Metody optymalizacji

Stepan Yurtsiv, 246437

11 kwietnia 2022r.

1 Wstęp

Celem danej listy zadań jest rozwiązanie wybranych problemów, które można przekształcić do problemów programowania liniowego, a później rozwiązać ich za pomocą pakietu GLPK (GNU Linear Programmin Kit). W poniższych sekcjach predstawiono definicje oraz rozwiązania optymalne zadań.

2 Niedokładność algorytmów LP

Celem danego zadania jest pokazanie, że algorytmy LP mogą dawać niedokłande wyniki dla źle uwaruknowanych zadań, np. jeżeli macierz A jest macierzą Hilberta.

2.1 Model

Funkcja celu

$$\min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

przy warunkach

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

gdzie

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i, j = 1, \ldots, n,$$

$$c_i = b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}, i, j = 1, \ldots, n$$

Wiadomo że rozwiązaniem tego zadania jest wektor $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x_i} = 1, i = 1, \ldots, n$

2.2 Wyniki

W tabeli poniżej przedstawione są błędy względne wyników dla $n = 2, \ldots, 10$

n	$\frac{\|\|x-x_0\|\|_2}{\|\|x\|\|_2}$
2	5.6e-16
3	5.2e-16
4	5.6e-13
5	1.2e-11
6	3.4e-11
7	2.1e-08
8	0.725
9	0.592
10	0.731

2.3 Podsumowanie

Z wyników widać, że GLPK bardzo źle radzi sobie z danym problemem dla $n > 7$. Dla $n \leq 7$ wynik jest prawie dokładny (więcej niż 2 cyfry po przecinku).

3 Problem przemieszczania kamperów

W danym zadaniu proszono nas o ułożenie optymalnego planu przemieszczania nadmiarówych kamperów dla firmy, która operuje w różnych miastach Europy środkowej. Minimalizujemy koszt transportu, zależny od odległości pomiędzy miastami oraz typu kampera (*Standard* i *VIP*)

3.1 Model

Funkcja celu jest następująca:

$$\min \sum_{m_1, m_2 \in M, k \in K} x_{m_1,m_2,k} d_{m_1,m2} c_k$$

gdzie M to zbiór miast, $K = \{Standard, VIP\}$ - typy kamperów, $x_{m_1,m_2,k}$ - liczba kamperów typu k do prezemieszczenia z miasta m_1 do miasta m_2, d_{m_1,m_2} - dystans pomiędzy miastem m_1 a m_2, c_k - mnożnik kosztu przemieszczania kampera typu k ($Standard = 1$, $VIP = 1.15$).

Zmienne decyzyjne mają następujące ograniczenia:

- $x_{m_1,m_2,k} \geq 0$, $m_1, m_2 \in M, k \in K$

- $\sum_{m_2 \in M} x_{m_1,m_2,k} = excess_{m_1,k}$, gdzie $m_1 \in M$, $k \in K$, a $excess_{m_1,k}$ - to nadmiar kamperów typu k w mieście m_1. To ograniczenie zapewnia, że przemieścimy wszystkie nadmiarowe kampery
- $\sum_{m_1 \in M} x_{m_1,m_2,s} \geq deficit_{m_2,s}$, gdzie $m_2 \in M$, s - to typ kampera, którym można zamienić każdy inny typ (w typm przypadku $s = VIP$), a $deficit_{m_2,s}$ - to niedobór kamperów typu s w mieście m_2. Dane ograniczenie pozwala na przemieszczenie większej liczby VIP kamperów, aniż jest ich nideobór w danym mieście.
- $\sum_{m_1 \in M, k \in K} x_{m_1,m_2,k} = \sum_{k \in K} deficit_{m_2,k}$, gdzie $m_2 \in M$. Dane ograniczenie zapewnia zerowy niedobór we wszystkich miastach.

3.2 Wyniki

Po zaimplementowaniu powyższego modelu w `GNU MathProg` z wypełnionymi danymi (M, $excess$, $deficit$), udało się znaleźć następujące rozwiązanie:

```
Move 14 Standard campers from Warszawa to Gdansk
Move 2 VIP campers from Gdansk to Gdansk
Move 4 Standard campers from Szczecin to Gdansk
Move 8 Standard campers from Szczecin to Berlin
Move 4 VIP campers from Szczecin to Berlin
Move 4 VIP campers from Wroclaw to Warszawa
Move 2 VIP campers from Wroclaw to Wroclaw
Move 4 VIP campers from Wroclaw to Krakow
Move 6 Standard campers from Krakow to Wroclaw
Move 4 Standard campers from Krakow to Koszyce
Move 2 VIP campers from Rostok to Berlin
Move 2 VIP campers from Rostok to Rostok
Move 3 VIP campers from Lipsk to Berlin
Move 3 VIP campers from Lipsk to Lipsk
Move 4 VIP campers from Lipsk to Praga
Move 3 Standard campers from Praga to Berlin
Move 7 Standard campers from Praga to Brno
Move 2 VIP campers from Brno to Brno
Move 4 VIP campers from Bratyslawa to Bratyslawa
Move 4 VIP campers from Bratyslawa to Budapeszt
Move 4 VIP campers from Koszyce to Krakow
Move 4 VIP campers from Budapeszt to Budapeszt
Overall cost:  19999.7
```

* Przemieszczenie z miasta do tego samego miasta oznacza zastapienie standardowych kamperów kamperami typu VIP.

3.3 Całkowitoliczbowe zmienne

Po ograniczeniu zmiennych decyzyjnych do liczb całkowitych, wynik się nie zmienił.

4 Problem optymalnej produkcji

W danym problemie musimy ułożyć optymalny plan produkcyjny czterech mieszanek, dwie z których są produktami podstawowymi, powstającymi jako mieszanki trzech surowców, a dwie inne wymagają pewnego surowca oraz odpadów z produkcji pierwszych dwóch.

4.1 Model

Zmienne decyzyjne:

m_1, m_2, m_3 - ilość surowca 1, 2 i 3 do zakupu
A, B, C, D - wyprodukowana ilość mieszanek do sprzedaży
A_t, B_t - ilość mieszanek A i B razem z wszystkimi odpadami
$A_{m_1}, A_{m_2}, A_{m_3}$ - ilość m_1,m_2 i m_3 przeznaczona na produkcję A
$A_{l_1}, A_{l_2}, A_{l_3}$ - ilość odpadów 1, 2 i 3 przy proudkcji A
$A_{l_1d}, A_{l_2d}, A_{l_3d}$ - ilość odpadów 1, 2 i 3 (z produkcji A) do likwidacji
$A_{l_1C}, A_{l_2C}, A_{l_3C}$ - ilość odpadów 1, 2 i 3 (z produkcji A) preznaczonych na proudkcję C
$B_{m_1}, B_{m_2}, B_{m_3}$ - ilość m_1,m_2 i m_3 przeznaczona na produkcję B
$B_{l_1}, B_{l_2}, B_{l_3}$ - ilość odpadów 1, 2 i 3 przy proudkcji B
$B_{l_1d}, B_{l_2d}, B_{l_3d}$ - ilość odpadów 1, 2 i 3 (z produkcji B) do likwidacji
$B_{l_1D}, B_{l_2D}, B_{l_3D}$ - ilość odpadów 1, 2 i 3 (z produkcji B) preznaczonych na proudkcję D
C_{m_1} - ilość m_1 preznaczona na proudkcję C
D_{m_2} - ilość m_2 preznaczona na proudkcję D

Funkcja celu:

$$\max(3A + 2.5B + 0.5C + 0.6D$$
$$-(0.1A_{l_1d}+0.1A_{l_2d}+0.2A_{l_3d}+0.05B_{l_1d}+0.05B_{l_2d}+0.4B_{l_3d}+2.1m_1+1.6m_2+m_3))$$

Ograniczenia:

- wszystkie zmienne decyzyjne są większe lub równe 0
- $2000 \leq m_1 \leq 6000$
- $3000 \leq m_2 \leq 5000$
- $4000 \leq m_3 \leq 7000$
- $A_{m_1} + B_{m_1} + C_{m_1} \leq m_1$ - nie można zużyć więcej surowca 1 niż jest dostępnego
- $A_{m_2} + B_{m_2} + D_{m_2} \leq m_2$ - analigocznie dla surowca 2
- $A_{m_3} + B_{m_3} \leq m_3$ - analigocznie dla surowca 3
- $A_{m_1} + A_{m_2} + A_{m_3} = A_t$ - ilość mieszanki razem z odpadami to suma surowców wejściowych
- $A_{m_1} \geq 0.2A_t$ - ilość surowca 1 musi być co najmniej 20%
- $A_{m_2} \geq 0.4A_t$ - ilość surowca 2 musi być co najmniej 40%
- $A_{m_3} \leq 0.1A_t$ - ilość surowca 3 musi być co najwyżej 10%
- $A_{l_1} = 0.1A_{m_1}$ - ilość odpadów od surowca 1 to 10%
- $A_{l_2} = 0.2A_{m_2}$ - ilość odpadów od surowca 2 to 20%
- $A_{l_3} = 0.4A_{m_3}$ - ilość odpadów od surowca 3 to 40%
- $A_{l_1} = A_{l_1d} + A_{l_1C}$ - ilość odpadu 1 to suma ilości do likwidacji oraz ilości na produkcję C
- $A_{l_2} = A_{l_2d} + A_{l_2C}$ - analigocznie dla odpadu 2
- $A_{l_3} = A_{l_3d} + A_{l_3C}$ - analogicznie dla odpadu 3
- $A = A_t - A_{l_1} - A_{l_2} - A_{l_3}$ - produkt końcowy to suma mieszanek minus odpady
- $B_{m_1} + B_{m_2} + B_{m_3} = B_t$ - ilość mieszanki razem z odpadami to suma surowców wejściowych

- $B_{m_1} \geq 0.2B_t$ - ilość surowca 1 musi być co najmniej 20%
- $B_{m_3} \leq 0.3B_t$ - ilość surowca 3 musi być co najwyżej 30%
- $B_{l_1} = 0.2B_{m_1}$ - ilość odpadów od surowca 1 to 20%
- $B_{l_2} = 0.2B_{m_2}$ - ilość odpadów od surowca 2 to 20%
- $B_{l_3} = 0.5B_{m_3}$ - ilość odpadów od surowca 3 to 50%
- $B_{l_1} = B_{l_1d} + B_{l_1D}$ - ilość odpadu 1 to suma ilości do likwidacji oraz ilości na produkcję D
- $B_{l_2} = B_{l_2d} + B_{l_2D}$ - analigocznie dla odpadu 2
- $B_{l_3} = B_{l_3d} + B_{l_3D}$ - analogicznie dla odpadu 3
- $B = B_t - B_{l_1} - B_{l_2} - B_{l_3}$ - produkt końcowy to suma mieszanek minus odpady
- $C = C_{m_1} + A_{l_1C} + A_{l_2C} + A_{l_3C}$ - produkt końcowy to suma surwca 1 oraz odpadów od produkcji A
- $C_{m_1} = 0.2C$ - ilość surowca 1 musi stanowić dokładnie 20% mieszanki
- $D = D_{m_2} + B_{l_1D} + B_{l_2D} + B_{l_3D}$ - produkt końcowy to suma surwca 2 oraz odpadów od produkcji B
- $D_{m_2} = 0.3D$ - ilość surowca 2 musi stanowić dokładnie 30% mieszanki

4.2 Wyniki

Po zaimplementowaniu modelu, otrzymałem następujący wynik:

```
-- Total earnings --

5598

-- Products proudced --

Product A: 9646.112601
Product B: 0.000000
Product C: 2520.107239
Product D: 0.000000
```

```
-- Materials to buy --

Material 1:  6000.000000
Material 2:  5000.000000
Material 3:  4000.000000

-- Materials distribution --

For product A:

Material 1:  5495.978552
Material 2:  5000.000000
Material 3:  1166.219839

For product B:

Material 1:  0.000000
Material 2:  0.000000
Material 3:  0.000000

For product C:

Material 1:  504.021448

For product D:

Material 2:  0.000000

-- Leftovers distribution --

From A:

1:

overall:  549.597855
for product C: 549.597855
to destroy:  0.000000

2:

overall:  1000.000000
```

```
for product C: 1000.000000
to destroy:  0.000000

3:

overall:  466.487936
for product C: 466.487936
to destroy:  0.000000

From B:

1:

overall:  0.000000
for product D: 0.000000
to destroy:  0.000000

2:

overall:  0.000000
for product D: 0.000000
to destroy:  0.000000

3:

overall:  0.000000
for product D: 0.000000
to destroy:  0.000000
```

4.3 Podsumowanie

Produkowanie B i D nie opłaca się, a surowiec 3 nie zostaje całkiem zużyty, więc ten minimum w 4000 jest za wysoki.

5 Problem planu zajęć

W danym zadaniu musimy ułożyć plan zajęć dla studenta, uwzględniając jego preferencje.

5.1 Model

Funkcja celu:

$$\max \sum_{n \in N, s \in S} x_{n,s} p_{n,s}$$

gdzie $N = \{1, 2, 3, 4\}$ - numery grup ćwiczeniowych, $S = \{Algebra, Analiza, Fizyka, ChemiaOrg, ChemiaMin\}$ - przedmioty, $x_{n,s} \in \{0, 1\}$ - zmienna decyzyjna, mówiąca czy grupa ćwiczeniowa n z przedmiotu s została wybrana, $p_{n,s} \in \{0..10\}$ - jak bardzo preferowana jest grupa n z przedmiotu s (predefiniowane).

Ograniczenia:

- $\sum_{n \in N} x_{n,s} = 1,\ s \in S$ - można wybrać tylko jedną grupę dla danego przedmiotu
- $x_{1,Algebra} + x_{1,Analiza} \leq 1$ - nie można wybrać tych zajęć na raz
- $x_{1,ChemiaMin} + x_{1,ChemiaOrg} + x_{2,ChemiaMin} \leq 1$ - nie można wybrać tych zajęć na raz
- $x_{1,Fizyka} + x_{2,Algebra} + x_{2,Analiza} + x_{2,Fizyka} \leq 1$ - nie można wybrać tych zajęć na raz
- $x_{1,Algebra} + x_{1,Analiza} \leq 1$ - nie można wybrać tych zajęć na raz
- $x_{3,Algebra} + x_{3,Analiza} + x_{4,Algebra} \leq 1$ - nie można wybrać tych zajęć na raz
- $x_{4,ChemiaMin} + x_{4,ChemiaOrg} \leq 1$ - nie można wybrać tych zajęć na raz
- $x_{1,Algebra} d_{Algebra} + x_{1,Analiza} d_{Analiza} + x_{1,ChemiaMin} d_{ChemiaMin} + x_{1,ChemiaOrg} d_{ChemiaOrg} + x_{2,ChemiaMin} d_{ChemiaMin} + x_{2,ChemiaOrg} d_{ChemiaOrg} \leq 4$, d - czas trwania ćwieczeń dla poszczególnych predmiotów. Ograniczenie na nie więcej niż 4 godziny ćwiczeń w poniedziałek
- $x_{1,Fizyka} d_{Fizyka} + x_{2,Algebra} d_{Algebra} + x_{2,Analiza} d_{Analiza} + x_{2,Fizyka} d_{Fizyka} \leq 4$ - analogicznie dla wtorku
- $x_{3,Algebra} d_{Algebra} + x_{3,Analiza} d_{Analiza} + x_{4,Algebra} d_{Algebra} \leq 4$ - analogicznie dla środy

- $x_{3,Fizyka}d_{Fizyka}+x_{3,ChemiaMin}d_{ChemiaMin}+x_{4,Analiza}d_{Analiza}+x_{4,Fizyka}d_{Fizyka} \leq 4$ - analogicznie dla czwartku

- $x_{3,ChemiaOrg}d_{ChemiaOrg}+x_{4,ChemiaMin}d_{ChemiaMin}+x_{4,ChemiaOrg}d_{ChemiaOrg} \leq 4$ - analogicznie dla piątku

- $x_{4,ChemiaMin} + x_{4,ChemiaOrg} + x_{3,ChemiaOrg} \leq 1$ - jest możliwość wyjścia na obiad w piątek (w inne dni zawsze jest możliwość)

- $x_{1,Algebra} + x_{1,Analiza} + x_{3,Algebra} + x_{3,Analiza} + x_{4,Algebra} + x_{3,Analiza} + x_{4,Algebra} \leq 1$ - da się trenować 2 razy w tygodniu (dla $= 0$ nie ma rozwiązań)

5.2 Wyniki

Po implementacji powyższego modelu otrzyałem następujący plan optymalny:

```
Algebra grupa 3
Analiza grupa 2
Fizyka grupa 4
ChemiaMin grupa 1
ChemiaOrg grupa 2
Suma preferencji:  37
```

Rozwiązań pozwalających ćwiczyć 3 razy w tygodniu nie istnieje. Powyższy plan nie jest zgrupowany w 3 dniach (pn., wt., cz.) i też nie wsyzstkie zajęcia odpowiadają preferencjom nie mniejszym niż 5. Po dodaniu odpowiednich ograniczeń, udało się znaleźć plan, odpowiadający tym założeniom:

```
Algebra grupa 1
Analiza grupa 4
Fizyka grupa 2
ChemiaMin grupa 3
ChemiaOrg grupa 2
Suma preferencji:  28
```