Annales Sup TANA

Vol. L3, No. 1, Avril 2025, pp. 1-3

Examen du premier semestre

Pays : Sénégal
Établissement : Université Iba Der Thiam de Thiès
UFR/Département : UFR Sciences et Technologies/Département Physique Chimie
Auteur (s) : Ibrahima Sakho
Niveau, filière : Licence 3, Physique Chimie LMD
Année académique : 2023-2024
Matière, semestre : Mécanique quantique 2, semestre 5
Email: ibrahima.sakho@univ-thies.sn
Wathsaap: 78 786 47 72

Résumé de l'article

Concepts clés de l'épreuve
– Systèmes hydrogénoïdes – fonction d'onde – ket – vecteur d'état – Hamiltonien – puits de potentiel – observable – opérateur de création – opérateur d'annihilation – oscillateur harmonique quantique – opérateur de création écart quadratique moyen – valeur moyenne – relation d'incertitude.

Compétences évaluées
- Appliquer les postulats de la mécanique quantique
- Calculer la valeur moyenne d'une observable
- Confronter prévisions de la mécanique quantique aux prévisions de la théorie semi-classique de Bohr
- Déterminer l'écart quadratique moyen d'une observable
- Utiliser les propriétés des opérateurs de création et d'annihilation

Durée de l'épreuve : 3h0

Exercice 1. (08 points)

On donne pour les systèmes hydrogénoïdes :

- Energie totale : $E = -\dfrac{Ze^2}{2r}$; $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

Fonctions d'onde : $\Psi_{2,1,0}(r,\theta,\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{32\pi}}\left(\dfrac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \dfrac{Z}{a_0} r\, e^{-\frac{Z}{2a_0}r} \cdot \cos\theta$; a_0 : rayon de Bohr:

1.1. En utilisant les données ci-dessus :
1.1.1. Calculer la valeur moyenne de l'Hamiltonien des systèmes hydrogénoïdes dans l'état $|2, 1, 0\rangle$. Comparer le résultat obtenu aux prévisions de Bohr. **(2 pts)**
1.1.2. Calculer la valeur moyenne du rayon de l'orbite électronique dans l'état $|2, 1, 0\rangle$. Comparer le résultat obtenu aux prévisions de Bohr. **(2 pts)**

1.2. Par ailleurs, on donne l'énergie propre E_n et la fonction d'onde propre d'une particule confinée dans un puis de potentiel de largeur a :

$E_n = \alpha n^2$; α une constante positive ;

$$\varphi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right),$$

Á l'instant initial, le vecteur d'état du système s'écrit :

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|\varphi_1\rangle - \frac{i}{2}|\varphi_2\rangle + \lambda|\varphi_3\rangle \ .$$

1.2.1. Déterminer λ pour que le ket $|\Psi(0)\rangle$ soit normé. Choisir λ réelle et positif. **(2 pts)**
1.2.2. Exprimer la fonction d'onde $\Psi(y, t)$. Quelle est la probabilité de trouver la valeur propre 4α à un instant t quelconque ? **(2 pts)**

Exercice 2. (06 points)

On donne les matrices suivantes de l'Hamiltonien H d'un système et d'une observable A :

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; A = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$; ω et a sont des constantes réelles positives.

Á l'instant de date $t = 0$, l'état du système physique est décrit par le vecteur ket:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{i}{2}|u_2\rangle - \frac{i}{2}|u_3\rangle \ .$$

2.1. Calculer la probabilité de trouver la valeur propre h de l'Hamiltonien. **(1 pt)**
2.2. Déterminer l'écart quadratique moyen ΔH. **(2 pts)**
2.3. Déterminer la valeur moyenne $\langle A\rangle (t)$ de l'observable A. **(2 pts)**
2.4. Á quels instants cette valeur moyenne est-elle maximale ? minimale ? **(1 pt)**

Exercice 3. (06 points)

Soit un oscillateur harmonique quantique à une dimension x constitué d'une particule de masse m. Le mouvement de l'oscillateur harmonique est repéré par son abscisse x par rapport à un point O choisi comme origine des espaces. On désigne par ω la pulsation du mouvement.

On note $|\Phi_n\rangle$ le ket propre commun aux opérateurs H et $N = a^\dagger a$, $a^\dagger$ et a respectivement les opérateurs de création et d'annihilation. Soient E_n et n les valeurs propres respectives de H et N. Les opérateurs sans dimension $\hat{P}$ et $\hat{X}$ sont liés aux opérateurs impulsion P et position X tels que :

$$\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P \ \text{ et } \ \hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \ . \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) \ \text{ et } a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}) \ .$$

De plus, on donne les actions des opérateurs $a^\dagger$ et a sur les kets $|\Phi_n\rangle$:

$$\begin{cases} a^+|\Phi_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\Phi_{n+1}\rangle \\ a|\Phi_n\rangle = \sqrt{n}\,|\Phi_{n-1}\rangle \end{cases} \; ; \; [a^+, a] = -1.$$

.

3.1. Déterminer les écarts quadratiques moyens ΔX et ΔP. **(2 pts)**

3.2. Exprimer la relation d'incertitude $\Delta X \Delta P$. Préciser sa valeur minimale ? **(2 pts)**

3.3. Montrer que les valeurs moyennes de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique de l'oscillateur harmonique quantique sont égales. **(2 pts)**

SOLUTIONS DES EXERCICES : cliquer ici