

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра математического моделирования и управления

Шклярник Юрий Николаевич

Численное решение граничных задач

Курсовая работа
студента 3 курса 6 группы

”Допустить к защите”

Руководитель проекта

“ _____ ” _____ 2012 г

Научный руководитель

Петров Петр Петрович

доцент кафедры ММАД

канд. физ.-мат. наук

РЕФЕРАТ

Курсовая работа, .

ЭЛЕКТРОСТАТИКА, ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА, FENICS, PYTHON

Объект исследования — двумерные электрические поля.

Методы исследования — использование свойств аналитических функций комплексного переменного.

Цель работы — расчёт потенциалов заряженных.

Результаты работы:

- Выведена формула для комплексной напряжённости поля зарядов, лежащих на прямой;
- Найдены выражения для комплексных потенциалов различных конфигураций двумерных электрических полей;
- Построены графики изолиний для соответствующих полей.

РЭФЕРАТ

Курсавая работа, стр. 17, крыніц 2.

ЭЛЕКТРАСТАТЫКА, ЭЛЕКТРЫЧНАЕ ПОЛЕ, МЕТАД КАНЧАТКОВЫХ ЭЛЕМЕНТАУ, АСІМПТАТЫЧНЫЯ МЕЖАВЫЯ УМОВЫ, РАУНАННЕ ЛАПЛАСА, FENICS, PYTHON

Аб'ект даследавання — двухмерныя электрычныя палі.

Метады даследавання — выкарыстанне ўласцівасцей аналітычных функцый комплекснага пераменнага.

Мэта работы — разлік асноўных канфігурацый двухмерных электрычных палёў з выкарыстаннем функцый комплекснага пераменнага.

Вынікі работы:

- Выведзена формула для комплекснай напружанасці поля зарадаў, якія ляжаць на прамой;
- Знойдзены выразы для комплексных патэнцыялаў розных канфігурацый двухмерных электрычных палёў;
- Пабудаваны графікі ізаліній для адпаведных палёў.

ABSTRACT

The course work, pp. 17, sources 2.

ELECTROSTATICS, ELECTRIC FIELD, FINITE ELEMENT METHOD, ASYMPTOTIC BOUDARY CONDITIONS, LAPLACE'S EQUATION, FENICS, PYTHON

Subject of research — two-dimensional electric fields.

Methods — using properties of analytic functions of complex variables.

The purpose — calculation of basic configurations of two-dimensional electric field using a complex function.

The results:

- The formula for the complex field intensity charges lying on the line;
- Formulas for the complex potentials of different configurations of two-dimensional electric field;
- Contour plots for the corresponding fields.

Содержание

Введение	3
1 Решение задачи Дирихле с разрывными граничными условиями на прямоугольнике	4
1.1 Постановка задачи	4
1.2 Аналитическое решение	4
1.3 Вариационная формулировка задачи	5
1.4 Визуализация	5
1.5 Оценка скорости сходимости численного решения	6
2 Примеры оформления рисунков и таблиц	7
2.1 Примеры оформления рисунков	7
2.2 Пример таблицы	7

Введение

Текст введения.

1 Решение задачи Дирихле с разрывными граничными условиями на прямоугольнике

1.1 Постановка задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $f(x) = \alpha I_{[l,r]}(x)$.

1.2 Аналитическое решение

Воспользуемся методом разделения переменных. Будем искать решение в виде

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Получаем систему уравнений

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda. \quad (1.2)$$

Задача Штурма-Лиувилля для $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Получаем собственные значения:

$$\sqrt{\lambda_n} = \mu_n = \frac{\pi n}{a}.$$

Собственные функции для задачи (1.3) с точностью до константы имеют вид

$$X_n(x) = \sin \mu_n x.$$

Задача для $Y(y)$:

$$\begin{cases} Y''(y) - \lambda_n Y(y) = 0, \\ Y(0) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Имеем

$$Y_n(y) = C_{n_1} e^{-\mu_n y} + C_{n_2} e^{\mu_n y} \quad (1.5)$$

$$Y_n(0) = C_{n_1} + C_{n_2} = 0.$$

Значит,

$$Y_n(y) = C_n \operatorname{sh} \mu_n y \quad (1.6)$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh} \mu_n y \sin \mu_n x \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{b \operatorname{sh} \mu_n b} \int_0^b f(x) \sin \mu_n x \, dx = \frac{2\alpha}{b \operatorname{sh} \mu_n b} \int_l^r \sin \mu_n x \, dx = \frac{2\alpha}{b \mu_n \operatorname{sh} \mu_n b} (\cos \mu_n l - \cos \mu_n r) \\ &= \frac{4\alpha}{b \mu_n \operatorname{sh} \mu_n b} \sin \frac{\mu_n}{2} (l + r) \sin \frac{\mu_n}{2} (r - l). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Окончательное решение:

$$u(x, y) = \frac{4\alpha}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{\mu_n}{2} (l + r) \right) \sin \left(\frac{\mu_n}{2} (r - l) \right)}{\mu_n \operatorname{sh} \mu_n b} \operatorname{sh} \mu_n y \sin \mu_n x. \quad (1.9)$$

1.3 Вариационная формулировка задачи

Домножим уравнение $\Delta u = 0$ на тестовую функцию v и проинтегрируем по области $\Omega = (0, a) \times (0, b)$:

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, d\Omega = 0. \quad (1.10)$$

По формуле интегрирования по частям,

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u \, d\Omega. \quad (1.11)$$

Слабая формулировка задачи:

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla u \, d\Omega = 0 \quad (1.12)$$

1.4 Визуализация

Визуализация для случая $a = b = 1$, $n = 30$, $\alpha = 0.05$.

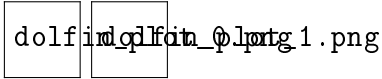


Рисунок 1 — Визуализация потенциала и напряжённости, полученных методом конечных элементов

1.5 Оценка скорости сходимости численного решения

Зададим шаг равномерной прямоугольной сетки $h = \frac{1}{n}$. Произведём эксперименты с $h_0 > h_1 > h_2 > \dots$ и получим соответствующие невязки e_0, e_1, e_2, \dots . Предположим, что $e_i = Ch_i^r$. По результатам 2-ух экспериментов можно оценить r :

$$r = \frac{\ln \frac{e_{i+1}}{e_i}}{\ln \frac{h_{i+1}}{h_i}}. \quad (1.13)$$

Далее приведены результаты серии вычислений. Для вычисления погрешности использовалась L_2 -норма.

погрешность метода в серии вычислений heightn	e	r
8	0.00164702	1.999999999999731
16	0.00041175	1.999999999999871
32	0.00010294	1.999999999999943
64	0.00002573	1.999999999999973
128	0.00000643	1.999999999999982
256	0.00000161	1.999999999999992

2 Примеры оформления рисунков и таблиц

2.1 Примеры оформления рисунков

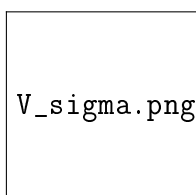


Рисунок 1 — Пример рисунка

Ссылка на рисунок 1.

2.2 Пример таблицы

Таблица 1 — Пример таблицы

No	MLE_6		МНК а		МНК б		МНК (a+b)/2	
	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
1	0,53548	1,06137	0,72470	1,28297	0,31740	0,64983	0,52105	0,96640
2	0,91964	1,07928	0,98609	1,19080	0,64444	0,7597	0,81526	0,97525
3	1,42572	1,01403	1,39084	1,15258	0,99234	0,72147	1,19159	0,93702
4	0,99314	1,01525	1,08542	1,21208	0,74377	0,69347	0,91459	0,95276
5	0,85784	1,15244	1,18652	1,39875	0,47815	0,70121	0,83233	1,04998
6	0,86709	1,06494	1,21914	1,18477	0,68599	0,77675	0,95257	0,98076
7	0,99295	0,95015	1,21665	1,00739	0,59485	0,69720	0,90575	0,85230
8	1,17673	1,01723	1,25087	1,18790	0,75493	0,59850	1,00290	0,89320
...
100	1,28197	0,89892	1,21547	0,96368	0,97460	0,64711	1,09503	0,80539
Среднее	1,01641	0,99889	1,18388	1,14546	0,70156	0,68235	0,94272	0,91390
Вариация	0,04664	0,03752	0,07943	0,07556	0,12344	0,12383	0,04913	0,04874