Metody optymalizacji

Stepan Yurtsiv, 246437

9 maja 2022r.

Zadanie

Celem niniejszego zadania jest zaimplementowanie algorytmu aproksymacyjnego opartego na programowaniu liniowym dla uogólnionego zagadnienia przydziału (ang. the generalized assignment problem)

Algorytm

Oznaczenia:

- $M = [m]$ - zbiór maszyn
- $J = [n]$ - zbiór zadań
- $T = \{T_i : i \in M\}$ - zbiór ograniczeń dla maszyn, T_i - maksymalny czas działania i-tej maszyny
- $c = \{c_{ij} : i \in M, j \in J\}$ - macierz kosztów, c_{ij} - koszt wykonania j-tego zadania na i-tej maszynie
- $p = \{p_{ij} : i \in M, j \in J\}$ - macierz czasów wykonania zadań, p_{ij} - czas wykonania j-tego zadania na i-tej maszynie

Uogólnione zagadnienie przedziału polega na przypisaniu zbiorowi maszyn M zadań ze zbioru J tak, żeby zmaksymalizować zyski z wykonania wszystkich zadań. Dodatkowo są ograniczenia w postaci maksymalengo czasu przez który może działać dana maszyna.

Rozwiązanie problemu sprowadza się do stworzenia grafu dwudzielnego G, gdzie jedna grupa wierszchołków reprezentuje zbiór maszyn M, a inna zbiór zadań J. Na początku mamy doczynienia z grafem pełnym, gdzie krawędź (i, j) reprezentuje przydział i-tej maszyny do j-tego zadania. Zbiór krawędzi grafu G oznaczamy przez E. W poszczególnych iteracjach algorytmu 1 jest tworzony podgraf grafu G oznaczany jako F, w którym każdemu zadaniu jest przypisana dokładnie jedna maszyna.

Do rozwiązania podproblemu w każdej iteracji zastosujemy model (oznaczany jako LP_{ga}) z następującą funkcją celu:

$$\max \sum_{e=(i,j)\in E} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

gdzie x_{ij} oznacza, czy j-te zadanie zostało przypisane do wykonania na i-tej maszynie. Ograniczenia do zmiennych decyzyjnych są następujące:

- $\forall j \in J \sum_{e\in\delta(j)} x_e = 1$ - każde zadanie musi być przypisane dokładnie jednej maszynie
- $\forall i \in M \sum_{e\in\delta(i)} p_e{\cdot}x_e \leq T_i$ - czas wykonaia wszystkich zadań, przypisanych maszynie i nie może przekroczyć jej maksymalny czas dostępności
- $x_{ij} \geq 0$ - każda zmienna jest nieujmena

Algorytm 1 zapewnia, że każda maszyna jest używana nie więcej niż dwukrotność jej dozwolonej dostępności.

Algorithm 1

1. Inicjalizacja $E(F) \leftarrow \emptyset$, $M' \leftarrow M$
2. While $J \neq \emptyset$ do
   (a) Znajdź optymalne rozwiązanie dopuszczalne bazowe x do LP_{ga} i usuń wszystkie zmienne $x_{ij} = 0$
   (b) Jeśli zmienna $x_{ij} = 1$, to zaktualizuj $F \leftarrow F \cup \{(i,j)\}$, $J \leftarrow J \backslash \{j\}$, $T_i \leftarrow T_i - p_{ij}$
   (c) (**Relaksacja**) Jeśli maszyna i ma $d(i) = 1$ lub maszyna i ma $d(i) = 2$ oraz $\sum_{j\in J} x_{ij} \geq 1$, to zaktualizuj $M' \leftarrow M \setminus \{i\}$
3. return F