Dicas Lista 2
Macroeconomia I

Yuri Passuelo – yuripassuelo@usp.br

30 de abril de 2025

Resolução dos exercícios da segunda lista da disciplinas de Macroeconomia I.

Problem 1

(a)

A construção da equação de Bellman associada ao problema recursivo segue um procedimento bem simples, vamos usar como base Krueger (2017) Cap. 3 pg. 42 com as devidas adaptações

Uma dica para a resolução desse exercício pode ser encontrada em Junior (2025) Aula 02 Parte 1 pgs. 7 à 9 , a grande diferença aqui esta no número de parâmetros mas pode ser facilmente entendida se expandirmos

$$\sum_{t=0}^{\infty}(\beta_i)^t U(c_t, c_{t-1}) = U(c_0, c_{-1}) + \beta U(c_1, c_0) + \beta^2 U(c_2, c_1) + ...$$

$$= U(c_0, c_{-1}) + \sum_{t=1}^{\infty}\beta_i^t U(c_t, c_{t-1})$$

Podemos usar o segundo somatório e adapta-lo

$$\sum_{t=1}^{\infty}\beta_i^t U(c_t, c_{t-1}) = \beta_i \sum_{t=0}^{\infty}\beta_i^t U(c_{t+1}, c_t)$$

Logo:

$$\sum_{t=0}^{\infty}(\beta_i)^t U(c_t, c_{t-1}) = U(c_0, c_{-1}) + \beta_i \sum_{t=0}^{\infty}\beta_i^t U(c_{t+1}, c_t)$$

A partir daqui é pegar o que está no livro e nas notas de aula e fazer as substituições dentro do problema recursivo, as funções valores e as restrições.

(b)

Para esse itém uma dica importante antes de ler a resolução é se lembrar do exemplo 3.2.3 *de Krueger (2017) Cap. 3 pg. 45, aqui temos um chute no estilo guess and verify, aonde queremos chutar uma função para nossa funcional, logo depois temos que encontrar as constantes de nosso chute.*

Vamos relembrar o exemplo do Kruegeur e ver o passo a passo que ele adota.

Chute da função:

$$v(k) = A + B\ln(k)$$

Problema recursivo:

$$v(k) = \max_{0 \leq k \leq k'} \{\ln(k^\alpha - k') - \beta v(k')\}$$

Primeiro Passo : Substituição da nosso chute em $v(k')$

$$v(k) = \max_{0 \leq k \leq k'} \{\ln(k^\alpha - k') - \beta[A + B\ \ln(k')]\}$$

Tirando as C.P.O's

$$\frac{\partial v(k)}{\partial k'} = -\frac{1}{k^\alpha - k'} + \frac{\beta B}{k'} = 0$$

$$\frac{1}{k^\alpha - k'} = \frac{\beta B}{k'}$$

Isolando k' teremos:

$$k' = \frac{\beta B k^\alpha}{1 + \beta B}$$

Segundo Passo : Substituir $v(k) = A + B\ \ln k$ e $k' = \frac{\beta B k^\alpha}{1+\beta B}$ na equação de Bellman:

$$A + B\ \ln k = \max\{\ \ln(k^\alpha - \frac{\beta B k^\alpha}{1 + \beta B}) + \beta[A + B\ \ln(\frac{\beta B k^\alpha}{1 + \beta B})]\}$$

Terceiro Passo: Simplificar os logaritimos e frações, por exemplo:

$$k^\alpha - \frac{\beta B k^\alpha}{1 + \beta B} = \frac{k^\alpha}{1 + \beta B}$$

Resumindo temos que:

$$A + B \ln k = \max\{ \ln (k^\alpha - \frac{\beta B k^\alpha}{1+\beta B}) + \beta[A + B \ln (\frac{\beta B k^\alpha}{1+\beta B})]\}$$

Aplicando os logaritmos:

$$\ln (\frac{k^\alpha}{1+\beta B}) = \alpha \ln (k) - \ln (1+\beta B)$$

$$B\ln (\frac{\beta B k^\alpha}{1+\beta B}) = B \ln (\beta B) + \alpha B \ln (k) - B \ln (1+\beta B)$$

Na equação principal teremos:

$$A + B \ln (k) = \alpha \ln (k) - \ln (1+\beta B) + \beta A + \beta[B \ln (\beta B) + \alpha B \ln (k) - B \ln (1+\beta B)]$$

Terceiro Passo : Isolar as constantes A e B. Antes de tentar isolar os parâmetros de forma direta vamos tentar simplificar e isolar ainda mais os parâmetros

$$A + B \ln (k) = \alpha \ln (k) - \ln (1+\beta B) + \beta A + B\beta \ln (\beta B) + \alpha\beta B \ln (k) - \beta B \ln (1+\beta B)$$

Pegando apenas o lado direito da igualdade vamos reordena-lo, primeiro trazer a esquerda (sem passar para o lado esquerdo da equação) todas as constantes, e na direitos tudo que depende de k

$$A + B \ln (k) = \beta A + B\beta \ln (\beta B) - (1+\beta B) \ln (1+\beta B) + \alpha(1+\beta B) \ln (k)$$

Com base na igualdade acima temos duas equações:

$$A = \beta A + B\beta \ln (\beta B) - (1+\beta B) \ln (1+\beta B)$$

$$B = \alpha(1+\beta B)$$

Resolvendo essas equações temos:

$$B - \alpha\beta B = \alpha \implies B = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$$

Descoberto β vamos descobrir A que implica simplesmente em substituir na primeira equação e isolar A, assim:

$$A(1-\beta) = B\beta \ln (\beta B) - (1+\beta B) \ln (1+\beta B)$$

Substituindo B teremos:

$$A = \frac{1}{1-\beta}[\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \ln(\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}) - (1+\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}) \ln(1+\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta})]$$

Podemos simplificar ainda mais ja que:

$$\ln(\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}) = \ln(\alpha\beta) - \ln(1-\alpha\beta)$$

$$\ln(1+\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}) = \ln(\frac{1}{1-\alpha\beta}) = -\ln(1-\alpha\beta)$$

Substituindo e simplificando tudo teremos:

$$A = \frac{1}{1-\beta}[\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \ln(\alpha\beta) + \ln(1-\alpha\beta)]$$

Passo a Passo (b)

Transpondo o problema que resolvemos acima no Krueger e pegando a parte inicial e aplicando no nosso problema temos que se substituirmos $v(k') = E + F \ln(k') + G \ln c = E + F \ln(k') + G \ln(Ak^\alpha - k')$ Teremos nossa função valor como:

$$v(k) = \max_{\substack{c,k' \\ 0 \le k' \le f(k)}} \ln(Ak^\alpha - k') + \gamma \ln c_{-1} + \beta[E + F \ln k' + G \ln(Ak^\alpha - k')]$$

Aqui queremos achar a função politica k' que maximiza o nosso problema recursivo, e depois achar as constantes E, F e G, para isso seguir o seguinte passo a passo:

1. Tirar a C.P.O no problema recursivo, encontre k' em função de k.
2. Após encontrar, pegue essa função e substitua $v(k)$ e k' na função valor pela função encontrada. *(Para facilitar a operação e contas não precisa usar o maximando).*
3. manter $E + F \ln k_0 + G \ln c_{-1}$ intacto do lado esquerdo da equação, no lado direito reordene de modo que:
   - Na parte mais a esquerda do lado direito so fiquem constantes que não dependam de k ou c_{-1};
   - No meio fiquem os termos que dependem de k;
   - E por fim no lado direito fique o termo $\gamma \ln(c_{-1})$.
4. Monte equações para E, F e G
5. Tente isolar a letra G (*Você de cara perceberá que* $G = \gamma$)
6. Substitua G na equação de F e depois substitua F e G na equação de E
7. encontradas as constantes encontre o valor de k'

Problem 2

(a)

Vamos a construção da equação de *Bellman* associada ao problema, como podemos perceber pelo item (b) temos duas possibilidade de função utilidade para diferentes valores de σ, vamos adotar uma estratégia de usar a utilidade de forma genérica. Aqui vamos ir direto a forma final da equação de *Bellman* diferentemente do exercício 1 que demos uma intuição pelo Krueger (2017) de como ela é construída. Portanto a equação de *Bellman* associada ao problema é:

$$v(k) = \max_{\substack{k' \\ 0 \leq k' \leq f(k) \\ k \text{ given}}} \{U(zk^{\alpha} + (1-\delta)k - k') + \beta[v(k')]\}$$

A interpretação é Simples, temos literalmente que o fato de estarmos em uma economia com produção nos diz que o individuo passa por um problema de consumo e poupança. Em cada período deve decidir o quanto poupar para o próximo período.

Por um lado poupar reduz seu consumo presente c mas aumenta o capital k' disponível para o próximo período, a interpretação disso é que há uma otimização intertemporal, em que o individuo deve achar a poupança k' que iguala a utilidade marginal entre períodos.

(b)

A solução desse item pode ser um pouco trabalhosa mas abaixo descreverei um passo-a-passo para que vocês reproduzam.

1. Primeiro de tudo o termo z aqui está mais para confundir, vamos tomar esse z como uma constante não é um choque nem nada é apenas uma constante que aparece

2. Dado que z é uma constante e a equação de Bellman que montamos no item (a), vamos tirar a condição de primeira ordem do nosso problema em relação à k'.

3. Chegaremos aqui em uma igualdade que nos dá k' e k, não se assuste, perceba que no itém (b) ele declara que quer as variáveis de *steady state*. Então assuma que $k^{ss} = k' = k$, ou seja substitua k' e k por k^{ss} e isole-o.

4. Encontrada o k^{ss} encontre y^{ss} e c^{ss}. Lembre que:

$$y = zk^{\alpha}$$

$$c = y - k'$$

5. A partir do que encontrou responda o que acontece com a ração capital consumo produto, capital produto e capital consumo? Porque?

(c)

Vamos a construção de um algoritmo que computa a função valor e politica associada, esse algoritmo pode ser entrado nas notas de aula Junior, 2025(Nota 2 modelo de crescimento Neoclássico Parte 2 e Notas 4 Modelos com incerteza parte 1).

1. Vamos definir nosso *grid* dos valores possíveis de capital:

$$\mathcal{K} = \{k_1, ..., k_n\}, \ k_i > k_j, \text{ para } i < j$$

   Aonde aqui $\mathcal{K}$ é um vetor de dimensão n com valores positivos.

2. Parametrização da economia definindo:
   - Função de produção com respectivos parâmetros (no caso da *Cobb Douglas* precisamos definir α);
   - Função utilidade com respectivos parâmetros (no caso da *CRRA* precisamos definir σ);
   - Taxa de depreciação δ;
   - Fator de impaciência β;

3. Definição de vetores de iteração tanto da função valor quanto da politica e dos níveis de tolerância:
   - Vetor inicial da função valor de dimensão n;

$$\text{v\_ini} = \{0, ..., 0\}$$

   - Vetor de iteração da função valor de dimensão n;

$$\text{v\_it} = \{0, ..., 0\}$$

   - Vetor de iteração da função politica de dimensão n;

$$\text{g\_it} = \{0, ..., 0\}$$

   - Definir nível de tolerância[1]:

$$\text{tol } = 1e05$$

[1] Quanto menor o nível de tolerância, maior o tempo de convergência, porém se o nível for relativamnte alto pode ser que ocorra de não convergirmos para determinado valor

4. Iteração sobre a função valor:
   - Criar vetor V para armazenar valores calculados da função valor de forma que tenhamos:

$$V = \{0, ..., 0\}$$

   - Para cada $k \in \mathcal{K}$;

   - Para cada $k' \in \mathcal{K}$;

   Computamos:

$$U(f(k) - k') + \beta v(k')$$

   Obs: Aqui $v(k')$ é relativo ao valor correspondente do vetor v_it associado a k'

   Após computar vamos guardar o k' associado à k que maximiza a formula computada [2] no vetor g_it e o valor da função valor no vetor V.

5. Checar convergência, para isso comparamos comparamos V com v_it e vemos se é maior, menor ou igual à tolerância definida anteriormente:

$$\text{dist} = \max ||V - \text{v\_it}||$$

   Se dist $\leq$ tol então paramos o algoritmo e temos os valores convergidos. Caso contrarário atualizamos nosso v_it e repetimos o algortimo:

$$V = \text{v\_it}$$

[2] Devemos antes de computar nos atentar se $f(k) - k' > 0$

(d), (e) e (f)

Exercícios será feito em monitoria em conjunto com os alunos, códigos serão disponibilizados no site.

Referências

Junior, F. A. B. (2025). *Notas de Aula*. FEARP/USP. (Ver pp. 1, 6).
Krueger, D. (2017). *Macroeconomic Theory*. University of Pennsylvania. (Ver pp. 1, 2, 5).