# Tarea 2. Herramientas matemáticas para la localización espacial.

**Alumna:**
Hernández Castillo Ana Yuritzi.

**Grado y grupo:**
8°A

**Materia:**
Cinemática de Robots.

**Carrera:**
Ingeniería Mecatrónica.

# Capítulo 3. Herramientas matemáticas para la localización espacial.

## 3.1. Representación de la posición.

La localización de un cuerpo rígido en el espacio precisa de especificar tanto su posición como su orientación. Ambas deben ser establecidas en relación a un sistema de referencia definido, pudiéndose hacer uso de diferentes modos o herramientas para especificar la relación entre la posición y orientación del cuerpo rígido y los sistemas de referencia.

En un plano bidimensional, la posición de un cuerpo rígido precisa de dos grados de libertad y, por tanto, la posición del cuerpo quedará definida por dos componentes in-dependientes.

### 3.1.1 Sistema cartesiano de referencia.

Los sistemas de referencia se definen mediante ejes perpendiculares entre sí con un origen definido. Éstos se denominan sistemas cartesianos

, y en el caso de trabajar en el plano (2 dimensiones), el sistema de referencia OXY correspondiente queda definido por dos vectores coordenados OX y OY perpendiculares entre sí con un punto de intersección común O. Si se trabaja en el espacio (tres dimensiones), el sistema cartesiano OXYZ estará compuesto por una terna ortonormal de vectores unitarios OX, OY y OZ.

### 3.1.2. Coordenadas cartesianas.

Si se trabaja en un plano, con su sistema coordenado OXY de referencia asociado, un punto

*A* vendrá expresado por las componentes ($x$, $y$) correspondientes a los ejes coordenados del sistema OXY. Este punto tiene asociado un vector p ($x$, $y$), que va desde el origen O del sistema OXY hasta el punto. Por tanto, la posición del extremo del vector p está caracterizada por las dos componentes ($x$, $y$), denominadas coordenadas cartesianas

del vector y que son las proyecciones del vector p sobre los ejes OX y OY.

### 3.1.3. Coordenadas polares y cilindros.

En esta representación r representa la distancia desde el origen O del sistema hasta el extremo del vector p (r, θ), donde θ es el ángulo que forma el vector p con el eje OX.

### 3.1.4. Coordenadas Esféricas.

También es posible utilizar coordenadas esféricas para realizar la localización de un vector en un espacio de tres dimensiones, el vector p tendrá como coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), r=distancia desde el origen O hasta el extremo del vector p, θ= ángulo formado por la proyección del vector p sobre el plano OXY y ϕ= ángulo formado por el vector p con el eje OZ.

## 3.2. Representación de la orientación.

Una orientación tridimensional viene definida con tres grados de libertad o tres componentes linealmente independientes.

### 3.2.1. Matrices de rotación.

Son el método más extendido para la descripción de orientaciones, debido principalmente a la comodidad que proporciona el uso de álgebra matricial. Los vectores unitarios del sistema OXY son $i_x, j_y$, mientras que los sistemas o OUV son $i_u,\ j_v$.

### 3.2.2. Ángulos de Euler

Ángulos de Euler WUW

1.- Girar el sistema OUVW en un ángulo ϕ con respecto al eje OZ, convirtiéndose en el OU'V'W'.

2.- Girar el sistema OU'V'W' un ángulo θ con respecto al eje OU', convirtiéndose en el OU''V''W''.

3.- Girar el sistema OU''V''W'' un ángulo Ψ con respecto al eje OW'', convirtiéndose finalmente en el OU'''V'''W'''.

### 3.2.3 Par de rotación.

La representación de la orientación de un sistema OUVW con respecto al sistema de referencia OXYZ también puede realizarse mediante la definición de un vector k($K_x$, $K_y$, $K_z$) y un ángulo de giro θ.

### 3.2.4. Cuaternios.

Un cuaternio está constituido por cuatro componentes ($q_0$, $q_1$, $q_2$, $q_3$,) que representan las coordenadas del cuaternio en base (e, i, j, k)

## 3.3. Matrices de transformación homogéneas.

De forma general, un vector $p = a_i + b_j + c_k$, donde i, j, k son vectores unitarios de los ejes OX, OY y OZ del sistema de referencia OXYZ.

### 3.3.2. Aplicación de matrices homogéneas.
Se utilizan para representar la orientación y posición de un sistema O'UVW.

### 3.3.3. Significado geométrico de las matrices homogéneas.
Se utilizan para representar la orientación y posición de un sistema O'UVW.

### 3.3.4. Composición de matrices homogéneas.
Las matrices homogéneas se componen para describir diversos giros y traslaciones consecutivos sobre un sistema de referencia determinado.

## 3.4. Aplicación de los sistemas cuaternarios.

### 3.4.1. Álgebra de los cuaternios.
Se definen tres operaciones algebraicas sobre los cuaternios: producto, suma y producto con escalar.

## 3.5. Relación y comparación entre los distintos métodos de localización espacial.
Cada uno de ellos presenta una serie de características que le hacen más o menos apto para una determinada aplicación. Así algunos solo sirven para la representación de orientación, mientras otras, por ejemplo, son especialmente útiles para composición de rotaciones.

### 3.5.1. Comparación de los métodos de localización espacial.
Las matrices de transformación homogénea tienen la capacidad de representación conjunta de posición y orientación.
Los ángulos e Euler solo son capaces de representar orientación.
El par de rotaciones solo sirve para la representación de orientaciones.
El cuaternio solo es capaz de representar la orientación relativa de un sistema.

## 3.6. Utilización de Matlab para el modelado y simulación de robots.
Matlab proporciona una valiosa herramienta de apoyo para el desarrollo de cálculos y operaciones habituales en robótica. Su capacidad para manipular de manera natural matrices, facilita cálculos habituales en el modelado de robots.

Ana Yuritzi Hernández Castillo
Fecha 14-Enero-19

# Capitulo 3. Herramientas matemáticas para la localización espacial.

## 3.1. Representación de la posición.

La localización de un cuerpo rígido en el espacio precisa de especificar tanto su posición como su orientación.

En un plano bidimensional, la posición de un cuerpo rígido precisa de dos grados de libertad y, por tanto, la posición del cuerpo quedará definida por dos componentes independientes.

### 3.1.1. Sistema Cartesiano de referencia.

Los sistemas de referencia se definen mediante ejes perpendiculares entre sí con un origen definido. En los sistemas carteciano de dos dimensiones, el sistema correspondiente queda definido por dos vectores coordenados OX y OY perpendiculares entre sí con un punto de intersección común O.

Si se trabaja en el espacio (tres dimensiones), el sistema carteciano OXYZ estará compuesto por una terna ortonormal de vectores unitarios OX, OY y OZ.

### 3.1.2. Coordenadas cartesianas.

Si se trabaja en un plano, estará expresado por las componentes (x,y) correspondientes a los ejes coordenados, este punto tiene asociado un vector p(x,y), que va desde el origen O del sistema, hasta el punto a, por lo tanto el vector p está caracterizado por las dos componentes (x,y) denominadas coordenadas carteciana.

### 3.1.3. Coordenadas polares y cilíndricas.

En esta representación, r representa la distancia desde el origen O del sistema hasta el extremo del vector $p(r, \theta)$, donde $\theta$ es el ángulo que forma el vector $p$ con el eje OX.

### 3.1.4. Coordenadas Esféricas.

Tambien es posible utilizar coordenada esféricas para realizar la localización de un vector en un espacio de tres dimensiones, el vector $p$ tendría como coordenadas esféricas $(r, \theta, \phi)$, $r$ = distancia desde el origen O hasta el extremo del vector $p$, $\theta$ = ángulo formado por la proyección del vector $p$ sobre el plano OXY y $\phi$ = ángulo formado por el vector $p$ con el eje OZ.

## 3.2 Representación de la orientación

Una orientación tridimensional viene definida por tres grados de libertad o tres componentes linealmente independientes.

### 3.2.1 Matrices de rotación

Son el metodo más extendido para la descripción de orientaciones, debido principalmente a la comodidad que proporciona el uso del álgebra matricial. Los vectores unitarios del sistema OXY son $i_x, j_y$, mientras que los del sistema OUV son $i_u$ y $j_v$.

### 3.2.2. Angulos de Euler.

Angulos de Euler WUW

Angulos de Euler WUW

Girar el sistema OUVW un ángulo $\phi$ con respecto al eje OZ, convirtiendose en el OU'V'W'.

2. Girar el sistema OU'V'W' un ángulo $\theta$ con respecto al eje OU', convirtiendose en el OU''V''W''.

3. Girar el sistema OU''V''W'' un ángulo $\psi$ con respecto al eje OW'' convirtiéndose finalmente en el OU'''V'''W'''

### 3.2.3. Par de rotación

La representación de la orientación de un sistema OUVW con respecto al sistema de referencia OXYZ también puede realizarse mediante la definición de un vector $k(k_x, k_y, k_z)$ y un ángulo de giro $\theta$.

### 3.2.4. Cuaternios.

Un cuaternio está constituido por cuatro componentes $(q_0, q_1, q_2, q_3)$ que representan las coordenadas del cuaternio en base $[e, i, j, k]$

## 3.3. Matrices de transformación homogénea.

Las matrices de transformación homogénea permiten la representación conjunta de posición y orientación, facilitando su uso mediante el álgebra matricial

### 3.3.1. Coordenadas y matrices homogéneas

De forma general, un vector $p = ai + bj + ck$, donde $i, j, k$ son vectores unitarios de los ejes OX, OY y OZ del sistema de referencia OXYZ.

### 3.3.2. Aplicación de matrices homogéneas.

Se utilizan para representar la orientación y posición de un sistema O'UVW.

### 3.3.3. Significado geométrico de las matrices homogéneas.

Sirve para transformar un vector expresado en coordenadas homogéneas con respecto a un sistema O'UVW, a su expresión en las coordenadas del sistema de referencia OXYZ.

### 3.3.4 Composición de matrices homogéneas.

Las matrices homogéneas se componen para describir diversos giros y traslaciones consecutivos sobre un sistema de referencia determinado.

3.4. Aplicación de los cuaternios.

3.4.1. Algebra de cuaternios.

Se definen tres operaciones algebráicas sobre los cuaternios: producto, suma y producto con escalar.

3.5 Relación y comparación entre los distintos métodos de localización espacial.

Cada uno de ellos presenta una serie de características que le hacen más o menos apto para una determinada aplicación. Así, algunos sólo sirven para la representación de orientación, mientras otros, por ejemplo, son especialmente útiles para composición de rotaciones.

3.5.1. Comparación de métodos de localización espacial.

Las matrices de transformación homogénea tienen la capacidad de representación conjunta de posición y orientación.

Los Angulos de Euler, sólo son capaces de representar orientación.

El par de rotación solo sirve para la representación de orientaciones.

El cuaternio sólo es capaz de representar la orientación relativa de un sistema.

3.6 Utilización de matlab para el modelado y simulación de robots.

MATLAB proporciona una valiosa herramienta de apoyo para el desarrollo de cálculos y operaciones habituales en robótica. Su capacidad para manipular de manera natural matrices, facilita cálculos habituales en el modelado de robots.