Opracowanie zadania z geometrii obliczeniowej

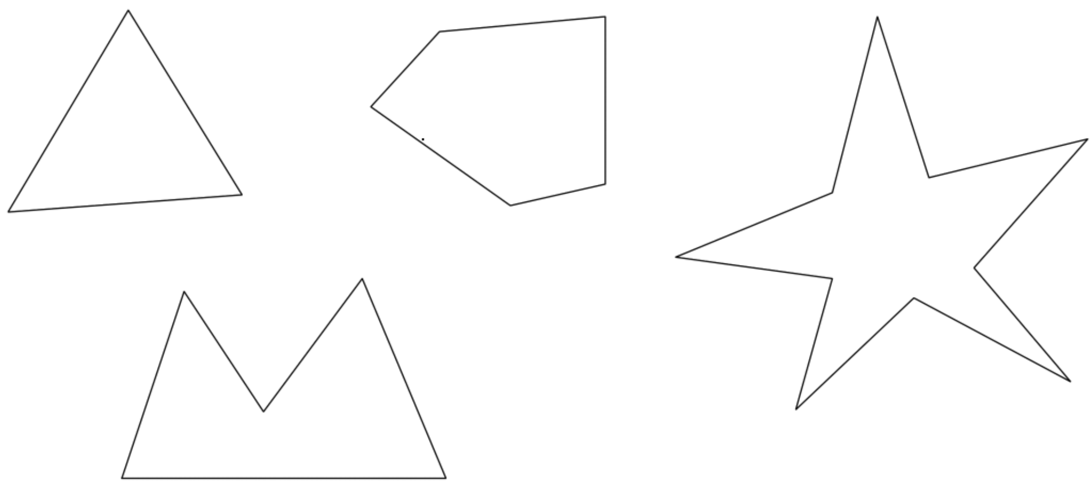
Stepan Yurtsiv, 246437

24 maja 2022

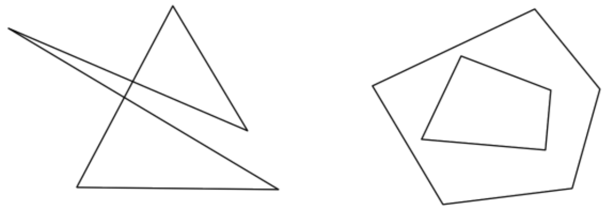
Definicje

Wielokąt prosty

Wielokąt prosty to taki wielokąt, którego boki się nie przecinają oraz tworzą jedną zamkniętą łamaną (patrz rysunek 1 i 2).



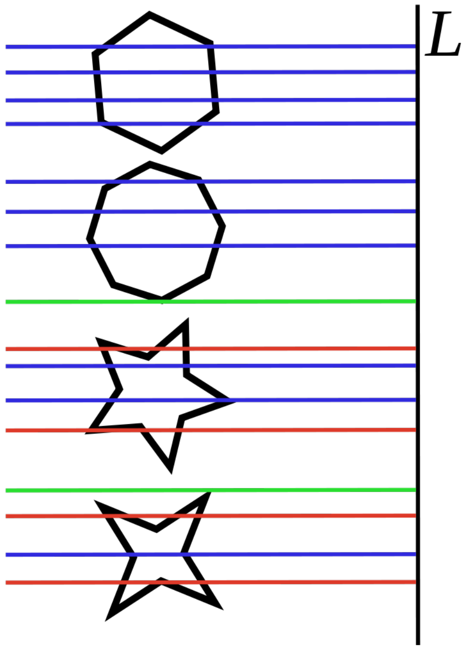
Rysunek 1: Przykłady wielokątów prostych



Rysunek 2: Przykłady wielokątów nieprostych

Wielokąt monotoniczny

Wielokąt monotoniczny to taki wielokąt, dla którego możemy podać prostą L, taką że każda prosta prostopadła do niej przecina wielokąt w co najwyżej dwóch punktach (silna monotoniczność). Słabą monotonicznością nazywamy przypadek, gdy wielokąt posiada również krawędzie prostopadłe do L. Na rysunku 3 dwa górne wielokąty są monotoniczne. Zielone proste mają jedno przecięcie z wielokątem, niebieskie – dwa, czerwone – trzy i więcej.



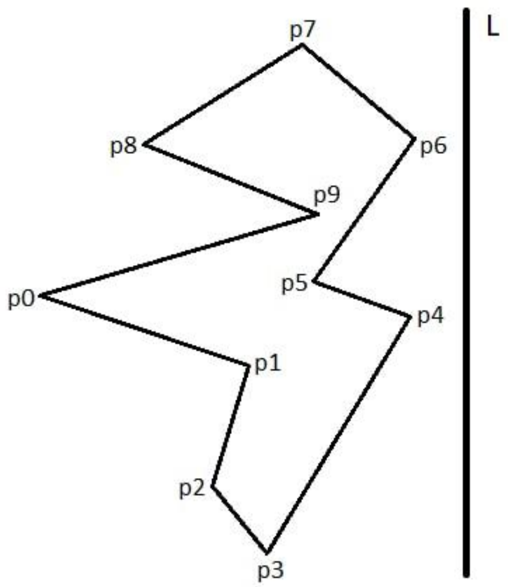
Rysunek 3: Monotoniczność wielokątów (źródło: Wikipedia)

Zadanie

Podaj efektywny alogrytm do sprawdzenia czy dany n kąt prosty jest monotoniczy względem podanej prostej (zadanie 10 na liście).

Algorytm

Dowolny wielokąt i prostą L możemy odpowiednio obrócić tak, żeby prosta L była pionową oraz zostały zachowane wszystkie odległości między wierzchołkami wielokąta a prostą.



Rysunek 4: Egzemplarz problemu

Żeby sprawdzić, czy dany n-kąt prosty jest monotoniczny względem prostej pionowej L, można zastosować następujący algorytm:

1. Szukamy najwyższego punktu p (p_7 na rysunku 4)
2. Idziemy po kolejnych punktach w dół dopóki współrzędna y danego punktu jest większa od y następnego punktu (punkt końcowy $q = p_3$). Możemy poruszać się zgodnie z ruchem wskazówek zegara lub w przeciwnym kierunku, nie ma to znaczenia.

3. Od punktu q idziemy w góre, dopóki współrzędna y danego punktu jest mniejszy od y następnego punktu.
4. Niech m będzie liczbą odwiedzonych punktów w krokach 2 i 3. Jeśli $n = m$, to wielokąt jest silnie monotoniczny względem prostej L

Jeżeli chcemy też uwzględnić słabą monotoniczność, to wystarczy przyjąć w korokach 2 i 3 że y danego punktu może też być równy y punktu następnego.

Analiza poprawności algorytmu

Jeżeli $m < n$, to istnieje prosta pozioma, prostopadła do L, która przecina boki (p_{m-1}, p_m) oraz (p_{m-2}, p_{m-1}). A ponieważ przechodzenie po punktach zaczyna się od punktu najwyższego (czyli y punktu p_m jest mniejszy lub równy od y punktu p), to wiemy że na przeciwnej stronie wielokąta musi być jeszcze jeden bok, przecinający się z tą samą prostą poziomą, co znaczy że są 3 punkty przecięcia, a więc wielokąt nie jest monotoniczny. Jeżeli $m = n$, to takich przypadków nie istnieje.

Złożoność obliczeniowa

Złożoności wszystkich etapów algorytmu:

- Obrócenie wielokąta: $O(n)$
- Szukanie najwyższego punktu (krok 1, przeszukiwanie binarne): $O(log(n))$
- Przejście przez wierzchołki (krok 2 i 3): $O(n)$

Otóż złożoność całego algorytmu jest $O(n)$.