8(1,35)^2 = 80,8 \text{ in}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(1)(5)^3 + 5(1,85)^2 + \frac{1}{12}8(1)^3 + 8(1,15)^2 = 38,8 \text{ in}^4$$

Para obtener los momentos de inercia principales, hace falta el producto de inercia  $I_{xy}$ . Éste se calcula por transferencia desde los ejes centroidales paralelos de  $A$  y  $B$ , teniendo presente que los productos de inercia respecto a los ejes centroidales de  $A$  y  $B$  son ambos cero, pues esos ejes centroidales son ejes de simetría. Por tanto, en función de las distancias de transferencia, el valor de  $I_{xy}$  queda

$$I_{xy} = 0 + (8 \times 1)(-1,15)(+1,35) + 0 + (5 \times 1)(+1,85)(-2,15) = -32,3 \text{ in}^4$$

*Nota:* En el cálculo de productos de inercia, hay que tener cuidado con los signos de las distancias de transferencia. En este caso, los valores  $1,85$  y  $-2,15$  son las coordenadas del centroide de  $A$  respecto a los ejes ( $x$ ,  $y$ ). Igualmente, los valores  $-1,15$  y  $+1,35$  son las coordenadas del centroide de  $B$  respecto a los ejes ( $x$ ,  $y$ ).

Ahora, vamos a emplear el círculo de Mohr para determinar los momentos y los ejes principales de inercia. Empezamos situando los puntos  $x$  e  $y$ , tal como se muestra en la Figura 15.32. Despues, dibujamos el círculo de radio  $xy$ .

La distancia de  $O$  al centro del círculo es  $\frac{1}{2}(I_x + I_y) = 59,8$  y el radio del círculo es igual a  $\sqrt{(21)^2 + (32,3)^2} = 38,5$ . Así pues, el momento de inercia máximo es  $59,8 + 38,5 = 98,3 \text{ in}^4$  y se presenta para un eje girado respecto al eje  $y$  un ángulo horario  $\theta'$  dado por  $\theta' = \frac{1}{2} \operatorname{artg} (32,3/21) = 28,5^\circ$ . El momento de inercia mínimo es  $59,8 - 38,5 = 21,3 \text{ in}^4$  y corresponde a un eje girado en sentido horario respecto al eje  $x$  tal como se muestra en la Figura 15.33.

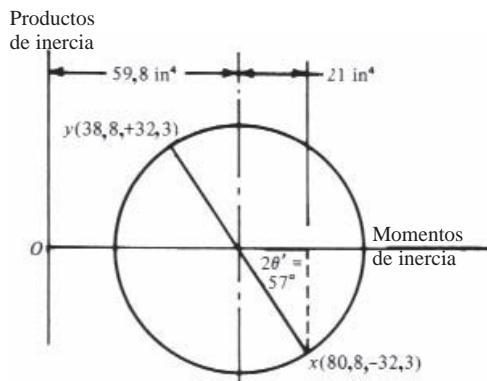


Figura 15.32

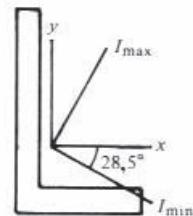


Figura 15.33

- 15.25.** Calcular los momentos de inercia principales del perfil angular de la Figura 15.34 respecto a su centroide.

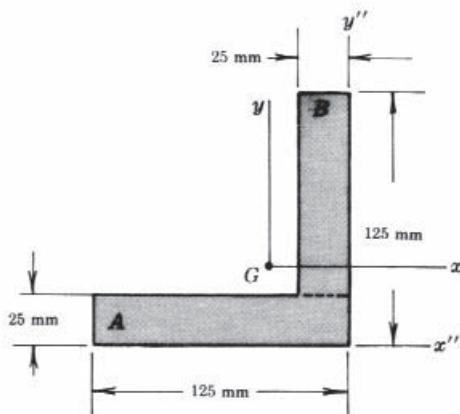


Figura 15.34

#### SOLUCIÓN

Primero ubicamos el centroide del angular, dividiendo éste en dos áreas  $A$  y  $B$ :

$$\bar{x}'' = \frac{-(25)(125)(125/2) - (25)(100)(25/2)}{(25)(125) + (25)(100)} = -40,3 \text{ mm}$$

$$\bar{y}'' = \frac{+(25)(125)(25/2) - (25)(100)(75)}{5625} = +40,3 \text{ mm}$$

El centroide está 40,3 mm por encima de la base y a 40,3 mm a la izquierda del lado derecho.

Seguidamente, hallamos los valores  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_{xy}$  para los ejes ( $x$ ,  $y$ ) con origen en el centroide de toda el área. Ello lo hacemos transfiriendo los valores correspondientes desde los centroides de cada porción  $A$  y  $B$ :

$$I_x = \frac{1}{12}(125)(25)^3 + 125 \times 25(40,3 - 12,5)^2 + \frac{1}{12}(125)(100)^3 + 25 \times 100(75 - 40,3)^2 = 7,67 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(25)(125)^3 + 25 \times 125(62,5 - 40,3)^2 + \frac{1}{12}(100)(25)^3 + 100 \times 25(40,3 - 12,5)^2 = 7,67 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Ambos valores coinciden, y así debe ser, ya que el angular es de alas iguales:

$$I_{xy} = 0 + (125)(25)(+22,2)(+27,8) + 0 + (100)(25)(-27,8)(-34,7) = 4,34 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

En el círculo de Mohr (Figura 15.35), el punto  $X$  tiene las coordenadas  $I_x = 7,67 \times 10^6$  e  $I_{xy} = +4,34 \times 10^6$ , y el punto  $Y$  tiene las coordenadas  $I_y = 7,67 \times 10^6$  y  $-I_{xy} = -4,34 \times 10^6$ . Evidentemente, el radio es  $4,34 \times 10^6$ . Por tanto,

$$I_{\max} = 7,67 \times 10^6 + 4,34 \times 10^6 = 12,0 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{\min} = 7,67 \times 10^6 - 4,34 \times 10^6 = 3,33 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Los ejes principales están a  $2\theta = 901$  en el círculo de Mohr, o a  $45^\circ$  en la figura real. En el círculo de Mohr, al valor máximo se llega en sentido horario desde el punto  $X$ . Por tanto, en la figura real, está a  $45^\circ$  en sentido horario desde el eje  $x$ . Análogamente, al valor mínimo está a  $90^\circ$  en sentido horario desde el punto  $Y$ , y en la figura real, está a  $45^\circ$  en sentido horario desde el eje  $y$ , tal como se muestra en la Figura 15.36.

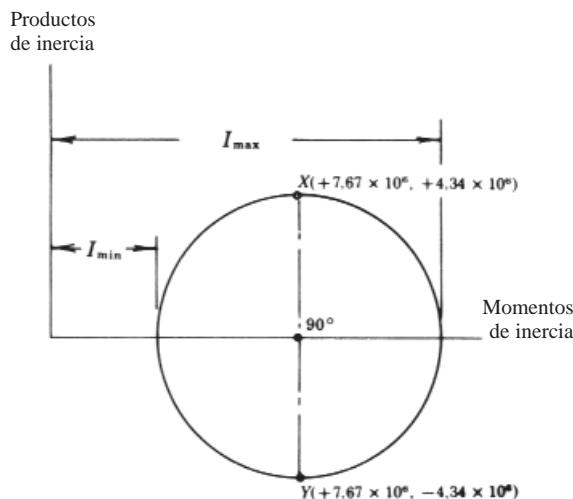


Figura 15.35

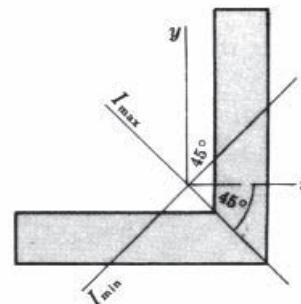


Figura 15.36

- 15.26.** Deducir la expresión del momento de inercia de una barra de longitud  $l$ , masa  $m$  y pequeña sección transversal (Figura 15.37) respecto a un eje centroidal perpendicular a ella. Calcular el radio de giro.

#### SOLUCIÓN

Por definición,  $I_y = \int x^2 dm$ .

Pero  $dm$  es la masa de un tramo de barra de longitud  $dx$ . Su masa  $dm$  es una fracción  $dx/l$  de la masa total  $m$ , es decir,  $(dx/l)m = dm$ .

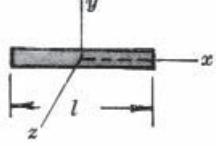
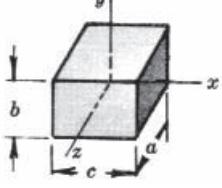
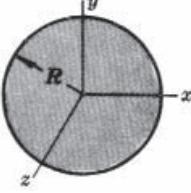
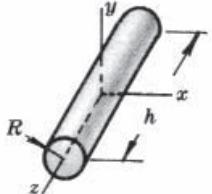
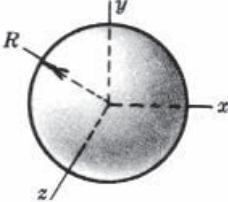
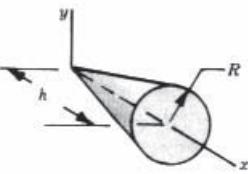
Por tanto,

$$I_y = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{12} ml^2$$

El radio de giro es  $k = \sqrt{I_y/m} = l/\sqrt{12}$ .

Se listan a continuación los momentos centroidales másicos de algunas formas comunes con indicación de los problemas en los que se deducen esas fórmulas.

**Tabla 15.2.** Momentos de inercia centroidales de diversas masas.

Problemas	Figura	Nombre	$I_x$	$I_y$	$I_z$
15.26		Barra esbelta	—	$\frac{1}{2}ml^2$	$\frac{1}{12}ml^2$
15.28		Paralelepípedo rectangular	$\frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	$\frac{1}{12}m(a^2 + c^2)$	$\frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$
15.29		Disco circular delgado	$\frac{1}{4}mR^2$	$\frac{1}{4}mR^2$	$\frac{1}{2}mR^2$
15.32 15.33		Cilindro recto	$\frac{1}{12}m(3R^2 + h^2)$	$\frac{1}{2}m(3R^2 + h^2)$	$\frac{1}{2}mR^2$
15.34		Esfera	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$
15.36		Cono recto	$\frac{3}{10}mR^2$	$\frac{3}{5}m(\frac{1}{4}R^2 + h^2)$	$\frac{3}{5}m(\frac{1}{4}R^2 + h^2)$

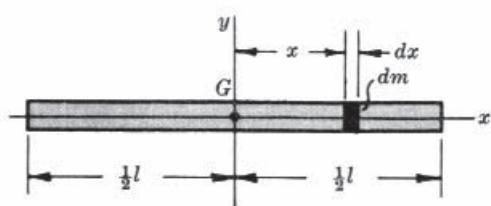


Figura 15.37

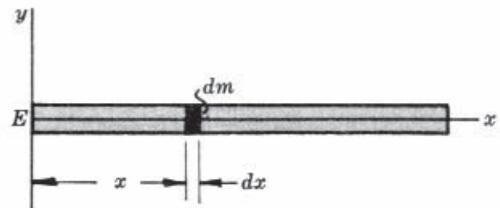


Figura 15.38

- 15.27.** Deducir la expresión del momento de inercia de una barra, de longitud  $l$ , respecto a un eje perpendicular a ella que pasa por un extremo (Figura 15.38). Se supone que la masa es  $m$  y que la sección transversal es pequeña en comparación con la longitud.

#### SOLUCIÓN

Como en el Problema 15.26:

$$I_y = \int x^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{3} ml^2$$

Al mismo resultado se llega con el teorema de los ejes paralelos:

$$I_E = \bar{I} + m(\frac{1}{2}l)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

- 15.28.** ¿Cuál es el momento de inercia de un paralelepípedo rectangular respecto a un eje perpendicular a una de sus caras?

#### SOLUCIÓN

Tal como puede verse en la Figura 15.39, el momento de inercia del bloque respecto al eje  $z$  es igual a la suma de una sucesión de placas de espesor infinitesimal  $dz$ , sección transversal  $b$  por  $c$ , y masa  $m$ .

Primero, hallamos  $I_z$  para una placa de sección transversal  $b$  por  $c$ , espesor infinitesimal  $dz$  y masa  $dm$  (Figura 15.40).

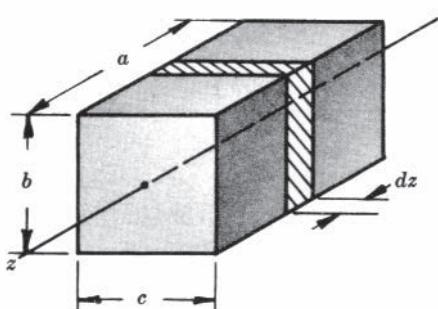


Figura 15.39

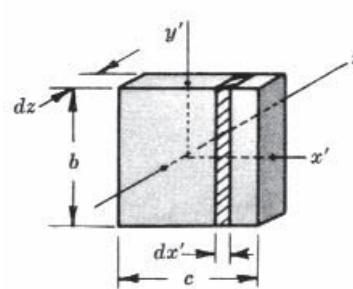


Figura 15.40

Como  $I_z = I'_x + I'_y$ , calculamos antes  $I'_x$  e  $I'_y$ . Sin embargo,  $I'_x$  es en realidad la suma de los momentos centroidales de una sucesión de barras de masa  $dm'$  y sección despreciable ( $dx'$  por  $dy'$ ) y altura  $b$ . De acuerdo con el Problema 15.26, podremos escribir

$$I'_x = \int \frac{1}{12} dm' b^2 = \frac{1}{12} b^2 dm$$

Un razonamiento similar da

$$I'_y = \int \frac{1}{12} dm' c^2 = \frac{1}{12} c^2 dm$$

Resulta, pues, que  $I_z$  para una placa de poco espesor de masa  $dm$  es igual a  $I'_x + I'_y$ , o sea,

$$I_z = \frac{1}{12} dm(b^2 + c^2)$$

Para el bloque entero, se ve que

$$I_z = \int \frac{1}{12} dm (b^2 + c^2) = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$$

o, más rigurosamente, como  $dm = (dz/a)m$ ,

$$I_z = \int_0^a \frac{1}{12} \frac{m}{a} (b^2 + c^2) dz = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$$

- 15.29.** Hallar el momento de inercia respecto a un diámetro de un disco circular homogéneo, de poco espesor, de radio  $r$  y densidad  $\delta$ .

(a) Considérese al disco formado por barras de anchura infinitesimal de sección  $dx$  por  $t$  y altura variable  $2y$ , tal como se muestra en la Figura 15.41.

(b) Considérese el elemento diferencial mostrado en la Figura 15.42.

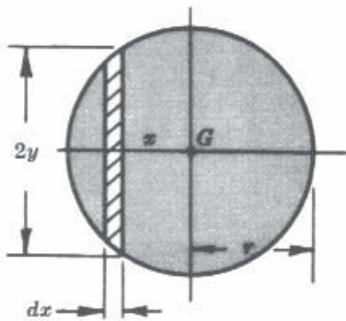


Figura 15.41

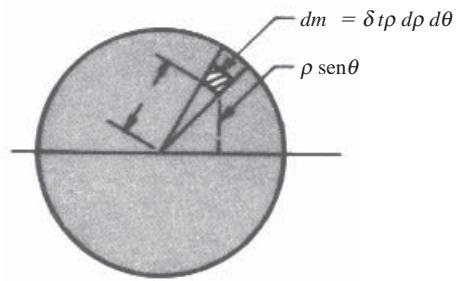


Figura 15.42

#### SOLUCIÓN

(a) La masa de cada franja es  $dm = 2\delta t y dx$ . Según el Problema 15.26, su momento de inercia es  $\frac{1}{12} dm (2y)^2$ . Para el disco entero,

$$I_x = \int_{-r}^r \frac{1}{12} (2) \delta t y dx (2y)^2 = \int_{-r}^r \frac{2}{3} \delta t y^3 dx$$

Pero  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ , y sustituyendo, tenemos

$$I_x = \int_{-r}^r \frac{2}{3} \delta t (\sqrt{r^2 - x^2})^3 dx = \frac{2}{3} \delta t \left[ \frac{1}{4} x (\sqrt{r^2 - x^2})^3 - \frac{3}{8} r^2 x \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{3}{8} r^4 \operatorname{arsen} \frac{x}{r} \right]_{-r}^r$$

Esto da

$$I_x = \frac{2}{3} \delta t \frac{3}{8} r^4 \left[ \frac{1}{2} \pi - (-\frac{1}{2} \pi) \right] = \frac{1}{4} (\pi r^2 \delta t) r^2 = \frac{1}{4} mr^2$$

$$\begin{aligned} (b) \quad I_x &= \int \rho^2 \sin^2 \theta dm = \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^2 \sin^2 \theta \delta t \rho d\rho d\theta = \delta t \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^3 \sin^2 \theta d\rho d\theta \\ &= \delta t \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^r \sin^2 \theta d\theta = \delta t \left( \frac{1}{4} r^4 \right) \left[ \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin \theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \delta t \left( \frac{1}{4} r^4 \right) \left( \frac{1}{2} \times 2\pi \right) = \frac{1}{4} \delta t \pi r^4 = \frac{1}{4} (\delta t \pi r^2) r^2 = \frac{1}{4} mr^2 \end{aligned}$$

- 15.30.** Se supone que el disco del Problema 15.29 es de acero de densidad  $7850 \text{ kg/m}^3$ . Su espesor es  $0,5 \text{ mm}$  y su diámetro es  $100 \text{ mm}$ . Hallar su momento de inercia respecto a un diámetro.

#### SOLUCIÓN

La masa del disco es

$$\pi r^2 t \delta = \pi (0,05)^2 (0,0005) (7850) = 0,031$$

por lo que su momento de inercia será

$$\frac{1}{4}mr^2 = (0,25)(0,031)(0,05)^2 = 19,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

- 15.31.** Demostrar que el momento de inercia polar del disco del Problema 15.29 es  $\frac{1}{2}mr^2$ . ¿Cuál es su radio de giro? Emplear la Figura 15.43.

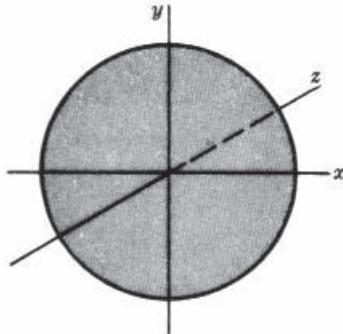


Figura 15.43

#### SOLUCIÓN

Como  $I_y = I_x = \frac{1}{4}mr^2$ , el momento de inercia polar  $I_z$  es

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{2}mr^2$$

El radio de giro es

$$k = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}mr^2}{m}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

- 15.32.** Hallar el momento de inercia de un cilindro recto de radio  $R$  y masa  $m$  respecto a su eje geométrico (Figura 15.44).

#### SOLUCIÓN

El cilindro puede considerarse formado por una sucesión de discos de altura infinitesimal  $dz$ , tal como se muestra. Para uno de esos discos (Problema 15.31) es  $I_z = \frac{1}{2}(\text{masa})R^2 = \frac{1}{2}(m dz/h)R^2$ .

Entonces, para el cilindro entero,

$$I_z = \int_0^h \frac{1}{2} \frac{m dz}{h} R^2 = \frac{1}{2} m R^2$$

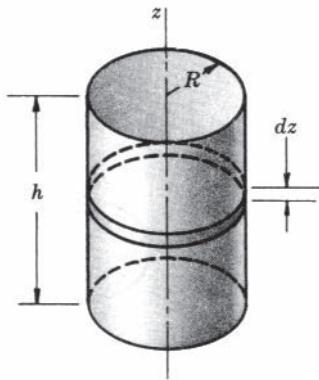


Figura 15.44

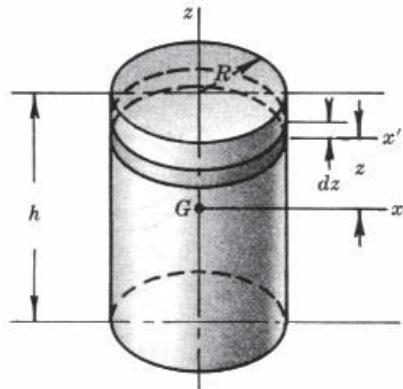


Figura 15.45

- 15.33.** Hallar el momento de inercia de un cilindro recto de radio  $R$  y masa  $m$  respecto al eje centroidal  $x$  que se indica en la Figura 15.45. ¿Cuál es el radio de giro?

**SOLUCIÓN**

Como en el Problema 15.32, el cilindro puede considerarse formado por una sucesión de discos de altura infinitesimal  $dz$  y masa  $m dz/h$ . Según el Problema 15.29, el momento de inercia de uno de esos discos respecto a su eje  $x'$ , paralelo el eje  $x$ , es  $I_{x'} = \frac{1}{4}(m dz/h)R^2$ . Aplicando el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia respecto al eje  $x$  de ese cilindro de espesor infinitesimal, resulta ser

$$I_x = I_{x'} + \frac{m dz}{h} z^2 = \frac{1}{4} \frac{m dz}{h} R^2 + \frac{m dz}{h} z^2$$

Entonces, el momento de inercia  $I_x$  de todo el cilindro es la suma de los momentos de inercia de todos los discos:

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{mR^2}{4h} \int_{-h/2}^{h/2} dz + \frac{m}{h} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mh^2 = \frac{1}{12} m(3R^2 + h^2) \\ k &= \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \sqrt{\frac{1}{12}(3R^2 + h^2)} \end{aligned}$$

- 15.34.** Hallar el momento de inercia de una esfera de masa  $m$  y radio  $R$  respecto a un diámetro. ¿Cuál es su radio de giro?

**SOLUCIÓN**

Como elemento, se toma un disco de espesor infinitesimal paralelo al plano  $xy$ , tal como se muestra en la Figura 15.46. Se supone una densidad  $\delta$ .

El momento de inercia de un disco de radio  $x$  respecto al eje  $y$  es  $\frac{1}{2}(\text{masa})x^2$ . Para hallar el momento de inercia  $I_y$  de toda la esfera, hay que sumar los de todos los discos que forman la esfera, siendo  $dm = dV = \delta(\pi x^2 dy)$ :

$$I_y = \int_{-R}^R \frac{1}{2}(\delta\pi x^2 dy)x^2 = \frac{1}{2}\pi\delta \int_{-R}^R x^4 dy$$

Pero la intersección de la esfera con el plano  $xy$  es una circunferencia de ecuación  $x^2 + y^2 = R^2$ ; por tanto,

$$I_y = \frac{1}{2}\pi\delta \int_{-R}^R (R^2 - y^2)^2 dy = \frac{8}{15}\delta\pi R^5$$

Como la masa es  $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \delta$ , tenemos

$$I_y = (\frac{4}{3}\pi R^3 \delta)(\frac{8}{15}\delta\pi R^5) = \frac{2}{5}mR^2$$

El radio de giro es  $k = \sqrt{I_y/m} = \sqrt{\frac{2}{5}}R$ .

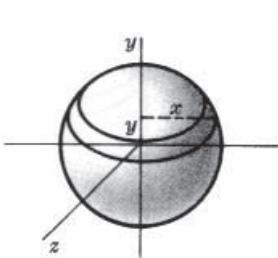


Figura 15.46

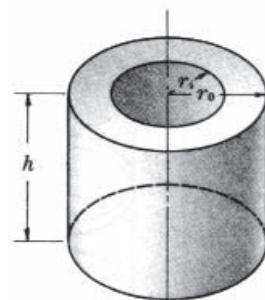


Figura 15.47

**15.35.** Hallar el momento de inercia de un cilindro recto hueco homogéneo respecto a su eje geométrico (Figura 15.47).

**SOLUCIÓN**

$$\text{Para el cilindro exterior, } (I_z)_o = \frac{1}{2}m_o r_o^2 = \frac{1}{2}(\pi r_o^2 h \delta) r_o^2$$

$$\text{Para el cilindro interior, } (I_z)_i = \frac{1}{2}m_i r_i^2 = \frac{1}{2}(\pi r_i^2 h \delta) r_i^2$$

$$\text{Para el tubo, } I_z = (I_z)_o - (I_z)_i = \frac{1}{2}\pi\delta h(r_o^2 + r_i^2)(r_o^2 - r_i^2)$$

Operando,

$$I_z = (\frac{1}{2}h\pi\delta r_o^2 - \frac{1}{2}h\pi\delta r_i^2)(r_o^2 + r_i^2) = (\frac{1}{2}m_o - \frac{1}{2}m_i)(r_o^2 + r_i^2) = \frac{1}{2}m(r_o^2 + r_i^2)$$

donde  $m$  representa la masa del tubo.

**15.36.** Hallar los momentos de inercia respecto a los ejes  $x$  e  $y$  del cono recto de masa  $m$  cuyas dimensiones se muestran en la Figura 15.48. Si su masa es de 500 kg, su radio  $R$  mide 250 mm, y su altura  $h$ , 500 mm, comprobar que  $I_x = 9,83 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  e  $I_y = 79,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

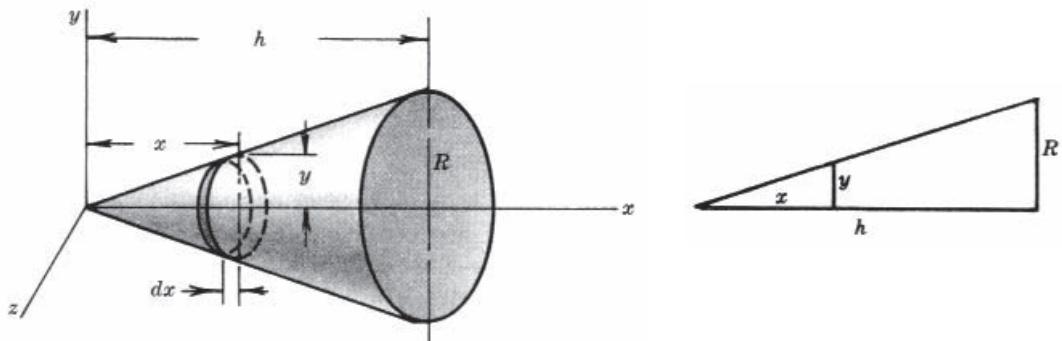


Figura 15.48

Figura 15.49

**SOLUCIÓN**

Como elemento, se toma un disco de espesor infinitesimal perpendicular al eje  $x$ , tal como se muestra en la Figura 15.48. Se supone una densidad  $\delta$ .

El momento de inercia de un disco de radio  $y$  respecto al eje  $x$  es  $\frac{1}{2}(\text{masa})y^2$ . Para hallar el momento de inercia  $I_x$  de todo el cono, hay que sumar los de todos los discos que forman el cono, siendo  $dm = \delta dV = \delta(\pi y^2 dx)$ . Como  $y = Rx/h$  (Figura 15.49):

$$I_x = \int_0^h \frac{1}{2} \delta(\pi y^2 dx) y^2 = \int_0^h \frac{1}{2} \delta \pi \left(\frac{Rx}{h}\right)^4 dx = \frac{1}{10} \delta \pi R^4 h$$

Pero la masa de todo el cono es  $\frac{1}{3}\pi\delta R^2 h$ . Por tanto, podemos escribir

$$I_x = \left(\frac{1}{3}\pi R^2 h \delta\right) \left(\frac{3}{10} R^4\right) = \frac{3}{10} m R^2$$

Para calcular  $I_y$ , que es igual a  $I_z$ , es necesario aplicar el teorema de los ejes paralelos para obtener el momento de inercia de cada disco respecto al eje  $y$ . Como  $y = Rx/h$ ,

$$\begin{aligned} I_y &= \int \left( \frac{1}{4} dm y^2 + dm x^2 \right) = \int_0^h (\delta \pi y^2 dx) \left( \frac{1}{4} y^2 + x^2 \right) \\ &= \int_0^h \frac{1}{4} \pi \delta \left( \frac{R^4}{h^4} \right) x^4 dx + \int_0^h \pi \delta \left( \frac{R^2}{h^2} \right) x^4 dx = \frac{1}{20} \pi \delta R^4 h + \frac{1}{5} \pi \delta R^2 h^3 \end{aligned}$$

Con  $m = \frac{1}{3}\pi\delta R^2 h$ , la expresión anterior queda

$$I_y = \frac{3}{20} m R^2 + \frac{3}{5} m h^2 = \frac{3}{5} m \left( \frac{1}{4} R^2 + h^2 \right)$$

Con los datos numéricos,

$$I_x = 0,3(500)(0,25)^2 = 9,38 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad \text{e} \quad I_y = \frac{3}{5}(500)[\frac{1}{4}(0,25)^2 + (0,5)^2] = 79,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

- 15.37.** Calcular el momento de inercia del volante de fundición representado en la Figura 15.50. El peso específico de la fundición es 450 lb/ft<sup>3</sup>.

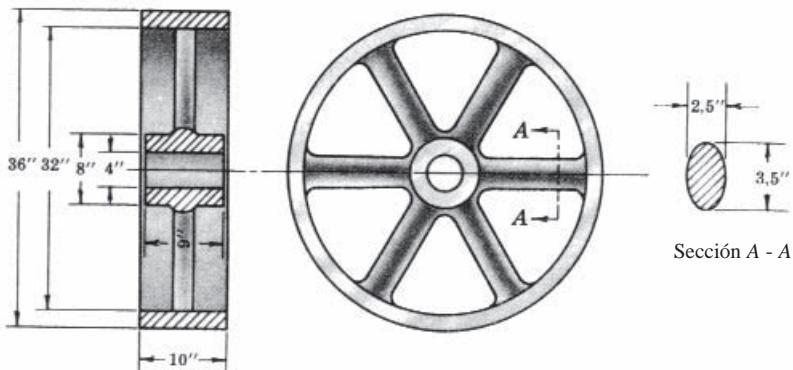


Figura 15.50

#### SOLUCIÓN

A efectos de cálculo, consideramos el cubo y la llanta como cilindros huecos, y los radios, como barras esbeltas. Primero hallamos los pesos de los componentes:

$$\begin{aligned} W_{\text{cubo}} &= (\pi r_o^2 - \pi r_i^2) h \delta = \pi[(4/12)^2 - (2/12)^2](9/12)(450) = 88,2 \text{ lb} \\ W_{\text{llanta}} &= (\pi r_o^2 - \pi r_i^2) h \delta = \pi[(18/12)^2 - (16/12)^2](10/12)(450) = 556 \text{ lb} \end{aligned}$$

Para un radio, de sección transversal elíptica,

$$W_{\text{radio}} = \pi ab/\delta = \pi(2,5/24)(3,5/24)(12/12)(450) = 21,5 \text{ lb}$$

Seguidamente, se determina  $I$  para cada componente respecto al eje de rotación. Para los radios, ello implica transferir desde sus ejes centroidales paralelos.

$$\begin{aligned} I_{\text{cubo}} &= \frac{1}{2} m(r_o^2 + r_i^2) = \frac{1}{2}(88,2/32,2)[(4/12)^2 + (2/12)^2] = 0,19 \text{ lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{ft} \\ I_{\text{llanta}} &= \frac{1}{2} m(r_o^2 + r_i^2) = \frac{1}{2}(556/32,2)[(18/12)^2 + (16/12)^2] = 34,8 \text{ lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{ft} \\ I_{\text{radios}} &= 6(\frac{1}{2} ml^2 + md^2) = 6[\frac{1}{2}(21,5/32,2)(12/12)^2 + (21,5/32,2)(10/12)^2] = 3,11 \text{ lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{ft} \\ I_{\text{volante}} &= (0,19 + 34,8 + 3,11) \text{ lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{ft} = 38,1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{ft} \end{aligned}$$

#### Problemas propuestos\*

- 15.38.** Un rectángulo tiene una base de 2 in y una altura de 6 in. Calcular su momento de inercia respecto a un eje que pasa por su centro de gravedad y es paralelo a la base.

Resp. 36 in<sup>4</sup>

- 15.39.** Hallar el momento de inercia respecto a su base de un triángulo isósceles de 150 mm de base y lados de 125 mm. Resp.  $12,5 \times 10^6 \text{ mm}^4$

- 15.40.** Hallar el momento de inercia de un círculo de radio 2 ft respecto a un diámetro.

Resp. 12,6 ft<sup>4</sup>

\* La Tabla 15.1 puede ser útil para los problemas numéricos.

- 15.41.** Calcular el momento de inercia respecto al eje  $y$  del área plana comprendida entre la parábola  $y = 9 - x^2$  y el eje  $x$ .

Resp.  $\frac{324}{5}$

- 15.42.** Hallar el momento de inercia respecto a cada eje coordenado del área comprendida entre la curva  $y = \cos x$ , de  $x = 0$  a  $x = \frac{1}{2}\pi$ , y el eje  $x$ .

Resp.  $I_x = \frac{2}{9}$ ,  $I_y = \frac{1}{4}\pi^2 - 2$

- 15.43.** Calcular el momento de inercia respecto a cada eje coordinado del área comprendida entre la curva  $y = \operatorname{sen} x$ , de  $x = 0$  a  $x = \pi$ , y el eje  $x$ .

Resp.  $I_x = \frac{4}{9}$ ,  $I_y = \pi^2 - 4$

- 15.44.** Hallar el momento de inercia del área compuesta de la Figura 15.51 respecto al eje paralelo a la base que pasa por el centro de gravedad. ¿Cuál es el radio de giro?

Resp.  $46,3 \text{ in}^4$ ,  $2,24 \text{ in}$

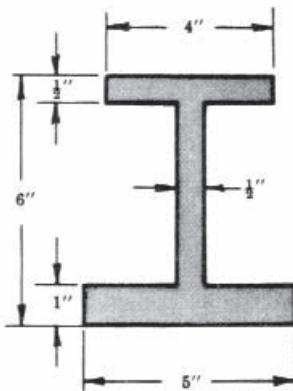


Figura 15.51

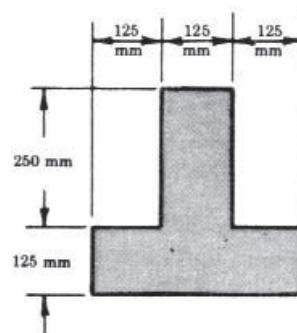


Figura 15.52

- 15.45.** Hallar el momento de inercia del área compuesta de la Figura 15.52 respecto al eje centroidal horizontal.

Resp.  $883 \times 10^6 \text{ mm}^4$

- 15.46.** Hallar el momento de inercia del área compuesta de la Figura 15.53 respecto al eje centroidal paralelo al lado de 250 mm. ¿Cuál es el radio de giro?

Resp.  $1,35 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ,  $21,1 \text{ mm}$

- 15.47.** Hallar el momento de inercia del área compuesta de la Figura 15.54 respecto al eje centroidal horizontal. Resp.  $12.8 \text{ in}^4$

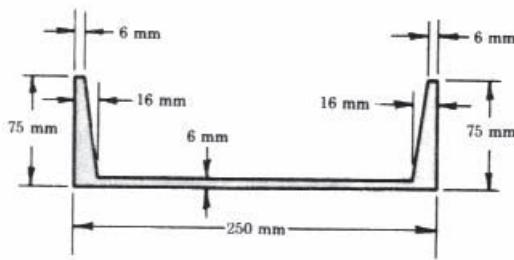


Figura 15.53

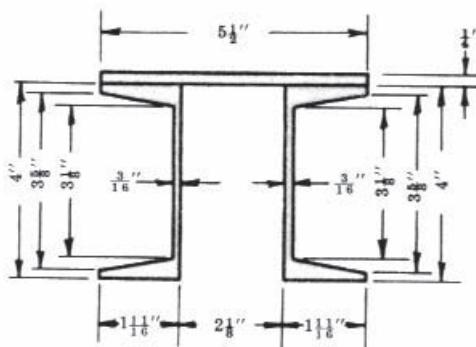


Figura 15.54

**15.48.** ¿Cuál es el momento de inercia polar de un círculo de 80 mm de diámetro respecto al eje perpendicular a su plano que pasa por el centro de gravedad? *Resp.*  $4,02 \times 10^6 \text{ mm}^4$

**15.49.** Calcular el producto de inercia de un rectángulo de 100 mm de base y 80 mm de altura respecto a dos lados adyacentes. *Resp.*  $16 \times 10^6 \text{ mm}^4$

**15.50.** Calcular el producto de inercia de un rectángulo de 150 mm de base y 100 mm de altura respecto a dos lados adyacentes. *Resp.*  $56,3 \times 10^6 \text{ mm}^4$

**15.51.** Hallar los valores de  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_{xy}$  para el área limitada por el eje  $x$ , la recta  $x = a$  y la curva  $y = (b/a^n)x^n$ .

$$\text{Resp. } I_x = ab^3/3(3n + 1), I_y = a^3b/(n + 3), I_{xy} = a^2b^2/2(2n + 2)$$

**15.52.** En el problema anterior, el área es un triángulo cuando  $n = 1$ . Comprobar los valores por integración directa.

$$\text{Resp. } I_x = \frac{1}{12}ab^3, I_y = \frac{1}{4}a^3b, I_{xy} = \frac{1}{8}a^2b^2$$

**15.53.** Hallar los valores de  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_{xy}$  para el área limitada por el eje  $x$ , la recta  $y = b$  y la curva  $y = (b/a^n)x^n$ .

$$\text{Resp. } I_x = nab^3/(3n + 1), I_y = na^3b/3(n + 3), I_{xy} = na^2b^2/4(n + 1)$$

**15.54.** Las figuras de los problemas 15.51 y 15.53 forman un rectángulo cuando se juntan. Sumar los valores de  $I_x$  y comprobar con el Problema 15.1 si así se obtiene el momento de inercia de un rectángulo respecto a su base. Hacer lo mismo para  $I_{xy}$  y comprobar con el Problema 15.16.

**15.55.** En la Figura 15.52, calcular  $I_y$  e  $I_{xy}$ , siendo  $x$  e  $y$  ejes centroidales.

$$\text{Resp. } I_y = 590 \times 10^6 \text{ mm}^4, I_{xy} = 0$$

**15.56.** Hallar  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_{xy}$  para unos ejes  $x$  e  $y$  que pasan por el centroide del perfil angular de alas desiguales de la Figura 15.55.

$$\text{Resp. } I_x = 63,5 \times 10^6 \text{ mm}^4, I_y = 114 \times 10^6 \text{ mm}^4, I_{xy} = -46,9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

**15.57.** En el problema anterior, determinar los momentos de inercia y los ejes principales mediante el círculo de Mohr. Véase la Figura 15.56.

$$\text{Resp. } I_{\max} = 142 \times 10^6 \text{ mm}^4 \text{ a } 30,9^\circ \text{ en sentido horario desde el eje } y, I_{\min} = 35,5 \times 10^6 \text{ mm}^4 \text{ a } 30,9^\circ \text{ en sentido horario desde el eje } x.$$

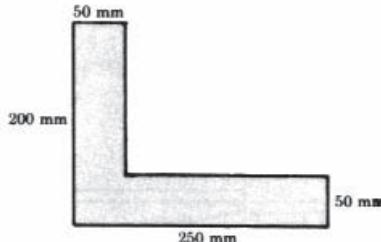


Figura 15.55

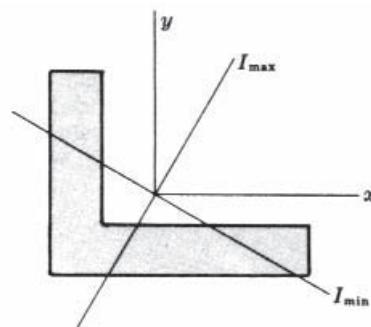


Figura 15.56

**15.58.** Localizar los ejes principales centroidales de la superficie de la Figura 15.57. Después, hallar los valores principales correspondientes.

$$\text{Resp. } I_{\max} = 373 \times 10^6 \text{ mm}^4 \text{ a } 28,8^\circ \text{ en sentido horario desde el eje } y, I_{\min} = 45,0 \times 10^6 \text{ mm}^4 \text{ a } 28,8^\circ \text{ en sentido horario desde el eje } x.$$

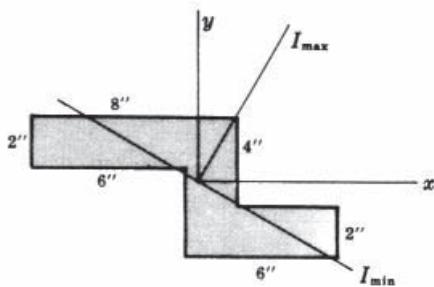


Figura 15.57

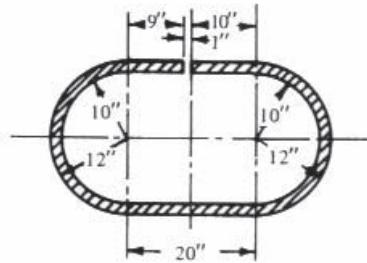


Figura 15.58

**15.59.** Calcular  $\bar{I}_x$  para el área sombreada de la Figura 15.58. *Resp.*  $17.900 \text{ in}^4$

**15.60.** Hallar  $\bar{I}_x$  para el área que resulta de eliminar el cuadrado de lado  $r$  del círculo de radio  $r$  de la Figura 15.59. *Resp.*  $\bar{I}_x = 0,702r^4$

**15.61.** Hallar  $\bar{I}_x$  para el área que resulta de eliminar el círculo de radio 20 mm del cuadrado de lado 80 mm de la Figura 15.60.

$$\text{Resp. } \bar{I}_x = 3,29 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

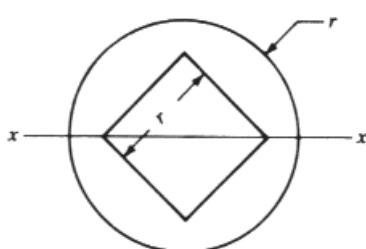


Figura 15.59

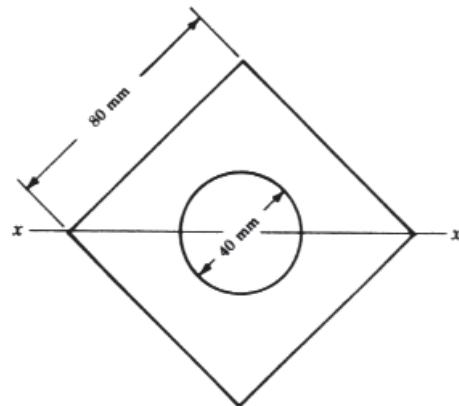


Figura 15.60

**15.62.** Hallar los momentos de inercia del disco elíptico de poco espesor de masa  $m$  de la Figura 15.61. Véase el Problema 15.29.

$$\text{Resp. } I_x = \frac{1}{4}mb^2, I_y = \frac{1}{4}ma^2, I_z = \frac{1}{4}m(a^2 + b^2)$$

**15.63** Hallar los momentos de inercia del elipsoide de revolución de masa  $m$  representado en la Figura 15.62.

$$\text{Resp. } I_x = \frac{2}{5}mb^2, I_y = I_z = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$$

**15.64** Hallar los momentos de inercia del paraboloide de revolución de masa  $m$  representado en la Figura 15.63. La ecuación en el plano  $xy$  es  $y^2 = -(R^2/h^2)x^2 + R^2$ .

$$\text{Resp. } I_x = \frac{2}{5}mR^2, I_y = I_z = \frac{1}{5}m(R^2 + h^2)$$

**15.65.** Demostrar que el momento de inercia respecto a un diámetro de una esfera hueca de poco espesor de masa  $m$  es  $\frac{2}{3}mR^2$ .

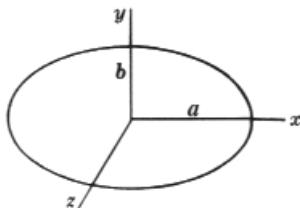


Figura 15.61

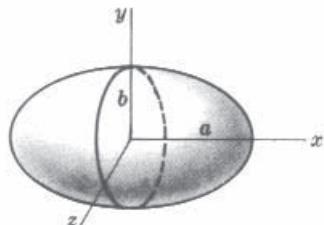


Figura 15.62

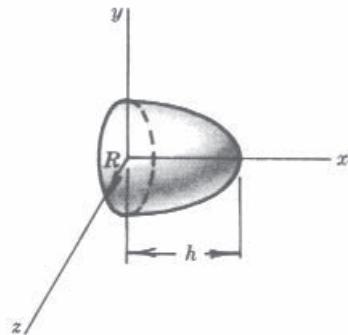


Figura 15.63

- 15.66.** Hallar el momento de inercia respecto a un diámetro de una esfera hueca de masa  $m$  cuyos radios interior y exterior son, respectivamente,  $R_i$  y  $R_o$ .

$$\text{Resp. } I = \frac{2}{5}m(R_o^5 - R_i^5)/(R_o^3 - R_i^3)$$

- 15.67.** Demostrar que el momento de inercia de un cubo de masa  $m$  respecto a un eje centroidal paralelo a una arista es  $I = \frac{1}{6}ma^2$ , donde  $a$  es la longitud de la arista.

- 15.68** Hallar el momento de inercia de una barra de acero de 4 ft de largo y 0,5 in de diámetro respecto a un eje perpendicular a ella que pase por un extremo. El peso específico del acero es 490 lb/ft<sup>3</sup>.  
**Resp.** 0,44 slug·ft<sup>2</sup> o lb·s<sup>2</sup>·ft

- 15.69.** Hallar el momento de inercia de un tubo de acero de 10 ft de largo, 3,50 in de diámetro exterior y 2,89 in de diámetro interior, respecto a su eje longitudinal. El peso específico del acero es 490 lb/ft<sup>3</sup>.

$$\text{Resp. } 0,058 \text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$

- 15.70.** Calcular el momento de inercia de un árbol cilíndrico de latón de 75 mm de diámetro y 3 m de longitud respecto a su eje geométrico de rotación. Tómese una densidad de 8500 kg/m<sup>3</sup>.

$$\text{Resp. } 0,079 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

- 15.71.** En el Problema 15.70, ¿cuál es el momento de inercia másico respecto a un eje (a) centroidal y perpendicular al eje geométrico y (b) perpendicular al eje geométrico que pasa por un extremo?

$$\text{Resp. (a) } 84,5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, (\text{b) } 338 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

- 15.72.** Calcular el momento de inercia de un prisma rectangular de 6 in de altura, 4 in de anchura y 10 in de longitud respecto a su eje centroidal longitudinal. Se supone un peso específico de 40 lb/ft<sup>3</sup>.  
**Resp.** 0,005 slug·ft<sup>2</sup>

- 15.73.** Calcular el momento de inercia de una esfera de aluminio de 200 mm de diámetro respecto a un eje centroidal. La densidad del aluminio es 2560 kg/m<sup>3</sup>.

$$\text{Resp. } 0,043 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

- 15.74.** Hallar el momento de inercia del volante de la Figura 15.64 (ánima llena) respecto a su eje de rotación. El peso específico de la fundición es 450 lb/ft<sup>3</sup>.

$$\text{Resp. } 2,21 \text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$

- 15.75.** Tal como se muestra en la Figura 15.65, un cono de latón está montado sobre un cilindro de aluminio. Siendo de 8500 kg/m<sup>3</sup> la densidad del latón y de 2560 kg/m<sup>3</sup>, la del aluminio, hallar el momento de inercia del conjunto respecto al eje geométrico vertical.

$$\text{Resp. } \bar{I}_y = 3,86 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

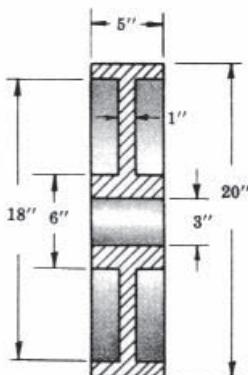


Figura 15.64

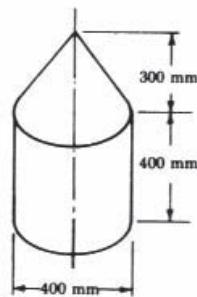


Figura 15.65

- 15.76.** Un árbol y un disco, ambos de acero, son solidarios tal como muestra la Figura 15.66. Siendo de  $7850 \text{ kg/m}^3$  la densidad del acero, hallar el momento de inercia del conjunto respecto al eje y que pasa por el extremo.

*Resp.*  $I_y = 5,38 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

- 15.77.** La Figura 15.67 es el croquis de un cubo de acero de boca abierta cuya pared y base tienen 6 mm de grueso. El recipiente está medio lleno de hormigón. Siendo de  $7850 \text{ kg/m}^3$  la densidad del acero y de  $2400 \text{ kg/m}^3$  la del hormigón, hallar el momento de inercia total respecto al eje centroidal vertical.

*Resp.*  $5,79 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

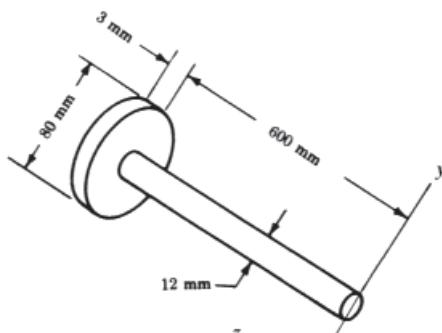


Figura 15.66

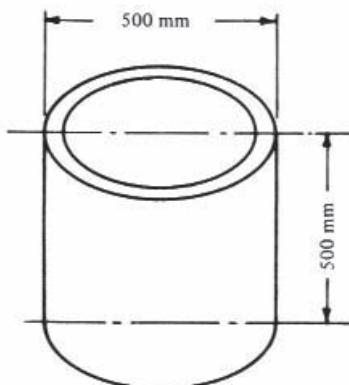


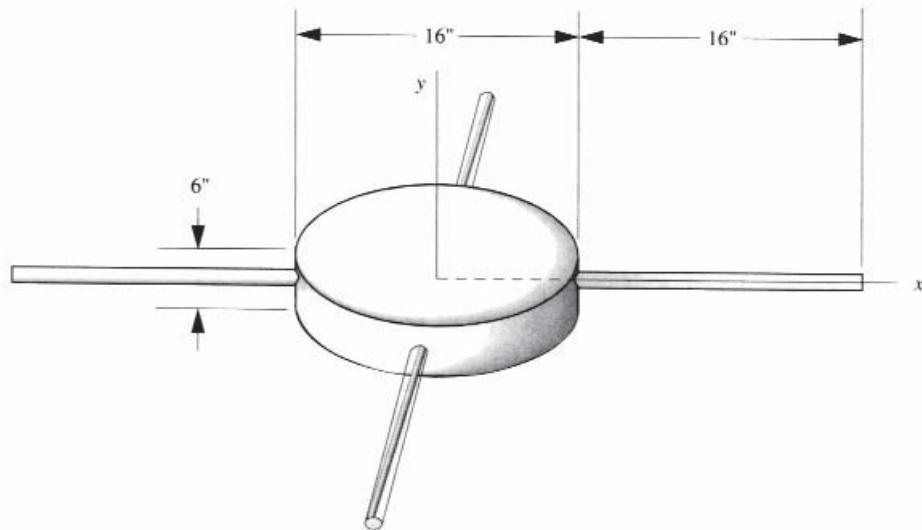
Figura 15.67

- 15.78.** Una esfera homogénea de 10 kg tiene un diámetro de 1 m. A ella están unidas, en puntos diametralmente opuestos y alineados con el diámetro, dos barras esbeltas de 2 kg de masa y 1,5 m de longitud cada una. ¿Cuál es el momento de inercia de las tres masas respecto a un eje centroidal vertical? *Resp.*  $I = 8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

- 15.79.** Un cuerpo en forma de halterio está compuesto de dos esferas macizas de 4 in de diámetro unidas a cada extremo de una barra esbelta de 36 in de longitud. Los tres elementos son de cobre, cuyo peso específico es  $560 \text{ lb/ft}^3$ . ¿Cuál es el momento de inercia másico respecto a un eje perpendicular al centro de la barra? *Resp.*  $2,17 \text{ slug}\cdot\text{ft}^2$

- 15.80.** En la Figura 15.68 se representa la maqueta de un satélite de comunicaciones. A su núcleo están unidos cuatro brazos iguales de 2 lb de peso cada uno, espaciados a  $90^\circ$ , tal como se muestra. El núcleo pesa 342 lb. ¿Cuál es el momento de inercia másico respecto al eje centroidal y?

*Resp.*  $I_y = 2,84 \text{ slug}\cdot\text{ft}^2$



**Figura 15.68**

- 15.81.** En el Problema 15.80, ¿cuál es el momento de inercia másico respecto al eje centroidal  $x$ ?

*Resp.*    1,64 slug·ft<sup>2</sup>

# DINÁMICA DE UN CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO

# 16

## 16.1 ECUACIONES VECTORIALES DEL MOVIMIENTO PLANO

En la Sección 14.1, el movimiento plano de un cuerpo rígido se definió como el movimiento que ejecuta un cuerpo rígido cuando todos sus puntos mantienen una distancia constante a un plano fijo. En el caso de la cinética de un cuerpo rígido, imponemos una condición adicional, consistente en que el cuerpo debe poseer un plano de simetría. Esto es más restrictivo que necesario, pero simplifica, y mucho, la ecuación de momentos.

Las ecuaciones vectoriales del movimiento plano pueden escribirse

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} &= m\bar{\mathbf{a}} \\ \sum \mathbf{M}_o &= I_o \alpha \mathbf{k} + m \mathbf{r}_{G/O} \times \mathbf{a}_o = (I_o \alpha + m\bar{x}a_{oy} - m\bar{y}a_{ox}) \mathbf{k}\end{aligned}$$

donde  $\sum \mathbf{F}$  = resultante de las fuerzas externas actuantes sobre el cuerpo

$\sum \mathbf{M}_o$  = resultante de los momentos externos actuantes sobre el cuerpo

$m$  = masa del cuerpo

$\bar{\mathbf{a}}$  = aceleración del centro de masas del cuerpo

$\mathbf{a}_o$  = aceleración del punto de referencia  $O$

$\alpha$  = aceleración angular del cuerpo

$I_o$  = momento de inercia del cuerpo respecto al punto de referencia  $O$

$\bar{x}, \bar{y}$  = coordenadas del centro de masas respecto al punto de referencia  $O$

$\mathbf{r}_{G/O}$  = vector de posición del centro de masas respecto al punto de referencia  $O$

$a_{ox}, a_{oy}$  = módulos de las componentes de la aceleración del punto de referencia  $O$  según los ejes  $x$  e  $y$

Las ecuaciones anteriores se suponen escritas para un sistema de coordenadas directo. Ello significa que, si la derecha se toma como sentido positivo de los ejes  $x$  e  $y$ , como rotación positiva debe tomarse la de sentido antihorario por coherencia con la regla de la mano derecha. En el Problema 16.1 se ilustra esta cuestión.

## 16.2 ECUACIONES ESCALARES DEL MOVIMIENTO PLANO

La ecuación de momentos de la sección anterior puede simplificarse eligiendo adecuadamente el punto de referencia  $O$ . Una posibilidad es que  $O$  sea el centro de masas, con lo que  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  serán cero.

De esta manera, las ecuaciones escalares del movimiento plano son

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \quad \sum F_y = m\bar{a}_y \quad \sum \bar{M} = \bar{I}\alpha$$

donde  $\sum F_x, \sum F_y$  = sumas algebraicas de los módulos de las componentes de las fuerzas externas según los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente.

$m$  = masa del cuerpo

$\bar{a}_x, \bar{a}_y$  = componentes de la aceleración lineal del centro de masas en las direcciones  $x$  e  $y$ , respectivamente

$\sum \bar{M}$  = suma algebraica de los momentos de las fuerzas externas respecto al centro de masas

$\bar{I}$  = momento de inercia del cuerpo respecto al centro de masas.

$\alpha$  = módulo de la aceleración angular del cuerpo

Nótese que la ecuación de momentos puede también escribirse  $\sum M_O = I_O\alpha$  siempre que la aceleración del punto  $O$  sea nula o bien esté dirigida hacia el centro de masas del cuerpo.

Nótese asimismo que la componente de una fuerza que actúe en la misma dirección y sentido que el tomado como positivo para la aceleración del centro de masas se considera positiva (y negativa si su sentido es el contrario).

Análogamente, los momentos de las fuerzas se consideran positivos si tienen el mismo sentido que el asignado a la aceleración angular  $\alpha$ .

Veremos más adelante que la traslación y la rotación son casos particulares del movimiento plano.

### 16.3 REPRESENTACIÓN INTERPRETATIVA DE LAS ECUACIONES

Para recalcar el hecho de que el movimiento plano es una combinación de traslación y rotación puede emplearse una representación interpretativa. La ilustración de la Figura 16.1 muestra un objeto con todas las fuerzas actuantes sobre él igualado al mismo objeto con la fuerzas efectivas  $m\bar{a}$  y con el momento  $\bar{I}\alpha$  de las fuerzas efectivas. Es evidente que  $\sum F_x = m\bar{a}_x$ ,  $\sum F_y = m\bar{a}_y$  y  $\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha$ . Téngase presente que los momentos se toman respecto al centro de masas  $G$ .

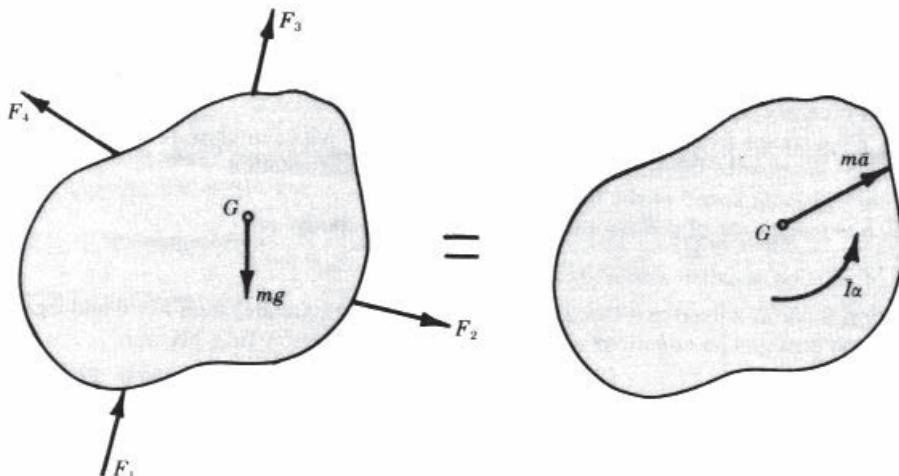


Figura 16.1

### 16.4 TRASLACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO

Por definición, se dice que un cuerpo rígido está en movimiento de traslación cuando todas las partículas del cuerpo tiene la misma aceleración. Entonces, las ecuaciones escalares de la Sección 16.2 quedan

$$\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y \quad \sum \bar{M} = 0$$

donde  $\sum F_x, \sum F_y$  = sumas algebraicas de los módulos de las componentes de las fuerzas externas según los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente.

$m$  = masa del cuerpo

$a_x, a_y$  = componentes de la aceleración del cuerpo en las direcciones  $x$  e  $y$ , respectivamente

$\sum \bar{M}$  = suma de los momentos de las fuerzas externas respecto al centro de masas del cuerpo

## 16.5 ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO

Por definición, se dice que un cuerpo rígido está en movimiento de rotación alrededor de un eje fijo cuando todas las partículas del eje fijo están en reposo y todas las demás partículas del cuerpo describen círculos cuyos centros están en el eje de rotación.

- (a) Si un cuerpo rígido posee un plano de simetría y gira en torno a un eje perpendicular a ese plano, según la Sección 16.2 las ecuaciones escalares de movimiento del cuerpo bajo la acción de un sistema de fuerzas no en equilibrio serán

$$\begin{aligned}\sum F_n &= m\bar{r}\omega^2 \\ \sum F_t &= m\bar{r}\alpha \\ \sum M_O &= I_O\alpha\end{aligned}$$

donde  $\Sigma F_n$  = suma algebraica de las componentes de todas las fuerzas externas (que son las fuerzas aplicadas  $F_1, F_2, F_3$ , etc., la fuerza gravitatoria sobre el cuerpo, y la reacción  $R$  del eje sobre el cuerpo) en la dirección del eje  $n$ , definido por el centro de rotación  $O$  y el centro de masas; nótese que el sentido positivo va de  $G$  a  $O$ , pues es el sentido de  $\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$ .

$\Sigma F_t$  = suma algebraica de las componentes de las fuerzas externas en la dirección del eje  $t$ , que es perpendicular en  $O$  al eje  $n$ ; nótese que el sentido positivo de este eje es el de  $\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$ .

$\Sigma M_O$  = suma algebraica de los momentos de las fuerzas externas respecto al eje de rotación que pasa por  $O$ ; nótese que su sentido positivo es el mismo que el asumido para la aceleración angular  $\alpha$ .

$m$  = masa del cuerpo.

$G$  = centro de masas del cuerpo

$\bar{r}$  = distancia del centro de rotación  $O$  al centro de masas  $G$ .

$I_O$  = momento de inercia del cuerpo respecto al eje de rotación.

$\omega$  = celeridad angular del cuerpo.

$\alpha$  = aceleración angular del cuerpo.

Este tipo de rotación se conoce como *rotación no centroidal*.

- (b) Si la rotación tiene lugar alrededor de un eje que pasa por  $G$  (o sea, si coinciden  $G$  y  $O$ ) será  $F = 0$  y los momentos se toman respecto al centro de masas. Entonces, también según la Sección 16.2, las ecuaciones de movimiento quedan

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum \bar{M} = \bar{I}\alpha$$

donde  $\Sigma F_x$  = suma algebraica de las componentes de las fuerzas externas según el eje elegido como eje  $x$

$\Sigma F_y$  = suma algebraica de las componentes de las fuerzas externas según el eje  $y$

$\sum \bar{M}$  = suma algebraica de los momentos de las fuerzas externas respecto al eje de rotación que pasa por el centro de masas  $G$  (eje de simetría)

$\bar{I}$  = momento de inercia del cuerpo respecto al eje de rotación que pasa por el centro de masas  $G$

$\alpha$  = módulo de la aceleración angular del cuerpo

Este tipo de rotación se conoce como *rotación centroidal*.

## 16.6 CENTRO DE PERCUSIÓN

El centro de percusión es el punto  $P$  del eje  $n$  de la Figura 16.2 por el que pasa la resultante de las fuerzas efectivas. Se encuentra a una distancia  $q$  del centro de rotación  $O$  dada por

$$q = k_O^2 / \bar{r}$$

donde  $k_O^2 =$  cuadrado del radio de giro del cuerpo respecto al eje de rotación que pasa por  $O$ ; nótese que  $k_O^2 = I_O / m$ , siendo  $I_O$  el momento de inercia másico del cuerpo respecto a  $O$  y  $m$  su masa total.

$\bar{r} =$  distancia del centro de rotación  $O$  al centro de masas  $G$ .

## 16.7 MÉTODO DE LAS FUERZAS DE INERCIA PARA CUERPOS RÍGIDOS

En el Capítulo 13, se aplicó el principio de D'Alambert al movimiento de las *partículas*. Igualmente es posible aplicarlo al movimiento de los *cuerpos rígidos*. En este caso, al cuerpo no sólo debe aplicarse en su centro de masas una fuerza igual y opuesta a  $m\bar{a}$ , sino que también debe aplicarse al cuerpo libre un par igual y opuesto a  $\bar{I}\alpha$ . En consecuencia, en la Figura 16.3, la fuerza efectiva cambiada de signo, o *fuerza de inercia*, y el par efectivo cambiado de signo, o *par de inercia*, equilibran las fuerzas y pares externos. Por tanto,

$$\sum \mathbf{F} - m\bar{\mathbf{a}} = 0 \quad \sum \mathbf{M} - I\alpha \mathbf{k} = 0$$

La ventaja del método de las fuerzas de inercia, basado en el principio de D'Alambert, es que convierte un problema de dinámica en un problema de equilibrio equivalente. Ello permite tomar momentos respecto al eje que mejor convenga y no sólo respecto a ejes centroidales.

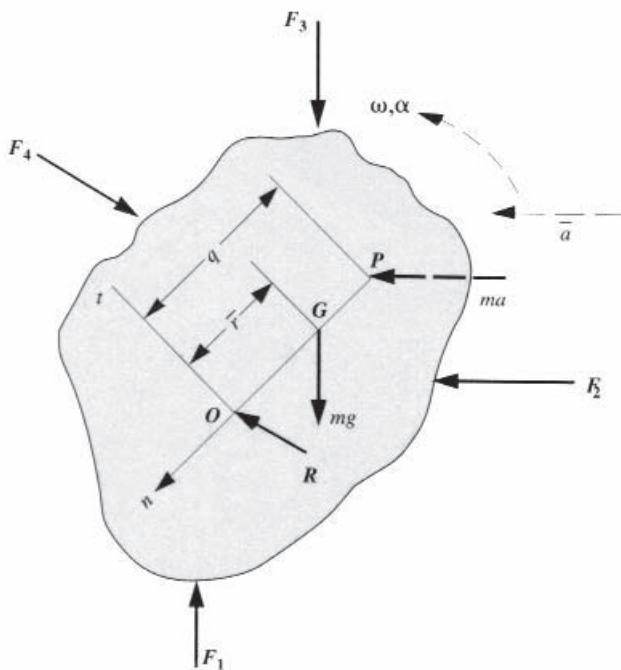


Figura 16.2

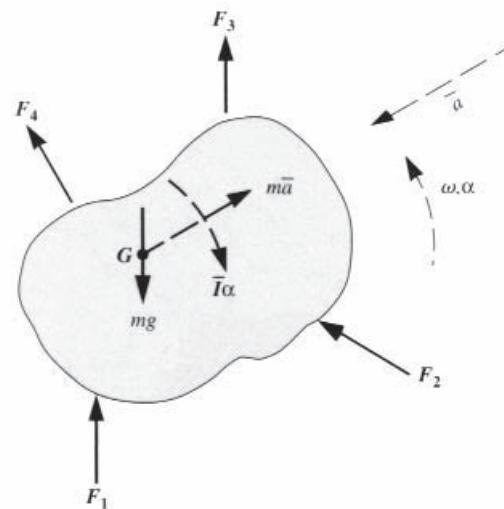


Figura 16.3

### Problemas resueltos

En los diagramas los vectores se designan por sus módulos cuando sus direcciones son evidentes por inspección

## movimiento plano general

- 16.1.** Un aro de masa despreciable con tres pequeñas masas solidarias [Figura 16.4(a)] se coloca sobre un plano horizontal. ¿Cuál es su aceleración angular en el instante inmediato? Se supone que no hay velocidad angular y que el rozamiento es suficiente para que no haya deslizamiento.

### SOLUCIÓN

En el diagrama de cuerpo libre de la Figura 16.4(b) se representan las reacciones del plano (una fuerza normal  $N$  y una componente de rozamiento  $F$ ). Se incluyen unos ejes no giratorios con origen en el centro geométrico  $O$  del anillo. La fuerza gravitatoria total, que actúa en el centro de masas de  $G$  de las tres masas, es  $4mg$ . Adviéntase que las coordenadas de  $G$  son

$$\bar{x} = \frac{mg(-r) + mg(0) + 2mg(0,866r)}{4mg} = 0,183r$$

$$\bar{y} = \frac{mg(0) + mg(-r) + 2mg(0,5r)}{4mg} = 0$$

Como se supone ausencia de deslizamiento, las componentes de la aceleración del centro geométrico serán

$$a_{Ox} = r\alpha \quad y \quad a_{Oy} = 0$$

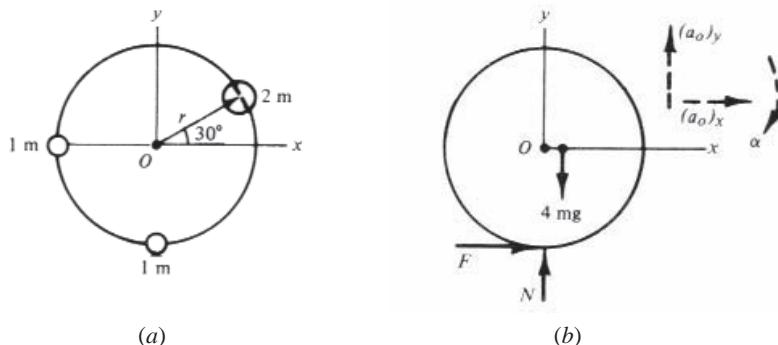


Figura 16.4

Por coherencia con el sentido de  $a_O$ , que en la Figura 16.4(b) se representa actuando hacia la derecha,  $\alpha$  debe representarse actuando en sentido horario. La ecuación de momentos dada en forma vectorial en la Sección 16.1, en forma escalar queda

$$\sum M_O = I_O \alpha + m\bar{x}(a_O) - m\bar{y}(a_O)$$

Esta ecuación está referida a un sistema de ejes directo, con  $\alpha$  positiva en sentido antihorario. Al emplear la ecuación, hay que sustituir  $\alpha$  por  $-\alpha$  porque  $\alpha$  se supone horaria.

Empleando el diagrama de cuerpo libre, las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_x = m\bar{a}_{Ox} \quad \text{o bien,} \quad F = 4mr\alpha$$

$$\sum F_y = m\bar{a}_{Oy} \quad \text{o bien,} \quad N - 4mg = 0$$

La ecuación de momentos queda

$$+Fr - 4mg(+0,183r) = 4mr^2(-\alpha) + 4m(+0,183r)(0) - 4m(0)r\alpha$$

Con  $F = 4mr\alpha$ , la ecuación de momentos se transforma en

$$(4mr\alpha)r - 0,732mgr = -4mr^2\alpha$$

Así pues,  $\alpha = (0,0915g/r)$  rad/s<sup>2</sup>. Si 32,2 ft/s<sup>2</sup>, resulta  $\alpha = (2,95/r)$  rad/s<sup>2</sup>.

- 16.2.** Una rueda de 600 lb de peso y 30 in de diámetro rueda hacia abajo por un plano inclinado  $25^\circ$  sobre la horizontal. Hallar la fuerza de rozamiento  $F$  y la aceleración del centro de masas.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 16.5 se representa el sistema de fuerzas actuantes sobre la rueda.

Suele experimentarse una considerable dificultad para especificar el sentido de la fuerza de rozamiento  $F$ . (El valor algebraico de  $F$  está comprendido entre  $-\mu N$  y  $\mu N$ .) En este caso, el rozamiento debe actuar plano arriba; de lo contrario, la rueda resbalaría plano abajo. Además, la de rozamiento es la única fuerza que posee momento respecto al centro de masas y, por consiguiente, es la fuerza causante de la aceleración angular ( $\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha$ ).

Tomamos el eje  $x$  paralelo al plano, con el sentido positivo hacia abajo. El eje  $y$  es positivo hacia arriba. Para una masa  $m = 600/32,2 = 18,6 \text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft}$ , o slugs, el momento de inercia es

$$\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(18,6 \text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft})(15/12 \text{ ft})^2 = 14,5 \text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft} \text{ o } \text{slug}\cdot\text{ft}^2$$

Las unidades anteriores son de uso común en los textos de ingeniería.

Las ecuaciones de movimiento son (1)  $\sum F_x = m\bar{a}_x$ , (2)  $\sum F_y = m\bar{a}_y$ , (3)  $\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha$ . Sustituyendo valores, esas ecuaciones quedan

$$600 \sin 25^\circ - F = 18,6 \bar{a}_x \quad (1')$$

$$N - 600 \cos 25^\circ = 18,6 \bar{a}_y = 0 \quad (2')$$

$$F(15/12) = 14,5\alpha \quad (3')$$

En estas tres ecuaciones intervienen cuatro incógnitas; por tanto, hace falta otra ecuación donde aparezca al menos una incógnita. Como se trata de un caso de rodadura, empleamos  $\bar{a}_x = r\alpha = (15/12)\alpha$ .

Sustituyendo  $\alpha = \frac{4}{5}\bar{a}_x$  en la ecuación (3'), se obtiene  $F = 9,27\bar{a}_x$ .

Sustituyendo  $F = 9,27\bar{a}_x$  en la ecuación (1'), se obtiene  $\bar{a}_x = 9,19 \text{ ft/s}^2$ . Luego  $F = 84,3 \text{ lb}$ .

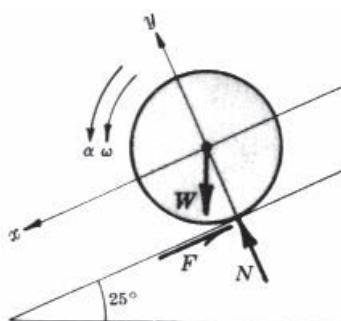


Figura 16.5

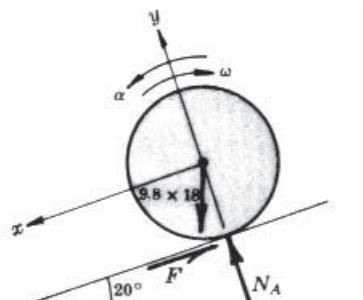


Figura 16.6

- 16.3.** En cierto instante, el centro de una rueda de 18 kg de masa y 600 mm de diámetro sube por un plano inclinado  $30^\circ$  sobre la horizontal con una celeridad de 3 m/s (Figura 16.6). ¿Cuánto tardará en llegar al punto más alto de su recorrido?

#### SOLUCIÓN

En el diagrama de cuerpo libre se muestra el rozamiento  $F$  actuando plano arriba. Aquí, como en el Problema 16.2, la de rozamiento es la única fuerza que posee momento respecto al centro de masas y, por consiguiente, es la causa de la aceleración angular, la cual debe ser antihoraria. Nótese que la velocidad angular  $\omega$  es horaria hasta que la rueda se para en su punto más alto. Desde luego, al descender,  $\alpha$  y  $\omega$  tienen el mismo sentido, que es el antihorario.

Las ecuaciones de movimiento son (1)  $\sum F_x = m\bar{a}_x$ , (2)  $\sum F_y = m\bar{a}_y$ , (3)  $\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha$ .

Sustituyendo valores se obtienen las ecuaciones siguientes (se supone que la rueda es un disco, con lo que  $\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2$ ):

$$9,8 \times 18 \sin 20^\circ - F = 18\bar{a}_x \quad (1')$$

$$N_A - 9,8 \times 18 \cos 20^\circ = 18\bar{a}_y = 0 \quad (2')$$

$$F \times 0,3 = \frac{1}{2} 18(0,3)^2 \alpha \quad (3')$$

Como en el Problema 16.1,  $\bar{a}_x = r\alpha = 0,3\alpha$ .

De (3'),  $F = 9\bar{a}_x$ . Sustituyendo en (1'), se obtiene  $\bar{a}_x = 2,23 \text{ m/s}^2$ . Como  $\bar{a}_x$  es positiva, está dirigida plano abajo.

Para hallar el tiempo que tarda en detenerse, es decir, en llegar al punto más alto desde la celeridad inicial de 3 m/s, se aplica la ecuación de la cinemática  $v = v_0 + at$ .

Téngase presente que el sentido hacia abajo es positivo. La celeridad final  $v$  es cero, la celeridad inicial apunta plano arriba, luego su valor algebraico es  $-3 \text{ m/s}$ . La aceleración  $\bar{a}_x$  apunta plano abajo y, por tanto, es  $+2,23 \text{ m/s}^2$ .

Luego, con  $v = v_0 + at$ ,  $0 = -3 + 2,23t$ , y  $t = 1,35 \text{ s}$ .

- 16.4.** Estudiar el movimiento de un cilindro homogéneo de radio  $R$  y masa  $m$  sobre el que actúa una fuerza horizontal  $P$  aplicada en distintos puntos de un diámetro vertical, tal como se muestra en la Figura 16.7. El movimiento se supone sobre un plano horizontal.

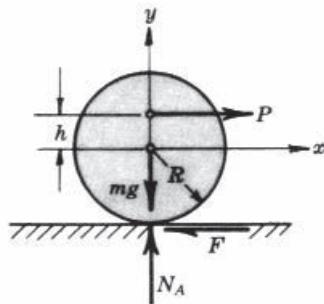


Figura 16.7

#### SOLUCIÓN

En el diagrama de cuerpo libre se representa la fuerza  $P$  aplicada a una distancia  $h$  por encima del centro.

Se supone que  $F$  actúa hacia la izquierda. Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_x = P - F = m\bar{a}_x \quad (1)$$

$$\sum F_y = N_A - mg = 0 \quad (2)$$

$$\sum M = P \times h + F \times R = \frac{1}{2} mR^2 \alpha \quad (3)$$

Adviértase que  $P$  debe ser mayor que  $F$  para que el movimiento se produzca hacia la derecha. ¿Es posible que haya movimiento si es nula la fuerza de rozamiento  $F$ ?

Sustituyendo  $\bar{a}_x = R\alpha$  en (3), resulta

$$P \times h + F \times R = \frac{1}{2} mR\bar{a}_x \quad (3')$$

Al dividir por  $\frac{1}{2} R$  la ecuación (3'), resulta

$$\frac{2Ph}{R} + 2F = m\bar{a}_x \quad (3'')$$

Igualando los primeros miembros de (3'') y (1):  $2Ph/R + 2F = P - F$ , o sea,  $3F = P(1 - 2h/R)$ .

Es evidente que  $F$  será cero si  $(1 - 2h/R)$  es cero, es decir, si  $h = \frac{1}{2} R$ . Así pues, si la fuerza  $P$  está aplicada en el centro del radio por encima del centro, la fuerza de rozamiento  $F$  es nula.

Nótese también que si  $h = R$ , la ecuación queda  $3F = P(1 - 2R/R) = -P$ . El rozamiento cambia de sentido y actúa entonces hacia la derecha. Con  $F = \frac{1}{3}P$ , la ecuación (3) queda, para el caso en que  $h = R$ ,

$$PR - \frac{1}{3}PR = \frac{1}{2}mR^2\alpha \quad \text{o} \quad \frac{2}{3}P = \frac{1}{2}mR\alpha$$

Esto indica que  $\alpha$  es positiva o que el cilindro rueda hacia la derecha.

Supongamos seguidamente que  $h$  va disminuyendo hasta que  $P$  está aplicada en el centro de masas, donde  $h$  es cero. En estas condiciones,  $3F = P[1 - (2H0)] = P$ .

Naturalmente, en cualquier punto de la discusión anterior, si  $P$  crece demasiado,  $F$  tiende a aumentar. En cuanto se rebasa el máximo valor posible de la fuerza de rozamiento, el cilindro se desliza. Entonces debe hacerse una hipótesis nueva, consistente en que la fuerza de rozamiento  $F$  ya debe ser igual al producto del coeficiente de rozamiento por la fuerza normal  $N$ . Entonces, las ecuaciones de movimiento serán

$$\sum F_x = P - \mu N_A = m\bar{a}_x \quad (4)$$

$$\sum F_y = N_A - mg = 0 \quad (5)$$

$$\sum \bar{M} = Ph + \mu N_A R = \frac{1}{2}mR^2\alpha \quad (6)$$

Estas ecuaciones revelan la existencia tanto de deslizamiento (aceleración lineal  $\bar{a}_x$ ) como de rodadura (aceleración angular  $\alpha$ ). Cfr. Problemas 16.6 y 16.22.

- 16.5.** Una esfera homogénea de masa 20 kg tiene una garganta equatorial, tal como se muestra en la Figura 16.8. Sobre una hilo arrollado en la garganta se ejerce una fuerza de 40 N. Si la esfera rueda sin deslizar, hallar la aceleración de su centro de masas y la fuerza de rozamiento  $F$ . Se desprecia el efecto de la garganta.

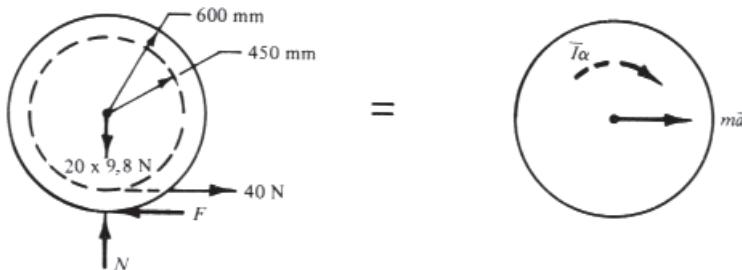


Figura 16.8

#### SOLUCIÓN

Suponemos rodadura hacia la derecha. Así, la aceleración angular será antihoraria y la aceleración del centro de masas estará dirigida hacia la derecha.

Suponiendo que el rozamiento actúe hacia la izquierda, las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F = m\bar{a} \quad \text{o} \quad 40 - F = 20\bar{a} \quad (1)$$

$$\sum M = I\alpha \quad \text{o} \quad F \times 0,6 - 40 \times 0,45 = \frac{2}{50}(20)(0,6)^2\alpha \quad (2)$$

Como  $\bar{a} = 0,6\alpha$ , la segunda ecuación puede reescribirse

$$F \times 0,6 - 40 \times 0,45 = 4,8\bar{a}$$

Al combinar esta ecuación con la (1), se obtiene

$$\bar{a} = 0,37 \text{ m/s}^2 \quad \text{y} \quad F = 7,14 \text{ N (hacia la izquierda, según la hipótesis)}$$

- 16.6.** El coeficiente de rozamiento entre un plano y una esfera homogénea de peso 16,1 lb es 0,10. Hallar su aceleración angular y la aceleración lineal de su centro de masas.

#### SOLUCIÓN

Se dibuja un diagrama de cuerpo libre (Figura 16.9) donde la fuerza de rozamiento aparece como incógnita. Al comienzo, no se sabe si la esfera desliza o no; por consiguiente, se halla  $F$  para saber si es mayor que

$\mu N$ , o sea,  $0,10N$ . Si es mayor, ello significa que no se dispone de rozamiento suficiente y que hay rodadura y deslizamiento a la vez.

Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F = ma \quad \text{o sea,} \quad 16,1 \sin 30^\circ - F = \frac{16,1}{32,2} \bar{a} \quad (1)$$

$$\sum M = I\alpha \quad \text{o sea,} \quad F \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \left( \frac{16,1}{32,2} \right) \left( \frac{1}{2} \right)^2 \alpha \quad (2)$$

Adviértase que  $\alpha$  se supone antihoraria; por tanto,  $\bar{a}$  debe ser positiva plano abajo. Además,  $\bar{a} = r\alpha = \frac{1}{2}\alpha$ .

De (1),  $8,05 - F = \frac{1}{2}\bar{a}$ ; de (2),  $F = \frac{1}{5}\bar{a}$ . Por tanto,  $\bar{a} = 11,5 \text{ ft/s}^2$  y  $F = 2,30 \text{ lb}$ .

Por inspección,  $N = 16,1 \cos 30^\circ = 13,9 \text{ lb}$ . La fuerza de rozamiento máxima disponible es  $\mu N = 0,10(13,9) = 1,39 \text{ lb}$ . Pero la fuerza  $F$  necesaria para impedir el deslizamiento (o causar la rodadura) es de  $2,30 \text{ lb}$ . Esto significa que hay que resolver de nuevo el problema empleando el máximo rozamiento disponible, es decir, con  $1,39 \text{ lb}$  como valor de  $F$ . Ya no es válida la relación  $\bar{a} = r\alpha$ . Incidentalmente, estamos admitiendo que los coeficientes de rozamiento estático y dinámico son iguales.

En la Figura 16.10 se representa el nuevo diagrama de cuerpo libre. Las ecuaciones de movimiento son

$$16,1 \sin 30^\circ - 1,39 = \left( \frac{16,1}{32,2} \right) \bar{a} \quad (3)$$

$$1,39 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \left( \frac{16,1}{32,2} \right) \left( \frac{1}{2} \right)^2 \alpha \quad (4)$$

Por tanto,  $\bar{a} = 13,3 \text{ ft/s}^2$  y  $a = 13,9 \text{ rad/s}^2$ . La esfera rueda y se desliza a la vez.

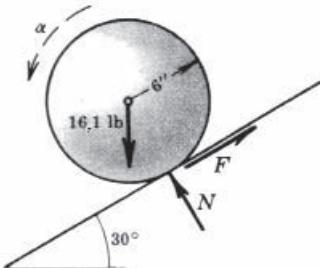


Figura 16.9

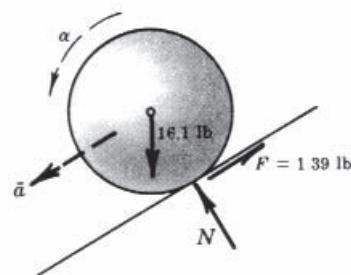


Figura 16.10

- 16.7** El cable pasa por una polea sin masa y sin rozamiento, tal como se muestra en la Figura 16.11(a), sujetando una masa  $M_1$  por un extremo y arrollado en torno a un cilindro de masa  $M_2$  que rueda sobre un plano horizontal. ¿Cuál es la aceleración de la masa  $M_1$ ?

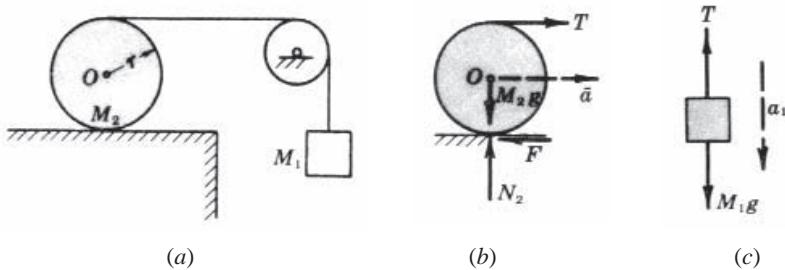


Figura 16.11

### SOLUCIÓN

En las Figuras 16(b) y (c) se representan los diagramas de cuerpo libre. Adviértase que el módulo de la aceleración  $a_1$  de  $M_1$  no es igual al de la aceleración  $\bar{a}$  del centro de gravedad del cilindro.

Las ecuaciones (1) y (2) se refieren al cilindro y la ecuación (3) a la masa  $M_1$ :

$$\sum F_h = m\bar{a} \quad \text{o sea, } T - F = M_2\bar{a} \quad (1)$$

$$\sum M_o = \bar{I}\alpha \quad \text{o sea, } (F + T)r = \frac{1}{2}M_2r^2\alpha \quad (2)$$

$$\sum F_i = ma_i \quad \text{o sea, } M_1g - T = M_1a_1 \quad (3)$$

Si en (2) se sustituye  $\alpha$  por  $\bar{a}/r$  y se dividen ambos miembros por  $r$ , se obtiene

$$F + T = \frac{1}{2}M_2\bar{a} \quad (4)$$

Ahora, sumando (4) y (1), resulta

$$T = \frac{3}{4}M_2\bar{a} \quad (5)$$

Ésta podría resolverse conjuntamente con la ecuación (3) si se obtiene la relación entre  $\bar{a}$  y  $a_1$ . La componente horizontal de la aceleración del punto más alto del cilindro es igual a la suma de la aceleración  $\bar{a}$  del centro más el producto  $r\alpha$ . En este caso, suponiendo rodadura pura,  $r\alpha$  es igual a  $\bar{a}$  por consideraciones cinemáticas. Por tanto, la aceleración del punto más alto, que es la misma que la aceleración  $a_1$  de la masa  $M_1$ , es  $\bar{a} + r\alpha = 2\bar{a}$ .

De (5),  $T = \frac{3}{4}M_2(\frac{1}{2}a_1)$ . Sustituyendo en (3) y despejando,  $a_1 = M_1g/(M_1 + \frac{3}{8}M_2)$ .

- 16.8.** De una rueda acanalada como la representada en la Figura 16.12(a) se tira, para hacerla subir por una guía inclinada  $30^\circ$  sobre la horizontal, con una cuerda que pasa por una polea y de la que cuelga un peso de 80 lb. La rueda pesa 100 lb y su momento de inercia  $I$  vale 4 slug·ft $^2$ . ¿Cuánto tardará la masa en adquirir desde el reposo una celeridad de 20 ft/s?

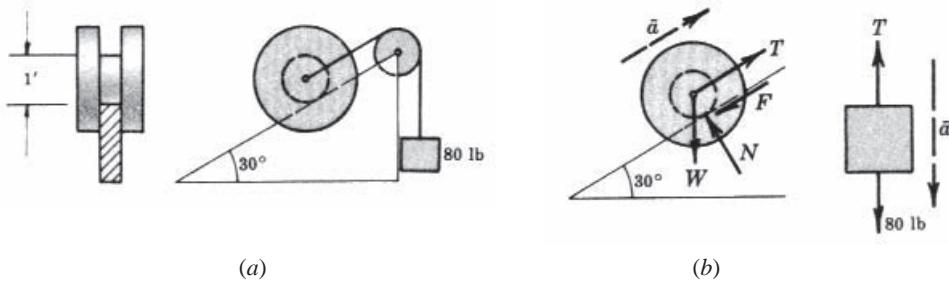


Figura 16.12

#### SOLUCIÓN

En la Figura 16.12(b) se representan los diagramas de cuerpo libre de la rueda y el peso. Téngase en cuenta que la tensión  $T$  de la cuerda no es 80 lb, porque el peso está acelerado.

Las ecuaciones aplicables al peso y a la rueda son

$$\sum F_{\text{peso}} = 80 - T = \frac{80}{32,2} \bar{a} \quad (1)$$

$$\sum F_{\text{rueda}} = T - F - 100 \sin 30^\circ = \frac{100}{32,2} \bar{a} \quad (2)$$

$$\sum \bar{M} = F \times \frac{1}{2} = 4\alpha \quad (3)$$

Como  $\bar{a} = r\alpha = \frac{1}{2}\alpha$ , la ecuación (3) puede escribirse  $F \times \frac{1}{2} = 4 \times 2\bar{a} = 8\bar{a}$  o  $F = 16\bar{a}$ .

Introduciendo  $F + T = \frac{1}{2}M_2\bar{a}$  en (2), resulta  $T - 16\bar{a} - 100 \times 0,500 = (100/32,2)\bar{a}$  o  $T = 19,1\bar{a} + 50$ .

Introduciendo  $T = 19,1\bar{a} + 50$  en (1), resulta  $80 - 19,1\bar{a} - 50 = 2,48\bar{a}$  o  $\bar{a} = 1,39 \text{ ft/s}^2$ .

Para calcular tiempo necesario para alcanzar desde el reposo una celeridad de 20 ft/s, se aplica la ecuación de la cinemática

$$v = v_0 + \bar{a}t \quad 20 = 0 + 1,39t \quad t = 14,4 \text{ s}$$

- 16.9.** Suponiendo que la polea de la Figura 16.13(a) carece de masa y rozamientos, hallar el menor coeficiente de rozamiento estático capaz de hacer que ruede el cilindro. Para éste,  $M = 70 \text{ kg}$  y  $k_o = 400 \text{ mm}$ .

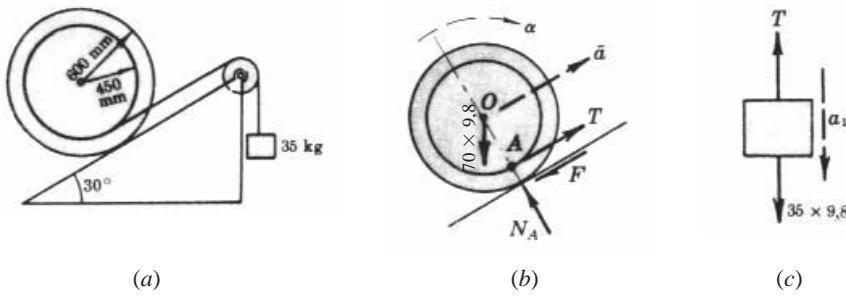


Figura 16.13

**SOLUCIÓN**

Se dibujan los diagramas de cuerpo libre del cilindro y el peso que se muestran en las Figuras 16.13(b) y (c). Suponemos que el cilindro rueda plano arriba. Como se impone que la rodadura sea pura, es aplicable la relación  $\bar{a} = r\alpha$ . (La aceleración  $\mathbf{a}_1$  tiene el mismo módulo que la componente paralela al plano de la aceleración absoluta del punto A.) Por consideraciones cinemáticas,  $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{AO} + \bar{\mathbf{a}}$ . Limitándonos sólo a las componentes paralelas al plano, la componente de  $a_{AO} = OA \times \alpha = 0,45\alpha$  está dirigida plano abajo ya que  $\alpha$  es horaria, mientras que  $\bar{a}$  vale  $0,6\alpha$  y está dirigida plano arriba. Por tanto,  $a_1 = 0,15\alpha$  plano arriba.

Ya podemos escribir las ecuaciones de movimiento. El momento de inercia del cilindro es  $\bar{I} = mk_o^2 = 11,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

$$\sum F = ma_1 \quad \text{o sea,} \quad 35 \times 9,8 - T = 35a_1 \quad (1)$$

$$\sum F = m\bar{a} \quad \text{o sea,} \quad T - F - 70 \times 9,8 \sin 30^\circ = 70\bar{a} \quad (2)$$

$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \quad \text{o sea,} \quad F \times 0,6 - T \times 0,45 = 11,2\alpha \quad (3)$$

Pero  $\bar{a} = 0,6\alpha$  y  $a_1 = 0,15\alpha$ , tal como hemos visto. Eliminando  $F$  entre (2) y (3) se obtiene  $0,25T - 686 \times 0,5 = 60,67\alpha$ . Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por esta última y la (1) se halla  $\alpha = -4,15 \text{ rad/s}^2$  y  $T = 365 \text{ N}$ .

Por tanto,  $F = 196 \text{ N}$ . Por inspección,  $N_A = 70 \times 9,8 \cos 30^\circ = 594 \text{ N}$ . Así pues, el coeficiente de rozamiento requerido es  $\mu = 196/594 = 0,33$ .

Adviértase que el cilindro rueda hacia abajo y que la masa de 35 kg sube.

- 16.10.** En la Figura 16.14, la esfera homogénea de 200 kg rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. Hallar la aceleración del centro de masas y la fuerza de rozamiento necesaria.

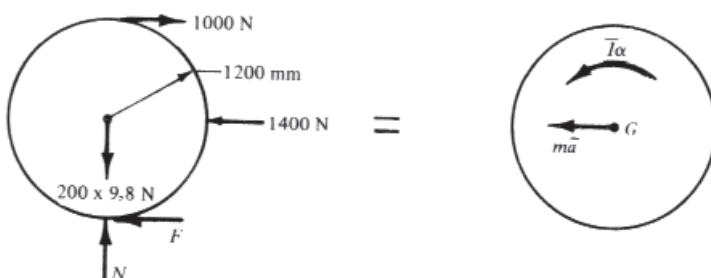


Figura 16.14

**SOLUCIÓN**

Se supone que la esfera rueda hacia la izquierda y que la fuerza  $F$  de rozamiento está también dirigida hacia la izquierda. Por inspección,  $N = 200 \times 9,8 = 1960$  N.

Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F = m\bar{a} \quad \text{o sea,} \quad F + 1400 - 1000 = 200\bar{a}$$

$$\sum M = I\alpha \quad \text{o sea,} \quad -F \times 1,2 - 1000 \times 1,2 = \frac{2}{5}(200)(1,2)^2 \alpha$$

Con  $\bar{a} = 1,2\alpha$ , estas ecuaciones dan  $\bar{a} = -2,14 \text{ m/s}^2$  y  $F = -828$  N.

Así pues, la esfera rueda hacia la derecha y la fuerza de rozamiento apunta a la derecha, y no en el sentido que se le asignó originalmente.

- 16.11.** Se supone que el disco A de la Figura 16.15 rueda sin deslizar. Hallar las tensiones en las cuerdas y la aceleración del centro de masas del disco A.

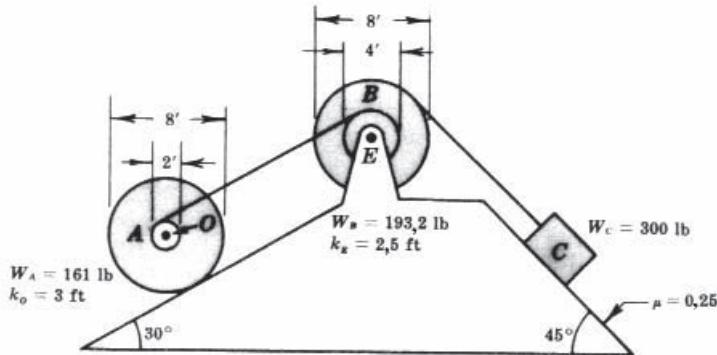


Figura 16.15

**SOLUCIÓN**

$$I_A = mk_O^2 = (161/32,2)(3)^2 = 45 \text{ lb}\cdot\text{s}^2\cdot\text{ft}, I_B = (193,2/32,2)(2,5)^2 = 37,5 \text{ lb}\cdot\text{s}^2\cdot\text{ft}$$

En la Figura 16.16 se representan los diagramas de cuerpo libre de A, B y C.

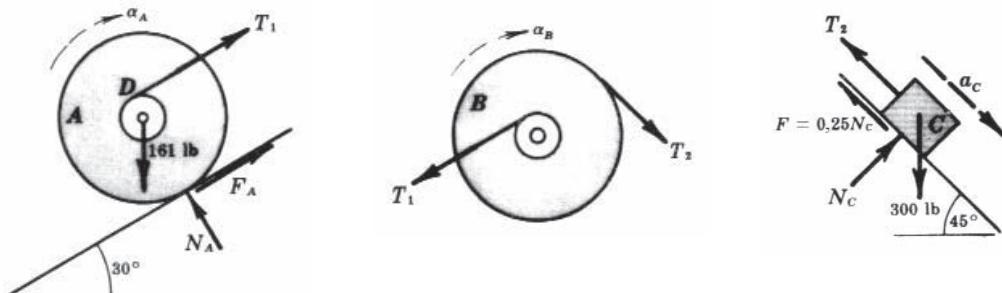


Figura 16.16

En esos diagramas, se supone que C se mueve plano abajo y que A rueda plano arriba. Para resolver el problema hacen falta los siguientes conceptos de cinemática. Primero,  $\alpha_A = \frac{1}{4}\bar{a}$ . Segundo, la aceleración de la cuerda  $T_1$  es igual a la componente paralela al plano de la aceleración absoluta del punto D (del disco A). El módulo de esa componente es igual a la suma del módulo de la aceleración relativa al centro de masas ( $1 \times \alpha_A$ ) más el módulo de la aceleración del centro de masas ( $\bar{a}$ ). Por consiguiente, la aceleración absoluta de  $T_1$  vale  $\frac{5}{4}\bar{a}$ . Como ésta es también el módulo de la aceleración de un punto situado a 2 ft del centro de B, es  $\alpha_B = \frac{5}{4}\bar{a}/2 = \frac{5}{8}\bar{a}$ . El módulo de la aceleración de  $T_2$  es igual al de  $a_C (\frac{5}{8}\bar{a} \times 4 = \frac{5}{2}\bar{a})$ .

Las ecuaciones de movimiento de *A* son

$$\sum F = m\bar{a} \quad \text{o sea,} \quad T_1 + F_A - 161 \sin 30^\circ = \frac{161}{32,2} \bar{a} \quad (1)$$

$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha_A \quad \text{o sea,} \quad T_1 \times 1 - F_A \times 4 = 45 \times \frac{1}{4} \bar{a} \quad (2)$$

La ecuación de movimiento de *B* es

$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha_B \quad \text{o sea,} \quad T_2 \times 4 - T_1 \times 2 = 37,5 \times \frac{5}{8} \bar{a} \quad (3)$$

Las ecuaciones de movimiento de *C* en las direcciones paralela y perpendicular al plano son

$$\sum F_{\parallel} = ma_C \quad \text{o sea,} \quad 300 \times 0,707 - 0,25N - T_2 = \frac{300}{32,2} \left(\frac{5}{2}\right) \bar{a} \quad (4)$$

$$\sum F_{\perp} = 0 \quad \text{o sea,} \quad N - 300 \times 0,707 = 0 \quad (5)$$

De la ecuación (5) se despeja *N*; este valor se introduce en la ecuación (4). En ésta se despeja *T*<sub>2</sub> en función de  $\bar{a}$ . Entre las ecuaciones (1) y (2) se elimina *F*<sub>A</sub> para encontrar *T*<sub>1</sub> en función de *a*. Estos valores de *T*<sub>1</sub> y *T*<sub>2</sub> se sustituyen en la ecuación (3) para hallar  $\bar{a}$ .

Estos valores son  $N = 212$  lb,  $T_2 = 159 - 23,3\bar{a}$ ,  $T_1 = 64,4 + 6,25\bar{a}$ .

Sustituyendo en la ecuación (3), se obtiene  $4(159 - 23,3\bar{a}) - 2(64,4 + 6,25\bar{a}) = 23,4\bar{a}$ .

Por tanto,  $\bar{a} = 3,93$  ft/s<sup>2</sup>,  $T_1 = 89,0$  lb,  $T_2 = 67,4$  lb.

- 16.12.** Un cilindro macizo homogéneo que pesa 644 lb rueda sin deslizar por las guías inclinadas que se muestran en la Figura 16.17. Hallar la aceleración del centro de masas.

#### SOLUCIÓN

Para el diagrama de cuerpo libre se supone que el cilindro rueda plano arriba. Téngase en cuenta que, en este caso, es  $\bar{a} = r\alpha = 1,5\alpha$ .

Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F = m\bar{a} \quad \text{o sea,} \quad F - 644 \sin 30^\circ + 30 \cos 30^\circ = \frac{644}{32,2} \bar{a} \quad (1)$$

$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \quad \text{o sea,} \quad -F \times 1,5 + 30 \times 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{644}{32,2}\right) (2)^2 \left(\frac{\bar{a}}{1,5}\right) \quad (2)$$

Al resolver el sistema, resulta  $\bar{a} = -6,78$  ft/s<sup>2</sup>, lo que indica que el cilindro rueda plano abajo.

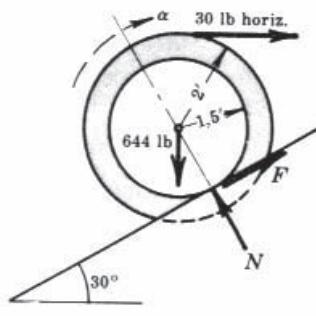


Figura 16.17

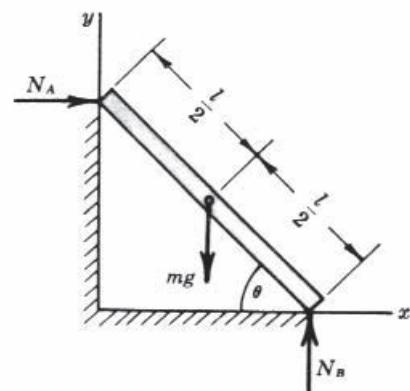


Figura 16.18

- 16.13.** Una barra uniforme de longitud  $l$  y masa  $m$  descansa sobre superficies lisas tal como se muestra en la Figura 16.18. Describir su movimiento. Situar el eje  $x$  en la superficie horizontal, y el eje  $y$  en la superficie vertical.

#### SOLUCIÓN

Como se desprecia el rozamiento, en el diagrama de cuerpo libre las reacciones de las superficies sobre la barra son normales.

Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_x = N_A = m\bar{a}_x \quad (1)$$

$$\sum F_y = N_B - mg = m\bar{a}_y \quad (2)$$

$$\sum \bar{M} = N_A (\frac{1}{2}l \sin \theta) - N_B (\frac{1}{2}l \cos \theta) = \bar{I}\alpha \quad (3)$$

Téngase en cuenta que  $\bar{I}$  para la varilla respecto a su centro es  $\frac{1}{12}ml^2$ , y que  $\alpha$  es la segunda derivada de  $\theta$  respecto al tiempo.

Como las tres ecuaciones contienen cinco incógnitas, hacen falta dos ecuaciones más en esas incógnitas para obtener una solución. La geometría de la figura revela que

$$\bar{x} = \frac{1}{2}l \cos \theta \quad y \quad \bar{y} = \frac{1}{2}l \sin \theta$$

$$\text{Entonces} \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d\bar{x}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}l \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad y \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{d\bar{y}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}l \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

Derivando otra vez, se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{a}_x &= \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2}l \left( \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{2}l \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ y \quad \bar{a}_y &= \frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = \frac{1}{2}l \left( -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}l \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}$$

Estos valores de  $\bar{a}_x$  y  $\bar{a}_y$  se introducen en las ecuaciones originales. Sin embargo, conviene más sustituir primero los valores  $N_A = m\bar{a}_x$  y  $N_B = m\bar{a}_y$  de las ecuaciones (1) y (2), respectivamente, en la ecuación (3). Entonces, la ecuación (3) queda, tras dividir todos los términos por  $\frac{1}{2}mgl$ ,

$$\frac{\sin \theta}{g} \bar{a}_x - \frac{\cos \theta}{g} \bar{a}_y = \cos \theta + \frac{l}{6g} \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Seguidamente, se introducen los valores recién hallados de  $\bar{a}_x$  y  $\bar{a}_y$  y se obtiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2l} \cos \theta$$

Con el procedimiento desarrollado en el Problema 16.39, resulta que la celeridad angular  $\omega$  es

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1 - \sin \theta)}$$

- 16.14.** En la Figura 16.19(a) se muestra una escalera de mano de 12 ft y 20 lb sujetada en la posición indicada de  $60^\circ$ . El suelo y la pared son lisos. Si repentinamente se suelta la escalera y su extremo superior recibe una celeridad de 3 ft/s hacia abajo, ¿cuáles serán las reacciones del suelo y la pared en el instante inmediatamente siguiente?

#### SOLUCIÓN

En el diagrama de cuerpo libre de la Figura 16.19(b), a la aceleración angular  $\alpha$  se le atribuye el sentido antihorario. Si es  $I$  el centro instantáneo, la velocidad angular es  $v_B/IB = 3,6 = 0,5$  rad/s.

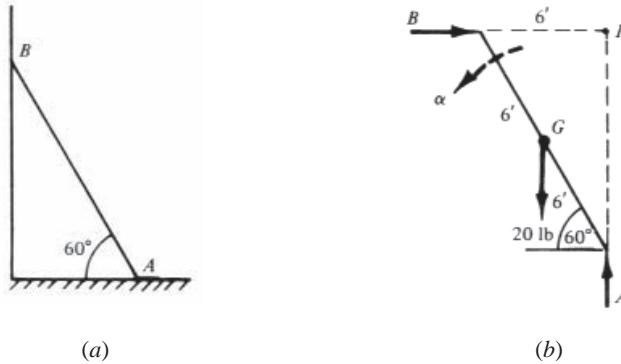


Figura 16.19

En función de las aceleraciones de  $A$  y  $B$ , la aceleración del centro de masas  $G$  tiene las expresiones siguientes:

$$\mathbf{a}_G = (\mathbf{a}_{G/A})_t + (\mathbf{a}_{G/A})_n + \mathbf{a}_A \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_G = (\mathbf{a}_{G/B})_t + (\mathbf{a}_{G/B})_n + \mathbf{a}_B \quad (2)$$

Las cantidades que figuran en los segundos miembros de las ecuaciones (1) y (2) son tales que

- (a)  $(\mathbf{a}_{G/A})_t$  es  $6\alpha$ , hacia abajo a la izquierda a  $30^\circ$  con la horizontal;
- (b)  $(\mathbf{a}_{G/A})_n$  es  $6(0,5)^2 = 1,5$ , hacia abajo a la derecha a  $60^\circ$  con la horizontal;
- (c)  $\mathbf{a}_A$  es horizontal;
- (d)  $(\mathbf{a}_{G/B})_t$  es  $6\alpha$ , hacia arriba a la derecha a  $30^\circ$  con la horizontal;
- (e)  $(\mathbf{a}_{G/B})_n$  es  $6(0,5)^2 = 1,5$ , hacia arriba a la izquierda a  $60^\circ$  con la horizontal;
- (f)  $\mathbf{a}_B$  es vertical.

En la ecuación (1), donde  $\mathbf{a}_A$  carece de componente vertical, sumamos verticalmente y obtenemos

- (g)  $(\mathbf{a}_G)_y$  con componentes  $6\alpha \sin 30^\circ$ , hacia abajo, y  $1,5 \cos 30^\circ$ , hacia abajo, o sea,  $(3\alpha + 1,3)$ , hacia abajo.

En la ecuación (2), donde  $\mathbf{a}_B$  carece de componente horizontal, sumamos horizontalmente y obtenemos

- (h)  $(\mathbf{a}_G)_x$  con componentes  $6\alpha \cos 30^\circ$ , hacia la derecha, y  $1,5 \cos 60^\circ$ , hacia la izquierda, o sea,  $(5,2\alpha - 0,75)$ , hacia la derecha.

Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_x = m(a_G)_x \quad \text{o sea,} \quad +B = \frac{20}{g}(5,2\alpha - 0,75) \quad (3)$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y \quad \text{o sea,} \quad 20 - A = \frac{20}{g}(3\alpha + 1,3) \quad (4)$$

$$\sum M_G = I_G \alpha \quad \text{o sea,} \quad A \times 3 - B \times 3 = \frac{1}{12} \left( \frac{20}{g} \right) (12)^2 \alpha \quad (5)$$

Con éstas, hallamos  $B = 3,2\alpha - 0,466$  y  $A = 19,2 - 1,86\alpha$ . Introduciendo estos valores en la ecuación (5) y despejando  $\alpha$ , resulta  $\alpha = 2,6 \text{ rad/s}^2$  antihoraria.

Por tanto,  $A = 14,4 \text{ lb}$ , ( $\uparrow$ ), y  $B = 7,93 \text{ lb}$ , ( $\rightarrow$ ).

- 16.15.** Un cono recto homogéneo se halla en equilibrio precario apoyado inestablemente con su vértice descansando sobre una superficie lisa, tal como se muestra en la Figura 16.20(a). Si se le perturba, ¿qué trayecto describe su centro de masas?

#### SOLUCIÓN

Se dibuja un diagrama de cuerpo libre del cono en cualquier posición durante la caída [Figura 16.20(b)]. Nótese que no hay fuerzas horizontales en presencia (por hipótesis, no hay rozamiento). Entonces, la suma

de las fuerzas horizontales es cero. Pero la suma de las fuerzas horizontales es igual al producto de la masa del cono por la aceleración horizontal  $\bar{a}_x$  del centro de masas. Como existe una masa, el producto  $m\bar{a}_x$  sólo puede ser cero si  $\bar{a}_x$  es cero.

Si la celeridad horizontal inicial es cero y  $\bar{a}_x$  vale cero, el centro de masas  $G$  sólo puede moverse siguiendo la recta vertical que pasa por el punto que ocupaba el vértice del cono antes de la perturbación.

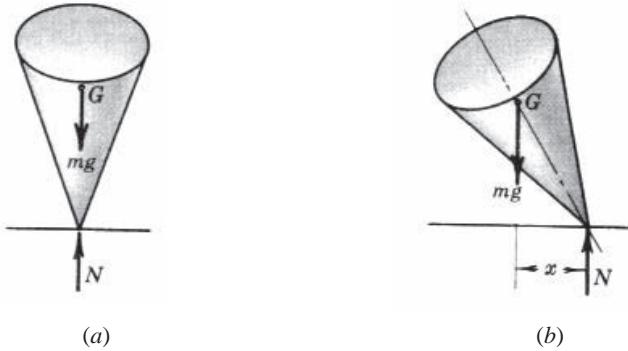


Figura 16.20

- 16.16.** Dos discos cilíndricos homogéneos están rígidamente unidos a un eje tal como se muestra en la Figura 16.21. Cada disco tiene una masa de 7,25 kg y un diámetro de 900 mm. El eje tiene un diámetro de 200 mm y una masa de 9 kg. Una cuerda arrollada como se muestra ejerce una fuerza de 45 N en el centro del eje. Estudiar el movimiento.

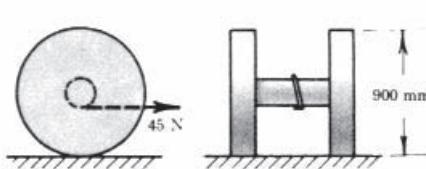


Figura 16.21

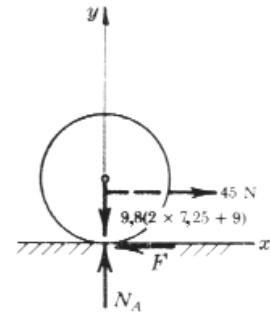


Figura 16.22

### SOLUCIÓN

La Figura 16.22 es la vista lateral del diagrama de cuerpo libre. Se supone que la fuerza de rozamiento  $F$  actúa hacia la izquierda. Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_x = 45 - F = m\bar{a}_x \quad (1)$$

$$\sum F_y = N_A - 9,8 \times 23,5 = m\bar{a}_y = 0 \quad (2)$$

$$\sum \bar{M} = 0,45F - 45(0,1) = \bar{I}\alpha \quad (3)$$

El momento de inercia  $\bar{I}$  es la suma de los momentos de inercia de los dos discos y el eje:

$$\bar{I} = 2\left(\frac{1}{2}m_{\text{disco}}r_{\text{disco}}^2\right) + \frac{1}{2}m_{\text{eje}}r_{\text{eje}}^2 = 7,25(0,45)^2 + \frac{1}{2}(9)(0,1)^2 = 1,513 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Llevando este valor y los de las masas a las ecuaciones de movimiento (1), (2) y (3), éstas quedan

$$45 - F = 23,5\bar{a}_x \quad (1')$$

$$N_A - 230 = 0 \quad (2')$$

$$0,45F - 4,5 = 1,513\alpha \quad (3')$$

Como  $\alpha = \bar{a}_x / 0,45$ , donde la distancia desde el centro de rodadura hasta la superficie donde tiene lugar la rodadura es 0,45 m, la ecuación (3') puede escribirse

$$0,45F - 4,5 = 1,513 \left( \frac{\bar{a}_x}{0,45} \right) \quad \text{o bien, } F - 10 = 7,$$

Sumando esta ecuación a la (1'), se obtiene  $\bar{a}_x = 1,13 \text{ m/s}^2 (\rightarrow)$ .

- 16.17.** Una esfera y un cilindro, ambos homogéneos, ruedan sin deslizar partiendo simultáneamente desde el punto más alto de un plano inclinado. Si la velocidad inicial de los dos es nula, ¿cuál de los dos llega antes al final del plano inclinado?

#### SOLUCIÓN

Por el enunciado del problema, es verosímil que los radios de los sólidos no influyan nada. Utilizamos el subíndice  $s$  para la esfera y  $c$  para el cilindro.

El diagrama de cuerpo libre de la Figura 16.23 sirve para ambos sólidos.

Las ecuaciones de movimiento se listan seguidamente. Los momentos de inercia de la esfera y el cilindro son, respectivamente,  $\frac{2}{5}m_s r_s^2$  y  $\frac{1}{2}m_c r_c^2$ .

Esfera	Cilindro
$\sum F_x = m_s g \operatorname{sen} \theta - F_x = m_s (\bar{a}_x)_s \quad (1)$	$\sum F_x = m_c g \operatorname{sen} \theta - F_c = m_c (\bar{a}_x)_c \quad (4)$
$\sum F_y = N_s - m_s g \cos \theta = 0 \quad (2)$	$\sum F_y = N_c - m_c g \cos \theta = 0 \quad (5)$
$\sum \bar{M} = F_s r_s = \frac{2}{5} m_s r_s^2 \alpha_s \quad (3)$	$\sum \bar{M} = F_c r_c = \frac{1}{2} m_c r_c^2 \alpha_c \quad (6)$
Sustituyendo $r_s \alpha_s = (\bar{a}_s)_s$ en la ecuación (3) se obtiene $F_s = \frac{2}{5} m_s (\bar{a}_x)_s \quad (3')$	Sustituyendo $r_c \alpha_c = (\bar{a}_s)_c$ en (6) se obtiene $F_c = \frac{2}{5} m_c (\bar{a}_x)_c \quad (6')$
Sustituyendo este valor en (1) se obtiene $(\bar{a}_x)_s = \frac{5}{7} g \operatorname{sen} \theta \quad (1')$	Sustituyendo este valor en (4) se obtiene $(\bar{a}_x)_c = \frac{2}{3} g \operatorname{sen} \theta \quad (4')$

Así pues, la esfera, como su aceleración es mayor, llegará antes al pie del plano inclinado y, en general, es así para el cuerpo que tenga el menor momento de inercia.

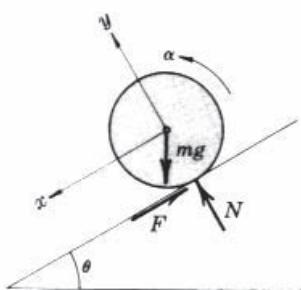


Figura 16.23

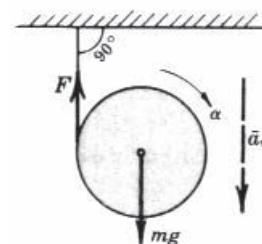


Figura 16.24

- 16.18.** Un cilindro de 100 mm de diámetro tiene un hilo arrollado en torno a su sección media. Si el extremo libre del hilo se fija a un soporte y se deja caer el cilindro, estudiar el movimiento siguiente.

**SOLUCIÓN**

Podemos escribir aquí dos ecuaciones, una empleando la suma de las fuerzas según la vertical, tomando el sentido hacia abajo como positivo, y otra sumando los momentos respecto al centro de masas, tomando el sentido horario como positivo. Esas ecuaciones son

$$\sum F_v = mg - F = m\bar{a}_v \quad (1)$$

$$\sum \bar{M} = Fr = I\alpha \quad (2)$$

En la Figura 16.24,  $F$  es la tensión del hilo. El momento de inercia es  $I = \frac{1}{2}mr^2$ , donde  $r = 0,05$  m. Además,  $\alpha = \bar{a}_v / r = 20\bar{a}_v$ , ya que el movimiento equivale a la rodadura del cilindro sobre el hilo. La ecuación (2) queda

$$0,05F = \frac{1}{2}m(0,05)^2(20\bar{a}_v) \quad \text{o sea,} \quad F = \frac{1}{2}m\bar{a}_v$$

Sustituyendo en (1) este valor de  $F$ , se obtiene  $\bar{a}_v = 2g/3 = 6,53$  m/s<sup>2</sup>.

En esto se basa el yo-yo. El juguete se diseña de modo que  $\bar{a}_v$  es mucho menor que  $g$ . Ello se consigue acanalando el cilindro para que  $F$  actúe en un radio menor que el radio del cilindro.

- 16.19.** Una esfera maciza y un aro delgado de masas iguales se enganchan uno a otro y se dejan rodar sin deslizar por un plano inclinado tal como se muestra en la Figura 16.25(a). Despreciando la masa del enganche, hallar la fuerza que éste soporta. Los cojinetes se suponen sin rozamiento.

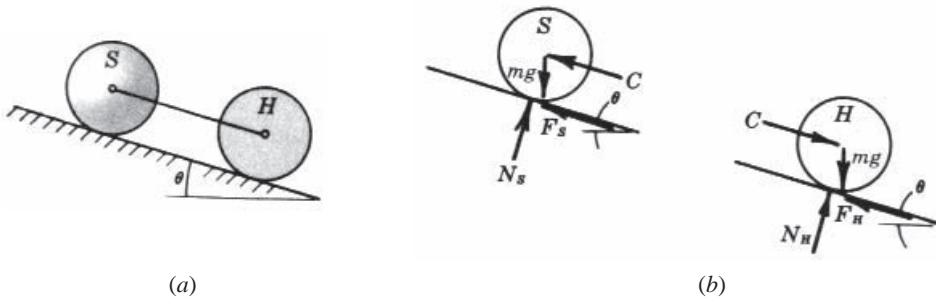


Figura 16.25

**SOLUCIÓN**

En los diagramas de cuerpo libre [Figura 16.25(b)] se supone que  $C$  es la compresión que sufre el enganche. Si su valor resulta negativo, ello simplemente indica que  $C$  es una fuerza de tracción.

Empleamos los subíndices  $S$  y  $H$ , respectivamente, para la esfera y el aro. La aceleración  $a$  es la misma para ambos centros de masas; y como los radios son iguales, la aceleración angular  $\alpha$  es también la misma para ambos cuerpos. Sumando las fuerzas paralelas al plano inclinado, resultan las dos ecuaciones siguientes:

$$mg \operatorname{sen} \theta - F_S - C = m\bar{a} \quad (1)$$

$$mg \operatorname{sen} \theta - F_H - C = m\bar{a} \quad (2)$$

Como hay cuatro incógnitas ( $F_S$ ,  $F_H$ ,  $C$ ,  $a$ ), hacen falta dos ecuaciones más. Estas se consiguen tomando momentos en los centros de masas:

$$F_S \times r = I_S \alpha = \frac{2}{5}mr^2\alpha \quad (3)$$

$$F_H \times r = I_H \alpha = mr^2\alpha \quad (4)$$

La relación  $\bar{a} = r\alpha$  es válida para las dos ecuaciones. De (3) y (4),  $F_S = \frac{2}{5}m\bar{a}$  y  $F_H = m\bar{a}$ . Estos valores se sustituyen en las ecuaciones (1) y (2); luego, se suman las ecuaciones resultantes para eliminar  $C$  y obtener  $\bar{a} = \frac{10}{17}g \operatorname{sen} \theta$ . A continuación, se despeja  $C = \frac{3}{17}mg \operatorname{sen} \theta$ .

- 16.20.** ¿A qué altura sobre el tapete debe golpearse con el taco horizontal una bola de billar de radio  $r$  para que ésta empiece a moverse sin rozamiento entre ella y el tapete? (Figura 16.26.)

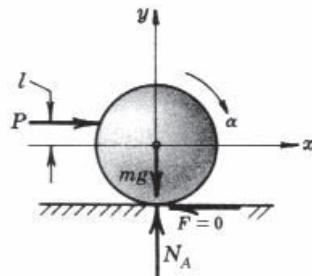


Figura 16.26

**SOLUCIÓN**

Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_x = P = m\bar{a}_x \quad (1)$$

$$\sum F_y = N_A - mg = 0 \quad (2)$$

$$\sum M = Pl = \frac{2}{5}mr^2\alpha \quad (3)$$

Como  $\alpha = \bar{a}_x / r$ , la ecuación (3) se reduce a  $P = 2mr\bar{a}_x / 5l$ .

Sustituyendo en la ecuación (1) este valor de  $P$ , se obtiene  $l = \frac{2}{5}r$ .

En otras palabras, la distancia correcta por encima de la mesa es  $r + \frac{2}{5}r = \frac{7}{5}r$ .

El mismo procedimiento se sigue para calcular la altura correcta de la banda para que la bola rebote en ella sin provocar rozamientos con el tapete. En este caso, la fuerza  $P$  de la banda se pone en el lugar de la fuerza del taco. Por supuesto, la respuesta es la misma.

- 16.21.** Un cilindro macizo homogéneo que pesa 16,1 lb rueda sin deslizar por el interior de una superficie curva fija. En la posición representada, la celeridad del centro de masas del cilindro es de 9 ft/s hacia abajo a la derecha. ¿Cuál es la reacción de la superficie sobre el cilindro?

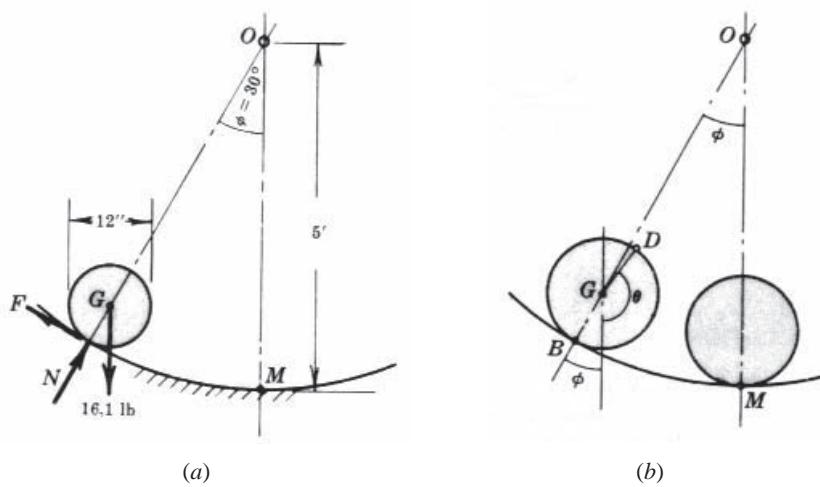


Figura 16.27

**SOLUCIÓN**

En el diagrama de cuerpo libre de la Figura 16.27(a) se muestran las dos componentes  $F$  y  $N$  de la reacción. En la Figura 16.27(b) se ilustra una posición cualquiera del cilindro para establecer la relación cine-

mática necesaria para resolver el problema. Nótese que cuando el cilindro rueda hacia arriba por la izquierda,  $\phi$  y  $\theta$  aumentan como se indica. Por tanto, si suponemos que la aceleración angular del cilindro es positiva en el sentido antihorario,  $\bar{a}_t$  será positiva hacia arriba a la izquierda.

Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_n = m\bar{a}_n \quad \text{o sea,} \quad N - 16,1 \cos 30^\circ = \frac{16,1}{32,2} \bar{a}_n \quad (1)$$

$$\sum F_t = m\bar{a}_t \quad \text{o sea,} \quad -16,1 \sin 30^\circ + F = \frac{16,1}{32,2} \bar{a}_t \quad (2)$$

$$\sum M = \bar{I}\alpha \quad \text{o sea,} \quad -F \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{16,1}{32,2} \right) \left( \frac{1}{2} \right)^2 \alpha \quad (3)$$

donde  $\bar{a}_n$  y  $\bar{a}_t$  son las componentes de la aceleración del centro de masas  $G$  y  $\alpha$  es el módulo de la aceleración angular del cilindro alrededor de  $G$ . El centro de masas  $G$  puede considerarse que rota en torno al centro de curvatura  $O$ . Por tanto,  $\bar{a}_n = v^2 / OG = 81 / 4,5 = 18 \text{ ft/s}^2$ . Todavía no se conoce la componente tangencial  $\bar{a}_t$ .

Para expresar  $\alpha$  en función de  $\bar{a}_t$ , véase la Figura 16.27(b), donde  $D$  es el punto del cilindro originalmente en contacto con  $M$ . Puesto que se supone que la rodadura es pura, el arco  $BM$  de la superficie curva debe ser igual al arco  $BD$  del cilindro (si no, habría deslizamiento). Sea  $r$  = radio del cilindro, y  $R$  = radio de la superficie.

Entonces  $r(\phi + \theta) = R\phi$ , o sea,  $\theta = (R/r - 1)\phi$ . Esta relación es también válida para las derivadas respecto al tiempo de  $\theta$  y  $\phi$ . La segunda derivada respecto al tiempo de  $\theta$  es el módulo de la aceleración angular  $\alpha$ . La segunda derivada respecto al tiempo de  $\phi$  puede calcularse en función de  $\bar{a}_t$ , ya que se considera que el centro  $G$  rota en torno a  $O$ ; es decir,  $a_t = (R - r)(d^2\phi/dt^2)$ . Por tanto,

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{R-r}{r} \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{R-r}{r} \frac{\bar{a}_t}{R-r} = \frac{\bar{a}_t}{r}$$

En este caso,  $R = 5 \text{ ft}$  y  $r = \frac{1}{2} \text{ ft}$ ; por consiguiente,  $\alpha = 2\bar{a}_t$  y las ecuaciones de movimiento se simplifican y quedan

$$N - 13,9 = 9 \quad (1')$$

$$-8,05 + F = \frac{1}{2} \bar{a}_t \quad (2')$$

$$-F = \frac{1}{4} \bar{a}_t \quad (3')$$

de donde  $F = 2,68 \text{ lb}$  y  $N = 22,9 \text{ lb}$ .

- 16.22.** Un disco de masa  $m$  y radio de giro  $k$  posee una celeridad angular horaria  $\omega_0$  cuando se suelta sobre un suelo horizontal [Figura 16.28(a)]. Siendo  $\mu$  el coeficiente de rozamiento entre el disco y el suelo, deducir la expresión del tiempo que tarda en cesar el resbalamiento e iniciarse la rodadura.

#### SOLUCIÓN

En el diagrama de cuerpo libre aparecen la fuerza de rozamiento  $\mu N_A$ , la fuerza normal  $N_A$  y la fuerza gravitatoria que actúan sobre el disco. Esas fuerzas producen una aceleración  $\bar{a}$  en el centro de masas dirigida hacia la derecha y una aceleración angular antihoraria, tal como se muestra en la Figura 16.28(b).

Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_h = m\bar{a} \quad \text{o sea,} \quad \mu N_A = m\bar{a} \quad (1)$$

$$\sum F_v = 0 \quad \text{o sea,} \quad N_A = mg \quad (2)$$

$$\sum M = I\alpha \quad \text{o sea,} \quad \mu N_A r = mk^2\alpha \quad (3)$$

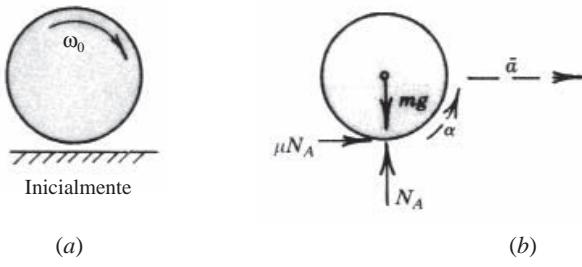


Figura 16.28

Sustituyendo  $N_A = mg$  en la ecuación (1) y luego en la ecuación (2), obtenemos

$$a = \mu g \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{\mu gr}{k^2} \quad (5)$$

La celeridad en cualquier instante  $t$  puede calcularse con la ecuación (4) y es

$$\bar{v} = v_0 + \mu gt = \mu gt \quad (6)$$

ya que  $\bar{v}_0 = 0$ . Asimismo, la celeridad angular en cualquier instante  $t$  puede calcularse con la ecuación (5) y es

$$\omega = \omega_0 - \frac{\mu grt}{k^2} \quad (7)$$

donde se supone que el sentido horario es el positivo.

Cuando cesa el deslizamiento y empieza la rodadura,  $\bar{v} = r\omega$ . Por tanto, al multiplicar (7) por  $r$  resulta  $\bar{v}$  y ésta está también dada por (6). Así, obtenemos el tiempo deseado  $t'$ :

$$\mu gt' = r\omega_0 - \frac{\mu gr^2 t'}{k^2} \quad \text{es decir,} \quad t' = \frac{r\omega_0}{\mu g(1+r^2/k^2)} \quad (8)$$

- 16.23.** Un cilindro uniforme de radio  $R$  se halla sobre una plataforma sometida a una aceleración horizontal constante de módulo  $a$ . Suponiendo que no hay deslizamiento, hallar  $a_o$ , el módulo de la aceleración del centro de masas del cilindro.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 16.29 se representa el diagrama de cuerpo libre con todas las fuerzas actuantes sobre el cilindro.

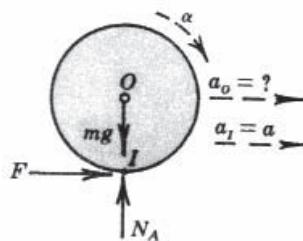


Figura 16.29

La aceleración angular del cilindro se supone horaria. El punto  $I$  es el centro instantáneo entre el cilindro y la plataforma, y por consiguiente posee una aceleración hacia la derecha igual a la de la plataforma.

Por consideraciones cinemáticas, podemos escribir

$$\mathbf{a}_o = \mathbf{a}_{O/I} + \mathbf{a}_I$$

Sumando en la dirección horizontal, esta ecuación da (sentido positivo, hacia la derecha)

$$a_0 = R\alpha + a \quad (1)$$

Seguidamente, aplicamos al cilindro las ecuaciones de movimiento

$$\sum F_h = ma_o \quad \text{o sea,} \quad F = ma_o \quad (2)$$

$$\sum M_o = I_o\alpha \quad \text{o sea,} \quad -FR = \frac{1}{2}mR^2\alpha \quad (3)$$

El signo del momento de la fuerza de rozamiento  $F$  es negativo, porque ese momento es de sentido opuesto al supuesto para  $\alpha$ .

Sustituyendo (1) en (2), resulta  $F = m(R\alpha + a)$ . Luego, este valor de  $F$  lo introducimos en la ecuación (3) y obtenemos  $R\alpha = -\frac{2}{3}a$ . Y de aquí, con la ecuación (1), resulta que la aceleración del centro de masas vale  $a_0 = -\frac{2}{3}a + a = \frac{1}{3}a$ .

- 16.24.** La barra homogénea  $ABC$  de la Figura 16.30(a) mide 3000 mm de largo y tiene una masa de 20 kg. Esta articulada al suelo en  $A$  y a la barra homogénea  $BD$ , que mide 2000 mm de largo con una masa de 10 kg. Hallar la aceleración angular de cada barra inmediatamente después de cortarse el alambre de sujeción. Se supone que no hay rozamiento en  $D$  cuando se inicia su movimiento hacia la derecha.

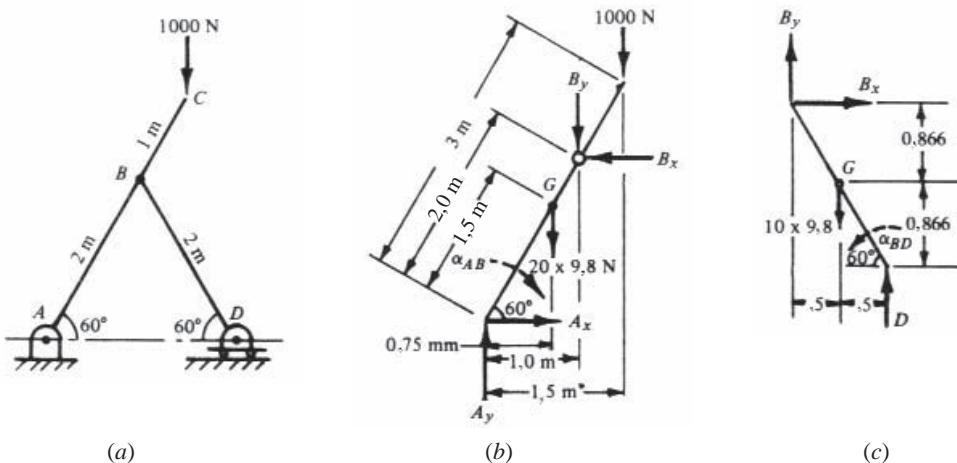


Figura 16.30

### SOLUCIÓN

En las Figuras 16.30(b) y (c) se representan los diagramas de cuerpo libre de las dos barras en el instante inicial. La aceleración de  $B$  es la misma en ambas barras, y así podemos escribir

$$\mathbf{a}_B = (\mathbf{a}_{B/D})_n + (\mathbf{a}_{B/D})_t + \mathbf{a}_D \quad (1)$$

La aceleración de  $B$  como punto de  $ABC$  es  $2\alpha_{AB}$ , y como es perpendicular a la barra, apunta hacia la derecha y abajo formando un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal.

La aceleración  $(\mathbf{a}_{B/D})_n$  es nula porque en el instante inicial no hay aceleración angular. La aceleración  $(\mathbf{a}_{B/D})_t$  apunta hacia la izquierda y abajo formando un ángulo de  $30^\circ$ , y vale  $2\alpha_{AB}$ . Finalmente, nótese que  $\mathbf{a}_D$  es necesariamente horizontal. En la ecuación (1), al sumar las componentes verticales de las aceleraciones, con sentido positivo hacia abajo, resulta

$$2\alpha_{AB} \sin 30^\circ = 2\alpha_{BD} \sin 30^\circ + 0$$

Como aquí se ve que  $\alpha_{AB} = \alpha_{BD}$ , emplearemos  $\alpha$  para ambas.

En la ecuación (1), al sumar ahora las componentes horizontales de las aceleraciones, con sentido positivo hacia la derecha, resulta

$$2\alpha_{AB} \cos 30^\circ = -2\alpha_{BD} \cos 30^\circ + a_D$$

Escribiendo  $\alpha$  para las dos aceleraciones angulares, ahora tenemos  $a_D = 3,46\alpha$  hacia la derecha. Para la aceleración del centro de masas  $G$  de la barra  $BD$  podemos escribir

$$\mathbf{a}_G = (\mathbf{a}_{G/D})_n + (\mathbf{a}_{G/D})_t + \mathbf{a}_D \quad (2)$$

Como antes,  $(\mathbf{a}_{G/D})_n$  es nula.  $(\mathbf{a}_{G/D})_t$  apunta hacia la izquierda y abajo formando un ángulo de  $30^\circ$ . Por supuesto, ya hemos demostrado que  $a_D = 3,46\alpha$  hacia la derecha.

Sumando las componentes horizontales en la ecuación (2), tenemos

$$(a_G)_x = 3,46\alpha + (1\alpha)(0,866) = 2,6\alpha \quad (\text{hacia la derecha})$$

y sumando las verticales,

$$(a_G)_y = (1\alpha)(0,5) \quad \text{o} \quad 0,5\alpha \quad (\text{hacia abajo})$$

En la Figura 16.30(c), sumamos horizontalmente, tomando sentido positivo hacia la derecha, y sumamos verticalmente, tomando sentido positivo hacia abajo, y nos da

$$B_x = m(a_G)_x = 10(2,6\alpha) = 26\alpha \quad (\text{hacia la derecha}) \quad (3)$$

$$-B_y + 10 \times 9,8 - D = 10(0,5\alpha) \quad (4)$$

A continuación, sumamos los momentos respecto a  $G$ , tomando como positivo el sentido antihorario, y nos da

$$-B_x \times 0,866 - B_y \times 0,5 + D \times 0,5 = \frac{1}{12}(10)(2)^2\alpha \quad (5)$$

La ecuación (4) da

$$D = -B_y + 98 - 5\alpha$$

Este valor de  $D$ , y el de  $B$  dado por (3), los introducimos en la ecuación (5) y resulta

$$-0,866(26\alpha) - B_y(0,5) + 0,5(-B_y + 98 - 5\alpha) = 3,33\alpha$$

De esta ecuación (6),

$$B_y = 49 - 28,3\alpha$$

Sumando los momentos respecto a  $A$  en el diagrama de cuerpo libre de la Figura 16.30(b) se obtiene

$$\sum M_A = (20 \times 9,8)(0,75) + 1000(1,5) + B_y \times 1 - B_x \times 1,732 = \frac{1}{3}(20)(3)^2\alpha \quad (7)$$

Resolviendo el sistema de las dos ecuaciones (6) y (7) resulta

$$\alpha = 12,7 \text{ rad/s}^2$$

## raslación

- 16.25.** Una puerta homogénea de 50 lb está suspendida de los rodillos  $A$  y  $B$  que descansan sobre una guía horizontal, tal como se muestra en la Figura 16.31. Se aplica una fuerza constante  $P$  de 10 lb. ¿Cuál es la velocidad de la puerta 5 s después de arrancar? ¿Cuáles son las reacciones de los rodillos? Se supone que en éstos no hay rozamiento.

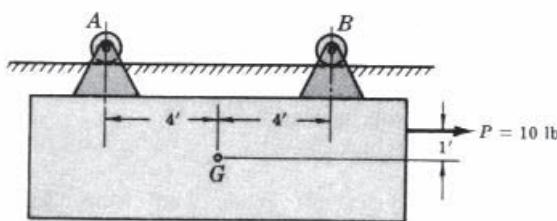


Figura 16.31

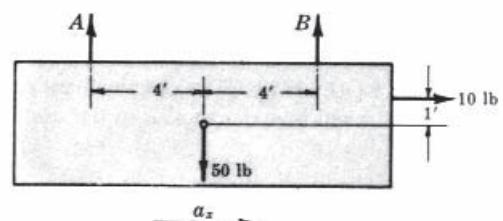


Figura 16.32

## SOLUCIÓN

Se supone que la aceleración  $a_x$  está en la dirección  $x$  en el diagrama de cuerpo libre de la Figura 16.32.

Aplicando las ecuaciones  $\sum F_x = ma_x$ ,  $\sum F_y = ma_y$  y  $\sum M = 0$ , tenemos

$$\sum F_x = 10 = \frac{50}{32,2}a_x \quad (I)$$

$$\sum F_y = A + B - 50 = \frac{50}{32,2} 0 \quad (2)$$

$$\sum \bar{M} = B \times 4 - A \times 4 - 10 \times 1 = 0 \quad (3)$$

De la ecuación (1),  $a_x = 6,44 \text{ ft/s}^2$ . Como  $a_x$  es constante, debe emplearse la fórmula en la que intervienen las cantidades conocidas  $v_0$ ,  $a$ ,  $t$  y la incógnita  $v$ :

$$v = v_0 + at = 0 + (6,44 \text{ ft/s}^2)(5 \text{ s}) = 32,2 \text{ ft/s}$$

Resolviendo el sistema de las dos ecuaciones (2) y (3) se obtiene  $A = 23,7 \text{ lb}$  y  $B = 26,3 \text{ lb}$ .

- 16.26.** En la Figura 16.33(a) se representa una barra homogénea  $AB$  de 2000 mm de largo y 2 kg de masa. Sus extremos están limitados a deslizarse por sendas guías horizontales lisas. Hallar su aceleración y las fuerzas normales en  $A$  y  $B$  bajo la acción de la fuerza horizontal de 20 N.

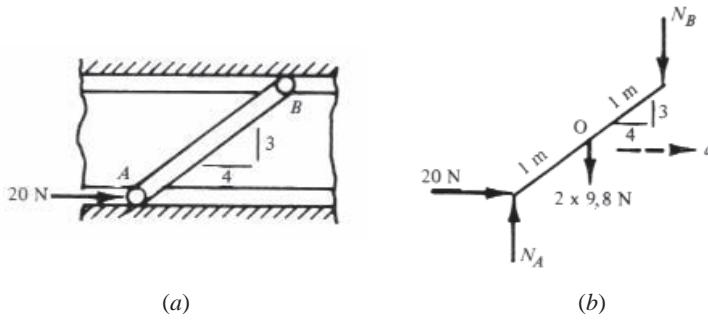


Figura 16.33

#### SOLUCIÓN

En el diagrama de cuerpo libre de la Figura 16.33(b) se muestran la fuerza dada, las fuerzas normales  $A$  y  $B$  y el peso  $2 \times 9,8 \text{ N}$ . La aceleración se representa actuando hacia la derecha. (No hay aceleración angular.)

Se suponen positivas las fuerzas dirigidas hacia la derecha, y las dirigidas hacia arriba, y positivos los momentos antihorarios. Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_x = ma \quad \text{o sea,} \quad 20 = 2a \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{o sea,} \quad N_A - N_B = 19,6 = 0 \quad (2)$$

$$\sum \bar{M}_O = 0 \quad \text{o sea,} \quad 20(1)(3/5) - N_A(1)(4/5) - N_B(1)(4/5) = 0 \quad (3)$$

De la ecuación (1),  $a = 10 \text{ m/s}^2$ . Las ecuaciones (2) y (3) forman un sistema de ecuaciones que resuelto da  $N_A = 17,3 \text{ N}$ , hacia arriba, y  $N_B = -2,3 \text{ N}$ , hacia arriba. (Las reacciones no tienen los sentidos asignados en principio. El signo menos significa que la reacción actúa en sentido contrario al indicado en la figura; o sea,  $N_B$  actúa hacia arriba.)

- 16.27.** Un vagón de carga parte del reposo en la cresta de una pendiente del 1,5 % de 1 mi de largo. Admitiendo una resistencia de 8 lb/ton, ¿qué distancia recorrerá el vagón por la vía horizontal que sigue a la pendiente antes de detenerse?

#### SOLUCIÓN

Sobre el plano inclinado las fuerzas que actúan paralelamente a la vía son la componente del peso  $0,015W$  y la resistencia de  $(8/2000)W = 0,004W$ . La primera acelera el vagón, pero la segunda lo decelera.

La ecuación de movimiento es  $\sum F_{\parallel} = 0,015W - 0,004W = (W/g)a$ .

La aceleración resultante es  $a = 0,011g$ . La velocidad al pie de la pendiente se calcula con

$$v^2 = v_0^2 + 2as = 0 + 2(0,011g)(5280)$$

Para hallar la distancia  $s$  a lo largo de la horizontal, se aplican las mismas fórmulas, teniendo en cuenta que la única fuerza horizontal actuante es una fuerza deceleradora constante (a causa de la resistencia del tren), es decir,  $-0,004W$ .

Como antes,  $\Sigma F_{||} = -0,004W = (W/g)a$ ; por tanto,  $a = -0,004g$ . Además, ahora  $v_0^2$  es el valor de  $v^2$  calculado antes. Así pues,

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad \text{or} \quad 0 = 2(0,011g)(5280) - 2(0,004gs)$$

de donde,  $s = 14.500$  ft a lo largo de la vía horizontal.

- 16.28.** Un bloque A descansa sobre un carro tal como se muestra en la Figura 16.34. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el carro es 0,30. Si A tiene una masa de 70 kg, deducir la aceleración máxima que puede alcanzar el carro.

## SOLUCIÓN

Las dos posibilidades a considerar son (a) la aceleración capaz de despedir el bloque del carro y (b) la aceleración capaz de volcar el bloque.

En el caso (a), el rozamiento es máximo y es igual al producto del coeficiente de rozamiento por la fuerza normal entre el carro y el bloque.

En el caso (b), el rozamiento necesario puede ser (1) menor que el máximo, (2) el máximo, o (3) mayor que el máximo. Si el rozamiento necesario para causar el vuelco es mayor que el máximo, naturalmente no puede alcanzarse, y consiguientemente el bloque se desliza y cae fuera del carro para el valor de la aceleración calculado en (a).

En la Figura 16.35 se representa el diagrama de cuerpo libre del caso (a). Téngase en cuenta que la fuerza normal  $N_A$  está aquí aplicada en un punto desconocido. El rozamiento se representa actuando hacia la derecha, pues el carro está acelerado hacia la derecha y tira consigo del bloque a causa del rozamiento. Sólo hacen falta dos ecuaciones:

$$\sum F_h = ma_h; \quad \text{es decir,} \quad F = ma_h \quad (I)$$

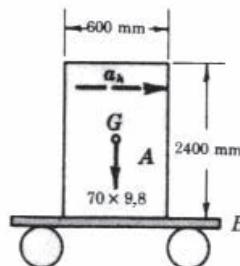
$$\sum_i F_y = ma_y = 0; \quad \text{es decir,} \quad N_A - 686 = 0 \quad (2)$$

De la ecuación (2),  $N_A = 686 \text{ N}$ .

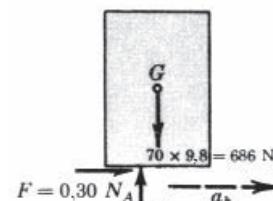
La ecuación (1) queda  $0,30 \times 686 = 70a_h$ , o  $a_h = 2,94 \text{ m/s}^2$ .

Una aceleración mayor que  $2,94 \text{ m/s}^2$  hace que el bloque deslice.

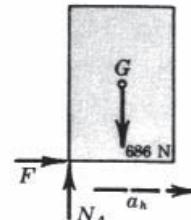
La Figura 16.36 es el diagrama de cuerpo libre para el caso de vuelco. En este caso, el movimiento es inminente en torno a la arista posterior del bloque, por lo que las fuerzas normal y de rozamiento se colocan en ese lugar.



**Figura 16.34**



**Figura 16.35**



**Figura 16.36**

Adviértase que  $F$  no se indica igual a  $0,30N_A$ . El valor límite del rozamiento se emplea sólo cuando el deslizamiento es inminente, como en el caso (a). Las ecuaciones son

$$\sum F_h = ma_h \quad (3)$$

$$\sum F_v = ma_v = 0 \quad (4)$$

$$\sum_i \bar{M}_i = 0 \quad (5)$$

que se transforman en

$$F = 70a_h \quad (3')$$

$$N_A - 686 = 0 \quad (4')$$

$$-N_A \times 0,3 + F \times 1,2 = 0 \quad (5')$$

De (4'),  $N_A = 686$  N. Sustituyendo en (5'),  $F = 172$  N.

Sustituyendo  $F = 172$  N en (3'),  $a_h = 2,46$  m/s<sup>2</sup>.

Así pues, para una aceleración de 2,46 m/s<sup>2</sup> el bloque tiende a volcar. Como para esa aceleración la fuerza de rozamiento es 176 N, inferior al valor límite ( $0,30 \times 686$  N), el vuelco se producirá antes de que aparezca el deslizamiento.

O bien, considerando las cosas de un modo algo distinto, una aceleración de 2,46 m/s<sup>2</sup> causa el vuelco, mientras que una aceleración de 2,94 m/s<sup>2</sup> causa el deslizamiento. Como la aceleración de 2,46 m/s<sup>2</sup> se alcanza antes, el vuelco se presenta antes que el deslizamiento.

De la ecuación (5') puede deducirse directamente que el vuelco tiene lugar antes, ya que el cociente de  $F$  entre  $N_A$  es en este caso de 0,25, inferior al máximo cociente de 0,30.

- 16.29.** Un ascensorista de 60 kg está de pie sobre una balanza de muelles dentro de un ascensor de 600 kg acelerado 6 m/s<sup>2</sup> hacia arriba. ¿Cuál es la lectura en la balanza y cuál es la tensión en los cables?

#### SOLUCIÓN

La Figura 16.37 es el diagrama de cuerpo libre del ascensorista de 60 kg, con su peso apuntando hacia abajo y la fuerza de la balanza apuntando hacia arriba. Como la aceleración es ascendente, tomamos este sentido como positivo. La ecuación de movimiento para el ascensorista es

$$\sum F_v = P - 60 \times 9,8 = ma = 60 \times 6$$

De aquí,  $P = 948$  N y la lectura en la balanza es  $948/9,8 = 96,7$  kg. Por ello, la masa del ascensorista sufre un aumento aparente de  $96,7 - 60 = 36,7$  kg.

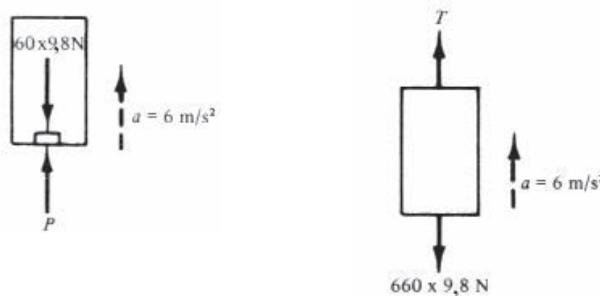


Figura 16.37

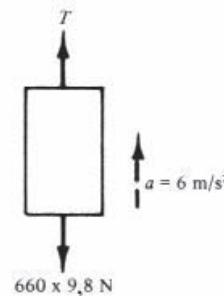


Figura 16.38

Para hallar la tensión  $T$  en el cable, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la Figura 16.38. Si tomamos hacia arriba como sentido positivo, la ecuación de movimiento del ascensor y el ascensorista es

$$\sum F_v = ma \quad \text{o sea,} \quad T - 660 \times 9,8 = 660 \times 6$$

Y de aquí,  $T = 10400$  N.

- 16.30.** El bloque  $B$  es acelerado a lo largo del plano horizontal mediante la masa  $A$  unida a él por una cuerda flexible, inextensible y sin masa que pasa por una pequeña polea, tal como se muestra en la Figura 16.39. Se supone que el coeficiente de rozamiento entre  $B$ , cuya masa es de 2 kg, y el plano vale 0,20. Indicar cuál es el movimiento si  $A$  tiene una masa de 1,2 kg.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 16.40 se representan los diagramas de cuerpo libre de  $A$  y  $B$ . Nótese que la fuerza  $N_B$  se representa actuando a una distancia  $x$  de la vertical del centro de masas  $G$  del bloque  $B$ . Se supone que la aceleración de éste está dirigida hacia la derecha, tal como se muestra.

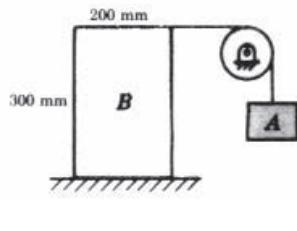


Figura 16.39

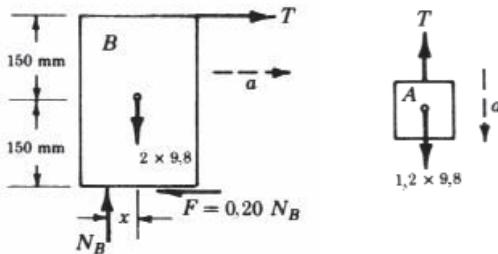


Figura 16.40

Sumando las fuerzas verticales que actúan sobre el bloque A (se toma como positivo el sentido hacia abajo por concordancia con la flecha del vector aceleración), se obtiene

$$1,2 \times 9,8 - T = 1,2a \quad (1)$$

Por inspección del diagrama del bloque B,  $N_B = 2 \times 9,8 = 19,6$  N.

Sumando las fuerzas horizontales sobre el bloque B (sentido positivo, hacia la derecha), se obtiene

$$T - 0,20N_B = 2a \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) dan  $a = 2,45$  m/s<sup>2</sup>.

La suma de los momentos de las fuerzas respecto al centro de masas es igual a cero; en consecuencia, tomando como positivos los momentos de sentido antihorario, la ecuación es

$$-T \times 0,15 - N_B \times x - F \times 0,15 = 0 \quad (3)$$

Sustituyendo los valores de  $T$ ,  $F$  y  $N_B$  en la ecuación (3), resulta un valor  $x = -97,5$  mm. El signo menos revela que la fuerza  $N_B$  actúa a la derecha del centro de masas, y no a la izquierda como se supuso.

- 16.31.** En la Figura 16.41, el soporte A tiene una aceleración hacia la izquierda de  $2,5$  m/s<sup>2</sup>. Pero B está articulada en P y su extremo superior descansa en H sobre la superficie vertical lisa. Las masas de A y B son, respectivamente, de  $30$  kg y  $7$  kg. Hallar la fuerza horizontal  $F$  y el empuje horizontal  $H$  sobre el extremo superior de la barra.

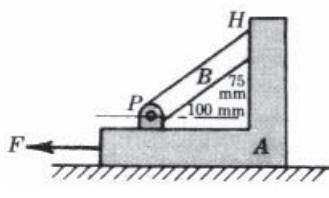


Figura 16.41

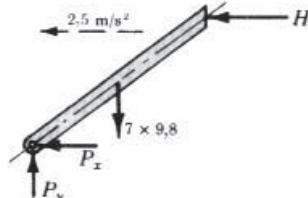


Figura 16.42

### SOLUCIÓN

Considerando el diagrama de cuerpo libre para todo el conjunto, al sumar las fuerzas horizontalmente (sentido positivo, hacia la izquierda), se obtiene

$$F = Ma = (30 + 7)(2,5) = 92,5 \text{ N}$$

Seguidamente, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la barra B tal como se muestra en la Figura 16.42. Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_h = Ma_h \quad \text{o sea,} \quad P_x + H = 7(2,5) \quad (1)$$

$$\sum F_v = Ma_v \quad \text{o sea,} \quad P_y - 7 \times 9,8 = 0 \quad (2)$$

$$\sum \bar{M} = 0 \quad \text{o sea,} \quad (0,0375)H - (0,0375)P_x - (0,05)P_y = 0 \quad (3)$$

De la ecuación (1),  $P_x = 17,5 - H$

De la ecuación (2),  $P_y = 68,6$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3) resulta

$$(0,0375)H - (0,0375)(17,5) + (0,0375)H - (0,05)(68,6) = 0$$

Por tanto,  $H = 54,5$  N.

- 16.32.** Los dos cuerpos A y B de la Figura 16.43 tienen una masa de 20 kg cada uno. A B se clava un pequeño listón para que A no deslice cuando P acelera el sistema hacia la izquierda sobre el plano liso. Hallar el valor máximo de P sin que A vuelque. Si el sistema se movía inicialmente hacia la derecha con una velocidad de 3 m/s, ¿cuál será su velocidad tras desplazarse 4 m?

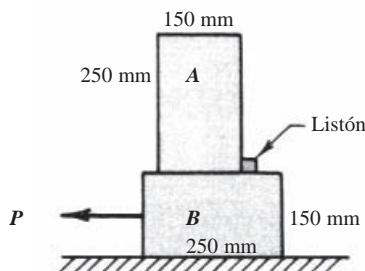


Figura 16.43

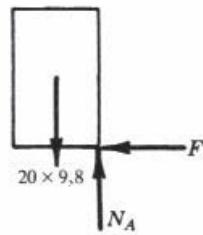


Figura 16.44

#### SOLUCIÓN

En la Figura 16.44 se representa el diagrama de cuerpo libre de A. La fuerza normal  $N_A$  se representa actuando hacia arriba en el borde derecho, ya que el bloque está a punto de volcar. Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_h = Ma_h \quad \text{o sea,} \quad F = 20a \quad (1)$$

$$\sum F_v = Ma_v = 0 \quad \text{o sea,} \quad N_A - 20 \times 9,8 = 0 \quad (2)$$

$$\sum \bar{M} = 0 \quad \text{o sea,} \quad N_A \times 0,075 - F \times 0,125 = 0 \quad (3)$$

La ecuación (2) da  $N_A = 90$  N, y este valor llevado a la ecuación (3) permite hallar  $F = 118$  N. Con este valor sustituido en la ecuación (1), calculamos  $a = 5,9$  m/s<sup>2</sup>.

Para hallar la velocidad tras un trayecto de 4 m, consideramos primero la distancia recorrida hacia la derecha hasta que la velocidad se anula. Según la cinemática

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad 0 = (+3)^2 - 2(5,9)s \quad s = 0,76 \text{ m}$$

El resto de los 4 m son 3,24 m hacia la izquierda. Si este sentido lo tomamos como positivo, y empleamos la misma ecuación de la cinemática, será  $v^2 = 0 + 2 \times 5,9 \times 3,24$ . De aquí, la velocidad final es de 6,18 m/s<sup>2</sup> hacia la izquierda.

- 16.33.** El bloque A, de masa 30 kg, está situado encima de un bloque B, de masa 45 kg, tal como se muestra en la Figura 16.45. Entre ambos bloques el coeficiente de rozamiento es de  $\frac{1}{3}$ , y entre el bloque B y el plano horizontal es de  $\frac{1}{10}$ . Hallar el máximo valor de P para que el bloque A no se deslice ni vuelque.

#### SOLUCIÓN

Empezamos hallando para qué fuerza P el bloque A se desliza sobre el B. En la Figura 16.46 se representan los diagramas de cuerpo libre con una fuerza de rozamiento entre los bloques de valor  $\frac{1}{3} N_A$ .

La ubicación de la reacción  $N_A$  no se conoce, pero es un dato irrelevante. Por inspección, vale  $30 \times 9,8 = 294$  N. Igualmente por inspección, la reacción  $N_B$  es  $294 + 45 \times 9,8 = 735$  N.

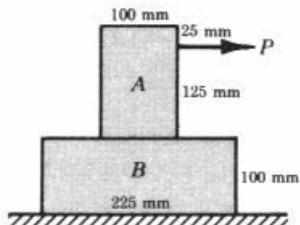


Figura 16.45

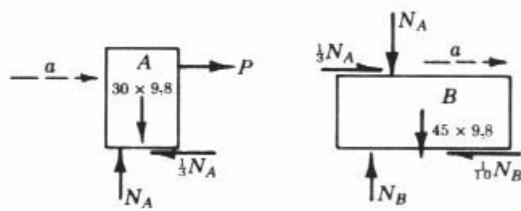


Figura 16.46

Para el cuerpo A, la otra ecuación de movimiento es

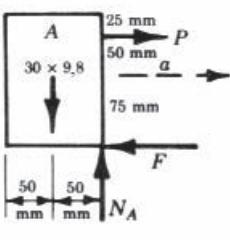
$$\sum F_h = ma_h \quad \text{o sea, } P - \frac{1}{3}N_A = 30a \quad (1)$$

Para el cuerpo B, la ecuación de movimiento necesaria es

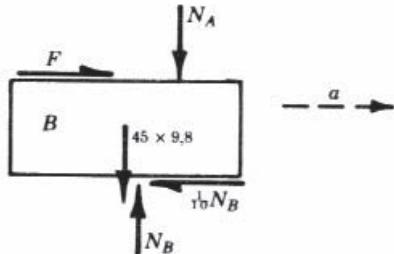
$$\sum F_h = ma_h \quad \text{o sea, } \frac{1}{3}N_A - \frac{1}{10}N_B = 45a \quad (2)$$

Estas ecuaciones dan  $a = 0,544 \text{ m/s}^2$  y  $P = 114 \text{ N}$  (para que A se deslice sobre B).

Seguidamente, se dibujan los diagramas de cuerpo libre necesarios para hallar el valor de  $P$  que provoca el vuelco de A (Figura 16.47). Ahora, la componente normal  $N_A$  de la reacción debe situarse en la esquina inferior derecha. Se desconoce la componente de rozamiento  $F$  de la reacción.



(a)



(b)

Figura 16.47

Por inspección,  $30 \times 9,8 = 294 \text{ N}$ ,  $N_B = 735 \text{ N}$ , y el rozamiento en la superficie inferior es  $\frac{1}{10}$  de 735, o sea, 73,5 N.

Las ecuaciones de movimiento del bloque A son

$$\sum F = ma_h \quad \text{o sea, } P - F = 30a \quad (1)$$

$$\sum \bar{M} = 0 \quad \text{o sea, } -P \times 0,05 + N_A \times 0,050 - F \times 0,075 = 0 \quad (2)$$

La ecuación necesaria para el bloque B es

$$\sum F_h = ma_h \quad \text{o } F - 73,5 = 45a \quad (3)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1), (2) y (3), se obtiene  $P = 132 \text{ N}$ .

El menor de los dos valores de  $P$ , es decir, 114 N, es el máximo valor de  $P$  que no provoca el deslizamiento ni el vuelco del bloque A.

- 16.34.** Calcular el tiempo mínimo que debe tardar la carretilla elevadora de la Figura 16.48 en alcanzar su velocidad nominal de 1,5 m/s, sin que vuelquen los seis embalajes de 1500 mm de alto. Cada embalaje mide 250 mm de alto con una base de 400 mm de lado. Se supone que el coeficiente de rozamiento existente basta para impedir el deslizamiento.

#### SOLUCIÓN

En el diagrama de cuerpo libre de este problema se supone que el conjunto de la carretilla con los embalajes se mueve hacia la derecha. Por ello, la fuerza efectiva invertida, o fuerza de inercia,  $M\ddot{a}$  está aplicada

hacia la izquierda en el centro de masas para mantener el sistema en «equilibrio a efectos de estudio». El vuelco tiende a producirse en torno al borde inferior izquierdo.

Tomando momentos respecto a ese borde, tenemos

$$M \times 9,8 \times 0,2 = M\bar{a} \times 0,75$$

La aceleración máxima será, pues,  $\bar{a} = 2,61 \text{ m/s}^2$ . Al ser  $v = v_0 + at$ , el tiempo mínimo será  $t = 0,57 \text{ s}$ .

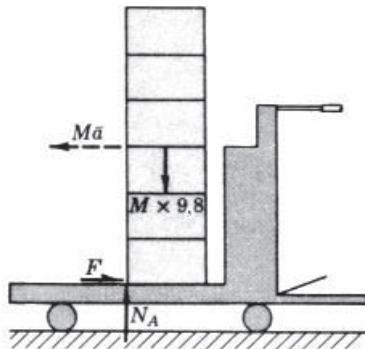


Figura 16.48

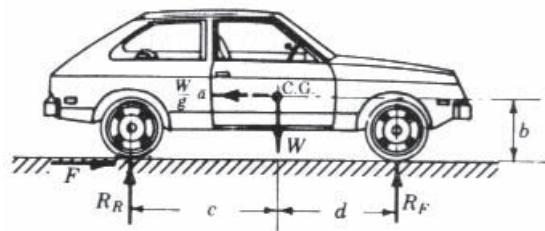


Figura 16.49

**16.35.** El automóvil de la Figura 16.49 es de tracción trasera.

- ¿Qué fuerza deben ejercer sobre la calzada las ruedas traseras para producir una aceleración  $\bar{a}$  hacia la derecha?
- Despreciando los efectos de la inercia a la rotación de las ruedas, ¿cuál es la aceleración máxima posible para un coeficiente de rozamiento dado  $\mu$  entre los neumáticos y el pavimento?
- Suponiendo un rozamiento suficiente, ¿cuál es la aceleración necesaria para que el vehículo se encabrite?

#### SOLUCIÓN

- Para mantener el vehículo en «equilibrio a efectos de estudio» aplicamos la fuerza de inercia ( $W/g$ )  $\bar{a}$ . Sumando fuerzas horizontalmente,  $\sum F_h = F - (W/g) \bar{a}$ ; de aquí,  $F = (W/g) \bar{a}$ .
- Para calcular la aceleración máxima posible, hay que encontrar  $R_R$ . El rozamiento máximo se halla con  $F = \mu R_R$ .

Tomando momentos respecto a  $R_F$ , resulta

$$-R_R \times (c + d) + W \times d + \frac{W}{g} \bar{a} \times b = 0$$

y de aquí,

$$R_R = \frac{Wd}{c+d} + \frac{Wb\bar{a}}{g(c+d)}$$

por tanto,

$$F = \mu R_R = \mu \frac{Wd}{c+d} + \mu \frac{Wb\bar{a}}{g(c+d)}$$

Llevando este valor de  $F$  a  $F = (W/g) \bar{a}$ , y despejando luego  $\bar{a}$ , se obtiene  $\bar{a} = \mu dg / (c+d - \mu b)$ .

Adviértase que con este tipo de solución (empleando como se expone las ecuaciones de movimiento), los momentos pueden tomarse respecto a un punto que no sea el centro de masas.

(c) En este caso, es nula la reacción  $R_F$  sobre las ruedas delanteras. Sumando los momentos respecto a la recta de contacto entre las ruedas traseras y el suelo, se obtiene  $\sum M_{R_R} = 0 = (W/g)\bar{a} \times b - W \times c$ . De aquí, la aceleración que provoca el vuelco hacia atrás es  $\bar{a} = cg/b$ .

- 16.36.** La furgoneta de la Figura 16.50 es de tracción delantera, y puede acelerar en 13,8 s desde 0 a 60 mi/h. Bajo esa aceleración, hallar las reacciones verticales ( $R_F$  y  $R_R$ ) sobre las ruedas delanteras y traseras, así como la fuerza de rozamiento necesaria entre las ruedas delanteras y la carretera. El vehículo pesa 3385 lb y su centro de masas está situado a 46 in por detrás del contacto de las ruedas delanteras con la carretera.

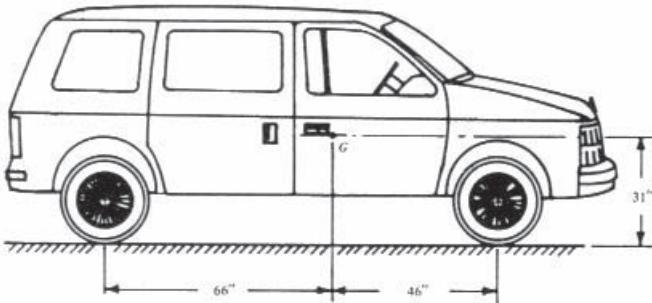


Figura 16.50

#### SOLUCIÓN

Para calcular  $\bar{a}$ , empleamos  $v = v_0 + \bar{a}t$ , o sea,

$$60 \times 5280 / 3600 = 0 + \bar{a} \times 13,8$$

por tanto,  $\bar{a} = 6,38 \text{ ft/s}^2$

Al sumar las fuerzas horizontales, se obtiene la fuerza de rozamiento

$$\sum F_h = F = (3385/g) \times 6,38 \quad F = 671 \text{ lb}$$

Al sumar las fuerzas verticales y los momentos respecto a  $G$  se obtiene un sistema de dos ecuaciones en  $R_F$  y  $R_R$ :

$$\begin{aligned} \sum F_v &= R_R + R_F - 3385 = 0 \\ \sum \bar{M} &= -66R_R + 46R_F + 671 \times 31 = 0 \\ R_F &= 1809 \text{ lb} \quad R_R = 1576 \text{ lb} \end{aligned}$$

#### otación

- 16.37.** La barra homogénea de la Figura 16.51 está sobre una mesa horizontal lisa. Puede girar en torno a un eje vertical que pasa por su extremo izquierdo  $O$ . En su otro extremo se aplica una fuerza horizontal  $F$  perpendicularmente a ella. La masa de la barra es  $m$ , su longitud es  $l$  y su celeridad angular es cero cuando se aplica la fuerza. Hallar la aceleración  $\alpha$  y la reacción en el eje que pasa por  $O$ .

#### SOLUCIÓN

Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \sum F_n &= m\bar{r}\omega^2 = 0 \quad \text{o sea, } O_n = 0 \\ \sum F_t &= mr\alpha \quad \text{o sea, } O_t + F = m\frac{l}{2}\alpha \end{aligned}$$

$$\sum M_O = I_O \alpha \quad \text{o sea, } Fl = \frac{1}{3} ml^2 \alpha$$

Se halla de inmediato que  $\alpha = 3F/ml$  y  $O_t = \frac{1}{2}F$ .

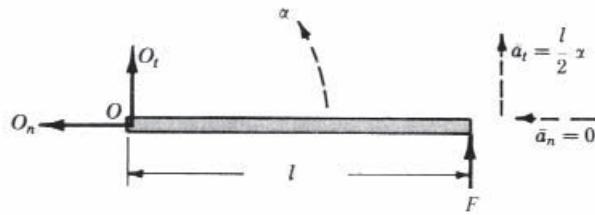


Figura 16.51

**16.38.** Resolver el Problema 16.37, pero con la fuerza horizontal  $F$  aplicada en el centro de percusión.

#### SOLUCIÓN

El brazo de  $F$  es la distancia  $q$  al centro de percusión. Así pues,

$$q = \frac{k_O^2}{r} = \frac{I_O}{m\bar{r}} = \frac{\frac{1}{3}ml^2}{\frac{1}{2}ml} = \frac{2}{3}l$$

Las ecuaciones quedarán

$$\sum F_i = m\bar{r}\alpha \quad \text{o sea, } O_n + F = \frac{1}{2}ml\alpha$$

$$\sum M_O = I_O \alpha \quad \text{o sea, } F(\frac{2}{3}l) = (\frac{1}{3}ml^2)\alpha$$

La solución es  $\alpha = 2F/ml$  y  $O_t = 0$ .

Esto significa que la componente tangencial de la reacción es nula si la fuerza pasa por el centro de percusión. Los bateadores de béisbol saben que una pelota que golpee en el bate a dos tercios de la longitud de éste midiendo desde las manos no repica. Ello se debe a que  $O_t$  es nula o casi nula.

**16.39.** Una barra articulada a un eje horizontal que pasa por su extremo inferior se deja caer desde la posición vertical. Describir el movimiento.

#### SOLUCIÓN

Sea  $l$  la longitud de la barra y  $m$  su masa. En el diagrama de cuerpo libre de la Figura 16.52 se representan el peso  $mg$  actuando hacia abajo y las reacciones  $R_t$  y  $R_n$  en el punto de suspensión. Se supone que la barra se encuentra desviada un ángulo  $\theta$  respecto a la posición de reposo vertical.

La barra gira en torno a un eje fijo por efecto de un sistema de fuerzas no equilibradas, siendo  $\sum F_n = m\bar{r}\omega^2$ ,  $\sum F_t = m\bar{r}\alpha$  y  $\sum M_O = I_O\alpha$  las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, al describir el movimiento, basta con determinar la velocidad y la aceleración angulares en función del desplazamiento  $\theta$ . Por tanto, la única ecuación necesaria es  $\sum M_O = I_O\alpha$ .

La única fuerza externa que da un momento respecto a  $O$  es el peso  $mg$ . Por tanto, tomando como positivos los momentos horarios,  $mgd = I_O\alpha$ .

Pero  $d = \frac{1}{2}l \operatorname{sen} \theta$ ,  $I_O = \frac{1}{3}ml^2$  y  $\alpha = d^2\theta/dt^2$ ; por tanto,

$$mg(\frac{1}{2}l \operatorname{sen} \theta) = \frac{1}{3}ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{o} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{3g}{2l} \operatorname{sen} \theta$$

Esta ecuación diferencial puede resolverse teniendo en cuenta que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

La ecuación original  $d^2\theta/dt^2 = (3g/2l) \operatorname{sen} \theta$  puede ahora escribirse

$$\omega \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{3g}{2l} \sin \theta$$

Multiplicando ambos miembros por  $d\theta$ , se obtiene

$$\omega d\omega = \frac{3g}{2l} \sin \theta d\theta$$

Integrando, resulta  $\frac{1}{2}\omega^2 = -(3g/l) \cos \theta + C$ , donde  $C$  es la constante de integración. Para calcular  $C$ , téngase en cuenta que  $\omega = 0$  cuando  $\theta = 0$ . Por tanto,  $0 = -(3g/2l)(1) + C$ , o sea,  $C = 3g/2l$ . Entonces,

$$\frac{1}{2}\omega^2 = -\left(\frac{3g}{2l}\right) \cos \theta + \frac{3g}{2l} \quad y \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1 - \cos \theta)}$$

Éste es un procedimiento para calcular  $\omega$  en función de  $\theta$  y, por supuesto,  $\alpha = (3g/2l) \sin \theta$ .

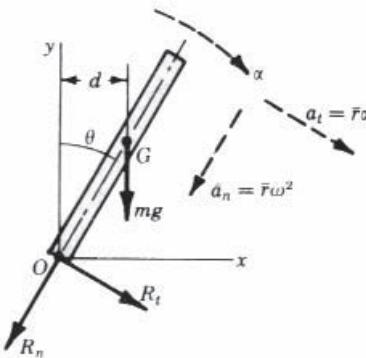


Figura 16.52

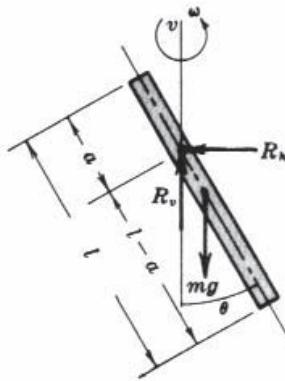


Figura 16.53

- 16.40.** Una barra uniforme de longitud  $l$  y masa  $m$  rota a velocidad angular constante  $\omega$  alrededor de un eje vertical que pasa por un punto situado a una distancia  $a$  de un extremo. Para la posición indicada en la Figura 16.53, en que la barra está en el plano del papel, hallar las componentes horizontal y vertical de la reacción en el punto de suspensión.

#### SOLUCIÓN

Se supone que  $a$  es menor que la mitad de la longitud. El peso es  $mg$  y las componentes, horizontal y vertical, de la reacción en el cojinete se representan aplicadas a la barra.

Adviértase que, al ser constante la celeridad angular  $\omega$ , la aceleración angular  $\alpha$  es nula. Por tanto, no hay fuerzas actuantes que tengan momentos respecto al eje vertical. Esto es consecuencia de la ecuación escalar  $3M_v = I_v\alpha = I_v(0)$ .

Asimismo, téngase en cuenta que las ecuaciones de movimiento ( $\sum F_n = m\bar{r}\omega^2$ ,  $\sum F_t = m\bar{r}\alpha$  y  $\sum M_O = I_O\alpha$ ) no son válidas para el cuerpo en su conjunto, pues la barra rota alrededor de un eje que no es perpendicular a su plano de simetría.

Imaginemos la barra compuesta de muchos trozos de corta longitud, moviéndose cada uno en torno al eje vertical con una velocidad  $\omega$  y cada uno a una distancia  $\rho$  de ese eje.

Según la Figura 16.54,

$$\rho = z \operatorname{sen} \theta \quad y \quad dm = \frac{dz}{l} m$$

Cada masa infinitesimal describe una circunferencia de radio  $\rho$ . Por tanto, a lo largo de  $\rho$  hay una aceleración normal  $a_n$  apuntada hacia el eje. Esta aceleración  $a_n$  está acompañada de una fuerza  $dF$  ( $dF = dm \times a_n$ ). La suma de todas esas fuerzas normales (todas horizontales) debe ser igual al módulo de la reacción horizontal  $R_h$  del cojinete sobre la barra. Como en la posición de la figura, el tramo de barra más largo se

halla a la derecha del eje, las fuerzas normales dirigidas hacia la izquierda son mayores que las actuantes hacia la derecha. Por tanto, la reacción  $R_h$  que contrarresta a esas fuerzas normales actúa hacia la izquierda.

La fuerza normal sobre la partícula  $dm$  indicada en la figura actúa hacia el eje, es decir, hacia la izquierda y, por ello, en sentido negativo. Por tanto,

$$dF = -dm \rho \omega^2 = -\frac{dz}{l} m(z \operatorname{sen} \theta) \omega^2$$

y la fuerza total es

$$F = \int dF = \int_{-a}^{l-a} -\frac{dz}{l} m(z \operatorname{sen} \theta) \omega^2$$

como  $\theta$  y  $\omega^2$  pueden salir fuera del signo de integración:

$$F = R_h = -\frac{m \omega^2 \operatorname{sen} \theta}{l} \int_{-a}^{l-a} z dz = -m \omega^2 (\frac{1}{2}l - a) \operatorname{sen} \theta$$

Para hallar  $R_v$ , nos basamos en que la suma de las fuerzas verticales debe ser cero:

$$\sum F_v = 0 = R_v - mg, \quad \text{es decir, } R_v = mg$$

Para una explicación de la relación entre  $\omega$  y  $\theta$ , cfr. Problema 16.42.

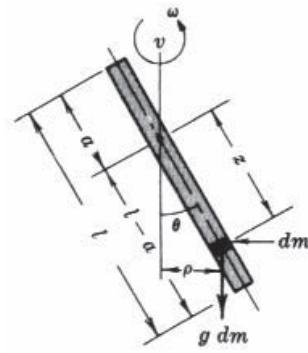


Figura 16.54

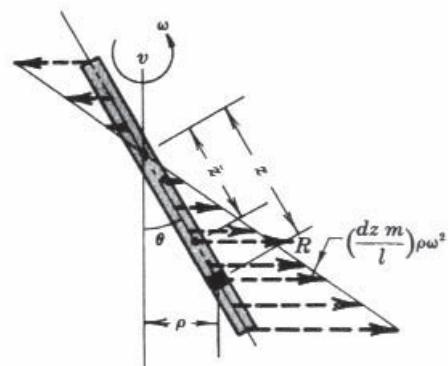


Figura 16.55

- 16.41.** En el Problema 16.40, ubicar la posición de la fuerza de inercia para mantener la barra en «equilibrio sólo a efectos de estudio».

#### SOLUCIÓN

Como la barra rota alrededor de un eje que no es perpendicular a un plano de simetría, tomamos unos elementos de masa que puede considerarse que están rotando en un plano perpendicular al eje de rotación.

En la Figura 16.55, se representan las fuerzas de inercia normales

$$dm \rho \omega^2 = \frac{dz}{l} m \omega^2 \rho$$

para segmentos de barra de longitud  $dz$ , las cuales se alejan del eje vertical. Se representa también la fuerza única  $R$  aplicada en un punto que dista  $\bar{z}$  del punto de suspensión. Esta fuerza debe ser igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre los elementos de longitud de la barra, y su momento respecto al punto de suspensión debe ser igual a la suma de los momentos de las fuerzas anteriores respecto al mismo punto. Por tanto,

$$R = \int_{-a}^{l-a} \frac{dz}{l} m \omega^2 \rho = \int_{-a}^{l-a} \frac{dz}{l} m \omega^2 z \operatorname{sen} \theta = \frac{m \omega^2 \operatorname{sen} \theta}{2} (l - 2a)$$

Este resultado es, desde luego, igual en valor absoluto al deducido en el Problema 16.40.

A continuación, tomamos momentos respecto al punto de suspensión de las fuerzas de inercia en cada elemento de longitud, y su suma la igualamos al momento de la fuerza  $R$  respecto a ese punto. Las fuerzas

son todas horizontales y los brazos de los momentos son todos verticales (por consiguiente, iguales a la distancia  $z$  multiplicada por  $\cos \theta$ ).

$$R\bar{z} \cos \theta = \int_{-a}^{l-a} z \cos \theta \frac{dz}{l} m\omega^2 \rho$$

Sustituyendo  $R$  en esta ecuación por su valor deducido antes y  $\rho$  por  $z \sin \theta$ , queda

$$\frac{m\omega^2 \sin \theta}{2} (l-2a)\bar{z} \cos \theta = \frac{\cos \theta m\omega^2 \sin \theta}{l} \int_{-a}^{l-a} z^2 dz$$

Cuando  $\theta \neq 0$  o  $90^\circ$ ,

$$\frac{\bar{z}}{2}(l-2a) = \frac{1}{3l}[(l-a)^3 - (-a)^3] \quad \text{o} \quad \bar{z} = \frac{2}{3} \left( \frac{l^2 - 3la + 3a^2}{l-2a} \right)$$

Desde luego, si la barra rota alrededor de un eje que pase por su extremo, la anterior expresión de  $\bar{z}$  se reduce a  $\frac{2}{3}l$ , pues entonces  $a$  es cero. En esas condiciones, la fuerza  $R$  es

$$R = \frac{1}{2}m\omega^2 l \sin \theta$$

#### 16.42. Resolver el Problema 16.40 por el método de las fuerzas de inercia.

##### SOLUCIÓN

Se indicó en el Problema 16.41 que la fuerza de inercia ( $\frac{1}{2}ml\omega^2 \sin \theta$ ) para una barra de longitud  $l$  que rote alrededor de su extremo debe aplicarse a una distancia de dos tercios la longitud de la barra. Aplicando sendas fuerzas de inercia a cada una de las partes de la barra, tal como se muestra en la Figura 16.56, el problema puede enfocarse como si fuera de estática.

Adviértase que al sistema se le aplican un par de fuerzas  $C$  en el punto de suspensión, porque no es evidente por inspección que sea nula la suma de los momentos respecto al punto de suspensión de las dos fuerzas de inercia y el peso.

Las ecuaciones de equilibrio son

$$\sum F_h = 0 = +R_h - \left( \frac{a}{l} m \right) \left( \frac{1}{2} \omega^2 \sin \theta \right) a + \left( \frac{l-a}{l} m \right) \left( \frac{1}{2} \omega^2 \sin \theta \right) (l-a) \quad (1)$$

$$\sum F_v = 0 = -mg + R_v \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum M_o = 0 = & \left[ \left( \frac{l-a}{l} m \right) \left( \frac{1}{2} \omega^2 \sin \theta \right) (l-a) \right] \left[ \frac{2}{3} (l-a) \cos \theta \right] \\ & + \left[ \left( \frac{a}{l} m \right) \left( \frac{1}{2} \omega^2 \sin \theta \right) a \right] \left[ \frac{2}{3} a \cos \theta \right] - mg \left( \frac{1}{2} l - a \right) \sin \theta + C \end{aligned} \quad (3)$$

De la ecuación (1),  $R_h = -\frac{1}{2}\omega^2 m(l-2a) \sin \theta$ .

Este resultado concuerda, desde luego, con el del Problema 16.40. El signo menos indica que el sentido asignado a  $R$  es incorrecto y que realmente esa fuerza actúa hacia la izquierda.

De la ecuación (3),  $C = m \sin \theta [g(\frac{1}{2}l - a) - \frac{1}{3}\omega^2 (l^2 - 3la + 3a^2) \cos \theta]$ .

Puede ahora apreciarse el significado del par  $C$ . Para que la barra se mantenga bajo un ángulo deseado  $\theta$ , cuando rota con una celeridad angular dada  $\omega$ , hace falta aplicar un par cuyo momento debe ser el recién deducido. Sin embargo, si en el punto de suspensión no hay un par de momento  $C$ , la barra de por si se coloca bajo un ángulo definido para cada valor de la celeridad angular  $\omega$ . Ese ángulo  $\theta$  puede determinarse igualando a cero la expresión de  $C$ . En consecuencia, como  $\sin \theta \neq 0$ ,

$$\cos \theta = \frac{3g(\frac{1}{2}l - a)}{(l^2 - 3la + 3a^2)\omega^2}$$

Una vez hallado  $\theta$ , puede calcularse  $R_h$  introduciendo en la expresión de ésta el valor de  $\sin \theta$ .

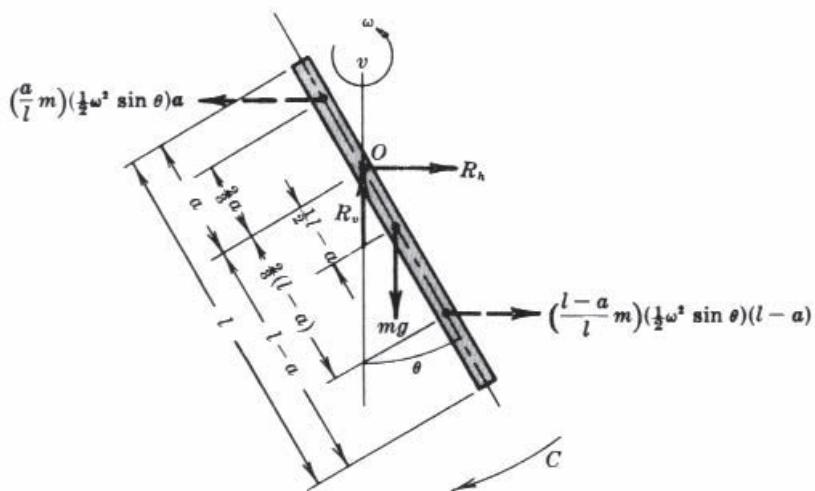


Figura 16.56

- 16.43.** Un torno de 161 lb de peso (valor elegido porque así la masa es de 5,00 slugs) gira a partir del reposo sobre cojinetes sin rozamiento bajo la acción de un peso de 16,1 lb que cuelga de una cuerda arrollada a su alrededor, tal como se muestra en la Figura 16.57(a). Si el diámetro es de 36 in, ¿cuánto valdrá la celeridad angular del torno a los 2 s de iniciarse el movimiento?

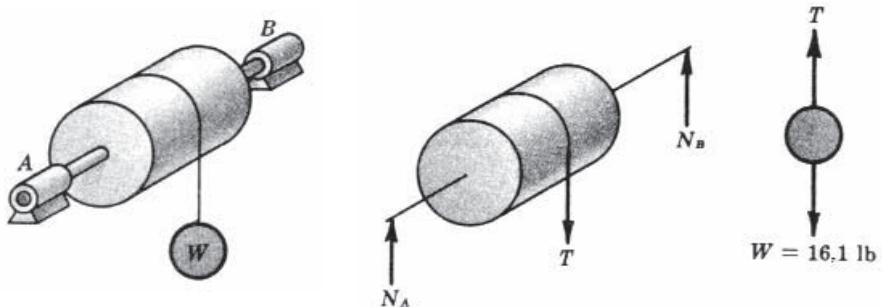


Figura 16.57

**SOLUCIÓN**

En la Figura 16.57(b) se representan los diagramas de cuerpo libre del torno y el peso. Obsérvese que en ambos la tensión de la cuerda es la misma.

Para hallar la celeridad angular  $\omega$  a los dos segundos, hay que calcular el valor  $\alpha$  de la aceleración angular, lo que hacemos mediante la teoría del presente capítulo. La única ecuación necesaria para el cilindro es la de momentos:

$$\sum M_{AB} = \bar{I}_{AB} \alpha$$

El subíndice  $AB$  significa *respecto al eje AB*. Entonces,

$$T \times r = \frac{1}{2} mr^2 \alpha \quad \text{o bien,} \quad T \times 1,5 = \frac{1}{2} \left( \frac{16,6}{32,2} \right) (1,5)^2 \alpha \quad (1)$$

Dado que desconocemos tanto la tensión  $T$  como la aceleración angular  $\alpha$ , necesitamos otra ecuación. Escribimos la ecuación de movimiento del peso  $W$  sumando las fuerzas en la dirección vertical:

$$\sum F_v = ma_v \quad \text{o sea,} \quad 16,1 \text{ lb} - T = \frac{16,1}{32,2} a_v \quad (2)$$

Sustituyendo  $a_v = r\alpha = 1,5\alpha$  en la ecuación (2),

$$16,1 - T = \frac{16,1}{32,2} (1,5\alpha) \quad (2')$$

En (1) se despeja  $T = 3,75\alpha$  y se sustituye en (2') para obtener  $\alpha = 3,58 \text{ rad/s}^2$ . Para calcular  $\omega$  a los dos segundos:  $\omega = \omega_0 + at = 0 + (3,58)(2) = 7,16 \text{ rad/s}$ .

**16.44.** Estudiar el movimiento del péndulo físico de la Figura 16.58.

#### SOLUCIÓN

El péndulo físico difiere del péndulo matemático, o péndulo simple, en que en éste sólo hay que considerar una masa de pequeño tamaño. En este problema, tratamos con un gran número de partículas dotadas de velocidades y aceleraciones lineales distintas. El sistema rota en torno a un eje perpendicular al plano del papel, pero ese eje no es centroidal.

Se supone que el péndulo se mueve en sentido antihorario; es decir, que  $\theta$  es positivo en ese sentido. Su peso producirá así un momento respecto al eje que tiende a retardar el movimiento. Por tanto, al tomar momentos respecto al eje de rotación, resulta la ecuación

$$\sum M_o = I_o \alpha$$

y como el brazo horizontal del momento del peso  $mg$  es  $\bar{r} \sin \theta$ , la ecuación anterior se escribe

$$\sum M_o = -(mg)(\bar{r} \sin \theta) = I_o \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{o sea,} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{I_o/m\bar{r}} \sin \theta$$

Esta ecuación es del mismo tipo que la que se deduce para un péndulo simple de longitud  $l$  que es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Se ve, así, que el péndulo físico tiene el mismo periodo que un péndulo simple de longitud  $l$  igual a  $I_o/m\bar{r}$ .

Esto puede formularse de un modo algo diferente si en el lugar de  $I_o$  se pone su valor en función del radio de giro  $k_o$  del péndulo físico respecto al eje de rotación.

Como  $I_o = mk_o^2$ , la longitud  $l$  del péndulo simple equivalente puede escribirse

$$l = \frac{I_o}{m\bar{r}} = \frac{mk_o^2}{m\bar{r}} = \frac{k_o^2}{\bar{r}}$$

El péndulo físico se comporta como un péndulo simple con su masa concentrada a una distancia  $k_o^2/\bar{r}$  del eje de rotación. Este valor  $k_o^2/\bar{r}$  se presenta con gran frecuencia en los problemas de rotación.



Figura 16.58

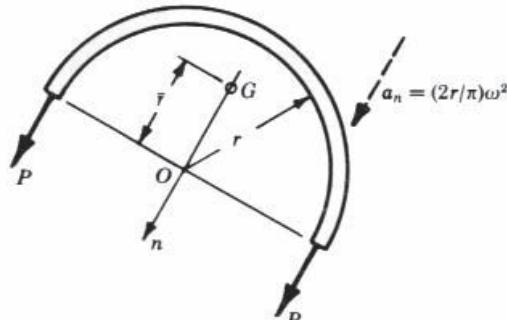


Figura 16.59

**16.45.** Calcular el esfuerzo en la llanta de un volante que gira con una celeridad angular constante  $\omega$ .

#### SOLUCIÓN

En la Figura 16.59 se representa el diagrama de cuerpo libre de media llanta. El sentido positivo del eje  $n$  es de  $G$  hacia  $O$ , siendo  $G$  el centro de masas de la media llanta de poco espesor. Téngase en cuenta que  $OG = 2r/\pi$ .

Las fuerzas de tracción  $P$  representan la tracción de la otra media llanta sobre el cuerpo libre de la figura. Como la rueda gira con una celeridad angular constante, no hay aceleración angular; por ello, no hay que incluir ninguna fuerza de inercia tangencial ( $m\bar{r}\alpha$ ).

Sea  $\delta$  la densidad del material. Sólo es necesaria una ecuación de movimiento

$$\sum F_n = m\bar{a}_n \quad \text{o sea,} \quad 2P = m \frac{2r}{\pi} \omega^2$$

Pero el esfuerzo de tracción es la fuerza  $P$  (en un extremo) dividida por el área de la sección transversal sobre la que actúa, o sea,  $\sigma = P/A = mr\omega^2/\pi A$ .

Seguidamente, expresamos la masa  $m$  de la media llanta en función de la sección transversal  $A$ , de la longitud de la media llanta  $\pi r$  y de la densidad  $\delta$ :

$$m = A\pi r\delta$$

Esta expresión se basa, desde luego, en la hipótesis de que el espesor de la llanta es pequeño comparado con el diámetro. Introduciendo este valor de  $m$  en la expresión del esfuerzo, tenemos

$$\sigma = \delta r^2 \omega^2$$

Como la celeridad  $v$  de la llanta es igual a  $r\omega$ , la expresión del esfuerzo puede también escribirse

$$\sigma = \delta v^2$$

donde, en las unidades tradicionales de EE. UU.,  $\sigma$  es el esfuerzo en  $\text{lb}/\text{ft}^2$ ,  $\delta$  es la densidad en  $\text{slugs}/\text{ft}^3$  y  $v$  es la celeridad de la llanta en  $\text{ft}/\text{s}$ .

En unidades SI,  $\sigma$  es el esfuerzo en  $\text{N}/\text{m}^2$ ,  $\delta$  es la densidad en  $\text{kg}/\text{m}^3$  y  $v$  es la celeridad de la llanta en  $\text{m}/\text{s}$ .

**16.46.** En los ferrocarriles, es necesario peraltar las vías en las curvas de tal modo que el carril exterior quede a más altura que el interior. Se llama peralte  $e$  a la distancia vertical entre ambos carriles. Cuanto mayor es el peralte  $e$ , mayor es la velocidad a la que un tren puede pasar por la curva. Hallar el valor de  $e$  en función de la celeridad  $v$  del tren, el radio  $r$  de la curva y el ángulo de balance. [Figura 16.60(a)].

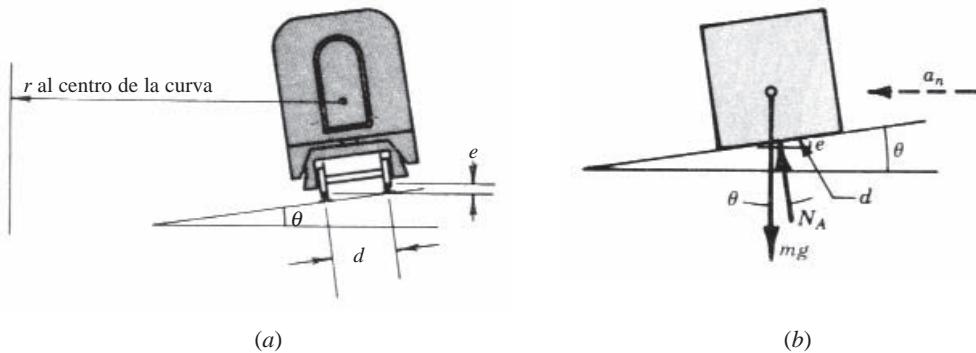


Figura 16.60

#### SOLUCIÓN

Asimilamos la situación a la de una partícula de masa  $m$  que ejecuta un movimiento de rotación alrededor del centro de la curva.

Supongamos que la curva esté correctamente peraltada para una celeridad definida. Esto significa que el tren no tiende a deslizarse ni hacia adentro ni hacia afuera en la dirección del radio. Por tanto, es nula la

presión lateral que cada carril ejerce contra la pestaña de la rueda. La única reacción sobre el vagón es el empuje, perpendicular al terraplén, de las vías sobre las ruedas.

En el diagrama de cuerpo libre de la Figura 16.60(b) se representan el peso  $mg$  y una única reacción  $N_A$  de las vías. Adviértase que la aceleración  $a_n$  apunta hacia la izquierda, hacia el centro de la curva. Su módulo es  $r\omega^2$ . Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_n = mr\omega^2 \quad \text{o sea,} \quad N_A \sin \theta = mr\omega^2$$

$$\sum F_v = 0 \quad \text{o sea,} \quad N_A \cos \theta = mg$$

dividiendo miembro a miembro,  $\tan \theta = r\omega^2/g$ .

Como  $\theta$  suele ser un ángulo pequeño (menor o igual que unos  $6^\circ$ ),  $\tan \theta$  es aproximadamente igual a  $\sin \theta$ ; por consiguiente, la última expresión puede escribirse

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{r\omega^2}{g} = \frac{r^2\omega^2}{gr}$$

Pero, según la figura,  $\sin \theta = e/d$ . Por tanto,  $e/d = r^2\omega^2/gr = v^2/gr$ , o sea,  $e = dv^2/gr$ .

- 16.47.** En el Problema 16.46, calcular el peralte para una curva de 2000 ft y una velocidad de 120 mi/h.

Se supone un ancho de vía  $d = 4 \text{ ft } 8\frac{1}{2} \text{ in.}$

#### SOLUCIÓN

$$e = \frac{dv^2}{gr} = \frac{(4,71 \text{ ft})(176 \text{ ft/s})^2}{(32,2 \text{ ft/s}^2)(2000 \text{ ft})} = 2,27 \text{ ft} = 27,2 \text{ in}$$

- 16.48.** El peso  $A$  de la Figura 16.61(a) tiene una aceleración descendente de  $5 \text{ ft/s}^2$ . Mediante una cuerda flexible, inextensible y sin peso, que pasa por un carrete liso, está unido a un torno homogéneo  $B$  de peso 161 lb. Éste está accionado por un par antihorario de momento  $C = 50 \text{ lb}\cdot\text{ft}$ . Hallar el peso de  $A$  y las componentes de la reacción en  $O$  sobre el torno  $B$ .

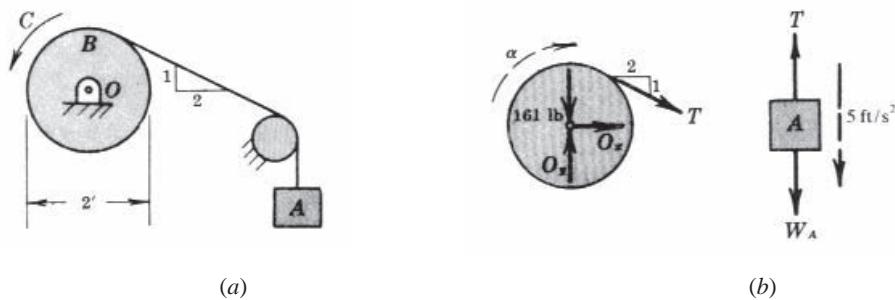


Figura 16.61

#### SOLUCIÓN

Los diagramas de cuerpo libre del peso y el torno se muestran en la Figura 16.61(b).

El módulo  $a_t$  de la aceleración tangencial de un punto de la llanta es  $5 \text{ ft/s}^2$ . Por tanto, la aceleración angular  $\alpha$  vale  $a_t/r = 5 \text{ rad/s}^2$ . Como el torno gira alrededor de un eje de simetría, sus tres ecuaciones de movimiento son

$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \quad \text{o sea,} \quad T \times 1 - 50 = \frac{1}{2} \left( \frac{161}{32,2} \right) (1)^2 (5) \quad (1)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \text{o sea,} \quad O_x + T \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{o sea,} \quad O_y - 161 - T \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0 \quad (3)$$

La ecuación de movimiento del peso A es

$$W_A - T = \frac{W_A}{g} \quad (4)$$

La ecuación (1) da  $T = 62,5$  lb, y de aquí, según la ecuación (4),  $W_A = 74,0$  lb.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (2) y (3), se obtiene  $O_x = -55,9$  lb y  $O_y = +189$  lb.

- 16.49.** Una esfera homogénea de 100 kg de masa es solidaria de una barra esbelta de 20 kg de masa. En la posición horizontal de la Figura 16.62(a), la celeridad angular del sistema es de 8 rad/s. Hallar el módulo de la aceleración angular y la reacción en  $O$  sobre la barra.

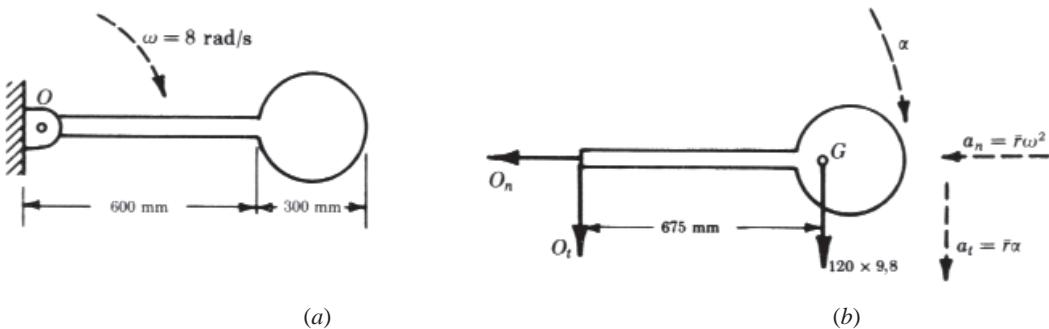


Figura 16.62

#### SOLUCIÓN

La posición del centroide del sistema relativa al pasador  $O$  es

$$\bar{r} = \frac{20(300) + 100(750)}{120} = 675 \text{ mm}$$

En la Figura 16.62(b) se representan las tres fuerzas externas actuantes sobre el sistema:  $O_n$ ,  $O_t$  y el peso del sistema aplicado en  $G$ . Nótese que  $O_n$  se representa hacia la izquierda para que su sentido concuerde con el de  $\bar{a}_n$ , y que  $O_t$  se representa hacia abajo para que su sentido concuerde con el de  $\bar{a}_t$ .

El momento de inercia total es igual al momento de inercia de la barra respecto a su extremo ( $\frac{1}{3}ml^2$ ) más el momento de inercia de la esfera respecto del extremo de la barra, o sea ( $\frac{2}{3}mr^2 + md^2$ ), siendo  $d = 750$  mm = 0,75 m.

$$I = \frac{1}{3}20(0,6)^2 + \frac{2}{5}100(0,15)^2 + 100(0,75)^2 = 59,55 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Para calcular la aceleración angular, empleamos la ecuación

$$\sum M_O = I\alpha$$

o sea,

$$120 \times 9,8 \times 0,675 = 59,55\alpha$$

Por tanto,

$$\alpha = 13,3 \text{ rad/s}^2$$

Sumando fuerzas en la dirección horizontal (según el eje  $n$ ), se obtiene

$$O_n = m\bar{r}\omega = 120(0,675)(8)^2 = 5180 \text{ N} \quad (\text{hacia la izquierda})$$

Sumando fuerzas en la dirección vertical (según el eje  $t$ ), se obtiene

$$O_t + 120 \times 9,8 = m\bar{r}\alpha = 120 \times 0,675 \times 13,3$$

o sea,

$$O_t = -98,7 \text{ N} \quad (\text{por tanto, hacia la izquierda})$$

- 16.50.** Un cilindro excéntrico empleado en un vibrador pesa 40 lb y rota en torno a un eje situado a 2 in de su centro geométrico y normal a la vista en planta de la Figura 16.63. Si los módulos  $\omega$  y  $\alpha$  de su velocidad y aceleración angulares son, respectivamente, 10 rad/s y 2 rad/s<sup>2</sup> en la posición representada, hallar la reacción sobre el cilindro del árbol vertical.

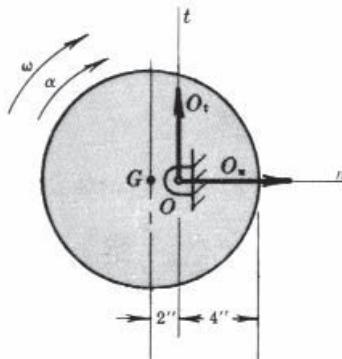


Figura 16.63

**SOLUCIÓN**

Se toman los ejes  $n$  y  $t$  indicados. La distancia de  $O$  al centro de masas es  $\bar{r} = \frac{1}{6}$  ft.  
Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_n = m\bar{r}\omega^2 \quad \text{o sea,} \quad O_n = \frac{40}{32,2} \left(\frac{1}{6}\right)(10)^2 \quad (1)$$

$$\sum F_t = m\bar{r}\alpha \quad \text{o sea,} \quad O_t = \frac{40}{32,2} \left(\frac{1}{6}\right)(2) \quad (2)$$

$$\sum M_O = I_O\alpha = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{40}{32,2} \right) \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{40}{32,2} \left( \frac{1}{6} \right)^2 \right] \times 2 \quad (3)$$

Aquí las reacciones  $O_n$  y  $O_t$  del árbol son las fuerzas externas que actúan sobre el cilindro.

Téngase en cuenta que  $I_O$  se calcula mediante el teorema de Steiner. El par necesario  $I_O\alpha$  es igual a 0,38 lb·ft y el árbol lo aplica al cilindro en sentido horario.

Las componentes de la reacción son  $O_n = 20,7$  lb, ( $\rightarrow$ ), y  $O_t = 0,41$  lb, ( $\uparrow$ ).

- 16.51.** La esfera de 6 lb de la Figura 16.64(a) describe una trayectoria circular horizontal bajo la acción de la barra sin peso  $AB$  de 8 ft y la cuerda liviana  $BC$ . Hallar las fuerzas en los miembros vinculantes cuando la celeridad de  $B$  es de 10 ft/s.

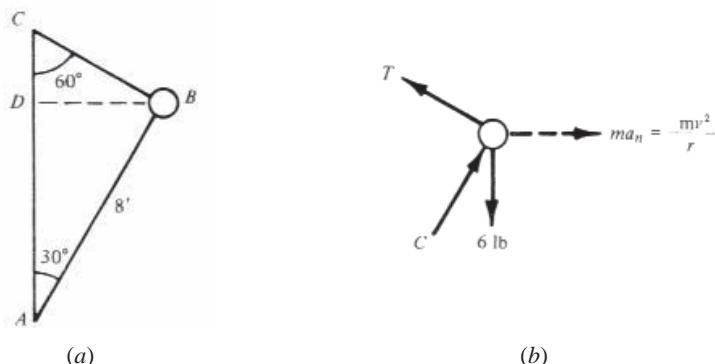


Figura 16.64

**SOLUCIÓN**

En el diagrama de cuerpo libre se muestra la fuerza de inercia que se aplica para mantener la esfera en «equilibrio a efectos de estudio». Por trigonometría,  $DB = \bar{r} = 4$  ft. Por tanto, la fuerza de inercia es

$$\frac{6}{g} \frac{(10)^2}{4} = 4,66 \text{ lb}$$

La ecuaciones de equilibrio son

$$\sum F_h = 0 = C \cos 60^\circ - T \cos 30^\circ + 4,66$$

$$\sum F_v = 0 = C \cos 30^\circ + T \cos 60^\circ - 6$$

que forman un sistema de ecuaciones cuya solución es  $C = 2,87$  lb y  $T = 7,04$  lb.

En este caso concreto, con  $BC$  y  $AB$  en ángulo recto, una solución más elegante consistiría en igualar a cero las sumas de las fuerzas según  $AB$  y según  $BC$ . Así, en cada ecuación aparece sólo una incógnita.

- 16.52.** En la Figura 16.65(a), la barra  $AB$  se mantiene en posición vertical merced a la cuerda sin peso  $BC$  cuando el sistema gira en torno al eje vertical  $y-y$ . El pasador en  $A$  carece de rozamiento y la barra  $AB$  pesa 32,2 lb. Si la resistencia a la rotura de la cuerda es de 120 lb, ¿a qué velocidad puede girar el sistema sin que se rompa la cuerda?

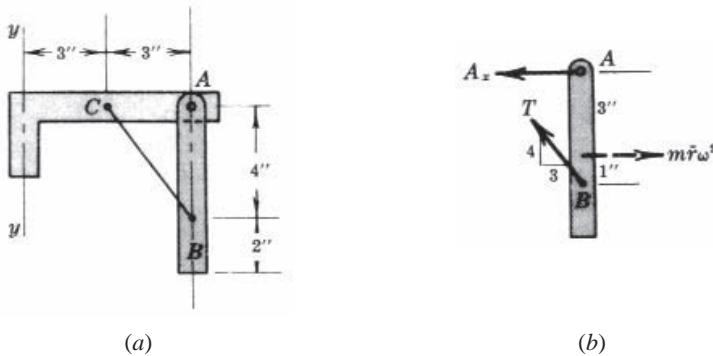


Figura 16.65

#### SOLUCIÓN

Por simplicidad, en el diagrama de cuerpo libre de la barra  $AB$  que se representa en la Figura 16.65(b) no se incluyen el peso ni la componente vertical  $A_y$ . La fuerza de inercia se ubica en el centro de la barra, lo que se debe a que a cada elemento de longitud horizontal de la barra situado a una distancia de  $y-y$ , le corresponde otro elemento situado a la misma distancia.

Tomando momentos respecto a  $A$ :  $+m\bar{r}\omega^2 \times 3 - T \times \frac{3}{5} \times 4 = 0$ . Adviéntase que sólo la componente horizontal de  $T$  tiene momento respecto a  $A$ . Sustituyendo  $m = 1$  slug,  $T = 120$  lb y  $\bar{r} = 6/12$  ft, se obtiene  $\omega = 13,8$  rad/s, o 132 rpm, valor por encima del cual la cuerda se rompe.

- 16.53.** La polea compuesta de la Figura 16.66(a) tiene una masa de 30 kg y un radio de giro de 450 mm. Hallar la tensión en cada cuerda y la aceleración angular de la polea cuando se sueltan las masas.

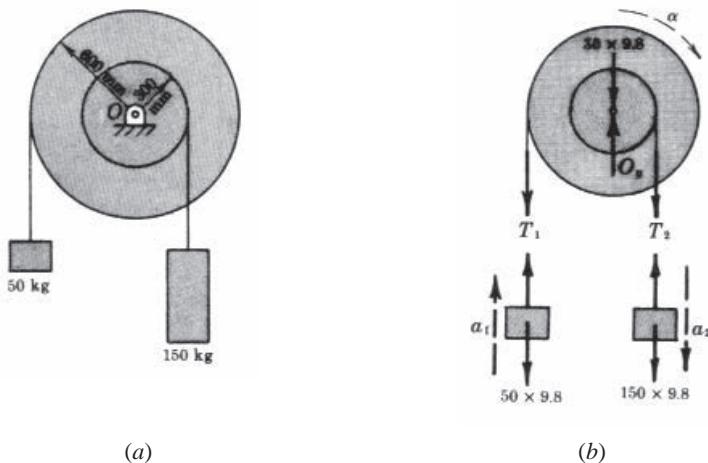


Figura 16.66

**SOLUCIÓN A**

En la Figura 16.66(b) se representan los diagramas de cuerpo libre de los tres integrantes del sistema. Adviértase que  $a_1 = 0,6\alpha$  y  $a_2 = 0,3\alpha$ .

Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F = T_1 - 50 \times 9,8 = 50a_1 = 30\alpha \quad (1)$$

$$\sum F = 150 \times 9,8 - T_2 = 150a_2 = 45\alpha \quad (2)$$

$$\sum M = \bar{I}\alpha \quad \text{o sea, } T_2 \times 0,3 - T_1 \times 0,6 = 30(0,45)^2 \alpha = 6,08\alpha \quad (3)$$

La solución es  $\alpha = 3,9 \text{ rad/s}^2$ . Y de aquí resultan unas tensiones

$$T_1 = 490 + 30(3,91) = 607 \text{ N} \quad \text{y} \quad T_2 = 1470 - 45(3,91) = 1290 \text{ N}$$

**SOLUCIÓN B**

Aplicando al sistema unas fuerzas y momentos de inercia que lo mantengan en «equilibrio a efectos de estudio», puede buscarse la solución por el método de los trabajos virtuales (véanse los Problemas 11.6 y 11.7).

Las fuerzas de inercia se aplican como sigue:  $50(0,6\alpha)$  hacia abajo en el centro de la masa de 50 kg,  $150(0,3\alpha)$  hacia arriba en el centro de la masa de 150 kg, y a la polea un momento antihorario de  $6,08\alpha$ . Como ahora el sistema está en «equilibrio», podemos darle un desplazamiento virtual  $\delta\theta$  horario. El trabajo de las fuerzas externas *únicamente* para este desplazamiento virtual es cero. Adviértase que los desplazamientos son  $\delta\theta$  para la polea,  $(0,6)\delta\theta$  para la masa de 50 kg, y  $(0,3)\delta\theta$  para la masa de 150 kg. Por tanto,

$$\delta U = [-50 \times 9,8 - 50 (0,6) \alpha] (0,6) \delta\theta + [150 \times 9,8 - 150 (0,3) \alpha] (0,3) \delta\theta + (-6,08\alpha) \delta\theta = 0$$

La solución, tras dividir ambos términos por  $\delta\theta$ , es  $\alpha = 3,9 \text{ rad/s}^2$ . Es evidente la comodidad del procedimiento para calcular la aceleración angular; pero para calcular las tensiones en las cuerdas, hay que recurrir al diagrama de cuerpo libre.

- 16.54.** En la Figura 16.67(a), el peso *C* de 28 lb desciende a 16 ft/s. El momento de inercia del torno *B* es  $12 \text{ ft}\cdot\text{lb}\cdot\text{s}^2$  y gira sobre cojinetes sin rozamiento. Si el coeficiente de rozamiento entre el freno *A* y el torno es 0,40, ¿qué fuerza *P* hay que aplicar para detener el sistema en 2 s? ¿Cuál es la reacción en *D* sobre la palanca?

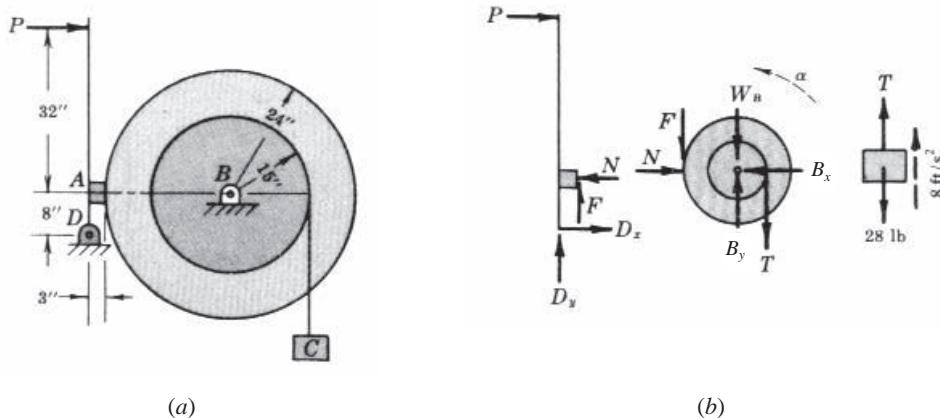


Figura 16.67

**SOLUCIÓN**

Se dibujan los diagramas de cuerpo libre de la palanca, el torno y el peso tal como se muestran en la Figura 16.67(b). Luego, se halla el módulo de la aceleración del peso sabiendo que la velocidad inicial es de 16 ft/s hacia abajo, la velocidad final es cero y el tiempo es 2 s. Resulta así una aceleración de 8 ft/s hacia arriba.

La suma vertical de las fuerzas actuantes sobre el peso *C* da  $T - 28 = (28/g)(8)$ , o sea,  $T = 35,0 \text{ lb}$ .

Para calcular el rozamiento *F*, se suman los momentos de las fuerzas respecto a *B*. La aceleración del torno es antihoraria (el sistema está decelerado). Su valor es posible determinarlo porque la aceleración

lineal de un punto que dista 15 in de  $B$  es  $8 \text{ ft/s}^2$ . Por tanto,  $\alpha = 8/(15/12) = 6,40 \text{ rad/s}^2$ . La ecuación de momentos es  $F(2) - T(1,125) = I\alpha$ , o  $F(2) - T(1,125) = 12(6,40)$ , de donde  $F = 60,3 \text{ lb}$ .

Pero  $F = \mu N$ . Por tanto, la fuerza normal necesaria es  $N = 60,3/0,40 = 151 \text{ lb}$ .

Sumando los momentos respecto a  $D$  de todas las fuerzas que actúan sobre la palanca,  $-P(40) + N(8) + F(3) = 0$ , o sea,  $P = 34,7 \text{ lb}$ .

Sumando horizontalmente las fuerzas actuantes sobre la palanca, se obtiene  $34,7 - 151 + D_x = 0$ , o sea,  $D_x = 116 \text{ lb} (\rightarrow)$ .

Sumando las fuerzas verticalmente,  $D_y + 60,3 = 0$ , o sea,  $D_y = 60,3 \text{ lb} (\downarrow)$ .

- 16.55.** Una bola  $A$  de 8 kg está montada en una barra horizontal solidaria de un árbol vertical tal como se muestra en la Figura 16.68(a). Despreciando las masas de la barra y el árbol, ¿cuáles son las reacciones en  $B$  y  $C$  cuando el sistema gira con una celeridad constante de 90 rpm?

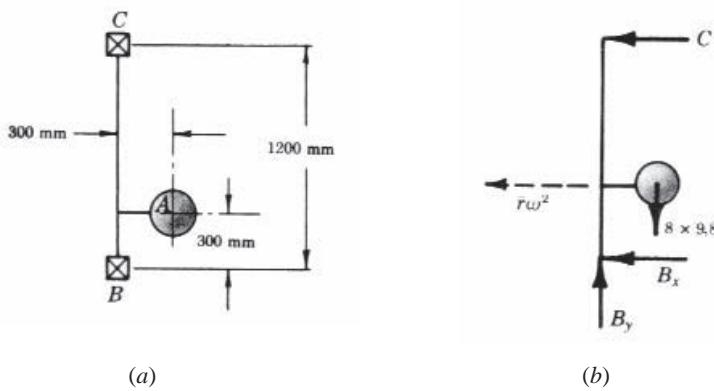


Figura 16.68

#### SOLUCIÓN

En el diagrama de cuerpo libre de la Figura 16.68(b) se representan las fuerzas  $C$ ,  $B_x$ ,  $B_y$  y el peso  $8 \times 9,8 = 78,4 \text{ N}$ . La celeridad angular vale  $\omega = 90 (2\pi/60) = 9,42 \text{ rad/s}$ .

Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_x = m\bar{r}\omega^2, \quad \text{o sea,} \quad B_x + C = 8(0,3)(9,42)^2 = 213$$

$$\sum F_y = 0, \quad \text{o sea,} \quad B_y - 78,4 = 0$$

$$\sum \bar{M} = 0, \quad \text{o sea,} \quad C \times 0,9 - B_x \times 0,3 - B_y \times 0,3 = 0$$

La solución de este sistema de tres ecuaciones es  $B_x = 140 \text{ N}$ ,  $B_y = 78,4 \text{ N}$  y  $C = 72,9 \text{ N}$ , las tres actuando tal como se indica en el diagrama de cuerpo libre.

todo de las fuerzas de inercia

- 16.56.** Resolver el Problema 16.55 por el método de las fuerzas de inercia.

#### Solución

En la Figura 16.69 se representa el diagrama de cuerpo libre, donde se indica la fuerza de inercia. Las ecuaciones de equilibrio equivalentes serán

$$m\bar{r}\omega^2 = 8(0,3)(9,42)^2 = 213 \text{ N}$$

$$\sum M_B = 1,2C - 78,4(0,3) - 213(0,3) = 0 \quad C = 72,9 \text{ N}$$

$$\sum F_x = -B_x - C + 213 = 0 \quad B_x = 140 \text{ N}$$

$$\sum F_y = B_y - 78,4 = 0 \quad B_y = 78,4 \text{ N}$$

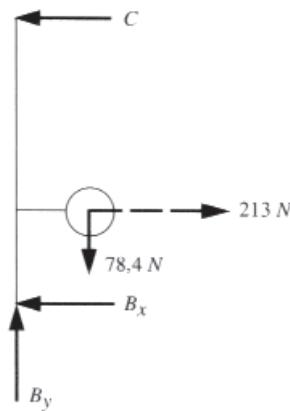


Figura 16.69

**16.57.** Resolver el Problema 16.33 por el método de las fuerzas de inercia.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 16.70 se representa el diagrama de cuerpo libre, donde se indican las fuerzas de inercia. Escribiendo las ecuaciones de equilibrio equivalentes, tenemos

$$\text{para } A, \quad \sum F_h = P - 30a - \frac{1}{3}N_A = 0 \quad (1)$$

$$\text{para } B, \quad \sum F_h = -45a + \frac{1}{3}N_A - \frac{1}{10}N_B = 0 \quad (2)$$

Pero  $N_A = 294$  N y  $N_B = 735$  N.

De la ecuación (2),  $a = 0,544 \text{ m/s}^2$

Sustituyendo en la ecuación (1),  $P = 114$  N.

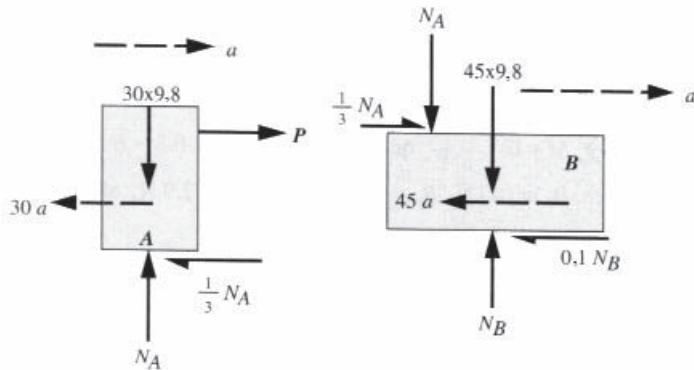


Figura 16.70

**16.58.** Calcular las reacciones en los rodillos del Problema 16.25 por el método de las fuerzas de inercia. La altura de la puerta es 5 ft.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 16.71 se representa el diagrama de cuerpo libre, donde se indica la fuerza de inercia.

Las ecuaciones para el problema equivalente de equilibrio pueden escribirse

$$\sum F_x = 10 - (50/32,2)a = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_A = 8B + (1,5)10 - (2,5)(50/32,2)a - (4)50 = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = A + B - 50 = 0 \quad (3)$$

Por tanto, de (1),  $a = 6,44 \text{ ft/s}^2$   
 de (2),  $B = 26,3 \text{ lb}$   
 de (3),  $A = 23,7 \text{ lb}$

Véase que, si no se emplea el Principio de D'Alambert, para hallar  $A$  y  $B$  hay que resolver un sistema de ecuaciones. Esta es la ventaja que en general reporta el método de las fuerzas de inercia.

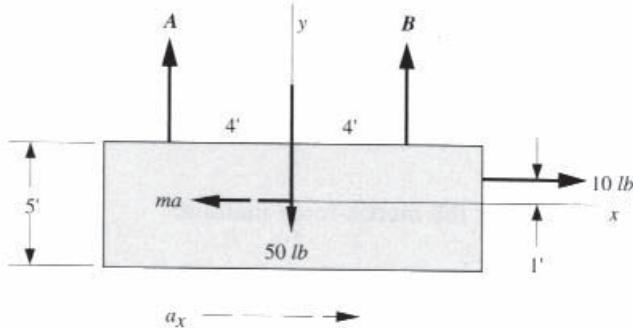


Figura 16.71

**16.59.** Resolver el Problema 16.37 por el método de las fuerzas de inercia.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 16.72 se representa el diagrama de cuerpo libre, con la fuerza de inercia y el par de inercia incluidos.

Las ecuaciones de equilibrio equivalentes son

$$\begin{aligned}\sum F_n &= O_n = 0 \\ \sum M_o &= Fl - m(\frac{1}{2}l)\alpha(\frac{1}{2}l) - \frac{1}{12}ml^2\alpha = 0 \\ \sum F_t &= O_t + F - m(\frac{1}{2}l)\alpha = 0\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, resulta

$$\alpha = 3F / ml$$

$$O_t = \frac{1}{2}F$$

$$O_n = 0$$

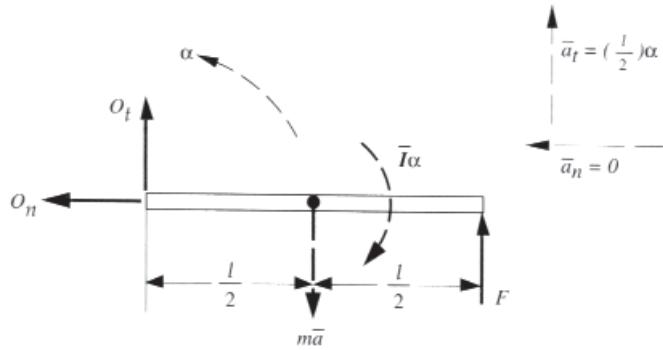


Figura 16.72

**16.60.** En el Problema 16.49, calcular la aceleración angular por el método de las fuerzas de inercia.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 16.73 se representa el diagrama de cuerpo libre, con las fuerzas de inercia y los pares de inercia incluidos.

Escribiendo la ecuación de momentos respecto a  $O$  resulta

$$\sum M_O = -20g\bar{r}_1 + m_1\bar{r}_1^2\alpha + \bar{I}_1\alpha - 100g\bar{r}_2 + m_2\bar{r}_2^2\alpha + \bar{I}_2\alpha = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M_O &= -20(9,8)(0,3) + 20(0,3)^2\alpha + (20/12)(0,6)^2\alpha \\ &\quad - 100(9,8)(0,75) + 100(0,75)^2\alpha + \frac{2}{5}(100)(0,15)^2\alpha = 0 \end{aligned}$$

de donde  $\alpha = 13,3 \text{ rad/s}^2$

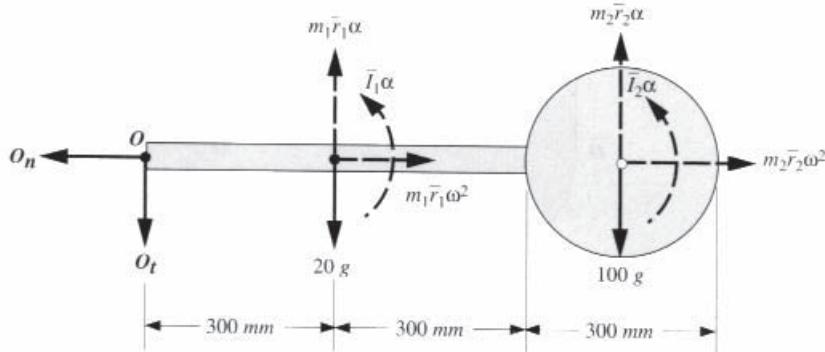


Figura 16.73

**16.61.** Resolver el Problema 16.2 por el método de las fuerzas de inercia.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 16.74 se representa el diagrama de cuerpo libre, con la fuerza de inercia y el par de inercia incluidos. Ahora,  $m = 600/32,2 = 18,6 \text{ slugs}$  e  $\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2$ ,  $\bar{I} = \frac{1}{2}(18,6)(\frac{15}{12})^2 = 14,5 \text{ slug}\cdot\text{ft}^2$ .

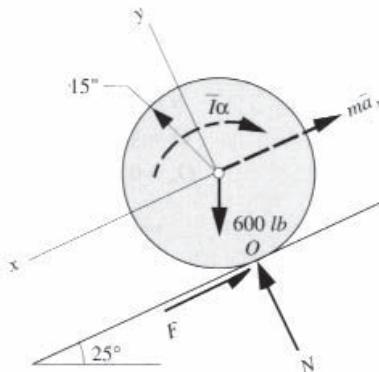


Figura 16.74

Las ecuaciones para el problema equivalente de equilibrio quedan

$$\sum M_O = r(W \operatorname{sen} 25^\circ) - r \frac{W}{g} \bar{a}_x - \bar{I}\alpha = 0$$

$$\sum F_x = W \operatorname{sen} 25^\circ - F - \frac{W}{g} \bar{a}_x = 0$$

$$\text{o } \sum M_O = (\frac{15}{12})600 \operatorname{sen} 25^\circ - (\frac{15}{12})18,6 \bar{a}_x - 14,5\alpha = 0$$

donde

$$\bar{a}_x = (\frac{15}{12})\alpha$$

Al resolver resulta

$$\bar{a}_x = 9,09 \text{ ft/s}^2$$

$$\sum F_x = 600 \operatorname{sen} 35^\circ - F - 18,6(9,09) = 0 \quad F = 84,3 \text{ lb}$$

- 16.62.** El cilindro de 7 kg de la Figura 16.75(a) cuelga de una cuerda arrollada a su alrededor y sujetada al techo. Calcular la fuerza en la cuerda por el método de las fuerzas de inercia.

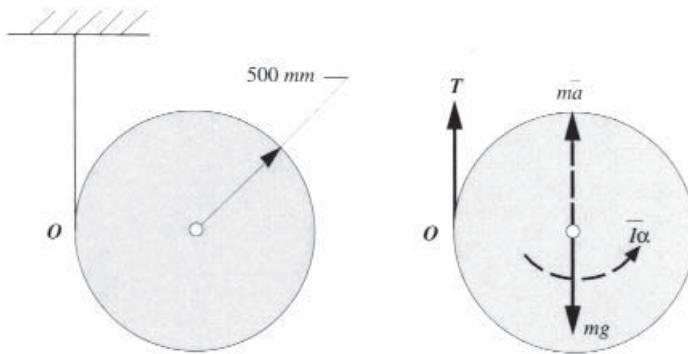


Figura 16.75

**SOLUCIÓN**

En la Figura 16.75(b) se representa el diagrama de cuerpo libre, con la fuerza de inercia y el par de inercia incluidos. Ahora,  $m = 7 \text{ kg}$ ,  $\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2 = (\frac{1}{2})7(0,5)^2 = 0,875 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  y  $\bar{a} = 0,5\alpha$ .

Las ecuaciones para el problema equivalente de equilibrio quedan

$$\sum M_O = -mgr + m\bar{a}r + \bar{I}\alpha = 0$$

$$\sum \bar{M} = -rT + \bar{I}\alpha = 0$$

O sea,

$$\sum M_O = -(7)(9,8)(0,5) + 7\bar{a}(0,5) + 0,875\alpha = 0$$

$$\sum \bar{M} = -0,5T + 0,875\alpha = 0$$

Despejando  $\alpha$  y  $T$ :

$$\alpha = 13,1 \text{ rad/s}^2$$

$$T = 22,9 \text{ N}$$

### Problemas propuestos

- 16.63.** Una rueda de 150 lb de peso y 10 ft de diámetro rueda hacia abajo por un plano inclinado  $45^\circ$ . Si no hay resbalamiento, hallar su aceleración angular.

Resp.  $3,04 \text{ rad/s}^2$

- 16.64.** Un cilindro de 180 kg de masa y 200 mm de diámetro descansa sobre unos raíles horizontales perpendiculares a su eje geométrico. En su punto más bajo se aplica una fuerza  $P$  de 550 N tangencialmente y hacia la derecha. Suponiendo que los coeficientes de rozamiento estático y cinético sean 0,29 y 0,25, respectivamente, qué movimiento resulta? Cfr. Problema 16.4

Resp. Desliza hacia la derecha y gira en sentido antihorario  $\bar{a} = 0,6 \text{ m/s}^2$ ,  $\alpha = 12,1 \text{ rad/s}^2$

- 16.65.** En la Figura 16.76, el cilindro de peso  $W$  y radio de giro  $k$  tiene una cuerda arrollada a una garra de radio  $r$ . Hallar la aceleración del centro de masas en la hipótesis de rodadura pura. La fuerza  $P$  es horizontal, como el plano.

Resp.  $\bar{a} = PgR(R - r)/W(R^2 + k^2)$

- 16.66.** Un cilindro homogéneo de masa 15 kg tiene tallada una acanaladura perimetral tal como se muestra en la Figura 16.77. De una cuerda arrollada en la acanaladura se tira con una fuerza de 50 N.

Si el cilindro rueda sin deslizar, hallar la aceleración de su centro de masas y la fuerza de rozamiento  $F$ . Se desprecia el efecto de la acanaladura.

*Resp.*  $a = 0,556 \text{ m/s}^2$ ,  $F = 41,7 \text{ N}$  ( $\leftarrow$ )

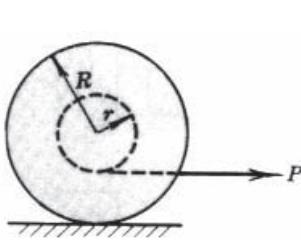


Figura 16.76

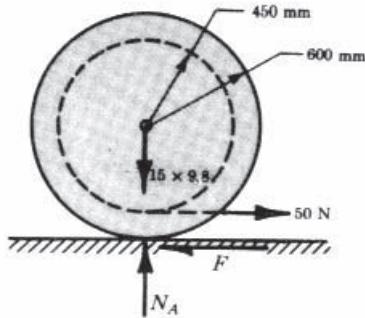


Figura 16.77

- 16.67.** De una rueda cilíndrica de 50 kg y 1200 mm de diámetro se tira hacia arriba por un plano inclinado  $20^\circ$  mediante una cuerda arrollada en su perímetro. Si la cuerda pasa por una pequeña polea sin rozamiento situada en lo alto del plano y de ella cuelga una masa de 90 kg, hallar la aceleración angular de la rueda. Se supone que la cuerda tira por el punto más alto de la rueda y es paralela al plano.

*Resp.*  $6,1 \text{ rad/s}^2$

- 16.68.** Calcular la tensión en el cable del sistema de la Figura 16.78. Se supone que las poleas carecen de peso y rozamiento. El plano es liso.

*Resp.*  $T = 5,16 \text{ lb}$

- 16.69.** En el Problema 16.68 supóngase que la polea inferior es un cilindro homogéneo de 1 ft de diámetro que pesa 4 lb. ¿Qué tensión sufre el cable paralelo al plano?

*Resp.*  $T = 7,79 \text{ lb}$

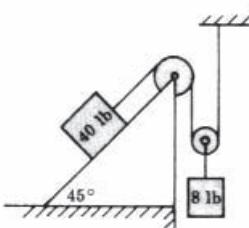


Figura 16.78

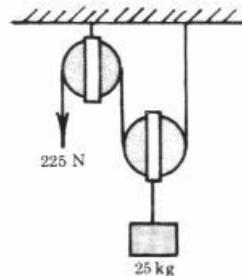


Figura 16.79

- 16.70.** Una fuerza constante de 225 N se aplica como se muestra en la Figura 16.79. ¿Cuánto tardará el bloque de 25 kg en alcanzar una celeridad de 1,2 m/s partiendo del reposo? Se supone que las poleas carecen de masa y rozamiento.

*Resp.*  $t = 0,145 \text{ s}$

- 16.71** En el sistema de la Figura 16.80, las poleas pueden considerarse carentes de peso y rozamiento. Las masas son 1, 2, 3 y 4 kg. Hallar la aceleración de cada masa y la tensión en la cuerda superior.

*Resp.*  $a_1 = 9,02 \text{ m/s}^2 (\uparrow)$ ,  $a_2 = 0,39 \text{ m/s}^2 (\downarrow)$ ,  $a_3 = 3,53 \text{ m/s}^2 (\downarrow)$ ,  $a_4 = 5,10 \text{ m/s}^2 (\downarrow)$ ,  $T = 75,3 \text{ N}$

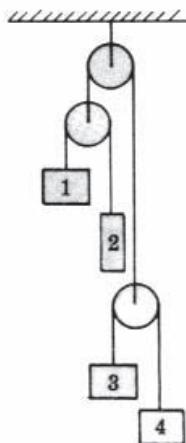


Figura 16.80

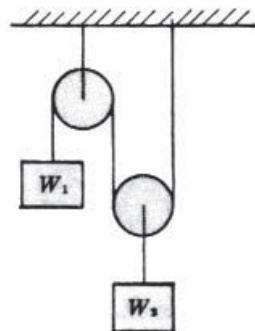


Figura 16.81

- 16.72.** En la Figura 16.81 se supone que el peso  $W_2$  desciende. Si las poleas carecen de peso y rozamiento, hallar la tensión en la cuerda cuando los pesos se sueltan desde el reposo.

Resp.  $I = 3W_1W_2/(4W_1 + W_2)$

- 16.73.** A un cilindro de 45 kg de masa y 1500 mm de diámetro se aplica tangencialmente una fuerza horizontal de 180 N en su punto más alto. Si no hay resbalamiento sobre el suelo, hallar la aceleración del centro del cilindro. Resp.  $5,33 \text{ m/s}^2$  (horizontal)

- 16.74** Un aro delgado de peso  $W$  rueda horizontalmente por efecto de una fuerza horizontal  $P$  aplicada en su punto más alto, tal como se muestra en la Figura 16.82. Expresar la aceleración  $\bar{a}$  del centro de masas en función de  $P$ ,  $W$  y el radio  $R$ . Además, demostrar que la fuerza de rozamiento del plano sobre el aro es nula. Resp.  $\bar{a} = Pg/W$

- 16.75.** En el Problema 16.11, ¿cuánto debe pesar  $C$  para que la aceleración del disco A sea de  $6 \text{ ft/s}^2$  plano arriba? Resp. 1340 lb

- 16.76.** La esfera uniforme de 2 kg de masa y 80 mm de radio de la Figura 16.83 cuelga de una cuerda arrollada a su alrededor y sujetada al techo, tal como se muestra. Si parte del reposo, hallar la tensión en la cuerda, su aceleración angular y la celeridad del centro de masas a los dos segundos de ponerse en movimiento.

Resp.  $T = 5,6 \text{ N}$ ,  $\alpha = 87,75 \text{ rad/s}^2$  ( $\curvearrowright$ ),  $\bar{v} = 14,0 \text{ m/s}$  ( $\downarrow$ ).

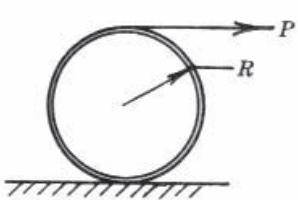


Figura 16.82

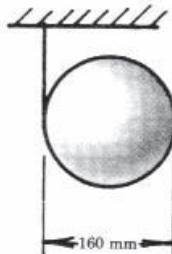


Figura 16.83

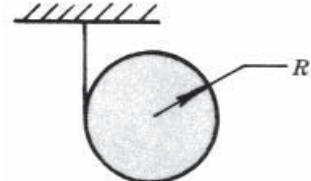


Figura 16.84

- 16.77.** Un cilindro de peso  $W$  y radio de giro  $k$  se suelta desde el reposo en la posición representada en la Figura 16.84. Si el radio del cilindro es  $R$ , hallar la tensión en la cuerda y la aceleración del centro de masas.

Resp.  $T = W/(1 + R^2/k^2)$ ,  $\bar{a} = g/(1 + k^2/R^2)$

- 16.78.** En la Figura 16.85 se representa un peso de 40 lb sujetado a una cuerda arrollada en torno a un cilindro de 30 lb. Éste asciende rodando sin deslizar por el plano inclinado  $30^\circ$ . Hallar la aceleración angular del cilindro.

*Resp.*  $0,98 \text{ rad/s}^2$

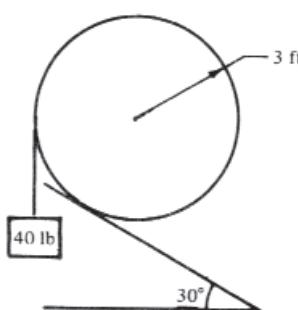


Figura 16.85

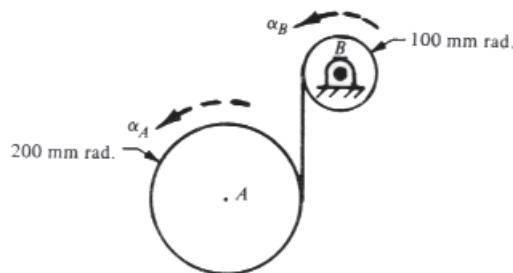


Figura 16.86

- 16.79.** El cilindro *B* de 2 kg de masa y 100 mm de radio de la Figura 16.86 gira libremente sobre cojinetes sin rozamiento. Tiene arrollada una cuerda que también está arrollada en el cilindro *A* de 4 kg de masa y 200 mm de radio. Hallar las aceleraciones angulares de *A* y *B* en el instante en que ambos se ponen en movimiento desde el reposo.

*Resp.*  $\alpha_A = 14 \text{ rad/s}^2$ ,  $\alpha_B = 56 \text{ rad/s}^2$

- 16.80.** En la Figura 16.87, un cilindro y una esfera homogéneos de iguales masas,  $m = 8 \text{ kg}$ , y radios,  $R$ , están enganchados mediante un bastidor sin peso y descenden rodando libremente sin deslizar por el plano inclinado  $28^\circ$ . Hallar la fuerza en el bastidor. Se supone que no hay rozamiento en los cojinetes.

*Resp.*  $1,27 \text{ N}$

- 16.81.** Una bola homogénea de diámetro 3 ft gira a 60 rpm en torno a un eje centroidal horizontal cuando se pone en contacto con un plano con el que el coeficiente de rozamiento por rodadura es 0,25. Hallar cuánto tiempo tarda en iniciarse la rodadura.

*Resp.*  $t = 0,279 \text{ s}$

- 16.82.** Un cilindro de 3 kg de masa y 120 mm de diámetro que gira a 8 rad/s en torno a un eje horizontal entra en contacto con un plano horizontal con el que el coeficiente de rozamiento es 0,25. ¿Qué distancia recorre el centro hasta que cesa el resbalamiento y se inicia la rodadura?

*Resp.*  $d = 5,2 \text{ mm}$

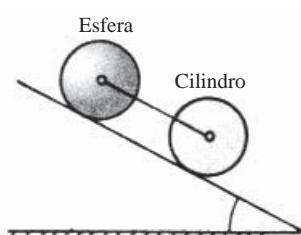


Figura 16.87

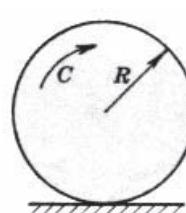


Figura 16.88

- 16.83** Un cilindro homogéneo de masa  $m$  y radio  $R$  está en reposo sobre un plano horizontal cuando se le aplica un par  $C$ , tal como se muestra en la Figura 16.88. Hallar qué valor debe tener el coeficiente de rozamiento entre el cilindro y el plano para que haya rodadura.

*Resp.*  $\mu \geq \frac{2}{3} C / mgR$

- 16.84.** En la Figura 16.89, el cilindro de pared delgada está sobre una plataforma animada de una aceleración  $a$ . Hallar la aceleración de su centro suponiendo que hay rodadura sin deslizamiento.

Resp.  $\bar{a} = 0,5a$

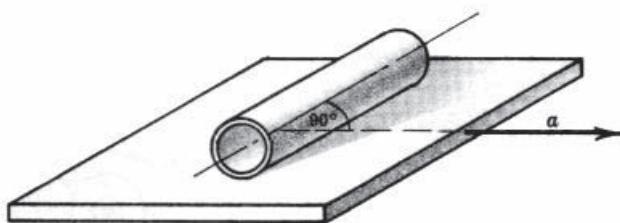


Figura 16.89

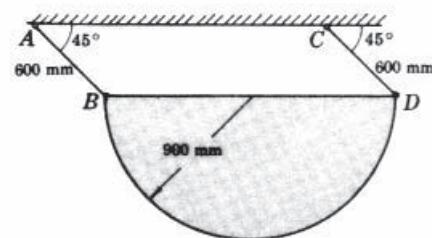


Figura 16.90

- 16.85.** En el Problema 16.84, supóngase que el coeficiente de rozamiento es  $\mu = 0,35$ . Hallar la aceleración máxima que puede tener la plataforma sin que haya deslizamiento entre ésta y el cilindro.

Resp.  $a = 6,86 \text{ m/s}^2$  o  $22,5 \text{ ft/s}^2$

- 16.86.** La placa semicircular homogénea de 30 kg de masa y 900 mm de radio de la Figura 16.90 se suelta en reposo desde la posición indicada. ¿Qué fuerzas soportan las cuerdas en esa posición?

Resp.  $T_{AB} = 148 \text{ N}$ ,  $T_{CD} = 59,8 \text{ N}$

- 16.87.** En una pista de rizo de 20 ft de diámetro, un auto de 500 lb de peso abandona la plataforma a 30 ft por encima del punto más bajo del rizo. ¿Cuál es la fuerza normal de la pista sobre el auto en el punto más alto del rizo? Se supone que el centro de gravedad del auto se halla a 10 ft del centro del rizo.

Resp. 500 lb

- 16.88.** Un disco de peso  $W$  tiene su centro de masas  $G$  a una distancia  $e$  de su centro geométrico  $O$ . El disco rueda sobre el plano horizontal con una velocidad angular constante  $\omega$ . Hallar la fuerza normal y la fuerza de rozamiento del suelo sobre el disco cuando éste está en la posición representada en la Figura 16.91.

Resp.  $F = (W/g)e\omega^2 \cos \theta (\leftarrow)$ ,  $N = W + (W/g)e\omega^2 \operatorname{sen} \theta (\uparrow)$

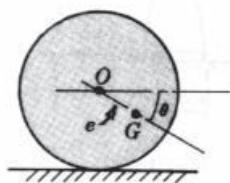


Figura 16.91

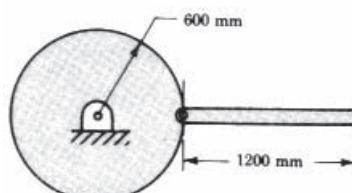


Figura 16.92

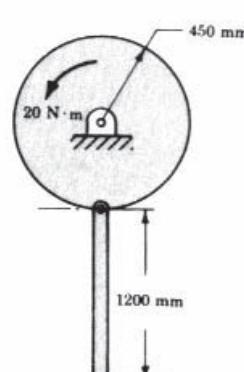


Figura 16.93

- 16.89.** El disco de la Figura 16.92 tiene una masa de 50 kg, un radio de 600 mm y un radio de giro relativo a su centro de masas de 450 mm. La barra esbelta uniforme, cuyo extremo izquierdo está articulado al disco y que se sostiene inicialmente en posición horizontal, mide 1200 mm de largo y tiene una masa de 18 kg. Hallar la aceleración inicial del disco y de la barra inmediatamente después de soltarse desde el reposo.

Resp.  $\alpha_{\text{disco}} = 2,25 \text{ rad/s}^2 (\curvearrowright)$ ,  $\alpha_{\text{barra}} = 10,5 \text{ rad/s}^2 (\curvearrowright)$

- 16.90.** El disco homogéneo de la Figura 16.93 tiene una masa de 20 kg y un radio de 450 mm, y en su punto más bajo tiene articulada una barra, también homogénea, de masa 10 kg y longitud 1200 mm. Suponiendo que al disco se aplique un par de momento 20 m N, hallar las aceleraciones angulares de ambos cuerpos.

Resp.  $\alpha_{\text{disco}} = 7,9 \text{ rad/s}^2 (\curvearrowleft)$ ,  $\alpha_{\text{barra}} = 4,44 \text{ rad/s}^2 (\curvearrowright)$ .

### raslación

- 16.91.** En la Figura 16.94 se representa una puerta homogénea, de peso 20 lb, que rueda libremente por una guía horizontal sobre las ruedas A y B, exentas de rozamiento. ¿Qué fuerza horizontal  $P$  anula la reacción vertical en A? ¿Cuál es entonces la aceleración de la puerta? ¿Y la reacción en B?

Resp.  $P = 450 \text{ lb} (\leftarrow)$ ,  $a = 72,5 \text{ ft/s}^2 (\leftarrow)$ ,  $B = 200 \text{ lb} (\uparrow)$

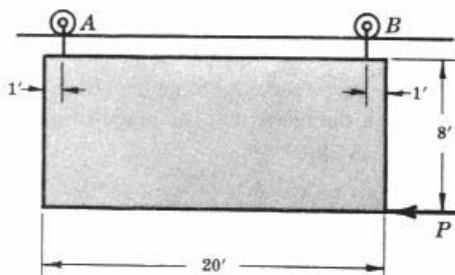


Figura 16.94

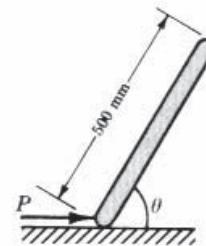


Figura 16.95

- 16.92.** En la Figura 16.95 se representa un barra esbelta homogénea, de masa 4 kg y longitud 500 mm, a la que empuja una fuerza horizontal  $P = 60 \text{ N}$  a lo largo de la superficie horizontal lisa. Hallar el ángulo  $\theta$  para que el movimiento sea de traslación. ¿Cuál es la aceleración correspondiente?

Resp.  $\theta = 33,2^\circ$ ,  $a = 15 \text{ m/s}^2$

- 16.93.** Un cilindro de 10 kg de masa y 1,2 m de diámetro es empujado hacia la derecha sin que rote con una aceleración de  $2 \text{ m/s}^2$  (Figura 16.96). Hallar el módulo y la posición de la fuerza  $P$ , siendo 0,20 el coeficiente de rozamiento.

Resp.  $P = 39,6 \text{ N} (\rightarrow)$ ,  $h = 0,3 \text{ m}$  (por encima de la superficie)

- 16.94.** De una placa homogénea en forma de triángulo isósceles se tira hacia la derecha con una aceleración de  $1,2 \text{ m/s}^2$  (Figura 16.97). Suponiendo libres de rozamiento los apoyos A y B, hallar la fuerza  $P$  y las reacciones en A y B, si la masa es 2,5 kg.

Resp.  $P = 3 \text{ N} (\rightarrow)$ ,  $A = 15,2 \text{ N} (\uparrow)$ ,  $B = 9,25 \text{ N} (\uparrow)$

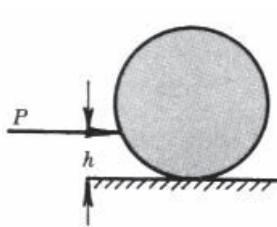


Figura 16.96

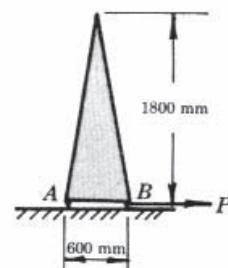


Figura 16.97

- 16.95.** Sobre una esfera homogénea de peso  $W$  y radio  $R$  actúa una fuerza horizontal  $P$  tal como se muestra en la Figura 16.98. Entre el plano y la esfera hay un coeficiente de rozamiento  $\mu$ . ¿Dónde hay que aplicar la fuerza  $P$  para que la esfera patine sin rotar? ¿Cuánto vale la aceleración?

Resp.  $d = R(1 - \mu W/P)$ ,  $a = g(P/W - \mu)$  ( $\rightarrow$ )

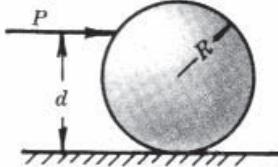


Figura 16.98

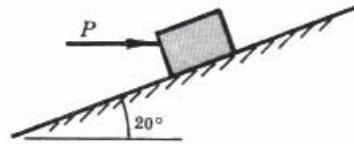


Figura 16.99

- 16.96.** Con relación a la Figura 16.99, ¿qué fuerza horizontal se necesita para comunicar al bloque de 50 kg una aceleración de  $3 \text{ m/s}^2$  paralela al plano inclinado  $20^\circ$  y hacia arriba? Se supone que el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,25.

Resp.  $P = 507 \text{ N}$  ( $\rightarrow$ )

- 16.97** Por un plano inclinado  $30^\circ$  se lanza hacia arriba un cuerpo con una velocidad inicial de 12 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es 0,20, ¿qué distancia recorre el cuerpo arriba y cuánto tarda en llegar a ese punto?

Resp. 10,9 m, 1,82 s

- 16.98.** Un tobogán acuático está inclinado  $35^\circ$  sobre la horizontal. Suponiendo ausencia de rozamiento, ¿cuánto tardará un niño en deslizarse 15 ft partiendo del reposo?

Resp.  $t = 1,27 \text{ s}$

- 16.99.** Un objeto que pesa  $W$  lb parte del reposo en el punto más alto de un plano de  $50^\circ$  de pendiente. Tras recorrer 20 ft plano abajo, se desliza 30 ft por el suelo horizontal y se detiene. Hallar el coeficiente de rozamiento entre el objeto y las superficies. Resp.  $\mu = 0,357$

- 16.100.** Un plato se desliza 500 mm sobre una mesa horizontal antes de pararse. Si el coeficiente de rozamiento entre el plato y la mesa es 0,12, ¿cuánto dura el recorrido? Resp.  $t = 0,92 \text{ s}$

- 16.101.** El deslizamiento de un bloque de 9,3 kg se evita mediante un listón tal como se muestra en la Figura 16.100. ¿Cuál es la máxima aceleración que puede comunicarse al carro sin que vuelque el bloque? Resp.  $a = 12,1 \text{ ft/s}^2$  ( $\leftarrow$ )

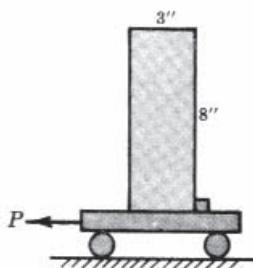


Figura 16.100

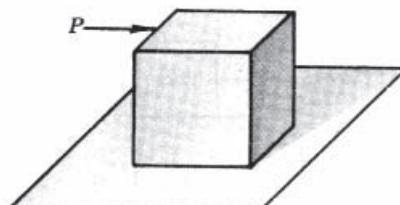


Figura 16.101

- 16.102.** En la Figura 16.101, la fuerza horizontal  $P$  mueve el bloque homogéneo sobre el suelo horizontal. Siendo 0,2 el coeficiente de rozamiento, ¿cuál es la aceleración máxima que puede tener el bloque para que se deslice justo a punto de volcar?

Resp.  $a = 5,88 \text{ m/s}^2$  ( $\rightarrow$ )

- 16.103.** Un árbol cilíndrico de 6 ft de diámetro y 35 in de alto permanece erecto en un vagón batea que se mueve con una velocidad constante de 35 mi/h. Si el vagón se detiene con una deceleración uniforme tras recorrer 40 ft, ¿volcará el cilindro? *Resp.* No

- 16.104.** Una masa de 8 kg desciende suspendida de una cuerda que puede soportar sin peligro 60 N. En tales condiciones, ¿cuál es la aceleración máxima que puede tener la masa?

*Resp.*  $2,3 \text{ m/s}^2$  hacia abajo

- 16.105.** Un ascensor tarda 2 s desde el reposo para adquirir una velocidad descendente de 10 ft/s. Suponiendo que la aceleración sea uniforme, ¿cuál es la fuerza que durante ese tiempo ejerce el suelo sobre un ascensorista cuyo peso normal es 150 lb? *Resp.* 127 lb

- 16.106.** Un ascensor de 500 kg de masa sube con una aceleración de  $4 \text{ m/s}^2$ . La masa del ascensorista es de 65 kg. Suponiendo que éste esté de pie sobre una balanza de muelles durante el ascenso, ¿cuál es la lectura de la balanza? Y la tensión en los cables? *Resp.* 91,5 kg, 7800 N

- 16.107.** Un cuerpo de 12 kg de masa descansa sobre una balanza de muelles dentro de un ascensor. ¿Cuál debe ser la aceleración (módulo, dirección y sentido) para que la balanza señale una masa de 10 kg? *Resp.*  $a = 1,63 \text{ m/s}^2$  ( $\downarrow$ )

- 16.108.** Un peso de 10 lb cuelga de una balanza de muelles dentro de un ascensor animado de una aceleración ascendente de  $8,05 \text{ ft/s}^2$ . Determinar la indicación de la balanza.

*Resp.* 12,5 lb

- 16.109.** Un ascensor de masa 700 kg está diseñado para una aceleración máxima de  $2 \text{ m/s}^2$ . ¿Cuál es la máxima carga del ascensor si la carga permitida en el cable sustentador es 19 kN?

*Resp.*  $M = 910 \text{ kg}$

- 16.110.** Las masas de 10 y 20 kg de la Figura 16.102 están unidas por una cuerda horizontal. No hay rozamiento entre las masas y el plano horizontal. Si se aplica una fuerza horizontal de 4 N, hallar la aceleración de las masas y la tensión de la cuerda.

*Resp.*  $a = 0,133 \text{ m/s}^2$ ,  $T = 2,67 \text{ N}$

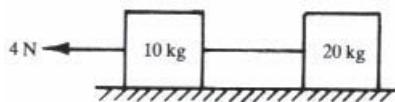


Figura 16.102

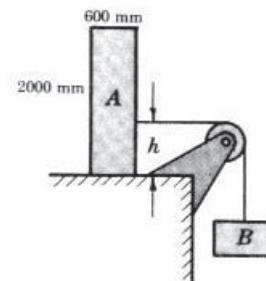


Figura 16.103

- 16.111.** La masa descendente *B* tira hacia la derecha del bloque *A* de 5 kg, tal como se muestra en la Figura 16.103. Siendo 0,5 el coeficiente de rozamiento entre el bloque *A* y el suelo, hallar la aceleración de *B*. Hallar también el valor máximo de *h* para que el bloque *A* no vuelque.

*Resp.*  $a = 2,45 \text{ m/s}^2$  abajo,  $h = 730 \text{ mm}$

- 16.112.** En la Figura 16.104, el coeficiente de rozamiento entre el peso de 30 lb y el suelo horizontal sobre el que se encuentra es 0,2. Se supone que las poleas carecen de masa y de rozamiento. Hallar la aceleración del sistema y las tensiones en las cuerdas.

*Resp.*  $a = 3,33 \text{ ft/s}^2$ ,  $T_{AB} = 8,83 \text{ lb}$ ,  $T_{BC} = 17,9 \text{ lb}$

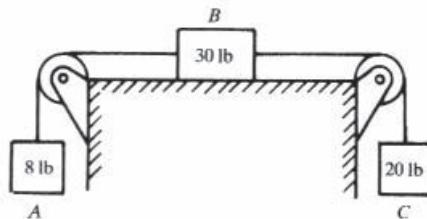


Figura 16.104

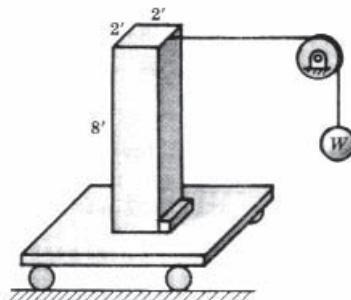


Figura 16.105

- 16.113.** Un bloque de 1000 lb está de pie sobre un carretón tal como se muestra en la Figura 16.105. El peso  $W$  cae, acelerando al bloque y el carretón de 300 lb. Un listón clavado a la plataforma impide el deslizamiento. ¿Cuál es la máxima aceleración que puede adquirir el sistema sin que vuelque el bloque? Calcular  $W$ . Se supone que el carretón rueda y se desprecian los efectos de la inercia de las ruedas.

Resp.  $a = 5,03 \text{ ft/s}^2 (\rightarrow)$ ,  $W = 241 \text{ lb}$

- 16.114.** En la Figura 16.106, la barra homogénea  $AB$  tiene una masa de 5 kg y está sujetada en  $A$  por un pasador liso y se apoya contra la parte vertical lisa del carro. De éste, de masa 50 kg, tira hacia la derecha una fuerza horizontal  $P$ . ¿Para qué valor de  $P$  la barra no ejerce fuerza alguna sobre el carro en  $B$ ?

Resp. 642 N

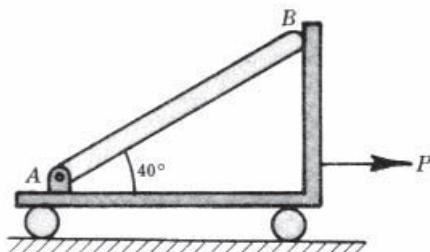


Figura 16.106

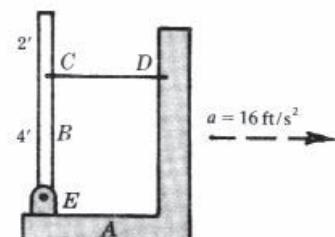


Figura 16.107

- 16.115.** La plataforma  $A$  tiene la aceleración horizontal hacia la derecha que se indica en la Figura 16.107. La barra  $B$  se mantiene en posición vertical merced a la cuerda horizontal  $CD$ . Hallar la tensión en ésta y las reacciones del pasador  $E$ . La barra es uniforme y pesa 18 lb.

Resp.  $T = 6,71 \text{ lb}$ ,  $E_y = 18,0 \text{ lb} (\uparrow)$ ,  $E_x = 2,24 \text{ lb} (\rightarrow)$

- 16.116.** El bloque de la Figura 16.108 se mueve hacia la derecha con una aceleración de  $1,5 \text{ m/s}^2$ . Una barra homogénea de 1 m de largo y 1 kg de masa cuelga de un pasador liso en  $A$ , tal como se muestra en la figura. ¿Cuál es el ángulo  $\theta$ ?

Resp.  $\theta = 8,7^\circ$

- 16.117.** Una cadena cuelga libremente desde la trasera de un camión. Si éste acelera a  $3 \text{ m/s}^2$  hacia la izquierda, ¿qué ángulo forman aproximadamente la cadena y la horizontal?

Resp.  $\theta = 73^\circ$

- 16.118.** Un helicóptero que transporta una torre de línea de transmisión de 80 ft mediante una eslinga lleva una aceleración horizontal de  $6 \text{ ft/s}^2$ , ¿qué ángulo forma el eje geométrico de la torre con la vertical?

Resp.  $u = 10,5^\circ$

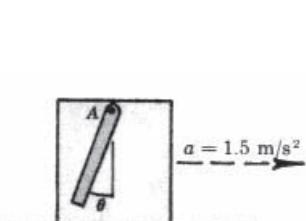


Figura 16.108

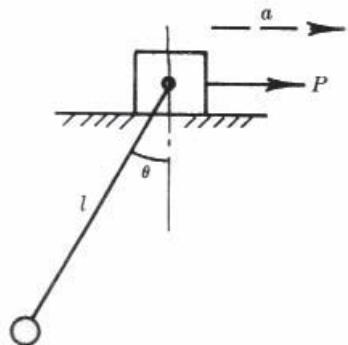


Figura 16.109

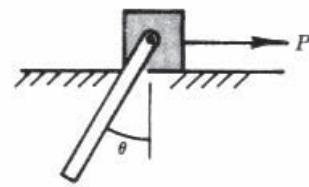


Figura 16.110

- 16.119.** En la Figura 16.109 se representa un pequeño bloque que se mueve con una aceleración  $a$  sobre una superficie horizontal. La lenteja del extremo del hilo se mantiene a un ángulo constante  $\theta$  con la vertical. Demostrar que, en este acelerómetro elemental,  $\theta$  es una medida de la aceleración. *Resp.*  $A = g \operatorname{tg} \theta$

- 16.120.** En la Figura 16.110, el bloque de 50 kg está sometido a una aceleración horizontal hacia la derecha de  $3 \text{ m/s}^2$  bajo la acción de una fuerza horizontal  $P$ . La barra esbelta homogénea tiene una masa de 8 kg y una longitud de 1 m. Suponiendo que las superficies son lisas, hallar  $P$  y  $\theta$ . ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la reacción del pasador sobre la barra?  
*Resp.*  $P = 174 \text{ N}$ ,  $\theta = 17^\circ$ ,  $V = 78,4 \text{ N}$ ,  $H = 24,0 \text{ N}$

- 16.121.** En el problema anterior, ¿cuánto valen  $P$  y  $\theta$  si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es 0,25?

*Resp.*  $P = 316 \text{ N}$ ,  $\theta = 17^\circ$

- 16.122.** En la Figura 16.111 se representa una caja que pesa 100 lb sobre un carretón. Entre éste y el bloque hay un coeficiente de rozamiento de 0,3. Hallar la aceleración hacia adelante para la cual la caja desliza o vuelca. Se supone que los cuerpos son homogéneos.

*Resp.* Hay vuelco para  $a = 8,05 \text{ ft/s}^2$  ( $\rightarrow$ )

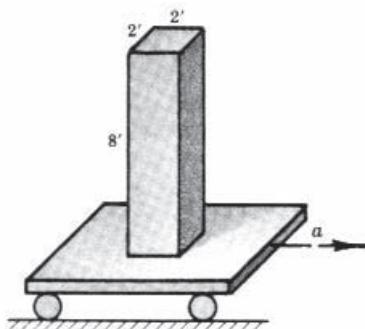


Figura 16.111

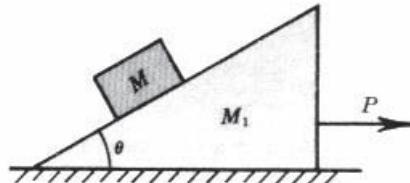


Figura 16.112

- 16.123.** Un bloque de masa  $M$  está sobre una superficie (coeficiente de rozamiento  $\mu$ ) inclinada un ángulo  $\theta$  sobre la horizontal, tal como se muestra en la Figura 16.112. Esa superficie forma parte de un bloque triangular de masa  $M_1$ . Una fuerza horizontal  $P$  comunica al sistema una aceleración  $a$  hacia la derecha. ¿Para qué valor de  $P$  se mueve el bloque respecto a la superficie? Se supone que en la superficie inferior no hay rozamiento. ¿Cuánto vale la aceleración?

*Resp.*  $a = \frac{g(\mu - \operatorname{tg} \theta)}{1 + \mu \operatorname{tg} \theta}$ ,  $P = \frac{[(M_1 + M_2)g](\mu - \operatorname{tg} \theta)}{1 + \mu \operatorname{tg} \theta}$

- 16.124.** Un camión viaja por una carretera llana a celeridad constante. Su carrocería tiene una masa  $M$  y contiene un embalaje de masa  $m$ . Demostrar que si el embalaje se cae del camión, la carrocería de éste sufre una aceleración ascendente de  $mg/M$ .

- 16.125.** El automóvil de 2500 lb de la Figura 16.113 se lleva al reposo desde una celeridad de 60 mi/h. Si el vehículo está equipado con frenos en las cuatro ruedas y el coeficiente de rozamiento entre los neumáticos y la carretera es 0,6, ¿cuánto tarda en pararse? ¿Qué distancia recorre en ese tiempo? *Resp. 4,56 s, 200 ft*

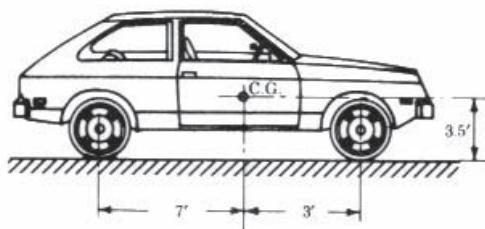


Figura 16.113

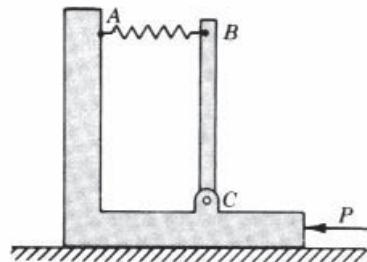


Figura 16.114

- 16.126.** En el Problema 16.125, hallar la reacción vertical sobre las dos ruedas delanteras y sobre las dos ruedas traseras.

*Resp.  $R_F = 2275 \text{ lb}$ ,  $R_R = 225 \text{ lb}$*

- 16.127.** Con el sistema en reposo, la barra  $BC$  de la Figura 16.114 está vertical. Tiene 3 m de longitud y una masa de 10 kg. Se observa que rota  $5^\circ$  desde la vertical cuando el carro al que está sujetada se acelera. La constante del muelle es 100 N/m. Suponiendo que el muelle permanezca horizontal, hallar la aceleración. La superficie horizontal sobre la que se mueve el carro es lisa.  
*Resp.  $a = 4,37 \text{ m/s}^2$*

#### otación

- 16.128.** La barra homogénea de 6 m de largo y masa  $M$  de la Figura 16.115 cae desde su posición vertical de reposo. Suponiendo ausencia de rozamiento en la articulación, hallar la velocidad angular de la barra en el instante en que la componente tangencial de la aceleración del extremo libre es  $g$ , la aceleración de la gravedad. *Resp.  $\theta = 0,73 \text{ rad}$ ,  $\dot{\theta} = 1,12 \text{ rad/s}$*

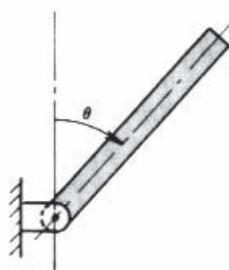


Figura 16.115

- 16.129.** Un cilindro homogéneo de 600 mm de diámetro con una masa de 40 kg tiene una aceleración angular de  $2 \text{ rad/s}^2$  en torno a su eje geométrico. ¿A qué par de fuerzas se debe esa aceleración?  
*Resp. 3,6 m·N*

- 16.130.** Un disco homogéneo de 6 ft de diámetro, que pesa 800 lb, gira alrededor de su eje geométrico a causa de una fuerza de 80 lb aplicada tangencialmente a su perímetro. Hallar su aceleración angular. *Resp. 2,15 rad/s<sup>2</sup>*

- 16.131.** Un disco cilíndrico macizo de 90 lb de peso y 3 ft de diámetro gira a 60 rpm alrededor de un eje perpendicular a la base que pasa por el centro de ésta. ¿Qué fuerza tangencial constante debe aplicarse al canto del disco para que se detenga en 2 min?

*Resp.* 0,11 lb

- 16.132.** Una masa de 200 kg cuelga verticalmente hacia abajo desde el extremo de un cable sin masa arrollado en un torno de 900 mm de diámetro. En 4 s, la masa desciende 8 m. ¿Cuál es la masa del cilindro?

*Resp.* 3520 kg

- 16.133.** Una barra homogénea de 10 ft de largo que pesa 30 lb está suspendida verticalmente de un extremo. La barra recibe un golpe horizontal con una fuerza de 90 lb en un punto situado a 2 ft por debajo del punto de suspensión. Hallar la reacción horizontal en el eje de suspensión. ¿Qué aceleración horizontal adquiere la barra a causa del golpe?

*Resp.*  $R_h = 63$  lb,  $\alpha = 5,8$  rad/s<sup>2</sup>

- 16.134.** Una barra esbelta de 1200 mm de largo y 3,6 kg de masa cuelga verticalmente en reposo al ser alcanzada, en su extremo inferior, por una fuerza horizontal  $P$  de 12 N, tal como se muestra en la Figura 16.116. Hallar (a) su aceleración angular y (b) las componentes horizontal y vertical de la reacción del pasador  $O$  sobre la barra.

*Resp.*  $\alpha = 8,33$  rad/s<sup>2</sup> ( $\curvearrowright$ ),  $O_y = 35,3$  N ( $\uparrow$ ),  $O_x = 6$  N ( $\rightarrow$ )

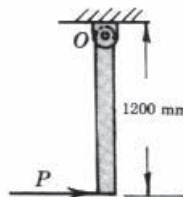


Figura 16.116

- 16.135.** En el problema anterior, ¿dónde debe aplicarse la fuerza de 12 N para que sea nula la componente horizontal de la reacción del pasador?

*Resp.* 800 mm por debajo de  $O$

- 16.136.** En qué punto hay que aplicar la fuerza horizontal  $P$  a la barra homogénea, al cilindro homogéneo y a la esfera homogénea de la Figura 16.117, para que sea nula la componente horizontal de la reacción del pasador  $O$ .

*Resp.*  $d_b = \frac{2}{3}d$ ,  $d_c = \frac{3}{4}d$ ,  $d_s = \frac{7}{10}d$

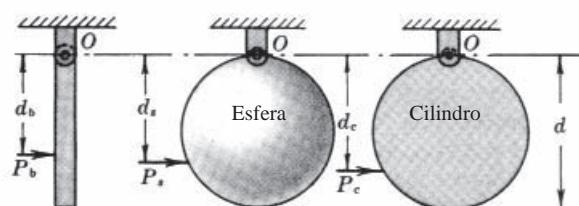


Figura 16.117

- 16.137.** El coeficiente de rozamiento entre el suelo horizontal y el calzado de un corredor es 0,5. Calcular el radio del trayecto circular más corto que el corredor puede recorrer a velocidad constante sin resbalar. *Resp.*  $r = 15,9$  ft

- 16.138.** Un tren que pesa 100.000 lb tiene su centro de gravedad a 5,5 ft por encima de la vía. A 30 mi/h recorre una curva no peraltada de 2500 ft de radio. Si los ejes de los raíles están separados 4 ft 82 in, calcular la fuerza vertical sobre el raíl exterior.

*Resp.* 52.800 lb

- 16.139.** Hallar el ángulo de peralte de una carretera para que un automóvil a 100 km/h pueda recorrer una curva de 90 m de radio sin empuje lateral en las ruedas.

*Resp.*  $41,2^\circ$

- 16.140.** Hay que peraltar una curva de autopista de 660 m de radio para una velocidad de 80 km/h. ¿Cuál debe ser el ángulo de peralte para que a la velocidad nominal no sea necesaria fuerza de rozamiento sobre el neumático en dirección normal al plano de rodadura

*Resp.*  $\theta = 0,084 \text{ rad o } 4,8^\circ$

- 16.141.** Partiendo del reposo, una cuenta se desliza hacia abajo por un alambre liso tal como se muestra en la Figura 16.118. Hallar la fuerza normal del alambre sobre la cuenta en el punto A. Calcular seguidamente las fuerzas normales en los puntos B y C, estando la cuenta en el arco de circunferencia.

*Resp.*  $N_A = 0,036 \text{ lb}$ ,  $\theta_x = \operatorname{arg} 0,75 = 36,9^\circ$ ;  $N_B = 0,276 \text{ lb}$ ,  $\theta_x = 36,9^\circ$ ;  $N_C = 0,348 \text{ lb}$  ( $\uparrow$ )

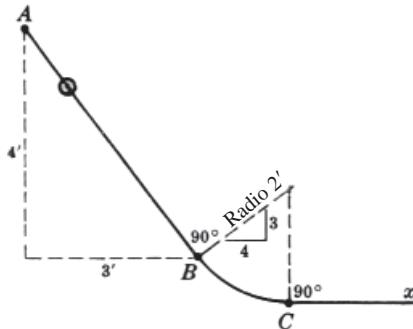


Figura 16.118

- 16.142.** Sobre un volante de radio de giro  $k$  y masa  $m$  actúa un par constante  $M = C$ . ¿Cuánto vale su velocidad angular tras haber rotado  $\theta$  radianes desde el reposo?

*Resp.*  $\omega = (1/k)\sqrt{2C\theta/m}$

- 16.143.** El disco uniforme de 6 ft de diámetro y 34 lb de peso de la Figura 16.119 se suelta desde el reposo cuando  $O$  y  $G$  están en la misma horizontal. ¿Cuál es su velocidad angular cuando  $G$  está en la vertical de  $O$  y debajo de  $O$ ? Hallar la reacción en  $O$  en ese instante.

*Resp.*  $\omega = 3,78 \text{ rad/s}$ ,  $O_n = 79,3 \text{ lb}$ ,  $O_t = 0$

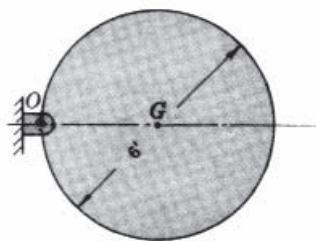


Figura 16.119

- 16.144.** Si la esfera y la barra del Problema 16.49 consideradas como un solo cuerpo se emplean como un péndulo, hallar la frecuencia del movimiento. *Resp.* 0,581 Hz

- 16.145.** En la Figura 16.120, se aplica un momento  $M$  de 45 lb ft al disco uniforme  $A$ , que a su vez arrastra al disco uniforme  $B$  sin resbalamiento entre ambos. ¿Cuál es la aceleración angular de cada disco? El disco  $A$  pesa 64,4 lb y el disco  $B$ , 128,8 lb.

Resp.  $\alpha_A = 3,75 \text{ rad/s}^2 (\curvearrowleft)$ ,  $\alpha_B = 77,8^\circ (\curvearrowright)$

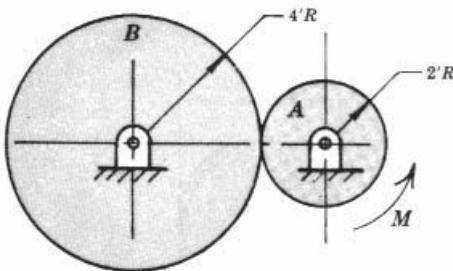


Figura 16.120

- 16.146.** Una barra sin masa de 4 m de largo rota en un plano horizontal en torno a su centro. De cada uno de sus extremos cuelga una masa de 4 kg a través de una cuerda de 600 mm de longitud. Cuando el sistema rota a  $\frac{2}{3}$  rev/s, hallar el ángulo de las cuerdas con la vertical.

Resp.  $(2 + 0,6 \operatorname{sen} \theta)/\operatorname{tg} \theta = 0,559$  y  $\theta = 77,8^\circ$ , ecuación resuelta por computador

- 16.147.** ¿Cuál es la aceleración angular de la polea de la Figura 16.121 que gira bajo la acción de las dos masas? Resp.  $\theta = 0,666 \text{ rad/s}^2 (\curvearrowright)$

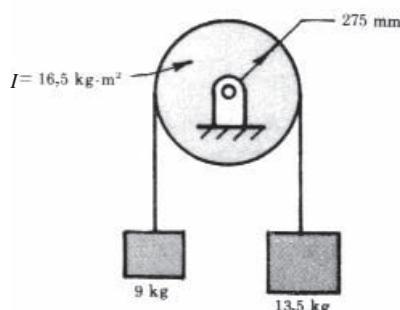


Figura 16.121

- 16.148.** En la máquina de Atwood simple de la Figura 16.122, las masas tienen unos pesos de 10 y 15 lb medidos en la Tierra con  $g = 32,2 \text{ ft/s}^2$ . Si la máquina se traslada a la Luna, donde la aceleración de la gravedad es 0,16 por el valor de  $g$  en la tierra, ¿cuál será la tensión en la cuerda cuando las masas se suelten desde el reposo? Resp.  $T = 1,29 \text{ lb}$

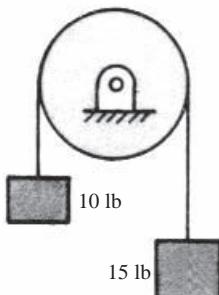


Figura 16.122

- 16.149.** Dos masas están unidas por un hilo inextensible liviano que pasa por una polea que gira sobre cojinetes sin rozamiento (Figura 16.123). En un lugar donde  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , las masas de  $A$ ,  $B$  y la polea son, respectivamente, 14, 9 y 5 kg. El radio de giro de la polea es 400 milímetros. Hallar la aceleración de las masas si el sistema se suelta desde el reposo en un lugar donde  $g = 4,9 \text{ m/s}^2$ . *Resp.*  $a = 0,935 \text{ m/s}^2$

- 16.150.** En la Figura 16.124, el disco de peso 76 lb y radio de giro 2,34 ft gira a 600 rpm. ¿Qué fuerza  $P$  hay que aplicar al mecanismo de frenado para detenerlo en 25 s? El coeficiente de rozamiento entre el disco y el miembro horizontal es 0,30. *Resp.*  $P = 17,8 \text{ lb}$

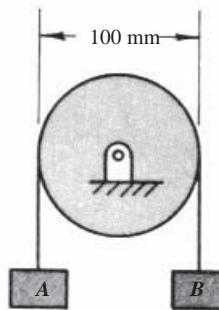


Figura 16.123

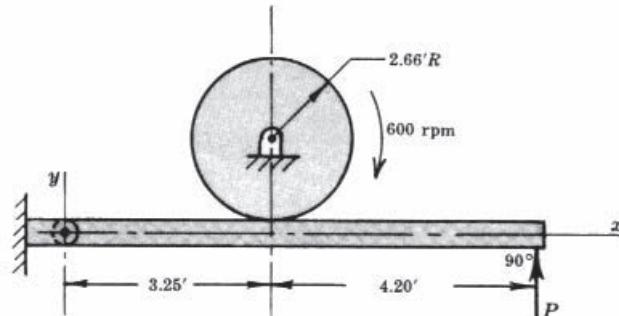


Figura 16.124

- 16.151.** Una placa triangular delgada de peso 20 lb gira a 30 rpm en torno a un eje horizontal sobre los dos cojinetes sin rozamiento dispuestos en  $A$  y  $B$ , tal como se muestra en la Figura 16.125. Hallar las reacciones de los cojinetes cuando la placa está en la posición vertical representada. *Resp.*  $A = 8,9 \text{ lb} (\uparrow)$ ,  $B = 10,7 \text{ lb} (\uparrow)$

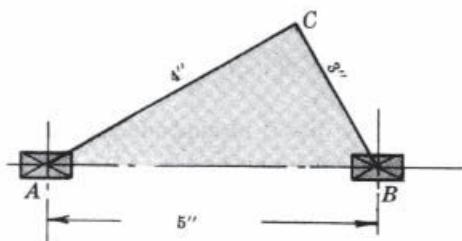


Figura 16.125

- 16.152.** En la Figura 16.126,  $AB = 600 \text{ mm}$ ,  $BC = 900 \text{ mm}$ ,  $M = 50 \text{ kg}$  y  $R = 600 \text{ mm}$ . Si el sistema gira a  $1\frac{2}{3} \text{ rev/s}$ , hallar las reacciones en los apoyos debidas a la fuerza «centrífuga» en las chumaceras  $A$  y  $B$ . Se desprecia el peso del brazo.

*Resp.*  $A = 1970 \text{ N}$ ,  $B = 1320 \text{ N}$

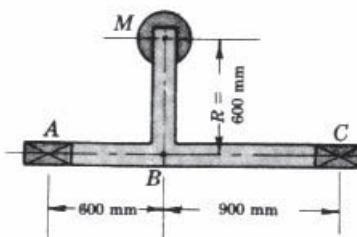


Figura 16.126

- 16.153.** Resolver el Problema 16.152 para una velocidad de  $16\frac{2}{3}$  rev/s.

*Resp.*  $A = 197$  kN,  $B = 132$  kN

- 16.154.** Un disco rota uniformemente a  $\frac{1}{4}$  rev/s en un plano horizontal. Sobre el disco se coloca una

masa de 40 kg a una distancia de 2 m del eje de rotación. Si, en esa posición, la masa está a punto de deslizar, ¿cuánto vale el coeficiente de rozamiento entre la masa y el disco?

*Resp.*  $\mu = 0,5$

- 16.155.** Un bloque de 2 lb se mantiene inmóvil contra un tope a 18 in del centro de una plataforma gira-

toria mediante una cuerda que pasa por un orificio del árbol, tal como se muestra en la Figura 16.127. ¿Cuál es la tensión necesaria en la cuerda para que el bloque se mantenga a 18 in del

centro cuando el bloque y la plataforma giran en torno al centro a 30 rad/s? Se supone que no

hay rozamiento. *Resp.*  $T = 83,8$  lb

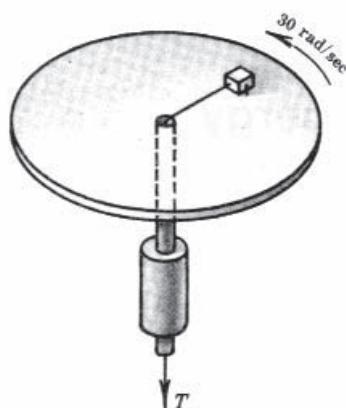


Figura 16.127

- 16.156.** El miembro horizontal de la Figura 16.128 mide 48 in de largo y rota a 20 rpm alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Cada bola de 2 lb cuelga de una cuerda de 12 in de largo.

¿Qué ángulo forma cada cuerda con la vertical? Resolver por tanteo.

*Resp.*  $\theta = 17,4^\circ$

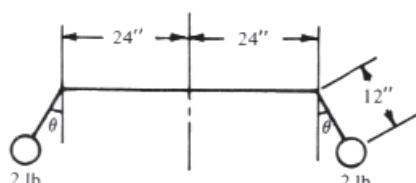


Figura 16.128

plicar el método de las fuerzas de inercia a los problemas siguientes.

- 16.157.** Resolver el Problema 16.78.

- 16.158.** Resolver el Problema 16.79.

- 16.159.** Resolver el Problema 16.90.

- 16.160.** Resolver el Problema 16.93.

- 16.161.** Resolver el Problema 16.101.

**16.162.** Resolver el Problema 16.111.

**16.163.** Resolver el Problema 16.115.

**16.164.** Resolver el Problema 16.145.

**16.165.** Resolver el Problema 16.150.

# TRABAJO Y ENERGÍA

# 17

## 17.1 TRABAJO

El trabajo que efectúa una fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa sobre una partícula que recorre una trayectoria cualquiera es, por definición, la integral de línea entre la posición  $P_1$  en el instante  $t_1$  y la posición  $P_2$  en el instante  $t_2$ :

$$U = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde  $d\mathbf{r}$  es la variación infinitesimal del vector de posición  $\mathbf{r}$ .

La expresión del trabajo puede escribirse también (véase la Figura 17.1)

$$U = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds$$

donde  $s_1, s_2$  = distancias de la partícula hasta el punto de referencia  $P_0$  respectivamente en los instantes inicial y final del movimiento

$F_t$  = módulo de la componente tangencial de la fuerza  $\mathbf{F}$  tal como se indica en la Figura 17.1

$ds$  = variación infinitesimal de la posición de la partícula sobre su trayectoria

Entonces, como

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad y \quad d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$

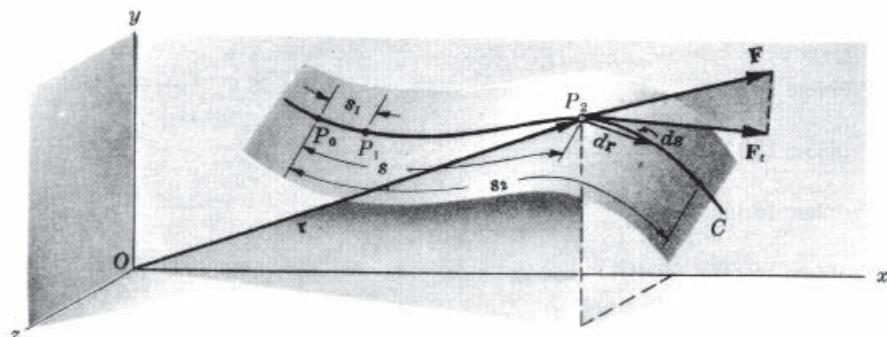


Figura 17.1

la integral de linea anterior puede escribirse

$$U = \int_C (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = \int_C (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

expresión que es posible convertir como sigue en una integral de tiempo

$$U = \int_{t_1}^{t_2} \left( F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \right) dt$$

## 17.2 CASOS PARTICULARES

Cabe considerar los casos particulares siguientes:

1. Fuerza constante y trayectoria recta, fuerza paralela a la trayectoria:

$$U = Fs$$

donde  $U$  = trabajo realizado

$F$  = fuerza constante

$s$  = desplazamiento a lo largo de la trayectoria recta

2. Fuerza constante y trayectoria recta, fuerza y trayectoria formando un ángulo constante:

$$U = Fs \cos \theta$$

donde  $U$  = trabajo realizado

$F$  = fuerza constante

$s$  = desplazamiento a lo largo de la trayectoria recta

$\theta$  = ángulo entre la recta de acción de la fuerza y el desplazamiento

3. Par de fuerzas (hay rotación):

$$U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

donde  $M$  = par

$\theta$  = ángulo infinitesimal girado

$\theta_1, \theta_2$  = desplazamientos inicial y final

El trabajo es positivo si la fuerza tiene el mismo sentido que el desplazamiento; y es negativo, si la fuerza actúa en sentido contrario al del movimiento.

El trabajo efectuado sobre un sólido rígido por dos o más fuerzas concurrentes durante un desplazamiento equivale al trabajo efectuado por la resultante de ese sistema de fuerzas durante el mismo desplazamiento.

El trabajo es una magnitud escalar. En el sistema tradicional de EE. UU., la unidad de trabajo es la libra-pie, ft·lb. La unidad de trabajo SI es el newton-metro (J), cuyo nombre oficial es joule, de símbolo J (1 N·m = 1 J).<sup>1</sup>

### 17.3 POTENCIA

La potencia, que es la cantidad de trabajo que se realiza en la unidad de tiempo, es igual a  $dU/dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ . Si el trabajo lo realiza un par de fuerzas de momento  $\mathbf{M}$ , es Potencia =  $dU/dt = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$ .

(a) En el sistema tradicional de EE.UU., la unidad de potencia es la libra-pie por segundo, lb·ft/s. Esta unidad resulta pequeña, por lo que se emplea el caballo de potencia (hp, «horsepower»), o simplemente caballo, que vale 550 lb·ft/s.

Las fórmulas a emplear para la potencia son

$$hp = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{550} \quad \text{y} \quad hp = \frac{\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\omega}}{550}$$

donde  $\mathbf{F}$  = fuerza en libras

$\mathbf{v}$  = velocidad en ft/s

$\mathbf{M}$  = momento del par en lb·ft

$\boldsymbol{\omega}$  = velocidad angular en rad/s

(b) La unidad SI de potencia es el joule por segundo (J/s), oficialmente designada como watt, de símbolo W (1 W = 1 J/s).<sup>2</sup>

Notas de los traductores

<sup>1</sup> En los países no anglosajones en ingeniería aún se sigue empleando bastante el antiguo sistema terrestre, basado en el kilogramo-fuerza, o kilopondio, de símbolo kp, el metro y el segundo. En este sistema, la unidad de trabajo es el kilopondio por metro, kp·m, conocido como kilográmetro, de símbolo kpm. Como en ese sistema se admite que 1 kp = 9,81 N, será 1 kpm = 9,81 J.

<sup>2</sup> No debe confundirse el caballo de potencia (horsepower, o hp) con el caballo de vapor, de símbolo CV, tan empleado todavía en los países no anglosajones. El caballo de vapor es la unidad de potencia que se emplea en el sistema terrestre y equivale a 75 kpm/s (véase nota a pie 1). Admitiendo los valores de 1 kp = 0,4536 lb y 1 ft = 0,3048 m, la equivalencia entre ambas unidades de potencia se establece teniendo en cuenta que

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ (ftAlb/s)} = 550 [(0,4536 \text{ kp})(0,3048 \text{ m})/\text{s}] = 76,040 \text{ kpm/s}$$

Ahora, como 1 CV = 75 kpm/s, resulta que 1 hp = 1,014 CV. Se trata, pues, de dos unidades de valor muy parecido, pero no iguales.

## 17.4 RENDIMIENTO

El rendimiento es igual al trabajo efectuado, o trabajo útil, dividido por el trabajo consumido durante el mismo tiempo. Se expresa asimismo como la potencia útil dividida por la potencia consumida. El trabajo útil es igual al trabajo consumido menos el trabajo disipado (habitualmente en vencer rozamientos).

## 17.5 ENERGÍA CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA

La energía cinética  $T$  de una partícula de masa  $m$  que se mueve con una celeridad  $v$  es, por definición,  $\frac{1}{2}mv^2$ .

En el sistema tradicional de EE.UU. la unidad es la libra-pie (ft·lb).

La unidad SI es el joule (J).

## 17.6 RELACIÓN ENTRE TRABAJO Y ENERGÍA PARA UNA PARTÍCULA

El trabajo realizado sobre una partícula por todas las fuerzas es igual a la variación de la energía cinética  $T$  de la partícula.

$$\begin{aligned} \text{Demostración: } U &= \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= m \int_{t_1}^{t_2} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) dt = \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}})^2 dt \\ &= \frac{1}{2} m [v^2]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = T_2 - T_1 \end{aligned}$$

donde  $U$  = trabajo realizado

$m$  = masa de la partícula

$v_1, v_2$  = celeridades inicial y final, respectivamente, en  $P_1$  y  $P_2$

$T_1, T_2$  = energía cinética inicial y final, respectivamente, en  $P_1$  y  $P_2$

## 17.7 ENERGÍA CINÉTICA $T$ DE UN CUERPO RÍGIDO EN TRASLACIÓN

La energía cinética  $T$  de un cuerpo rígido en rotación es  $T = \frac{1}{2}mv^2$ .

*Demostración* Las partículas del cuerpo tienen todas la misma velocidad  $\mathbf{v}$ . Entonces, si  $m_i$  = masa de la  $i$ -ésima partícula,

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i v^2 = \frac{1}{2}v^2 \sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{2}mv^2$$

donde  $m$  = masa de todo el cuerpo

$v$  = celeridad del cuerpo

## 17.8 ENERGÍA CINÉTICA $T$ DE UN CUERPO RÍGIDO EN ROTACIÓN

La energía cinética  $T$  de un cuerpo rígido en traslación es  $T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$ .

*Demostración* Sea  $\mathbf{r}_i$  el radio vector de la  $i$ -ésima partícula y  $\dot{\mathbf{r}}_i$  su velocidad, tal como se muestra en la Figura 17.2; entonces,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i(\dot{\mathbf{r}}_i)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i\omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 \end{aligned}$$

donde  $I_O =$  momento de inercia másico de todo el cuerpo respecto al eje de rotación  
 $\omega =$  celeridad angular.

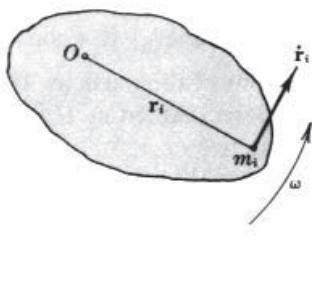


Figura 17.2

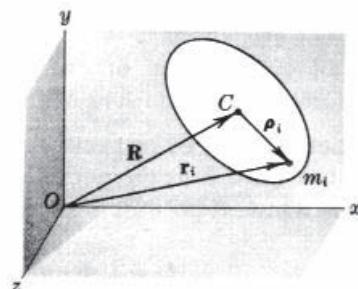


Figura 17.3

## 17.9 ENERGÍA CINÉTICA $T$ DE UN CUERPO EN MOVIMIENTO PLANO

La energía cinética  $T$  de un cuerpo en movimiento plano es  $T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$ .

*Demostración* Tomando como punto base el centro de masas, para el movimiento de la partícula  $i$ -ésima podemos escribir (Figura 17.3)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_i &= \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{p}}_i \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{p}}_i \\ \dot{\mathbf{r}}_i^2 &= (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{p}}_i) = \dot{\mathbf{R}}^2 + 2\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{p}}_i + \dot{\mathbf{p}}_i^2\end{aligned}$$

Entonces, para todas las partículas, es  $T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{R}}^2 + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{p}}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{p}}_i^2$

Pero  $\dot{\mathbf{R}}^2 = \bar{v}^2$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i$  y  $m_i \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{p}}_i = m_i \dot{\mathbf{R}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i) = \dot{\mathbf{R}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times m_i \mathbf{p}_i)$

$$T = \frac{1}{2} \bar{v}^2 \sum_{i=1}^n m_i + \dot{\mathbf{R}} \cdot \left( \boldsymbol{\omega} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{p}_i \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{p}_i^2$$

Como  $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{p}_i = 0$  cuando  $\mathbf{p}_i$  tiene su origen en el centro de masas,

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + 0 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$$

donde  $\bar{v} =$  celeridad del centro de masas

$\omega =$  celeridad angular

$\bar{I} =$  momento de inercia respecto al eje paralelo al eje  $z$  que pasa por el centro de masas

## 17.10 ENERGÍA POTENCIAL

Una fuerza es conservativa si realiza el mismo trabajo cualquiera que sea el camino que recorre su punto de aplicación (véase el Problema 17.1).

La energía potencial de un cuerpo se mide por el trabajo realizado contra las fuerzas conservativas que actúan sobre el cuerpo al llevar éste desde una posición origen o de referencia hasta la posición que ocupa. La energía potencial puede definirse como el valor opuesto al del trabajo realizado por la fuerza conservativa cuando se lleva al cuerpo desde la posición de referencia hasta la posición que ocupa. La elección de la posición de referencia es arbitraria; habitualmente, se basa en la comodidad.

## 17.11 RELACIÓN ENTRE TRABAJO Y ENERGÍA PARA UN CUERPO RÍGIDO

El teorema de la energía cinética afirma que el trabajo que realizan las fuerzas externas actuantes sobre un cuerpo rígido durante un desplazamiento de éste es igual a la variación de energía cinética que experimenta el cuerpo durante ese desplazamiento.

## 17.12 TEOREMA DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

El teorema de la conservación de la energía afirma que si una partícula (o un cuerpo) está sometida(o) a un sistema de fuerzas conservativas, la suma de su energía cinética y su energía potencial es constante.

*Demostración* Sean  $P$  y  $Q$  las posiciones respectivamente inicial y final de la partícula. El trabajo efectuado por una fuerza conservativa  $\mathbf{F}$  cuando la partícula se desplaza de  $P$  a  $Q$  se ha definido como  $U = \int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . Pero, en función de una posición de referencia  $S$  de radio vector  $\mathbf{r}_S$ , podemos escribir

$$U = \int_P^S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_S^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_P^S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_Q^S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Ahora bien, según la definición de energía potencial,  $V_P = \int_P^S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  y  $V_Q = \int_Q^S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  ; por tanto,

$$U = V_P - V_Q$$

Ya hemos demostrado que, en lo que respecta a la energía cinética,

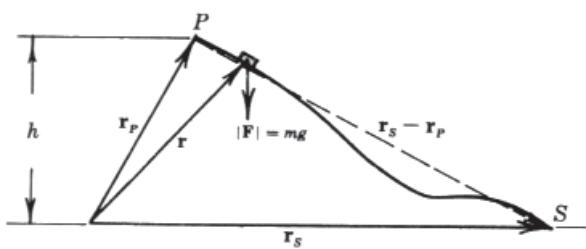
$$U = T_P - T_Q$$

Así pues,

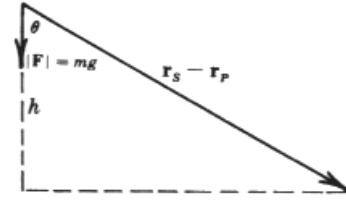
$$V_P - V_Q = T_P - T_Q, \quad \text{o sea,} \quad V_P + T_P = V_Q + T_Q$$

### Problemas resueltos

- 17.1.** Hallar la energía potencial  $V$  de un cuerpo de masa  $m$  a una altura  $h$  sobre un plano origen (tomo do como posición de referencia). Se supone que  $h$  es lo bastante pequeña para que la fuerza gravitatoria (el peso) no varíe.



(a)



(b)

**Figura 17.4**

#### SOLUCIÓN

La energía potencial  $V$  es el valor opuesto al del trabajo efectuado contra la fuerza actuante sobre el cuerpo cuando éste recorre un trayecto continuo cualquiera desde  $S$  (origen) hasta  $P$ . La fuerza es el peso  $mg$ , que se supone constante a lo largo de todo ese desplazamiento [Figura 17.4(a)].

Como  $\mathbf{F}$  es constante, podemos escribir

$$V = \int_C -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F} \cdot \int_{\mathbf{r}_S}^{\mathbf{r}_P} d\mathbf{r} = -\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_S)$$

Pero, según la Figura 17.4(b),

$$-\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_S) = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_P) = mg |\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_P| \cos \theta = mgh$$

Así pues, la energía potencial  $V$  de un cuerpo de masa  $m$  situado a una altura  $h$  por encima de un plano origen arbitrario es  $mgh$ .

- 17.2.** Un cuerpo apoyado en un plano liso está sujeto a un muelle de constante recuperadora  $k$  lb/in (o N/m). La Figura 17.5(a) es una vista en planta. Cuando el cuerpo está a una distancia  $l$  de la pared, el muelle no ejerce ninguna fuerza ( $kl = 0$ ), y ésta la consideramos como posición de referencia. Para la posición  $P$  del cuerpo, cuando éste se encuentra a una distancia  $l + x$  de la pared, hallar la energía potencial  $V_P$  del sistema (en realidad, del muelle, pues la energía potencial del cuerpo no varía, ya que éste está siempre en el plano horizontal).

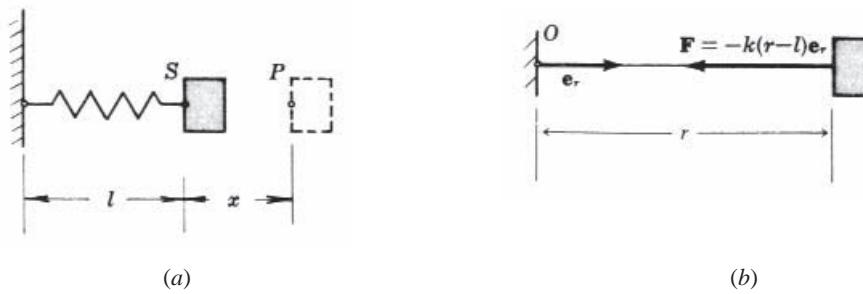


Figura 17.5

#### SOLUCIÓN

En la Figura 17.5(b) se representa el cuerpo a una distancia  $r$  de la pared, que es el origen. La fuerza que en esa posición actúa sobre el cuerpo es proporcional a la deformación del muelle medida desde la longitud de referencia con fuerza nula; así pues,  $\mathbf{F} = -k(r - l)\mathbf{e}_r$ . El trabajo que realiza esta fuerza durante un desplazamiento infinitesimal  $d\mathbf{r}$  (donde  $d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r$ ) es  $-k(r - l)\mathbf{e}_r \cdot dr \mathbf{e}_r = -r(r - l) dr$ , ya que  $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = 1$ . La energía potencial es

$$V_P = - \int_l^{l+x} [-k(r-l)] dr = \frac{1}{2} kx^2$$

El cuerpo posee esa energía potencial a causa de la tracción del muelle, la cual varía con la deformación. La tracción del muelle (su fuerza interna) actúa siempre según la longitud del muelle. Así pues, la energía potencial para una deformación dada no varía aunque el muelle se mueva lateralmente sobre la superficie lisa, con tal que no varíe la distancia a  $O$ . Ese movimiento lateral podría concebirse como la suma de desplazamientos infinitesimales perpendiculares al muelle durante los cuales sólo actúan fuerzas en la dirección del muelle (el trabajo en la dirección perpendicular al muelle es nulo).

El cuerpo del Problema 17.1 posee una energía potencial debida a una fuerza atractiva de la tierra que se supone constante para unos cambios de altura  $h$  relativamente pequeños. En el Problema 17.3 se introduce una fuerza atractiva que varía con el inverso del cuadrado de la distancia.

- 17.3.** Hallar la energía potencial de un cuerpo atraído por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $r$  al centro  $O$  de la fuerza.

#### SOLUCIÓN

La posición de referencia  $S$  la situamos en el infinito. (Nota: Puede que alguien trate de colocar la posición de referencia en el centro  $O$ , pero  $V$  se define en función del trabajo que se efectúa al moverse partiendo de la posición de referencia; pero como la fuerza tiende a hacerse infinita conforme el cuerpo se acerca a  $O$ , no parece aconsejable fijar en ese punto la posición de referencia.) En la Figura 17.6 se representa el cuerpo a una distancia  $r$  del origen, posición en la cual la fuerza que actúa sobre él es  $\mathbf{F} = -(C/r^2)\mathbf{e}_r$ . Como en el problema 7.2, la energía potencial es

$$V_P = \int_{\infty}^r -\left(\frac{C}{r^2}\right) \mathbf{e}_r \cdot (-dr \mathbf{e}_r) = \int_{\infty}^r \left(\frac{C}{r^2}\right) dr = -C \left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^r = -\frac{C}{r}$$

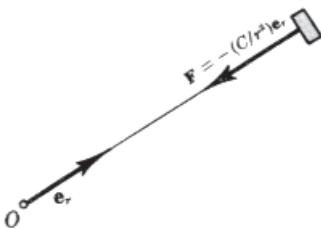


Figura 17.6

- 17.4.** Un muelle se comprime inicialmente desde una longitud libre de 8 in hasta una longitud de 6 in, haciendo una compresión inicial neta de 2 in. ¿Qué trabajo adicional se efectúa comprimiéndolo 3 in más (en total, 5 in) hasta una longitud de 3 in? Se supone una constante  $k = 20 \text{ lb/in}$ .

**SOLUCIÓN**

Por definición, el trabajo realizado comprimiendo el muelle desde 2 in hasta 5 in es

$$U = \int_{S_1}^{S_2} F_t \, ds = \int_2^5 20s \, ds = 210 \text{ in} \cdot \text{lb}$$

Puede obtenerse el mismo resultado empleando el Problema 17.2 para hallar el trabajo efectuado comprimiendo el muelle primero 2 in y luego 5 in. Nótese que ambas expresiones son las del trabajo realizado partiendo de la posición sin fuerza o libre. Su diferencia es el valor deseado:

$$U = \int_0^5 20s \, ds - \int_0^2 20s \, ds = 250 - 40 = 210 \text{ in} \cdot \text{lb}$$

- 17.5.** Resolver gráficamente el Problema 17.4.

**SOLUCIÓN**

Para resolver gráficamente, representamos la fuerza variable  $F = 20s$  en función del desplazamiento, tal como se muestra en la Figura 17.7.

Adviértase que el área comprendida entre los desplazamientos de 2 y 5 in tiene una dimensión horizontal de pulgadas y una dimensión vertical de libras.

Por consiguiente, el área sombreada es igual al trabajo realizado, o sea, la semisuma de sus alturas en libras multiplicada por la variación de desplazamientos en pulgadas:

$$U = \frac{1}{2}(40 \text{ lb} + 100 \text{ lb})(3 \text{ in}) = 210 \text{ in} \cdot \text{lb}$$

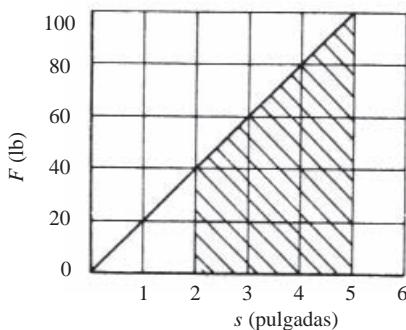


Figura 17.7

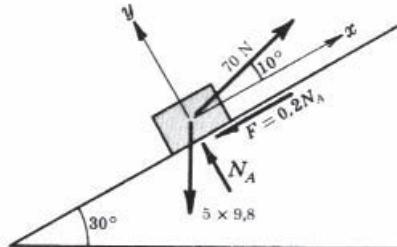


Figura 17.8

- 17.6.** Hallar el trabajo total efectuado sobre un cuerpo de 5 kg del que se tira hacia arriba por un plano inclinado rugoso que forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal, tal como se muestra en la Figura 17.8. Se supone un coeficiente de rozamiento  $\mu = 0,20$ .

**SOLUCIÓN**

Según el diagrama de cuerpo libre,  $N_A$  puede hallarse sumando las fuerzas normales al plano

$$\sum F_y = 0 = -5 \times 9,8 \cos 30^\circ + N_A + 70 \sin 10^\circ$$

Despejando,  $N_A = 30,3$  N.

A continuación, hallamos el trabajo realizado por cada fuerza. El signo de cada trabajo es positivo si la fuerza actúa en el mismo sentido en que el cuerpo se mueve.

Fuerza	Signo del trabajo realizado	Trabajo realizado	Resultado, J
70 N	+	$(70 \cos 10^\circ)(6)$	+413,6
$5 \times 9,8$	-	$(5 \times 9,8 \sin 30^\circ)(6)$	-147
$N_A$	Trabajo nulo, ya que $N_A \perp$ dirección movimiento		0
$F$	-	$(0,20 \times 30,3)(6)$	-36,4

Por consiguiente, trabajo total realizado =  $+413,6 - 147 - 36,4 = 230$  J.

Calculamos ahora la resultante de todas las fuerzas y luego hallamos el trabajo efectuado por la resultante. Como sólo trabaja la componente  $x$  de la resultante, sólo nos interesa esa componente:

$$R_x = \sum F_x = +70 \cos 10^\circ - 0,20(30,3) - 5 \times 9,8 \sin 30^\circ = 38,4 \text{ N}$$

Como 38,4 N es una fuerza constante, el trabajo total efectuado es  $R_x(6) = 38,4(6) = 230$  J.

- 17.7.** Calcular el trabajo invertido en hacer rodar hacia arriba una distancia de 1,5 m una rueda de 20 kg por un plano inclinado  $30^\circ$  respecto a la horizontal, tal como se muestra en la Figura 17.9. Se supone un coeficiente de rozamiento de 0,25.

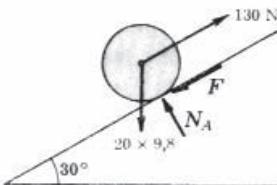


Figura 17.9

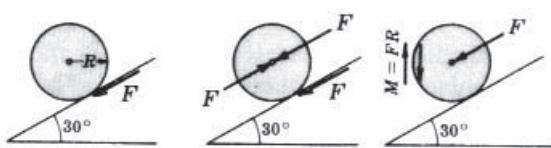


Figura 17.10

**SOLUCIÓN**

La fuerza normal  $N_A$  no trabaja, pues carece de componente en la dirección del movimiento.

La fuerza de rozamiento  $F$  tampoco trabaja, aunque por otra razón. Su punto de contacto acompaña a la rueda, y como no hay movimiento relativo (no hay deslizamiento) entre la fuerza de rozamiento y la rueda, el trabajo de esa fuerza es nulo. No ocurría lo mismo en el problema anterior, en que la fuerza de rozamiento realizaba un trabajo negativo, pero en ese caso el cuerpo se deslizaba plano abajo.

Otra manera de enfocar el trabajo del rozamiento en este problema sería sustituir la fuerza  $F$  por una fuerza igual  $F$  aplicada en el centro acompañada de un par, tal como se muestra en la Figura 17.10. (Por ahora, no tenemos en cuenta las demás fuerzas.) El trabajo del sistema equivalente es igual a la suma del trabajo de la fuerza  $F$  más el trabajo del par  $M$  (de valor  $FR$ ). Hallemos el trabajo efectuado en una revolución; es decir, durante  $2\pi$  rad. El centro se traslada una distancia  $2\pi R$  durante una revolución. Por consiguiente, el trabajo de  $F$  es  $-F(2\pi R)$ . El trabajo que realiza el par sirve para que la rueda suba por la pendiente y vale  $+M\theta$ , o sea,  $2\pi FR$ . La suma de los dos valores es cero.

Por consiguiente, en el sistema dado, las únicas fuerzas que trabajan son la fuerza de 130 N y la componente del peso paralela al plano (Figura 17.9). La componente del peso es  $20 \times 9,8 \sin 30^\circ$ .

$$\text{Trabajo realizado} = +130(1,5) - (20 \times 9,8 \sin 30^\circ)(1,5) = 48 \text{ J}$$

- 17.8.** El trabajo se expresa  $U = \int (\sum F_x) dx$ , donde  $\sum F_x$  es la suma de las fuerzas en la dirección  $x$ . Demostrar que el trabajo de expansión del gas en el motor simple de la Figura 17.11 es  $U = \int p dV$ , siendo  $p$  la presión del gas y  $V$  es el volumen.

#### SOLUCIÓN

La fuerza  $F$  que actúa sobre el pistón es  $pA$ , donde  $A$  es el área del pistón. Además, la variación de volumen es  $dV = A dx$ . Por tanto,

$$U = \int (\sum F_x) dx = \int (pA) \frac{dV}{A} = \int p dV$$

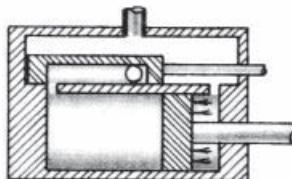


Figura 17.11

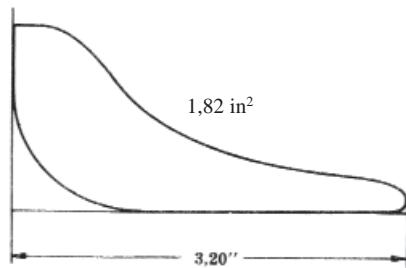


Figura 17.12

- 17.9.** La Figura 17.12 ilustra el diagrama de indicador tomado en la culata de un motor de vapor. El eje horizontal es proporcional a la carrera del motor y, por tanto, al volumen de vapor en pies cúbicos. La altura del diagrama indica la presión interna en psi o en lb/ft<sup>2</sup>. Se supone que la longitud del indicador es de 3,20 in y que el motor es de 6 in de calibre por 8 in de carrera. El dinamómetro del indicador es de escala 100, lo que significa que una presión de 100 psi produce en el diagrama un desplazamiento vertical de 1 in. El área del diagrama medida con un planímetro es 1,82 in<sup>2</sup>. Hallar el trabajo representado por el diagrama.

#### SOLUCIÓN

Las 3,20 in horizontales representan el cubicaje del motor. Como el calibre es 6 in y la carrera es 8 in, ese volumen es

$$V = Al = \frac{1}{4}\pi d^2 l = \frac{1}{4}\pi(6/12)^2(8/12) \text{ ft}^3 = 0,131 \text{ ft}^3$$

Una pulgada horizontal representa  $(0,131 \text{ ft}^3)/3,20 = 0,041 \text{ ft}^3$ .

Una pulgada vertical representa  $(100 \text{ lb/in}^2)(144 \text{ in}^2/\text{ft}^2) = 14\,400 \text{ lb/ft}^2$ .

Por tanto, un área de indicador de 1,82 in<sup>2</sup> representa un trabajo de  $1,82(14\,400)(0,041) = 1075 \text{ ft-lb}$ .

- 17.10.** En un cierto instante durante una aceleración a lo largo de una vía horizontal, la barra de enganche de una locomotora eléctrica sufre una tracción de 100 kN. ¿Qué potencia se está desarrollando si la celeridad del tren es 90 km/h?

#### SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \text{Potencia} &= (100\,000 \text{ N}) \left( \frac{90\,000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \right) = 2\,500\,000 \text{ N} \cdot \text{m/s} = 2,5 \times 10^6 \text{ J/s} \\ &= 2,5 \text{ MJ/s} \text{ o } 2,5 \text{ MW} \end{aligned}$$

- 17.11.** Una correa arrollada en una polea de 600 mm de diámetro sufre una tracción de 800 N por el lado tenso y una tracción de 180 N por el lado laxo. ¿Qué potencia está transmitiendo si gira a 200 rpm?

#### SOLUCIÓN

El momento  $M$  se calcula sumando los momentos de las fuerzas de tracción respecto al centro de la polea:

$$\text{Momento } M = 800 \times 0,3 - 180 \times 0,3 = 186 \text{ m-N}$$

$$\text{Potencia} = M(\text{m-N}) \cdot \omega(\text{rad/s}) = (186 \text{ N}\cdot\text{m})(200 \times 2\pi/60 \text{ rad/s}) = 3,9 \text{ kW}$$

- 17.12.** La fuerza  $P$  aplicada al freno Prony de la Figura 17.13 es de 25,6 lb. El momento  $M$  que el árbol del motor transmite al tambor del freno da a éste una velocidad angular antihoraria de 600 rpm. Hallar la potencia disipada por el dispositivo, cuyo peso se desprecia.

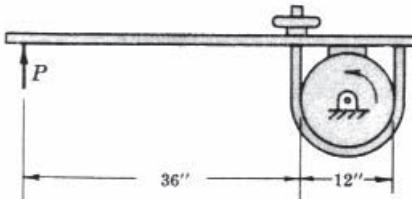


Figura 17.13

**SOLUCIÓN**

El momento  $M$  transmitido por el árbol es igual al momento de la fuerza  $P$  respecto al centro del tambor; es decir,  $(25,6 \text{ lb})(42/12 \text{ ft}) = 89,6 \text{ lb}\cdot\text{ft}$

$$H_p = \frac{M\omega}{550} = \frac{89,6 \text{ lb}\cdot\text{ft} \times (2\pi \times 600/60) \text{ rad/s}}{550 \text{ ft-lb/s}} = 10,2$$

Así pues, la potencia que transmite el árbol es 10,2 hp.

- 17.13.** La potencia medida por un freno Prony acoplado al volante de un motor es una potencia de freno (bhp) de 3,8 caballos. La potencia indicada (ihp), medida mediante diagramas del indicador, es de 4,1 caballos. ¿Cuál es el rendimiento del motor?

**SOLUCIÓN**

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{potencia útil}}{\text{potencia consumida}} = \frac{3,8 \text{ bhp}}{4,1 \text{ ihp}} = 93\%$$

- 17.14.** Con una celeridad inicial  $v_0$  se lanza un bloque de masa  $m$  sobre un plano horizontal. Si antes de detenerse recorre una distancia  $s$ , ¿cuál es el coeficiente de rozamiento, suponiendo que la fuerza de rozamiento sea proporcional a la fuerza normal?

**SOLUCIÓN**

La energía cinética inicial es  $T_1 = \frac{1}{2}mv_0^2$ ; la energía cinética final es cero.

La fuerza normal es  $mg$ . Por tanto, el rozamiento es  $\mu mg$  y realiza un trabajo  $-\mu mgs$ .

$$U = T_2 - T_1, \text{ o sea, } -\mu mgs = -\frac{1}{2}mv_0^2, \text{ de donde } \mu = v_0^2 / 2gs.$$

- 17.15.** La intensidad de un campo magnético está dada por  $F = -3/x$ , donde  $F$  está en libras y  $x$  es la distancia al imán, en pies. Un disco que pesa 4 oz se sitúa a 6 ft del imán sobre un plano horizontal liso. ¿Cuál será su velocidad a 3 ft del imán?

**SOLUCIÓN**

Con la relación entre trabajo y energía,  $U = \Delta T$ , tenemos

$$U = \int F dx = \int_6^3 -\frac{3}{x} dx = [-3 \ln x]_6^3 = 2,08 \text{ ft-lb}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} \left( \frac{4/16}{g} \right) v^2 - 0 = 2.08 \text{ ft-lb}$$

por tanto,

$$v = 23,1 \text{ ft/s}$$

- 17.16.** La celeridad de rotación de una barra esbelta de 2 m de largo y 4 kg de masa en torno a un eje vertical que pasa por un extremo aumenta de 20 a 50 rpm en 10 revoluciones. Calcular el momento constante  $M$  necesario para lograrlo.

**SOLUCIÓN**

El momento de inercia  $I_O$  de la barra respecto a un eje extremo es

$$I_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}(4)(2)^2 = 5,33 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega_1 = 2\pi(20/60) = 2,09 \text{ rad/s}, \omega_2 = 2\pi(50/60) = 5,23 \text{ rad/s} \text{ y } \theta = 2\pi(10) = 62,8 \text{ rad.}$$

Trabajo efectuado = Variación de la energía cinética del cuerpo en rotación

$$M\theta = \frac{1}{2}I_O(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

$$M(62,8) = \frac{1}{2}(5,33)(5,23^2 - 2,09^2) \quad \text{o sea, } M = 0,975 \text{ m} \cdot \text{N}$$

- 17.17.** Una barra esbelta de masa  $m$  y longitud  $l$  tiene un extremo articulado a un plano horizontal. Inicialmente en posición vertical, se deja caer como se muestra en la Figura 17.14. ¿Cuál es su celeridad angular cuando choca con el suelo?

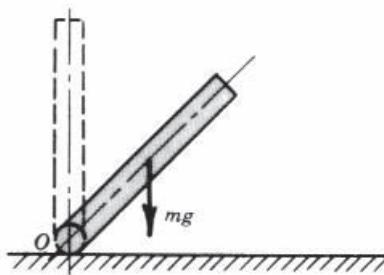


Figura 17.14

**SOLUCIÓN**

La única fuerza que trabaja es el peso  $mg$ , que se supone concentrado en el centro de gravedad, que desciende una distancia  $\frac{1}{2}l$ . El trabajo del peso es, entonces,  $\frac{1}{2}mgl$ .

La energía cinética varía de  $T_1 = 0$  a  $T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega^2$ . Entonces

$$U = T_2 - T_1 \quad \text{o} \quad \frac{1}{2}mgl = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

de donde

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

- 17.18.** Un vagón con sus cuatro ruedas pesa 1800 lb. Cada rueda pesa 200 lb y tiene un diámetro de 2,50 ft. El vagón, inicialmente a 15 mi/h, se detiene tras recorrer 2 mi de vía horizontal. ¿Cuál es la resistencia a la rodadura?

**SOLUCIÓN**

La energía cinética inicial  $T_1$  está formada por la energía cinética (de traslación) del vagón de 1000 lb y la energía cinética (de traslación y rotación) de las cuatro ruedas. La energía cinética final es  $T_2 = 0$ . El trabajo de la resistencia a la rodadura  $F$  es  $F(2)(5280)$  ft-lb. Además,  $15 \text{ mi/h} = 22 \text{ ft/s}$ . Entonces

$$U = T_2 - T_1$$

$$10.560F = 0 - \frac{1}{2}(1000/32,2)(22)^2 - 4(\frac{1}{2})(200/32,2)[(22)^2 + \frac{1}{2}r^2\omega^2]$$

Sustituyendo  $\omega^2r^2 = v^2 = (22)^2$  en la expresión anterior, se obtiene  $F = -1,57 \text{ lb}$ .

- 17.19.** Una barra esbelta de 4 ft de largo cae desde el reposo en la posición horizontal hasta la posición a  $45^\circ$  que se representa en la Figura 17.15. En esta última posición, ¿cuáles son las reacciones en  $O$  sobre la barra?

**SOLUCIÓN**

Tomamos unos ejes  $n$  y  $t$  según la barra y perpendicular a ésta, respectivamente. En el centro de percusión  $P$  aplicamos las correspondientes fuerzas de inercia para mantener la barra en «equilibrio a efectos de estudio».

Para hallar la aceleración angular  $\alpha$  en la posición representada, empleamos la ecuación  $\sum M_O = 0$ , es decir,  $-W(2)(0,707) + m\bar{r}\alpha(k_0^2/\bar{r}) = 0$ . La distancia a  $P$  es  $k_0^2/\bar{r} = I_O/m\bar{r} = \frac{8}{3}$  ft. Entonces, la ecuación queda  $-100(2)(0,707) + (100/32,2)(2\alpha)(\frac{8}{3}) = 0$ , de donde  $\alpha = 8,53 \text{ rad/s}^2$ .

Sumando fuerzas según el eje  $t$ ,  $O_t + m\bar{r}\alpha - 100 \cos 45^\circ = 0$ , o sea,  $O_t = 17,7 \text{ lb}$  en el sentido asignado.

Para hallar  $O_n$ , primero hay que calcular  $\omega$ . Empleamos el teorema de la energía cinética. La única fuerza que trabaja es el peso, cuyo centro  $G$  cae  $2(0,707) = 1,414 \text{ ft}$ . Por tanto, trabajo =  $+100(1,414) = 141,4 \text{ ft-lb}$ .

La variación de energía cinética es igual al valor final  $\frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}[\frac{1}{3}(100/32,2)(4)^2]\omega^2 = 8,28\omega^2$ .

Como  $U = \text{variación en } T$ , tenemos  $141,4 = 8,28\omega^2$ , o sea,  $\omega^2 = 1,71$ .

Sumando fuerzas a lo largo de la barra,

$$-O_n + 100(0,707) + (100/32,2)(2)(17,1) = 0 \quad \text{o sea} \quad O_n = 177 \text{ lb}$$

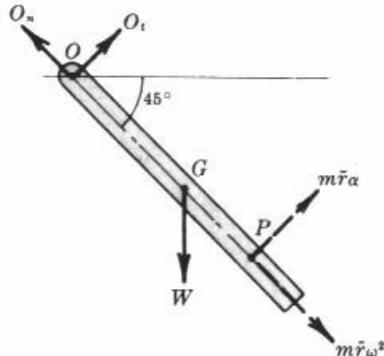


Figura 17.15

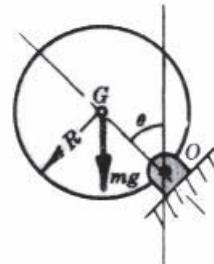


Figura 17.16

- 17.20.** Un cilindro macizo homogéneo de radio  $R$  y masa  $M$  rota libremente desde su posición inicial de reposo ( $G$  encima y en la vertical de  $O$ ) alrededor de un eje fijo perpendicular al plano del papel (Figura 17.16). ¿Cuál es su celeridad angular en la posición  $\theta$ ?

**SOLUCIÓN**

Por inspección,  $G$  cae una distancia vertical  $R - R \cos \theta$ . Así pues, el trabajo de la gravedad sobre el cilindro es  $mgR(1 - \cos \theta)$ .

En la posición inicial de reposo, la energía cinética es  $T_1 = 0$ . La energía cinética en la posición  $\theta$  es  $T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2$ . Por el teorema de los ejes paralelos, podemos escribir

$$I_O = \bar{I} + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

$$\text{entonces } U = T_2 - T_1 \quad mgR(1 - \cos \theta) = \frac{3}{4}mR^2\omega^2 \quad \omega = \sqrt{\frac{4g(1 - \cos \theta)}{3R}}$$

- 17.21.** Con una velocidad inicial de 9 in/s, una esfera asciende rodando por un plano inclinado  $30^\circ$  con la horizontal, tal como se muestra en la Figura 17.17. ¿Hasta dónde llega?

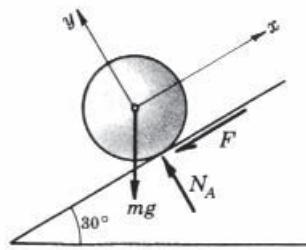


Figura 17.17

**SOLUCIÓN**

La energía cinética inicial  $T_1$  disminuye hasta  $T_2 = 0$  en el punto más alto del recorrido. La única fuerza que trabaja es la componente (negativa) del peso  $W$  paralela al plano.

Trabajo realizado =  $-(mg \operatorname{sen} 30^\circ)x$ , donde  $x$  es la distancia buscada.

La energía cinética inicial  $T_1$  del cuerpo en movimiento plano es  $T_1 = \frac{1}{2}m\bar{v}_1^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_1^2$ .

Como aquí  $\bar{I} = \frac{2}{3}mR^2$  y  $\bar{v}_1 = \omega_1 R$ , tenemos  $T_1 = \frac{1}{2}m\bar{v}_1^2 + \frac{1}{3}m\bar{v}_1^2 = \frac{7}{10}m(9)^2$ . Entonces

$$U = T_2 - T_1 \quad -(mg \operatorname{sen} 30^\circ)x = 0 - \frac{7}{10}m(9)^2 \quad x = 11,6 \text{ in}$$

- 17.22.** En la Figura 17.18(a) se representa un cilindro homogéneo de 322 lb que rueda, sin deslizar, partiendo del reposo bajo la acción de la fuerza horizontal de 12 lb. Hallar su velocidad angular tras haber girado 90°. El diámetro es 3,2 ft.

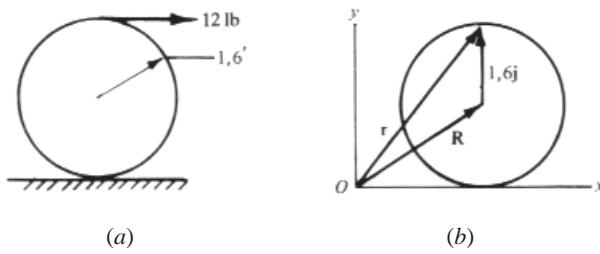


Figura 17.18

**SOLUCIÓN**

En el diagrama de cuerpo libre de la Figura 17.18(b), la única fuerza que trabaja es la fuerza de 12 lb. Para los ejes coordenados ( $x, y$ ) que se muestran, el radio vector del punto más alto es  $\mathbf{r} = \mathbf{R} + 1,6\mathbf{j}$ .

Para una rotación infinitesimal  $d\phi$ , podemos escribir

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + 1,6(d\phi)\mathbf{i}$$

Obsérvese también que  $d\mathbf{R} = 1,6(d\phi)\mathbf{i}$ . Ahora podemos escribir como sigue el trabajo infinitesimal de la fuerza de 12 lb:

$$\begin{aligned} dU &= 12\mathbf{i} \cdot d\mathbf{r} = 12\mathbf{i} \cdot (1,6 d\phi \mathbf{i} + 1,6 d\phi \mathbf{i}) \\ &= 38,4 d\phi \end{aligned}$$

$$U = \int_0^{\pi/2} 38,4 d\phi = 60,3 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

El mismo resultado se consigue sustituyendo la fuerza de 12 libras aplicada en el punto más alto por una fuerza horizontal de 12 lb aplicada en el centro acompañada de un par de  $12 \times 1,6 = 19,2 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ .

El trabajo efectuado por la fuerza aplicada en el centro y el par de fuerzas es

$$U = 12 \times 1,6 \times \frac{\pi}{2} + 19,2 \left(\frac{\pi}{2}\right) = 60,3 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Seguidamente, hallamos la energía cinética del cilindro:

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{322}{g}\right)\left(\frac{\omega}{1,6}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{322}{g}\right)(1,6)^2\right]\omega^2$$

igualando ésta al trabajo realizado, resulta

$$\omega = 2,69 \text{ rad/s}$$

- 17.23.** Un cilindro homogéneo macizo rueda sin deslizar sobre el plano horizontal. Su masa es de 90 kg y se encuentra en reposo en la posición representada en la Figura 17.19. La constante recuperadora del muelle es 450 N/m y su longitud sin deformar es 600 mm. ¿Qué celeridad angular lleva el cilindro cuando el muelle ha desplazado su centro 500 mm hacia la derecha?

#### SOLUCIÓN

La energía cinética inicial del cilindro es  $T_1 = 0$  y su energía cinética final es  $T_2 = \frac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2$ .

Sustituyendo  $\bar{v}_2 = r\omega_2 = 0,15\omega_2$  e  $\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(90)(0,15)^2 = 1,01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , obtenemos  $T_2 = 1,52\omega_2^2$ .

Como el punto de aplicación de la fuerza de rozamiento se mueve con el cilindro (y, por ello, no trabaja), las fuerzas constituyen un sistema conservativo. Podemos, pues, emplear el teorema de la conservación de la energía. El sistema posee una energía potencial a causa de la constitución del muelle (véase el Problema 17.2).

Las longitudes inicial y final del muelle son  $s_1 = \sqrt{(0,6)^2 + (0,9)^2} = 1,08 \text{ m}$  y  $s_2 = \sqrt{(0,6)^2 + (0,4)^2} = 0,72 \text{ m}$ . Entonces,

$$V_1 = \frac{1}{2}k(1,08 - 0,6)^2 = \frac{1}{2}(450)(0,48)^2 = 51,8 \text{ m} \cdot \text{N} \quad V_2 = \frac{1}{2}k(0,72 - 0,6)^2 = 3,24 \text{ m} \cdot \text{N}$$

Finalmente, según el teorema de la conservación de la energía, podemos escribir

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad 0 + 51,8 = 1,52\omega_2^2 + 3,24 \quad \omega_2 = 5,65 \text{ rad/s}$$

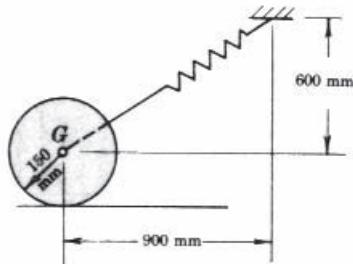


Figura 17.19

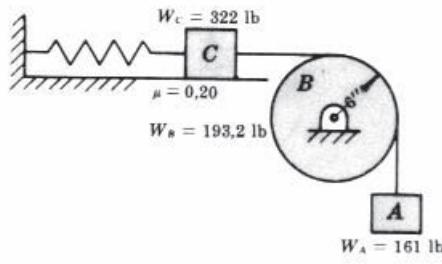


Figura 17.20

- 17.24.** En la posición representada en la Figura 17.20, el bloque A desciende a 5 ft/s. El cilindro B se supone homogéneo y macizo y se mueve sobre cojinetes sin rozamiento. El muelle está inicialmente comprimido 6 in y su constante es 6 lb/in. ¿Cuál es la celeridad  $v$  de A tras descender 4 ft?

#### SOLUCIÓN

Para hallar la energía cinética y el trabajo efectuado, consideramos el sistema constituido por los cuerpos A, B y C. La energía cinética inicial  $T_1$  es

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{W_C}{g}\right)v_1^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_B\omega_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{W_A}{g}\right)v_1^2 = 225 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

donde  $\bar{I}_B = \frac{1}{2}(W_B/g)(\frac{1}{2})^2$  y  $\omega_1 = v_1/r = 5/\frac{1}{2} = 10 \text{ rad/s}$ , puesto que se supone que no hay deslizamiento de la cuerda sobre el cilindro. La energía cinética final  $T_2$ , en función de la celeridad  $v$  deseada, es

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{W_C}{g}\right)v^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_B(2v)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{W_A}{g}\right)v^2 = 9,0v^2$$

Sobre el sistema el trabajo se efectúa como sigue: el trabajo de  $W_A$  es positivo; el trabajo del rozamiento sobre  $C$  ( $0,20 \times 322$ ) es negativo; durante las primeras 6 pulgadas, o  $\frac{1}{2}$  ft, el trabajo del muelle es positivo, pero después se alarga desde la posición neutra y su trabajo es negativo. Así pues,

$$\text{Trabajo } U = +161(4) - 64,4(4) + \int_0^{1/2} ks \, ds - \int_0^{3,5} ks \, ds = +26,4 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Entonces  $U = T_2 - T_1$ ,  $26,4 = 9,0v^2 - 2,25$ , y  $v = 5,29 \text{ ft/s}$ .

- 17.25.** Un cilindro asciende por un plano inclinado merced a la tracción de una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento y está unida a una masa de 70 kg, tal como se muestra en la Figura 17.21. El cilindro, de 45 kg de masa y 600 mm de radio, sube una distancia de 5 m partiendo del reposo. ¿Cuál es su celeridad?

#### SOLUCIÓN

La energía cinética inicial del cilindro y la masa es  $T_1 = 0$ . La energía cinética final del sistema es

$$T_2 = T_c + T_m = (\frac{1}{2}m_c\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_c\omega^2) + (\frac{1}{2}m_m\bar{v}^2) = 68,75\bar{v}^2$$

Tras sustituir  $m_c = 45$ ,  $m_m = 70$ ,  $\bar{I}_c = \frac{1}{2}m_cR^2$  y  $R^2\omega^2 = \bar{v}^2$ .

Se supone nula la energía potencial inicial del cilindro y éste adquiere una energía potencial  $(9,8 \times 45)(5 \text{ sen } 50^\circ)$ . La energía potencial inicial de la masa de 70 kg se supone nula, con lo que pierde una energía potencial  $(9,8 \times 70)(5)$ . Así pues,

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad 0 + 0 = 68,75\bar{v}^2 + (9,8 \times 45)(5 \text{ sen } 50^\circ) - (9,8 \times 10)(5) \quad \bar{v} = 5,03 \text{ m/s}$$

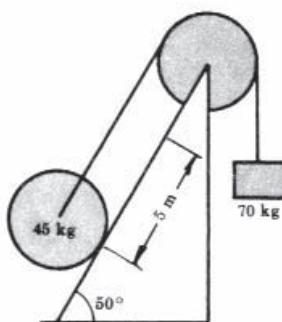


Figura 17.21

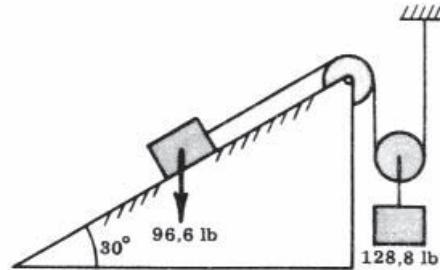


Figura 17.22

- 17.26.** El bloque de 96,6 lb de la Figura 17.22 descansa sobre un plano liso. Está sujeto a un soporte mediante una cuerda flexible e inextensible que pasa por las poleas sin rozamiento. El peso de 128,8 lb está suspendido como se muestra. Tras soltar el sistema desde el reposo, ¿qué distancia recorre el bloque que se mueve sobre el plano para adquirir una velocidad de 8 ft/s?

#### SOLUCIÓN

El bloque de 128,8 lb recorre la mitad de la distancia que recorre el bloque de 96,6 lb, y su celeridad es la mitad que la de éste.

La energía cinética inicial del sistema es  $T_1 = 0$ . Su energía cinética final es

$$T_2 = \frac{1}{2}(3)(8)^2 + \frac{1}{2}(4)(8/2)^2 = 128 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

El trabajo lo efectúan la componente del peso paralela al plano y el peso de 128,8 lb. Suponiendo que el movimiento es plano arriba, el trabajo vale

$$U = -(96,6 \text{ sen } 30^\circ)s + 128,8 \frac{s}{2} = 16,1s$$

$$16,1s = 128 \quad \text{o sea,} \quad s = 7,95 \text{ ft} \quad (\text{plano arriba})$$

- 17.27.** Un tramo de  $c$  metros de cadena flexible de longitud  $l$  y masa  $a$  kg/m cuelga libremente por el borde una mesa, cuando la cadena se libera y se deja caer. ¿Cuál es su velocidad en el momento de abandonar la mesa que se supone lisa?

**SOLUCIÓN**

El trozo colgante de masa  $ac$  cae una distancia  $l - c$ , y el trabajo de la gravedad sobre él es  $gac(l - c)$ . El trozo que estaba sobre la mesa cae una distancia media  $\frac{1}{2}(l - c)$ , y el trabajo de la gravedad sobre él es  $ga(l - c) \times \frac{1}{2}(l - c)$ . El trabajo total debe ser igual a la energía cinética  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}alv^2$ . Entonces,

$$gac(l - c) + \frac{1}{2}ga(l - c)^2 = \frac{1}{2}alv^2, \quad \text{de donde} \quad v = \sqrt{\frac{g(l^2 - c^2)}{l}}$$

- 17.28.** Hallar el trabajo realizado al enrollar en un torno horizontal un cable homogéneo si su longitud libre es 6 m y tiene una masa total de 50 kg.

**SOLUCIÓN**

En la Figura 17.23 se representa el cable en su posición inicial. Obsérvese que todo elemento de la longitud colgante tiene un peso  $9,8(50/6)dx = 81,7dx$ .

Se supone que el elemento  $dx$  está a una distancia  $x$  del extremo libre. Ese elemento subirá una distancia  $(6 - x)$  m. El producto de esta distancia por el peso del elemento es el trabajo a realizar contra la gravedad para iar hasta el torno ese elemento.

El trabajo total es la integral del trabajo realizado sobre cada elemento infinitesimal. Como  $x$  varía de 0 a 6:

$$\text{Trabajo} = \int_0^6 81,7(6-x) dx = 1470 \text{ J}$$

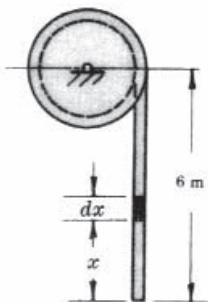


Figura 17.23

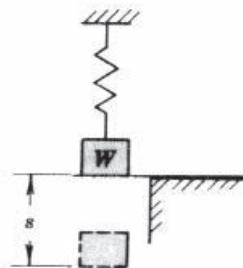


Figura 17.24

- 17.29.** En la Figura 17.24, el peso  $W$  cuelga libremente y produce un alargamiento  $c$  en el muelle. Demostrar que si el peso (sujeto de modo que el muelle tenga su longitud libre) se suelta de repente, el muelle se alarga una longitud  $2c$  antes de que el peso empiece a retornar hacia arriba.

**SOLUCIÓN**

La energía cinética del peso en el punto más alto (posición inicial) y en el punto más bajo es nula. Por tanto, el trabajo total efectuado sobre el peso debe ser cero. Pero el trabajo total efectuado es el trabajo positivo de la gravedad ( $Ws$ ) compensado por el trabajo negativo del muelle ( $\frac{1}{2}ks^2$ ). Por consiguiente,

$$Ws - \frac{1}{2}ks^2 = 0$$

Pero cuando el peso  $W$  cuelga libremente, éste y la fuerza  $kc$  del muelle están en equilibrio. Si en la expresión anterior hacemos  $W = kc$ , obtenemos  $s = 2c$ .

En este tipo de carga, la tensión del muelle es el doble que el peso.

- 17.30.** En el cañón de muelle de la Figura 17.25, la pelota  $W$  descansa contra el muelle comprimido de constante  $k$ . Su compresión inicial es  $x_0$ . ¿Con qué celeridad abandonará la pelota el cañón? Se supone que cuando la placa de apoyo está en la boca del cañón, el muelle tiene su longitud libre.

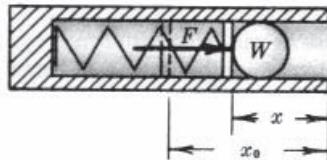


Figura 17.25

**SOLUCIÓN**

La bola se representa en una posición cualquiera  $x$  desde la boca del cañón. La fuerza que realiza trabajo es la del muelle  $F = kx$ .

Trabajo realizado  $= \int_0^{x_0} kx \, dx = \frac{1}{2}kx_0^2$ . Este es igual a la energía cinética que adquiere la pelota, que vale  $\frac{1}{2}(W/g)v^2$ . Por tanto,  $v = x_0\sqrt{kg/W}$ .

- 17.31.** Dos bolas están unidas por un muelle de longitud libre 450 mm y constante 0,044 N/m. Ambas son empujadas una hacia la otra (comprimiendo el muelle) hasta una distancia de 150 mm. Seguidamente se sueltan sobre una mesa horizontal lisa. ¿Qué trabajo se efectúa sobre las bolas para devolverlas a su separación inicial?

**SOLUCIÓN**

El trabajo que sobre las bolas efectúa la fuerza variable del muelle es igual al trabajo efectuado en comprimir el muelle desde 450 mm hasta 150 mm; es decir,  $U = \int_0^{300} kx \, dx = [\frac{1}{2}kx^2]_0^{300} = \frac{1}{2}(0,044)(300)^2 = 1,98 \text{ J}$ .

- 17.32.** Una cuerda está enrollada alrededor de un cilindro homogéneo macizo de 10 kg, tal como se muestra en la Figura 17.26. Hallar la celeridad del centro  $G$  del cilindro tras haber descendido 1,2 m partiendo del reposo.

**SOLUCIÓN**

La única fuerza que trabaja es el peso  $10 \times 9,8 = 98 \text{ N}$ .

La energía cinética inicial es nula. La energía cinética final es

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2)\left(\frac{\bar{v}^2}{r^2}\right) = \frac{3}{4}m\bar{v}^2 = 7,5\bar{v}^2$$

entonces,

$$U = 98 \times 1,2 = 7,5\bar{v}_1^2 \quad \text{y} \quad \bar{v} = 3,96 \text{ m/s}$$

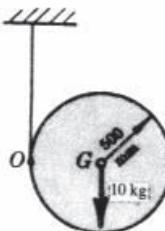


Figura 17.26

- 17.33.** En la Figura 17.27, inicialmente el bloque  $A$  descansa sobre el muelle, al que está unido mediante una cuerda inextensible de 2 ft, la cual se tensa cuando el sistema se suelta. ¿Cuánto se alarga el muelle para llevar el sistema al reposo? El cilindro, que pesa 161 lb y gira sobre cojinetes sin rozamiento, puede suponerse homogéneo.

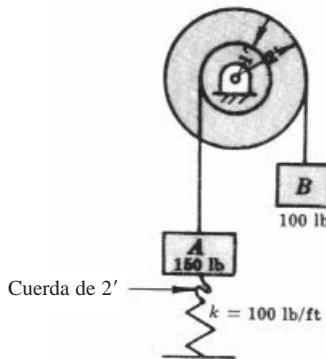


Figura 17.27

**SOLUCIÓN**

Hallamos primero la energía cinética del sistema antes de que intervenga el muelle, es decir, mientras el peso  $A$  se eleva 2 ft, el trabajo efectuado vale  $100s_B - 150s_A$ .

El peso  $B$  cae 4,0 ft mientras  $A$  sube 2,0 ft. Por tanto, la energía cinética cuando se inicia la acción del muelle es el trabajo efectuado, o  $T_1 = 100(4,0) - 150(2,0) = 100 \text{ ft}\cdot\text{lb}$ . La energía cinética final del sistema es  $T_2 = 0$ .

El trabajo realizado sobre el sistema ( $A$  y  $B$ ) por la gravedad y por el muelle al alargarse una longitud  $x$  ft es

$$U = -100(2x) - 150(x) - \frac{1}{2}kx^2 = 50x - 50x^2$$

Como  $U = T_2 - T_1$ , con  $50x - 50x^2 = 0 - 100$ , tenemos  $x^2 - x - 2 = 0$ , y resulta  $x = 2,0 \text{ ft}$ .

- 17.34.** En la Figura 17.28, ¿qué peso de  $B$  hace que el cilindro, con  $I = 100 \text{ slug}\cdot\text{ft}^2$ , adquiera una celeridad de 4 rad/s tras girar 6 rad en sentido antihorario a partir del reposo?

**SOLUCIÓN**

El trabajo efectuado en sentido antihorario es

$$U = [W_B(2) - 64,4(\frac{1}{2})]\theta = 12W_B - 193$$

La energía cinética inicial del sistema es  $T_1 = 0$  y la energía cinética final es

$$T_2 = \frac{1}{2}m_Bv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_Cv_C^2$$

Pero  $v_B = 2\omega$ ,  $v_C = \frac{1}{2}\omega$  y  $\omega = 4 \text{ rad/s}$ ; por tanto,

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{W_B}{32,2}\right)(8)^2 + \frac{1}{2}(100)(4)^2 + \frac{1}{2}(2)(2)^2 = 0,994W_B + 804$$

Entonces  $U = T_2 - T_1 = 12W_B - 193 = 0,994W_B + 804$  y  $W_B = 90,6 \text{ lb}$ .

- 17.35.** En la Figura 17.29, el bloque  $A$  pesa 96,6 lb y el bloque  $B$  pesa 128,8 lb. El tambor tiene un momento de inercia  $\bar{I} = 12 \text{ slug}\cdot\text{ft}^2$ . ¿Cuánto desciende  $A$  hasta alcanzar una celeridad de 6 ft/s?

**SOLUCIÓN**

Trabajo realizado =  $96,6s_A - 128,8s_B = 53,7s_A$ , ya que  $s_B = \frac{1}{3}s_A$ .

La energía cinética inicial del sistema es  $T_1 = 0$ , y su energía cinética final es  $T_2 = \frac{1}{2}m_Av_A^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 + \frac{1}{2}m_Bv_B^2 = 86 \text{ ft}\cdot\text{lb}$ , ya que  $v_A = 6 \text{ ft/s}$ ,  $v_B = 2 \text{ ft/s}$  y  $\omega = v_A/r = 6/3 = 2 \text{ rad/s}$ .

Entonces,  $53,7s_A = 86$ , o sea,  $s = 1,60 \text{ ft}$ .

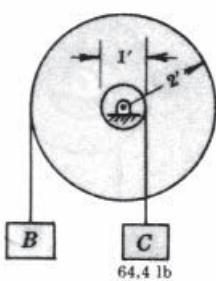


Figura 17.28

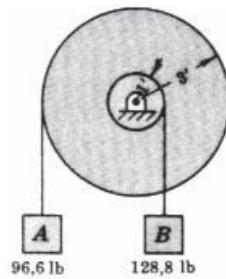


Figura 17.29

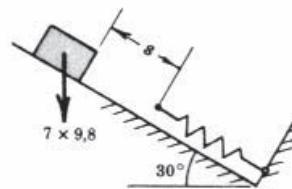


Figura 17.30

- 17.36.** El bloque de 7 kg de la Figura 17.30 se suelta en reposo y se desliza una distancia  $s$  sobre un plano inclinado abajo. Choca con el muelle, comprimiéndolo 75 mm antes de que esté a punto de iniciarse el retorno pleno arriba. Suponiendo un coeficiente de rozamiento de 0,25 y una constante del muelle  $k = 2,8 \text{ N/mm}$ , hallar  $s$ .

**SOLUCIÓN**

La energía cinética inicial y la energía cinética final (cuando el bloque ha recorrido  $s + 0,075 \text{ m}$ ) son cero. Por tanto, el trabajo total del rozamiento, la gravedad y el muelle debe ser cero.

La reacción normal,  $9,8 \times 7 \cos 30^\circ = 59,4 \text{ N}$ , no trabaja.

El rozamiento es  $0,25 \times 59,4 = 14,85 \text{ N}$ . La componente del peso paralela al plano es  $9,8 \times 7 \sin 30^\circ = 34,3 \text{ N}$ . Estas dos fuerzas trabajan a lo largo del recorrido de  $s + 0,075 \text{ metros}$ , siendo negativo el trabajo del rozamiento y positivo, el de la otra fuerza.

El trabajo del muelle es negativo y vale  $\frac{1}{2}k(0,075)^2 = 7,88 \text{ J}$ .

$$U = (34,3 - 14,85)(s - 0,075) - 7,88 \quad \text{y} \quad s = 330 \text{ mm}$$

- 17.37.** Desde 2 m, una masa de 5 kg cae sobre un muelle de constante 10 N/mm. ¿Cuál es la celeridad de la masa cuando el acortamiento del muelle es 100 mm?

**SOLUCIÓN**

La masa cae  $(2 + 0,1) \text{ m} = 2,1 \text{ m}$ . El trabajo de la gravedad es  $9,8 \times 5 \times 2,1 = 102,9 \text{ J}$ . El trabajo del muelle sobre la masa es negativo y vale  $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(10000 \text{ N/m})(0,1 \text{ m})^2 = 50 \text{ J}$ .

La energía cinética del bloque aumenta de cero a  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(5)v^2 = 2,5v^2$ .

$$U = \text{Variación de la energía cinética} \quad 102,9 - 50 = 2,5v^2 \quad v = 4,6 \text{ m/s}$$

- 17.38.** Desde una altura de 6 ft se deja caer un peso en reposo sobre un muelle de constante 20 lb/in, produciendo en éste un acortamiento de 8 in. ¿Cuánto vale el peso?

**SOLUCIÓN**

Trabajo de la gravedad =  $W(72 + 8) = 80W \text{ in-lb}$ .

Trabajo del muelle =  $-\frac{1}{2}kx^2 = -\frac{1}{2}(20)(8^2) = -640 \text{ in-lb}$ .

Como el bloque parte del reposo y acaba en reposo, la variación de energía cinética es cero. Entonces,  $U = 0$ ,  $80W - 640 = 0$ , y  $W = 8 \text{ lb}$ .

- 17.39.** Hallar la velocidad de escape, es decir, la celeridad inicial que debe comunicarse a una partícula en la superficie de la Tierra para proyectarla hasta una altura infinita.

**SOLUCIÓN**

En la Figura 17.31 se representa la partícula de peso  $W$  situada a una distancia  $x$  del centro de la tierra, cuyo radio es  $R$ . Se sabe que la atracción  $F$  de la tierra es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $x$ ; es decir,  $F = -C/x^2$ .

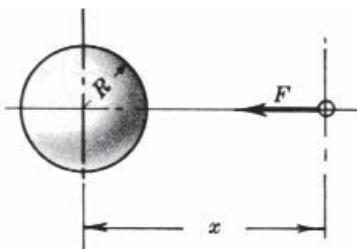


Figura 17.31

Para hallar  $C$ , téngase en cuenta que la atracción en la superficie terrestre es el peso  $W$ . Así pues,  $-W = -C/R^2$ ;  $C = W/R^2$ , y de aquí,  $F = -WR^2/x^2$ .

El trabajo para ir desde  $x = R$  hasta  $x = 4R$  es

$$\int_R^\infty F dx = \int_R^\infty -\left(\frac{WR^2}{x^2}\right) dx = WR^2 \left[\frac{1}{x}\right]_R^\infty = -WR$$

Este trabajo es igual a la variación de energía cinética,  $T_1 = \frac{1}{2}(W/g)v_0^2$  y  $T_2 = 0$  (ya que  $v = 0$  cuando  $x$  se hace infinita). Por tanto,

$$-W/R = -\frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)v_0^2 \quad \text{o} \quad v_0 = \sqrt{2gR}$$

Suponiendo un radio de la tierra de 6370 km, la celeridad de escape requerida se calcula en 11,18 km/s.

- 17.40.** Calcular la constante  $k$  del muelle de la Figura 17.32 para que la barra esbelta  $AB$  llegue justo a la posición vertical al soltarse en reposo en la posición horizontal representada, en la cual el muelle está alargado 1 in. La barra pesa 8 lb.

#### SOLUCIÓN

La longitud libre del muelle es 19 in. En la posición vertical, el muelle está alargado 28 in  $- 19$  in  $= 9$  in. El trabajo del muelle es

$$-\frac{1}{2}k(s_2^2 - s_1^2) = -\frac{1}{2}k\left[\left(\frac{9}{12}\right)^2 - \left(\frac{1}{12}\right)^2\right] = -0,278k \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

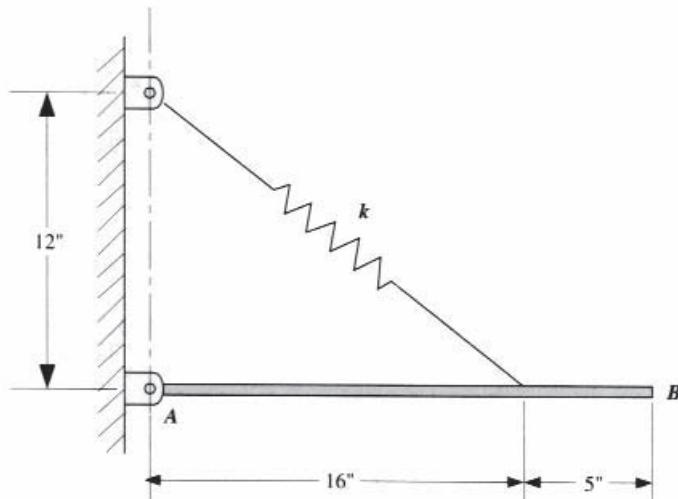


Figura 17.32

El trabajo de la gravedad es

$$mgh = (8) \left( \frac{10,5}{12} \right) = 7 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Como la barra parte del reposo y acaba en reposo, la variación de energía cinética es cero. Por tanto,

$$U = T_2 - T_1 \quad -0,278k + 7 = 0$$

$$\text{y } k = 25,2 \text{ lb/ft.}$$

- 17.41.** En la Figura 17.33, el cilindro de 100 lb de peso y 1 ft de radio rueda sin deslizar bajo la acción de la fuerza de 80 lb. Arrollada al cilindro hay una cuerda unida a un muelle. ¿Cuál es la velocidad del cilindro cuando su centro se ha desplazado 6 in? Al aplicarse la fuerza de 80 lb, el muelle está sin deformar.

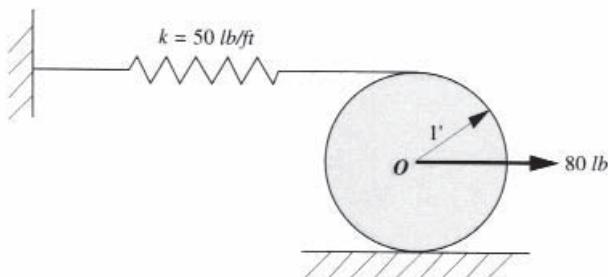


Figura 17.33

#### SOLUCIÓN

Como el cilindro rueda sin deslizar, el muelle se alarga 12 in cuando el centro del cilindro se desplaza 6 in hacia la derecha. Teniendo en cuenta que ni la fuerza de rozamiento ni la reacción normal sobre el cilindro trabajan (véase el Problema 17.7), el trabajo es

$$U = -\frac{1}{2}50(s_2^2 - s_1^2) + Fs = -\frac{1}{2}50\left(\left(\frac{12}{12}\right)^2 - 0\right) + 80\left(\frac{6}{12}\right) = 15 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

La energía cinética inicial es nula. Por tanto, la variación de energía cinética, con  $v_0 = 1\omega$  al no haber deslizamiento, es

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{100}{g}v_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times \frac{100}{g} \times 1^2\right)\left(\frac{v_0}{1}\right)^2$$

$$\text{Por tanto, } U = T_2 - T_1, \quad 15 = \frac{3}{4}\left(\frac{100}{g}\right)v_0^2, \quad v_0 = 2,54 \text{ ft/s}$$

#### Problemas propuestos

- 17.42.** Un pozo cilíndrico tiene 2 m de diámetro y 12 m de profundidad. Si está lleno de agua hasta 3 m de altura, hallar el trabajo necesario para bombear ese volumen de agua hasta la superficie.  
Resp. 970 J

- 17.43.** En el problema 14.42, ¿qué energía debe entregar una bomba cuyo rendimiento sea del 60 por ciento?  
Resp. 1620 kJ

- 17.44.** Una persona capaz de empujar 60 lb desea hacer rodar un barril que pesa 200 lb al interior de un camión situado a 3 ft sobre el suelo. ¿Cuál es la longitud del tablón a emplear y qué energía gasta la persona en introducir el barril en el camión? Resp. 10 ft, 600 ft·lb

- 17.45.** Un bloque de 10 lb se desliza 4 ft sobre una superficie horizontal. (a) Si es 0,3 el coeficiente de rozamiento, ¿qué trabajo efectúa el bloque sobre la superficie? (b) ¿Qué trabajo efectúa la superficie sobre el bloque?

*Resp.* (a)  $U = 0$ , (b)  $U = 12 \text{ ft}\cdot\text{lb}$

- 17.46.** Sobre el bloque de 8 kg actúa la fuerza de 100 N, tal como se muestra en la Figura 17.34. Si el coeficiente de rozamiento por deslizamiento es 0,30, hallar el trabajo de todas las fuerzas cuando el bloque se mueve 4 m hacia la derecha.

*Resp.*  $U = 241 \text{ J}$

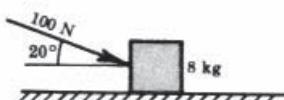


Figura 17.34

- 17.47.** Un bloque de 10 lb se desliza 6 ft hacia abajo por un plano inclinado  $40^\circ$  con la horizontal. Hallar el trabajo de todas las fuerzas aplicadas al bloque. El coeficiente de rozamiento por deslizamiento es 0,40.

*Resp.*  $U = 20,2 \text{ ft}\cdot\text{lb}$

- 17.48.** Una partícula recorre la trayectoria  $x = 2t$ ,  $y = t^3$ , donde  $t$  está en segundos y las distancias, en pies. ¿Qué trabajo realiza, en el intervalo desde  $t = 0$  hasta  $t = 3 \text{ s}$ , una fuerza cuyas componentes son, en libras,  $F_x = 2 + t$  y  $F_y = 2t^2$ ?

*Resp.*  $U = 313 \text{ ft}\cdot\text{lb}$

- 17.49.** Una cuenta de 2 oz se hace subir lentamente por un alambre liso desde  $A$  hasta  $B$ , tal como se muestra en la Figura 17.35. ¿Qué trabajo se efectúa?

*Resp.*  $U = 0,5 \text{ ft}\cdot\text{lb}$

- 17.50.** Una grúa autoportante tiene una pluma horizontal de 250 ft de largo situada a 400 ft sobre el suelo. Si está elevando lentamente una carga de 8000 lb de hormigón hasta una altura de 300 ft, ¿qué trabajo está efectuando? Durante el izado, ¿cuál es el momento de vuelco de la grúa?

*Resp.*  $U = 2,4 \times 10^6 \text{ ft}\cdot\text{lb}$ ,  $M = 2,0 \times 10^6 \text{ ft}\cdot\text{lb}$



Figura 17.35

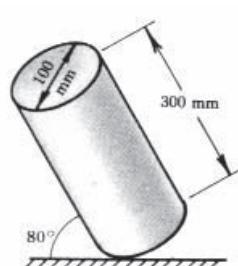


Figura 17.36

- 17.51.** El cilindro macizo de 20 kg de la Figura 17.36 se suelta desde el reposo. Hallar el trabajo de la atracción terrestre cuando el costado choca con el suelo. *Resp.*  $U = 1,25 \text{ J}$

- 17.52.** En la Figura 17.37, el depósito cilíndrico  $A$  se llena de agua procedente del depósito cúbico  $B$ . La densidad del agua es  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Suponiendo que inicialmente  $B$  esté lleno, ¿qué trabajo se efectúa?

*Resp.*  $U = 176 \text{ kJ}$

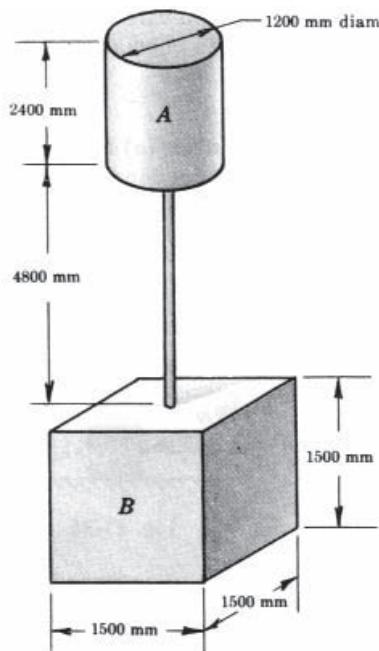


Figura 17.37

- 17.53.** La masa de 16 kg de la Figura 17.38 desciende 2,5 m. Mediante una cuerda sin masa está unida a un torno que gira sobre cojinetes sin rozamiento. Sobre el torno actúa un par constante  $M = 80$  m·N. ¿Qué trabajo recibe el sistema? *Resp.*  $U = 59$  J

- 17.54.** El torno de la Figura 17.39 gira sobre cojinetes sin rozamiento. ¿Qué trabajo se efectúa sobre el sistema cuando el peso de 60 lb cae 3 ft? *Resp.*  $U = 60$  ft·lb

- 17.55.** El objeto homogéneo que se representa en la Figura 17.40 tiene una anchura de 25 mm y una densidad de  $7840 \text{ kg/m}^3$ . Si cae desde la posición horizontal hasta la posición vertical, ¿qué trabajo se efectúa sobre él?

*Resp.*  $U = 138$  J

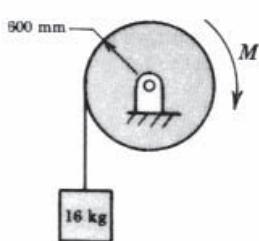


Figura 17.38

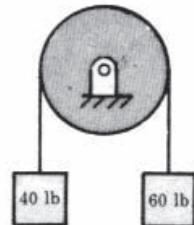


Figura 17.39

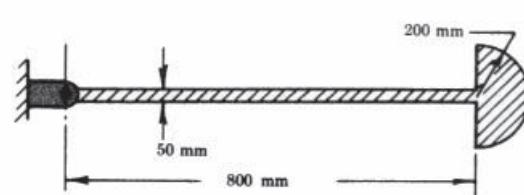


Figura 17.40

- 17.56.** A un árbol que rota desde  $\theta = 0^\circ$  hasta  $\theta = 90^\circ$  se le aplica un par de momento  $M = 2\theta^3 - \theta$ . Hallar el trabajo realizado si  $M$  está en m·N.  
*Resp.*  $U = 1,81$  J

- 17.57.** Una fuerza de 30 N alarga 250 mm una cuerda elástica. Si la fuerza necesaria para alargar la cuerda es directamente proporcional a la deformación, ¿qué trabajo se invierte en alargar la cuerda 1500 mm? *Resp.* 135 J

- 17.58.** Para comprimir un muelle 4 in, se requiere una fuerza de 200 lb. Si la fuerza necesaria para comprimir el muelle es directamente proporcional a la deformación, ¿qué trabajo se invierte en comprimir el muelle 9 in? *Resp.* 2025 in·lb
- 17.59.** En un cierto instante durante la aceleración a lo largo de una vía horizontal, la tracción sobre la barra de enganche de una locomotora es 90 kN. ¿Qué potencia se desarrolla si el tren se mueve a 60 km/h? *Resp.* 1,5 MW
- 17.60.** Un automóvil de 2500 lb de peso sube por una pendiente del 10 por ciento a la velocidad constante de 15 mi/h. Si la resistencia es 20 lb/ton, ¿qué potencia desarrolla el vehículo?  
*Resp.* 11,0 hp
- 17.61.** Un motor de vapor eleva una masa de 1800 kg verticalmente a razón de 9 m/s. ¿Cuál es la potencia del motor suponiéndole un rendimiento del 70%? *Resp.* 227 kW
- 17.62.** El freno Prony acoplado al volante de un motor señala una potencia al freno (bhp) de 6,3 caballos. La potencia indicada (ihp) por los diagramas de indicador es de 7,1 caballos. ¿Cuál es el rendimiento del motor? *Resp.* Rend. = 89%
- 17.63.** ¿Qué potencia (hp) hace falta para elevar un peso de 100 lb a una altura de 8 ft en 4 segundos?  
*Resp.* 0,36 hp
- 17.64.** Un cilindro homogéneo de 50 kg y 1200 mm de diámetro gira a 100 rpm. Para mantener esa velocidad (venciendo al rozamiento) hace falta un par de 30 m·N. ¿Qué potencia se requiere?  
*Resp.* 314 W
- 17.65.** Una polea de 6 in de diámetro gira a 2000 rpm. La polea que la mueve sufre las tracciones de 1 lb y 2 lb en los lados laxo y tenso, respectivamente. ¿Qué potencia está recibiendo la polea?  
*Resp.* 0,19 hp
- 17.66.** Un cuerpo de 100 kg cae desde 1500 mm sobre la superficie terrestre. ¿Cuál es su energía cinética al chocar con el suelo? *Resp.*  $T = 1,47 \text{ J}$
- 17.67.** Un cuerpo de 50 kg parte del reposo arrastrado por el suelo por una fuerza horizontal de 300 N. Si el coeficiente de rozamiento cinético es 0,1 y la fuerza actúa sobre una distancia de 2 m y luego cesa, hallar la distancia que recorre el cuerpo hasta pararse.  
*Resp.* 10,2 m
- 17.68.** Una bala penetra en una plancha a 2000 ft/s y sale de ella a 800 ft/s. Hallar el máximo espesor de plancha que puede traspasar la bala.  
*Resp.* 2,38 in
- 17.69.** Si el bloque del Problema 17.6 parte del reposo, ¿cuál es su celeridad tras recorrer los 6 m?  
*Resp.* 9,6 m/s
- 17.70.** Un bloque de 2 kg se desliza hacia abajo por un plano inclinado  $30^\circ$  con la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,25. Hallar la celeridad del bloque tras haber recorrido 4 m partiendo con una velocidad de 2 m/s.  
*Resp.*  $v = 7,17 \text{ m/s}$
- 17.71.** Una fuerza horizontal de 30 lb actúa sobre un bloque de 80 lb de peso (Figura 17.41). El coeficiente de rozamiento es 0,25. Hallar la velocidad del bloque tras recorrer 20 ft desde el reposo.  
*Resp.*  $v = 12,7 \text{ ft/s} (\rightarrow)$

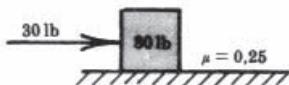


Figura 17.41

- 17.72.** Hallar la energía cinética que posee un disco de 100 kg de masa, 500 mm de diámetro y 75 mm de grueso cuando gira a 100 rpm en torno a su centro. *Resp.* 171 J

- 17.73.** Hallar la energía cinética de rotación de una esfera de 100 lb de peso y 6 in de diámetro cuando gira a 120 rpm en torno a un eje situado a 16 in de su centro.  
*Resp.* 442 ft·lb

- 17.74.** Hallar la energía cinética de un cilindro homogéneo de 20 lb de peso y 8 in de radio cuando su centro de masas se mueve con una celeridad de 6 ft/s.  
*Resp.*  $T = 16,8$  ft·lb

- 17.75.** Hallar la energía cinética de una esfera de 4 kg de masa y 600 mm de radio de giro cuando rueda sobre un plano horizontal con una celeridad angular de 3 rad/s.  
*Resp.*  $T = 24,5$  J

- 17.76.** En la Figura 17.42, la velocidad angular de la manivela  $CD$  es 1,5 rad/s en sentido horario. Los pesos de las barras esbeltas  $AB$ ,  $BC$  y  $CD$  son, respectivamente, 3 lb, 5 lb y 4 lb. Hallar la energía cinética del sistema. *Resp.* 4,09 ft·lb

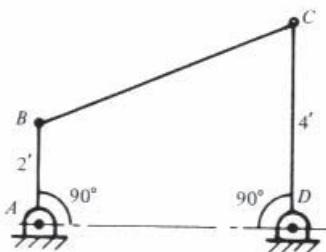


Figura 17.42

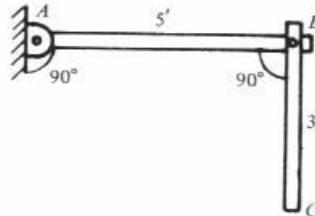


Figura 17.43

- 17.77.** Las barras esbeltas  $AB$  y  $BC$  de la Figura 17.43 pesan, respectivamente, 10 y 6 lb.  $AB$  está animada de una velocidad angular horaria de 8 rad/s, y  $BC$  lo está de una velocidad angular antihoraria de 6 rad/s. Hallar la energía cinética del sistema.

*Resp.* 243 ft·lb

- 17.78.** Un volante de inercia cilíndrico y macizo tiene una masa de 900 kg y un diámetro de 1200 mm. Si el eje de apoyo tiene un diámetro de 150 mm y el coeficiente de rozamiento en los cojinetes es 0,15, calcular el tiempo que tarda en detenerse por inercia desde una velocidad de 500 rpm.  
*Resp.* 85,5 s

- 17.79.** El rotor de un motor eléctrico pesa 20 lb y su radio de giro es  $k = 1,83$  in. Sobre él actúa un par de fuerzas de rozamiento de 8 oz·in. ¿Cuántas revoluciones dará el motor hasta detenerse desde 1800 rpm? *Resp.*  $\theta = 979$  rev

- 17.80.** Un torno que gira a 20 rpm está elevando un embalaje de 1 ton mediante un cable inextensible liviano, tal como se muestra en la Figura 17.44. Si se corta la corriente, ¿hasta dónde asciende el embalaje antes de pararse? Se supone que no hay rozamiento en los cojinetes.  
*Resp.*  $h = 0,36$  ft

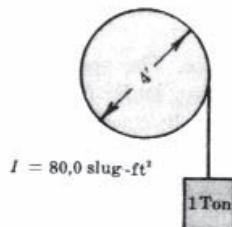


Figura 17.44

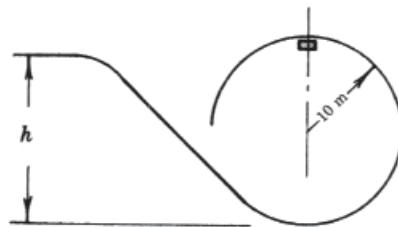


Figura 17.45

- 17.81.** Un coche desciende por el plano inclinado liso y luego entra en el rizo, tal como se muestra en la Figura 17.45. Hallar el mínimo valor de  $h$  para que el coche conserve el contacto con la pista.

Resp.  $h = 25 \text{ m}$

- 17.82.** Una barra esbelta homogénea de 4 kg de masa y 1 m de longitud, pivota en un extremo. Partiendo del reposo en posición horizontal, cae bajo la acción de la gravedad y de un par retardador de 5 m·N. ¿Qué celeridad angular lleva cuando pasa por la posición más baja?

Resp.  $\omega = 4,19 \text{ rad/s}$

- 17.83.** El torno de 30 kg de la Figura 17.46 tiene un radio de giro  $k = 800 \text{ mm}$ . En ausencia de rozamiento, hallar su celeridad tras dar una vuelta partiendo del reposo. Resp.  $\omega = 3,35 \text{ rad/s}$

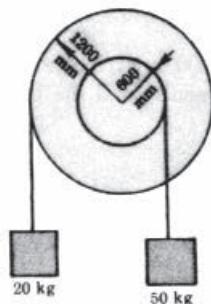


Figura 17.46

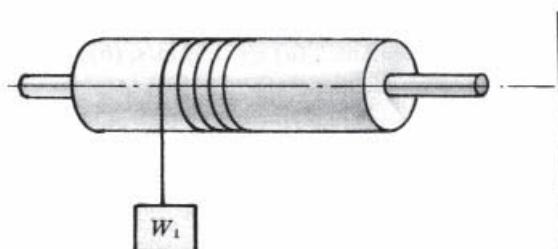


Figura 17.47

- 17.84.** El cubo de un pozo, de peso  $W_1$ , está unido a un torno de peso  $W_2$  y radio de giro  $k$  (Figura 17.47). Si el radio del torno es  $r$ , ¿cuánto tarda el cubo en descender una altura  $s$ , hasta el nivel del agua, partiendo del reposo? Se desprecian el rozamiento en los cojinetes y el peso de la cuerda.

Resp.  $t = \sqrt{2s(1 + W_2 k^2 / W_1 r^2)} / g$

- 17.85.** Una barra homogénea de longitud  $L$  pivota en un punto situado a una distancia  $a$  de un extremo, tal como se muestra en la Figura 17.48. Si la barra se suelta desde el reposo en la posición a  $30^\circ$  representada, ¿cuál es su celeridad angular al pasar por la vertical?

Resp.  $\omega^2 = \frac{0,402g(L - 2a)}{L^2 - 3La + 3a^2}$

- 17.86.** Una esfera de 200 lb, de 2 ft de diámetro, desciende rodando, partiendo del reposo, una distancia de 100 ft a lo largo de un plano inclinado  $25^\circ$ . ¿Cuál es su energía cinética al final de los 100 ft?  
Resp. 8450 ft·lb

- 17.87.** En el Problema 17.86, ¿cuál es la celeridad del centro de la esfera tras recorrer los 100 ft?  
Resp. 44,2 ft/s

- 17.88.** Una esfera homogénea desciende rodando una distancia  $s$  a lo largo de un plano inclinado un ángulo  $\theta$  con la horizontal. ¿Cuál es su celeridad si parte del reposo?

Resp.  $v = 6,78\sqrt{s} \operatorname{sen} \theta$

- 17.89.** Un automóvil tiene una carrocería de 900 kg, cuatro ruedas de 20 kg y un conductor de 70 kg. Las ruedas tienen un diámetro de 700 mm y un radio de giro  $k = 300$  mm. ¿Cuál es su velocidad tras recorrer 300 m descendiendo por una pendiente del 5 por ciento? Resp. 60 km/h

- 17.90.** La esfera homogénea de 8 lb de la Figura 17.49 tiene una cuerda arrollada en una ranura, tal como se muestra. ¿Cuál es la celeridad del centro si éste desciende 3 ft desde la posición de reposo? Resp.  $v = 11,8$  ft/s

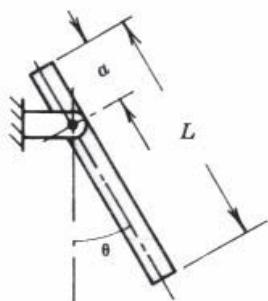


Figura 17.48

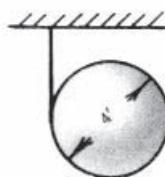


Figura 17.49

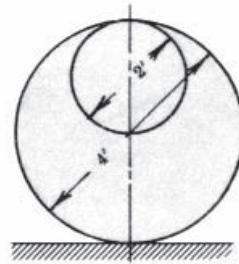


Figura 17.50

- 17.91.** Un disco homogéneo de 5 lb, de diámetro 2 ft, es solidario de un disco homogéneo de 20 lb, de diámetro 4 ft. Si el conjunto se suelta desde el reposo en la posición representada en la Figura 17.50, ¿cuál es la celeridad angular cuando el disco pequeño pasa por la parte inferior de su recorrido? Resp.  $\omega = 2,25$  rad/s

- 17.92.** En la Figura 17.51, A tiene una masa de 7 kg y B tiene una masa de 4 kg. Si B desciende 400 mm desde el reposo, hallar su celeridad (a) en ausencia de rozamiento y (b) si el coeficiente de rozamiento entre A y el plano horizontal es 0,20.

Resp. (a)  $v = 1,69$  m/s, (b)  $v = 1,36$  m/s

- 17.93.** En el sistema de la Figura 17.52, todas las cuerdas son verticales. El peso de 45 lb sube 1,6 ft desde el reposo. ¿Qué celeridad lleva? Resp.  $v = 3,21$  ft/s

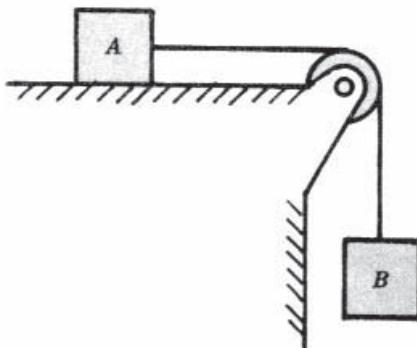


Figura 17.51

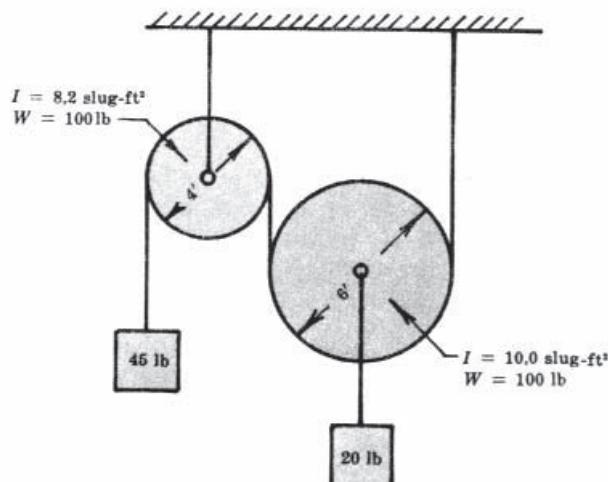


Figura 17.52

- 17.94.** Un vagón de carga de 36 Mg que se desplaza horizontalmente a 8 km/h choca con un tope de constante 1750 N/mm. ¿Cuál es la máxima compresión del muelle?

Resp.  $d = 320$  mm

- 17.95.** El peso de 16 lb de la Figura 17.53 desciende 6 in por el plano inclinado 25°. Choca entonces con un muelle de constante recuperadora de 10 lb/in. El coeficiente de rozamiento cinético es 0,20. Hallar la compresión máxima del muelle.

Resp.  $d = 2,57$  in

- 17.96.** Para impulsar una masa de 50 g desde el tubo sin rozamiento de la Figura 17.54 se emplea un muelle, de constante  $k = 5$  N/mm, comprimido 75 mm. Hallar a qué distancia horizontal  $r$  la masa vuelve a estar a la misma altura que al inicio. Se desprecia la resistencia del aire.

Resp.  $r = 55,4$  m

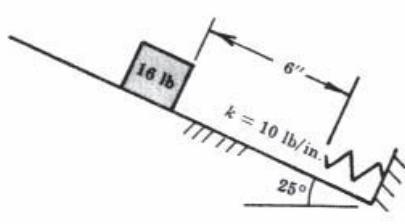


Figura 17.53

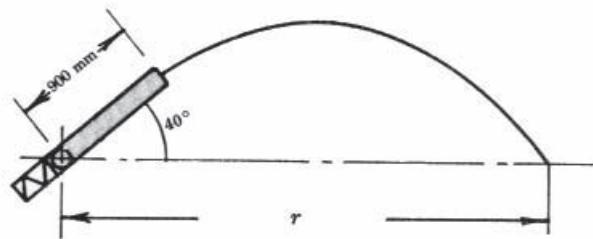
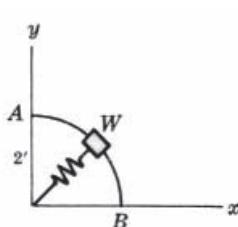


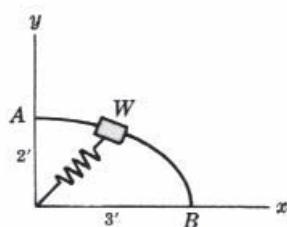
Figura 17.54

- 17.97.** (a) En la Figura 17.55(a), el peso  $W$  de 2 lb desliza desde el reposo en  $A$  por la barra guía lisa curvada en forma cuarto circular. La longitud libre del muelle de constante  $k = 1,2$  lb/ft es de 18 in. Hallar la celeridad de  $W$  en  $B$ . (b) Si la trayectoria es elíptica como en la Figura 17.55(b), ¿cuál es la celeridad en  $B$ ?

Resp. (a)  $v = 11,3$  ft/s, (b)  $v = 9,49$  ft/s



(a)



(b)

Figura 17.55

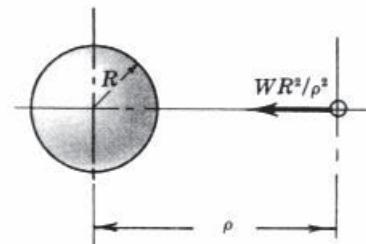


Figura 17.56

- 17.98.** La atracción de la tierra sobre una partícula es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la tierra. Si es  $W$  el peso de la partícula en la superficie de la tierra (de radio  $R$ ), la atracción a una distancia  $\rho$  será  $WR^2/\rho^2$ . (a) ¿Qué trabajo hay que realizar contra esa atracción gravitatoria para llevar la partícula desde la superficie de la tierra hasta una distancia  $x$  del centro de la tierra? (b) ¿Y hasta el infinito? Véase Figura 17.56.

Resp. (a)  $U = WR - WR^2/x$ , (b)  $U = WR$

- 17.99.** La rueda de la Figura 17.57 pesa 322 lb y tiene un radio de giro de 1,20 ft respecto a su centro de masas  $G$ . En la posición inicial representada, la velocidad de  $G$  es de 6 ft/s plano abajo y el muelle está alargado 0,50 ft. Si la constante del muelle es 80 lb/ft, ¿cuál es su alargamiento total?

Resp. 3,78 ft

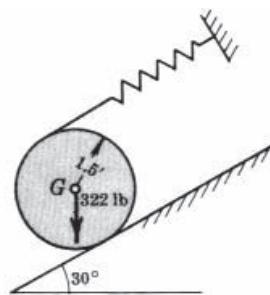


Figura 17.57

- 17.100** En el Problema 17.40, la barra se pone en movimiento, estando en posición vertical y con el muelle no deformado, con una velocidad angular horaria de 2 rad/s. ¿Cuál es su velocidad angular cuando ha girado 180°?  
*Resp.*  $\omega = 7,63$  rad/s

- 17.101** Empleando el resultado del Problema 17.100, hallar el momento a aplicar a la barra en A para que la misma se detenga cuando esté horizontal hacia la izquierda.  
*Resp.*  $M = 4,74$  lb·ft

- 17.102** En la Figura 17.58, el disco y la barra esbelta AB tienen unas masas de 3 kg y 8 kg, respectivamente. La velocidad angular inicial del disco es de 6 rad/s como se indica. ¿Cuál es el momento  $M$  del par a aplicar al disco para que éste se detenga tras rotar 90° en sentido antihorario? Se supone que el rodillo B carece de masa.  
*Resp.* 0,54 m·N ( $\curvearrowleft$ )

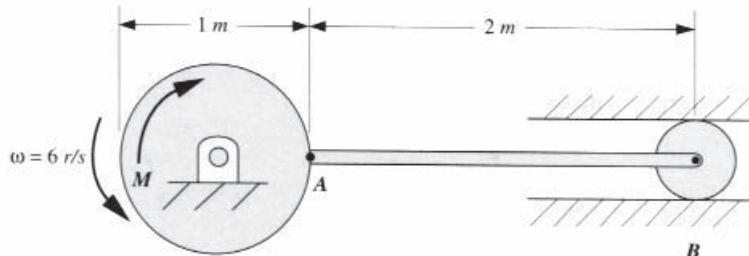


Figura 17.58

- 17.103** El tablón AB de la Figura 17.59 tiene una masa de 7 kg. Los rodillos D y E tienen una masa cada uno de 5 kg y un diámetro de 0,5 m. El tablón se suelta desde el reposo con el rodillo D bajo el extremo A y el rodillo E bajo el centro C. En ausencia de rozamiento, hallar la velocidad del tablón cuando el rodillo E está bajo el extremo B.  
*Resp.* 7,11 m/s

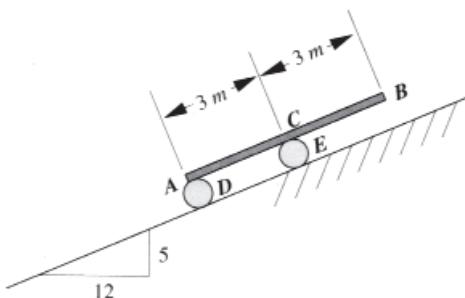


Figura 17.59

- 17.104** En la Figura 17.60, la barra esbelta  $AB$  de 5 kg está articulada en  $A$  al disco uniforme de 3 kg. La barra se apoya en  $B$  en un plano horizontal. Si el sistema se suelta desde el reposo en la posición representada, ¿cuál es la velocidad del disco cuando la barra está horizontal? El disco rueda sin deslizar y puede despreciarse el rozamiento en  $B$  bajo la barra.

Resp.  $v_0 = 1,81 \text{ m/s} (\rightarrow)$

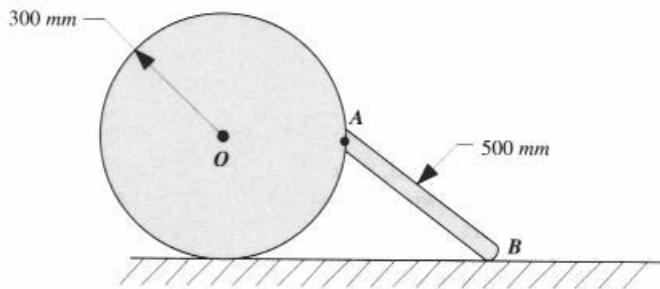


Figura 17.60

- 17.105** En la Figura 17.61, el engranaje  $A$  arrastra al engranaje  $B$  bajo la acción de un momento horario  $M = 250 \text{ lb-in}$ . Si ambos engranajes están en reposo al aplicarse el momento, ¿cuál es la velocidad angular de  $B$  cuando  $A$  ha dado cuatro vueltas? Los engranajes  $A$  y  $B$  se asimilan a discos de pesos respectivos 8 lb y 32 lb.

Resp.  $\omega_B = 27,4 \text{ rad/s}$

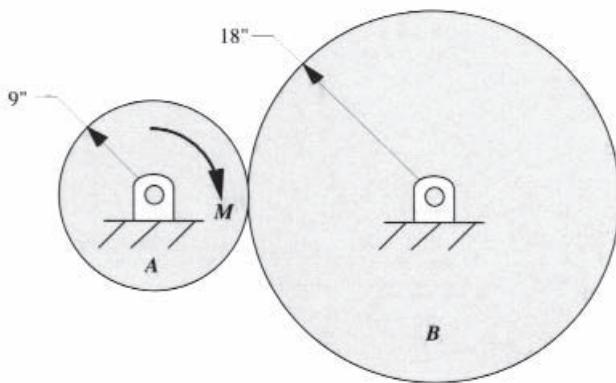


Figura 17.61

# IMPULSO, MOMENTO LINEAL Y MOMENTO ANGULAR

# 18

## 18.1 RELACIÓN ENTRE EL IMPULSO Y EL MOMENTO LINEAL PARA UNA PARTÍCULA

En la Sección 13.1 se definió como sigue el momento lineal, o cantidad de movimiento, de una partícula,

$$\mathbf{G} = m\mathbf{v}$$

donde  $m$  = masa de la partícula

$\mathbf{v}$  = velocidad de la partícula

La suma (vectorial) de las fuerzas externas actuantes sobre la partícula es igual a la derivada respecto al tiempo del momento lineal  $\mathbf{G}$ :

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{G}}{dt} = \dot{\mathbf{G}} \quad (1)$$

Integrando en el intervalo de tiempo durante el cual la velocidad de la partícula varía de  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$ , resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F} dt = \int_{\mathbf{G}_1}^{\mathbf{G}_2} d\mathbf{G} = \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1 = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \quad (2)$$

El primer miembro de esta relación (2) se conoce como impulso lineal  $\mathbf{I}$  de la fuerza resultante ( $\sum \mathbf{F}$ ) durante el intervalo comprendido entre  $t_1$  y  $t_2$ . Así pues, el impulso lineal es igual a la variación del momento lineal durante ese mismo intervalo.

## 18.2 RELACIÓN ENTRE EL IMPULSO Y EL MOMENTO LINEAL PARA UN CONJUNTO DE PARTÍCULAS

La suma (vectorial) de las fuerzas externas actuantes sobre un conjunto de  $n$  partículas es igual a la derivada respecto al tiempo del momento lineal de una masa  $m$ , igual a la suma de las masas de las  $n$  partículas, cuya velocidad sea la del centro de masas de las  $n$  partículas:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d(m\bar{\mathbf{v}})}{dt} = \frac{d\bar{\mathbf{G}}}{dt} \quad (3)$$

donde  $\sum \mathbf{F}$  = suma de las fuerzas externas actuantes sobre el sistema de partículas

$m = \sum_{i=1}^n m_i$  = masa de las  $n$  partículas

$\bar{\mathbf{v}}$  = velocidad del centro de masas del sistema de partículas

Como en el caso de una partícula, la expresión anterior puede integrarse como

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F} dt = \int_{\bar{\mathbf{v}}_1}^{\bar{\mathbf{v}}_2} d(m\bar{\mathbf{v}}) = m\bar{\mathbf{v}}_2 - m\bar{\mathbf{v}}_1 = \Delta\bar{\mathbf{G}} \quad (4)$$

Esta relación expresa que el impulso lineal  $\mathbf{I}$  de todas las fuerzas actuantes en el intervalo de tiempo considerado es igual a la variación del momento lineal de una masa  $m$  definida como en el primer párrafo de esta sección. Téngase en cuenta que, en general, el vector  $\Delta\bar{\mathbf{G}}$  no pasa por el centro de masas del conjunto de partículas.

### 18.3 MOMENTO CINÉTICO $\mathbf{H}_o$

El momento cinético  $\mathbf{H}_o$ , conocido también como momento angular, es el momento respecto al punto  $O$  del momento lineal  $\mathbf{G}$ . En la Figura 18.1,  $O$  puede ser un punto cualquiera, fijo o móvil. Así pues

$$\mathbf{H}_o = \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{G} = \boldsymbol{\rho} \times (m\mathbf{v}) \quad (5)$$

donde  $\boldsymbol{\rho}$  = radio vector de la partícula  $P$  respecto a  $O$

$\mathbf{v}$  = velocidad absoluta de  $P$  (tangente a la trayectoria)

La suma de los momentos respecto a un *punto fijo*  $O$  de las fuerzas externas actuantes sobre una *partícula* es igual a la derivada respecto al tiempo del momento cinético  $\mathbf{H}_o$ ; es decir,

$$\sum \mathbf{M}_o = \frac{d\mathbf{H}_o}{dt} = \dot{\mathbf{H}}_o \quad (6)$$

*Demostración* Según (5),  $\mathbf{H}_o = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v})$ , donde  $\mathbf{r}$  es el radio vector en un triángulo newtoniano de la partícula  $m$ , y  $\mathbf{v}$  = velocidad absoluta de la partícula. Derivando respecto al tiempo,

$$\frac{d\mathbf{H}_o}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times (m\dot{\mathbf{v}})$$

Como  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ ,  $m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}$  y  $\mathbf{r} \times (m\mathbf{a}) = \mathbf{r} \times (\sum \mathbf{F}) = \sum \mathbf{M}_o$ , obtenemos  $d\mathbf{H}_o/dt = \sum \mathbf{M}_o$ .

La expresión (6) puede integrarse como sigue:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{M}_o \, dt = \int_{\mathbf{H}_1}^{\mathbf{H}_2} d\mathbf{H}_o = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1) \quad (7)$$

En esta expresión (7), la integral del primer miembro es el *impulso angular* actuante en el intervalo comprendido entre  $t_1$  y  $t_2$ , y el segundo miembro representa la variación que experimenta el momento angular durante ese mismo intervalo.

La expresión (6) puede aplicarse como sigue a un conjunto de partículas. La suma de los momentos respecto al punto  $O$  de las fuerzas externas actuantes sobre un *conjunto* de  $n$  partículas es igual a la derivada respecto al tiempo del momento cinético  $\mathbf{H}_o$  respecto a ese punto  $O$  únicamente si (a) el punto  $O$  está en reposo, o si (b) el centro de masas de las  $n$  partículas está en reposo, o si (c) las velocidades de  $O$  y del centro de masas son paralelas (desde luego es así si  $O$  es el centro de masas). En el Problema 18.1 se demuestra que (6) es válida para un conjunto de partículas.

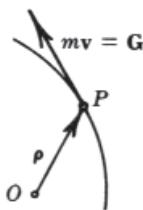


Figura 18.1

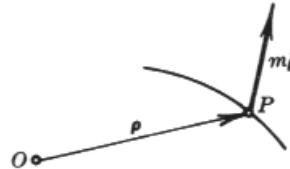


Figura 18.2

### 18.4 MOMENTO CINÉTICO RELATIVO $\mathbf{H}'_o$

El momento cinético relativo  $\mathbf{H}'_o$  es el momento respecto a un punto cualquiera  $O$  del producto de la masa de la partícula por la derivada respecto al tiempo del radio vector  $\boldsymbol{\rho}$  relativo a  $O$  (véase la Figura 18.2):

$$\mathbf{H}'_o = \boldsymbol{\rho} \times (m\dot{\boldsymbol{\rho}}) \quad (8)$$

donde  $\boldsymbol{\rho}$  = radio vector de la partícula  $P$  relativo a  $O$

$\dot{\boldsymbol{\rho}}$  = derivada de  $\boldsymbol{\rho}$  respecto al tiempo

La suma de los momentos respecto a  $O$  de las fuerzas externas actuantes sobre un conjunto de  $n$  partículas es igual a la derivada respecto al tiempo del momento cinético relativo  $\mathbf{H}'_o$  respecto a ese mismo punto  $O$ , es decir,

$$\sum \mathbf{M}_o = \frac{d\mathbf{H}'_o}{dt} \quad (9)$$

únicamente si (a)  $O$  es el centro de masas de las  $n$  partículas, o si (b)  $O$  es un punto animado de velocidad constante (o en reposo), o si (c)  $O$  es un punto cuya aceleración es un vector que pasa por el centro de masas. Véanse los Problemas 18.2 y 18.3.

## 18.5 ECUACIONES ESCALARES CORRESPONDIENTES

Para un cuerpo en translación (todas las partículas con la misma velocidad), la ecuación (3) puede sustituirse por las ecuaciones escalares

$$\sum (\text{Imp})_x = \Delta G_x = m(v''_x - v'_x) \quad (10)$$

$$\sum (\text{Imp})_y = \Delta G_y = m(v''_y - v'_y) \quad (11)$$

donde  $\Sigma(\text{Imp})_x, \Sigma(\text{Imp})_y$  = impulsos lineales de las fuerzas externas en las direcciones  $x$  e  $y$   
 $m$  = masa del cuerpo

$v''_x, v''_y$  = velocidades finales del cuerpo en las direcciones  $x$  e  $y$

$v'_x, v'_y$  = velocidades iniciales del cuerpo en las direcciones  $x$  e  $y$

Para un cuerpo en rotación en torno a un punto fijo, las ecuaciones anteriores quedan

$$\Sigma(\text{Imp Ang})_O = \Delta H_O = I_O(\omega'' - \omega') \quad (12)$$

donde  $\Sigma(\text{Imp Ang})_O$  = impulso angular de las fuerzas externas respecto al eje de rotación que pasa por  $O$   
 $I_O$  = momento de inercia del cuerpo respecto al eje de rotación  
 $\omega''$  = velocidad angular final del cuerpo  
 $\omega'$  = velocidad angular inicial del cuerpo

La demostración se expone en el Problema 18.4.

Para un cuerpo en movimiento plano, las ecuaciones anteriores son

$$\sum (\text{Imp})_x = \Delta G_x = m(v''_x - v'_x) \quad (13)$$

$$\sum (\text{Imp})_y = \Delta G_y = m(v''_y - v'_y) \quad (14)$$

$$\sum (\text{Imp Ang})_G = \Delta \tilde{H} = \bar{I}(\omega'' - \omega') \quad (15)$$

donde  $\Sigma(\text{Imp})_x, \Sigma(\text{Imp})_y$  = impulsos lineales de las fuerzas externas en las direcciones  $x$  e  $y$   
 $m$  = masa del cuerpo  
 $\bar{v''}_x, \bar{v''}_y$  = velocidades finales del centro de masas en las direcciones  $x$  e  $y$   
 $\bar{v'}_x, \bar{v'}_y$  = velocidades iniciales del centro de masas en las direcciones  $x$  e  $y$

$\Sigma(\text{Imp Ang})_G$  = impulso angular de las fuerzas externas respecto al eje de rotación que pasa por el centro de masas  $G$

$\bar{I}$  = momento de inercia del cuerpo respecto al centro de masas  $G$

$\omega''$  = velocidad angular final del cuerpo

$\omega'$  = velocidad angular inicial del cuerpo

La demostración se expone en el Problema 18.5.

Alternativamente, para un cuerpo en movimiento general plano, si el eje del momento angular no pasa por el centro de masas, el momento angular escalar se expresa

$$H_O = I_O \omega + m\bar{x}v_{Oy} - m\bar{y}v_{Ox}$$

donde

$H_O$  = momento angular respecto a un eje que pasa por  $O$

$I_O$  = momento de inercia respecto a un eje que pasa por  $O$

$\omega$  = velocidad angular del cuerpo

$m$  = masa del cuerpo

$\bar{x}, \bar{y}$  = coordenadas del centro de masas

$v_{Ox}, v_{Oy}$  = componentes de la velocidad de  $O$

Esta expresión del momento angular resulta especialmente útil en los problemas de choques excéntricos.

## 18.6 UNIDADES

Unidad	Tradicional EE. UU.	SI
Masa	slug = lb·s <sup>2</sup> /ft	kg
Impulso lineal	lb·s	N·s
Momento lineal	slug·ft por s = lb·s	kg·m/s = N·s
Impulso angular	lb·s·ft	N·m·s
Momento angular	(slug·ft <sup>2</sup> )(rad/s) = lb·s·ft	(kg·m <sup>2</sup> )(rad/s) = N·m·s

## 18.7 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

Cuando es nula la suma de las fuerzas externas en una dirección dada, el momento lineal se conserva en esa dirección. Ello es consecuencia de que, al no haber impulso lineal en esa dirección, tampoco puede haber variación del momento lineal.

## 18.8 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

Cuando es nula la suma de los momentos respecto a un eje de las fuerzas externas, el momento angular respecto a ese eje se conserva. Ello es consecuencia de que, al no haber impulso angular respecto a ese eje, tampoco puede haber variación del momento angular.

## 18.9 CHOQUE

El estudio de los choques se ocupa de los casos en que los intervalos de tiempo durante los que actúan las fuerzas son muy pequeños y habitualmente indeterminados. Las superficies de dos cuerpos que chocan, durante la colisión comparten la misma normal, recta que se conoce como línea de impacto.

(a) Cuando las velocidades iniciales de los cuerpos yacen en la línea de impacto, se tiene el llamado choque directo.

(b) Cuando se cumple (a) y además los centros de masas están en la línea de impacto, se tiene el llamado choque central directo.

(c) Cuando las velocidades iniciales son paralelas a la normal a las superficies en colisión, pero no son colineales, se tiene el llamado choque excéntrico.

(d) Se tiene un choque oblicuo cuando las velocidades iniciales no están sobre la línea de impacto.

En un choque central directo, el coeficiente de restitución es el cociente de la velocidad relativa de separación de ambos cuerpos dividida por su velocidad relativa de aproximación. O sea,

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} = -\frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}$$

donde

$e$  = coeficiente de restitución

$u_1, u_2$  = velocidades de los cuerpos 1 y 2, respectivamente, antes del choque (debe ser  $u_1 > u_2$  para que choquen si ambos se mueven en el mismo sentido)

$v_1, v_2$  = velocidades de los cuerpos 1 y 2, respectivamente, después del choque

*Nota* Cuando el choque es oblicuo, en la fórmula anterior se emplean las componentes *normales* de las velocidades.

Como, durante el choque, sobre cada cuerpo actúa la misma fuerza (reacciones iguales y opuestas), la suma de los momentos lineales antes del choque debe ser igual a la suma de los momentos lineales después del choque; es decir, el momento lineal se conserva. Esto se expresa como

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

## 18.10 MASA VARIABLE

Supongamos que en el instante  $t$  una masa  $m$  se mueve en línea recta con una velocidad absoluta  $v$  (véase la Figura 18.3). Supongamos además que una masa  $dm$  se mueve a lo largo de la misma recta con una velocidad absoluta  $u$  inmediatamente delante de la masa  $m$ . Si la masa  $m$  absorbe a la masa  $dm$  en un intervalo de tiempo  $dt$ , la masa combinada ( $m + dm$ ) se moverá con una velocidad ( $v + dv$ ).

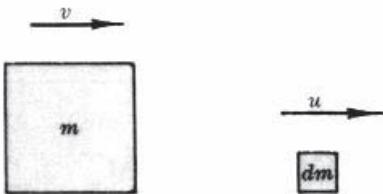


Figura 18.3

En el instante  $t$ , el momento lineal del sistema es  $(mv + dm)u$ . En el instante  $t + dt$ , el momento lineal del sistema es  $(m + dm)(v + dv)$ . La variación del momento lineal será

$$\begin{aligned} dG &= (m + dm)(v + dv) - (mv + dm)u \\ &= mv + m dv + dm v + dm dv - mv - dm u \end{aligned}$$

Como la cantidad  $dm dv$  es un infinitésimo de segundo orden, podemos prescindir de ella y, entonces, dividiendo por  $dt$ ,

$$\frac{dG}{dt} = m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}(v - u)$$

Si hay desprendimiento de masa (pérdida de masa) el término  $dm/dt$  es negativo.

La fórmula anterior se ha demostrado para el movimiento rectilíneo, pero su naturaleza es más general.

Como la suma de las fuerzas actuantes es igual a la derivada del momento lineal respecto al tiempo,

$$\sum F = \frac{dG}{dt} = m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}(v - u) \quad (16)$$

### Problemas resueltos

- 18.1.** Dado un conjunto de  $n$  partículas de masas  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ , demostrar que la suma de los momentos respecto al punto  $O$  de las fuerzas externas es igual a la derivada respecto al tiempo del momento cinético del sistema de partículas respecto a ese punto  $O$  únicamente si (a) el punto

$O$  está en reposo, o si (b) el centro de masas de las  $n$  partículas está en reposo, o si (c) las velocidades de  $O$  y el centro de masas son paralelas (desde luego es así si  $O$  es el centro de masas).

### SOLUCIÓN

En la Figura 18.4,  $m_i$  es la partícula  $i$ -ésima del sistema. El punto fijo  $O'$  es el origen de un triángulo de referencia newtoniano respecto al cual el punto dado  $O$  tiene un vector de posición  $\mathbf{r}_O$ . Respecto a ese triángulo fijo, el vector de posición de  $P$  es  $\mathbf{r}_P$ . Sea  $\mathbf{H}_O$  el momento angular relativo a  $O$  de todas las partículas, de las que  $m_i$  es representativa. Así pues,

$$\mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) \quad (a)$$

Derivando (a) respecto al tiempo,

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{p}}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i + \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \quad (b)$$

Según la figura,  $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_O + \mathbf{p}_i$  y, por tanto,  $\dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{r}}_O + \dot{\mathbf{p}}_i$ . Sustituyendo  $\dot{\mathbf{p}}_i$  en (b),

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \sum_{i=1}^n (\dot{\mathbf{r}}_P - \dot{\mathbf{r}}_O) \times (m_i \mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \times (m_i \dot{\mathbf{v}}_i) \quad (c)$$

Aquí, el primer término del segundo miembro es

$$\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_P \times (m_i \mathbf{v}_i) - \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_O \times (m_i \mathbf{v}_i) \quad (d)$$

Como  $\dot{\mathbf{r}}_P$  es la velocidad absoluta  $\mathbf{v}_i$  de  $P$ , el primer término de (d) es cero. Además, como  $\dot{\mathbf{r}}_O$  es común a todos los términos del sumatorio y, por consiguiente, no depende de  $i$ , el segundo término de (d) puede escribirse

$$\dot{\mathbf{r}}_O \times \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{v}_i), \quad \text{o bien}, \quad \dot{\mathbf{r}}_O \times (m \bar{\mathbf{v}})$$

donde  $\bar{\mathbf{v}}$  es la velocidad del centro de masas.

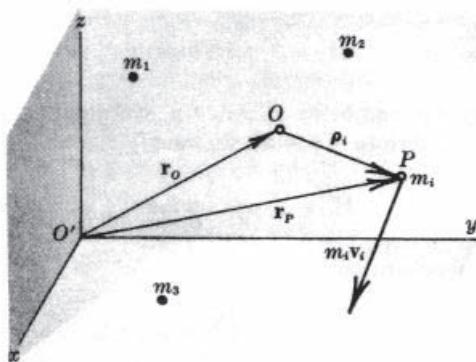


Figura 18.4

El último término de (c) es igual a  $\sum \mathbf{M}_O$ , suma de los momentos de las fuerzas externas aplicadas a todas las partículas. Así pues, (c) puede ahora escribirse como

$$\dot{\mathbf{H}}_O = -\dot{\mathbf{r}}_O \times (m \bar{\mathbf{v}}) + \sum \mathbf{M}_O \quad (e)$$

Esta ecuación (e) revela que la derivada respecto al tiempo del momento cinético respecto a  $O$  es igual a  $\sum \mathbf{M}_O$  sólo si  $-\dot{\mathbf{r}}_O \times (m \bar{\mathbf{v}})$  es cero. Pero esto sucede cuando (1)  $O$  es un punto fijo, o sea,  $\dot{\mathbf{r}}_O = 0$ ; (2) o cuando  $\bar{\mathbf{v}} = 0$ ; (3) o cuando  $\dot{\mathbf{r}}_O$  y  $\bar{\mathbf{v}}$  son paralelos (el producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo). Si  $O$  es el centro de masas, será  $\dot{\mathbf{r}}_O = \bar{\mathbf{v}}$  y, también,  $\dot{\mathbf{r}}_O \times m \bar{\mathbf{v}} = 0$ .

- 18.2.** Dado un conjunto de  $n$  partículas de masas  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ , demostrar que la suma de los momentos respecto al punto  $O$  de las fuerzas externas es igual a la derivada respecto al tiempo del momento cinético *relativo* del sistema de partículas respecto a ese punto  $O$  únicamente si (a) el punto  $O$  es el centro de masas de las  $n$  partículas, o si (b) el punto  $O$  tiene una velocidad constante (o está en reposo), o si (c) la aceleración del punto  $O$  es un vector que pasa por el centro de masas.

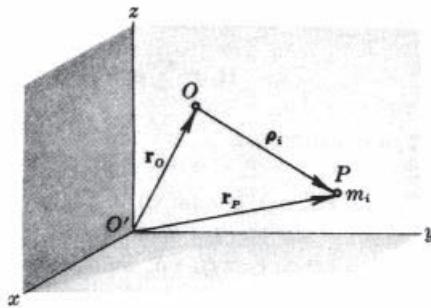


Figura 18.5

**SOLUCIÓN**

En la Figura 18.5,  $m_i$  es la partícula  $i$ -ésima del sistema. El punto fijo  $O'$  es el origen de un triángulo de referencia newtoniano respecto al cual el punto dado  $O$  tiene un vector de posición  $\mathbf{r}_O$ . Respecto a ese triángulo fijo, el vector de posición de  $P$  es  $\mathbf{r}_P$ . Sea  $\mathbf{H}'_O$  el momento cinético relativo a  $O$  de todas las partículas, de las que  $m_i$  es representativa. Entonces, según la ecuación (8),

$$\mathbf{H}'_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \times (m_i \dot{\mathbf{p}}_i) \quad (a)$$

Derivando (a) respecto al tiempo,

$$\dot{\mathbf{H}}'_O = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{p}}_i \times (m_i \dot{\mathbf{p}}_i) + \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \times (m_i \ddot{\mathbf{p}}_i) \quad (b)$$

Según la figura,  $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_O + \mathbf{p}_i$  y, por tanto,  $\ddot{\mathbf{r}}_P = \ddot{\mathbf{r}}_O + \ddot{\mathbf{p}}_i$ . Sustituyendo  $\ddot{\mathbf{p}}_i$  en (b) y teniendo en cuenta que, en ésta, el primer término del segundo miembro es cero ( $\dot{\mathbf{p}}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = 0$ ), tenemos

$$\dot{\mathbf{H}}'_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \times (m_i \ddot{\mathbf{r}}_P) - \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \times (m_i \ddot{\mathbf{r}}_O) \quad (c)$$

El último término de (c) puede escribirse

$$\left( \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{p}_i \right) \times \ddot{\mathbf{r}}_O$$

ya que  $\ddot{\mathbf{r}}_O$  es factor común de la totalidad de los  $n$  sumandos. Además,

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \times (m_i \ddot{\mathbf{r}}_P) = \sum \mathbf{M}_O \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{p}_i = m \bar{\mathbf{p}}$$

donde  $\bar{\mathbf{p}}$  es el vector de posición relativo a  $O$  del centro de masas. Entonces

$$\dot{\mathbf{H}}'_O = \sum M_O - m \bar{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{r}}_O \quad (d)$$

En (d), el último término es cero si (1)  $O$  es el centro de masas ( $\bar{\mathbf{p}} = 0$ ); o si (2) la velocidad de  $O$  es constante ( $\ddot{\mathbf{r}}_O = 0$ ); o si (3) la aceleración  $\ddot{\mathbf{r}}_O$  de  $O$  pasa por el centro de masas, es decir, es colineal con  $\bar{\mathbf{p}}$  (el producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo).

- 18.3.** Cuatro masas  $m$  iguales están regularmente dispuestas sobre un aro delgado y sin masa de radio  $R$ . Demostrar que el momento cinético relativo al centro de masas  $O$  deducido empleando las velocidades absolutas es igual al deducido empleando las velocidades relativas de las masas respecto al centro de masas  $O$ .

#### SOLUCIÓN

Sea  $v$  = celeridad del centro de masas cuando el aro rueda hacia la derecha.

En la Figura 18.6(a) se representa el aro con las masas  $m_2$  y  $m_4$  situadas en la misma vertical. En la Figura 18.6(b), se representa el momento lineal  $\mathbf{G}$  de cada masa empleando las velocidades absolutas respectivas. O sea,  $v_1 = \sqrt{2} v$  a  $315^\circ$ , mientras que  $v_3 = \sqrt{2} v$  a  $45^\circ$ . Por supuesto,  $v_2 = 2v$  y  $v_4$  es la velocidad del centro instantáneo de rotación, o sea, cero.

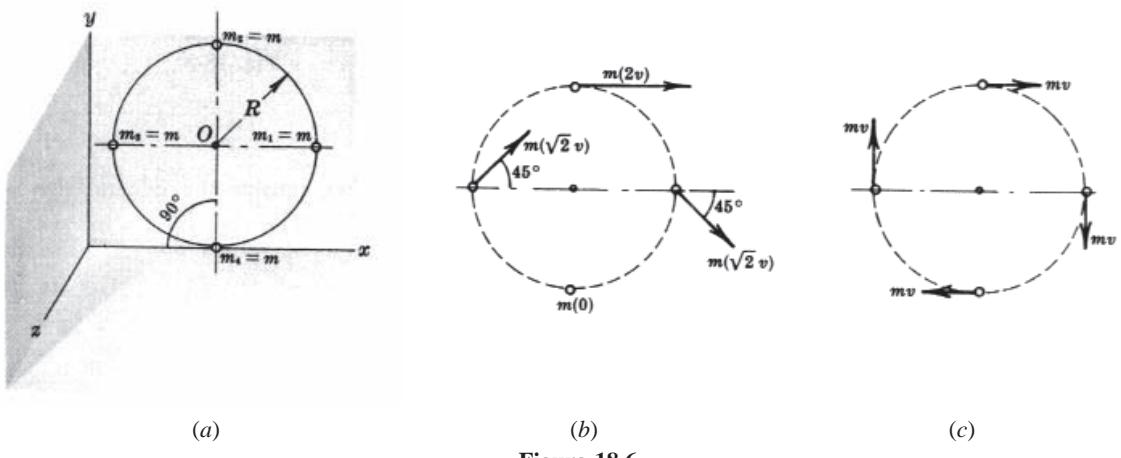


Figura 18.6

El momento respecto a  $O$  de cada momento lineal tiene el sentido  $z$  negativo. Por tanto, sumando en el orden 1, 2, 3 y 4, podemos escribir

$$\mathbf{H}_O = -[m_1(\sqrt{2}v)(\frac{1}{2}\sqrt{2}R) + m_2(2v)R + m_3(\sqrt{2}v)(\frac{1}{2}\sqrt{2}R) + 0]\mathbf{k} = -(4mvR)\mathbf{k}$$

En la Figura 18.6(c) se representa la velocidad de cada masa relativa al centro de masas multiplicada por cada masa. La suma de los momentos respecto a  $O$  de esos momentos lineales es

$$\mathbf{H}_O = -(4mvR)\mathbf{k} \quad (\text{como antes})$$

- 18.4.** Para un cuerpo que rota en torno a un eje fijo que pasa por  $O$  y es perpendicular al plano del papel, demostrar que la suma de los impulsos angulares de las fuerzas externas respecto al eje fijo es igual a la variación de  $I_O\omega$ , donde  $I_O\omega$  es el momento angular  $\mathbf{H}_O$  de todo el cuerpo.

#### SOLUCIÓN

En la Figura 18.7,  $dm$  representa un elemento diferencial de masa cualquiera de vector de posición  $\mathbf{p}$  en el plano del papel. El momento angular de  $dm$  es  $\mathbf{p} \times (dm \mathbf{v})$ . El momento angular  $\mathbf{H}_O$  del todo el cuerpo es

$$\mathbf{H}_O = \int \mathbf{p} \times (dm \mathbf{v})$$

Pero  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$  está en el plano del papel y su módulo es  $\rho\omega$  porque los vectores  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\mathbf{p}$  son perpendiculares. Además,  $\mathbf{p} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})$  apunta hacia afuera del papel y su módulo es  $\rho^2\omega$  porque  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{v}$  son perpendiculares. Así pues,

$$\mathbf{H}_O = \int \rho^2 \omega dm \mathbf{k}$$

donde  $\mathbf{k}$  es el vector unitario normal al papel y dirigido hacia el lector.

Como  $\omega$  y  $\mathbf{k}$  no dependen de  $dm$ , pueden salir del signo integral. Además,  $\int \rho^2 dm = I_O$ . Por tanto,

$$\mathbf{H}_O = I_O \omega \mathbf{k}$$

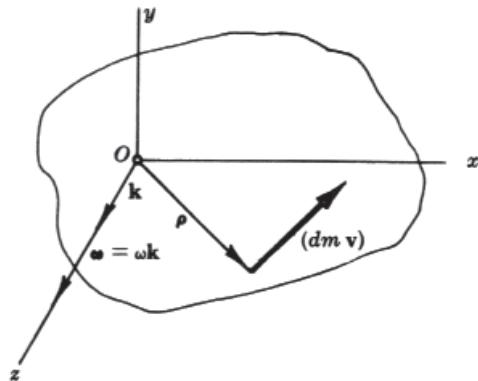


Figura 18.7

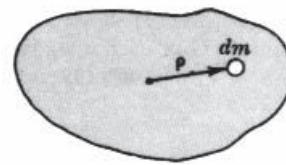


Figura 18.8

Empleando la ecuación (6), tendremos

$$\sum \mathbf{M}_o = \frac{d\mathbf{H}_o}{dt} = \frac{d(I_o \omega)}{dt} \mathbf{k}$$

Como los momentos de las fuerzas y  $\omega$  están en la dirección de  $\mathbf{k}$ , la ecuación anterior puede escribirse en forma escalar como sigue:

$$\int (\sum M_o dt) = \Delta H_o = I_o(\omega'' - \omega')$$

donde  $\omega'$  y  $\omega''$  son las celeridades angulares inicial y final, y  $\int (\sum M_o dt) = \Sigma (\text{Imp Ang})_o$ .

- 18.5.** Sobre la Figura 18.8, demostrar la validez de las ecuaciones (13), (14) y (15) formuladas al principio de este capítulo para un cuerpo rígido de masa  $m$  en movimiento plano. Supóngase que el plano del papel es el plano de movimiento.

#### SOLUCIÓN

Como un cuerpo rígido es un conjunto de partículas cuyas distancias relativas permanecen invariables, es aplicable la ecuación (4) de este capítulo. Así pues,

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d(m\bar{\mathbf{v}})}{dt}, \quad \text{o sea,} \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F} dt = \Delta \bar{\mathbf{G}} = m\bar{\mathbf{v}}_2 - m\bar{\mathbf{v}}_1$$

Esta ecuación vectorial equivale a las dos ecuaciones escalares

$$\sum (\text{Imp})_x = m(\bar{v}_x'' - \bar{v}_x') \quad (13)$$

$$\sum (\text{Imp})_y = m(\bar{v}_y'' - \bar{v}_y') \quad (14)$$

Para deducir la ecuación (15), empleamos la ecuación (9). Tal como se indicó en el Problema 18.2, el centro de masas es uno de los puntos que puede elegirse para aplicar la ecuación (9). Entonces  $\mathbf{H}'_o$  pasa a ser  $\bar{\mathbf{H}}'$ , momento cinético del cuerpo relativo al centro de masas y

$$\bar{\mathbf{H}}' = \int \rho \times (dm \dot{\rho})$$

Por la condición de rigidez del cuerpo, el vector  $\rho$  (desde el centro de masas hasta el elemento de masa  $dm$ ) puede variar sólo de dirección, pero no de módulo. Por tanto,  $\dot{\rho}$  es perpendicular a  $\rho$  (está en el plano del papel) y de módulo  $\rho\omega$ . Entonces,  $\rho \times (dm \dot{\rho})$  es perpendicular al plano del papel y de módulo  $\rho^2\omega$ . Así pues, la anterior ecuación vectorial puede sustituirse por la ecuación escalar

$$\bar{H}' = \omega \int \rho^2 dm = \bar{I}\omega$$

y la ecuación (9) queda

$$\sum M_G = \dot{H}' = \frac{d(\bar{I}\omega)}{dt}$$

que ahora puede expresarse como

$$(Imp\ Ang)_G = \int \sum M_G dt = \Delta \bar{H} = \bar{I}(\omega'' - \omega') \quad (15)$$

- 18.6.** Un aro delgado de masa  $m$  y radio  $R$  rueda sin deslizar sobre un plano horizontal tal como se muestra en la Figura 18.9(a). En su punto más alto hay aplicada una fuerza horizontal de módulo  $P$ . Demostrar que, igualando la suma de los momentos de las fuerzas externas respecto al centro de masas  $G$  a la derivada respecto al tiempo del momento cinético relativo a  $G$ , da el mismo resultado que igualando la suma de los momentos de las fuerzas externas respecto al centro instantáneo  $A$  a la derivada respecto al tiempo del momento cinético relativo a  $A$ .

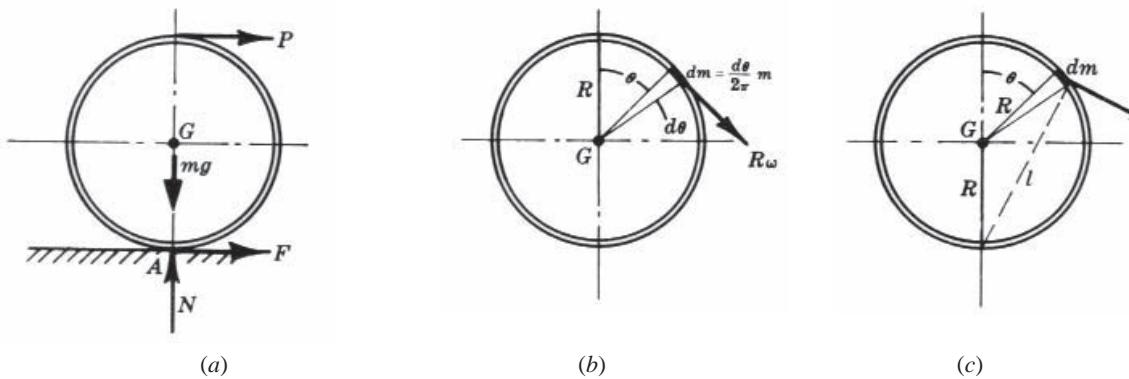


Figura 18.9

#### SOLUCIÓN

En el diagrama de cuerpo libre de la Figura 18.9(a) se representan la fuerza normal  $N$ , la fuerza de rozamiento  $F$ , la fuerza aplicada  $P$  y el peso  $mg$  concentrado en el centro de masas  $G$ .

Para el análisis empleamos las ecuaciones escalares.

- (a) En la Figura 18.9(b) se representa un elemento infinitesimal de masa  $dm$  del anillo ubicado a un ángulo  $\theta$  con la vertical. La masa  $dm$  es la porción de masa del anillo subtendida por el ángulo  $d\theta$ ; por tanto,  $dm = m d\theta / 2\pi$ . La celeridad de  $dm$  relativa al centro de masas  $G$  es  $R\omega$  como se indica. El momento cinético relativo a  $G$  de  $dm$  es, por consiguiente,  $dm R^2 \omega$ . El momento cinético relativo de todo el aro será

$$H'_G = \int_0^{2\pi} m R^2 \omega \frac{d\theta}{2\pi} = m R^2 \omega$$

La suma de los momentos de las fuerzas externas respecto a  $G$  (tomando como positivo el sentido horario) es

$$\sum M_G = PR - FR$$

Pero para un sistema cualquiera de partículas (en este caso, el aro con su centro de masas a la velocidad  $v = r\omega$ ),

$$\sum F_x = \dot{G}_x, \quad \text{o bien,} \quad P + F = \frac{d}{dt}(mR\omega)$$

De aquí,

$$F = -P + \frac{d}{dt}(mR\omega)$$

La ecuación  $\sum M_G = H'_G$  da

$$PR - \left[ -P + \frac{d}{dt}(mR\omega) \right] R = \frac{d}{dt}(mR^2\omega), \quad \text{o sea,} \quad 2PR = \frac{d}{dt}(2mR^2\omega)$$

(b) Para emplear como centro de momentos el centro instantáneo de rotación  $A$ , llamamos  $l$  a la distancia de  $A$  al elemento de masa  $dm$ , tal como se indica en la Figura 18.9(c). La velocidad de  $dm$  relativa a  $A$  (que está en reposo) es  $l\omega$  y es perpendicular a la recta de  $l$ , tal como se muestra. La longitud de  $l$  es

$$l = \sqrt{R^2 + R^2 + 2RR \cos \theta}$$

El momento cinético de  $dm$  relativo a  $A$  es  $dm(2R^2 + 2R^2 \cos \theta)\omega$ . Teniendo en cuenta que  $dm = m d\theta / 2\pi$ ,

$$H'_A = \int_0^{2\pi} mR^2\omega(2 + 2 \cos \theta) \frac{d\theta}{2\pi} = 2mR^2\omega$$

La suma de los momentos de las fuerzas externas respecto a  $A$  es

$$\sum M_A = 2PR = H'_A = \frac{d}{dt}(2mR^2\omega)$$

Este resultado coincide con el hallado en la parte (a).

Es interesante observar que, como  $2mR^2$  es el momento de inercia  $I_A$  del aro respecto al centro instantáneo, la relación anterior puede escribirse

$$\sum M_A = \frac{d}{dt}(I_A\omega) = I_A\alpha$$

- 18.7.** Si el centro de masas de un conjunto de partículas está en reposo, se cumple la relación (6) y puede emplearse un punto cualquiera  $O$ . Para dos partículas de igual masa  $m$  montadas en un aro sin masa de radio  $R$  que gira en torno al centro geométrico de éste (Figura 18.10), demostrar que  $\sum M_O = (d/dt)(2mR^2\omega)$ .

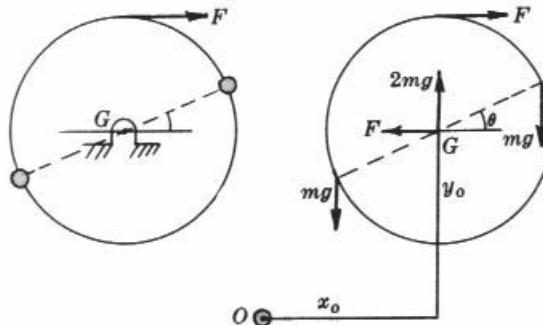


Figura 18.10

#### SOLUCIÓN

Las reacciones en el cojinete son  $F$ , hacia la izquierda, y  $2mg$ , hacia arriba. Sumando los momentos respecto a cualquier punto  $O$ ,  $\sum M_O = FR$  que es independiente del centro de momentos  $O$ :

$$\begin{aligned} H_O &= m(R\omega \cos \theta)(x_O + R \cos \theta) + m(R\omega \sin \theta)(y_O + R \cos \theta) \\ &\quad - m(R\omega \cos \theta)(x_O - R \cos \theta) - m(R\omega \sin \theta)(y_O - R \sin \theta) = 2mR^2\omega \end{aligned}$$

Por tanto,  $FR = (d/dt)(2mR^2\omega)$ , que es lo mismo que resulta al tomar momentos respecto al centro de masas  $G$ .

- 18.8.** Durante 5 s, una fuerza horizontal  $F$  empuja un objeto de 100 lb sobre un plano horizontal donde el coeficiente de rozamiento es 0,2. Durante ese tiempo, la celeridad varía de 5 a 10 ft/s. Hallar el valor de  $F$ .

#### SOLUCIÓN

La fuerza normal es igual al peso de 100 lb. La fuerza de frotamiento que se opone al movimiento es  $0,2 \times 100 = 20$  lb. El impulso lineal en la dirección horizontal es igual a la variación del momento lineal. Por tanto,

$$\int_0^5 (F - 20) dt = \frac{100}{g} (10) - \frac{100}{g} (5)$$

Despejando,

$$F = 23,1 \text{ lb}$$

- 18.9.** Partiendo del reposo, un bloque de 10 kg desciende por un plano inclinado  $30^\circ$  con la horizontal. Suponiendo un coeficiente de rozamiento cinético de 0,3 entre el bloque y el plano, ¿cuál es la celeridad del bloque al cabo de 5 s?

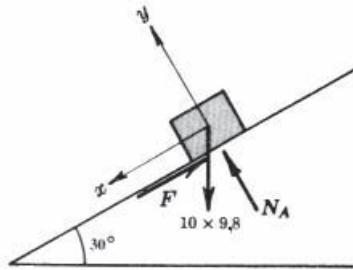


Figura 18.11

#### SOLUCIÓN

Este problema puede resolverse, desde luego, por métodos anteriores. Pero, siendo el tiempo uno de los datos, lo más sencillo es recurrir a la relación entre impulso y momento lineal. El movimiento es de translación.

En la Figura 18.11 se representa el diagrama de cuerpo libre del bloque con todas las fuerzas aplicadas al mismo. Como sólo hay que considerar movimiento a lo largo del plano, basta con una única relación entre impulso y cantidad de movimiento.

$$\sum (\text{Imp})_x = \Delta G_x$$

o sea,

$$(\sum F_x)(t) = m(v''_x - v'_x)$$

donde

$t$  = tiempo transcurrido

$m$  = masa del bloque

$v''_x$  = celeridad final

$v'_x$  = celeridad inicial

Tomando como positivo el sentido hacia abajo, la ecuación anterior queda

$$( +98 \operatorname{sen} 30^\circ - \mu N_A )(5) = 10(v''_x - 0) \quad (A)$$

Para hallar  $N_A$ , basta con igualar a cero la suma de las fuerzas perpendiculares al plano, ya que no hay movimiento en esa dirección:

$$\sum F_y = 0 = N_A - 98 \cos 30^\circ, \quad \text{o sea,} \quad N_A = 84,9 \text{ N}$$

Sustituyendo este valor de  $N_A$  en (A), obtenemos  $v''_x = 11,8 \text{ m/s}$ .

- 18.10.** Un bloque de 80 lb descansa sobre un plano horizontal. Sobre él actúa una fuerza horizontal que varía de acuerdo con la ley  $F = 20t$ . Si la fuerza actúa durante 5 s, ¿qué velocidad adquiere el bloque? Los coeficientes de rozamiento estático y cinético son, respectivamente, 0,25 y 0,20.

#### SOLUCIÓN

La fuerza  $F$  aumenta hasta que llega al valor límite del rozamiento estático; es decir,  $F = 20t = 0,25 \times 80$ . Así pues, en  $t = 1 \text{ s}$ , el bloque empieza a moverse con un rozamiento que entonces vale  $0,2 \times 80 = 16 \text{ lb}$  y que permanece constante.

Después de  $t = 1$  s, el impulso lineal (horizontal) es igual a la variación del momento lineal (horizontal). Así pues

$$\sum (\text{Imp})_x = \Delta G_x, \quad \text{o sea,} \quad \int_1^5 F dt - \int_1^5 16 dt = \frac{80}{32,2} (v - 0)$$

Teniendo en cuenta que  $F = 20t$ , obtenemos  $v = 70,8$  ft/s.

- 18.11.** Un bloque de 1,5 kg se pone en movimiento sobre un plano horizontal liso bajo la acción de una fuerza horizontal  $F$  que varía de acuerdo con la expresión  $F = 3t - 5t^2$ . Hallar la velocidad máxima.

**SOLUCIÓN**

$$\sum (\text{Imp})_x = \Delta G_x, \quad \text{o bien,} \quad \int_0^t F dt = \int_1^5 (3t - 5t^2) dt = 1,5(v - 0)$$

de donde  $v = t^2 - 1,11t^3$ . Para calcular el valor máximo de  $v$ , se halla el valor de  $t$  para el que  $dv/dt = 2t - 3,33t^2 = 0$ . Esta nos da  $t = 0,6$  s y, por tanto, el valor máximo de  $v$  es  $v = 0,12$  m/s.

- 18.12.** En la Figura 18.12, el bloque de 40 kg empieza a subir con una celeridad de 2,5 m/s. ¿Qué fuerza constante  $P$  produce un celeridad ascendente de 5 m/s al cabo de 12 s? Se supone que no hay rozamiento en las poleas y que el coeficiente de rozamiento entre los bloques y el plano es 0,10.

**SOLUCIÓN**

Resolvemos el problema sumando impulsos y momentos lineales a lo largo de la línea que recorre el sistema. Por ejemplo, la fuerza  $P$  y la correspondiente componente del peso del bloque de 10 kg dan unos impulsos positivos en la recta que recorre el bloque, mientras que la fuerza de rozamiento sobre ese bloque da un impulso negativo. La tracción de la cuerda actúa en sentidos contrarios sobre los bloques de 10 y 15 kg; por tanto, produce un impulso lineal nulo a lo largo de la linea de recorrido. Procediendo de este modo, la relación entre impulso y cantidad de movimiento queda

$$\sum (\text{Imp}) = \Delta G$$

$$[P + 9,8 \times 10 \sin 45^\circ - 0,10(9,8 \times 10 \cos 45^\circ) - 0,10(9,8 \times 15) - 9,8 \times 40](12) \text{ N} \cdot \text{s} \\ = (10 + 15 + 40)(5 - 2,5) \text{ N} \cdot \text{s}$$

de donde  $P = 358$  N.

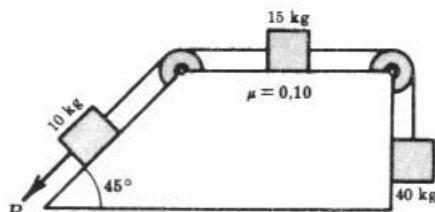


Figura 18.12

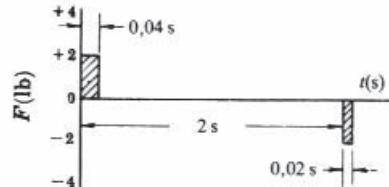


Figura 18.13

- 18.13.** Un bloque de 4 lb descansa sobre una ranura horizontal lisa. Recibe un golpe de 2 lb que dura 0,04 s. Dos segundos tras el inicio del primer golpe, recibe un segundo golpe de -2 lb que dura 0,02 s. ¿Cuál es la velocidad del cuerpo al cabo de 3 s?

**SOLUCIÓN**

En la Figura 18.13 se representan gráficamente las fuerzas en función del tiempo.

El impulso lineal para un tiempo superior a 2,02 s es la suma algebraica de las dos áreas; es decir,  $+(280,04) - 2(0,02) = 0,04$  lb·s. Entonces,

$$\sum (\text{Imp}) = \Delta G, \quad \text{o sea,} \quad 0,04 = \left( \frac{4}{32,2} \right) (v - 0)$$

es decir,

$$v = 0,322 \text{ ft/s}$$

- 18.14.** En la Figura 18.14, el mercurio de la columna izquierda del manómetro cae a razón de 1 in/s. Las longitudes respectivas de las columnas izquierda y derecha son 18 in y 22 in. ¿Cuál es el momento lineal, vertical, del mercurio? El manómetro está hecho de tubo de vidrio de un cuarto de pulgada de diámetro interior. El peso específico del mercurio es 850 lb/ft<sup>3</sup>.

#### SOLUCIÓN

Despreciando el codo del tubo, es evidente que el momento lineal de la columna izquierda apunta hacia abajo y el de la columna izquierda, apunta hacia arriba. Queda así un momento lineal neto hacia arriba correspondiente a una columna de 4 in de longitud y  $\frac{1}{4}$  in de diámetro que se mueve a  $\frac{1}{12}$  ft/s.

$$\text{Momento lineal} = \left[ \frac{\frac{1}{4}\pi(\frac{1}{4})^2 4}{(12)^3} \text{ ft}^3 \right] \left( \frac{850}{32,2} \text{ slug/ft}^3 \right) \left( \frac{1}{12} \text{ ft/s} \right) = +0,00025 \text{ lb} \cdot \text{s}$$

- 18.15.** Un volante de inercia de masa 2000 kg y radio de giro 1200 mm gira en torno a un centro fijo *O* desde el reposo hasta una celeridad angular de 120 rpm en 200 s. ¿Cuál es el momento *M* necesario?

#### SOLUCIÓN

$$\sum (\text{Imp Ang})_o = \Delta H_o = I_o(\omega_2 - \omega_1)$$

$$M(200 \text{ s}) = [2000(1,2)^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2] [(240\pi / 60 - 0) \text{ rad/s}] \quad M = 181 \text{ m} \cdot \text{N}$$

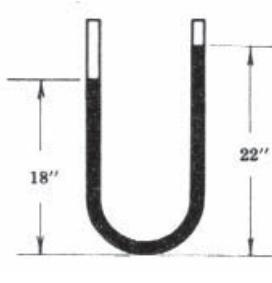


Figura 18.14

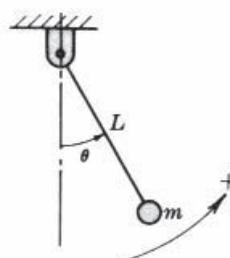


Figura 18.15

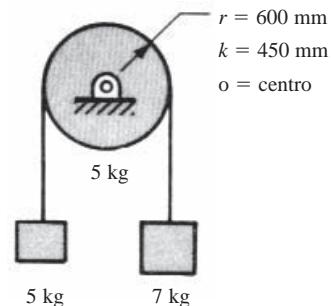


Figura 18.16

- 18.16.** El péndulo de la Figura 18.15 se compone de una lenteja de masa *m* y una varilla delgada de masa despreciable. Demostrar que la ecuación diferencial de su movimiento es  $\ddot{\theta} + (g/L) \operatorname{sen} \theta = 0$ .

#### SOLUCIÓN

En el diagrama de cuerpo libre, el péndulo se representa desplazado un ángulo  $\theta$  respecto a la vertical. El momento angular  $\mathbf{H}_o$  de la lenteja respecto al soporte es  $I\dot{\theta}\mathbf{k}$ , donde  $\mathbf{k}$  es el vector unitario perpendicular a la página, con la flecha apuntada hacia el lector.

Respecto a *O*, sólo hay que considerar el momento del peso de la lenteja, momento que es de sentido horario, o sea, negativo. Entonces,

$$\sum \mathbf{M}_o = \frac{d\mathbf{H}_o}{dt}, \quad \text{o sea,} \quad -mg(L \operatorname{sen} \theta)\mathbf{k} = \frac{d}{dt}(I\dot{\theta}\mathbf{k})$$

Como, para la lenteja, es  $I = mL^2$ , resulta la ecuación escalar  $\ddot{\theta} + (g/L) \operatorname{sen} \theta = 0$ .

- 18.17.** En la Figura 18.16, una cuerda sin masa sujeta dos masas de 5 y 7 kg suspendidas de una polea de masa 5 kg, radio 600 mm y radio de giro 450 mm. ¿Cuánto tardan las velocidades de las masas en variar de 3 a 6 m/s?

**SOLUCIÓN (A)**

Dibújese un diagrama de cuerpo libre.

Sean  $T_1$  y  $T_2$  las tensiones respectivas en la cuerda correspondientes a las masas de 5 kg y 7 kg.

Las relaciones entre el impulso y el momento lineal aplicables son las siguientes, donde la ecuación (1) se aplica a la masa de 5 kg, la ecuación (2) se aplica a la masa de 7 kg y la ecuación (3) se aplica a la polea:

$$(T_1 - 5 \times 9,8)t = 5(6 - 3) \quad (1)$$

$$(7 \times 9,8 - T_2)t = 7(6 - 3) \quad (2)$$

$$(T_2 - T_1)(0,6)t = \bar{I}(\omega_{\text{final}} - \omega_{\text{inicial}}) \quad (3)$$

En (3) ponemos  $\bar{I} = mk^2 = 5(0,45)^2 = 1,01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $\omega_{\text{final}} = 6/0,6 = 10 \text{ rad/s}$  y  $\omega_{\text{inicial}} = 3/0,6 = 5 \text{ rad/s}$ . Ahora, resolviendo el sistema de ecuaciones (1), (2) y (3), se obtiene  $t = 2,27 \text{ s}$ .

**SOLUCIÓN (B)**

Teniendo en cuenta que el momento respecto al centro de la polea de los momentos lineales de ambas masas es el momento angular de la masa, es posible resolver este problema considerando la totalidad del conjunto de masas. Así pues,

$$(\text{Mom Ang Inicial})_0 + (\text{Imp Ang})_0 = (\text{Mom Ang Final})_0 \quad (4)$$

Las tracciones no están presentes en la expresión del impulso del sistema porque forman parejas de fuerzas iguales y directamente opuestas que se anulan entre sí. Además, sólo los dos pesos de las masas suspendidas poseen impulso angular respecto al centro de la polea. La ecuación queda

$$\begin{aligned} (I_0 \omega_{\text{inicial}} + 5v_{\text{inicial}} \times 0,6 + 7v_{\text{inicial}} \times 0,6) + (7 \times 9,8t - 5 \times 9,8t) &= \\ = (I_0 \omega_{\text{final}} + 5v_{\text{final}} \times 0,6 + 7v_{\text{final}} \times 0,6) & \end{aligned} \quad (5)$$

o sea,

$$\begin{aligned} (1,01 \times 5 + 5 \times 3 \times 0,6 + 7 \times 3 \times 0,6) + 11,76t &= \\ (1,01 \times 10 + 5 \times 6 \times 0,6 + 7 \times 6 \times 0,6) & \end{aligned} \quad (6)$$

Por tanto,  $t = 2,27 \text{ s}$ .

- 18.18.** Hallar, en la Figura 18.17, la masa de  $B$  para que la velocidad de la masa  $A$  de 50 kg varíe de 4 a 8 m/s en 6 s. Se supone que no hay rozamiento en los cojinetes del torno.

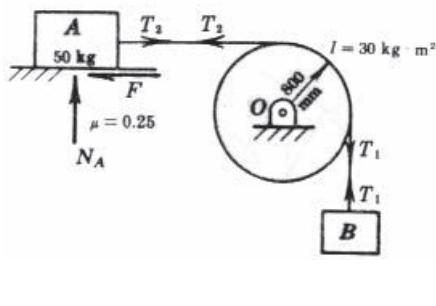


Figura 18.17

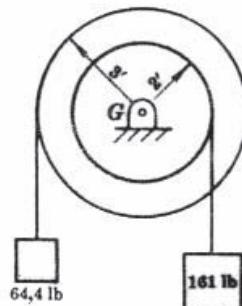


Figura 18.18

**SOLUCIÓN**

Consideramos la totalidad del conjunto de masas, teniendo presente que el momento angular inicial respecto al centro del torno  $O$  más los impulsos angulares respecto a  $O$  de todas las fuerzas externas es igual al momento angular final respecto a  $O$ . Adviéntase que  $N_A = 50 \times 9,8$  y, por tanto,  $F = 0,25 \times 50 \times 9,8 = 123 \text{ N}$ . Las celeridades angulares del torno son  $4/0,8$  y  $8/0,8$ , respectivamente ( $5 \text{ rad/s}$  y  $10 \text{ rad/s}$ ).

$$[30(5) + m_B(4)(0,8) + 50(4)(0,8)] + [9,8m_B(0,8) - 123 \times 0,8]6 = [30(10) + m_B(8)(0,8) + 50(8)(0,8)]$$

Solución:  $m_B = 20,5$  kg.

- 18.19.** El torno de la Figura 18.18 se compone de dos cilindros homogéneos solidarios. El más pequeño de ellos pesa 250 lb y el más grande, 500 lb. ¿Cuánto tarda el torno en cambiar de velocidad desde 100 a 300 rpm?

#### SOLUCIÓN

El momento de inercia del torno es

$$\frac{1}{2}\left(\frac{500}{g}\right)(3)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{250}{g}\right)(2)^2 = 85,4 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

El impulso lineal del peso de 161 lb tiene un momento horario respecto a  $G$  que vale  $2(161)t = 322 \text{ lb} \cdot \text{s} \cdot \text{ft}$ . El impulso lineal del peso de 64,4 lb tiene un momento antihorario respecto a  $G$  que vale  $-3(64,4)t = -193t \text{ lb} \cdot \text{s} \cdot \text{ft}$ . El impulso angular total es la suma de estos dos valores, o sea,  $129 \text{ lb} \cdot \text{s} \cdot \text{ft}$ . Este impulso angular total que actúa sobre el sistema debe ser igual a la variación del momento angular total del sistema respecto a  $G$ .

La variación del momento angular del torno vale

$$I(\omega_2 - \omega_1) = 85,4 \left(300 \times \frac{2\pi}{60} - 100 \times \frac{2\pi}{60}\right) = 1790 \text{ lb} \cdot \text{s} \cdot \text{ft}$$

Para calcular el momento cinético (momento angular) respecto a  $G$  de cada peso, multiplicamos su momento lineal por el brazo correspondiente. El peso de 161 lb desciende, por lo que el momento de su momento lineal (su momento cinético) respecto a  $G$  es de sentido horario (positivo). La consiguiente variación del momento angular es

$$2\left[\left(\frac{161}{32,2}\right)\left(2 \times \frac{600\pi}{60} - 2 \times \frac{200\pi}{60}\right)\right] = 419 \text{ lb} \cdot \text{s} \cdot \text{ft}$$

Análogamente, la variación del momento lineal del peso de 64,4 lb es hacia arriba, por lo que el correspondiente momento angular respecto a  $G$  es positivo (horario). Su valor es

$$3\left[\left(\frac{64,4}{32,2}\right)\left(3 \times \frac{600\pi}{60} - 3 \times \frac{200\pi}{60}\right)\right] = 377 \text{ lb} \cdot \text{s} \cdot \text{ft}$$

El impulso angular total es igual a la variación total del momento angular del sistema, es decir

$$129t = 1790 + 419 + 377$$

lo que da

$$t = 20,0 \text{ s}$$

- 18.20.** El cilindro de la Figura 18.19, de masa  $m$  y radio  $r$ , desciende rodando, desde el reposo, por el plano inclinado un ángulo  $\theta$ . ¿Cuál es la celeridad de su centro en el instante  $t$  desde el reposo?

#### SOLUCIÓN

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre con todas las fuerzas actuantes sobre el cilindro. No hay que cometer el error de suponer que la fuerza de rozamiento  $F$  es igual al producto del coeficiente de rozamiento por la fuerza normal  $N$ .

Como el cilindro ejecuta un movimiento plano, las correspondientes relaciones entre impulsos y momentos son

$$\sum (\text{Imp})_x = \Delta G_x \quad (1)$$

y

$$\sum (\text{Imp Ang})_o = \Delta H_o \quad (2)$$

Adviértase que  $F$  es la única fuerza externa cuyo momento respecto al centro  $O$  no es nulo. Las ecuaciones (1) y (2) quedan

$$(mg \operatorname{sen} \theta - F)t = m(\bar{v} - 0) \quad (3)$$

$$Fr_t = \bar{I}(\omega - 0) \quad (4)$$

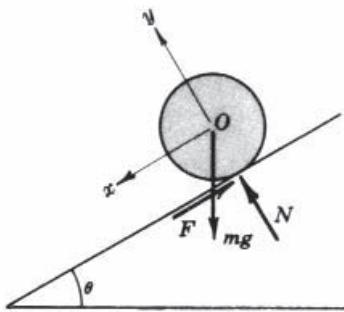


Figura 18.19

En estas ecuaciones, se desconocen la fuerza de rozamiento  $F$  y la celeridad  $\bar{v}$ . (Como se supone que no hay deslizamiento,  $\omega = \bar{v} / r$ .)

Según (4),  $F = (\bar{I}\omega) / (rt)$ . Sustituyendo esto en (3), y con  $\omega = \bar{v} / r$ , se obtiene

$$\bar{v} = \frac{mg \operatorname{sen} \theta}{m + \bar{I} / r^2} t$$

- 18.21.** Un cilindro macizo homogéneo, de 3 ft de diámetro y 300 lb de peso, se hace subir rodando por un plano inclinado  $20^\circ$  merced a una fuerza de 250 lb aplicada paralelamente al plano (Figura 18.20). Suponiendo ausencia de resbalamiento, hallar su celeridad al cabo de 6 s si la celeridad inicial es cero.

#### SOLUCIÓN

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del cilindro, suponiendo que la fuerza de frotamiento actúa plano arriba. Las relaciones entre impulsos y momentos lineales y angulares son

$$\sum (\text{Imp})_{\parallel} = \Delta G_{\parallel}, \quad \text{o sea,} \quad (250 + F - 300 \operatorname{sen} 20)6 = \frac{300}{g} \bar{v} \quad (1)$$

$$\sum (\text{Imp Ang})_G = \bar{I}\omega, \quad \text{o sea,} \quad \left[ 250\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{3}{2}\right) \right]6 = \frac{1}{2}\left(\frac{300}{g}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{\bar{v}}{3/2}\right) \quad (2)$$

de donde la velocidad  $v$  a los 6 s es de 171 ft/s, paralela al plano.

- 18.22.** Un cilindro macizo homogéneo comienza el ascenso por un plano inclinado  $30^\circ$  con su centro de masas moviéndose a 20 ft/s (Figura 18.21). Si rueda libremente hasta detenerse, ¿cuánto tarda en llegar a su punto más alto?

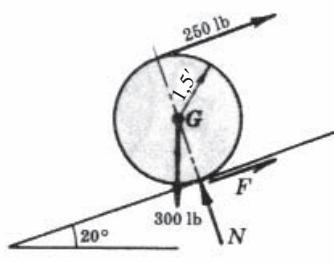


Figura 18.20

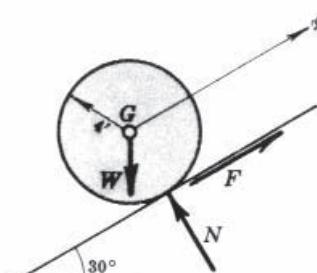


Figura 18.21

#### SOLUCIÓN

La celeridad inicial  $v$  del centro de masas  $G$  es 20 ft/s. La velocidad angular inicial es  $\omega = 20/4 = 5$  rad/s. La celeridad final es cero. En el diagrama de cuerpo libre se muestran las fuerzas actuantes.

Las relaciones entre impulsos y momentos lineales y angulares son

$$\sum (\text{Imp})_x = \Delta G_x, \quad \text{o sea,} \quad (F - W \sin 30^\circ)t = \frac{W}{g}(0 - 20) \quad (1)$$

$$\sum (\text{Imp Ang})_G = \Delta H_G, \quad \text{o sea,} \quad (-4F)t = \frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)(4^2)(0 - 5) \quad (2)$$

de donde  $t = 1,86$  s.

La solución puede también hallarse empleando el centro instantáneo como punto de referencia. La única ecuación necesaria es

$$\sum (\text{Imp Ang})_I = \Delta H_I, \quad \text{o sea,} \quad -(4 \sin 30^\circ)Wt = \frac{3}{2}\left(\frac{W}{g}\right)(4)^2(0 - 5)$$

de donde  $t = 1,86$  s.

- 18.23.** En la Figura 18.22, la rueda de 75 kg tiene un radio de giro respecto a  $G$  de 900 mm, e inicialmente rueda en sentido antihorario a 10 rad/s. ¿Cuánto tarda en rodar a 6 rad/s en sentido horario? La polea carece de masa y gira sobre cojinetes sin rozamiento.

#### SOLUCIÓN

En el diagrama de cuerpo libre, se supone que el rozamiento actúa hacia la izquierda. Por cinemática, la velocidad inicial de  $G$  es  $v_G = -1,2(10) = -12$  m/s, es decir, hacia la izquierda.

Su velocidad final es  $+1,2(6) = +7,2$  m/s, hacia la derecha. Para hallar las velocidades de la masa de 30 kg, hallamos las velocidades inicial y final del punto  $B$  de la rueda:  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{B/G} + \mathbf{v}_G$ . Por tanto, la velocidad inicial de  $B$  es  $-0,8\omega - 12 = -0,8(10) - 12 = -20$  m/s. Razonando parecidamente, la velocidad final de  $B$  es  $+12$  m/s. Así pues, la velocidad inicial de la masa de 30 kg es de 20 m/s, hacia arriba, y la velocidad final, de 12 m/s, hacia abajo.

En las ecuaciones, se emplean los siguientes convenios de signos. Para la rueda, se consideran positivos los sentidos hacia la derecha y el horario. Para la masa de 30 kg en la ecuación (3), el sentido positivo es hacia abajo.

$$\sum (\text{Imp})_h = \Delta G_h, \quad \text{o sea,} \quad (T - F)t = 75[+7,2 - (-12)] \quad (1)$$

$$\sum (\text{Imp Ang})_G = \Delta H_G, \quad \text{o sea,} \quad (0,8T + 1,2F)t = 75(0,9)^2[+6 - (-10)] \quad (2)$$

$$\sum (\text{Imp})_v = \Delta G_v, \quad \text{o sea,} \quad (9,8 \times 30 - T)t = 30[+12 - (-20)] \quad (3)$$

Solución:  $t = 7,86$  s.

- 18.24.** Un cilindro macizo homogéneo de 8 in de diámetro y 96,6 lb de peso gira en sentido horario a 36 rad/s en torno a su eje geométrico horizontal cuando, de repente, se deja caer sobre un plano horizontal (Figura 18.23). Suponiendo un coeficiente de rozamiento de 0,15, hallar la celeridad  $\bar{v}$  de su centro de masas cuando se inicia la rodadura pura. ¿Qué distancia habrá recorrido el centro de masas cuando eso ocurra?

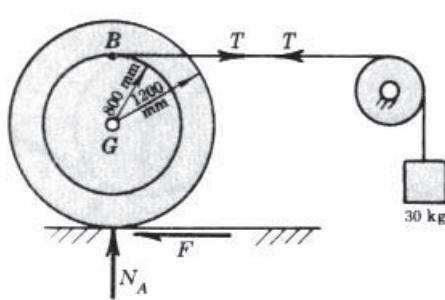


Figura 18.22

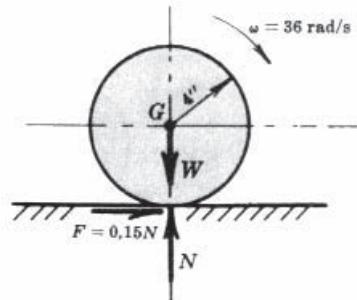


Figura 18.23

**SOLUCIÓN**

La figura es el diagrama de cuerpo libre del cilindro al entrar en contacto con el plano. Cuando se llegue a la rodadura pura, sobre el cilindro actuará el mismo sistema de fuerzas. La fuerza de frotamiento  $F$  actúa (1) disminuyendo la celeridad angular y (2) aumentando la celeridad del centro de masas desde cero hasta su valor  $\bar{v} = r\omega$  de rodadura pura.

Se tiene  $N = W = 96,6$  lb,  $F = 0,15N = 14,5$  lb,  $m = 3$  slugs, e  $\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(3)(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{6}$  slug·ft<sup>2</sup>

Las relaciones entre impulsos y momentos lineales y angulares son

$$\sum (\text{Imp})_h = \Delta G_h, \quad \text{o sea,} \quad Ft = m(\bar{v} - 0) \quad (1)$$

$$\sum (\text{Imp Ang})_G = \Delta H_G, \quad \text{o sea,} \quad -Frt = \bar{I}(\omega - 36) \quad (2)$$

Para la segunda ecuación, suponemos que el sentido horario es positivo. Las ecuaciones quedan  $-14,5t = 3\bar{v}$  y  $-14,5(\frac{1}{3})t = \frac{1}{6}(\omega - 36)$ , con  $\omega = \bar{v}/r = 3\bar{v}$ . La solución de este sistema de ecuaciones es  $\bar{v} = 4,0$  ft/s,  $t = 0,83$  s. Luego  $s = \frac{1}{2}(\bar{v} + 0)t = 1,66$  ft.

- 18.25.** Un chorro de agua de 2 in de diámetro que se mueve a 80 ft/s incide horizontalmente en una placa plana vertical, tal como se muestra en la Figura 18.24. Tras el impacto, el agua se mueve paralelamente a la placa. ¿Qué fuerza ejerce el chorro sobre la placa?

**SOLUCIÓN**

La masa total  $m$  de las partículas de agua que inciden en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es

$$m = Av(\Delta t)\delta = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{2}{12}\right)^2(80)(\Delta t)\left(\frac{62,4}{32,2}\right) = 3,39(\Delta t) \text{ slugs}$$

donde  $A$  = área de la sección transversal del chorro en ft<sup>2</sup>

$v$  = celeridad del chorro en ft/s

$\delta$  = densidad del agua en slugs/ft<sup>3</sup>

Sea  $P$  = fuerza de la placa sobre la masa  $m$  de agua. Entonces

$$\sum F_x(\Delta t) = \Delta G_x = m(v''_x - v'_x)$$

o sea,

$$P(\Delta t) = 3,39(\Delta t)(0 - 80)$$

de donde  $P = -271$  lb. La fuerza del agua sobre la placa es +271 lb, o sea, hacia la derecha.

- 18.26.** Resolver el Problema 18.25 suponiendo que la placa se mueve hacia la derecha con una celeridad de 20 ft/s.

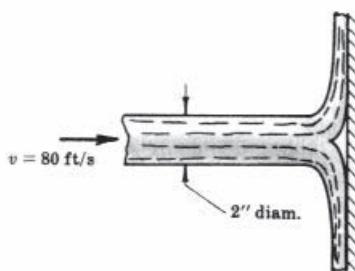


Figura 18.24



Figura 18.25

**SOLUCIÓN**

Volvemos a considerar la masa de todas las partículas de agua durante el tiempo  $\Delta t$ . La celeridad del agua relativa a la placa es  $v = (80 - 20) = 60$  ft/s. Entonces,  $m = Av(\Delta t)\delta = 2,54(\Delta t)$  y, ahora, aplicando la relación entre impulso y momento lineal en la dirección  $x$ , obtenemos

$$P(\Delta t) = 2,54(\Delta t)(20 - 80)$$

donde la celeridad final del agua es la de la placa. Operando, la fuerza de la placa sobre el agua es  $P = -153$  lb. Por supuesto, la fuerza del agua sobre la placa es  $+153$  lb, o sea, hacia la derecha.

- 18.27.** Un chorro de agua de  $2000 \text{ mm}^2$  de sección transversal que se mueve a  $10 \text{ m/s}$  incide horizontalmente en un álate curvo fijo, tal como se muestra en la Figura 18.25. Suponiendo que la celeridad del agua relativa al álate sea constante (no se considera el rozamiento), hallar las componentes horizontal y vertical del fuerza del álate sobre el chorro de agua.

#### SOLUCIÓN

Adviértase que la velocidad final  $\mathbf{v}''$  tiene el mismo módulo  $v$  que la velocidad inicial  $\mathbf{v}'$ , pero diferente dirección. La masa  $m$  de todas las partículas de agua que inciden en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es

$$m = Av(\Delta t)\delta = (2000 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(10 \text{ m/s})(\Delta t)(1000 \text{ kg/m}^3) = 20(\Delta t)$$

Aplicando la relación entre impulso y momento lineal a las direcciones  $x$  e  $y$ ,

$$\sum F_x(\Delta t) = \Delta G_x = m(v_x'' - v_x'), \quad \text{o sea,} \quad P_x(\Delta t) = (20\Delta t)(-10 \cos 45^\circ - 10)$$

$$\sum F_y(\Delta t) = \Delta G_y = m(v_y'' - v_y'), \quad \text{o sea,} \quad P_y(\Delta t) = (20\Delta t)(+10 \sin 45^\circ - 0)$$

donde  $P_x$  y  $P_y$  son, respectivamente, las componentes  $x$  e  $y$  de la fuerza del álate. Operando,  $P_x = -340 \text{ N}$  (sobre el agua hacia la izquierda) y  $P_y = +140 \text{ N}$  (sobre el agua hacia arriba).

- 18.28.** Un depósito de  $150 \text{ lb}$  de peso descansa en una balanza de romana. Un chorro de agua vertical, de  $0,20 \text{ in}^2$  de sección, se descarga sobre él a una celeridad de  $20 \text{ ft/s}$ . ¿Cuál es la lectura de la balanza al cabo de un minuto?

#### SOLUCIÓN

El agua del chorro ejerce una fuerza continua  $F$  sobre el fondo del depósito y, por tanto, sobre la balanza. Según la relación entre impulso y momento lineal, si en cada instante  $t$  consideramos el agua como cuerpo libre, podemos escribir  $\Sigma(\text{Imp})_v = \Delta G_v$ , o sea,  $Ft = m(0 - 20)$ , con  $m = Avt\delta$ . Entonces

$$Ft = \frac{0,20}{144}(20)(t)\left(\frac{62,4}{32,2}\right)(0 - 20), \quad \text{o sea,} \quad F = -1,1 \text{ lb}$$

El signo negativo indica que para detener el agua hace falta una fuerza hacia arriba (de la balanza).

En  $t = 60 \text{ s}$ , el tanque contiene  $(0,20/144)(20)(60)(62,4) = 104 \text{ lb}$  de agua.

Así pues, la lectura de la balanza es  $(1,1 + 104 + 150) = 255 \text{ lb}$ .

- 18.29.** Sentada en un trineo sobre hielo de  $150 \text{ lb}$ , una persona de  $130 \text{ lb}$  dispara una bala de  $2 \text{ oz}$  con una pistola apuntada hacia popa en dirección proa-popo. Si la bala abandona la pistola a  $1200 \text{ ft/s}$ , y en ausencia de rozamiento, ¿qué velocidad adquiere el trineo tras el disparo?

#### SOLUCIÓN

Como el impulso total del sistema es nulo, el momento lineal total sigue siendo nulo. Esto es así porque la acción sobre la bala es igual a la reacción sobre la persona, la pistola y el trineo. El momento lineal tras el disparo debe también ser nulo. Suponiendo positiva la velocidad de la bala, podemos escribir

$$\frac{W_{\text{trineo}} + W_{\text{persona}}}{g} v + \frac{W_{\text{bala}}}{g} 1200 = 0$$

$$\text{Por tanto,} \quad \frac{150 + 130}{g} v + \frac{2/16}{g} 1200 = 0$$

Esto da  $v = -0,54 \text{ ft/s}$ , con un signo menos que indica que el trineo y la persona se mueven en sentido contrario a la bala.

- 18.30.** Se dispara una bala de 60 g horizontalmente sobre un saco de arena de 50 kg suspendido de una cuerda de 900 mm de longitud, tal como se muestra en la Figura 18.26. Observando el ángulo  $\theta$ , se calcula que el saco con la bala incrustada oscila hasta una altura de 30 mm. ¿Con qué velocidad penetra la bala en el saco?

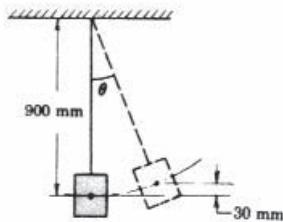


Figura 18.26

#### SOLUCIÓN

Sean

$$v_1 = \text{celeridad de la bala antes del impacto}$$

$$v_2 = \text{celeridad del saco con la bala después del impacto} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,8)(0,03)} = 0,767 \text{ m/s}$$

Momento lineal del sistema antes del impacto = Momento lineal del sistema después del impacto

$$(0,06 \text{ kg})v_1 + 0 = (0,06 + 50) \text{ kg} \times 0,767 \text{ m/s}$$

de donde  $v_1 = 640 \text{ m/s}$ .

- 18.31.** Otro ejemplo de conservación del momento lineal es el retroceso de los cañones.

#### ANÁLISIS

Inicialmente, el proyectil está en reposo dentro del cañón. Al estallar la carga, ésta expulsa del cañón al proyectil y a la vez empuja hacia atrás al cañón. Como durante la explosión no actúan fuerzas externas, la suma de los momentos lineales del proyectil, hacia adelante, y del cañón, hacia atrás, debe ser igual al momento lineal inicial del sistema, o sea, igual a cero. Así pues,

$$m_p v_p + m_g v_g = 0$$

donde  $m_p, m_g$  = masa del proyectil y del cañón, respectivamente

$v_p, v_g$  = velocidades del proyectil y del cañón, respectivamente, inmediatamente después de la explosión

Despejando la velocidad de retroceso,  $v_g = -(m_p/m_g)v_p$ . El signo menos indica que el cañón se mueve en sentido contrario al proyectil.

Cuanto mayor es la masa del cañón, menor es la velocidad de retroceso. Por tanto, la energía que debe absorber el muelle recuperador u otros mecanismos será consiguientemente menor. Por supuesto, el peso está limitado por la necesidad de movilidad.

- 18.32.** Una bala de 60 g que se mueve a 500 m/s incide contra un bloque de 5 kg que se mueve a 30 m/s en la misma dirección y sentido. ¿Cuál es la velocidad resultante del bloque y la bala, suponiendo que ésta se incruste en el bloque?

#### SOLUCIÓN

Momento lineal del sistema antes del impacto = Momento lineal del sistema después del impacto

$$(0,06 \text{ kg})(500 \text{ m/s}) + (5 \text{ kg})(30 \text{ m/s}) = (0,06 + 5) \text{ kg} \times v$$

$$v = 35,6 \text{ m/s}$$

- 18.33.** Un muelle de longitud libre 6 in se une a los dos pesos que se muestran en la Figura 18.27 y se comprime 2 in. Si el sistema se suelta sobre un plano horizontal liso, ¿cuál es la velocidad de cada bloque cuando el muelle adquiere su longitud normal? La constante del muelle es 12 lb/in.



Figura 18.27

**SOLUCIÓN**

Como sobre los dos pesos actúa la misma fuerza, que es la del muelle aunque de sentidos opuestos, el impulso lineal total sobre el sistema de ambos bloques es nulo. Por tanto, el momento lineal de los dos pesos es constante, o sea, cero, y  $(2/g)v_2 + (3/g)v_3 = 0$ , donde los subíndices se refieren a los pesos de 2 y 3 libras. De esa ecuación resulta  $v_2 = -(3/2)v_3$ , en todo instante.

Es necesaria otra ecuación en  $v_2$  y  $v_3$ . El trabajo del muelle al alargarse hasta su longitud inicial (merced a su energía potencial) es igual a la variación de la energía cinética de ambos pesos. Cuando el muelle se alarga una longitud  $x$  desde su estado comprimido, la fuerza compresora es  $12(2 - x)$  lb.

Por tanto, el trabajo total efectuado es  $\int_0^2 12(2 - x) dx = 24$  in · lb, o sea, 2 ft · lb. Igualando este valor a la energía cinética final (la inicial es cero),  $2 = \frac{1}{2}(2/g)v_2^2 + \frac{1}{2}(3/g)v_3^2$ . Esta ecuación y la anterior, debida a la conservación del momento lineal, forman un sistema de dos ecuaciones cuya solución es  $v_3 = 4,14$  ft/s ( $\rightarrow$ ) y  $v_2 = -6,22$  ft/s ( $\leftarrow$ ).

- 18.34.** En la Figura 18.28 se muestra un objeto de 10 lb controlado a distancia situado a 4 ft del centro de una plataforma giratoria «sin peso» horizontal que gira a 2 rad/s en torno a un eje vertical. Al árbol se le aplica un momento antagonista  $M = 2t$  lb · ft. Hallar (a) cuánto tardará la plataforma en alcanzar una celeridad de 1,5 rad/s y (b) qué distancia debe moverse el objeto, si se retira el momento, para que la plataforma recupere una celeridad de 2 rad/s.

**SOLUCIÓN**

- (a) El momento angular del objeto es el producto de su momento lineal  $mv$  por su distancia radial  $r$ . El impulso angular es igual a la variación del momento angular. Por tanto, teniendo en cuenta que  $v = r\omega$ , tenemos

$$\int_0^t -2t dt = \frac{10}{g} (4 \times 1,5)(4) - \frac{10}{g} (4 \times 2)(4)$$

Por tanto,

$$t = 1,58 \text{ s}$$

- (b) Para la segunda parte del problema, tenemos en cuenta la conservación del momento angular para determinar la distancia  $r$  a la que situar el objeto:

$$\frac{10}{g} (4)(1,5)(4) = \frac{10}{g} (4)(2)(r)$$

Por tanto,  $r = 3,46$  ft, y el objeto debe trasladarse desde 4 a 3,46 ft, o sea, 0,54 ft hacia el centro.

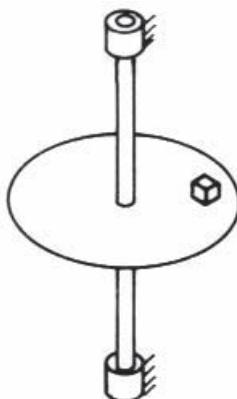


Figura 18.28

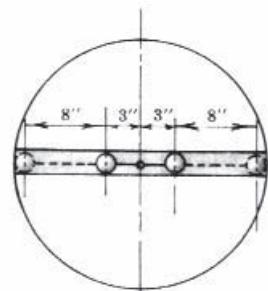


Figura 18.29

**18.35.** Dos pequeñas esferas, de peso 2,5 lb cada una, están unidas por un hilo sin peso tal como se muestra en la Figura 18.29. La plataforma horizontal está girando, sin pares externos aplicados, a 36 rad/s cuando el hilo se rompe. En ausencia de rozamiento entre las esferas y la ranura en que se alojan, hallar la velocidad angular del sistema cuando las esferas chocan con los topes exteriores. El momento de inercia del disco es 0,4 slug·ft<sup>2</sup>.

### Solución

El momento de inercia inicial  $I_i$  es el del disco y las dos esferas están situadas a sendas distancias de 3 in del centro. Por tanto,

$$I_i = 0,4 + 2\left(\frac{2,5}{32,2}\right)\left(\frac{3}{12}\right)^2 = 0,41 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

El momento angular inicial es  $I_i\omega_i$ , o sea, 0,41(36). El momento de inercia final  $I_f$  es

$$I_f = 0,4 + 2\left(\frac{2,5}{32,2}\right)\left(\frac{11}{12}\right)^2 = 0,531 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

Como no hay pares externos aplicados al sistema, el momento angular se conserva; entonces

$$I_f\omega_f = I_i\omega_i \quad 0,531\omega_f = 0,41(36) \quad \text{y} \quad \omega_f = 27,8 \text{ rad/s}$$

**18.36.** Obtener  $v_1$  y  $v_2$  resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones de choque:

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} \quad (1)$$

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \quad (2)$$

donde  $e$  = coeficiente de restitución

$u_1, u_2$  = velocidades de los cuerpos 1 y 2, respectivamente, antes del choque

$v_1, v_2$  = velocidades de los cuerpos 1 y 2, respectivamente, después del choque

$m_1, m_2$  = masas de los cuerpos 1 y 2, respectivamente

### SOLUCIÓN

Multiplicando (1) por  $(u_1 - u_2)m_1$ , se obtiene (3)  $em_1(u_1 - u_2) = m_1v_2 - m_1v_1$ . Sumando (2) y (3), resulta  $m_1u_1 + m_2u_2 + em_1(u_1 - u_2) = (m_2 + m_1)v_2$ . Entonces,

$$v_2 = \frac{m_1u_1(1+e) + u_2(m_2 - em_1)}{m_2 + m_1}$$

$$\text{Análogamente, } v_1 = \frac{m_2u_2(1+e) + u_1(m_1 - em_2)}{m_2 + m_1}$$

**18.37.** Estudiar el choque entre cuerpos perfectamente elásticos ( $e = 1$ ).

### SOLUCIÓN

Para el choque elástico, se hace  $e = 1$  en las expresiones de  $v_1$  y  $v_2$  deducidas en el Problema 18.36:

$$v_1 = \frac{2m_2u_2 + u_1(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1} \quad (1)$$

$$v_2 = \frac{2m_1u_1 + u_2(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} \quad (2)$$

De especial interés es el caso en que  $m_1 = m_2 = m$ . Las expresiones, entonces, quedan

$$v_1 = \frac{2mu_2 + 0}{m+m} = u_2 \quad (1')$$

$$v_2 = \frac{2mu_1 + 0}{m+m} = u_1 \quad (2')$$

Las expresiones anteriores explican lo que ocurre cuando una moneda en movimiento golpea a una moneda inmóvil sobre una superficie lisa. La velocidad final de la moneda móvil se convierte en la velocidad inicial de la otra moneda (cero, en este caso), mientras que la velocidad final de la moneda antes inmóvil se convierte en la velocidad inicial de la moneda móvil. En otras palabras, la moneda en movimiento se detiene y la moneda quieta adquiere su velocidad. Lo mismo ocurre con una hilera recta de monedas. La primera (la más alejada de la moneda móvil) se pone en movimiento, mientras que las demás se quedan inmóviles.

### 18.38. ¿Qué ocurre en un choque inelástico?

#### SOLUCIÓN

Es el caso en que un cuerpo absorbe al otro o se adhiere a él. El sentido común indica que los dos tienen la misma velocidad final. Nótese que eso es lo que realmente sucede si, en las expresiones de  $v_1$  y  $v_2$  del Problema 18.36, hacemos  $e = 0$ :

$$v_1 = \frac{m_2 u_2 + m_1 u_1}{m_2 + m_1} \quad v_2 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_2 + m_1} \quad v_1 = v_2$$

### 18.39. Dos bolas de billar iguales colisionan centralmente a las velocidades de 6 y -8 ft/s. ¿Cuáles son sus velocidades tras el choque suponiendo un coeficiente de restitución de 0,8?

#### SOLUCIÓN

El subíndice 1 se refiere a la bola de velocidad 6 ft/s y el subíndice 2, a la de -8 ft/s. Sus masas son iguales ( $m_1 = m_2 = m$ ).

O sea,  $u_1 = 6$  ft/s y  $u_2 = -8$  ft/s. El problema consiste en hallar  $v_1$  y  $v_2$ . En vez de aplicar los resultados del Problema 18.36, trabajamos directamente con las ecuaciones fundamentales siguientes:

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} \quad 0,8 = \frac{v_2 - v_1}{6 - (-8)}, \quad \text{o sea,} \quad v_2 - v_1 = 11,2 \text{ ft/s} \quad (1)$$

$$m_1 u_1 + m_2 u_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad m(+6) + m(-8) = mv_1 + mv_2 \\ \text{o sea,} \quad v_1 + v_2 = -2 \text{ ft/s} \quad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (2), se obtiene  $v_1 = -6,6$  ft/s y  $v_2 = 4,6$  ft/s.

### 18.40. Una pelota rebota verticalmente desde un suelo horizontal hasta una altura de 20 m. En el rebote siguiente sube hasta 14 m. ¿Cuál es el coeficiente de restitución entre el suelo y la pelota?

#### SOLUCIÓN

El subíndice 1 se refiere a la pelota. Las velocidades inicial y final del suelo,  $u_2$  y  $v_2$ , son cero, pues se supone que el suelo permanece inmóvil durante el choque.

La segunda vez que la pelota incide en el suelo, lo hace cayendo desde una altura de 20 m. Su velocidad  $u_1$  es

$$u_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,8 \text{ m/s}^2)(20 \text{ m})} = 19,8 \text{ m/s}$$

La velocidad de rebote  $v_1$  puede calcularse por un razonamiento similar. Como la pelota alcanza una altura de 14 m con una velocidad de partida  $v_1$ , ésta vale  $v_1 = \sqrt{2(9,8)(14)} = 16,6 \text{ m/s}$ .

Ahora, aplicamos la siguiente fórmula del choque, donde las velocidades descendentes se suponen positivas:

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} = \frac{0 - (-16,6)}{19,8 - 0} = 0,84$$

El valor de  $e$  podría hallarse considerando las raíces cuadradas de las alturas sucesivas hasta las que rebota la pelota. Ello es así porque, en este caso,  $e$  es realmente el cociente entre las velocidades, las cuales dependen de las raíces cuadradas de las alturas:  $e = \sqrt{14/20} = 0,84$ .

- 18.41.** Una bola de 2 lb que se mueve con una velocidad horizontal de 12 ft/s, tal como se muestra en la Figura 18.30(a), golpea el extremo inferior de la barra esbelta y rígida de 5 lb, articulada en su extremo superior. Siendo 0,7 el coeficiente de restitución, hallar la celeridad angular de la barra y la celeridad lineal de la bola inmediatamente después del choque.

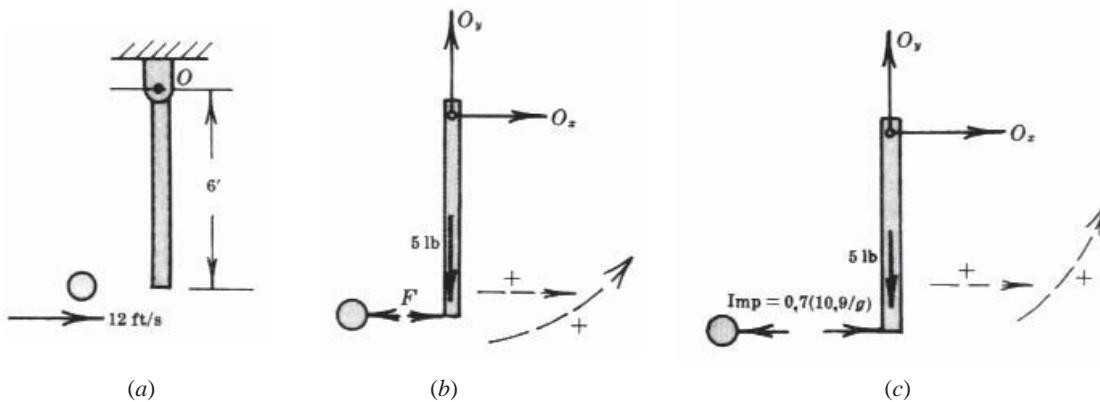


Figura 18.30

#### SOLUCIÓN

Durante la primera fase del choque, desde el instante cero hasta  $t_1$ , el impulso lineal entre la bola y la barra hace que la primera pierda velocidad y que el extremo inferior de la segunda se acelere hasta una velocidad común  $u$ . En la Figura 18.30(b) se representa el diagrama de cuerpo libre de esa primera fase. El impulso lineal de la fuerza interactuante  $F$  provoca la variación del momento lineal de la bola indicada en la ecuación (1) siguiente, donde se considera positivo el sentido hacia la derecha:

$$-\int_0^{t_1} F dt = \Delta G = \frac{2}{g}(u - 12) \quad (1)$$

El momento del impulso lineal respecto al punto  $O$  es responsable de la variación del momento angular de la barra indicada en la ecuación (2) siguiente, donde se considera positivo el sentido antihorario

$$+\int_0^{t_1} F(6) dt = \Delta H_O = I_o(\omega - 0) \quad (2)$$

donde  $I_o = \frac{1}{3}mL^2 = \frac{1}{3}(5/g)(6^2) = 60/g$  slug · ft<sup>2</sup>,  $\omega = u/6$  rad/s. Introduciendo estos valores en (2) y dividiendo por 6, tenemos

$$+\int_0^{t_1} F dt = \frac{5u}{3g} \quad (3)$$

Sumando (1) y (3), hallamos  $u = 6,55$  ft/s. Así pues, al final de esa primera fase (fase de compresión) la bola y el extremo inferior de la barra tienen una velocidad común de 6,55 ft/s hacia la derecha. La celeridad angular de la barra será  $\omega = 6,55/6 = 1,09$  rad/s antihoraria.

El impulso lineal que actúa durante esta fase puede calcularse a partir de (1) como

$$\int_0^{t_1} F dt = -\frac{2}{g}(6,55 - 12) = \frac{10,9}{g} \text{ lb} \cdot \text{s}$$

Este valor puede comprobarse sustituyendo  $u = 6,55 \text{ ft/s}$  en (3).

En la segunda fase (fase de restitución), el impulso lineal actuante es sólo 0,7 del actuante en la fase de compresión, tal como se indica en la Figura 18.30(c). Procediendo como antes, designando  $v$  a la celeridad de la bola inmediatamente después del choque y  $\omega'$  a la celeridad angular de la barra inmediatamente después del choque, las ecuaciones para la bola y la barra son, respectivamente,

$$-0,7\left(\frac{10,9}{g}\right) = \frac{2}{g}(v - 6,55) \quad (4)$$

$$+0,7\left(\frac{10,9}{g}\right)(6) = \frac{60}{g}(\omega' - 1,09) \quad (5)$$

de donde  $v = 2,72 \text{ ft/s} (\rightarrow)$  y  $\omega' = 7,73 \text{ rad/s}$  (sentido antihorario).

- 18.42.** En la Figura 18.31, la bola de 9 kg que se mueve hacia abajo a 3 m/s golpea a la bola de 5,5 kg que se mueve, como se indica, a 2,5 m/s. Siendo el coeficiente de restitución  $e = 0,80$ , calcular las velocidades  $v_1$  y  $v_2$  después del choque.

#### SOLUCIÓN

Para hallar las componentes  $y$  de las velocidades finales, se aplican las dos ecuaciones

$$e = \frac{(v_2)_y - (v_1)_y}{(u_1)_y - (u_2)_y} \quad \text{y} \quad m_1(v_1)_y + m_2(v_2)_y = m_1(u_1)_y + m_2(u_2)_y$$

$$\text{Entonces, } 0,80 = \frac{(v_2)_y - (v_1)_y}{(-3) - (1,77)} \quad \text{y} \quad 9(v_1)_y + 5,5(v_2)_y = 9(-3) + 5,5(+1,77)$$

sistema de dos ecuaciones cuya solución es  $(v_2)_y = -3,56 \text{ m/s}$ , o sea, hacia abajo, y  $(v_1)_y = +0,26 \text{ m/s}$ , o sea, hacia arriba.

En la dirección  $x$ , la bola de 5,5 kg sigue hacia la derecha con la misma velocidad. Así pues,  $(v_2)_x = 1,77 \text{ m/s} (\rightarrow)$ , y  $(v_1)_x = 0$ .

En resumen, la bola de 9 kg rebota hacia arriba a 0,26 m/s, y la bola de 5,5 kg se mueve hacia la derecha y abajo con una velocidad de componentes 1,77 m/s y 3,56 m/s, respectivamente.

- 18.43.** En la Figura 18.32 se representa un cuerpo en reposo sobre un tablero de mesa liso por el que puede moverse libremente. Una fuerza de impacto  $F$  lo golpea a una distancia  $d$  de su centro de masas  $G$ . Estudiar el movimiento y ubicar el centro instantáneo de rotación del cuerpo en función de  $d$  y su radio de giro respecto a su centro de masas.

#### SOLUCIÓN

Empleando las relaciones entre impulsos y momentos lineales y angulares para el movimiento plano,

$$\sum(\text{Imp})_h = \Delta G_h, \quad \text{o sea,} \quad \int F dt = m(\bar{v} - 0) \quad (1)$$

$$\sum(\text{Imp Ang})_G = \Delta H_G, \quad \text{o sea,} \quad \int Fd dt = \bar{I}(\omega - 0) \quad (2)$$

Como la distancia  $d$  es constante, puede salir fuera del signo integral. Entonces,  $v = \int F dt / m$  y  $\omega = (d / \bar{I}) \int F dt$ . Pero  $\bar{I} = m\bar{k}^2$ ; por tanto,  $\omega = (d / m\bar{k}^2) \int F dt$ , donde  $\bar{k}$  es el radio de giro del cuerpo respecto al centro de masas.

Para localizar el centro instantáneo, punto en torno al cual el cuerpo tiende ejecutar una rotación pura, tomamos un punto cualquiera  $O$  a una distancia  $b$  del centro de masas sobre una recta perpendicular a la recta de acción de la fuerza de impacto  $F$ , tal como se muestra en la figura. La velocidad de  $O$  es  $\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_{O/G} + \bar{v}$ . Pero  $\bar{v}$  ya la conocemos en función del impulso lineal. Además,  $v_{O/G} = b\omega$ , donde  $\omega$ , acabamos de definirla en función del impulso lineal. Nótese que, para el objeto representado,  $\bar{v}$  está dirigida hacia la derecha (+) y que  $\omega$  es antihoraria. Por tanto,  $v_{O/G}$  está dirigida hacia la izquierda (-).

Sustituyendo en la fórmula,

$$v_o = -b\omega + \bar{v} = \frac{-bd}{m\bar{k}^2} \int F dt + \frac{1}{m} \int F dt$$

Para que  $O$  sea el centro instantáneo,  $v_o$  debe anularse. Si la expresión anterior la igualamos a cero, podemos despejar  $b = \bar{k}^2 / d$ .

Esto puede considerarse de un modo algo distinto. Supóngase que originalmente se tomó una distancia  $d$  igual a  $\bar{k}^2 / b$ . En tal caso, el punto  $O$  permanecería en reposo y diríamos que la fuerza  $F$  está aplicada en el *centro de percusión*  $P$ .

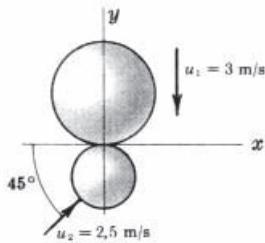


Figura 18.31

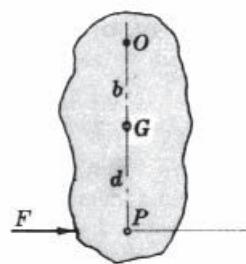


Figura 18.32

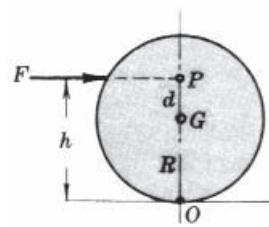


Figura 18.33

- 18.44.** Aplicar los resultados del problema anterior para hallar a qué altura  $h$  sobre el plano hay que golpear con una fuerza de impacto  $F$  el cilindro macizo de radio  $R$  de la Figura 18.33 para que no haya deslizamiento en el punto de contacto  $O$ .

#### SOLUCIÓN

Según la teoría,  $F$  debe actuar sobre el centro de percusión  $P$  al objeto de que el punto  $O$  sea el centro instantáneo de rotación.

Por tanto,  $h = d + R = \bar{k}^2 / R + R$ . Pero, para un cilindro,  $\bar{k}^2 = \bar{I} / m = \frac{1}{2} mR^2 / m = \frac{1}{2} R^2$ . Por consiguiente,  $h = \frac{1}{2} R + R = \frac{3}{2} R$ .

- 18.45.** La esfera de masa  $m_1$  de la Figura 18.34(a) se mueve hacia la derecha sobre un plano horizontal liso con una velocidad  $u_1$  cuando golpea (en ángulo recto) una barra esbelta de masa  $m_2$  que se mueve con una velocidad  $u_2$ , hacia la derecha, de su centro de masas y una velocidad angular inicial horaria  $\omega_i$ . Si el coeficiente de restitución es  $e$ , escribir el sistema de ecuaciones necesarias para obtener la velocidad final  $v_1$  de la esfera, la velocidad final  $v_2$  del centro de masas de la barra, así como la velocidad angular final  $\omega_f$  de la barra. El momento de inercia de la barra respecto a su centro de masas  $G$  es  $I$ .

#### SOLUCIÓN

En la Figura 18.34(b) se ilustra la situación inmediatamente después del choque. Téngase en cuenta que la velocidad inicial del punto de la barra que recibe el impacto está dado por la relación cinemática  $u_2 + d\omega_i$ . Por un razonamiento similar, su velocidad final es  $v_2 + d\omega_f$ .

Como el momento lineal se conserva, tomando como positivo el sentido hacia la derecha, resulta

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1)$$

Como el momento angular respecto al centro de masas  $G$  se conserva, tomando como positivo el sentido horario, resulta

$$m_1 u_1 d + \bar{I} \omega_i = m_1 v_1 d + \bar{I} \omega_f \quad (2)$$

La definición de  $e$  a lo largo de la línea de impacto permite escribir una tercera ecuación

$$e = - \frac{(v_2 + d\omega_f) - v_1}{(u_2 + d\omega_i) - u_1} \quad (3)$$

Ya es posible obtener las tres incógnitas  $v_1$ ,  $v_2$  y  $\omega_f$ .

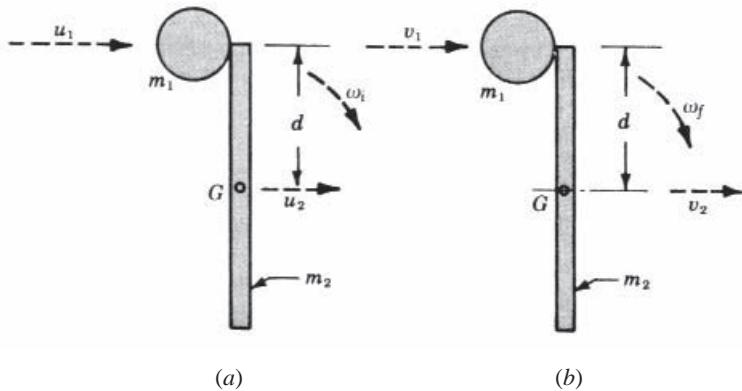


Figura 18.34

**18.46.** Una caja cúbica de 1,5 m de arista desliza por un piso horizontal con una celeridad de 4 m/s. Su arista inferior delantera topa con una baldosa realizada en un choque completamente inelástico. Calcular su velocidad angular inmediatamente después de la colisión. La masa de la caja es de 9 kg.

## SOLUCIÓN

Como las fuerzas de impacto sobre la caja actúan en la arista inferior delantera, se conserva el momento angular respecto a esa arista. Como el choque es completamente inelástico, el borde delantero posee una velocidad nula durante el choque, por lo que el movimiento subsiguiente al choque es una rotación alrededor de  $O$ , arista inferior delantera de la caja. Por tanto, tal como se muestra en la Figura 18.35,

$$H_0 = H'_0$$

$$mv\left(\frac{1}{2}s\right) = I_O\omega$$

Pero

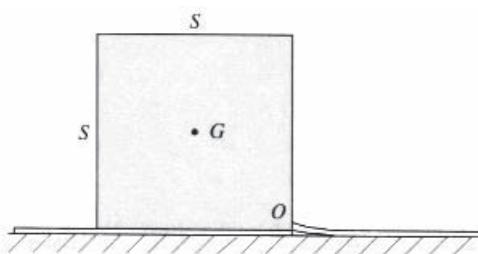
$$I_O = \bar{I} + md^2, \quad \text{o sea,} \quad I_O = \frac{1}{6}ms^2 + m[(\frac{1}{2}s)^2 + (\frac{1}{2}s)^2]$$

$$I_Q = \frac{2}{3}ms^2 = \frac{2}{3}(9)(1,5)^2 = 13,5 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Sustituyendo en la expresión de la conservación del momento angular resulta

$$(9)(4)(0.75) = 13.5\omega$$

de donde  $\omega = 2$  rad/s, en sentido horario.



**Figura 18.35**

**18.47.** La masa inicial de un cohete y su combustible es  $m_0$ . El combustible se quema a un ritmo constante,  $dm / dt = C$ . La velocidad de descarga de los gases respecto al cohete es constante. Despreciando la resistencia del aire, calcular la velocidad del cohete en el instante  $t$ .

## SOLUCIÓN

Sea

<sup>a</sup>  $m$  = masa del cohete con el combustible que le queda en el instante  $t$ : es decir,  $m = m_0 - C_t$ .

$v$  = velocidad del cohete

$u$  = velocidad de los gases

El movimiento vertical se supone de sentido positivo si es ascendente. La única fuerza externa al sistema en el instante  $t$  es el peso  $mg$ , que es negativo. La ecuación es

$$\sum F = m \frac{dv}{dt} - \frac{dm}{dt} (v - u)$$

donde  $(v - u)$  es la velocidad del cohete relativa a los gases y es una constante de valor  $K$ . Entonces,

$$-mg = m \frac{dv}{dt} - CK, \quad -(m_0 - Ct)g = (m_0 - Ct) \frac{dv}{dt} - CK, \quad \text{o bien,} \quad \frac{dv}{dt} = -g + \frac{CK}{m_0 - Ct}$$

Integrando esta última ecuación

$$\int_0^v dv = \int_0^t -g dt + \int_0^t \frac{CK}{m_0 - Ct} dt$$

$$\text{o sea, } v = -gt + [-K \ln(m_0 - Ct)]_0^t = -gt - K \ln(m_0 - Ct) + K \ln m_0 = K \ln m_0 = K \ln \frac{m_0}{m_0 - Ct} - gt$$

- 18.48.** La masa en vacío de un cohete es de 2000 kg. Se dispara verticalmente hacia arriba con una carga de combustible de 8500 kg. La velocidad de los gases de escape relativa a las toberas es constante y vale 2000 m/s. ¿A qué ritmo, en kg/s, deben descargarse los gases al inicio si se desea una aceleración ascendente de 9,8 m/s<sup>2</sup>? Se supone que las toberas descargan a la presión atmosférica.

#### SOLUCIÓN

Tomando como sentido positivo el ascendente, en la ecuación

$$\sum F = m \frac{dv}{dt} - \frac{dm}{dt} (v - u)$$

sustituimos valores y obtenemos

$$-10\,500 \times 9,8 = 10\,500(9,8) - \frac{dm}{dt}(-2000)$$

Despejando,

$$\frac{dm}{dt} = -103 \text{ kg/s}$$

El signo negativo indica que el sistema pierde masa.

- 18.49.** Estudiar el movimiento del giróscopo representado esquemáticamente en la Figura 18.36(a) considerado como un disco que gira en torno a su eje y un rotor unido al punto  $O$  de tal modo que pueda girar en cualquier dirección y sentido en torno a  $O$ .

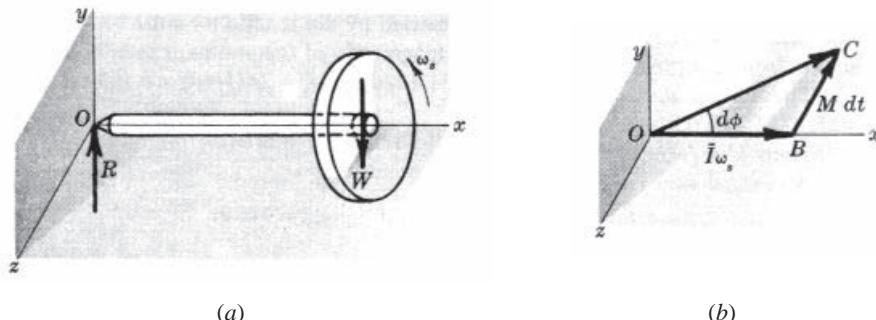


Figura 18.36

**ANÁLISIS**

Supóngase que el disco gira con una velocidad angular elevada  $\omega_s$  alrededor del eje  $x$ , que se conoce como eje de rotación. Supóngase asimismo que el sistema se deja libre; las fuerzas externas actuantes sobre él son el peso  $W$  del disco (despreciando el peso del rotor) y la reacción  $R$  en  $O$ , dirigida hacia arriba. El peso  $W$  produce un momento de giro sobre el sistema en la dirección del eje  $z$ , que se conoce como eje de momentos. Se sabe empíricamente que el disco no cae, sino que rota alrededor del eje  $y$ , que se conoce como eje de precesión.

La explicación de ello es la siguiente. Antes de que el sistema quede libre, su momento angular es igual al producto de su momento de inercia por su velocidad angular  $\omega_s$ , o sea,  $\bar{I}\omega_s$ . Éste puede representarse mediante el vector **OB** de la Figura 18.36(b) dirigido según el sentido positivo del eje  $x$ . (Según la regla de la mano derecha, el pulgar apunta hacia la derecha cuando los dedos se curvan en el sentido de  $\omega_s$ . Lo mismo se expresa diciendo que un tornillo a derechas avanza hacia la derecha cuando se hace girar en el sentido de  $\omega_s$ .)

Inmediatamente tras la suelta, sobre el sistema actúa un momento de giro **M**. Éste tiene la dirección del eje  $z$  y es de sentido horario mirando desde el lado positivo de ese eje, siendo su módulo igual al producto del peso por la distancia perpendicular del eje  $z$  al centro de masas. Durante un corto intervalo de tiempo  $dt$ , el impulso de ese momento es  $Mdt$ . Se expresa en las mismas unidades que el momento angular y puede representarse, según la regla de la mano derecha, mediante un vector paralelo al eje  $z$  y de sentido negativo. En la Figura 18.36(b) se ilustra ese vector **BC**. Pero ese impulso angular  $Mdt$  es la variación del momento angular del sistema. El nuevo momento angular será la suma de los vectores **OB** y **BC**. La recta de **OC** está en el plano  $xz$  pero formando un ángulo  $d\phi$  con el eje  $x$  original. Adviértase ahora que el nuevo eje de rotación es la recta definida por **OC**. Si empleamos cantidades escalares y además sustituimos  $\tan d\phi$  por  $d\phi$ , resulta

$$d\phi = \frac{M dt}{\bar{I} \omega_s}, \quad \text{o bien,} \quad M = \bar{I} \omega_s \frac{d\phi}{dt}$$

Pero  $d\phi/dt$  es la velocidad angular del eje de rotación en torno al eje de precesión, es decir,  $\omega_p$ .

La ecuación del giróscopo es  $M = \bar{I} \omega_s \omega_p$ . Nótese que el eje de rotación permanecerá en el plano  $z$ , siempre que  $\omega_s$  sea elevada.

- 18.50.** Un rotor de 400 lb de peso y 3,00 ft de radio de giro está montado con su eje geométrico a lo largo del eje proa-popa de un barco que gira a 1 rpm en sentido antihorario visto desde arriba. El rotor gira a 300 rpm en sentido antihorario observando desde el extremo posterior del barco. Suponiendo que la distancia entre centros de los cojinetes sea 3,50 ft, hallar las reacciones de los cojinetes delantero y trasero sobre el rotor.

**SOLUCIÓN**

En la Figura 18.37 se representa el diagrama de cuerpo libre del rotor con el eje  $x$  sobre la línea proa-popa del barco. Las reacciones delantera y trasera son, respectivamente,  $R_D$  y  $R_T$ . En concordancia con la regla de la mano derecha, el momento angular respecto al eje  $x$  ( $\bar{I}\omega_s$ ) debe dibujarse sobre el eje  $x$  dirigido hacia

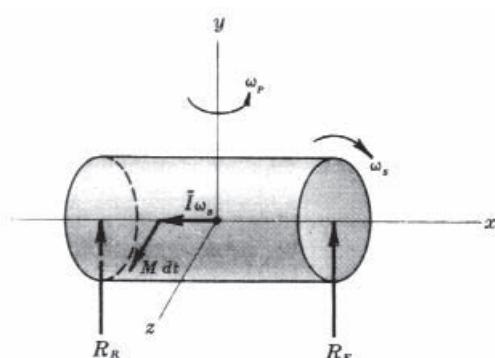


Figura 18.37

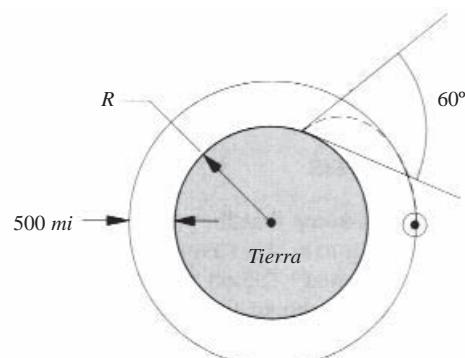


Figura 18.38

la izquierda. Para que precesione en torno al eje  $y$  en el sentido indicado, sobre el rotor debe actuar el impulso angular ( $\mathbf{M} dt$ ) que se indica. Según la regla de la mano derecha, ese momento (debido a las reacciones) debe ser antihorario visto desde el extremo positivo del eje  $z$ . El módulo de ese momento es  $M = (3,50/2)(R_D - R_T)$ .

Los valores dados son  $\omega_s = 2\pi(300/60) = 31,4 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_p = 2\pi(1/60) = 0,105 \text{ rad/s}$  e  $\bar{I} = m\bar{k}^2 = (4000)/(32,2)(3,00)^2 = 1118 \text{ slug}\cdot\text{ft}^2$ .

Luego  $M = \bar{I}\omega_s\omega_p = 3690 \text{ lb}\cdot\text{ft}$  y, por tanto,  $(R_D - R_T) = M(2/3,50) = 2110 \text{ lb}$ .

La última ecuación junto con el equilibrio de las fuerzas verticales,  $R_D + R_T = 4000 \text{ lb}$ , nos da un sistema de ecuaciones cuya solución es

$$R_D = 3055 \text{ lb} \quad \text{y} \quad R_T = 945 \text{ lb}$$

- 18.51.** Un satélite en órbita circular terrestre lanza una cápsula tangencialmente a su trayectoria. Si está orbitando a 500 mi de la superficie terrestre, ¿cuál debe ser la celeridad de la cápsula para que choque con la tierra formando un ángulo de  $60^\circ$  con el suelo? (Figura 18.38).

#### SOLUCIÓN

Como la fuerza gravitatoria sobre la cápsula pasa por el centro de la tierra, el momento angular de la cápsula respecto al centro de la tierra se conserva. Entonces,  $\Delta H_O = 0$  y  $mv_1(R + 500) = mv_2 \cos 60^\circ(R)$ , donde  $R$  es el radio de la tierra, 4000 mi. Por tanto,  $v_2 = 2,25v_1$ .

Además, según el teorema de la energía cinética,  $U = \Delta T$

$$\begin{aligned} \int_{R+500}^R \left(-\frac{GMm}{r^2}\right) dr &= \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \quad \text{donde} \quad GM = 1,41 \times 10^{16} \text{ ft}^3/\text{s}^2 \\ GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+500}\right) &= \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = 2,031v_1^2 \\ v_1 &= 6040 \text{ ft/s} \end{aligned}$$

- 18.52.** Un extremo de una cinta elástica, representada esquemáticamente en la Figura 18.39, está sujeto a una articulación fija. El otro extremo está sujeto a una bola de  $\frac{1}{2} \text{ lb}$ . La constante elástica de la cinta es  $4 \text{ lb/ft}$ . Se estira la cinta 1 ft y se suelta con una velocidad de  $5 \text{ ft/s}$  perpendicular a la misma cinta. La longitud libre de la cinta es 2 ft, y el movimiento tiene lugar sobre un plano horizontal liso. ¿A qué distancia de la articulación fija pasa la bola?

#### SOLUCIÓN

Como la fuerza de la cinta elástica sobre la bola pasa por el punto  $O$ , el momento angular respecto a  $O$  se conserva. Por tanto,  $(mv_O)d = (mv)d$ . O sea,  $vd = 15$ . Además,  $U = \Delta T$ , o sea,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}k(s^2 - s_0^2) &= \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) \\ -\frac{1}{2}4(0^2 - 1^2) &= \frac{1}{2}\frac{1}{2g}(v^2 - 5^2) \quad v = 16,77 \text{ ft/s} \end{aligned}$$

Sustituyendo en  $vd = 15$ , da  $d = 0,89 \text{ ft}$ .

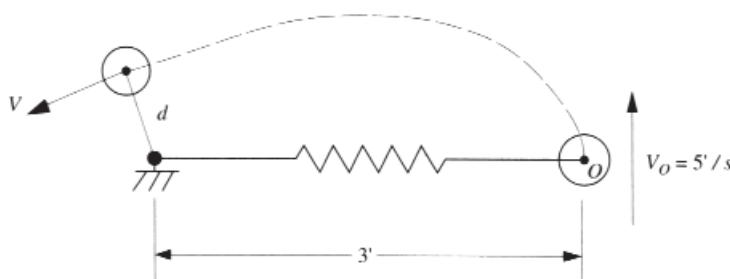


Figura 18.39

### Problemas propuestos

---

- 18.53.** En el Problema 18.6, demostrar que tomando como centro de momentos el punto más alto resulta  $2PR = (d/dt)(4mR^2\omega)$ , que no concuerda con los resultados obtenidos en ese problema. [No debe concordar porque el punto más alto no cumple ninguna de las condiciones que la ecuación (9) exige al punto  $O$ .]
- 18.54.** Una masa de 50 kg cae libremente desde el reposo durante 4 s. Calcular su momento lineal en ese instante. *Resp.*  $1960 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 1960 \text{ N} \cdot \text{s}$
- 18.55.** La maza de un martinet de hinca de pilotes, que pesa 1000 lb, se deja caer desde una altura de 25 ft. Si el tiempo necesario para que se detenga la máquina es 1/20 s, hallar la fuerza media que actúa durante ese tiempo. *Resp.*  $F_m = 25.000 \text{ lb}$
- 18.56.** Se lanza hacia arriba un objeto con una celeridad inicial de 15 m/s. Calcular el tiempo necesario para que adquiera una celeridad descendente de 6 m/s. *Resp.* 2,14 s
- 18.57.** Un cuerpo de 50 lb se proyecta hacia arriba por un plano inclinado  $30^\circ$  con una celeridad inicial de 20 ft/s. Si el coeficiente de rozamiento es 0,25, hallar el tiempo requerido para que su celeridad sea de 10 ft/s hacia arriba. *Resp.* 0,433 s
- 18.58.** Un esfera de 2000 lb con un diámetro de 10 ft gira alrededor de un diámetro a 600 rpm. ¿Qué momento de giro la detiene en 3 min? *Resp.*  $T = 216 \text{ lb}\cdot\text{ft}$
- 18.59.** Un bloque que pesa 120 lb descansa sobre un suelo horizontal. Sobre él actúa una fuerza horizontal que varía desde cero de acuerdo con  $F = 15t$ . Si esa fuerza actúa durante 10 s, ¿qué celeridad adquiere el bloque? Se supone que el coeficiente de rozamiento estático y cinético es 0,25. *Resp.* 129 ft/s
- 18.60.** El módulo de una fuerza aplicada tangencialmente al perímetro de una polea de 1200 mm de diámetro varía de acuerdo con  $F = 0,03t$ . Hallar el impulso angular de la fuerza respecto al eje de rotación durante el intervalo 0 a 35 s. (*Sugerencia* Emplear la definición integral de impulso angular.) *Resp.* 11,0 N · s · m
- 18.61.** Un disco de 300 lb que gira a 1000 rpm tiene un diámetro de 3 ft. Hallar su momento angular. *Resp.*  $1100 \text{ lb} \cdot \text{s} \cdot \text{ft}$
- 18.62.** Un plomo de masa  $m$  describe un círculo de radio  $R$  sobre un plano horizontal liso bajo el vínculo de un hilo que pasa por un orificio  $O$  del plano, tal como se muestra en la Figura 18.40. Si la celeridad angular del plomo es  $\omega_1$  cuando el radio es  $R$ , ¿cuál es la celeridad angular si se tira del hilo desde abajo hasta que el radio de la trayectoria sea  $\frac{1}{2}R$ ? Hallar la relación entre las tensiones inicial y final del hilo. *Resp.* 8
- 18.63.** Un disco de 12 kg de 600 mm de radio de giro está sometido a un par de momento  $M = 2t \text{ m}\cdot\text{N}$ . Hallar su celeridad angular a los 2 s de ponerse en movimiento. Se supone que no hay rozamiento en los cojinetes. *Resp.*  $\omega = 0,93 \text{ rad/s}$
- 18.64.** Sobre un bloque de 20 lb actúa una fuerza horizontal  $P$  que varía según la gráfica de la Figura 18.41. El bloque parte del reposo sobre un superficie horizontal lisa. ¿Cuáles son su posición y su velocidad a los 7 s?  
*Resp.*  $v = 33,8 \text{ ft/s}$ ,  $s = 134 \text{ ft}$

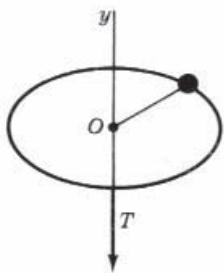


Figura 18.40

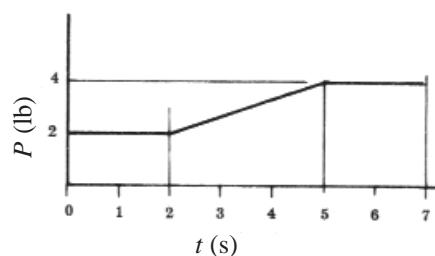


Figura 18.41

- 18.65.** Un rotor homogéneo de 12 lb con un radio de giro de 1,2 ft se para en 85 s desde una celeridad de 180 rpm. ¿Cuál es el momento del par de frotamiento que lo detiene?

*Resp.*  $T = 0,119 \text{ lb}\cdot\text{ft}$

- 18.66.** Las dos masas de la Figura 18.42 están unidas por una cuerda inextensible liviana que pasa por un cilindro homogéneo de 4 kg con un diámetro de 1200 mm. ¿Cuánto tarda la masa de 7 kg en adquirir una celeridad de 2 m/s partiendo del reposo?

*Resp.*  $t = 1,43 \text{ s}$

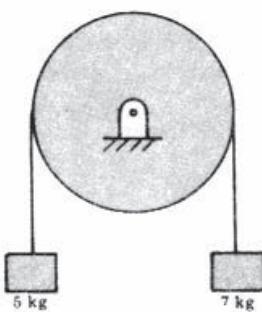


Figura 18.42

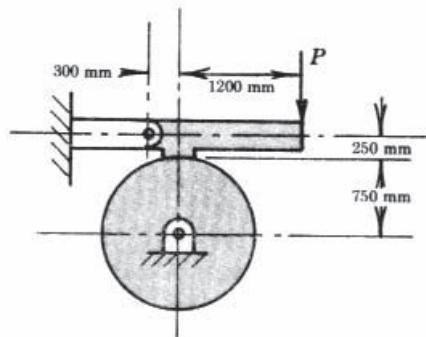


Figura 18.43

- 18.67.** El rotor de 100 kg de la Figura 18.43, de 700 mm de radio de giro, gira en sentido antihorario a 6 rad/s cuando al freno se aplica la fuerza  $P$  indicada. ¿Cuánto vale  $P$  si el rotor se para en 92 s? El coeficiente de rozamiento entre el rotor y el freno es 0,4.

*Resp.*  $P = 1,42 \text{ N}$

- 18.68.** Un torno que gira a 20 rpm está izando una caja de 1 ton unida a él mediante un cable inextensible sin peso, tal como se ilustra en la Figura 18.44. Si se corta la alimentación, ¿cuánto tarda en pararse la caja? Se supone que no hay rozamiento en los cojinetes.

*Resp.*  $t = 0,172 \text{ s}$

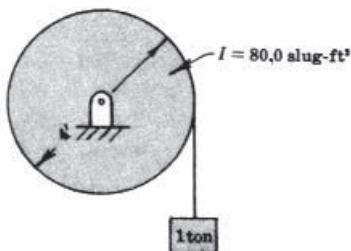


Figura 18.44

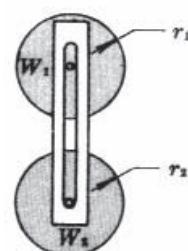


Figura 18.45

- 18.69.** Dos discos homogéneos de pesos  $W_1$  y  $W_2$ , y radios  $r_1$  y  $r_2$ , pueden girar libremente sobre cojinetes sin rozamiento en el bastidor vertical fijo que se ilustra en la Figura 18.45. El disco superior  $W_1$  gira con una velocidad angular horaria constante  $\omega$  cuando se deja caer sobre el disco inferior  $W_2$ . Suponiendo que el coeficiente de rozamiento  $\mu$  sea constante, hallar el tiempo que transcurre hasta que cesa el resbalamiento. ¿Cuáles son las velocidades angulares en ese instante?

$$\text{Resp.} \quad t = \frac{r_1 \omega}{2\mu g(1 + W_1/W_2)},$$

$$\omega_1 = \frac{\omega}{1 + W_2/W_1} \quad (\curvearrowleft), \quad \omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \left( \frac{\omega}{1 + W_2/W_1} \right) \quad (\curvearrowright)$$

- 18.70.** Un árbol que gira sobre dos cojinetes soporta un rotor de 320 slug·ft<sup>2</sup>. El rozamiento en los cojinetes crea un momento resistente de 250 lb·in. Al cortarse la alimentación, el rotor baja a 180 rpm en 150 s. ¿Cuál era su celeridad original? *Resp.* 273 rpm

- 18.71.** Un ventilador de mesa de masa  $m$  descansa sobre un tablero horizontal. Entre éste y el ventilador el coeficiente de rozamiento es  $\mu$ . Sea  $A$  el área del chorro de aire que atraviesa el ventilador y sea  $\Delta$  la densidad del aire. Si es  $v$  la velocidad del aire corriente abajo, deducir la velocidad teórica máxima para que el ventilador no deslice sobre el tablero de la mesa.

$$\text{Resp.} \quad v = (\sqrt{\mu mg}) / A\delta$$

- 18.72.** Por una boquilla de 4 in de diámetro mana agua a 60 ft/s. Hallar la reacción de la boquilla contra sus soportes. *Resp.* 610 lb

- 18.73.** Un chorro de agua de 50 mm de diámetro ejerce una fuerza de 1200 N sobre un álate plano normal a la corriente. ¿Cuál es la velocidad del chorro en la boquilla?

$$\text{Resp.} \quad 24,7 \text{ m/s}$$

- 18.74.** Por una boquilla de 25 mm de diámetro mana un chorro de agua a 30 m/s. Hallar la fuerza total que sufre un álate curvo circular que desvía 45° la dirección del chorro. No hay rozamientos.

$$\text{Resp.} \quad 338 \text{ N}$$

- 18.75.** Un chorro de agua abandona una boquilla con una celeridad de 30 ft/s. Incide en ángulo recto contra una placa vertical inmovilizada por una fuerza horizontal de 85 lb. ¿Cuál es el diámetro de la boquilla? *Resp.* 2,99 in

- 18.76.** La fuerza que sufre un álate curvo que desvía 45° la dirección de un chorro de agua es 450 lb. Si la celeridad del chorro en la boquilla es 80 ft/s, calcular del diámetro de la boquilla.

$$\text{Resp.} \quad 2,95 \text{ in}$$

- 18.77.** En la Figura 18.46, el álate fijo escinde en dos partes iguales la corriente de agua de 2700 mm<sup>2</sup> de sección y que se mueve horizontalmente a 30 m/s. Suponiendo ausencia de rozamiento entre el agua y el álate, hallar la fuerza del agua sobre el álate.

$$\text{Resp.} \quad P_x = 4150 \text{ N} \quad (\rightarrow)$$

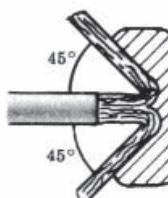


Figura 18.46

- 18.78.** En el problema anterior, se supone que la corriente se escinde de modo que dos tercios sale hacia la parte superior del álabe y un tercio, hacia la parte inferior. Hallar la reacción del agua sobre el álabe. *Resp.*  $P_x = 4150 \text{ N} (\rightarrow)$ ,  $P_y = 573 \text{ N} (\uparrow)$

- 18.79.** Una boquilla de  $1700 \text{ mm}^2$  de sección descarga una corriente de agua horizontal a  $25 \text{ m/s}$  contra una placa vertical fija, tal como se muestra en la Figura 18.47. ¿Qué fuerza sufre la placa? *Resp.*  $1060 \text{ N} (\rightarrow)$

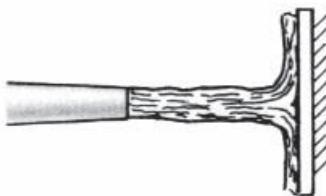


Figura 18.47

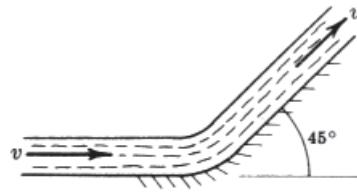


Figura 18.48

- 18.80.** En la Figura 18.48 se representa una corriente de agua de  $3 \text{ in}^2$  de sección que incide a  $30 \text{ ft/s}$  sobre un álabe curvo estacionario. Despreciando el rozamiento, hallar las componentes horizontales de la fuerza que el álabe ejerce sobre la corriente.

*Resp.*  $P_x = 10,7 \text{ lb} (\leftarrow)$ ,  $P_y = 25,7 \text{ lb} (\uparrow)$ .

- 18.81.** De una boquilla de  $4 \text{ in}$  de diámetro mana hacia la derecha un chorro de agua horizontal a  $100 \text{ ft/s}$ . Hallar la fuerza que ejerce sobre un álabe curvo que lo desvía  $120^\circ$ .

*Resp.*  $F_x = 2540 \text{ lb} (\leftarrow)$ ,  $F_y = 1460 \text{ lb} (\uparrow)$

- 18.82.** Dos discos homogéneos deslizantes *A* y *B* están montados en el mismo árbol. El disco *A*, en reposo, tiene una masa de  $50 \text{ kg}$  y mide  $1000 \text{ mm}$  de diámetro y  $50 \text{ mm}$  de espesor. El disco *B*, que gira en sentido horario a  $600 \text{ rpm}$ , tiene una masa de  $100 \text{ kg}$  y mide  $1000 \text{ mm}$  de diámetro y  $100 \text{ mm}$  de espesor. Si se acoplan de modo que giren juntos, ¿cuál es la celeridad angular común?

*Resp.*  $400 \text{ rpm}$

- 18.83.** En el Problema 18.82, ¿qué porcentaje de energía cinética pierde el sistema a causa del acoplamiento de los discos? *Resp.*  $33,3\%$

- 18.84.** Un niño de  $70 \text{ lb}$  está de pie en una barca inicialmente en reposo. Si salta horizontalmente con una velocidad de  $6 \text{ ft/s}$  relativa a la barca, hallar la velocidad de ésta. *Resp.*  $2,47 \text{ ft/s}$

- 18.85.** Tras una inundación, una cabra de  $18 \text{ kg}$  se encuentra a la deriva sobre un extremo de un tronco de  $25 \text{ kg}$  de masa y  $2 \text{ m}$  de largo. Cuando el otro extremo toca la orilla, el animal maniobra para llegar a ese extremo. Cuando llegue a éste, ¿a qué distancia estará el mismo de la orilla? Se supone que el tronco está perpendicular a la orilla y que el agua está en calma después de la tormenta. *Resp.*  $0,837 \text{ m}$

- 18.86.** Desde un fusil de  $14 \text{ lb}$  se dispara un bala de  $0,2 \text{ lb}$  con una velocidad en boca de  $1000 \text{ ft/s}$ . ¿Con qué celeridad retrocede el arma? *Resp.*  $14,3 \text{ ft/s}$

- 18.87.** Un cañón de  $50 \text{ Mg}$  dispara un proyectil de  $500 \text{ kg}$ . Si el mecanismo de retroceso ejerce una fuerza constante de  $40 \text{ kN}$  y el arma retrocede  $200 \text{ mm}$ , determinar la velocidad en boca del proyectil. *Resp.*  $179 \text{ m/s}$

- 18.88.** Desde un cañón de  $200.000 \text{ lb}$  se dispara un proyectil de  $600 \text{ lb}$  con una velocidad inicial de  $2000 \text{ ft/s}$ . ¿Cuál es la velocidad de retroceso del arma? *Resp.*  $v_R = 6 \text{ ft/s}$  hacia atrás

- 18.89.** En la Figura 18.49, se muestra una serie de  $n$  bolas iguales sobre una superficie horizontal lisa. Si la bola 1 se mueve con un celeridad  $u$  para chocar con la bola 2, que a su vez choca con la bola 3, etc., y si el coeficiente de restitución en cada impacto es  $e$ , hallar la velocidad de la bola  $n$ -ésima.  
*Resp.*  $v_n = (1 + e)^{n-1}u/2^{n-1}$

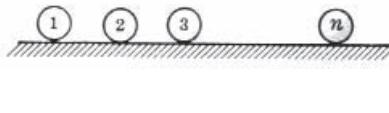


Figura 18.49

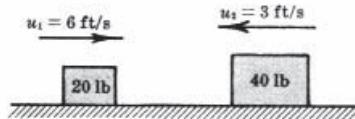


Figura 18.50

- 18.90.** En la Figura 18.50, el bloque de 20 lb se mueve hacia la derecha a 6 ft/s. El boque de 40 lb se mueve hacia la izquierda a 3 ft/s. Suponiendo un coeficiente de restitución de 0,4, hallar las velocidades inmediatamente después del choque.

$$\text{Resp. } v_{20} = 2,4 \text{ ft/s } (\leftarrow), v_{40} = 1,2 \text{ ft/s } (\rightarrow)$$

- 18.91.** Una bola de 3 kg y otra de 5 kg, ambas del mismo diámetro, se mueven a lo largo de la misma recta sobre una superficie horizontal lisa con las velocidades respectivas de +5 y -3 m/s. Hallar sus velocidades tras el choque, si éste es (a) inelástico, (b) elástico y (c) tal que su coeficiente de restitución es 0,4.  
*Resp.* (a) 0, 0; (b) -5, +3; (c) -2, -1,2 m/s

- 18.92.** Un bloque  $A$  de 20 kg que se mueve horizontalmente hacia la derecha a 12 m/s topa con un bloque  $B$  de 16 kg que se mueve horizontalmente hacia la izquierda a 8 m/s. Si es  $e = 0,7$  el coeficiente de restitución, hallar las celeridades de  $A$  y  $B$  inmediatamente tras el choque.

$$\text{Resp. } v_A = 3,11 \text{ m/s } (\leftarrow), v_B = 10,9 \text{ m/s } (\rightarrow)$$

- 18.93.** Un vagón de 2000 lb que viaja a 30 mi/h alcanza a un vagón de 1500 lb que viaja a 15 mi/h en el mismo sentido. ¿Cuál es la velocidad común de ambos tras acoplarse? ¿Cuánta energía cinética se pierde?  
*Resp.* 34,6 ft/s, 6300 ft·lb

- 18.94.** Una bola  $A$  de 30 kg que se mueve hacia la derecha a 30 m/s choca frontalmente con una bola  $B$  de 10 kg que se mueve a 7 m/s en sentido contrario. Si el coeficiente de restitución vale 0,6, hallar las celeridades de las bolas tras el choque.

$$\text{Resp. } v_A = 15,2 \text{ m/s } (\rightarrow), v_B = 34,7 \text{ m/s } (\rightarrow)$$

- 18.95.** Partiendo del reposo, una bola cae desde 5 m de altura sobre un plano liso inclinado 30°. Si  $e = 0,5$ , ¿hasta qué altura rebota?  
*Resp.*  $h = 0,08 \text{ m}$

- 18.96.** Una bola cae 6 m partiendo del reposo. Golpea en un plano horizontal y rebota hasta una altura de 5 m. Hallar el coeficiente de restitución.  
*Resp.*  $e = 0,91$

- 18.97.** Una bola de vidrio se deja caer sobre un suelo horizontal liso, desde el que rebota hasta una altura de 9 m. En el segundo rebote, alcanza 6 m de altura. ¿Cuál es el coeficiente de restitución entre el vidrio y el suelo?  
*Resp.*  $e = 0,82$

- 18.98.** La Figura 18.51 ilustra la caída, desde una altura de 0,5 ft de un bloque de 4 lb de peso sobre una plataforma montada sobre muelles cuya constante combinada es  $k = 50 \text{ lb/ft}$ . Si el choque es completamente plástico ( $e = 0$ ), hallar la distancia máxima que desciende la plataforma desde su posición inicial.  
*Resp.* 3,90 in

- 18.99.** En la Figura 18.52, la masa  $M$  se mueve con una celeridad  $u$  cuando se tensa la cuerda. ¿Qué celeridad adquiere la masa  $m$  si el coeficiente de restitución es  $e$ ? Las masas están sobre un plano horizontal liso.  
*Resp.*  $v = Mu(1 + e)/(M + m)$

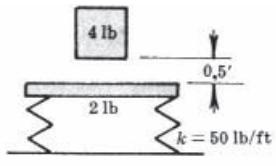


Figura 18.51



Figura 18.52

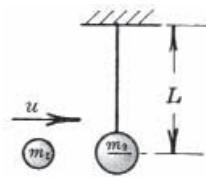


Figura 18.53

- 18.100.** Una masa  $m_1$  que se mueve con una celeridad  $u$  golpea una masa estacionaria  $m_2$  suspendida de un hilo de longitud  $L$ , tal como se muestra en la Figura 18.53. Si el coeficiente de restitución es  $e$ , hallar (a) la celeridad de cada masa inmediatamente después del choque y (b) la altura  $h$  a la que se eleva la masa  $m_2$ .

$$\text{Resp. (a)} \quad v_1 = u \frac{m_1 - em_2}{m_1 - m_2}, \quad v_2 = u \frac{m_1(1+e)}{m_1 + m_2}; \quad (b) \quad h = \frac{u^2 m_1^2 (1+e)^2}{(m_1 + m_2)^2 2g}$$

- 18.101.** Una bola de 1 kg recorre el tubo sin rozamiento de la Figura 18.54, cayendo desde una altura de 900 mm. Golpea entonces una bola de 1 kg suspendida de una cuerda de 900 mm. Hallar a qué altura se eleva esta segunda bola (a) si el choque es perfectamente elástico, (b) si el coeficiente de restitución es 0,7.

*Resp.* (a) 900 mm, (b) 650 mm

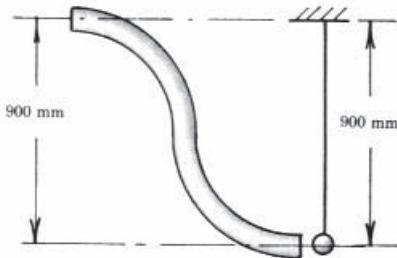


Figura 18.54

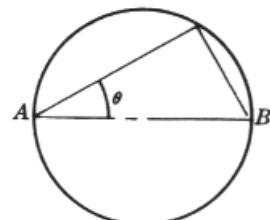


Figura 18.55

- 18.102.** En la Figura 18.55, una bola lanzada desde  $A$  rebota en un muro circular vertical liso y topa en  $B$  con el otro extremo del diámetro que pasa por  $A$ . Demostrar que el coeficiente de restitución es igual al cuadrado de la tangente del ángulo  $\theta$ .

- 18.103.** Una bola de billar que se mueve a 4 m/s golpea un plano horizontal liso bajo un ángulo de  $35^\circ$ , tal como se muestra en la Figura 18.56. Siendo 0,6 el coeficiente de restitución, ¿con qué velocidad rebota la bola?

*Resp.*  $v = 3,55 \text{ m/s}$ ,  $\theta = 22,8^\circ$

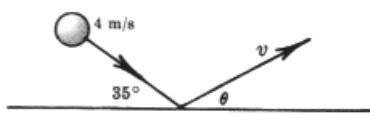


Figura 18.56

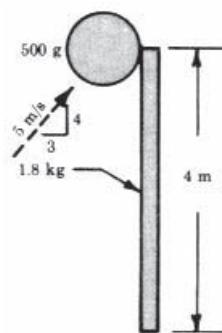


Figura 18.57

- 18.104.** La esfera de 500 g de la Figura 18.57 se mueve sobre un plano horizontal liso con una velocidad de 5 m/s. Golpea el extremo de una barra esbelta homogénea de 1,8 kg de masa y 4 m de longitud. Si la barra está inicialmente en reposo y el coeficiente de restitución vale 0,6, hallar la celeridad de la esfera inmediatamente después del choque.

*Resp.* 4,06 m/s

- 18.105.** Resolver el Problema 18.46 si el choque entre la caja y la baldosa es perfectamente elástico.

*Resp.*  $\omega = 4 \text{ rad/s}$  ( $\curvearrowleft$ )

- 18.106.** Una barra esbelta cae en posición horizontal a 10 ft/s cuando su extremo derecho golpea el borde de una mesa. Si el coeficiente de restitución entre la mesa y la barra es 0,45, hallar la velocidad angular de la barra inmediatamente después del choque. La barra pesa 3 lb y mide 3 ft. *Resp.*  $\omega = 7,25 \text{ rad/s}$  ( $\curvearrowright$ )

- 18.107.** El gran depósito cilíndrico de la Figura 18.58 está lleno de un líquido de peso específico 50 lb/ft<sup>3</sup>. Su peso y el del líquido es de 200 lb y descansa sobre una placa horizontal de hielo con un coeficiente de rozamiento de 0,05. Si de repente se retira un tapón de 4 in situado a 3 ft por debajo de la superficie del líquido, ¿se mueve el depósito? *Resp.* Sí

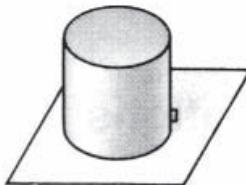


Figura 18.58

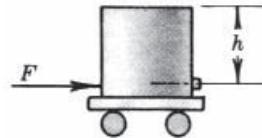


Figura 18.59

- 18.108.** Un depósito de líquido de densidad  $\delta$  descansa sobre un carro. Siendo  $h$  la altura del líquido por encima del orificio (Figura 18.59), ¿qué fuerza horizontal  $F$  hace falta para mantener inmóvil el depósito cuando el líquido empieza a manar por la boquilla? La sección de la boquilla es  $A$ . *Resp.*  $F = 2Ah\delta g$

- 18.109.** Un cohete tiene una masa en vacío de 3000 kg. Si se lanza verticalmente desde la tierra con 7000 kg de combustible, determinar la aceleración inicial. Se supone que los gases se descargan a 2000 m/s con relación al cohete y que el consumo inicial de combustible es 150 kg/s. *Resp.*  $a = 20,2 \text{ m/s}^2$

- 18.110.** El rotor de un giróscopo es un disco homogéneo de 4 in de diámetro que pesa 6 oz. Está montado horizontalmente equidistante de dos cojinetes separados 6 in. Se sabe que gira a 9000 rpm, en sentido horario visto desde atrás, y que el conjunto gira a 2 rad/s en torno a un eje vertical, en sentido horario visto desde arriba. ¿Cuáles son las reacciones de los cojinetes sobre el árbol del rotor?

*Resp.*  $R_{\text{delantera}} = 12,8 \text{ oz}$  ( $\uparrow$ ),  $R_{\text{trasera}} = 6,8 \text{ oz}$  ( $\downarrow$ )

- 18.111.** En la Figura 18.60 se representa un disco macizo de 6 in de diámetro y 2 in de espesor que gira a 6000 rpm. Despreciando la masa del árbol solidario y suponiendo un peso específico de 480 lb/ft<sup>3</sup>, hallar la velocidad de precesión.

*Resp.*  $\omega_p = 1,10 \text{ rad/s}$ , en sentido horario en torno al eje y mirando desde arriba

- 18.112.** Una lanzadera espacial debe acoplarse a un laboratorio espacial que orbita a una altura constante de 400 km. A una altura de 80 km y con una velocidad de 4000 m/s, se para el motor de la lanzadera. ¿Qué ángulo debe formar la velocidad con la vertical, al cortar el motor, si la lanzadera debe llegar tangencialmente a la órbita del laboratorio? *Resp.* 56,8°

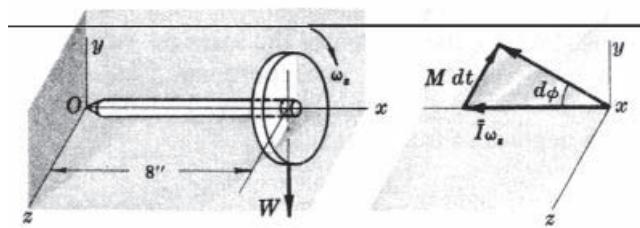


Figura 18.60

- 18.113.** Se lanza un satélite paralelamente a la superficie terrestre desde una altitud de 400 mi y con una velocidad de 20.500 mi/h. Hallar la altitud máxima que alcanza.

*Resp.* 8420 mi

- 18.114.** Repetir el Problema 18.113 si el satélite se lanza hacia el exterior formando un ángulo de  $60^\circ$  con la vertical. *Resp.* 1470 mi



# VIBRACIONES MECÁNICAS

# 19

## 19.1 DEFINICIONES

La *vibración mecánica* de un sistema dotado de masas y elasticidad consiste en un movimiento en torno a la posición de equilibrio del sistema que se repite en un intervalo de tiempo definido.

El *período* es el intervalo de tiempo al cabo del cual la vibración se repite.

*Ciclo* es cada una de las repeticiones del movimiento completo que tiene lugar durante cada período.

*Frecuencia* es el número de ciclos por unidad de tiempo.

Las *vibraciones libres* son las que tienen lugar en un sistema cuando éste no está sometido a ninguna fuerza perturbadora externa de naturaleza periódica.

La *frecuencia natural* es la de un sistema que ejecuta vibraciones libres.

Las *vibraciones forzadas* son las que tienen lugar en un sistema cuando éste está sometido a fuerzas perturbadoras externas de naturaleza periódica.

La *resonancia* tiene lugar cuando la frecuencia de las vibraciones forzadas coincide, o al menos se aproxima, a la frecuencia natural del sistema.

Las *vibraciones transitorias* desaparecen con el tiempo. Las vibraciones libres son de naturaleza transitoria.

Las *vibraciones estacionarias* se repiten a lo largo del tiempo. Las vibraciones forzadas son casos de vibraciones estacionarias.

## 19.2 GRADOS DE LIBERTAD

Los grados de libertad de un sistema dependen del número de variables (coordenadas) necesarias para describir su movimiento.

Por ejemplo, en la Figura 19.1(a), la masa se mueve a consecuencia de la vibración del muelle que se supone confinada en la vertical, y su movimiento puede describirse con una coordenada, por lo que posee un único grado de libertad. La barra suspendida de dos muelles de la Figura 19.1(b) necesita dos variables, tal como se muestra, y por consiguiente posee dos grados de libertad.

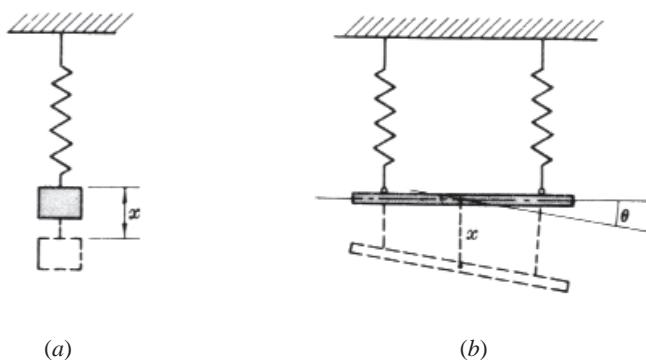


Figura 19.1

## 19.3 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Tal como vimos en la Sección 12.2, el movimiento armónico simple puede representarse mediante una función senoidal o cosenoide del tiempo. Así pues,  $x = X \operatorname{sen} \omega t$  es la ecuación de un movimiento armónico simple. Ésta

podría representar la proyección sobre un diámetro de un vector de longitud  $X$  cuando el extremo de  $X$  describe una trayectoria circular con una velocidad angular constante de  $\omega$  radianes por segundo. Para este movimiento,

- $x$  = longitud de la proyección
- $X$  = longitud del vector giratorio
- $\omega$  = pulsación en rad/s
- $\tau = 2\pi/\omega$  = período en segundos
- $f = \omega/2\pi$  = frecuencia en ciclos por segundo (Hz)

Todos los cuerpos vibran con un movimiento armónico simple o con alguna combinación de movimientos armónicos simples de diferentes frecuencias y amplitudes.

## 19.4 SISTEMAS MULTICOMPONENTE

Un sistema multicomponente se analiza sustituyéndolo por un sistema equivalente de masas, muelles y dispositivos amortiguadores. Las ecuaciones diferenciales de ese sistema idealizado facilitan, al resolverlas, una aproximación a los resultados deseados. Luego, la experiencia práctica sugerirá las modificaciones a introducir para ajustarla al sistema real.

Los problemas que siguen ilustran las vibraciones libres, con y sin amortiguamiento, y las vibraciones forzadas, con y sin amortiguamiento. Sólo se considera el amortiguamiento viscoso (donde la fuerza amortiguadora es proporcional a la velocidad del cuerpo). No obstante, es conveniente señalar la existencia de otros dos tipos de amortiguamiento: (1) el amortiguamiento de Coulomb, que es independiente de la velocidad y aparece cuando el cuerpo desliza sobre superficies secas (y que, por tanto, produce una fuerza proporcional a la fuerza normal entre el cuerpo y la superficie sobre la que desliza), y (2) el amortiguamiento sólido, que se genera a causa de los rozamientos internos en el seno del mismo cuerpo (y que produce una fuerza independiente de la frecuencia y proporcional al esfuerzo máximo inducido en el seno del cuerpo).

## 19.5 UNIDADES

Se tabulan las unidades del sistema tradicional de EE. UU. y del SI a emplear en los problemas de vibraciones mecánicas:

Magnitud	Tradicional EE.UU.	SI
Longitud	in	m
Tiempo	s	s
Velocidad	ft/s o in/s	m/s
Aceleración	ft/s <sup>2</sup> o in/s <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>
Masa	slug	kg
Momento de inercia másico	slug·ft <sup>2</sup> o lb·s <sup>2</sup> ·in	kg · m <sup>2</sup>
Fuerza	lb	N
Constante de un muelle	lb/in	N/mm
Constante de amortiguamiento	lb·s/in	N · s/m

### Problemas resueltos

#### Vibraciones libres lineales

- 19.1.** Una masa  $m$  cuelga de un muelle vertical de constante recuperadora  $k$ . Suponiendo despreciable la masa del muelle, estudiar el movimiento de la masa cuando se suelta a una distancia  $x_0$  por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente  $v_0$ .

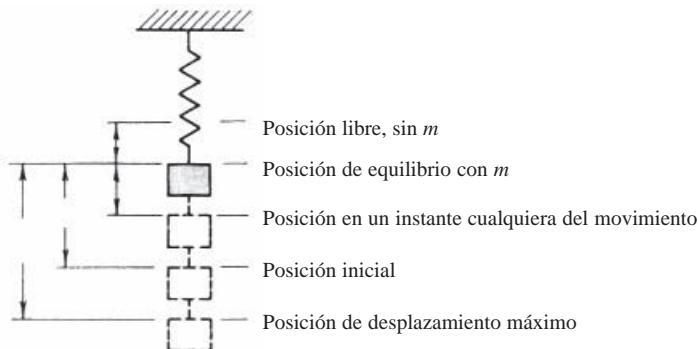


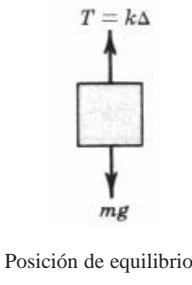
Figura 19.2

**ANÁLISIS**

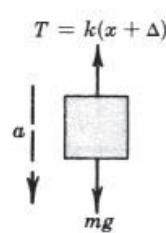
En la Figura 19.2 se ilustran distintas posiciones de la masa  $m$ , con las distancias exageradas a efectos de claridad. El valor  $X$  es la amplitud del movimiento. Por supuesto, la masa también se eleva hasta una altura  $X$  por encima de la posición de equilibrio.

La tensión en el muelle es igual al producto de la constante  $k$  por la longitud que el muelle está alargado o comprimido a partir de su posición libre (o sea, sin  $m$ ). Se ilustran los diagramas de cuerpo libre de la masa para su posición de equilibrio y para la posición a la distancia  $x$  por debajo de la posición de equilibrio. Adviértase que la posición  $x$  de la masa se expresa en todo instante tomando como origen la posición de equilibrio estático.

En la Figura 19.3, no se indica aceleración, pues el sistema está en equilibrio. Por tanto,  $T = k\Delta = mg$  y, consiguientemente,  $\Delta = mg/k$ .



Posición de equilibrio



Posición por debajo de la de equilibrio

Figura 19.3

Figura 19.4

En la Figura 19.4, se toman como positivos los desplazamientos por debajo de la posición de equilibrio. Como se desconoce el sentido de la aceleración, lo suponemos positivo. Entonces, un signo menos significaría que está dirigida hacia arriba. Aplicando las leyes de Newton a ese diagrama de cuerpo libre, se obtiene

$$\sum F_v = ma, \quad \text{o sea,} \quad mg - T = ma$$

Sustituyendo  $T = k(\Delta + x)$  y  $mg = k\Delta$ , resulta  $k\Delta - k\Delta - kx = ma$ . Como  $a = d^2x/dt^2$ , la ecuación de movimiento queda

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Es evidente que cuando  $x$  es positivo (por debajo de la posición de equilibrio), la aceleración (que es entonces negativa) está dirigida hacia arriba. Esto significa que mientras la masa desciende hacia su posición más baja, la aceleración es ascendente, o sea, que la masa está decelerada. Inmediatamente después de llegar al punto más bajo e iniciarse el ascenso, el desplazamiento es aún positivo y la aceleración sigue siendo de signo contrario, es decir, hacia arriba. Por consiguiente, la masa se acelera al subir hacia la posición de equilibrio. Por encima de esta posición, el desplazamiento es negativo y la aceleración está dirigida hacia abajo, o sea, hacia la posición de equilibrio. Por tanto, hasta que llega al punto más alto de su des-

plazamiento, la masa se decelera, y entre el punto más alto y la posición de equilibrio, se acelera. La aceleración está siempre dirigida hacia la posición de equilibrio.

Supóngase que la solución a la anterior ecuación diferencial de segundo orden es de la forma

$$x = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$$

donde  $\omega$  es la pulsación en rad/s.

Para determinar si esa expresión es una solución o no lo es, en la ecuación diferencial introducimos su segunda derivada respecto al tiempo ( $d^2x/dt^2$ ). Véase que

$$\frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t - B\omega \operatorname{sen} \omega t \quad \text{y} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t - B\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x$$

Sustituyendo el valor de  $d^2x/dt^2$  en la ecuación de movimiento resulta  $-\omega^2 x + (k/m)x = 0$ . Por tanto, para que el valor asignado a  $x$  sea una solución,  $\omega$  debe ser igual a  $\sqrt{k/m}$ . Así pues, hasta aquí, la solución es

$$x = A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

Téngase en cuenta que cada ciclo de movimiento abarca intervalos de  $2\pi$  radianes, es decir, cuando  $(\sqrt{k/m})\tau = 2\pi$ , donde  $\tau$  es el período, o tiempo que dura un ciclo. Por tanto,  $\tau = 2\pi\sqrt{m/k}$ . La frecuencia es la inversa del periodo, es decir

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Tal como se señaló antes,  $\Delta = mg/k$ ; por tanto, las fórmulas anteriores pueden también escribirse  $\tau = 2\pi\sqrt{\Delta/g}$  y  $f = (1/2\pi)\sqrt{g/\Delta}$ .

Las constantes  $A$  y  $B$  deben calcularse a partir de las condiciones iniciales del problema. En este caso, se supone que, en el instante  $t = 0$ , es  $x = x_0$  y  $v = v_0$ . Introduciendo esos valores de  $x$  y  $v$  en las expresiones de dichas variables, teniendo cuidado de hacer  $t = 0$  en tales expresiones:

$$x_0 = A \operatorname{sen} (\omega \cdot 0) + B \cos (\omega \cdot 0)$$

$$v_0 = A\omega \cos (\omega \cdot 0) - B\omega \operatorname{sen} (\omega \cdot 0)$$

La primera de estas ecuaciones da  $B = x_0$ , y la segunda da  $A = v_0/\omega$ . Por tanto, la solución es

$$x = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + x_0 \cos \omega t$$

La solución puede escribirse en la forma  $x = X \cos (\omega t - \phi)$ , donde la amplitud es  $X = \sqrt{(v_0/\omega)^2 + (x_0)^2}$  y el ángulo de fase es  $\phi = \operatorname{artg}(v_0/x_0\omega)$ . Nótese que  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

Este problema es el ejemplo de vibraciones libres más comúnmente propuesto, en el que las vibraciones proseguirían indefinidamente una vez puesta en movimiento la masa. Como para describir el movimiento basta con una variable, el sistema posee un grado de libertad. Podemos ahora resolver muchos problemas más reduciéndolos a este tipo. En otras palabras, sustituyendo la suspensión elástica real por un muelle equivalente sujeto al cuerpo vibrante.

- 19.2** Una máquina de 60 lb está montada sobre una plataforma de 80 lb, que a su vez descansa sobre cuatro muelles. Suponiendo que cada uno de éstos soporta un cuarto de la carga, hallar el período de vibración. La constante recuperadora de cada muelle es 18 lb/in.

#### SOLUCIÓN

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kg}{W}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(18)(386)}{35}} = 2,24 \text{ cps}$$

Adviértase que  $g$  se expresa en  $\text{in/s}^2$  porque  $k$  está dada en  $\text{lb/in}$ . El período es  $1/f = 0,45 \text{ s}$ .

**19.3.** Resolver el Problema 19.1 mediante el teorema de conservación de la energía.

**SOLUCIÓN**

El teorema afirma que la suma de la energía potencial  $V$  y la energía cinética  $T$  del sistema es constante si el sistema es conservativo (en este punto se supone que no hay rozamiento ni amortiguación).

A una distancia cualquiera  $x$  por debajo de la posición de equilibrio, la tensión en el muelle es  $mg + kx$ . Por tanto, la energía potencia  $V_s$  del muelle es numéricamente igual al trabajo que efectúa esa fuerza alargando el muelle:

$$V_s = \int_0^x (mg + kx) dx = mgx + \frac{1}{2}kx^2$$

Durante ese mismo desplazamiento  $x$ , la masa pierde energía potencial en una cuantía  $mgx$ . O sea, la energía potencia total del sistema será  $\frac{1}{2}kx^2$ .

A una distancia  $x$  por debajo de la posición de equilibrio, la energía cinética  $T$  de la masa, que se mueve a la velocidad  $dx/dt$ , es  $T = \frac{1}{2}m(dx/dt)^2$ . Como, por hipótesis, el muelle carece de masa, su energía cinética es nula. Por consiguiente, la energía cinética del sistema es sólo la de la masa.

Según el teorema de conservación de la energía,  $T + V = \text{constante}$ , o bien,  $d/dt(T + V) = 0$ . Entonces,

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right] = 0, \quad \text{o sea,} \quad \frac{1}{2}m(2)\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}k2x\frac{dx}{dt} = 0$$

Y así resulta la misma ecuación diferencial que se obtuvo en el Problema 19.1:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Por tanto, la pulsación es

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ rad/s} \quad \text{y la frecuencia es} \quad \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ Hz}$$

Nótese que en una ecuación diferencial lineal del tipo tratado con un coeficiente de 1 en el término de segundo orden, la pulsación  $\omega$  en rad/s es igual a la raíz cuadrada del coeficiente del término en  $x$ . ( $\omega = 2\pi f$ , donde  $\omega$  son rad/s y  $f$  son hertz.)

**19.4.** Una pequeña masa  $m$  está sujetada a un alambre vertical sometido a una tensión  $T$ , tal como se muestra en la Figura 19.5. ¿Cuál es la frecuencia natural de vibración de la masa cuando se la desplaza levemente a un lado y luego se suelta?

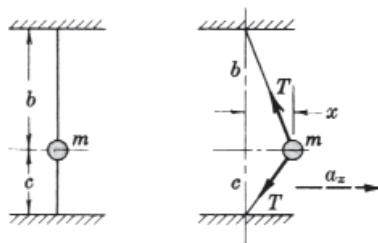


Figura 19.5

**SOLUCIÓN**

En algún instante durante el movimiento, la masa  $m$  se encuentra a la distancia  $x$  a la derecha de la posición de equilibrio.

En la dirección horizontal, la masa en cuestión está sometida a las correspondientes componentes de las dos tensiones  $T$  que se indican. Para *pequeños* desplazamientos, esas componentes  $x$  de las tensiones son  $Tx/b$  y  $Tx/c$ , ambas actuando hacia la izquierda, o sea, en sentido negativo, si suponemos positivo el sentido hacia la derecha. Por tanto, la ecuación diferencial de movimiento es

$$-\frac{Tx}{c} - \frac{Tx}{b} = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \text{o sea,} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{m} \left( \frac{T}{c} + \frac{T}{b} \right) x = 0$$

Adviértase que esta ecuación diferencial es por completo similar, salvo por el coeficiente del término en  $x$ , a la obtenida para el muelle. Por tanto, tal como se indicó en el Problema 19.3, la frecuencia es

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{T}{m} \left( \frac{b+c}{bc} \right)} \text{ Hz}$$

- 19.5** En la Figura 19.6 se ilustra un cilindro flotante. Su sección transversal es  $A$  y su masa es  $m$ . ¿Con qué frecuencia oscila si se le hunde levemente y luego se suelta? La densidad del líquido es  $\delta$ . Se desprecian los efectos amortiguadores del líquido, así como los efectos de inercia de su movimiento.

#### SOLUCIÓN

Cuando el cilindro está a una distancia  $x$  por debajo de su posición de equilibrio, está sometido a un empuje hidrostático de valor igual al peso del líquido que desplaza, situación exactamente análoga a la del muelle del Problema 19.1. Aplicando las leyes de Newton, la fuerza no equilibrada, dirigida hacia arriba para un desplazamiento hacia abajo, se iguala al producto de la masa por la aceleración. Suponiendo positivos los desplazamientos descendentes, la ecuación diferencial de movimiento será

$$-\delta gAx = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \text{o sea,} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\delta gA}{m} x = 0$$

Así pues, la frecuencia es

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\delta ga}{m}} \text{ Hz}$$

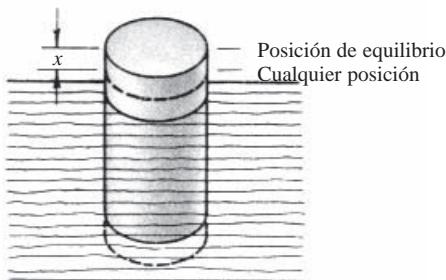


Figura 19.6

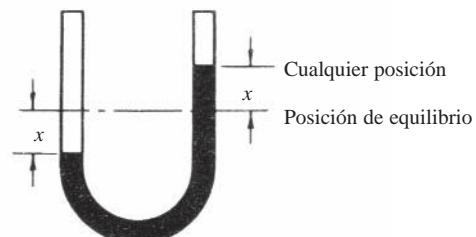


Figura 19.7

- 19.6.** El manómetro de longitud total  $l$  de la Figura 19.7 encierra un líquido de densidad  $\delta$ . Un brusco aumento de la presión en una rama empuja al líquido hacia abajo. Al desaparecer la presión, el líquido oscila. Despreciando el amortiguamiento por rozamiento, ¿cuál es la frecuencia de oscilación?

#### SOLUCIÓN

Supongamos que el líquido está a una distancia  $x$  por debajo de la posición de equilibrio en la columna izquierda y, por supuesto, a una distancia  $x$  por encima de la posición de equilibrio en la columna derecha.

La fuerza no contrarrestada tendente a restaurar el equilibrio es la fuerza gravitatoria sobre una columna de líquido de altura  $2x$ . Esa fuerza es  $2xA\delta g$ , donde  $A$  es el área de la sección transversal del líquido. La masa total del líquido en movimiento es  $lA\delta$ . Según la ley de Newton,

$$-2xA\delta g = lA\delta \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \text{o sea,} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{l} x = 0$$

$$\text{y} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}} \text{ Hz}$$

Nótese que  $f$  es independiente de la densidad del líquido y del área de la sección. Las unidades de  $g$  y  $l$  deben ser ambas del SI o del sistema tradicional de EE. UU.

- 19.7.** Hallar la frecuencia natural no amortiguada del sistema de la Figura 19.8. Se supone que la barra carece de masa y que el muelle inferior está unido a la barra a distancias iguales de los puntos de sujeción de los dos muelles superiores. Las constantes de los muelles son las indicadas.

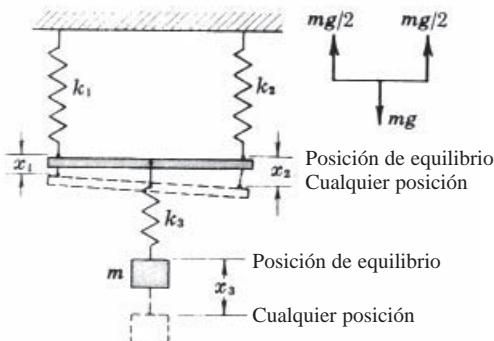


Figura 19.8

**SOLUCIÓN**

El desplazamiento estático total  $\Delta$  de la masa  $m$  es igual al alargamiento  $x_3$  del muelle  $k_3$  más el valor medio de  $x_1$  y  $x_2$ , que son los alargamientos de los muelles  $k_1$  y  $k_2$ , respectivamente.

Este problema puede resolverse sustituyendo ese valor de  $\Delta$  en la expresión  $f = (1/2\pi)\sqrt{g/\Delta}$  (véase el Problema 19.1). Adviértase que por el muelle  $k_3$  se transmite toda la fuerza gravitatoria  $mg$ , mientras que a través de cada muelle  $k_1$  y  $k_2$  se transmite al techo una fuerza  $\frac{1}{2}mg$ . Esto se comprueba sin más que considerar el diagrama de cuerpo libre representado en la parte derecha de la figura. Por tanto,

$$x_3 = \frac{mg}{k_3} \quad x_2 = \frac{\frac{1}{2}mg}{k_2} \quad x_1 = \frac{\frac{1}{2}mg}{k_1}$$

$$\text{y} \quad \Delta = x_3 + \frac{1}{2}(x_2 + x_1) = mg \left( \frac{4k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3}{4k_1k_2k_3} \right)$$

$$\text{Sustituyendo,} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4k_1k_2k_3}{m(4k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3)}}$$

- 19.8.** En la Figura 19.9, la masa  $m$  cuelga a través del muelle  $k_2$  del extremo de una viga rígida sin masa de longitud  $l$  y sujetada a la estructura por su extremo izquierdo. Además, se mantiene en posición horizontal merced a un muelle  $k_1$  sujeto a la estructura tal como se muestra. ¿Cuál es la frecuencia natural  $f$  del sistema?

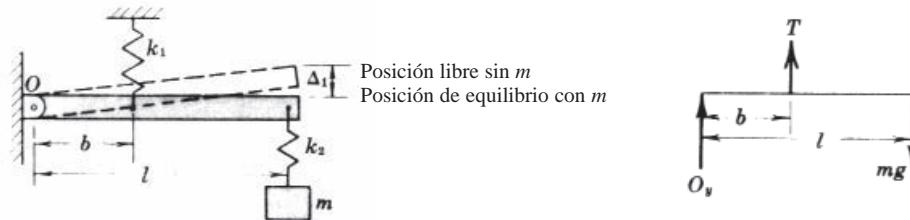


Figura 19.9

**SOLUCIÓN**

La posición horizontal es el estado de equilibrio. Hay que hallar el desplazamiento estático  $\Delta_1$  del extremo de la viga medido desde la posición original en ausencia de carga. En el diagrama de cuerpo libre de la viga para la posición de equilibrio, nótese que la tensión en el muelle  $k_1$  debe ser  $T = (l/b)mg$  para que la viga se mantenga en equilibrio. (Compruébese tomando momentos respecto a  $O$ .) Por tanto, bajo esa tensión,

el muelle  $k_1$  sufre un alargamiento  $mgl/bk_1$ . Si el punto de la viga a una distancia  $b$  sufre ese desplazamiento,  $mgl/bk_1$ , el desplazamiento del extremo derecho será (por semejanza de triángulos)

$$\Delta_1 = \frac{l}{b} \frac{mgl}{bk_1} = \frac{mg}{k_1} \left( \frac{l}{b} \right)^2$$

El desplazamiento estático total  $\Delta$  de  $m$  será igual a la suma de  $\Delta_1$  más el alargamiento del muelle  $k_2$  que transmite la fuerza  $mg$  a la viga. Entonces,

$$\Delta = \frac{mg}{k_2} + \left( \frac{l}{b} \right)^2 \frac{mg}{k_1} = mg \left( \frac{k_1 + (l/b)^2 k_2}{k_1 k_2} \right)$$

$$\text{y } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m[k_1 + (l/b)^2 k_2]}} \text{ Hz}$$

### Vibraciones libres angulares

- 19.9.** ¿Cuál es la frecuencia natural del sistema de la Figura 19.10(a) para oscilaciones de pequeña amplitud?

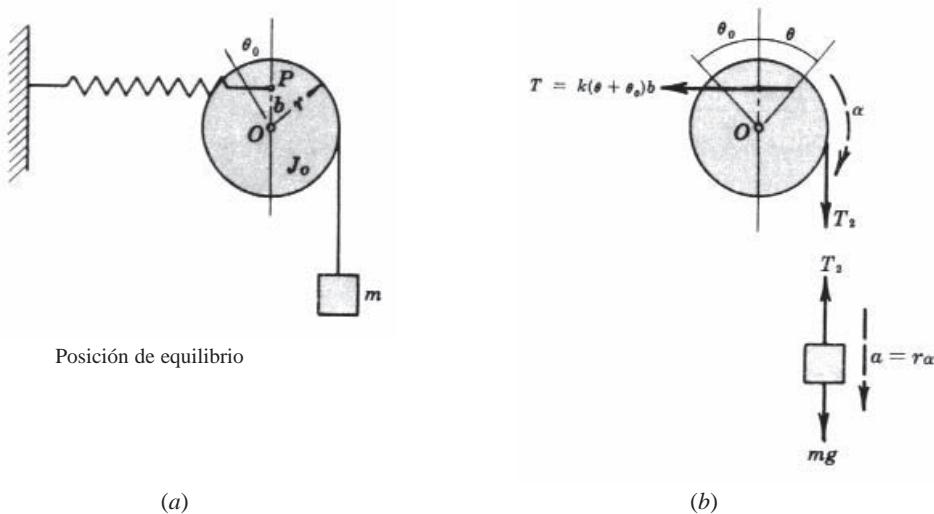


Figura 19.10

### SOLUCIÓN

En la posición de equilibrio de la Figura 19.10(a), el muelle está alargado una longitud  $b\theta_0$ . En cualquier otra posición durante el movimiento, como la ilustrada en la Figura 19.10(b), la polea habrá girado un ángulo adicional  $\theta$  y el alargamiento total del muelle será  $b(\theta + \theta_0)$ . Téngase en cuenta que los ángulos de giro se suponen pequeños. Se supone, además, que los giros de sentido horario son positivos. La aceleración de la masa es  $a = r\alpha$ .

Las ecuaciones de movimiento de la masa y la polea son, respectivamente,

$$\sum F = ma, \quad \text{o sea,} \quad mg - T_2 = mr\alpha \quad (1)$$

$$\sum M_O = J_O \alpha, \quad \text{o sea,} \quad T_2 r - bk(\theta - \theta_0)b = J_O \alpha \quad (2)$$

donde  $J_O$  es el momento de inercia polar centroidal. Despejando  $T_2$  en (1) e introduciendo ese valor en (2), se obtiene

$$(mg - mr\alpha)r - b^2 k \theta - b^2 k \theta_0 = J_O \alpha$$

Pero en la posición de equilibrio, con  $P$  en la vertical de  $O$ ,  $\sum M_O = 0$ , lo que significa que  $(k\theta_0)b = mgr$ . (Adviértase que  $T_2 = mg$  cuando el sistema está en equilibrio.) La ecuación de movimiento de la polea queda

$$(J_o + mr^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + b^2 k \theta = 0, \quad \text{de donde} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{b^2 k}{J_o + mr^2}} \text{ Hz}$$

- 19.10.** Una placa circular homogénea de radio  $R$  y peso  $W$  está suspendida de tres cuerdas de longitud  $l$ , equiespaciadas en círculo, tal como se muestra en la Figura 19.11(a). Hallar la frecuencia natural de las pequeñas oscilaciones de la placa en torno a su eje de simetría vertical.

#### SOLUCIÓN

La tensión en cada cuerda es  $\frac{1}{3}W$ . Si la placa gira un ángulo pequeño  $\theta$ , el punto más bajo de cada cuerda describe un arco de longitud  $r\theta$ , tal como se ilustra en la Figura 19.11(b). La componente horizontal de la tensión es, aproximadamente,  $\frac{1}{3}W \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{3}W(r\theta/l)$ . Entonces, cada una de las tres tensiones produce un momento resistente respecto al eje vertical que vale  $\frac{1}{3}W(r\theta/l)r$ .

La ecuación de momentos respecto al eje de simetría vertical es

$$-3\left(\frac{W}{3}\right)\left(\frac{r\theta}{l}\right)r = \frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)(R^2) \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Esta ecuación queda

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2g}{l} \left(\frac{r^2}{R^2}\right) \theta = 0$$

$$\text{y} \quad f = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r}{R}\right) \sqrt{\frac{2g}{l}} \text{ cps}$$

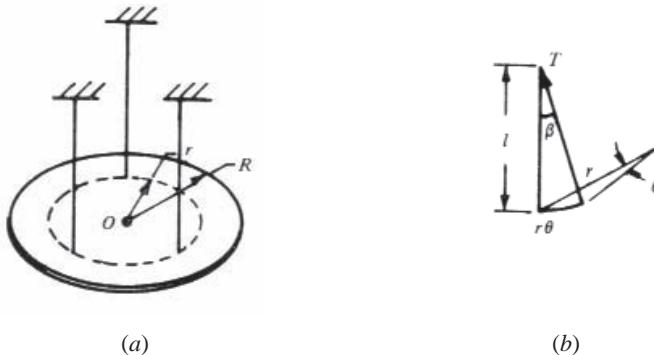


Figura 19.11

- 19.11.** Un disco homogéneo de acero de 200 mm de diámetro y 50 mm de espesor está rígidamente unido a un alambre de acero vertical de 2 mm de diámetro y 900 mm de longitud. ¿Cuál es la frecuencia natural del sistema?

#### SOLUCIÓN

Cuando un alambre se retuerce un ángulo  $\theta$ , aparece un par antagonista  $K\theta$ . Entonces, la ecuación de movimiento del disco será  $-K\theta = J_o\alpha$ . Por tanto,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{K}{J_o} \theta = 0$$

$$\text{y} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{J_o}} \text{ Hz}$$

Según la teoría de resistencia de materiales, el ángulo de torsión del alambre es

$$\theta = \frac{Tl}{\frac{1}{32}\pi d^4 G}$$

donde     $T$  = momento torsor en m·N  
 $l$  = longitud del alambre en metros  
 $G$  = módulo de elasticidad transversal (80 GPa en el acero)  
 $d$  = diámetro en metros

Por tanto, la constante torsional es

$$K = \frac{T}{\theta} = \frac{\pi d^4 G}{32l} = \frac{\pi (0,002)^4 (80 \times 10^9)}{32(0,9)} = 0,14 \text{ m} \cdot \text{N/rad}$$

El momento de inercia del disco es

$$J_o = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2} (\frac{1}{4}\pi)(0,2)^2 (0,05)(7850)(0,1)^2 = 0,062 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Nótese que se ha empleado una densidad del acero de 7850 kg/m<sup>3</sup>.

Finalmente,

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{J_o}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{0,14}{0,062}} = 0,24 \text{ Hz}$$

- 19.12.** Analizar el movimiento de dos grandes masas, de momentos de inercia  $J_1$  y  $J_2$ , unidas mediante un árbol de pequeño diámetro  $d$ , tal como se ilustra en la Figura 19.12.

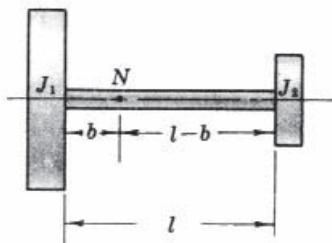


Figura 19.12

#### ANÁLISIS

Si se inmoviliza una masa y la otra se rota y luego se sueltan ambas, el sistema oscila. Como se supone que sobre el sistema no actúa ningún momento torsor externo, el *momento angular* del sistema se conserva. Así pues,  $J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2 = 0$ ; de donde,  $\omega_2 = -(J_1/J_2) \omega_1$ .

Nótese que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  representan las velocidades angulares de  $J_1$  y  $J_2$  que varían durante el ciclo de cada masa.

Como la ecuación anterior revela que las masas giran siempre en sentidos contrarios, habrá una sección del árbol que estará siempre en reposo. Esta sección nodal puede emplearse para estudiar el movimiento de las masas, pues cada una puede tratarse como un péndulo de torsión (véase el Problema 19.11).

El tiempo que tarda una masa en ejecutar su ciclo debe ser igual al tiempo que tarda la otra en ejecutar el suyo. Si no fuera así, una masa acabaría rotando en el mismo sentido que la otra, y ya hemos visto que las masas rotan siempre en sentidos contrarios. Como los períodos son iguales, deben ser iguales los correspondientes números de ciclos por segundo. Así pues,

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1}{J_1}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_2}{J_2}}$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  son las constantes torsionales de los dos tramos en que la sección nodal  $N$  divide al árbol. Por tanto, esas constantes cumplen la relación  $K_1/K_2 = J_1/J_2$ .

Para un árbol cilíndrico,  $K = \pi d^4 G / 32l$ , donde  $d$  es el diámetro,  $G$  es el módulo de elasticidad transversal, y  $l$  es la longitud (véase Problema 19.11). Suponiendo que la sección nodal se halle a una distancia  $b$  de la masa  $J_1$ ,

$$K_1 = \frac{\pi d^4 G}{32b} \quad \text{y} \quad K_2 = \frac{\pi d^4 G}{32(l-b)}$$

Por tanto,  $K_1/K_2 = (l-b)/b = J_1/J_2$ , de donde  $b = J_2 l / (J_1 + J_2)$ . Queda así localizada la sección nodal.

Para el tramo izquierdo,

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1}{J_1}}$$

donde

$$K_1 = \frac{\pi d^4 G}{32b} = \frac{\pi d^4 G(J_1 + J_2)}{32lJ_2}$$

Por consiguiente,

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi d^4 G(J_1 + J_2)}{32lJ_2}}$$

Como el momento polar de inercia de un área circular es  $J = \frac{1}{32}\pi d^4$ , la expresión anterior puede escribirse

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{JG(J_1 + J_2)}{J_1 J_2 l}}$$

Adviértase que  $J_1$  y  $J_2$  se refieren a los momentos polares de inercia *másicos* de los cilindros y  $J$  se refiere al momento de inercia polar *del área* de la sección transversal del árbol.

- 19.13.** Un motor tiene un volante de inercia de 120 kg en cada extremo de un árbol de acero. Se supone que cada volante tiene un radio de giro de 300 mm. El árbol que los conecta mide 600 mm de longitud y 50 mm de diámetro. Hallar la frecuencia natural de las vibraciones de torsión.

#### SOLUCIÓN

El momento de inercia de cada volante es

$$J_v = mr^2 = 120(0,3)^2 = 10,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

El momento de inercia del área de la sección transversal del árbol es

$$J = \frac{1}{32}\pi(0,05)^4 = 6,14 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

Con la fórmula del problema anterior, tenemos

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{JG(J_1 + J_2)}{lJ_1 J_2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6,14 \times 10^{-7}(80 \times 10^9)(10,8 + 10,8)}{0,6(10,8)(10,8)}} = 19,6 \text{ Hz}$$

- 19.14.** Un árbol de acero de 2 in de diámetro y 15 in de longitud está unido por un extremo a un volante de inercia de 300 lb de peso y 6 in de radio de giro, y por el otro extremo, a un rotor de 100 lb de peso y 4 in de radio de giro. ¿Dónde está la sección nodal y cuánto vale la frecuencia natural de las vibraciones de torsión?

#### SOLUCIÓN

Momento de inercia del volante:  $J_v = (W/g)r^2 = (300/386)(6)^2 = 28,0 \text{ lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{in}$

Momento de inercia del rotor:  $J_r = (W/g)r^2 = (100/386)(4)^2 = 4,15 \text{ lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{in}$

Momento de inercia de la sección del árbol:  $J = \frac{1}{32}\pi d^4 = \frac{1}{32}\pi(2)^4 = 1,57 \text{ in}^4$

Según el Problema 19.12, la distancia de la sección nodal al volante es  $b = J_r l / (J_v + J_r) = 1,94 \text{ in}$ .

La frecuencia es

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{JG(J_f + J_r)}{lJ_f J_r}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1,57(12 \times 10^6)(28,0 + 4,15)}{15(4,15)(28,0)}} = 94,1 \text{ cps}$$

- 19.15.** La barra homogénea de 10 lb de la Figura 19.13(a) está articulada en su extremo izquierdo. Su extremo derecho se apoya en un cilindro sin peso que flota en agua, tal como se muestra. La sec-

ción transversal del cilindro tiene un área de  $2 \text{ in}^2$ . Despreciando el efecto amortiguador del agua y el efecto de la inercia del agua al moverse, hallar la frecuencia de oscilación si la barra se desplaza levemente hacia abajo desde su posición (de equilibrio) horizontal.

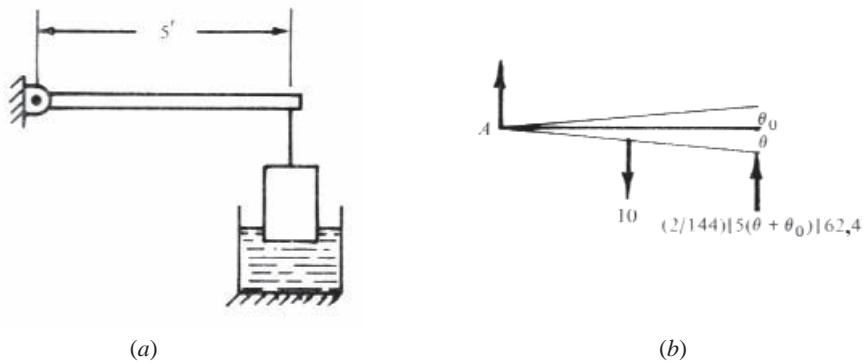


Figura 19.13

**SOLUCIÓN**

En la Figura 19.13(b) la línea de trazo grueso representa la posición de equilibrio. La fuerza sobre el extremo derecho es igual al peso del agua desplazada. Para un ángulo cualquiera  $\theta$ , la ecuación de momentos es

$$\sum M_A = I_A \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

o sea,

$$10 \times 2,5 - \left(\frac{2}{144}\right)[5(\theta + \theta_0)]62,4 \times 5 = \frac{1}{3} \left(\frac{10}{g}\right)(5)^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Sin embargo, en la situación de equilibrio, la suma de los momentos respecto a  $A$  es cero, y, por tanto,

$$10 \times 2,5 - \left(\frac{2}{144}\right)5\theta_0 \times 62,4 \times 5 = 0$$

La ecuación de movimiento es

$$-\left(\frac{2}{144}\right)5\theta \times 62,4 \times 5 = 2,59 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

que se reduce a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 8,37\theta = 0$$

Por tanto,

$$\omega_n = \sqrt{8,37} = 2,89 \text{ rad/s}$$

- 19.16.** Un tacómetro de lengüetas se compone de pequeñas vigas en voladizo con pesos sujetos en sus extremos libres. Si la frecuencia de vibración de una fuerza perturbadora corresponde a la frecuencia de vibración natural de una de las lengüetas, ésta vibra. Al estar calibrada cada lengüeta, es posible determinar inmediatamente la frecuencia de la perturbación. ¿Qué peso calibrado  $W$  debe ponerse en el extremo libre de una lengüeta de acero elástica de 0,05 in de espesor, 0,20 in de ancho y 4,00 de largo para que su frecuencia natural sea 50 Hz? (Figura 19.14.)

**SOLUCIÓN**

Según la teoría que se desarrolla en resistencia de materiales, la flecha estática en el extremo libre de una viga en voladizo en el que hay una masa concentrada  $m$  es  $\Delta = mgl^3/3EI$ , donde  $E$  es el módulo de elasticidad a tracción (o compresión) e  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal respecto al eje neutro. Por tanto,

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3Elg}{Wl^3}} \text{ Hz}$$

donde

$$f = 50 \text{ cps}$$

$$g = 386 \text{ in/s}^2$$

$$E = 30 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$$

$$l = 4,00 \text{ in}$$

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(0,20)(0,05)^3 = 2,08 \times 10^{-6} \text{ in}^4$$

Sustituyendo valores en la ecuación anterior, hallamos  $W = 0,011 \text{ lb}$ .

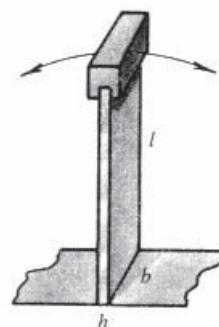


Figura 19.14

### Vibraciones libres en movimientos planos

- 19.17.** Un disco homogéneo de masa  $m$  y radio  $r$  rueda sin deslizar sobre un plano horizontal y está unido a una pared a través de un muelle de constante  $k$  (Figura 19.15). Si se desplaza hacia la derecha y se suelta, deducir la ecuación diferencial de movimiento y hallar la frecuencia de oscilación.

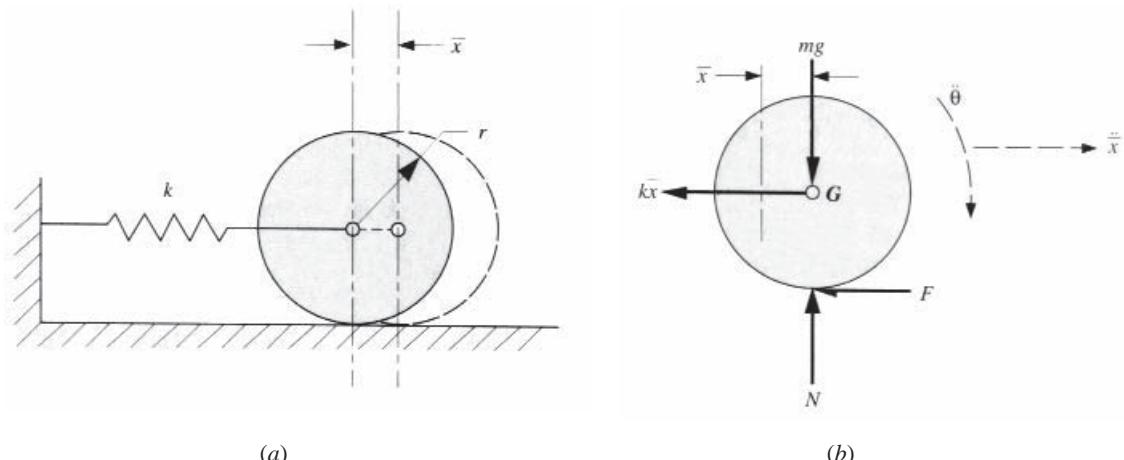


Figura 19.15

### SOLUCIÓN

La Figura 19.15(b) es el diagrama de cuerpo libre del disco. Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_x = -F - k\bar{x} = m\ddot{\bar{x}}$$

$$\sum M_G = rF = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

Si la rodadura es pura,  $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$ .

Sumando las ecuaciones de equilibrio resulta

$$-k\bar{x} = m\ddot{x} + \frac{1}{2}m\ddot{x}$$

Es decir,

$$\ddot{x} + \frac{2}{3}\left(\frac{k}{m}\right)\bar{x} = 0$$

y

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{3m}} \text{ Hz}$$

Otra posibilidad es emplear el teorema de conservación de la energía.

Supongamos que el centro de masas  $G$  se desplaza un distancia  $\bar{x}$  desde la posición de equilibrio. La energía potencial del muelle está dada por

$$V = \int k\bar{x} dx = \frac{1}{2}k\bar{x}^2$$

La energía cinética del disco rodante es

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2$$

Dado que la energía se conserva,  $T + V = \text{constante}$ . Es decir,

$$\frac{d(T+V)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k(\bar{x})^2] = 0$$

$$m\ddot{x}\dot{x} + I_G\ddot{\theta}\dot{\theta} + k\bar{x}\dot{x} = 0$$

Pero

$$\bar{x} = r\theta \quad \dot{x} = r\dot{\theta}, \ddot{x} = r\ddot{\theta} \quad I_G = \frac{1}{2}mr^2$$

de donde

$$m\ddot{x}\dot{x} + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)\left(\frac{\ddot{x}}{r}\right) + k\bar{x}\dot{x} = 0$$

Simplificando resulta

$$\ddot{x} + \frac{2}{3}\left(\frac{k}{m}\right)\bar{x} = 0$$

que es la ecuación buscada.

Por tanto, teniendo en cuenta la observación del final del Problema 19.3,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{3m}} \text{ Hz}$$

### Vibraciones libres con amortiguamiento viscoso

- 19.18.** Una masa  $m$ , suspendida de un muelle de constante  $k$ , está unida a un amortiguador viscoso, tal como se ilustra en la Figura 19.16. La fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad; es decir,  $F = c(dx/dt)$ , donde  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento. Analizar el movimiento en función de los valores de  $c$ .

#### ANÁLISIS

En la Figura 19.16 se reseñan los datos esenciales. En el diagrama de cuerpo libre de la izquierda se indican todas las fuerzas que actúan sobre la masa cuando ésta se halla a una distancia  $x$  por debajo de la posición de equilibrio y moviéndose hacia abajo.

Nótese, como antes, que en la posición de equilibrio  $k\Delta = mg$ . Nótese asimismo que la fuerza de amortiguamiento  $c(dx/dt)$  se opone al movimiento. La ecuación de movimiento ( $\sum F = ma$  para una posición que se supone por debajo de la de equilibrio) es

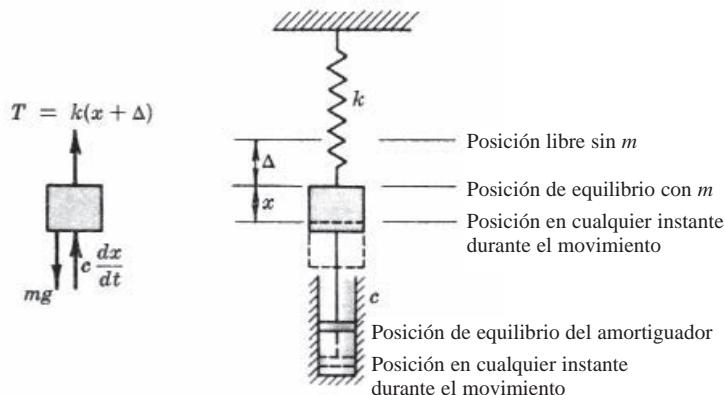


Figura 19.16

$$mg - k(x + \Delta) - c \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \text{o sea,} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Para esta ecuación diferencial, suponemos una solución de la forma  $x = Ae^{st}$ , donde  $A$  y  $s$  son constantes no nulas. Sustituyendo este valor en la ecuación (y teniendo en cuenta que  $dx/dt = Ase^{st}$  y  $d^2x/dt^2 = As^2e^{st}$ ) se obtiene

$$As^2e^{st} + A \frac{c}{m} se^{st} + A \frac{k}{m} e^{st} = 0, \quad \text{o sea,} \quad \left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)e^{st} = 0$$

La solución buscada debe ser tal que se cumpla la ecuación anterior. Como  $e^{st}$  no puede ser cero, debe serlo su coeficiente; es decir,  $s^2 + (c/m)s + k/m = 0$ .

Con la fórmula de la ecuación de segundo grado, las dos raíces de  $s$  son

$$s = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

La solución general es de la forma

$$x = Ae^{\left[\frac{-c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right]t} + Be^{\left[\frac{-c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right]t}$$

El radical puede ser real, imaginario o cero, según el valor del coeficiente de amortiguamiento  $c$ . El valor de  $c$  que hace nulo el radical se llama coeficiente de amortiguamiento crítico  $c_c$ . Se obtiene igualando a cero el radical y es

$$c_c = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n$$

Nótese que  $\omega_n$  es la pulsación natural no amortiguada del sistema.

El cociente del coeficiente de amortiguamiento  $c$  entre el coeficiente de amortiguamiento crítico  $c_c$ , se conoce como índice de amortiguamiento  $d$ . Permite simplificar el análisis del problema.

Multiplicando  $c/2m$  por  $c_c/c_c$  y sustituyendo  $d = c/c_c$  y  $c_c = 2\omega_n$ , se obtiene

$$\frac{c}{2m} = \frac{c}{c_c} \frac{c_c}{2m} = d \frac{2m\omega_n}{2m} = d\omega_n$$

La solución para  $x$  obtenida antes puede escribirse

$$\begin{aligned} x &= Ae^{(-d\omega_n + \sqrt{d^2\omega_n^2 - \omega_n^2})t} + Be^{(-d\omega_n - \sqrt{d^2\omega_n^2 - \omega_n^2})t} \\ &= Ae^{(-d + \sqrt{d^2 - 1})\omega_n t} + Be^{(-d - \sqrt{d^2 - 1})\omega_n t} \end{aligned}$$

Pueden considerarse tres casos, según el valor de  $d$ .

*Caso A:* Con  $d > 1$ , el radical es real y menor que  $d$ , con lo que ambos exponentes son negativos. En este caso se tiene el llamado sobreamortiguamiento, en que  $x$  es igual a la suma de dos exponenciales decrecientes. Cuando  $t = 0$ ,  $x = Ax^0 + Bx^0 = A + B$ . La gráfica de la función revela un movimiento asintótico, debido a que la resistencia por frotamiento es tan elevada que la masa, tras su desplazamiento inicial, retorna muy lentamente hacia su posición de equilibrio sin oscilar (Figura 19.17). Dada la ausencia de período, se dice que la masa ejecuta un movimiento aperiódico.

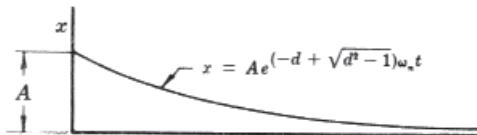


Figura 19.17

*Caso B:* Cuando  $d < 1$  (amortiguamiento débil) es que el radical es imaginario. Haciendo  $i = \sqrt{-1}$ , la solución puede escribirse

$$\begin{aligned} x &= Ae^{(-d+i\sqrt{1-d^2})\omega_n t} + Be^{(-d-i\sqrt{1-d^2})\omega_n t} \\ &= e^{-dt}(Ae^{i\sqrt{1-d^2}\omega_n t} + Be^{-i\sqrt{1-d^2}\omega_n t}) \end{aligned}$$

La suma entre paréntesis puede expresarse en función de una función seno o coseno. Si se hace así, se obtiene  $x = Xe^{-dt} \operatorname{sen}(\sqrt{1-d^2}\omega_n t + \phi)$ , donde  $X \operatorname{sen} \phi$  = desplazamiento en  $t = 0$ , y  $\phi$  = ángulo de fase. Nótese que  $\omega_n$ ,  $d$ ,  $X$  y  $\phi$  son constantes. La gráfica de esta solución (Figura 19.18) muestra una curva seno de amplitud decreciente al estar multiplicada por el factor  $e^{-dt}$ , que disminuye con el tiempo.

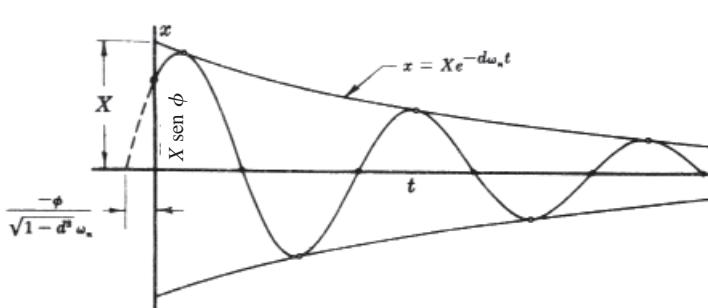


Figura 19.18

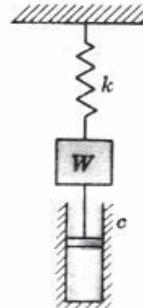


Figura 19.19

*Caso C:* Cuando  $d = 1$  se tiene el llamado amortiguamiento crítico y la solución puede escribirse

$$x = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$$

Aparece  $B$  multiplicada por  $t$  pues, si no, sólo se hallaría una de las dos soluciones. El método se desarrolla en los cursos de ecuaciones diferenciales.

La gráfica es aquí similar a la del caso A.

El movimiento es aperiódico, pero cuando el amortiguamiento es crítico el tiempo de retorno al equilibrio es mínimo.

- 19.19.** En la Figura 19.19, el peso  $W$  está suspendido de un muelle de constante 20 lb/in y conectado a un amortiguador viscoso. La fuerza de amortiguamiento vale 10 lb cuando la velocidad del émbolo del amortiguador es 20 in/s. El peso de  $W$  y el émbolo es de 12 lb. ¿Cuál es la pulsación de las vibraciones amortiguadas?

#### SOLUCIÓN

El coeficiente de amortiguamiento es  $c = \frac{10 \text{ lb}}{20 \text{ in/s}} = 0,5 \text{ lb} \cdot \text{s/in}$

La pulsación natural del sistema no amortiguado (como si se hubiera extraído el líquido del amortiguador) es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{kg}{W}} = \sqrt{\frac{20(386)}{12}} = 25,4 \text{ rad/s}$$

El coeficiente de amortiguamiento crítico (Problema 19.18) es

$$c_c = \frac{2W}{g} \omega_n = \frac{2(12)}{386} (25,4) = 1,58 \text{ lb}\cdot\text{s/in}$$

El índice de amortiguamiento es  $d = c/c_c = 0,5/1,58 = 0,316$ , menor que 1. Según el Problema 19.18, este es un caso de amortiguamiento débil y hay oscilaciones. La solución es de la forma

$$x = Xe^{-d\omega_n t} \sin(\sqrt{1-d^2} \omega_n t + \phi)$$

La pulsación  $\omega_d$  de la vibración amortiguada es el coeficiente de  $t$  en el argumento del seno:

$$\omega_d = \sqrt{1-d^2} \omega_n = \sqrt{1-(0,316)^2} (25,4) = 24,1 \text{ rad/s}$$

Nótese que el período de la vibración amortiguada es  $2\pi/24,1 = 0,26$  s, y que el período del sistema no amortiguado es  $2\pi/25,4 = 0,25$  s.

**19.20.** En el Problema 19.19, hallar la velocidad de amortiguamiento de las oscilaciones.

#### SOLUCIÓN

Esto se expresa de modo adecuado introduciendo un término nuevo, el decremento logarítmico  $\Delta$ , que es el logaritmo natural del cociente entre dos amplitudes sucesivas separadas un ciclo:

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{Xe^{-d\omega_n t} \sin(\sqrt{1-d^2} \omega_n t + \phi)}{Xe^{-d\omega_n(t+\tau)} \sin[\sqrt{1-d^2} \omega_n(t+\tau) + \phi]}$$

El numerador es el valor de  $x$  en el instante  $t$ , mientras que el denominador es el valor de  $x$  en el instante  $t + \tau$ , donde  $\tau$  es el período del movimiento. O sea, esas amplitudes están separadas un ciclo (despreciamos el hecho de que la curva seno sea tangente a su envolvente  $Xe^{-d\omega_n t}$  en un punto levemente distinto al de máxima amplitud).

Ahora tiene que ser  $\sin(\sqrt{1-d^2} \omega_n t + \phi) = \sin[\sqrt{1-d^2} \omega_n(t+\tau) + \phi]$ , ya que las amplitudes se toman separadas un ciclo o  $2\pi$  rad. Por tanto, la expresión anterior en que se definía  $\delta$  se reduce a  $\delta = d\omega_n \tau$ .

En el Problema 19.19, el período es  $\tau = 2\pi/\omega_d = 2\pi/24,1 = 0,261$  s

El decremento logarítmico es  $\delta = d\omega_n \tau = 0,316(25,4)(0,261) = 2,095$ .

El cociente entre dos amplitudes sucesivas es  $e^\delta = e^{2,095} = 8,12$

**19.21.** Formular la ecuación diferencial de movimiento del sistema de la Figura 19.20. Hallar la pulsación natural de las oscilaciones amortiguadas.

#### SOLUCIÓN

Al estudiar las vibraciones lineales, se expresó el desplazamiento de un cuerpo desde su posición de equilibrio como función del tiempo. Cuando el movimiento del cuerpo es de rotación, como en este caso, lo que interesa es expresar la rotación del cuerpo en función del tiempo.

A parte se muestra el diagrama de cuerpo libre para cualquier instante del movimiento. Nótese que si el brazo desciende, la fuerza amortiguadora se opone al movimiento y actúa hacia arriba. El valor de esa fuerza es igual al producto del coeficiente de amortiguamiento por la velocidad del émbolo del amortiguador. Esta velocidad es precisamente la del punto  $B$  de la barra que se halla a la distancia  $b$  de  $O$  y que, por tanto, posee una velocidad lineal igual al producto de  $b$  por la velocidad angular  $d\theta/dt$  de la barra.

La fuerza del muelle es el producto de  $k$  por el alargamiento, que es el desplazamiento del punto  $B$ , y éste vale  $b(\theta_0 + \theta)$ . La fuerza del muelle es  $kb(\theta_0 + \theta)$ .

Se representa también el diagrama de cuerpo libre en el equilibrio. Tomando momentos respecto a  $O$ , resulta  $kb^2\theta_0 = mgl$ . Esta relación simplificará después la ecuación diferencial de movimiento.

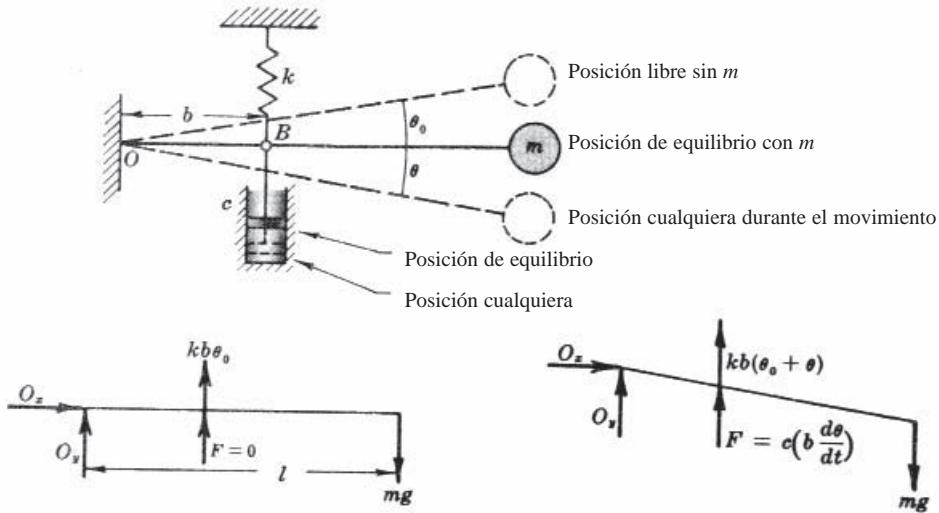


Figura 19.20

La suma de los momentos respecto a  $O$  en el diagrama de cuerpo libre para cualquier instante se iguala a  $I\alpha$ . Pero, para una masa concentrada  $m$ ,  $I_O = ml^2$  y  $\alpha = d^2\theta/dt^2$ . Por consiguiente, la ecuación de movimiento,  $\sum M_O = I\alpha$ , queda

$$+mgl - kb^2(\theta_0 + \theta) - cb^2 \frac{d\theta}{dt} = ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Pero  $kb^2\theta_0 = mgl$ . Entonces, simplificando,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{cb^2}{ml^2} \frac{d\theta}{dt} + \frac{kb^2}{ml^2} \theta = 0$$

Para resolver esta ecuación, hacemos  $\theta = e^{st}$ . Con ello, la ecuación queda (si  $e^{st}$  es una solución)

$$s^2 e^{st} + \frac{cb^2}{ml^2} s e^{st} + \frac{kb^2}{ml^2} e^{st} = 0, \quad \text{o sea,} \quad s = \frac{-cb^2}{2ml^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c^2 b^4}{m^2 l^4} - \frac{4kb^2}{ml^2}}$$

Si el radicando es cero, el amortiguamiento es crítico. Por tanto,

$$c_c = 2 \frac{l}{b} \sqrt{mk}$$

Si hay vibraciones, es que el radicando es negativo y la solución es de la forma

$$\theta = C e^{-\left(\frac{cb^2}{2ml^2}\right)t} \sin\left(\sqrt{-\frac{c^2 b^4}{4m^2 l^4} + \frac{kb^2}{ml^2}} t + \phi\right)$$

donde  $C$  y  $\phi$  están determinados por las condiciones del problema. Compárese esta solución con el caso B del Problema 19.18.

La pulsación  $\omega_d$  de la vibración amortiguada es el coeficiente de  $t$  en el argumento del seno, es decir

$$\omega_d = \sqrt{-\frac{c^2 b^4}{4m^2 l^4} + \frac{kb^2}{ml^2}} = \frac{b}{l} \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{cb}{2ml}\right)^2} \text{ rad/s}$$

- 19.22.** Deducir la ecuación diferencial de las pequeñas oscilaciones de la barra esbelta homogénea de longitud  $l$  y peso  $W$  articulada en su punto medio que se ilustra en la Figura 19.21(a). ¿Cuál es la constante de amortiguamiento crítico?

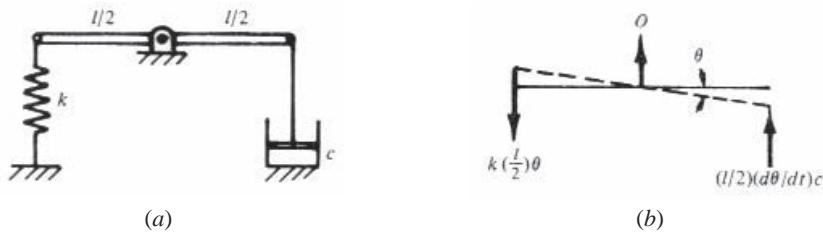


Figura 19.21

**SOLUCIÓN**

En la Figura 19.21(b) se representa el diagrama de cuerpo libre de la barra girada un pequeño ángulo horario  $\theta$ . La ecuación de momentos respecto a  $O$  es

$$-\frac{l}{2}\left(k\frac{l}{2}\theta\right) - \frac{l}{2}\left(\frac{l}{2}\frac{d\theta}{dt}c\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{W}{g}\right)(l^2)\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

o sea,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3gc}{W}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{3kc}{W}\theta = 0$$

Para resolver esta ecuación diferencial, probamos con  $\theta = e^{st}$ . Entonces,

$$\frac{d\theta}{dt} = se^{st} \quad \text{y} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = s^2e^{st}$$

Al sustituir, resulta

$$s^2e^{st} + \frac{3gc}{W}se^{st} + \frac{3kg}{W}e^{st} = 0$$

Como  $e^{st}$  es distinto de cero, para que se satisfaga la ecuación anterior debe ser

$$s^2 + \frac{3gc}{W}s + \frac{3kg}{W} = 0$$

Las raíces de esta ecuación de segundo grado son

$$s = \frac{-3gc}{2W} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3gc}{W}\right)^2 - 4\left(\frac{3kg}{W}\right)}$$

Para que el amortiguamiento sea crítico, el radicando debe ser cero. Por tanto,

$$\left(\frac{3gc_c}{W}\right)^2 = \frac{12kg}{W} \quad \text{o} \quad c_c = \sqrt{\frac{4kW}{3g}}$$

**Vibraciones forzadas sin amortiguamiento**

- 19.23.** En la Figura 19.22, la masa  $m$  está suspendida de un muelle de constante  $k$  y sometida a una fuerza perturbadora periódica  $F \cos \omega t$ . Analizar el movimiento.

**ANÁLISIS**

La ecuación diferencial, comparada con la de las vibraciones libres, posee ahora un término adicional:

$$-kx + F \cos \omega t = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

o sea,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = \frac{F}{m} \cos \omega t$$

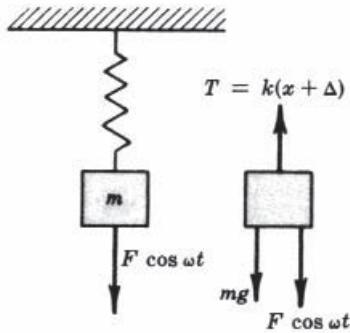


Figura 19.22

Según la teoría de ecuaciones diferenciales, la solución de esta ecuación consta de la suma de dos partes: (1) la solución ya hallada en el Problema 19.1 para el caso en que el segundo miembro es cero (parte transitoria) y (2) una solución que satisface

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = \frac{F}{m} \cos \omega t$$

Supongamos que la segunda solución, llamada solución estacionaria, sea de la forma  $x = X \cos \omega t$ . Entonces,  $dx/dt = -X\omega \sin \omega t$  y  $d^2x/dt^2 = -X\omega^2 \cos \omega t$ .

Sustituyendo,

$$-X\omega^2 \cos \omega t + \frac{k}{m} X \cos \omega t = \frac{F}{m} \cos \omega t$$

Por tanto,  $X$  debe valer  $(F/k)/(1 - \omega^2 m/k)$ .

Sea  $\Delta_F$  la deformación que la fuerza  $F$  produciría en el muelle si actuase sobre él estáticamente; es decir,  $\Delta_F = F/k$ . Nótese también que  $\omega_n^2 = k/m$ , donde  $\omega_n$  es la pulsación natural en ausencia de fuerza perturbadora.

Entonces,  $X$  puede escribirse

$$\frac{\Delta_F}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

Por comodidad, hacemos  $\omega/\omega_n = r$ , con lo que la solución estacionaria podemos escribirla

$$x = \frac{\Delta_F}{1 - r^2} \cos \omega t$$

Obsérvese que la pulsación es la misma que la pulsación de la perturbación.

La solución completa será

$$x = A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{1}{1 - r^2} \Delta_F \cos \omega t$$

Los dos primeros términos, que representan las vibraciones libres, son de naturaleza transitoria pues siempre hay algo de viscosidad que causa el amortiguamiento de esas vibraciones. Por tanto, nos ocupamos sólo de la solución

$$x = \Delta_F \frac{1}{1 - r^2} \cos \omega t$$

su valor máximo, que se da cuando  $\cos \omega t = 1$ , es  $\Delta_F/(1 - r^2)$  y se conoce como amplitud. El cociente de la amplitud del estado estacionario dividida por la deformación estática  $\Delta_F$  que  $F$  causaría recibe el nombre de factor de amplificación. Su valor es

$$\frac{\Delta_F / (1 - r^2)}{\Delta_F} = \frac{1}{1 - r^2}$$

que, como  $r = \omega/\omega_n = f/f_n$ , puede escribirse

$$\frac{1}{1-(f/f_n)^2}$$

Este valor puede ser positivo o negativo, según que  $f$  sea o no sea menor que  $f_n$ . Cuando  $f = f_n$ , tiene lugar la resonancia y la amplitud se hace teóricamente infinita. En realidad, el amortiguamiento viscoso, que siempre está presente, mantiene la amplitud en un valor finito.

En la Figura 19.23 se muestra una gráfica de la amplificación en función de la relación de frecuencias  $r$ .

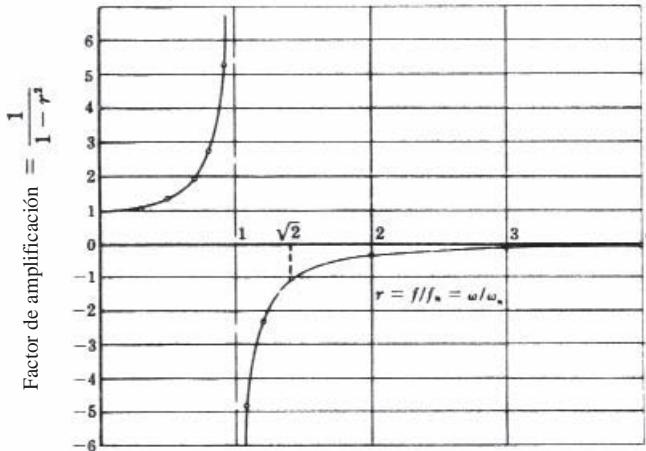


Figura 19.23

El valor negativo para  $r > 1$  indica que la fuerza  $F$  y el desplazamiento  $x$  son de sentidos contrarios. Nótese que cuando  $r = \sqrt{2}$ , el factor de amplificación es

$$\frac{1}{1-(\sqrt{2})^2} = -1$$

Esto significa que si la relación  $r$  se hace mayor que  $\sqrt{2}$ , el factor de amplificación es menor que 1. Así pues, en tales condiciones, la fuerza perturbadora produce un desplazamiento menor que si se aplica estáticamente.

- 19.24.** Una fuerza perturbadora de 9 N actúa armónicamente sobre una masa de 5 kg suspendida de un muelle de constante 6 N/mm. ¿Cuál es la amplitud de su carrera si la frecuencia perturbadora es (a) 1 hz, (b) 5,40 Hz, (c) 50 Hz?

#### SOLUCIÓN

La frecuencia natural del sistema es

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6000}{5}} = 5,51 \text{ Hz}$$

La deformación que la fuerza perturbadora produciría en el muelle si se aplicase estáticamente es  $\Delta_F = 9/6 = 1,5 \text{ mm}$ .

- (a) La relación de frecuencias es  $r = f/f_n = 1/5,51 = 0,185$ ; por tanto, la amplitud es  $\Delta_F/(1-r^2) = 1,5/(1-0,3229) = 1,551 \text{ mm}$ .
- (b) La relación de frecuencias es  $r = 5,40/5,51$ ; por tanto, la amplitud es 37,9 mm.
- (c) La relación de frecuencias es  $r = 50/5,51$ ; por tanto, la amplitud es  $-0,018 \text{ mm}$ . Nótese que en este caso la amplitud es de sentido contrario al de aplicación de la fuerza, pero su valor es despreciable.

- 19.25.** Un frigorífico que pesa 60 lb, y que funciona a 600 rpm, está soportado por tres muelles, de constante  $k$  lb/in en cada uno. ¿Cuánto debe valer  $k$  para que a la cimentación se transmita un doceavo de la fuerza perturbadora?

#### SOLUCIÓN

Supóngase que la fuerza transmitida es proporcional a la amplitud del movimiento de la máquina. Ello es lógico porque los muelles portantes transmiten unas fuerzas proporcionales a su deformación, que es igual a la amplitud del movimiento de la máquina.

Según el Problema 19.23, el cociente de la amplitud del movimiento estacionario y la deformación estática que produciría la fuerza perturbadora ( $-\frac{1}{12}$ , en este caso) vale  $1/(1 - r^2)$ . Nótese que el cociente es negativo porque la frecuencia natural de los muelles debe ser menor que la frecuencia perturbadora para que haya reducción y, por ello, según la gráfica del Problema 19.23, el factor de amplificación está por debajo del eje de abscisas.

Por tanto, en este problema,  $-\frac{1}{12} = 1/(1 - r^2)$ , de donde  $r^2 = 13$ ,  $r = f/f_n = \sqrt{13}$  y  $f_n = (600 \div 60) \sqrt{13} = 2,77$  cps. Ahora, considerando el peso  $W$  que soporta cada muelle, igualamos  $f_n$  a  $(1/2\pi)\sqrt{kg/W}$ . Entonces,

$$2,77 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k(386)}{20}}$$

de donde  $k = 15,7$  lb/in.

#### Vibraciones forzadas con amortiguamiento viscoso

- 19.26.** En la Figura 19.24(a), la masa  $m$  está suspendida de un muelle de constante  $k$  y conectada a un amortiguador viscoso. Analizar el movimiento si la masa está sometida a una fuerza perturbadora armónica  $F_0 \cos \omega t$ .

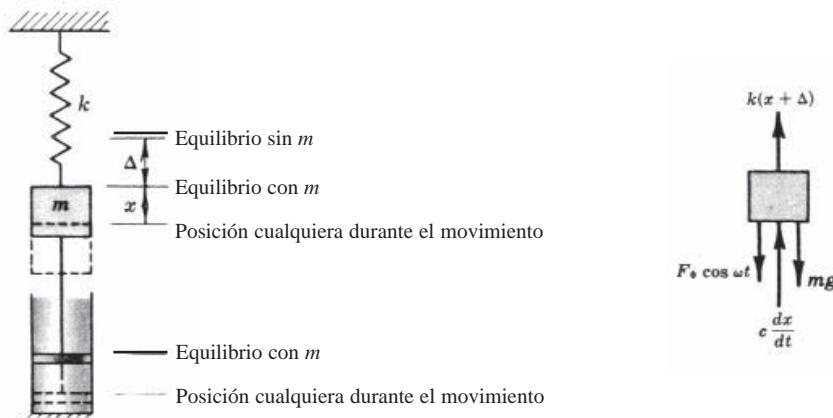


Figura 19.24

#### SOLUCIÓN

En el diagrama de cuerpo libre de la Figura 19.24(b) se muestran las fuerzas actuantes sobre la masa. Suponiendo positivo el sentido hacia abajo, la ecuación de movimiento es

$$\sum F = ma$$

$$\text{es decir, } mg + F_0 \cos \omega t - k(x + \Delta) - c \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Como en los problemas anteriores, el diagrama de cuerpo libre para la posición de equilibrio muestra que  $mg - k\Delta = 0$ . Con esto, la ecuación queda

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Como en el Problema 19.23, pasamos por alto la solución transitoria. La solución estacionaria es

$$x = \frac{F_0 \cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad \text{con} \quad \tan \phi = \frac{c\omega / k}{1 - m\omega^2 / k}$$

Como habitualmente sólo se considera la amplitud  $X$  del movimiento, la expresión de ésta puede escribirse

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{F_0 / k}{\sqrt{(1 - m\omega^2 / k)^2 + (c\omega/k)^2}}$$

Esta puede simplificarse más teniendo en cuenta que  $F_0/k$  es la deformación estática  $\Delta_{F_0}$  que la fuerza perturbadora produciría en el muelle. Además,  $m/k = 1/\omega_n^2$ , donde  $\omega_n$  es la pulsación no amortiguada natural del sistema (rad/s). Si  $d$  es el cociente del coeficiente de amortiguamiento dado  $c$  y el coeficiente de amortiguamiento crítico  $c_c$ , el último término del radicando puede expresarse

$$\frac{c\omega}{k} = \frac{c}{c_c} \frac{c_c \omega}{k} = d \frac{c_c \omega}{k}$$

Pero el coeficiente de amortiguamiento crítico (Problema 19.18) es  $c_c = 2m\omega_n$ . Entonces, el último término del radicando es

$$d(2m\omega_n) \frac{\omega}{k} = d \left( d \frac{\omega_n \omega}{\omega_n^2} \right) = 2rd$$

donde  $r = \omega / \omega_n$ . Por tanto,

$$\frac{X}{\Delta F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2rd)^2}} \quad \text{y} \quad \tan \phi = \frac{2rd}{1 - r^2}$$

El cociente  $X / \Delta F_0$  se conoce como factor de amplificación.

En la figura 19.25, se ilustra la gráfica del factor de amplificación en función de la relación de pulsaciones y se observa que el máximo tiene lugar cerca de  $r = \omega / \omega_n = 1$  y la influencia que ejerce el amortiguamiento en el valor de esos máximos.

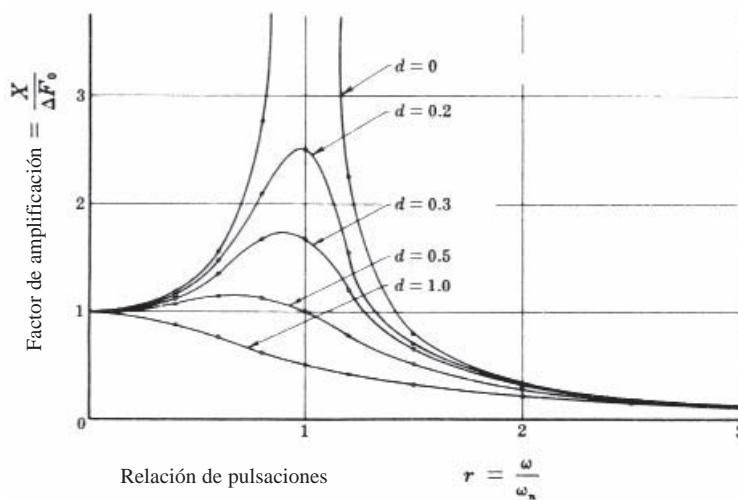


Figura 19.25

Adviértase que en las abscisas se emplea el cociente  $\omega / \omega_n$  y no el cociente  $f / f_n$ , como en el Problema 19.23. El resultado es el mismo aunque se emplee el cociente de las pulsaciones, puesto que éstas difieren de las frecuencias en un factor  $2\pi$  y sus cocientes son iguales.

Nótese que la amplitud se hace máxima para un valor algo menor que  $r = 1$ . El valor exacto puede calcularse igualando a cero la derivada de  $X/\Delta_{F_0}$  respecto a  $r$ :

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{X}{\Delta_{F_0}} \right) = -\frac{1}{2} [(1-r^2)^2 + (2rd)^2]^{-1/2} [2(1-r^2)(-2r) + 2(2rd)(2d)] = 0$$

El radical no puede ser cero; por tanto,  $2(1-r^2)(-2r) + 2(2rd)2d = 0$ , o sea,  $r(r^2 + 2d^2 - 1) = 0$ .

El valor correspondiente a la máxima amplitud es  $r = \sqrt{-2d^2 + 1}$ .

En la Figura 19.26 se ilustra la gráfica del ángulo de fase  $\phi$  para distintos valores del coeficiente de amortiguamiento.

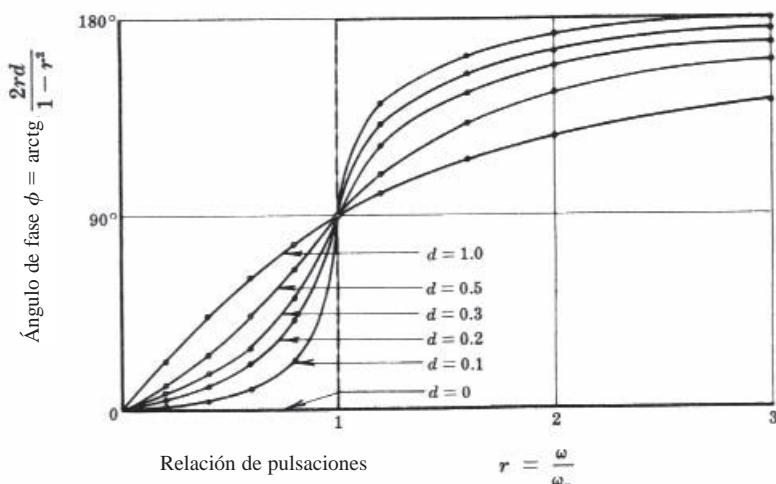


Figura 19.26

- 19.27.** Una pequeña masa está sujeta con una excentricidad  $e$  al volante de inercia de un motor montado sobre dos muelles de constante  $k$  cada uno (Figura 19.27). El amortiguador introduce una constante de amortiguamiento viscoso de valor  $c$ . Si la masa total del motor y la pequeña masa es  $M$ , estudiar el movimiento del sistema bajo la acción de la fuerza perturbadora causada por la masa excéntrica  $m$ . (Este problema ilustra el efecto del desequilibrio producido por masas en movimiento alternativo o movimiento giratorio.)

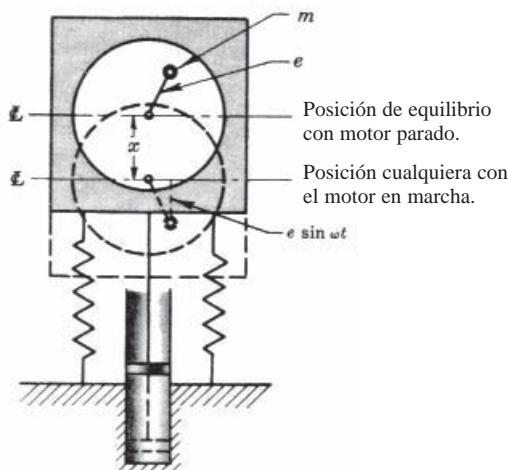


Figura 19.27

### ANÁLISIS

En la posición del motor en marcha representada, la masa  $m$  se halla por debajo del plano diametral una distancia  $e \operatorname{sen} \omega t$ . Por tanto, si como sentido positivo se toma el descendente, el desplazamiento absoluto  $x_1$  de la masa  $m$  es la suma del desplazamiento vertical ( $e \operatorname{sen} \omega t$ ) con respecto al plano diametral más el desplazamiento absoluto  $x$  del plano diametral; es decir,  $x_1 = x + e \operatorname{sen} \omega t$ .

Si es  $F$  la fuerza no contrarrestada que el motor ejerce sobre la masa  $m$  comunicándole una aceleración  $d^2 x / dt^2$ , podemos escribir

$$F = m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m \frac{d^2 (x + e \operatorname{sen} \omega t)}{dt^2} = m \frac{d^2 x}{dt^2} - me\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$$

La ecuación de movimiento del motor sin la pequeña masa  $m$  es

$$-F - kx - c \frac{dx}{dt} = (M - m) \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Véase que aquí  $F$  aparece con un signo menos porque esa fuerza no contrarrestada que la masa  $m$  ejerce sobre el motor es de sentido contrario a la fuerza que el motor ejerce sobre la masa  $m$ . Eliminando  $F$  entre las dos ecuaciones anteriores resulta

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{M} x = \frac{m}{M} e\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$$

Esta ecuación diferencial es similar a la del Problema 19.26, sin más que sustituir  $F_0$  por  $me\omega^2$ . La amplitud del movimiento del plano diametral del motor es

$$X = \frac{(m/M)e(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + (2d\omega/\omega_n)^2}} \quad \text{con} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{2d\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

donde  $\omega$  = pulsación de la perturbación (velocidad del motor) en rad/s  
 $\omega_n$  = pulsación natural del sistema soportado por los muelles en rad/s  
 $d$  = índice de amortiguamiento  
 $\theta$  = ángulo de fase

En la resonancia, la ecuación anterior se reduce a  $X = (me/M)/2d$ . Además, para grandes valores de  $\omega/\omega_n$ , la misma ecuación se reduce a  $X = me/M$  dentro de unos límites de precisión aceptables.

La distancia  $b$  desde el centro geométrico del motor al centro de masas  $G$  del sistema, es decir, del motor y la masa  $m$ , puede hallarse (Figura 19.28) tomando momentos respecto a  $O$ .

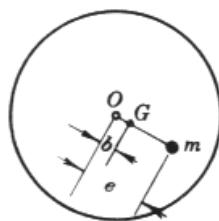


Figura 19.28

Así pues,  $bM = em$ , o sea,  $b = me/M$ , que para grandes valores de  $\omega/\omega_n$  es igual a  $X$ . Por tanto, para altas velocidades del motor ( $\omega/\omega_n$  muy grande), el valor del desplazamiento  $X$  del plano diametral es igual al valor de  $b$ . Sin embargo, para grandes valores de  $\omega/\omega_n$ , el valor de  $\theta$ , deducido de la expresión

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2d\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

se aproxima a  $180^\circ$ . Por tanto, el desplazamiento  $X$  es igual a  $e$  pero desfasado  $180^\circ$ .

Por la geometría de la figura, el desplazamiento absoluto  $x_G$  del centro de masas  $G$  es igual a la suma del desplazamiento absoluto del plano diametral más el desplazamiento del centro de masas respecto al plano diametral, o sea

$$x_G = X \operatorname{sen}(\omega t - 180^\circ) + b \operatorname{sen} \omega t = -b \operatorname{sen} \omega t + b \operatorname{sen} \omega t = 0$$

Para altas velocidades del motor, el centro de masas  $G$  permanece inmóvil.

- 19.28.** Una masa soportada por muelles está sometida a una fuerza perturbadora de frecuencia variable. Se observa una amplitud de resonancia de 12 mm. Además, para frecuencias perturbadoras muy altas, se observa una amplitud casi constante de 1,3 mm. ¿Cuál es el índice de amortiguamiento  $d$  del sistema?

#### SOLUCIÓN

En la resonancia,  $X = (me/M)/2d$ ; y en altas frecuencias,  $X = me/M$ . Así pues,  $me/M = 1,3$  mm. Sustituyendo en la primera expresión,  $12 = 1,3/2d$ , o sea,  $d = 0,054$ .

### Problemas propuestos

- 19.29.** Una masa de 5 kg vibra en movimiento armónico simple,  $x = X \operatorname{sen} \omega t$ . Si la amplitud  $X$  es 100 mm y la masa ejecuta 1750 vibraciones por minuto, calcular su aceleración máxima.

*Resp.*  $a = 3360 \text{ m/s}^2$

- 19.30.** Un cilindro oscila en torno a un eje fijo con una frecuencia de 10 ciclos por minuto. Si el movimiento es armónico con una amplitud de 0,10 rad, hallar la aceleración máxima en  $\text{rad/s}^2$ .

*Resp.*  $\alpha = 0,11 \text{ rad/s}^2$

- 19.31.** Un instrumento que pesa 4,4 lb se sujetó a cuatro soportes de caucho, cada uno de los cuales tiene una deformación nominal de 0,125 in por libra de carga. ¿Cuál es la frecuencia de la vibración natural? *Resp.*  $f = 8,44 \text{ Hz}$

- 19.32.** Un tronco de arce de 5 in de diámetro, que pesa 50 lb/ft<sup>3</sup>, mide 5 ft de longitud. Si, mientras flota verticalmente en el agua, se le desplaza hacia abajo desde su posición de equilibrio, ¿cuál es el período de la oscilación?

*Resp.*  $\tau = 2,21 \text{ s}$

- 19.33.** Hallar la frecuencia natural de la vibración vertical de una viga simple horizontal de longitud  $l$  con una masa  $m$  sujetada en su centro. Despréciese la masa de la viga. Téngase en cuenta que el corrimiento vertical de  $m$  es  $mg l^3 / 48EI$ .

*Resp.*  $f = (2/\pi)\sqrt{3EI/ml^3} \text{ Hz}$

- 19.34.** Una masa de 100 g está sujetada al punto medio de un alambre vertical de 150 mm de largo sometido a una tracción de 15 N. ¿Cuál es el período de vibración de la masa si ésta se desplaza lateralmente y luego se suelta? *Resp.*  $\tau = 0,1 \text{ s}$

- 19.35.** Un péndulo simple consiste en una pequeña lenteja de masa  $m$  sujetada al extremo de un hilo de longitud  $l$ . Demostrar, que para oscilaciones de pequeña amplitud, la frecuencia natural es  $(1/2\pi)\sqrt{g/l} \text{ Hz}$ .

- 19.36.** Hallar la frecuencia natural del sistema de la Figura 19.29 formado por una masa  $m$  suspendida a través de un muelle, de constante  $k$ , de una viga en voladizo de longitud  $l$  carente de masa. [Sugerencia: Una fuerza unitaria aplicada a  $m$  provocaría un corrimiento vertical total de  $1/k + 1/(3EI/l^3)$ .]

*Resp.*  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EIk}{m(3EI + kl^3)}} \text{ Hz}$

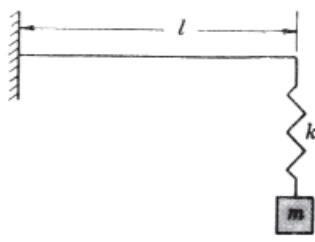


Figura 19.29

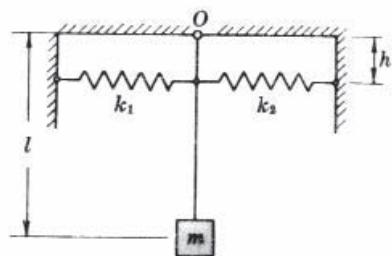


Figura 19.30

- 19.37.** Hallar la frecuencia natural del sistema oscilante de la Figura 19.30. Los muelles, de constantes respectivas  $k_1$  y  $k_2$ , están sin deformar en la posición de equilibrio. Se desprecia el peso de la barra rígida. (Sugerencia: En una posición desplazada, el péndulo está sometido a la fuerza gravitatoria  $mg$  y a la suma de las fuerzas de los muelles.)

$$\text{Resp. } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgl + (k_1 + k_2)h^2}{ml^2}} \text{ Hz}$$

- 19.38.** En la Figura 19.31, es  $W = 12 \text{ lb}$  y  $k = 30 \text{ lb/in.}$  Despreciando el peso de la palanca acodada, hallar la frecuencia del sistema en cps.

$$\text{Resp. } f = 1,65 \text{ cps}$$

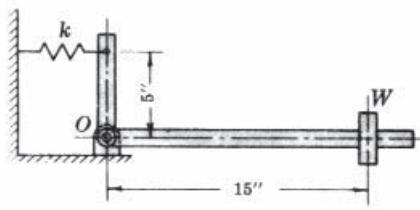


Figura 19.31

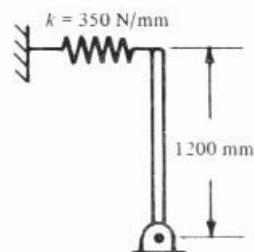


Figura 19.32

- 19.39.** La barra esbelta de la Figura 19.32 tiene una masa de 7 kg y una longitud de 1200 mm. La constante del muelle vale 350 N/mm. Hallar la frecuencia de las pequeñas oscilaciones.

$$\text{Resp. } 1,87 \text{ Hz}$$

- 19.40.** Un disco de momento de inercia  $J_O$  es solidario de un árbol de rigidez torsional  $K$ . Ésta es el par necesario para producir una torsión de un radián en el árbol. ¿Cuál es la frecuencia de oscilación si el eje se gira un ángulo pequeño y se suelta? (Figura 19.33).

$$\text{Resp. } f = (1/2\pi)\sqrt{k/J_O} \text{ Hz}$$

- 19.41.** Un disco de acero de 100 mm de diámetro y 3 mm de espesor está rígidamente unido a un alambre de acero de 0,8 mm de diámetro y 500 mm de largo. ¿Cuál es la frecuencia natural de este péndulo torsional?

$$\text{Resp. } 0,84 \text{ Hz}$$

- 19.42.** Un motor tiene un volante de inercia de 150 lb montado en cada extremo de un árbol de acero de 2 in de diámetro. Suponiendo que la longitud equivalente entre volantes del árbol sea 2 ft, hallar la frecuencia natural de las oscilaciones torsionales en cps. El radio de giro de cada volante es 8,8 in y  $G = 12 \times 10^6 \text{ psi}$ .

$$\text{Resp. } 36,3 \text{ cps}$$

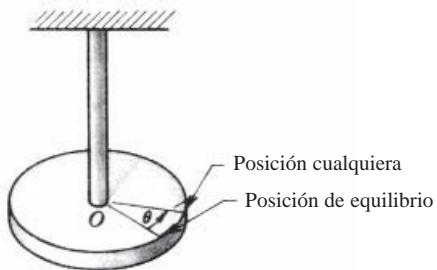


Figura 19.33

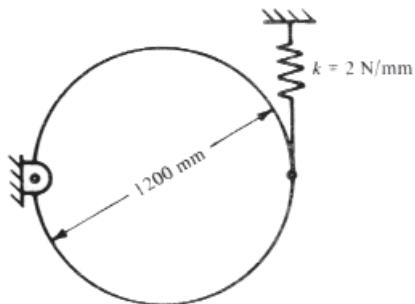


Figura 19.34

- 19.43.** El disco homogéneo de la Figura 19.34 tiene una masa de 60 kg y un diámetro de 1200 mm. En la posición representada, en que el muelle de  $k = 2 \text{ N/mm}$  está vertical, el sistema se halla en equilibrio. Hallar la frecuencia de las pequeñas oscilaciones.

Resp. 1,41 cps

- 19.44.** Al centro de masas del disco de la Figura 19.34 se sujetó un amortiguador vertical. El cilindro se gira inicialmente  $5^\circ$  en sentido horario y se suelta en reposo. El coeficiente de amortiguamiento es un décimo del coeficiente de amortiguamiento crítico. Hallar el coeficiente de amortiguamiento y la rotación del disco cuando  $t = 2 \text{ s}$ .

Resp.  $C = 17 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ ,  $\theta = 0,013 \text{ rad}$  ( $\curvearrowright$ )

- 19.45.** En el Problema 19.37, sustituir el muelle de constante  $k$  por un amortiguador horizontal de coeficiente de amortiguamiento  $c$ . Deducir la expresión del coeficiente de amortiguamiento crítico.

$$\text{Resp. } c_c = \frac{2ml^2}{h^2} \sqrt{\frac{kh^2}{ml^2} + \frac{g}{l}}$$

- 19.46.** Una masa de 3 kg está unida a un muelle de constante  $k = 2,5 \text{ N/mm}$ . Hallar el coeficiente de amortiguamiento crítico.

Resp.  $c_c = 173 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

- 19.47.** Hallar la frecuencia amortiguada del sistema de la Figura 19.35.

$$\text{Resp. } \omega_d = \sqrt{\frac{kl^2}{mb^2} - \frac{c^2}{4m^2}} \text{ rad/s}$$

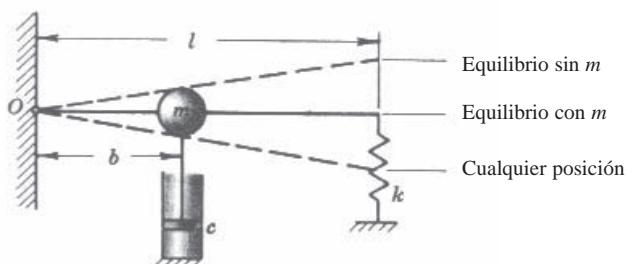


Figura 19.35

- 19.48.** Un sistema vibrante se compone de una masa de 5 kg, un resorte de constante  $k = 3,5 \text{ N/mm}$  y un amortiguador de constante de amortiguamiento  $c = 100 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ . Hallar (a) el índice de amortiguamiento  $d$ ; (b) la pulsación natural amortiguada  $\omega_d$ ; (c) el decremento logarítmico  $\delta$ ; (d) la relación entre dos amplitudes sucesivas.

Resp. (a)  $d = 0,378$ , (b)  $\omega_d = 24,5 \text{ rad/s}$ , (c)  $\delta = 2,56$ , (d) relación = 13,0

- 19.49.** Deducir la ecuación diferencial de movimiento del peso montado entre muelles de la Figura 19.36. El peso está sometido a una fuerza perturbadora armónica  $F = F_0 \operatorname{sen} \omega t$

$$\text{Resp. } \frac{d^2x}{dt^2} + (k_A + k_B) \frac{gx}{W} = \frac{F_0 g}{W} \operatorname{sen} \omega t$$

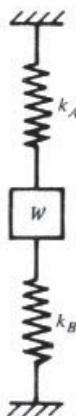


Figura 19.36

- 19.50.** Una máquina de 200 lb de peso está soportada por tres muelles de constante  $k = 60 \text{ lb/in}$  cada uno. Sobre ella actúa una fuerza perturbadora armónica de 50 lb. Hallar (a) la frecuencia de resonancia y (b) la distancia que la máquina se desplaza desde el equilibrio si la frecuencia perturbadora es de 200 cpm. Se desprecia el amortiguamiento.

*Resp. (a)  $f = 2,97 \text{ cps}$ , (b) 0,106 in*

- 19.51.** Un masa soportada por un muelle está sometida a una fuerza perturbadora armónica de frecuencia variable. Se observa una amplitud de resonancia de 0,82 in y una amplitud casi constante de 0,07 in para las muy altas frecuencias de la perturbación. ¿Cuál es el índice de amortiguamiento del sistema?

*Resp.  $d = 0,043$*

- 19.52.** Una masa soportada por un muelle está sometida a una fuerza perturbadora armónica de frecuencia variable. Se observa una amplitud de resonancia de 20 mm y una amplitud casi constante de 2 mm para las altas frecuencias de la perturbación. ¿Cuál es el índice de amortiguamiento del sistema? *Resp.  $d = 0,05$*

- 19.53.** En el Problema 19.49 es  $k_A = k_B = 10 \text{ lb/in}$ ,  $W = 16 \text{ lb}$  y  $F_0 = 12 \text{ lb}$  con una frecuencia impulsora  $f = 1,2 \text{ Hz}$ . Calcular la frecuencia natural, el factor de amplificación y el desplazamiento máximo de la masa.

*Resp.  $f_n = 3,49 \text{ Hz}$ , MF = 1,13,  $x_{\max} = 0,68 \text{ in}$*

- 19.54.** En el Problema 19.38, al peso  $W$  se aplica verticalmente una función impulsora  $8 \cos \omega t$ . Hallar la frecuencia máxima que puede tener la función impulsora si el factor de amplificación no debe ser mayor que 2.

*Resp.  $f = 1,17 \text{ Hz}$*

- 19.55.** Un motor de 60 lb de peso está soportado por cuatro muelles de constante  $k = 30 \text{ lb/in}$  cada uno. El sistema incluye un amortiguador de coeficiente de amortiguamiento  $c$ . Hallar el valor mínimo de  $c$  para que no haya oscilaciones.

*Resp.  $c_{\min} = 8,64 \text{ lb}\cdot\text{s/in}$*

- 19.56.** Un modelo reducido de barco de masa  $M$  se introduce en un canal hidrodinámico sujetándolo a cada extremo de éste mediante muelles de constante  $k$ . El modelo se desplaza y se deja oscilar. Se observa que el período de la oscilación amortiguada es  $\frac{3}{4}$  s y el cociente entre las amplitudes de dos ciclos es  $\frac{3}{7}$ . Hallar el coeficiente de amortiguamiento del fluido contenido en el canal.

*Resp.*  $c = 2,27 M$

- 19.57.** Una masa esférica de  $\frac{1}{2}$  slug está suspendida dentro de un fluido en el extremo de un muelle de constante  $k = 4 \text{ lb/ft}$ . Se sabe que el coeficiente de amortiguamiento del fluido es  $5 \text{ lb}\cdot\text{s/ft}$ . Hallar el desplazamiento de la esfera respecto al equilibrio al cabo de 3 s para un desplazamiento inicial de  $\frac{1}{2} \text{ ft}$ .

*Resp.*  $x = 0,44 \text{ in}$

- 19.58.** En el problema anterior, ¿cuánto tarda el desplazamiento en valer (a)  $\frac{1}{10}$  del desplazamiento inicial y (b)  $\frac{1}{100}$  del desplazamiento inicial?

*Resp.* (a) 2,62 s, (b) 5,26 s

# UNIDADES SI

A

El Sistema Internacional de Unidades (abreviado SI) tiene tres clases de unidades: básicas, suplementarias y derivadas. A continuación se listan las siete unidades básicas y suplementarias. Se listan también las unidades derivadas que, con o sin nombre particular, se emplean en mecánica.

## UNIDADES BÁSICAS

Magnitud	Unidad	Símbolo
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
corriente eléctrica	ampere	A
temperatura	kelvin	K
cantidad de materia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd

## UNIDADES SUPLEMENTARIAS

Magnitud	Unidad	Símbolo
ángulo plano	radián	rad
ángulo sólido	estereoradián	sr

## UNIDADES DERIVADAS CON NOMBRES Y SÍMBOLOS PARTICULARES

(Empleadas en mecánica)

Magnitud	Unidad	Símbolo	Dimensiones
fuerza	newton	N	$\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$
frecuencia	hertz	Hz	1/s
energía, trabajo	joule	J	$\text{N} \cdot \text{m}$
esfuerzo, presión	pascal	Pa	$\text{N/m}^2$

## UNIDADES DERIVADAS SIN NOMBRES PARTICULARES

(Empleadas en mecánica)

Magnitud	Unidad	Símbolo
aceleración	metro por segundo al cuadrado	$\text{m/s}^2$
aceleración angular	radián por segundo al cuadrado	$\text{rad/s}^2$
velocidad angular	radián por segundo	$\text{rad/s}$
área	metro cuadrado	$\text{m}^2$
densidad	kilogramo por metro cúbico	$\text{kg/m}^3$
momento de una fuerza	metro por newton	$\text{m} \cdot \text{N}$
velocidad	metro por segundo	$\text{m/s}$
volumen	metro cúbico	$\text{m}^3$

## PREFIJOS SI

(De uso común en mecánica)

Factor	Prefijo	Símbolo
$1\ 000\ 000\ 000 = 10^9$	giga	G
$1\ 000\ 000 = 10^6$	mega	M
$1\ 000 = 10^3$	kilo	k
$0,001 = 10^{-3}$	milí	m
$0,000\ 001 = 10^{-6}$	micro	$\mu$

## FACTORES DE CONVERSIÓN

Para convertir	en	multiplicar por
grado (medida angular)	radian (rad)	1,745 329 E - 02*
pie (foot, ft)	metro (m)	3,048 000 E - 01
ft/min	metros por segundo (m/s)	5,080 000 E - 03
ft/s	metros por segundo (m/s)	3,048 000 E - 01
ft/s <sup>2</sup>	metros por segundo <sup>2</sup> (m/s <sup>2</sup> )	3,048 000 E - 01
ft · lbf	joule (J)	1,355 818 E + 00
caballo de potencia (hp)	watt (W)**	7,456 999 E + 02
pulgada (inch, in)	metro (m)	2,540 000 E - 02
km/h	metros por segundo	2,777 778 E - 01
kW · h	joule (J)	3,600 000 E + 06
kip (1000 libras)	newton	4,448 222 E + 03
litro	metro cúbico (m <sup>3</sup> )	1,000 000 E - 03
millá (internacional)	metros (m)	1,609 344 E - 03
millá (topográfica EE.UU.)	metros (m)	1,609 347 E + 03
mi/h (internacional)	metros por segundo (m/s)	4,470 400 E - 01
onza-fuerza	newton (N)	2,780 139 E - 01
ozf · in	metros·newton (m·N)	7,061 552 E - 03
libra (lb avoirdupois)	kilogramo (kg)	4,535 924 E - 01
slug · ft <sup>2</sup> (momento de inercia)	kilogramo · metro <sup>2</sup> (kg · m <sup>2</sup> )	4,214 011 E - 02
lb/ft <sup>3</sup>	kilogramo por metro <sup>3</sup> (kg/m <sup>3</sup> )	1,601 846 E + 01
libra-fuerza (lbf)	newton	4,448 222 E + 00
lbf · ft	metro-newton (m · N)	1,335 818 E + 00
lbf · in	metro-newton (m · N)	1,129 848 E - 01
lbf/ft	newton por metro (N/m)	1,459 390 E + 01
lbf/ft <sup>2</sup>	pascal (Pa)	4,788 026 E + 01
lbf/in	newton por metro (N/m)	1,751 268 E + 02
lbf/in <sup>2</sup> (psi)	pascal (Pa)	6,894 757 E + 03
slug	kilogramos (kg)	1,459 390 E + 01
slug/ft <sup>3</sup>	kilogramo por metro <sup>3</sup> (kg/m <sup>3</sup> )	5,153 788 E + 02
tonelada (ton, 2000 lb)	kilogramos (kg)	9,071 847 E + 02
W·h	joule (J)	3,600 000 E + 03

\* E -02 significa  $\times 10^{-2}$

\*\* (Nota de los traductores) Recuérdese la observación en nota al pie 2 del Capítulo 17.

# PRIMEROS MOMENTOS Y CENTROIDES

**B**

## Líneas planas

Forma	Figura	Longitud	$Q_x$	$Q_y$	$\bar{x}$	$\bar{y}$
Segmento recto	1	$L$	$\frac{1}{2}L^2 \sin \theta$	$\frac{1}{2}L^2 \cos \theta$	$\frac{1}{2}L \cos \theta$	$\frac{1}{2}L \sin \theta$
Cuarto de circunferencia	2	$\frac{1}{2}\pi r$	$r^2$	$r^2$	$2r/\pi$	$2r/\pi$
Semicircunferencia	3	$\pi r$	$2r^2$	0	0	$2r/\pi$
Arco	4	$r\alpha$	0	$2r^2 \sin \frac{1}{2}\alpha$	$(r \sin \frac{1}{2}\alpha)/(\frac{1}{2}\alpha)$	0

## Superficies planas

Forma	Figura	Área	$Q_x$	$Q_y$	$\bar{x}$	$\bar{y}$
Triángulo	5	$\frac{1}{2}bh$	$\frac{1}{6}bh^2$	$\frac{1}{6}b^2h$	$\frac{1}{3}b$	$\frac{1}{3}h$
Cuadrante de círculo	6	$\frac{1}{4}\pi r^2$	$\frac{1}{3}r^3$	$\frac{1}{3}r^3$	$4r/3\pi$	<sup>(1)</sup> $4r/3\pi$
Cuadrante de elipse	7	$\frac{1}{4}\pi ab$	$\frac{1}{3}ab^2$	$\frac{1}{3}a^2b$	$4a/3\pi$	<sup>(2)</sup> $4b/3\pi$
Segmento circular	8	$\frac{1}{2}r^2\alpha$	0	$\frac{2}{3}r^3 \sin \frac{1}{2}\alpha$	$(2r \sin \frac{1}{2}\alpha)/(\frac{3}{2}\alpha)$	0

## Volumenes

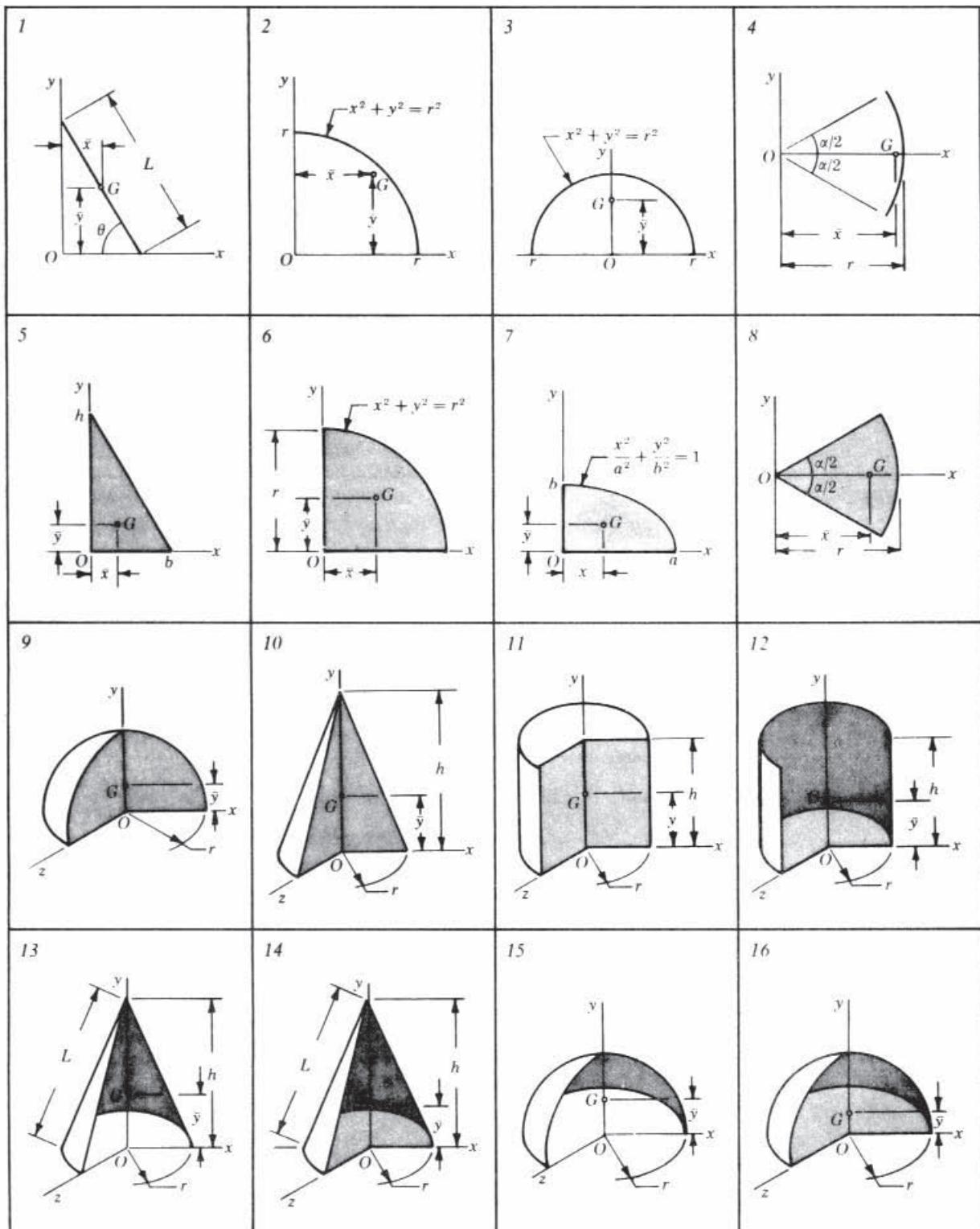
Forma	Figura	Volumen	$Q_{xz}$	$\bar{y}$
Semiesfera	9	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{1}{4}\pi r^4$	$\frac{3}{8}r$
Cono	10	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$\frac{1}{12}\pi r^2 h^2$	$\frac{1}{4}h$
Cilindro	11	$\pi r^2 h$	$\frac{1}{2}\pi r^2 h^2$	$\frac{1}{2}h$

## Superficies curvas

Forma	Figura	Área	$Q_{xz}$	$\bar{y}$
Cilindro con base inferior	12	$\pi r(2h + r)$	$\pi rh^2$	$h^2/(2h + r)$
Cilindro con ambas bases	(No ilustrado)	$2\pi r(h + r)$	$\pi rh(h + r)$	$\frac{1}{2}h$
Cono, sin base	13	$\pi rL$	$\frac{1}{2}\pi rhL$	$\frac{1}{3}h$
Cono, con base	14	$\pi r(2h + L)$	$\frac{1}{2}\pi rhL$	$\frac{1}{3}h(1 + r/L)$
Semiesfera, sin base	15	$2\pi r^2$	$\pi r^3$	$\frac{1}{2}r$
Semiesfera, con base	16	$3\pi r^2$	$\pi r^3$	$\frac{1}{3}r$

(1) Válida también para un área semicircular con base en el eje  $x$ .

(2) Válida también para un área semielíptica con base en el eje  $x$ .



# SOLUCIONES POR COMPUTADORA A LOS PROBLEMAS SELECCIONADOS

C

**5.18**    10 REM PROBLEMA 5-18  
20 DIM A[6,6], X[6], B[]  
30 MAT READ A  
40 MAT READ B  
50 DATA 0,0,0,1,0,1  
60 DATA 0,0,1,0,1,0  
70 DATA 0,0,0,0,3.662  
80 DATA 0,0,-5.77,0,0,0  
90 DATA 5,77,0,0,0,0,0  
100 DATA 0,1,0,-1,0,0  
110 DATA 0,-223,315,1456,852,0  
120 MAT A=INV(A)  
130 MAT X=A\*B  
140 PRINT  
150 PRINT ''FUERZAS EN B'', X[1], X[2]  
160 PRINT  
170 PRINT ''FUERZAS EN D'', X[3], X[4]  
180 PRINT  
190 PRINT ''FUERZAS EN C'', X[5], X[6]  
200 END

FUERZAS EN B: 147.66 -56.6789  
FUERZAS EN D:-252.34 -56.6789  
FUERZAS EN C: 29.3397 56.6789

**6.8**    10 REM PROBLEM 6-8  
20 DIM A[3,3], B[3], X[3]  
30 A[1,1]=-3/SQR (34)  
40 A[1,2]=-3/SQR (41)  
50 A[1,3]=-3/5  
60 A[2,1]=-4/SQR (34)  
70 A[2,2]=-4/SQR (41)  
80 A[2,3]=4/5  
90 A[3,1]=3/SQR (34)  
100 A[3,2]=-4/SQR (41)  
110 A[3,3]=0  
120 B[1]=-100, B[2]=0, B[3]=0

**494** MECÁNICA VECTORIAL. ESTÁTICA Y DINÁMICA

```
130 MAT A=INV(A)
140 MAT X=A*B
150 PRINT ''LAS FUERZAS SON:''
160 MAT PRINT X
```

LAS FUERZAS SON:  
55.5329      45.7366      83.3333

**7.12** 10 REM PROBLEMA 7-12

```
20 REM BUSQUEDA RAIZ DE F(X) POR ITERACIÓN DE NEWTON-RAPHSON
30 DEF FNF (X)=X+50-X*CSH(500/(2*X))
40 DEF FND (X)=1+X* (SNH(500/(2*X))*(500/(2*X*X)))-CSH(500/2*X))
50 PRINT
60 PRINT ''INTRO RAIZ APROX'':
70 INPUT X0
80 PRINT
90 PRINT ''INTRO ERROR ABSOLUTO'':
100 INPUT E
110 N=8
120 PRINT
130 FOR I=1 TO N
140 IF FND(X0)<>0 THEN 170
150 PRINT ''DERIVADA NULA-PRUEBE OTRA VEZ''
160 GOTO 60
170 X=X0-FNF (X0)/FND(X0)
180 NEXT I
190 IF X<>0 THEN 220
200 PRINT ''POSIBLE RAIZ NULA''
210 GOTO 270
220 IF ABS((X-X0)/X)<E THEN 270
230 X0=X, N=2*N
240 IF N<=1028 THEN 130
250 PRINT ''IMPOSIBLE CONVERGENCIA CON LA PRECISIÓN DESEADA''
260 STOP
270 PRINT LIN(1), ''LA RAÍZ ES''; X; ''LA FUNCIÓN ES''; FNF(X)
290 END
```

INTRO RAIZ APROX?635  
INTRO ERROR ABSOLUTO?.001  
LA RAÍZ ES 633.163      LA FUNCIÓN ES 1.22070E-04

**13.22** 10 CLS

```
20 DIM TABLE (10, 2)
30 INPUT ''INTRO LONG. CADENA:''; L
40 INPUT ''INTRO COLGANTE BASE:''; C
50 INPUT ''INTRO TIEMPO BASE:''; T
60 COUNT=1
70 IF COUNT>10 THEN GOTO 200
80      HALF=.5*C
90      EX =SQR( (32.2/L) *T)
100     EX1=-SQR( (32.2/L) *T)
110     A =(EXP(EX))
120     B =(EXP(EX1))
```

```

130      X    =HALF*(A+B)
140 TABLE (COUNT,1)=X
150 TABLE (COUNT,2)=t
160 PRINT TABLE(COUNT, 2), TABLE(COUNT,1)
170 COUNT=COUNT+1
180 T=T+.1
190 GOTO 70
200 END

```

Este programa da los resultados siguientes con la información de entrada que se muestra seguidamente.

```

INTRO LONG CADENA: ? 10
INTRO COLGANTE BASE: ? 1
INTRO TIEMPO BASE: ? .1
.1      1.165367
.2      1.339656
.3      1.523155
.4      1.71616
.5      1.91897
.6      2.131895
.7000001 2.35525
.8000001 2.589356
.9000001 2.834544
1       3.091151
Ok

```

**14.9**

```

10 REM PROBLEMA 14-9
20 REM L=LONG. BARRA
30 REM T=ANGULO
40 REM V=VELOCIDAD A
50 REM W=VELOCIDAD ANGULAR
60 READ L, V
70 DATA 2.5, 4
80 PRINT
90 PRINT ''ANGULO'', ''VELOCIDAD''
100 FOR T=0 TO 45 STEP 5
110 W=V/(L*(COS(T*3.14159/180)+SIN(T*3.14159/180)))
120 PRINT T, W
130 NEXT T
140 END

```

ANGULO	VELOCIDAD
0	1.6
5	1.4769
10	1.38115
15	1.30639
20	1.24833
25	1.20398
30	1.17128
35	1.14882
40	1.13569
45	1.13137

*Nota* Los programas de los Problemas 7.12, 13.22 y 14.9 funcionan en computadoras IBM-PC o equivalentes con BASIC de Microsoft. Los programas de los Problemas 5.18 y 6.8 funcionan en computadoras DEC o equivalentes con VAX BASIC 3.0 o versión superior.









***¡Estudia a tu propio ritmo y  
aprueba tu examen con Schaum!***

***Los Schaum son la herramienta esencial  
para la preparación de tus exámenes.  
Cada Schaum incluye:***

- 3 Teoría de la asignatura con definiciones,  
principios y teoremas claves.***
- 3 Problemas resueltos y totalmente explicados,  
en grado creciente de dificultad.***
- 3 Problemas propuestos con sus respuestas.***

***Hay un mundo de Schaum a tu alcance... ¡BUSCA TU COLOR!***

**InfoEcoMatIngeCien**