

# Impactos da mudança da estrutura demográfica sobre uma economia de Hugget

Yuri Passuelo

FEARP/USP

## Resumo

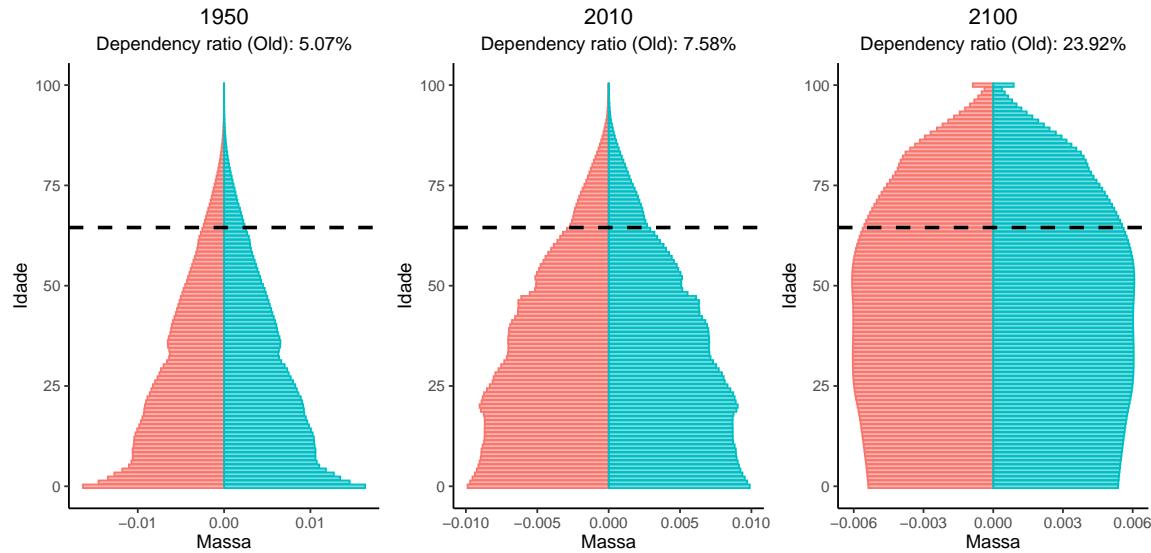
O estudo aborda os impactos da transição demográfica na economia, focando nos efeitos distributivos longo prazo, utilizando um modelo de gerações sobrepostas (OLG) modificado, baseado no trabalho de Huggett (1996). O trabalho inclui variações na estrutura demográfica, como taxa de crescimento populacional e tabelas de vida atuariais. Os resultados confirmam achados da literatura, como a redução do produto, capital e trabalho agregado em cenários com menor taxa de crescimento populacional. No entanto, a distribuição de ativos na economia apresenta pouca variação em nível agregado. Quando se considera uma maior taxa de sobrevivência nas tabelas de vida, observa-se um produto e trabalho agregado menores, mas um capital maior, em comparação com tabelas de vida com menor taxa de sobrevivência, além de se observar um menor índice de Gini. Também existem efeitos sobre a distribuição de riqueza entre as coortes, com as mais jovens se tornando mais desiguais e as mais velhas apresentando menor desigualdade, conforme medido pelo índice de Gini.

**Palavras-Chave:** Transição demográfica, Economia, Modelo de gerações sobrepostas (OLG), Desigualdade (Índice de Gini).

# 1 Introdução

A transição demográfica é um fenômeno que vem se tornando cada vez mais predominante nas economias globais, países vem experienciando aumento da longevidade e expectativas de vida e ao mesmo tempo quedas nas taxas de crescimento populacional devido principalmente a quedas nas taxas de natalidade, para além de ser um evento exclusivo de economias consideradas desenvolvidas e de alta produtividade esse efeito vem se tornando cada vez mais comum em economias em desenvolvimento e de renda média.

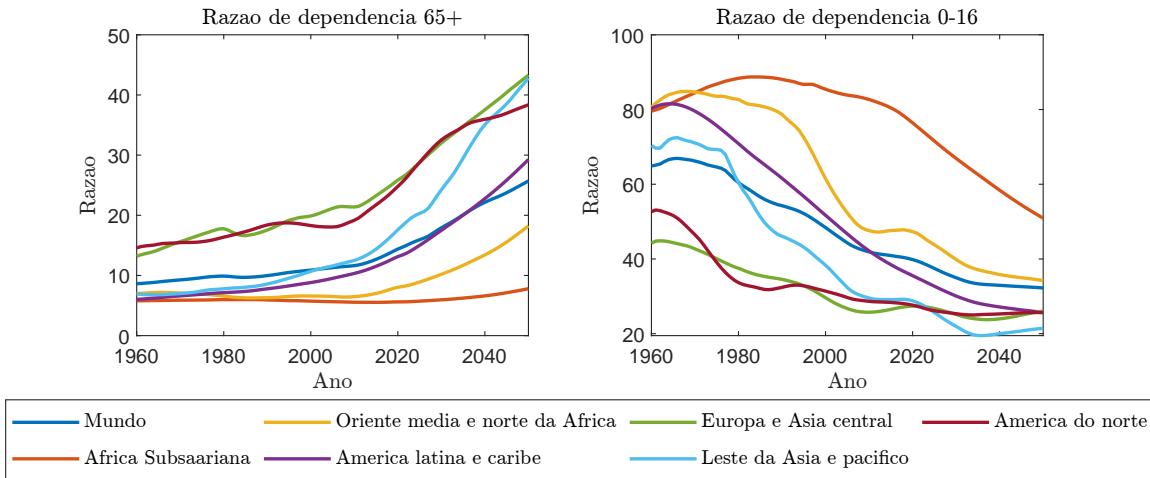
Figura 1: Piramide etária população mundial



Notas: Dados retirados de United Nations (2024)

Projeções demográficas da United Nations (2024) apontam que até 2100 a razão de dependência das pessoas mais velhas que 65 anos em relação ao total da população é esperada para evoluir para até 23.92%, implicando que o combo de maior longevidade da população e menores taxas de natalidade contribuirão em um primeiro momento para um crescimento da força de trabalho, o que é conhecido como bônus demográfico, e em um segundo momento uma estabilização e até redução dessa parcela da população.

Figura 2: Projeções da razão de dependência no mundo



Notas: Dados retirados de World Bank (2024)

Dados do World Bank (2024) projetam uma crescimento da razão de dependência da população 65+<sup>1</sup>, apesar do efeito ser mais pronunciado na América do norte e Europa, no longo prazo as projeções estimam que esse efeito acabará se estendendo para leste asiático e até mesmo a América Latina e em menor medida para o oriente médio e áfrica subsaariana.

O impacto de mudanças demográficas sobre a economia não é um assunto novo com diversos trabalhos tendo explorado essa relação como Kuznets (1960), que elucida a relação direta do crescimento populacional e do crescimento econômico, trabalhos mais recentes como Jones (2022) analisam impactos de economias com queda populacional em um modelo de crescimento endógeno, os resultados iniciais encontrados são que economias no longo prazo que apresentam queda populacional apresentam estagnação econômica e no nível geral de conhecimento, sendo esse resultado nomeado de "planeta vazio", aqui os níveis de consumo e renda ficam estagnados junto ao nível de conhecimento, e a população, caso mantenha sua trajetória de queda populacional, desaparece, mesmo quando o modelo é adaptado para um *background* semi-endógeno o mesmo ocorre, ou seja, há estagnação econômica, essa estagnação também ocorre sobre condições, por exemplo, de fertilidade endógena e também é sustentado em

<sup>1</sup>Aqui a razão de dependência é entendida com a proporção da população com 65+ em relação a população de 20 até 64 anos (Ou população em idade para trabalhar

algumas condições como um *steady-state* quando a taxa de crescimento populacional é negativa.

Mino e Sasaki (2023) também recai sobre um modelo de crescimento semi-endógeno porém com a inclusão de recursos exauríveis, os resultados encontrados são que o crescimento da renda per-capita se torna incompatível, apenas se inovações tecnológicas surgirem de maneira exógena, ou se ações de *policy* forem tomadas no momento exato o crescimento da renda e consumo é sustentável, resultado semelhante ao encontrado por Jones (2022).

Quanto ao lado empírico trabalhos como Maestas, Mullen e Powell (2023) sugerem que um crescimento de 10% da parcela da população com mais 60 anos impactam em até 5.5% na taxa de crescimento do produto por trabalhador nos Estados Unidos, com os principais efeitos sendo divididos na redução da força de trabalho disponível, e também sobre produtividade, aonde um terço dessa queda é atribuída a redução da força de trabalho e o restante a redução da produtividade do trabalho.

Trabalho de Rosella Nicolini (2024) analisa o impacto do envelhecimento em um aspecto regional e espacial na União Europeia entre os anos de 2000 e 2020, os resultados encontrados são que o envelhecimento populacional representado pela variável da razão de dependência e idade mediana impactam negativamente no crescimento econômico, especificações adicionais incluem ainda efeitos regionais/espaciais distintos e concluem que a migração apresenta um forte componente que pode contrabalancear o efeito negativo da transição demográfica.

Aksoy et al. (2019) usando dados de uma série de países da OCDE entre 2015 e 2025 estima que o envelhecimento populacional reduz em média 0.64% o crescimento econômico dos países analisados, para além do crescimento econômico são observados efeitos de quedas em investimentos, poupança e da taxa de juros, também é encontrado que estrutura demográfica é relacionada diretamente com o número de patentes geradas, autores também desenvolvem um modelo teórico que encontra impactos semelhantes.

Como meio de entender como o processo de transição demográfica e envelhe-

cimento populacional impacta nas economias, para além de uma visão focada no crescimento, e observar outras métricas como distribuição de riqueza, utilizamos um modelo de gerações sobrepostas (OLG) ao mesmo estilo de Huggett (1996) com algumas modificações, dentre elas a alteração de parâmetros que envolvem a estilização demográfica da economia simulada e a estrutura de choques adotada, o principal objetivo desse trabalho é através da inclusão de heterogeneidade em um *framework* de gerações sobrepostas aonde os indivíduos apresentam incerteza quanto aos rendimentos e ao tempo de vida restante, entender como as economias reagem em seu *steady-state* a mudanças demográficas estruturais.

Este trabalho é dividido em 6 sessões, na sessão dois descreveremos o modelo base de Huggett (1996), com o ambiente físico e demais detalhes, na seção três descreveremos os dados utilizados, com destaque principalmente as propostas de modificação relativas as tabuas de via atuariais e como elas podem impactar na demográfica envolvida no modelo, na seção quatro estão os principais resultados do modelo, mostrando sobre diversos aspectos como o modelo reage a mudanças nos parâmetros demográficos e por fim na seção 5 as considerações finais, e na seção 6 temos o apêndice que conta com a descrição do algoritmo utilizado para a estimativa do modelo OLG e além disso alguns gráficos descritivos a respeito das funções políticas e da distribuição de ativos por idade.

## 2 Modelo

Aqui descreveremos o modelo utilizado no trabalho que consiste de um modelo de gerações sobrepostas com múltiplos períodos ao mesmo estilo que o utilizado por Huggett (1996).

### 2.1 Ambiente físico

#### 2.1.1 *Households*

A economia é populada por um contínuo de indivíduos que são heterogêneos em idade e também no nível de produtividade, essa heterogeneidade da produtividade é associada a choques idiosincráticos, indivíduos possuem vida finita e valorizam o fluxo de consumo ao longo da sua vida, dentro do trabalho de Huggett (1996) são assumidos

dois cenários, o cenário de *certain lifetimes* e de *uncertain lifetimes*, para utilizar uma especificação mais apropriada com a realidade neste trabalho são utilizados apenas cenários com *uncertain lifetimes*, ou seja, em cada idade indivíduos estão sujeitos a um risco de morte. Portanto as preferências dos indivíduos são construídas com base no valor esperado do seu fluxo de consumo dado por:

$$E\left[\sum_{t=1}^T \beta^t \left(\prod_{j=1}^t s_j\right) u(c_t)\right]$$

As preferências aqui são comandadas por uma função de utilidade CRRA, a utilidade é dada apenas pelo consumo, o trabalho não gera desutilidade e portanto a oferta de trabalho acaba sendo fixa.

$$U(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

### 2.1.2 Demografia

Como se trata de um modelo de gerações sobrepostas, temos para além da heterogeneidade padrão de um modelo em que indivíduos estão sujeitos a choques idiossincráticos, o fato de heterogeneidade da idade, aqui assumimos uma estrutura demográfica em que a massa de indivíduos em um determinado grupo de idade é dada por:

$$\mu_{t+1} = \frac{\mu_t s_{t+1}}{1 + \eta}$$

Portanto assumimos que no *Steady State* teremos dada uma probabilidade de sobrevivência  $s_t$  para cada idade, e uma taxa de crescimento populacional  $\eta$ , a massa de indivíduos em cada idade seguirá a equação de movimento.

### 2.1.3 Firmas

Existem um continuo de firmas, que aqui são homogêneas, no modelo nossas firmas são maximizadoras de lucro, possuem função de produção com retornos constantes de escala, para simplificação das nossas premissas usamos uma função de produção *Cobb-Douglas*

$$Y = AF(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$$

#### 2.1.4 Governo

Dentro desse *Framework* a presença do Governo não tem uma importância fundamental, os gastos são definidos de maneira exógena, e a princípio governos apenas arrecadam taxando com uma alíquota  $\tau$  tanto salários quanto capital, os gastos, como são exógenos e não impactam na provisão de bens públicos, não alteram a utilidade dos *households*

#### 2.1.5 Previdência

A partir da idade  $R$  os se aposentam, ao se aposentar indivíduos recebem uma pensão  $b_t$ , as pensões são financiadas por meio de um imposto  $\theta$  cobrado nos salários, portanto temos que:

$$b_t = \begin{cases} 0 & \text{Se } t < R \\ b & \text{Se } t \geq R \end{cases}$$

#### 2.1.6 Problema recursivo

O problema recursivo do consumidor pode ser reescrito como:

$$V(a, z, t) = \max_{c, a'} \left\{ u(c) + \beta s_{t+1} \sum_{z'} \pi(z'|z) V(a', z', t+1) \right\}$$

Sujeito à:

$$c + a' \leq a(1 + r(1 - \tau)) + (1 - \theta - \tau)e(z, t)w + T + b_t$$

$$c \geq 0$$

$$a' \geq \begin{cases} a & t < T \\ 0 & t = T \end{cases}$$

## 2.2 Equilíbrio

Um equilíbrio recursivo estacionário para essa economia consiste de uma função valor  $V(a, z, t)$ , funções política  $c(a, z, t)$  e  $a'(a, z, t)$ , preços  $r$  e  $w$ , níveis agregados de capi-

tal  $K$ , trabalho  $L$ , transferências *lump-sum*  $T$  gastos do governo  $G$  e uma sequência de distribuições estacionárias  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_T)$  e  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_T)$  tais que:

1. Dados os preços  $r$  e  $w$   $V(a, z, t)$  é solução do problema recursivo do *household* com  $c(a, z, t)$  e  $a'(a, z, t)$  respostas ótimas associadas;
2. Dados os preços  $r$  e  $w$ , os níveis agregados de capital  $K$  e trabalho  $L$  resolvem o problema da firma:

$$F_K(K, L) = r - \delta \text{ e } F_L(K, L) = w$$

3. Market Clear

- Oferta e demanda

$$\sum_{t=1}^T \mu_t \int_X (c(a, z, t) + a'(a, z, t)) d\psi_t + G = F(K, L) + (1 - \delta)K$$

- Mercado de capitais

$$\sum_{t=1}^T \mu_t \int_X a'(a, z, t) d\psi_t = (1 + n)K$$

- Mercado de trabalho

$$\sum_{t=1}^T \mu_t \int_X e(z, t) d\psi_t = L$$

4. Distribuição dos agentes ao redor das faixas de idade satisfaz<sup>2</sup>:

$$\mu_{t+1} = \frac{s_{t+1} \mu_t}{1 + n}$$

5. Distribuição dos agentes em cada idade  $t$  é consistente com o comportamento individual:

---


$$\psi_{t+1}(B) = \int_X P(z, t, B) d\psi_t$$

<sup>2</sup>Aqui temos que  $\mu_1$  é normalizado de modo que  $\sum_{t=1}^T \mu_t$

6. Dados preços  $r$  e  $w$ ,  $\tau$  é o imposto que torna o orçamento do governo equilibrado:

$$G = \tau[rK + wL]$$

7. Orçamento previdenciário se equilibram:

$$\theta wL = b\left(\sum_{t=R}^T \mu_t\right)$$

8. Transferências *lump-sum* se equilibram:

$$T = \frac{1}{1-n} \left[ \sum_{t=1}^T \mu_t (1 - s_{t+1}) \int_{(a,z)} a'(a, z, t) (1 + r(1 - \tau)) d\psi_t(a, z) \right]$$

Transferências recebidas pelos agentes

### 3 Dados

Os dados utilizados na construção das simulações são essencialmente os mesmos utilizados por Huggett (1996), algumas mudanças que fizemos nas parametrizações foram feitas na taxa de crescimento populacional  $\eta$ , e das tabuas de sobrevivência, o restante dos parâmetros permanece praticamente estático, com uma única diferença vindo no processo gerador dos choques de renda, aonde aqui utilizamos uma quantidade menor de pontos discretizados, sendo no artigo original um total de dezoito pontos e nesse artigo um número de 7 pontos.

Tabela 1: Parametrização

Parâmetro	Valor	Fonte
$\beta$	1.011	Huggett (1996)
$\sigma$	1.5/3.0	Huggett (1996)
$A$	0.895944	Huggett (1996)
$\alpha$	0.36	Huggett (1996)
$\delta$	0.06	Huggett (1996)
$N$	79	Huggett (1996)
$R$	46	Huggett (1996)
$s_t$	*	Jordan (1975)/ United States Social Security (2021)
$\sigma_\varepsilon^2$	0.045	Huggett (1996)
$\eta$	-0.012/0.0/0.012	Huggett (1996)
$\tau$	*	-
$\theta$	0.1	Huggett (1996)
$a$	0	Huggett (1996)

### 3.1 Grids

Parte importante do trabalho se baseia na construção dos *grids*, do modelo de OLG, existem ao todos três *grids*, o grid de capital  $k$ , o grid de choques idiossincráticos  $z$  e o *grid* de idades  $t$ .

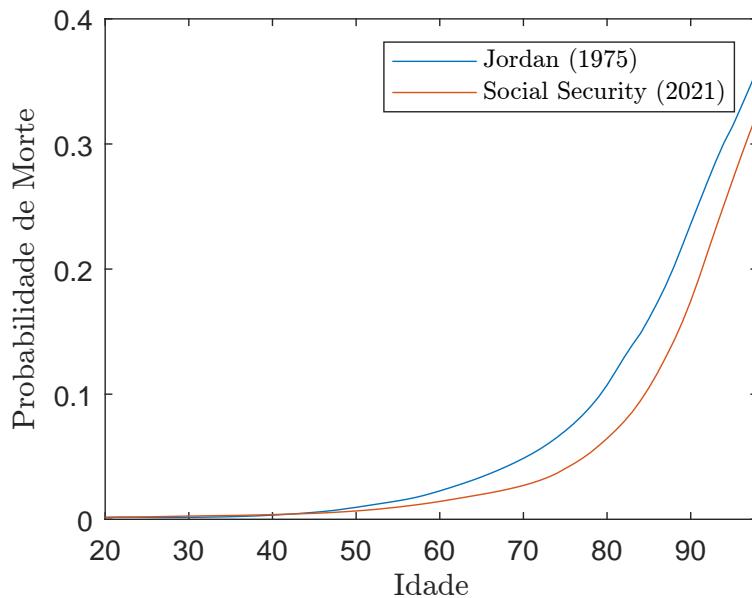
O *range* de idades utilizadas foi de  $t = 20$  até  $t = 98$  compreendendo ao todo 79 períodos, assim como no trabalho de Huggett (1996). Quanto ao *grid* de capital foi utilizado um *grid* de valor mínimo  $k = 0$  e valor máximo  $k = 300$  com 150 pontos.

Os choques usam em sua estrutura a mesma concebida por Huggett (1996), usando um parâmetro de persistência do processo AR(1) igual à  $\rho = 0.96$  e com desvio padrão dos erros iguais a  $\sigma_\varepsilon^2 = 0.045$ , no artigo original o total de pontos que o processo foi discretizado foi de 18 pontos, como forma de permitir maior velocidade de processamento e permitir mais exercícios, adotamos um total de 7 pontos discretizados porém continuamos usando um total de 4 desvios a respeito da média.

### 3.2 Demografia e Renda

Na figura abaixo estão as curvas de sobrevivência utilizadas, a primeira curva de cor azul, é relativa a curva original utilizada no trabalho de Huggett (1996), essa mortalidade é proveniente de Jordan (1975), enquanto a segunda curva foi utilizada United States Social Security (2021), a utilização de outra curva de mortalidade reflete a tentativa de para além de simular novos equilíbrios com taxas de crescimento populacional diferente, testar como a maior sobrevivência (menor mortalidade) impacta nos novos *Steady States*.

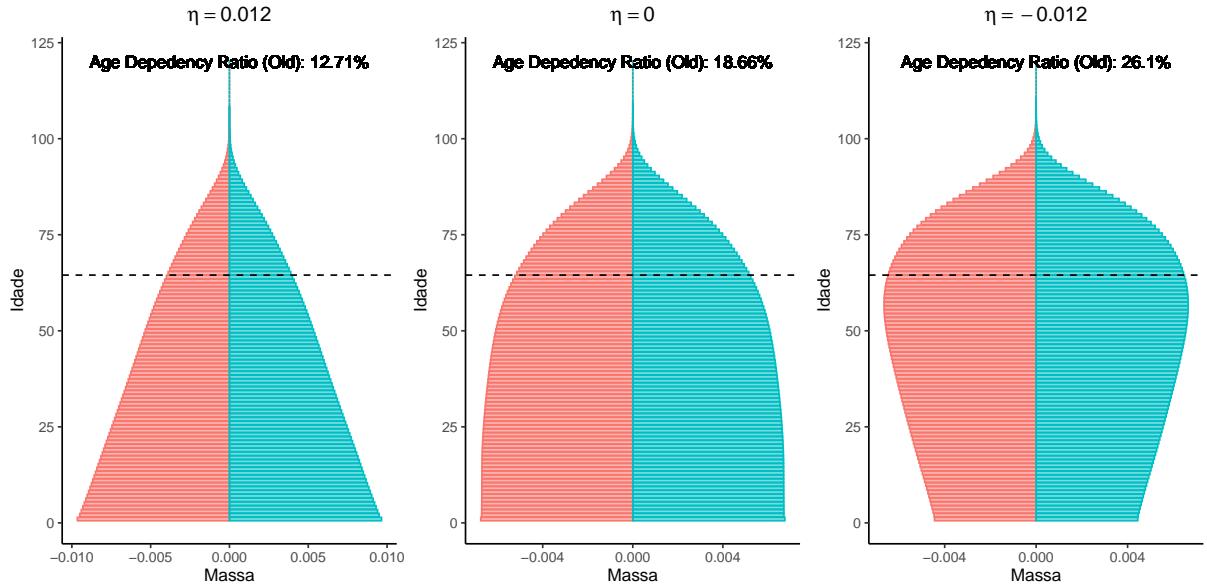
Figura 3: Probabilidades de morte



Notas: Dados com base em Jordan (1975) e United States Social Security (2021)

A utilização de diferentes taxas de crescimento populacional, busca colocar situações novas, a primeira de crescimento populacional nulo, ou seja dada uma taxa de mortalidade estável, a população se mantém estável, e por último em uma situação de taxa negativa de crescimento populacional. Cada uma dessas taxas de crescimento populacional implica em uma diferente distribuição da massa de indivíduos em *steady state* ao longo da faixa etária, o exemplo abaixo usa a tabua atuarial de 2021 para diferentes taxas de crescimento populacional

Figura 4: Simulações com diferentes taxas de crescimento populacional



Notas: Mortalidades utilizadas com base em United States Social Security (2021)

Dada a simulação, a alteração da taxa de crescimento populacional tem como resultado um maior o percentual de indivíduos que se concentrara na faixa acima de 65 anos, portanto maior a razão de dependência da população simulada. Quando alteramos a tabua de mortalidade, por exemplo de United States Social Security (1980) para United States Social Security (2021), os resultados encontrados induzem a um maior percentual da população na faixa de 65 anos ou mais.,.

Tabela 2: Distribuição da População (Grupos de idade)

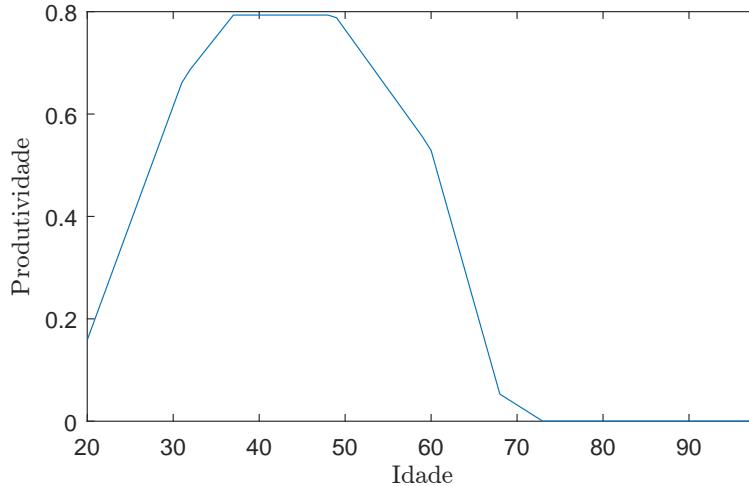
Classe idade	2021			1980		
	$\eta = 0.012$	$\eta = 0$	$\eta = -0.012$	$\eta = 0.012$	$\eta = 0.0$	$\eta = -0.012$
20 -	0.333	0.255	0.184	0.358	0.265	0.182
20 - 65	0.540	0.559	0.555	0.544	0.579	0.585
65 +	0.127	0.187	0.261	0.097	0.156	0.233

Notas: Simulações usando United States Social Security (2021) e United States Social Security (1980)

Por último é necessário destacar o perfil de ganhos/produtividade por idade, essencialmente estamos tratando da variável  $e(z, t)$  que associa basicamente a produ-

tividade a partir dos choques e da idade, usamos uma aproximação linear muito semelhante a utilizada em Huggett (1996), uma vez que os dados exatamente iguais ao utilizado no artigo original não foram encontrados.

Figura 5: Produtividade por idade



Notas: Aproximação baseada em Huggett (1996)

## 4 Resultados

Os resultados acompanham indicadores como a relação Capital produto, produto agregado, capital agregado, trabalho agregado, coeficiente de GINI, concentração da riqueza total nos percentis de renda de 1%, 5% e 20%, população com riqueza zero ou negativo, de modo que possamos entender como alterações em parâmetros demográficos dentro de um modelo de gerações sobrepostas afetam o *steady state* de nossa economia simulada, para além de olhar apenas para esses resultados de forma agregada, olhamos para a riqueza média e o índice de GINI nos diferentes perfis de idade.

### 4.1 Resultados iniciais

São realizados ao todo são 6 exercícios iniciais, combinando diferentes taxas de crescimento populacional, sendo respectivamente as testadas  $\eta = -1.2, 0, 1.2$ , e tabuas atuariais de Jordan (1975) e United States Social Security (2021), também é alterado o parâmetro de aversão ao risco, sendo testados  $\sigma = 1.5$  e  $\sigma = 3.0$ .

Tabela 3: Resultados principais

$\sigma$	$\eta$	$K/Y$	$T$	Gini	Concentração			Wealth < 0
					1%	5%	20%	
1.5	0.012	4.0395	0.7174	0.6685	0.0764	0.2851	0.6794	0.1009
	0.0	4.0994	0.8528	0.6685	0.0774	0.2923	0.6779	0.1022
	-0.012	4.1878	0.9705	0.6709	0.0794	0.2943	0.6788	0.1070
3.0	0.012	3.6501	0.7326	0.6734	0.0822	0.2920	0.6952	0.0434
	0.0	3.7191	0.9014	0.6740	0.0826	0.2923	0.6931	0.0535
	-0.012	3.8296	1.0656	0.6764	0.0846	0.2947	0.6970	0.0518

Notas: Resultados usam mortalidade de Jordan (1975).

Tabela 4: Resultados principais

$\sigma$	$\eta$	$K/Y$	$T$	Gini	Concentração			Wealth < 0
					1%	5%	20%	
1.5	0.012	4.6699	0.5046	0.6252	0.0621	0.2511	0.6341	0.0330
	0.0	4.8011	0.5991	0.6300	0.0643	0.2580	0.6425	0.0357
	-0.012	4.9968	0.6682	0.6384	0.0677	0.2617	0.6463	0.0384
3.0	0.012	4.3704	0.5227	0.6301	0.0660	0.2561	0.6462	0.0378
	0.0	4.5426	0.6447	0.6335	0.0674	0.2588	0.6475	0.0377
	-0.012	4.8081	0.7514	0.6393	0.0695	0.2633	0.6524	0.0354

Notas: Resultados usam mortalidade de United States Social Security (2021).

Os resultados implicam inicialmente que quanto menor a taxa de crescimento populacional maior a razão capital produto  $K/Y$ , e também maiores as transferências accidentais, quando abrimos os resultados a respeito da distribuição de riqueza na massa de indivíduos temos que as taxas de crescimento populacional, pouco afetam o índice de Gini e o percentual da riqueza concentrado nos quantis 1%, 5% e 20%, a massa de indivíduos com riqueza menor ou igual a zero é pouco afetada pela taxa de crescimento populacional, porém aparenta ter uma relação positiva, e acaba sendo mais afetada em proporção quando alteramos a taxa de aversão relativa ao risco de

$\sigma = 1.5$  para  $\sigma = 3$ , ou quando mudamos as tabuas de mortalidade.

Mudanças nas tabuas atuariais implicam também em aumento da razão capital produto  $K/Y$ , e redução nas transferências accidentais, outro ponto importante é uma modificação um pouco mais significativa no índice de Gini com uma redução de três a quatro pontos percentuais dependendo do indicador de aversão relativa ao risco  $\sigma$ , isso pode ser visto com um pouco mais de detalhe quando olhamos o percentual da riqueza detidos pelo 1%, 5% e 20% mais ricos, aqui temos a concentração em todos os percentuais diminui, o percentual de indivíduos com riqueza zero ou menor também é reduzido de forma significativa, portanto mudando condições relativas a tabua de vida atuarial, que nesse caso implicam redução da mortalidade das faixas etárias mais velhas, implicam principalmente numa melhora marginal da distribuição de riqueza nessa economia.

Tabela 5: Resultados secundários

$\sigma$	$\eta$	$Y$	$K$	$L$	$r$	$w$	$\tau$	$b$
1.5	0.012	10.3065	41.6336	5.5797	0.0891	1.1822	0.2574	3.5408
	0.0	10.0520	41.2073	5.3970	0.0878	1.1920	0.2586	3.4468
	-0.012	9.5964	40.1882	5.0910	0.0860	1.2064	0.2604	3.2812
3.0	0.012	9.7352	35.5348	5.5797	0.0986	1.1166	0.2497	3.3846
	0.0	9.5163	35.3926	5.3970	0.0968	1.1285	0.2510	3.3017
	-0.012	9.1256	34.9476	5.0910	0.0940	1.1472	0.2532	3.1557

Notas: Resultados usam mortalidade de Jordan (1975).

Tabela 6: Resultados secundários

$\sigma$	$\eta$	$Y$	$K$	$L$	$r$	$w$	$\tau$	$b$
1.5	0.012	10.2378	47.8090	5.1084	0.0771	1.2826	0.2709	2.1164
	0.0	9.6391	46.2784	4.7352	0.0750	1.3028	0.2739	1.9831
	-0.012	8.8003	43.9731	4.2271	0.0720	1.3324	0.2785	1.7973
3.0	0.012	9.8631	43.1057	5.1084	0.0824	1.2357	0.2643	2.0603
	0.0	9.3435	42.4435	4.7352	0.0793	1.2628	0.2681	1.9403
	-0.012	8.6119	41.4070	4.2271	0.0749	1.3039	0.2741	1.7713

Notas: Resultados usam mortalidade de United States Social Security (2021).

Os resultados secundários nos mostram uma visão mais agregada da economia simulada, a alteração das taxas de crescimento populacional em ambos os cenários de aversão ao risco e de tabuas de mortalidade tem como principal impacto, a redução do produto agregado  $Y$ , capital agregado  $K$  e trabalho agregado  $L$ , taxas de juros  $r$  também sofrem quedas, por consequência temos efeitos que contrabalanceiam esses, as taxas do governo  $\tau$  em equilíbrio acabam sendo ligeiramente maiores para contrabalancear perdas de arrecadação sofridas pela redução do capital e trabalho agregado, da mesma forma temos um movimento de redução dos benefícios previdenciários  $b$ , uma vez que a massa de indivíduos aposentados aumentou e além disso devido a queda da oferta de trabalho agregado a base de arrecadação menor e uma taxa fixa  $\theta = 0.1$ , outro movimento destacado é o de aumento dos salários.

Observando os efeitos de equilíbrio de um aumento de sobrevivência temos redução do produto agregado  $Y$  e também redução do trabalho agregado  $L$ , porém temos um aumento do capital agregado  $K$ , por vez as taxas de juros  $r$  em equilíbrio são menores e os salários  $w$  maiores, outro efeito é a redução dos benefícios previdenciários dados por  $b$ .

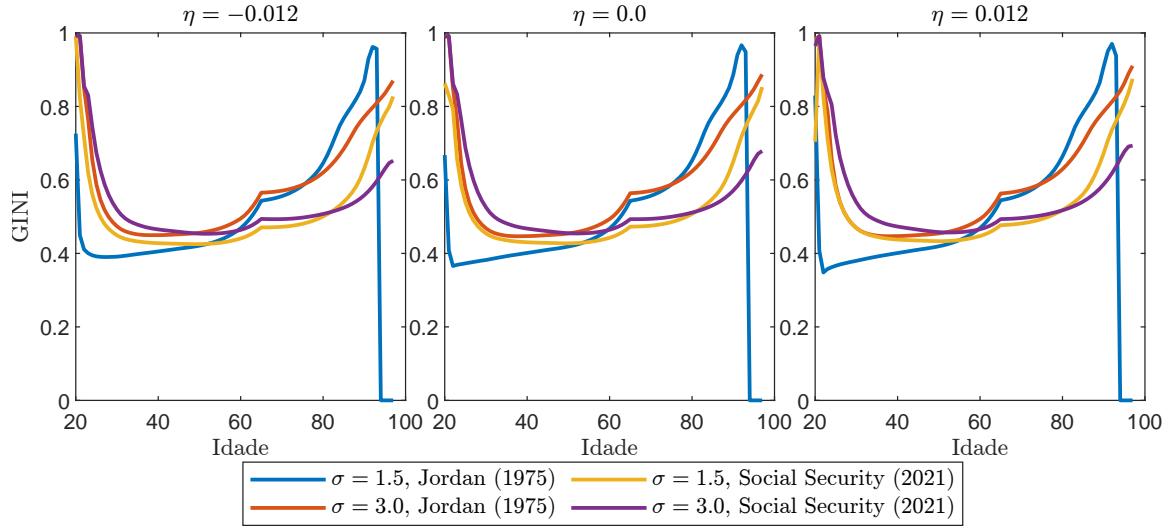
Em resumo dentro de um *framework* simples desenvolvido por Huggett (1996) com modificações na taxa de crescimento populacional e tabua de sobrevivência tendem a alterações no produto  $Y$ , capital  $K$  e trabalho agregados  $K$ , e também nas taxas de juros e salários, porém pouco influenciando a distribuição de riqueza na economia

em variáveis como Gini e o percentual de riqueza concentrada nos principais quantis da população.

## 4.2 Distribuição de riqueza entre idades

Para além de uma análise agregada a respeito da distribuição de riqueza como o GINI e percentual da riqueza concentrada por um percentual da população, podemos ter um detalhamento maior em cada idade.

Figura 6: GINI por idade



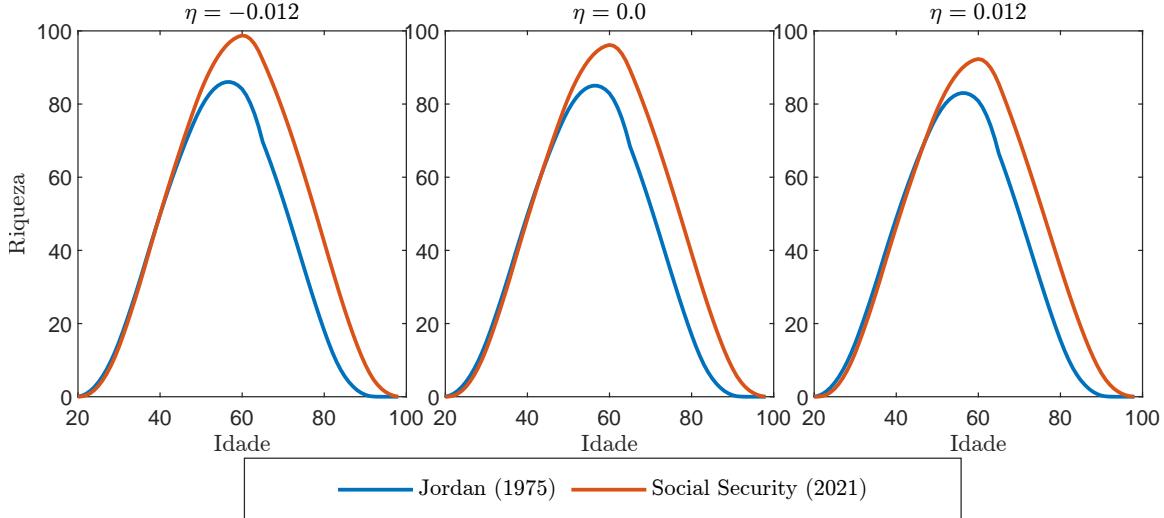
Nota: Índices elaborados com base nas tabuas atuariais de Jordan (1975) e United States Social Security (2021).

O GINI por idade por exemplo apresenta mudanças significativas quando mudamos por exemplo a taxa de sobrevivência, aqui temos que quando se melhora as condições de sobrevivência da população, principalmente nas idades mais avançadas temos que o GINI de idades mais avançadas acaba caindo, implicando que a desigualdade quanto a posse de ativos diminui, porém o GINI do coorte mais jovens acaba caindo.

As linhas Azul e amarela apresentam o mesmo coeficiente de aversão ao risco  $\sigma = 1.5$  porém apresentam sobrevivências diferentes, sendo a linha azul uma sobrevivência menor que a linha amarela, vemos que a mudança da taxa de sobrevivência implica

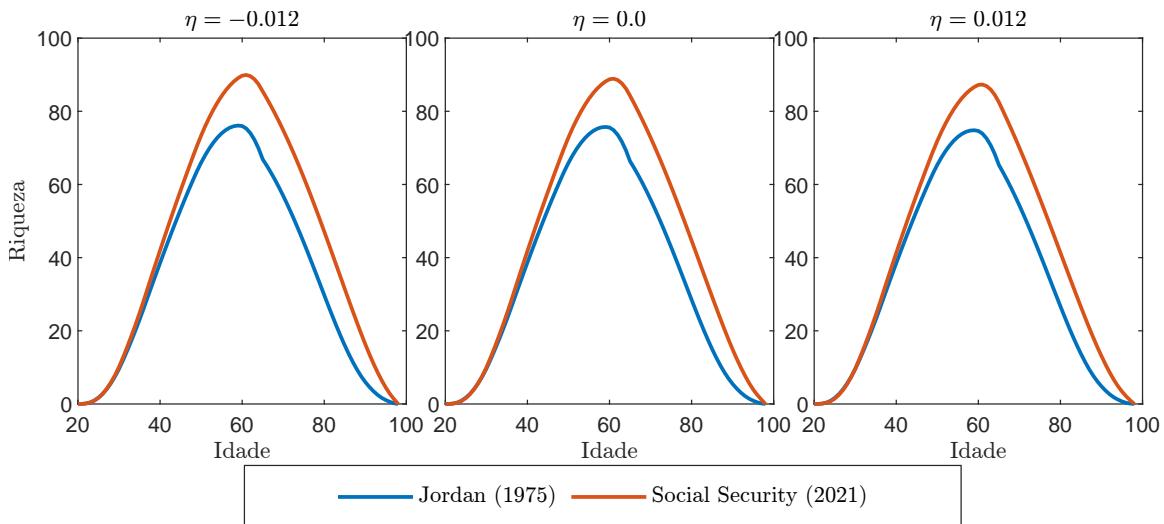
um aumento do GINI para idades menores que 60 e uma redução do GINI para idades maiores que 60, ou seja, apesar de não existirem grandes mudanças no GINI agregado, temos que nos grupos de idade existem mudanças significativas.

Figura 7: Riqueza média por idade,  $\sigma = 1.5$



Nota: Tabua atuarial de Jordan (1975)

Figura 8: Riqueza média por idade,  $\sigma = 3.0$



Nota: Tabua atuarial de United States Social Security (2021)

Para além da mudança do GINI por idade temos outro impacto importante que

é a riqueza média detida pela massa de indivíduos em cada idade, aqui temos que a mudança da tabua de vida atuarial impacta num aumento da riqueza média detida pelos coortes de idade mais altos, ou seja, um resultado esperado, porém há pouca ou nenhuma mudança nas coortes mais jovens.

## 5 Considerações Finais

Os resultados indicam que mudanças nos parâmetros demográficos, como taxas de crescimento populacional e tábuas de vida atuariais, afetam significativamente variáveis agregadas da economia simulada, como produto agregado  $Y$ , capital agregado  $K$ , trabalho agregado  $L$ , taxas de juros  $r$  e salários  $w$ , mas apresentam impacto limitado na distribuição de riqueza medida por indicadores como o índice de Gini e a concentração de riqueza nos quantis superiores da população.

Mais detalhadamente, menores taxas de crescimento populacional aumentam a razão capital-produto  $K/Y$  e as transferências accidentais, enquanto mudanças nas tábuas de mortalidade levam a um aumento no capital agregado e também da razão  $K/Y$ , redução no índice de Gini e menor concentração de riqueza entre percentis mais ricos. Esses ajustes também resultam em redução do produto agregado, da força de trabalho e das taxas de juros, mas promovem aumento nos salários e redistribuição moderada dos benefícios previdenciários devido à maior massa de indivíduos aposentados.

A análise por coortes etários revela nuances importantes: melhorias nas condições de sobrevivência reduzem a desigualdade de riqueza em idades avançadas (redução do índice de Gini), mas aumentam para coortes mais jovens (Aumento do índice de Gini). Além disso, coortes mais velhas experimentam maior nível de riqueza média com o aumento da sobrevivência, enquanto coortes mais jovens permanecem praticamente inalteradas.

Em suma, o modelo reforça que mudanças demográficas afetam significativamente os equilíbrios macroeconômicos e a dinâmica de riqueza ao longo das idades, mesmo que o impacto sobre a desigualdade agregada seja limitado, evidenciando a necessidade de análises mais detalhadas por faixa etária para capturar esses efeitos.

Algumas limitações, e possíveis extensões do trabalho são a inclusão de aspectos como lazer na função de utilidade, de forma que a escolha do percentual do tempo trabalhado seja sujeita a otimização do indivíduo, e além disso inclusão de mecanismos como formalização e informalização que permeiam questões relativas a ocupação dos indivíduos, de forma que a heterogeneidade se estenda também a escolha ocupacional.

## 6 Apêndice

### 6.1 Algoritmo

Abaixo vamos a descrição básica do algoritmos para computar o equilíbrio de uma econômica de gerações sobrepostas, o algoritmo em questão é para o caso de incerteza durante a vida, uma vez que estamos trabalhando com tabuas de mortalidade.

0. Parametrização geral da economia simulada, definição dos parâmetros de convergência  $\varepsilon$  e máximo de iterações e de correção da convergência  $\omega$ ;
1. Chutes iniciais do nível de capital agregado  $K$  e transferências acidentais  $T$
2. A partir dos chutes calcular  $w$  e  $r$  a partir das produtividades marginais do capital e trabalho, como supomos uma função de produção Cobb-Douglas então:

$$r = F_K(K, L) - \delta = \alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} - \delta$$

$$w = F_L(K, L) = \alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

3. Dado  $r$ ,  $w$  e  $T$  resolver o problema de otimização para obter as funções políticas  $a'(a, z, t), c(a, z, t)$ ;
4. Com base nas funções políticas calcular as distribuições estacionárias das massas de indivíduos nos pares  $\psi_t(a, z)$  em cada idade  $t = 1, \dots, N$ ;
5. Dadas as distribuições estacionárias temos:

$$\hat{K} = \frac{\sum_t \int_Z a'(a, z, t) d\psi_t(a, z)}{1 + \eta}$$

$$\hat{T} = \frac{\sum_t \mu_t(1-s_t) \int_Z a'(a, z, t)(1+r(1-\tau))d\psi_t(a, z)}{1+\eta}$$

6. Dado  $K$  e  $T$ , e os cálculos  $\hat{K}$  e  $\hat{T}$  analisamos a convergência:

$$\text{max\_dist} = \max\{|K - \hat{K}|, |T - \hat{T}|\}$$

Se  $\text{max\_dist} \leq \varepsilon$  então a convergência foi alcançada e podemos interromper o processo

Caso contrário, atualizamos  $K$  e  $T$  e voltamos ao passo 2:

$$K = \omega K + (1-\omega)\hat{K}$$

$$T = \omega T + (1-\omega)\hat{T}$$

Com  $\omega \in (0, 1)$

## 6.2 Algoritmo de computação da função política

Para a computação das funções política  $a'(a, z, t)$  e  $c(a, z, t)$  temos um procedimento similar ao realizado a iteração da função valor, nesse caso temos que resolver uma sequência definida de vezes, que corresponderá justamente ao número de idades que estamos considerando, começamos pela idade  $T$  que é a última idade, nessa idade os indivíduos tem certeza que vão morrer e portanto se tiverem ativos  $a(z, T)$  os consomem, junto com o benefício  $b$  recebido, portanto o problema de otimização nessa idade será basicamente resolver:

$$V(a, z, T) = \max_c \{u(c)\}$$

Sujeito á:

$$c + a' \leq a(1 + r(1 - \tau)) + (1 - \theta - \tau)e(z, t)w + T + b_t$$

$$a'(z, t) = 0$$

Ou seja:

$$c = a(1 + r(1 - \tau)) + (1 - \theta - \tau)e(z, t)w + T + b_t$$

A partir de  $t = T - 1$  até  $t = 1$  resolvemos:

$$V(a, z, T - 1) = \max_{a', c} \{u(c) + \beta s_{t+1} E_{z'}[V(a, z, T)|z]\}$$

Sujeito á:

$$c + a' \leq a(1 + r(1 - \tau)) + (1 - \theta - \tau)e(z, t)w + T + b_t$$

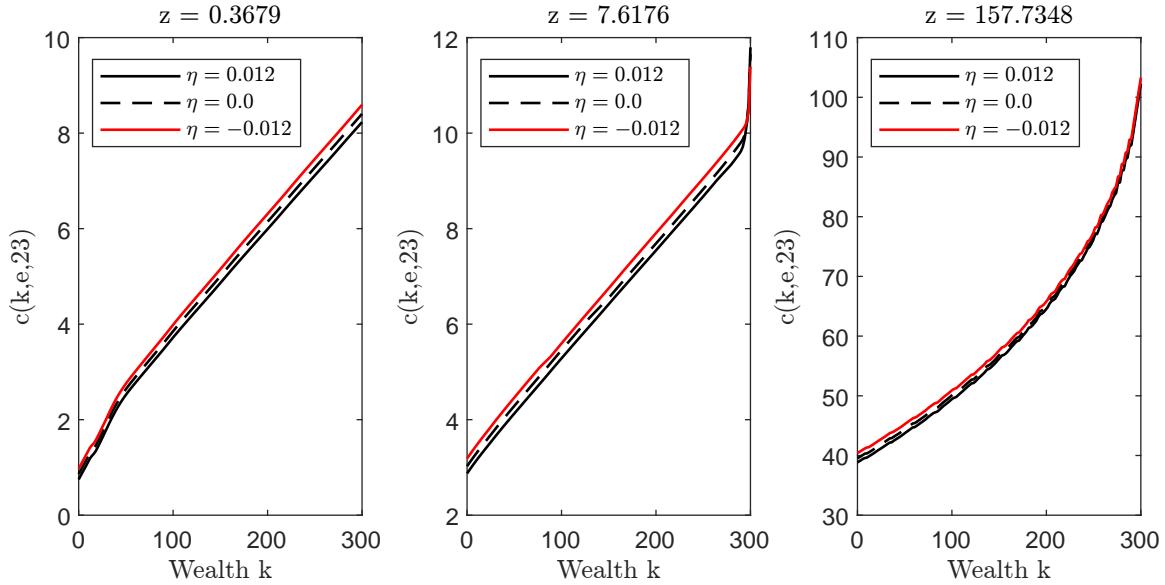
$$a'(z, t) \geq a$$

Aonde  $a$  é o piso de endividamento do modelo.

Repetimos esse procedimento até a idade  $t = 1$  de modo que para cada combinação de ativos  $a$ , choques  $z$  e idade  $t$  encontremos a função política que maximizar o fluxo de utilidade finito durante o *lifetime* esperado.

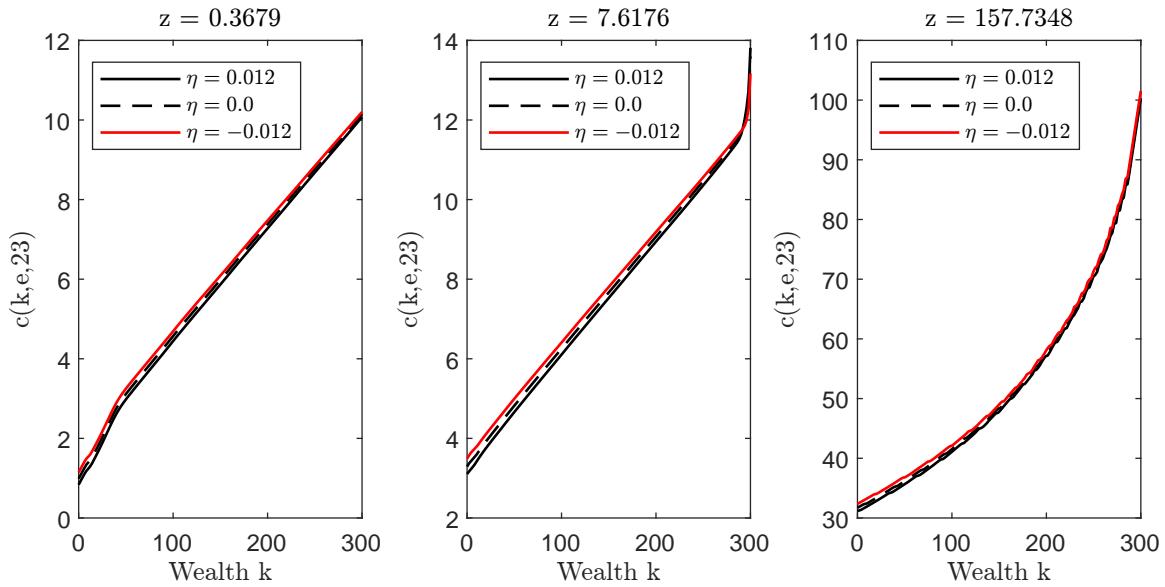
### 6.3 Gráficos

Figura 9: Função política, diferentes choques



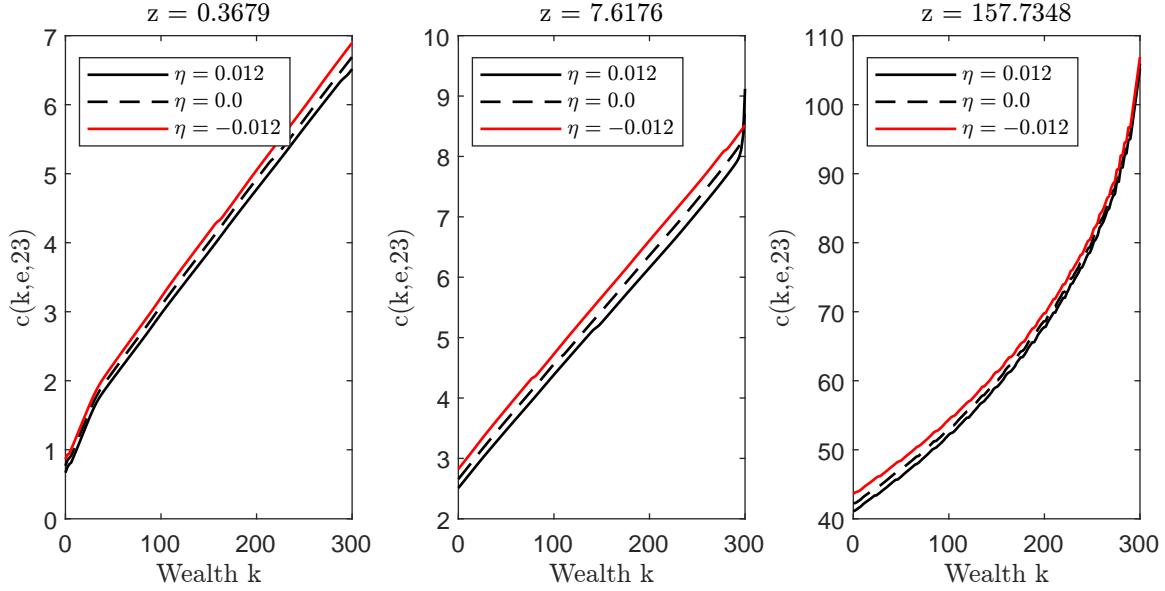
Notas: Resultados usando  $\sigma = 1.5$  e dados de Jordan (1975)

Figura 10: Função política, diferentes choques



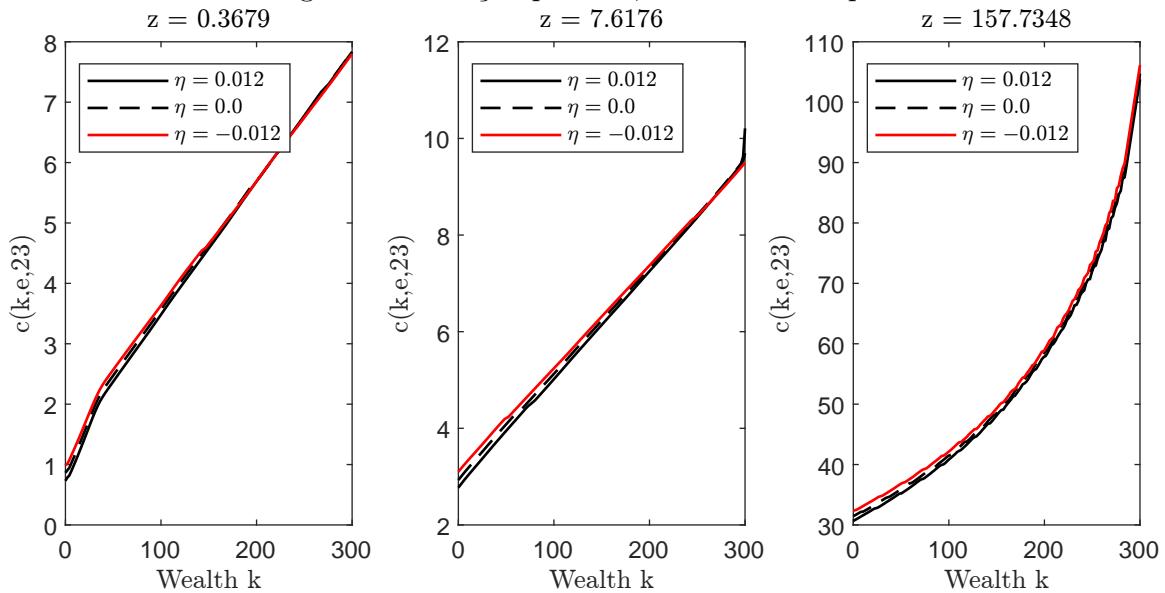
Notas: Resultados usando  $\sigma = 3$  e dados de Jordan (1975)

Figura 11: Função politica, diferentes choques



Notas: Resultados usando  $\sigma = 1.5$  e dados de United States Social Security (2021)

Figura 12: Função politica, diferentes choques

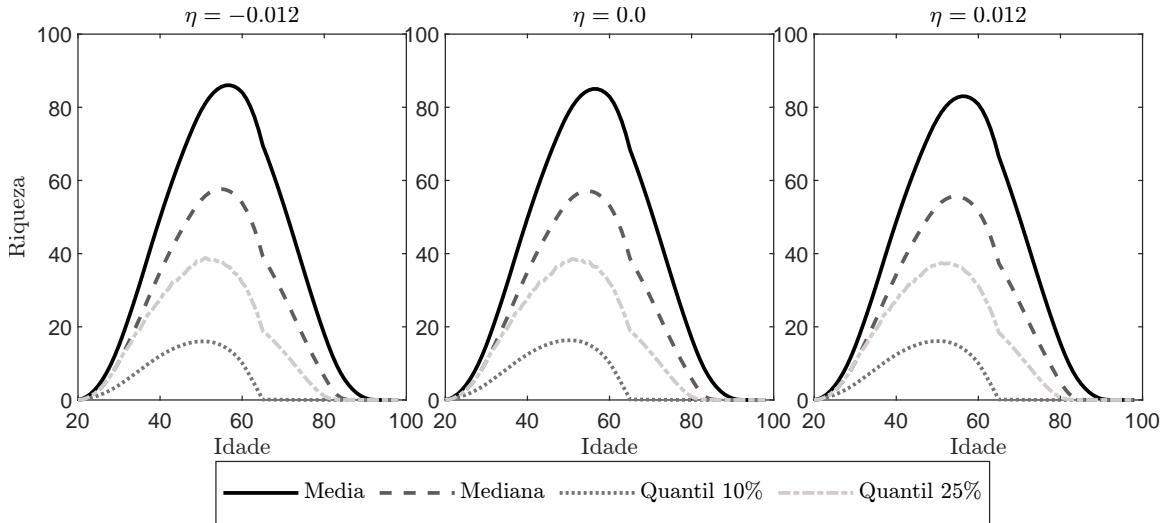


Notas: Resultados usando  $\sigma = 3$  e dados de United States Social Security (2021)

### 6.3.1 Gráficos distribuição de riqueza

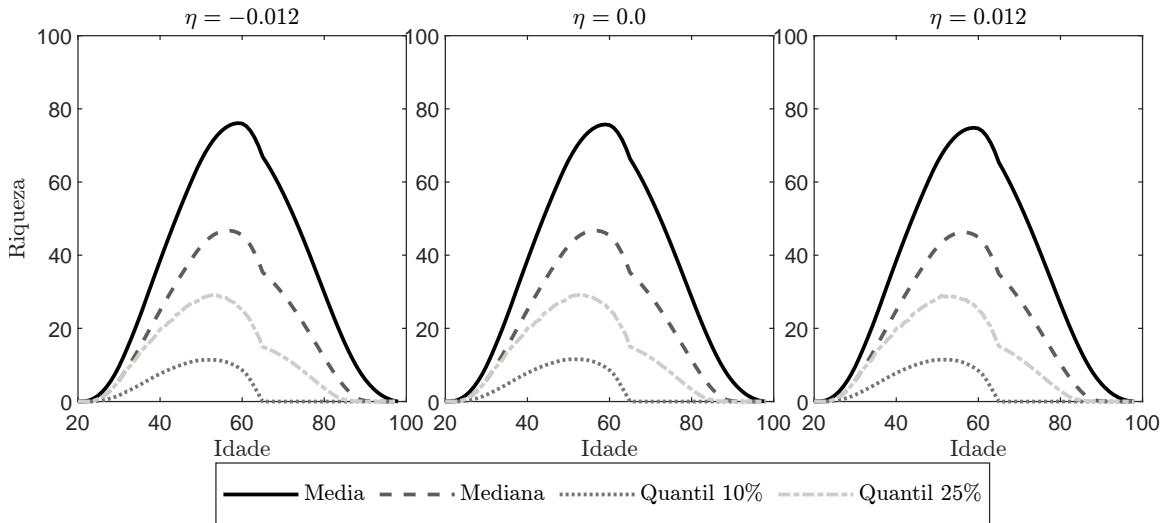
Detalhamento dos gráficos de riqueza média, mediana, e 10% e 25% mais pobres para diferentes tabuas de sobrevivência e taxas de crescimento populacional

Figura 13: Estatísticas de riqueza por idade,  $\sigma = 1.5$



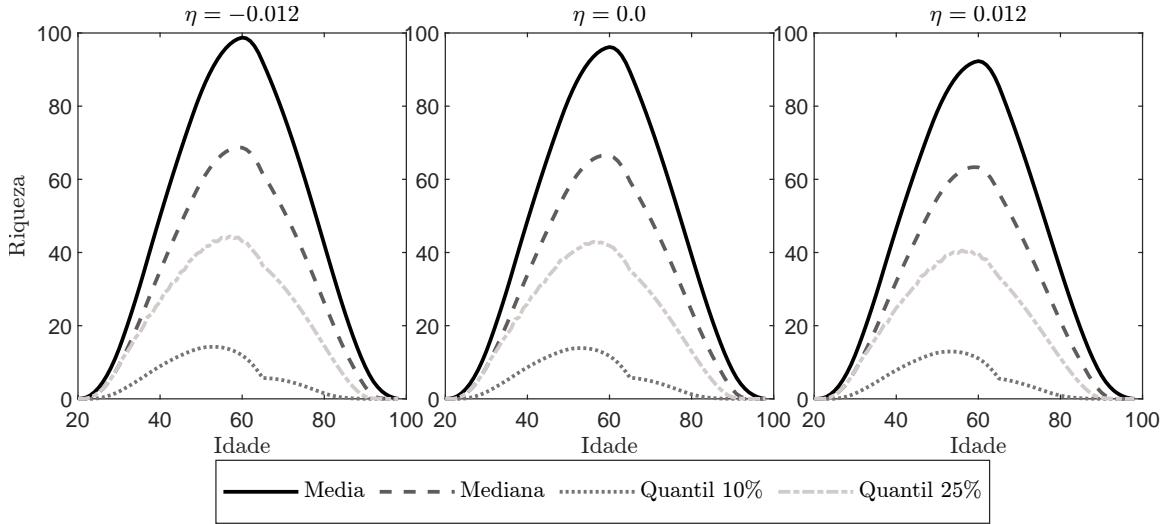
Notas: Usando tabuas atuariais de Jordan (1975)

Figura 14: Estatísticas de riqueza por idade,  $\sigma = 3.0$



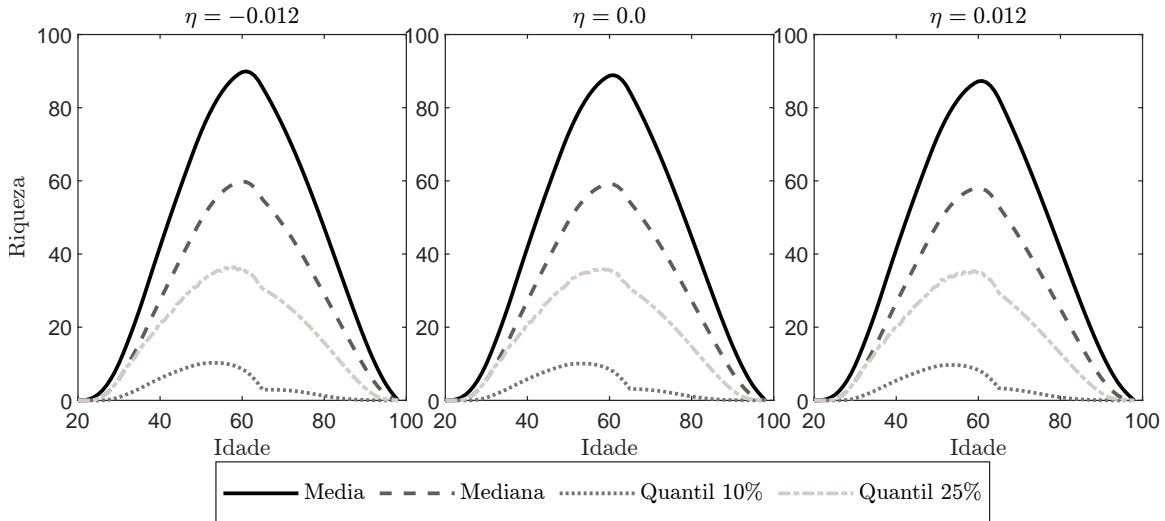
Notas: Usando tabuas atuariais de Jordan (1975)

Figura 15: Estatísticas de riqueza por idade,  $\sigma = 1.5$



Notas: Usando tabuas atuariais de United States Social Security (2021)

Figura 16: Estatísticas de riqueza por idade,  $\sigma = 3.0$



Notas: Usando tabuas atuariais de United States Social Security (2021)

## Referências

Huggett, Mark (1996). “Wealth distribution in life-cycle economies”. Em: *Journal of Monetary Economics* 38.3, pp. 469–494. ISSN: 0304-3932. DOI: <https://doi.org/>

- 10.1016/S0304-3932(96)01291-3. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304393296012913>.
- United Nations (2024). *World Population Prospects*. data retrieved from World Population Prospects, <https://population.un.org/wpp/downloads>.
- World Bank (2024). *Population estimates and projections*. data retrieved from Population estimates and projections, <https://databank.worldbank.org/source/population-estimates-and-projections>.
- Kuznets, Simon (dez. de 1960). “Population Change and Aggregate Output”. Em: NBER Chapters, pp. 324–351. URL: <https://ideas.repec.org/h/nbr/nberch/2392.html>.
- Jones, Charles I. (nov. de 2022). “The End of Economic Growth? Unintended Consequences of a Declining Population”. Em: *American Economic Review* 112.11, pp. 3489–3527. DOI: 10.1257/aer.20201605. URL: <https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/aer.20201605>.
- Mino, Kazuo e Hiroaki Sasaki (2023). “Long-run consequences of population decline in an economy with exhaustible resources”. Em: *Economic Modelling* 121, p. 106212. ISSN: 0264-9993. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2023.106212>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026499932300024X>.
- Maestas, Nicole, Kathleen J. Mullen e David Powell (abr. de 2023). “The Effect of Population Aging on Economic Growth, the Labor Force, and Productivity”. Em: *American Economic Journal: Macroeconomics* 15.2, pp. 306–32. DOI: 10.1257/mac.20190196. URL: <https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/mac.20190196>.
- Rosella Nicolini, José Luis Roig (2024). “The spatial dimension of ageing and growth in European regions”. Em: *The Annals of Regional Science* 73, pp. 1649–1679. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00168-024-01311-z>. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00168-024-01311-z>.
- Aksoy, Yunus et al. (jan. de 2019). “Demographic Structure and Macroeconomic Trends”. Em: *American Economic Journal: Macroeconomics* 11.1, pp. 193–222. DOI: 10.1257/mac.20170114. URL: <https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/mac.20170114>.
- Jordan, Chester Wallace (1975). *Life contingencies*. Society of Actuaries.
- United States Social Security (2021). *Actuarial Life Table*.

United States Social Security (1980). *Actuarial Life Table*.