Решение уравнения Лапласа методом конечных элементов с помощью FEniCS

Шклярик Ю.Н., 6 группа, 3 курс

Глава 1

Решение задачи на прямоугольной области с разрывными граничными условиями Дирихле

1.1 Постановка задачи

Рассчитать поле, порождаемое заряженной пластиной в однородной среде.

1.2 Математическая модель

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = f(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $f(x) = \alpha I_{[l,r]}(x)$.

1.3 Аналитическое решение

Воспользуемся методом разделения переменных. Будем искать решение в виде

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Получаем систему уравнений

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda. \tag{1.2}$$

Задача Штурма-Лиувилля для $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Получаем собственные значения:

$$\sqrt{\lambda_n} = \mu_n = \frac{\pi n}{a}.$$

Собственные функции для задачи (1.3) с точностью до константы имеют вид

$$X_n(x) = \sin \mu_n x.$$

Задача для $Y(y)$:

$$\begin{cases} Y_n''(x) - \lambda_n Y_n(x) = 0, \\ Y_n(0) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Имеем

$$Y_n(y) = C_{n_1} e^{-\mu_n y} + C_{n_2} e^{\mu_n y} \tag{1.5}$$

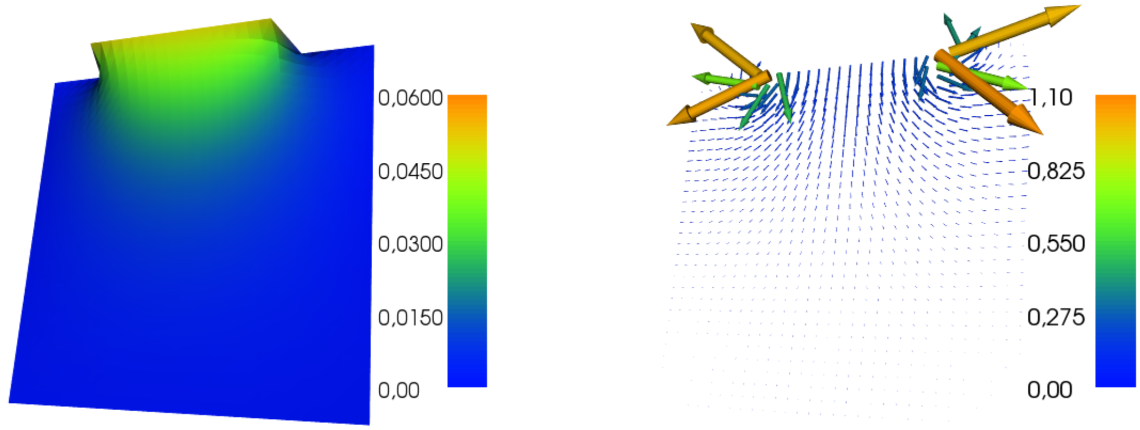

Рис. 1.1: Визуализация потенциала и напряжённости, полученных методом конечных элементов

$$Y_n(0) = C_{n_1} + C_{n_2} = 0.$$

Значит,

$$Y_n(y) = C_n \operatorname{sh} \mu_n y \tag{1.6}$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh} \mu_n y \sin \mu_n x \tag{1.7}$$

$$C_n = \frac{2}{bsh\mu_n b} \int_0^b f(x) \sin \mu_n x dx = \frac{2\alpha}{b \operatorname{sh} \mu_n b} \int_l^r \sin \mu_n x dx = \frac{2\alpha}{b\mu_n \operatorname{sh} \mu_n b} (\cos \mu_n l - \cos \mu_n r) =$$

$$= \frac{4\alpha}{b\mu_n \operatorname{sh} \mu_n b} \sin \frac{\mu_n}{2}(l + r) \sin \frac{\mu_n}{2}(r - l). \tag{1.8}$$

Окончательное решение:

$$u(x, y) = \frac{4\alpha}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\mu_n}{2}(l + r)\right) \sin\left(\frac{\mu_n}{2}(r - l)\right)}{\mu_n \operatorname{sh} \mu_n b} \operatorname{sh} \mu_n y \sin \mu_n x. \tag{1.9}$$

1.4 Решение методом конечных элементов

1.4.1 Слабая формулировка задачи

Домножим уравнение $\Delta u = 0$ на пробную функцию v и проинтегрируем по области $\Omega = (0, a) \times (0, b)$:

$$\int_\Omega v \Delta u dx = 0. \tag{1.10}$$

По формуле интегрирования по частям,

$$\int_\Omega v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx = -\int_\Omega \nabla v \nabla u dx. \tag{1.11}$$

Слабая формулировка задачи:

$$\int_\Omega \nabla v \nabla u dx = 0 \tag{1.12}$$

1.4.2 Визуализация

Визуализация для случая $a = b = 1$, $n = 30$, $\alpha = 0.05$.

1.4.3 Оценка скорости сходимости численного решения

Зададим шаг равномерной прямоугольной сетки $h = \frac{1}{n}$. Произведём эксперименты с $h_0 > h_1 > h_2 > ...$ и получим соответствующие невязки $e_0, e_1, e_2, ...$. Предположим, что $e_i = Ch_i^r$. По результатам 2-ух экспериментов можно оценить r:

$$r = \frac{\ln \frac{e_{i+1}}{e_i}}{\ln \frac{h_{i+1}}{h_i}}. \tag{1.13}$$

Результат:
n= 8 e=0.00057016 r=-0.285764
n= 16 e=0.00069505 r=2.118793
n= 32 e=0.00016003 r=-0.557871
n= 64 e=0.00023558 r=2.017781
n=128 e=0.00005817 r=-0.613936

Глава 2

Решение задачи на прямоугольной области с непрерывными граничными условиями Дирихле

2.1 Постановка задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(0,y) = 1 - y^2, \quad u(1,y) = 2 - y^2, \\ u(x,0) = 1 + x^2, \quad u(x,1) = x^2, \end{cases} \tag{2.1}$$

2.2 Аналитическое решение

Решением уравнения (2.1) является функция

$$u = 1 + x^2 - y^2. \tag{2.2}$$

2.3 Решение методом конечных элементов

2.3.1 Визуализация

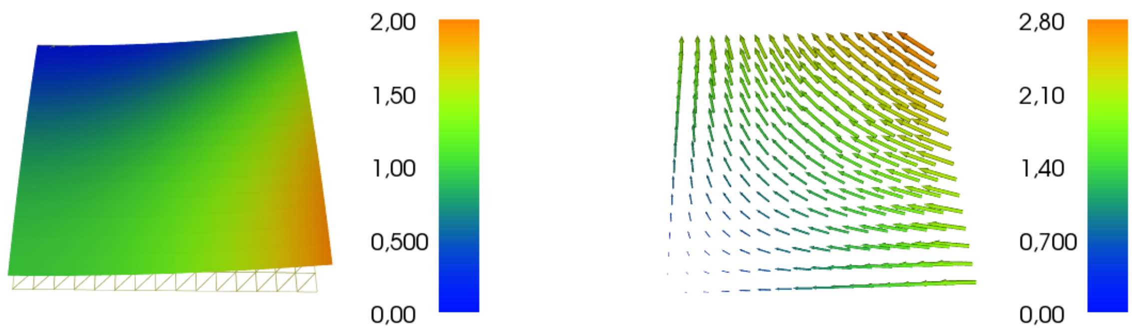

Рис. 2.1: Визуализация потенциала и напряжённости, полученных методом конечных элементов

2.3.2 Оценка скорости сходимости численного решения

Зададим шаг равномерной прямоугольной сетки $h = \frac{1}{n}$. Произведём эксперименты с $h_0 > h_1 > h_2 > ...$ и получим соответствующие невязки $e_0, e_1, e_2, ...$. Предположим, что $e_i = Ch_i^r$. По результатам 2-ух экспериментов можно оценить r:

$$r = \frac{\ln \frac{e_{i+1}}{e_i}}{\ln \frac{h_{i+1}}{h_i}}. \tag{2.3}$$

Результат:

```
n=   4 e=0.00658808  r=1.999999999999993
n=   8  e=0.00164702  r=1.999999999999982
n= 16  e=0.00041175  r=1.999999999999973
n= 32  e=0.00010294  r=1.999999999999943
n= 64  e=0.00002573  r=1.999999999999871
n=128  e=0.00000643  r=1.999999999999731
n=256  e=0.00000161
```

Можно сделать вывод, что погрешность метода имеет квадратичную зависимость от шага сетки.

Глава 3

Решение задачи в цилиндрических координатах

3.1 Постановка задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{r=a} = \dfrac{1}{a}, \\ u|_{r=b} = \dfrac{1}{b}. \end{cases} \tag{3.1}$$

3.2 Визуализация

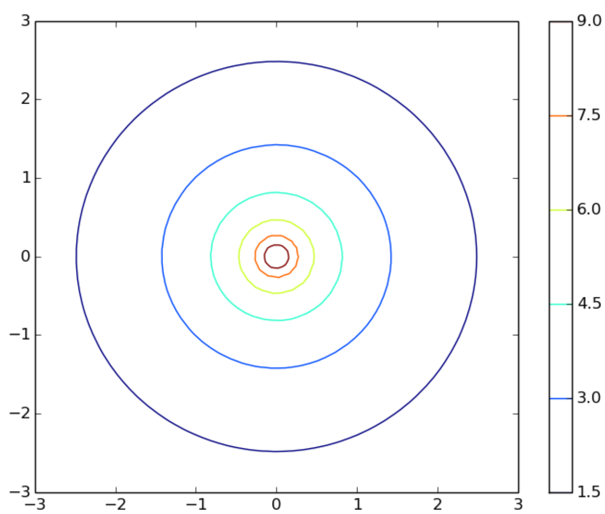

Рис. 3.1: График изолиний

3.3 Задача для тонкого диска

3.3.1 Постановка задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = !!!, \\ !!! \end{cases} \tag{3.2}$$

3.3.2 Слабая формулировка задачи

Заменим условие на бесконечности условием на достаточно большом радиусе, так как заряженный диск можно считать точечным зарядом на больших расстояниях.

Также, воспользуемся осевой симметрией и сведём трёхмерную задачу на цилиндре к двумерной задаче на прямоугольнике переходом от декартовых координат к цилиндрическим.

Оператор Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{3.3}$$

Домножим уравнение $\Delta u = 0$ на пробную функцию v и проинтегрируем по области $\Omega = (0, R) \times (0, h)$ и рассмотрим левую часть:

$$\int\limits_{\Omega_X} \Delta_{(x,y,z)} uv d\Omega_X = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial\rho}v + \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}v\rho + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}v\rho\right) d\Omega = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial\rho}v + \Delta uv\rho\right) d\Omega. \tag{3.4}$$

$$\int\limits_{\Omega} (\Delta uv\rho)\,\mathrm{d}\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} \rho v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} u\boldsymbol{\nabla} v\rho\,\mathrm{d}\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} \rho v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} u\boldsymbol{\nabla} v\rho\,\mathrm{d}\Omega - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial\rho}v\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в (3.4), получаем

$$a(u, v) = \int\limits_{\partial\Omega} \rho v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} u\boldsymbol{\nabla} v\rho\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{3.6}$$