COMPUTAÇÃO DE MODELOS OLG

Yuri Passuelo

14 de Novembro de 2025

Sumário

BACKGROUND

- Classe de modelos naugurada por Diamond (1965)
- Problemas surgem no modelo básico:
  1. Incerteza em relação a Saúde e renda
  2. Estrutura domiciliar
  3. Características institucionais (seguro social, taxação da renda...)
  4. Características de Mercado como restrição de endividamento, e ausência de mercado de seguros.
- White (1978)- Taxas de poupança dos modelos de life-cycle padrão tendem a ser menores do que nos dados
- Kotlikoff and Summers (1981) - A maioria do estoque de capital dos americanos poderia ser atribuída a uma transferência intergeracional

BACKGROUND

- Modelo de agentes heterogêneos, com enfoque no papel do ciclo de vida definido por Huggett (1996)
- Buscar entender a problemática da distribuição de riqueza incluindo:
  - Choques de produtividade idiossincráticos
  - Heterogeneidade por idade
  - Risco de morte
  - Transferências intergeracionais
- Também faz parte da classe de modelos de gerações sobrepostas de Diamond (1965)

AMBIENTE

- Tempo é discreto e finito $t \in [1, ...N]$
- Em cada período indivíduos são sujeitos a probabilidade de sobrevivência s_{t+1} para o próximo período
- Indivíduos buscam maximizar a utilidade esperada durante seu ciclo de vida.

$$\mathbb{E}_0\left[\sum_{i=1}^{T}\beta^t\left(\prod_{j=1}^{t}s_j\right)u(c_t)\right]$$

- Preferências somente sobre consumo dadas por uma CRRA:

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

DINÂMICA DEMOGRÁFICA

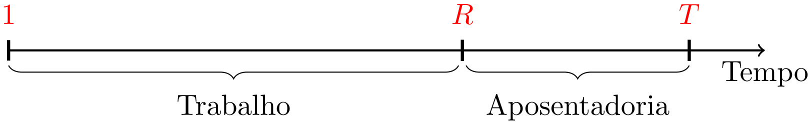
- Massa de individuos é unitária
- População cresce a taxa de crescimento η
- A massa de indivíduos na idade t é μ_t
- A regra de movimento:

$$\mu_{t+1} = \frac{s_{t+1}\mu_t}{1+\eta}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_t = 1$$

CICLO DE VIDA

- Indivíduos *nasce* no período $t = 1$, trabalha até o período $t = R$, a partir de $t = R$ se aposenta de formal compulsória até o período $t = T$



PROBLEMA DA FIRMA

- Firmas são competitivas, representada por uma única firma que usa como insumos apenas capital K e trabalho L

$$Y = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

PROBLEMA DA FIRMA

$$\Pi = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} - wL - (r + \delta)K$$

Portanto:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = 0 \implies r = \alpha A \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} + \delta$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = 0 \implies w = (1-\alpha) A \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

MODELO

- Função valor do problema:

$$V(a,z,t) = \max_{a',c} \left\{ u(c) + \beta s_{t+1}\mathbb{E}\Big[V(a',z',t+1)\Big]|z \right\}$$

Sujeito à:

$$c + a' \leq (1 + r(1-\tau))a + (1-\theta-\tau)e(z,t)w + \underbrace{T}_{\text{Transferências}} + b_t$$

$$c \geq 0$$

$$a' \geq \begin{cases} \underline{a} & \text{, se } t < N \\ 0 & \text{, se } t = N \end{cases}$$

$$b_t = \begin{cases} 0 & \text{, se } t \leq R \\ b & \text{, se } t > R \end{cases}$$

EQUILÍBRIO

EQUILÍBRIO

1. $c(x,t)$ e $a(x,t)$ são funções políticas ótimas e maximizam função valor $V(x,t)$
2. No ótimo firmas maximizam lucro:

$$r = \alpha A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} ;\ w = (1-\alpha)A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

3. Mercado fecha:

$$\sum_t \mu_t \int_X (c(x,t) + a(x,t))d\Psi_t = F(K,L) + (1-\delta)K$$

$$\sum_t \mu_t \int_X a(x,t)d\psi_t = (1+\eta)K$$

$$\sum_t \mu_t \int_X e(z,t)d\psi_t = L$$

EQUILÍBRIO

EQUILÍBRIO

4 Distribuição consistente com comportamento individual

$$\psi_{t+1}(B) = \int_X P(x,t,B) d\psi_t$$

5 Restrição orçamentária do governo e seguridade social

$$G = \tau(rK + wL) \; ; \; \theta wL = b\Big(\sum_R^N \mu_t\Big)$$

6 Transferências igual a *accidental bequests* :

$$T = \frac{1}{1-\eta}\Big[\sum_t \mu_t (1 - s_{t+1}) \int_X a(x,t)(1 + r(1-\tau)) d\psi_t\Big]$$

PARAMETRIZAÇÃO

GRID DE CAPITAL

$$n_k = 150$$

$$k_{\text{min}} = 0 \; ; \; k_{\text{max}} = 300$$

GRID DE CHOQUES

Choques seguem um processo AR(1), usando distância de quatro desvios padrões da média.

$$z_t = \rho_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$n_z = 18$$

$$\rho = 0.96 \; ; \; \sigma_\varepsilon = 0.045$$

CALIBRAÇÃO

TABLE: Calibração

Parâmetro	**Valor**	**Fonte**
β	1.011	Huggett (1996)
σ	1.5/3.0	Huggett (1996)
A	0.895944	Huggett (1996)
α	0.36	Huggett (1996)
δ	0.06	Huggett (1996)
N	79	Huggett (1996)
R	46	Huggett (1996)
s_t	*	Jordan (1975)/ US Social Security (2021)
σ_ε^2	0.045	Huggett (1996)
η	-0.012/0.0/0.012	Huggett (1996)
τ	*	-
θ	0.1	Huggett (1996)
$\underline{a}$	0	Huggett (1996)

CALIBRAÇÃO

- Impostos τ são calibrados para dar um *matching* no percentual de consumo do governo em relação ao Produto.

$$\tau = \frac{0.195}{1 - \frac{\delta K}{Y}}$$

- Beneficios previdênciários também são determinados para fechar o orçamento previdênciário

$$b = \frac{\theta w L}{\sum_{t=R}^{N} \mu_t}$$

ALGORITMO

Função Politica: Computação por *Backwards induction*

- Na idade T (último período) indivíduos consomem toda sua renda e ativos:

$$c = we(z, T)(1 + r)a + b_T$$

$$V(a, z, T) = u((1 + r)a + b_T)$$

- a partir da idade $T - 1$ até o primeiro período resolvemos:

$$V(a, z, t) = \max_{a'} \left\{ \underbrace{u(y - a') + \beta s_{t+1} \mathbb{E}_{z'} \left[V(a', z', t + 1) | z \right]}_{\text{Interpolação no grid } a} \right\}$$

▸ Detalhamento

ALGORITMO

Simulação: Dada a estimação da função política dentro do conjunto de possíveis estados $x = (a, z, t)$:

- Simulamos uma quantidade grande n de indivíduos.
- Indivíduos começam com $a = 0$ e choques sorteados a partir da distribuição estacionária proveniente de Π
- Cada período tem sua idade alterada e sofrem choques idiossincráticos z de acordo com a matriz Π, e escolhem (a', c).
- Simulamos todos os indivudos nos períodos de $t = 1, ..., N$
- Assim podemos agregar K e C.

ALGORITMO

Algorithm Pseudocodigo Equilibrio

```
Require: $K$, $T$, $\varepsilon$, max_it, $\lambda$, $\Pi$;
while dist $> \varepsilon \wedge$ it $<$ max_it do
    $r = \alpha A(\frac{K}{L})^{\alpha-1}$, $w = (1-\alpha)A(\frac{K}{L})^{\alpha}$ e $b = \frac{\theta w L}{\sum_{T}^{N} \mu_t}$
    $V(x,t), a(x,t), c(x,t) = \text{Compute\_Policy}(r, w, b, R, T, \Pi)$
    $K_{\text{hist}}, C_{\text{hist}} = \text{Simulate\_Life\_Cycle}(a(x,t), c(x,t), r, z, w, b, R, T)$
    Computar $K_1$ e $T_1$:
    $\mathrm{K}_1 = \sum_t \mu_t \int_X a(x,t) d\psi_t$
    $T_1 = \frac{1}{1-\eta} \sum_t \mu_t (1 - s_{t+1}) \int_X a(x,t)(1 + r(1-\tau)) d\psi_t$
    Atualizar *Chutes*
    $K = \lambda K + (1-\lambda) K_1$
    $L = \lambda T + (1-\lambda) T_1$
    dist $= \max \left\{ |K - K_1|, |T - T_1| \right\}$
end while=0
```

APLICAÇÃO

MODELOS

- Julia
- Matlab

RESULTADOS

TABLE: Resultados principais

σ	η	K/Y	T	Gini	Concentração			Wealth < 0
					1%	5%	20%	
1.5	0.012	4.0395	0.7174	0.6685	0.0764	0.2851	0.6794	0.1009
	0.0	4.0994	0.8528	0.6685	0.0774	0.2923	0.6779	0.1022
	-0.012	4.1878	0.9705	0.6709	0.0794	0.2943	0.6788	0.1070
3.0	0.012	3.6501	0.7326	0.6734	0.0822	0.2920	0.6952	0.0434
	0.0	3.7191	0.9014	0.6740	0.0826	0.2923	0.6931	0.0535
	-0.012	3.8296	1.0656	0.6764	0.0846	0.2947	0.6970	0.0518

Notas: Resultados usam mortalidade de Jordan (1975).

Resultados

Table: Resultados principais

σ	η	K/Y	T	Gini	Concentração			Wealth < 0
					1%	5%	20%	
1.5	0.012	4.6699	0.5046	0.6252	0.0621	0.2511	0.6341	0.0330
	0.0	4.8011	0.5991	0.6300	0.0643	0.2580	0.6425	0.0357
	-0.012	4.9968	0.6682	0.6384	0.0677	0.2617	0.6463	0.0384
3.0	0.012	4.3704	0.5227	0.6301	0.0660	0.2561	0.6462	0.0378
	0.0	4.5426	0.6447	0.6335	0.0674	0.2588	0.6475	0.0377
	-0.012	4.8081	0.7514	0.6393	0.0695	0.2633	0.6524	0.0354

Notas: Resultados usam mortalidade de US Social Security (2021).

RESULTADOS

TABLE: Resultados secundários

σ	η	Y	K	L	r	w	τ	b
1.5	0.012	10.3065	41.6336	5.5797	0.0891	1.1822	0.2574	3.5408
	0.0	10.0520	41.2073	5.3970	0.0878	1.1920	0.2586	3.4468
	-0.012	9.5964	40.1882	5.0910	0.0860	1.2064	0.2604	3.2812
3.0	0.012	9.7352	35.5348	5.5797	0.0986	1.1166	0.2497	3.3846
	0.0	9.5163	35.3926	5.3970	0.0968	1.1285	0.2510	3.3017
	-0.012	9.1256	34.9476	5.0910	0.0940	1.1472	0.2532	3.1557

Notas: Resultados usam mortalidade de Jordan (1975).

RESULTADOS

TABLE: Resultados secundários

σ	η	Y	K	L	r	w	τ	b
1.5	0.012	10.2378	47.8090	5.1084	0.0771	1.2826	0.2709	2.1164
	0.0	9.6391	46.2784	4.7352	0.0750	1.3028	0.2739	1.9831
	-0.012	8.8003	43.9731	4.2271	0.0720	1.3324	0.2785	1.7973
3.0	0.012	9.8631	43.1057	5.1084	0.0824	1.2357	0.2643	2.0603
	0.0	9.3435	42.4435	4.7352	0.0793	1.2628	0.2681	1.9403
	-0.012	8.6119	41.4070	4.2271	0.0749	1.3039	0.2741	1.7713

Notas: Resultados usam mortalidade de US Social Security (2021).

Resultados

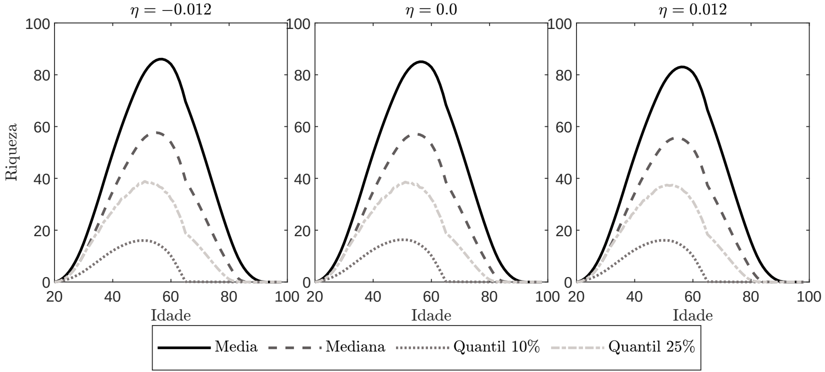


Figure: $\sigma = 1.5$ e Jordan (1975)

RESULTADOS

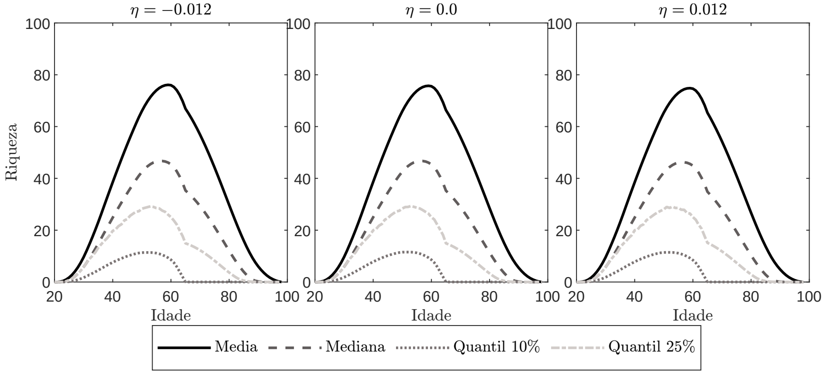


Figure: $\sigma = 3$ e Jordan (1975)

RESULTADOS

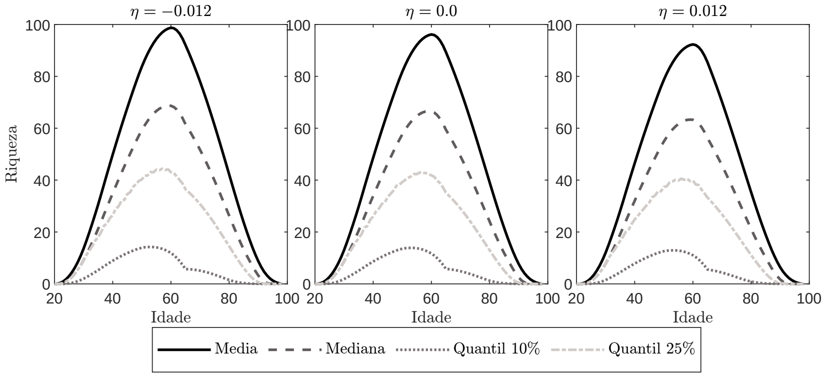


FIGURE: $\sigma = 1.5$ e US Social Security (2021)

RESULTADOS

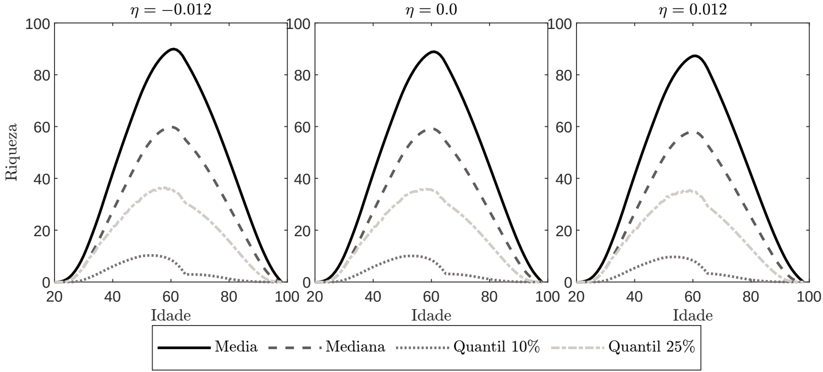


FIGURE: $\sigma = 3$ e US Social Security (2021)

RESULTADOS

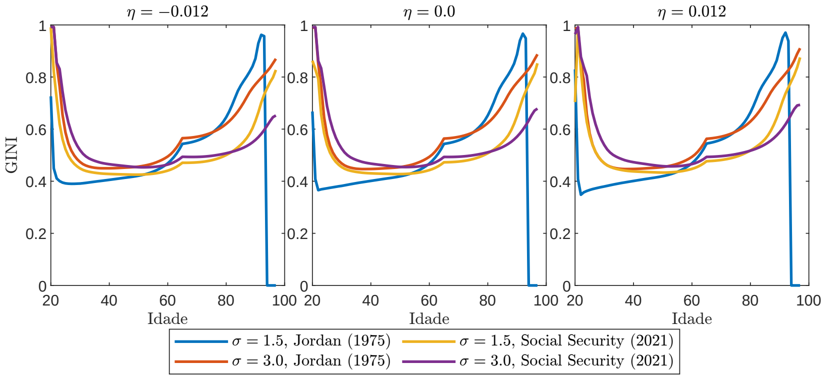


FIGURE: Caption

RESULTADOS

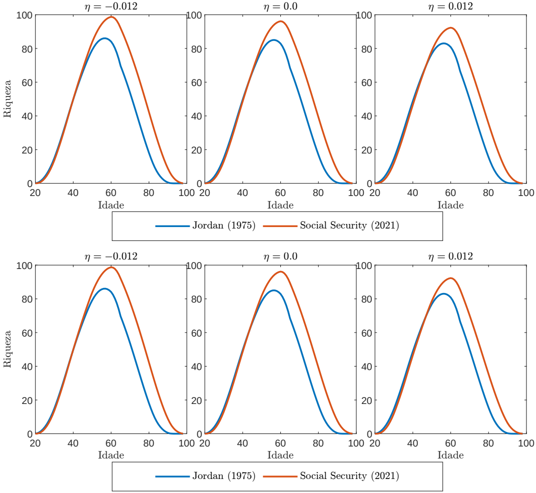
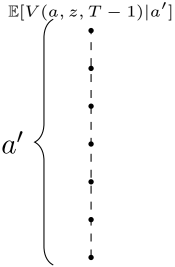


FIGURE: Caption

INTERPOLAÇÃO

- Exemplo: Idade $t = T - 1$
- Na idade $t = T$ já foram calculados $V(a, z, T)$
- Fixado $t = T - 1$:
    - Para cada $z \in [z_1, ..., z_{\max}]$
    - Para cada $a \in [\underline{a}, ..., \bar{a}]$
    - Para cada $a' \in [\underline{a}, ..., \bar{a}]$
      Calcular
      $\mathbb{E}[V(a, z, T-1) = u(y - a') + \beta s_{t+1} \sum_z \pi(z'|z) V(a', z', T)$

INTERPOLAÇÃO



- Após a interpolação, resolvemos um problema de maximização em um intervalo fechado, na qual nossa função objetivo é continuamente interpolada

$$a' = \text{arg max } \mathbb{E}[V(a,z,T-1)|a']$$

s.a:

$$a' \in [\underline{a}, ..., \bar{a}]$$

▸ Voltar