Решение уравнения Лапласа методом конечных элементов с помощью FEniCS

Шклярик Ю.Н., 6 группа, 3 курс

Глава 1

Решение задачи на прямоугольной области с разрывными граничными условиями Дирихле

1.1 Постановка задачи

Рассчитать поле, порождаемое заряженной пластиной в однородной среде.

1.2 Математическая модель

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = f(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $f(x) = \alpha I_{[l,r]}(x)$.

1.3 Аналитическое решение

Воспользуемся методом разделения переменных. Будем искать решение в виде

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Получаем систему уравнений

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda. \tag{1.2}$$

Задача Штурма-Лиувилля для $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Получаем собственные значения:

$$\sqrt{\lambda_n} = \mu_n = \frac{\pi n}{a}.$$

Собственные функции для задачи (1.3) с точностью до константы имеют вид

$$X_n(x) = \sin \mu_n x.$$

Задача для $Y(y)$:

$$\begin{cases} Y_n''(x) - \lambda_n Y_n(x) = 0, \\ Y_n(0) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Имеем

$$Y_n(y) = C_{n_1} e^{-\mu_n y} + C_{n_2} e^{\mu_n y} \tag{1.5}$$

$$Y_n(0) = C_{n_1} + C_{n_2} = 0.$$

Значит,

$$Y_n(y) = C_n \operatorname{sh} \mu_n y \tag{1.6}$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh} \mu_n y \sin \mu_n x \tag{1.7}$$

$$C_n = \frac{2}{bsh\mu_n b} \int_0^b f(x) \sin \mu_n x \,\mathrm{d}x = \frac{2\alpha}{b \operatorname{sh} \mu_n b} \int_l^r \sin \mu_n x \,\mathrm{d}x = \frac{2\alpha}{b\mu_n \operatorname{sh} \mu_n b} (\cos \mu_n l - \cos \mu_n r) =$$
$$= \frac{4\alpha}{b\mu_n \operatorname{sh} \mu_n b} \sin \frac{\mu_n}{2}(l+r) \sin \frac{\mu_n}{2}(r-l). \tag{1.8}$$

Окончательное решение:

$$u(x,y) = \frac{4\alpha}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\mu_n}{2}(l+r)\right) \sin\left(\frac{\mu_n}{2}(r-l)\right)}{\mu_n \operatorname{sh} \mu_n b} \operatorname{sh} \mu_n y \sin \mu_n x. \tag{1.9}$$

Глава 2

Решение методом конечных элементов

2.1 Слабая формулировка задачи

Домножим уравнение $\Delta u = 0$ на пробную функцию v и проинтегрируем по области $\Omega = (0, a) \times (0, b)$:

$$\int_\Omega v \Delta u \, \mathrm{d}\Omega = 0. \tag{2.1}$$

По формуле интегрирования по частям,

$$\int_\Omega v \Delta u \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla v \nabla u \, \mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \nabla v \nabla u \, \mathrm{d}\Omega \,. \tag{2.2}$$

Слабая формулировка задачи:

$$\int_\Omega \nabla v \nabla u \, \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2.3}$$

2.2 Визуализация

Визуализация для случая $a = b = 1$, $n = 30$, $\alpha = 0.05$.

2.3 Оценка скорости сходимости численного решения

Зададим шаг равномерной прямоугольной сетки $h = \frac{1}{n}$. Произведём эксперименты с $h_0 > h_1 > h_2 > ...$ и получим соответствующие невязки $e_0, e_1, e_2, ...$. Предположим, что $e_i = Ch_i^r$. По результатам 2-ух экспериментов можно оценить r:

$$r = \frac{\ln \frac{e_{i+1}}{e_i}}{\ln \frac{h_{i+1}}{h_i}}. \tag{2.4}$$

Результат:
n= 8 e=0.00057016 r=-0.285764
n= 16 e=0.00069505 r=2.118793
n= 32 e=0.00016003 r=-0.557871
n= 64 e=0.00023558 r=2.017781
n=128 e=0.00005817 r=-0.613936

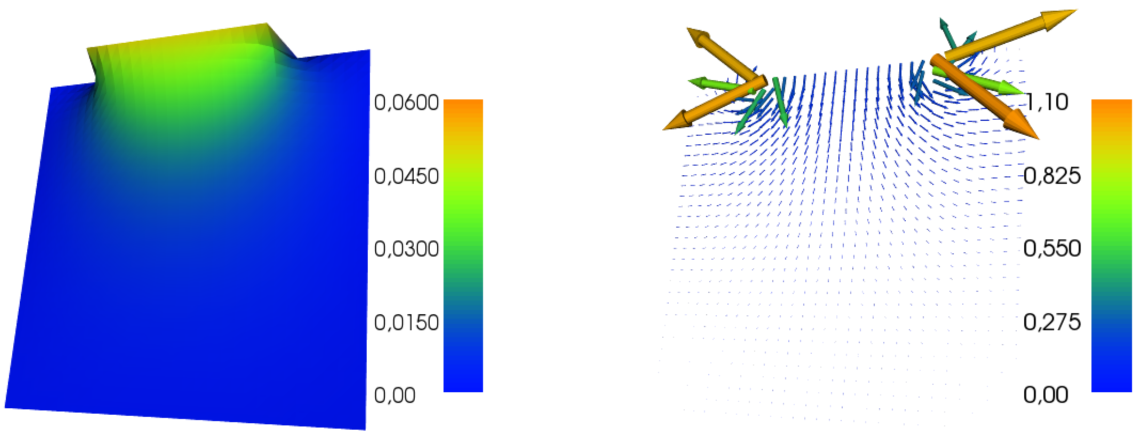

Рис. 2.1: Визуализация потенциала и напряжённости, полученных методом конечных элементов

Глава 3

Решение задачи на прямоугольной области с непрерывными граничными условиями Дирихле

3.1 Постановка задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(0,y) = 1 - y^2, \quad u(1,y) = 2 - y^2, \\ u(x,0) = 1 + x^2, \quad u(x,1) = x^2, \end{cases} \tag{3.1}$$

3.2 Аналитическое решение

Решением уравнения (3.1) является функция

$$u = 1 + x^2 - y^2. \tag{3.2}$$

3.3 Решение методом конечных элементов

3.4 Визуализация

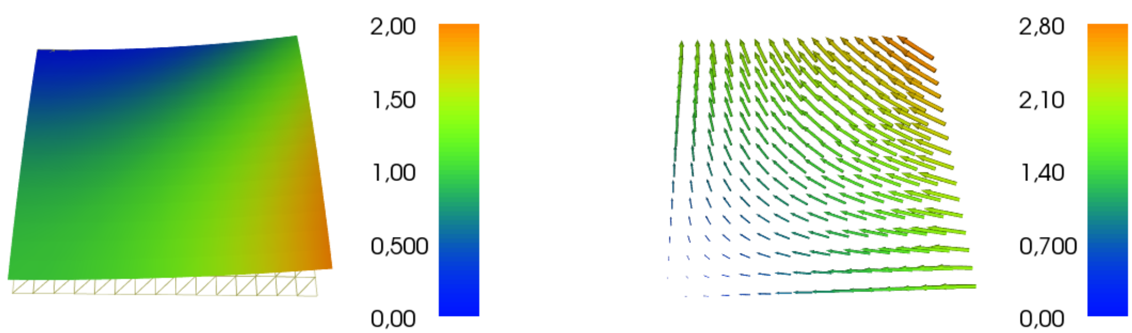

Рис. 3.1: Визуализация потенциала и напряжённости, полученных методом конечных элементов

3.5 Оценка скорости сходимости численного решения

Зададим шаг равномерной прямоугольной сетки $h = \frac{1}{n}$. Произведём эксперименты с $h_0 > h_1 > h_2 > ...$ и получим соответствующие невязки $e_0, e_1, e_2, ...$. Предположим, что $e_i = Ch_i^r$. По результатам 2-ух экспериментов можно оценить r:

$$r = \frac{\ln \frac{e_{i+1}}{e_i}}{\ln \frac{h_{i+1}}{h_i}}. \tag{3.3}$$

Результат:

n= 4	e=0.00658808	r=1.999999999999993
n= 8	e=0.00164702	r=1.999999999999982
n= 16	e=0.00041175	r=1.999999999999973
n= 32	e=0.00010294	r=1.999999999999943
n= 64	e=0.00002573	r=1.999999999999871
n=128	e=0.00000643	r=1.999999999999731
n=256	e=0.00000161	

Можно сделать вывод, что погрешность метода имеет квадратичную зависимость от шага сетки.

Глава 4

Решение задачи для бесконечной заряженной пластины

4.1 Постановка задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{z=0} = I_{[-l,l]}!!!, \\ !!! \end{cases} \tag{4.1}$$

Заменим условие на бесконечности условием на достаточно большом радиусе R, так как заряженный диск на больших расстояниях можно считать точечным зарядом.

Отметим, что решение задачи не зависит от x, симметрично относительно $x = 0$ и $y = 0$ и сведём трёхмерную задачу к двухмерной задаче на прямоугольнике $[0, L] \times [0, L]$.

Глава 5

Задача для тонкого диска

5.1 Постановка задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = !!!, \\ !!! \end{cases} \tag{5.1}$$

Заменим условие на бесконечности условием на достаточно большом радиусе R, так как заряженный диск на больших расстояниях можно считать точечным зарядом.

Воспользуемся тем, что решение не зависит от φ, симметрично относительно $\rho = 0$ и $z = 0$ и сведём трёхмерную задачу к двухмерной задаче на прямоугольнике $[0, R] \times [0, R]$.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=0} = 0, \\ u|_{\rho=R} = !!!, \\ u|_{z=R} = !!!, \\ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = I_{[0,R]}!!!. \end{cases} \tag{5.2}$$

5.2 Слабая формулировка задачи

Оператор Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{5.3}$$

Домножим уравнение $\Delta u = 0$ на пробную функцию v и проинтегрируем по области $\Omega = (0, R) \times (0, h)$ и рассмотрим левую часть:

$$\int\limits_{\Omega_X} (\Delta_{(x,y,z)} u) v \,\mathrm{d}\Omega_X = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} v + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} v\rho + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} v\rho\right) \mathrm{d}\Omega = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} v + \Delta u v \rho\right) \mathrm{d}\Omega\,. \tag{5.4}$$

$$\int\limits_{\Omega} (\Delta u v \rho)\,\mathrm{d}\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} \rho v \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} u \boldsymbol{\nabla} v \rho\,\mathrm{d}\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} \rho v \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} u \boldsymbol{\nabla} v \rho\,\mathrm{d}\Omega - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \rho} v\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{5.5}$$

Подставляя (5.5) в (5.4), получаем

$$a(u, v) = \int\limits_{\partial\Omega} \rho v \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} u \boldsymbol{\nabla} v \rho\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{5.6}$$

Таким образом, слабая формулировка задачи (5.2):

$$\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} u \boldsymbol{\nabla} v \rho\,\mathrm{d}\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} \rho v \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S = 0. \tag{5.7}$$