放物線の法線に関するシンプルで興味深い問題

2025/07/29

藤井 佑成 *1

問題

問1 放物線 $P: y = x^2$ の法線弦 (法線のうち放物線の内部にある部分) を l とする。

(1) l の長さの最小値を求めよ。

(2) P と l が囲む部分の面積の最小値を求めよ。

(3) P と l が囲む部分を l を軸として 1 回転するとき, 通過する部分の体積の最小値を求めよ。

問2 点 $Q(a, b)$ を通る 放物線 $P: y = x^2$ への法線を 3 本引き, それらの足を A,B,C とおく。

(1) Q の存在範囲を図示せよ。

(2) 4 点 A, B, C, O は同一円周上にあることを示せ。

*1 千葉県立千葉高等学校 3 年.

$\boxed{\text{解法}}$

問 1

(1) P 上の点 $A(t, t^2)$ における接ベクトルは $(1, 2t)$ なので, A における法線の方程式は,

$$(x-t, y-t^2)\cdot(1,2t)=0$$
$$\Leftrightarrow\ x+2ty-2t^3-t=0$$

これと P のもう 1 つの交点を B とおくと, $t=0$ のとき B は存在しないので $t\neq 0$ であり, 上式に $y=x^2$ を代入して,

$$2tx^2+x-2t^3-t=0$$
$$\Leftrightarrow\ (x-t)(2tx+2t^2+1)=0$$
$$\Leftrightarrow\ x=t,\ -t-\frac{1}{2t}\ \ (\because t\neq 0)$$

より, $B\left(-t-\dfrac{1}{2t}, t^2+1+\dfrac{1}{4t^2}\right)$ となる。よって,

$$AB^2=\left\{\left(-t-\frac{1}{2t}\right)-t\right\}^2+\left\{\left(t^2+1+\frac{1}{4t^2}\right)-t^2\right\}^2$$
$$=4t^2+\frac{3}{4t^2}+\frac{1}{16t^4}+3$$

ここで $T=t^2$ とおくと $t\neq 0$ より $T>0$ であり,

$$AB^2=4T+\frac{3}{4T}+\frac{1}{16T^2}+3$$

これを $f(T)$ とおくと,

$$f'(T)=4-\frac{3}{4T^2}-\frac{1}{8T^3}=\frac{1}{8T^3}(2T-1)(4T-1)^2$$

よって, $T>0$ における $f(T)$ の増減表は以下の通り。

T	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(T)$		$-$	0	$-$	0	$+$
$f(T)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって, $T=\dfrac{1}{2}$ のとき $f(T)$ は最小値 $\dfrac{27}{4}$ をとる。したがって, l の長さの最小値は $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

(2) (1) より $t\neq 0$ であり, 対称性より $t>0$ において考えれば十分。よって, P と l が囲む部分の面積は,

$$-\int_{-t-\frac{1}{2t}}^{t}\left(x+t+\frac{1}{2t}\right)(x-t)\,dx$$
$$=\frac{\left\{t-\left(-t-\frac{1}{2t}\right)\right\}^3}{6}\ \ (\because 1/6\text{ 公式})$$
$$=\frac{\left(2t+\frac{1}{2t}\right)^3}{6}$$
$$\geqq\frac{\left(2\sqrt{2t\cdot\frac{1}{2t}}\right)^3}{6}=\frac{4}{3}\ \ (\because \text{相加平均・相乗平均の関係})$$

よって, 求める最小値は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$

(3) (2) と同様に $t>0$ において考えれば十分。P 上の点 $C(u,u^2)$ $\left(-t-\dfrac{1}{2t}\leqq u\leqq t\right)$ と l の距離は, 点と直線の距離の公式より, $\dfrac{u+2tu^2-2t^3-t}{\sqrt{1+4t^2}}$ である。よって, 法線の傾きは $-\dfrac{1}{2t}$ であることより, P と l が囲む部分のうち, $u\leqq x\leqq u+\Delta u$ の部分が回転して通過する体積を, 高さ $\Delta u\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{4t^2}}$, 半径 $\dfrac{u+2tu^2-2t^3-t}{\sqrt{1+4t^2}}$ の円柱の体積に近似できる。したがって, 通過する体積は,

$$\int_{-t-\frac{1}{2t}}^{t}\pi\left(\frac{u+2tu^2-2t^3-t}{\sqrt{1+4t^2}}\right)^2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4t^2}}\cdot du$$
$$=\frac{\pi}{2t\sqrt{1+4t^2}}\int_{-t-\frac{1}{2t}}^{t}(u+2tu^2-2t^3-t)^2du$$
$$=\frac{\pi}{2t\sqrt{1+4t^2}}\int_{-t-\frac{1}{2t}}^{t}(u-t)^2(2tu+2t^2+1)^2du$$
$$=\frac{2\pi t}{\sqrt{1+4t^2}}\int_{-t-\frac{1}{2t}}^{t}(u-t)^2\left(u+t+\frac{1}{2t}\right)^2du$$
$$=\frac{2\pi t}{\sqrt{1+4t^2}}\cdot\frac{1}{30}\left\{t-\left(-t-\frac{1}{2t}\right)\right\}^5\ \ (\because 1/30\text{ 公式})$$
$$=\frac{\pi t}{15\sqrt{1+4t^2}}\cdot\left(2t+\frac{1}{2t}\right)^5$$
$$=\frac{\pi}{15\sqrt{2}}\cdot t^{\frac{1}{2}}\left(2t+\frac{1}{2t}\right)^{\frac{9}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{15\sqrt{2}}\sqrt{t\left(2t+\frac{1}{2t}\right)^9}$$

ここで, $g(t)=t\left(2t+\dfrac{1}{2t}\right)^9$ とおき, この最小値を求める。積の微分法を用いて微分すると,

$$g'(t)=\left(2t+\frac{1}{2t}\right)^9+t\cdot 9\left(2t+\frac{1}{2t}\right)^8\cdot\left(2-\frac{1}{2t^2}\right)$$
$$=\left(2t+\frac{1}{2t}\right)^8\left(20t-\frac{4}{t}\right)$$
$$=\left(2t+\frac{1}{2t}\right)^8\frac{4}{t}\left(5t^2-1\right)$$

よって, $t>0$ における $g(t)$ の増減表は以下の通り。

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$		$\nearrow$

したがって, $t=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき $g(t)$ は最小値

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^9=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{9}{2\sqrt{5}}\right)^9=\frac{9^9}{2^9 5^5}$$

をとる。よって, 通過する体積の最小値は,

$$\frac{\pi}{15\sqrt{2}}\sqrt{\frac{9^9}{2^9 5^5}}=\boldsymbol{\frac{6561\sqrt{5}}{20000}\pi}$$

問２

(1) 接点を (t, t^2) とおくと, この点における接ベクトルは $(1, 2t)$ なので, 法線の方程式は,

$$(x-t, y-t^2)\cdot(1,2t)=0$$
$$\Leftrightarrow\quad x+2ty-2t^3-t=0$$

これが $Q(a,b)$ を通るとき, 代入して,

$$-2t^3+(2b-1)t+a=0$$

この左辺を $f(t)$ とおく。放物線 P において接点と法線は一対一に対応するから, t の 3 次方程式 $f(t)=0$ が異なる 3 実数解を持つ条件を考えればよい。

$$\begin{aligned} f'(t) &= -6t^2+2b-1 \\ &= -6\left(t+\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right)\left(t-\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right) \end{aligned}$$

より, $b \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき $f(t)$ の増減表は以下の通り。

t	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{2b-1}{6}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{2b-1}{6}}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって, $f(t)=0$ が異なる 3 実数解を持つ条件は,

$$f\left(-\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right)f\left(\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right)<0$$
$$\Leftrightarrow\quad \left\{a-\frac{\sqrt{6}}{9}(2b-1)^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot\left\{a+\frac{\sqrt{6}}{9}(2b-1)^{\frac{3}{2}}\right\}<0$$
$$\Leftrightarrow\quad a^2-\frac{2}{27}(2b-1)^3<0$$
$$\Leftrightarrow\quad (2b-1)^3>\frac{27}{2}a^2$$

(右辺) $\geqq 0$ なので (左辺) >0 だから, 両辺 $\dfrac{1}{3}$乗 して,

$$2b-1>\frac{3}{\sqrt[3]{2}}a^{\frac{2}{3}}$$
$$\Leftrightarrow\quad b>\frac{3}{\sqrt[3]{16}}a^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}$$

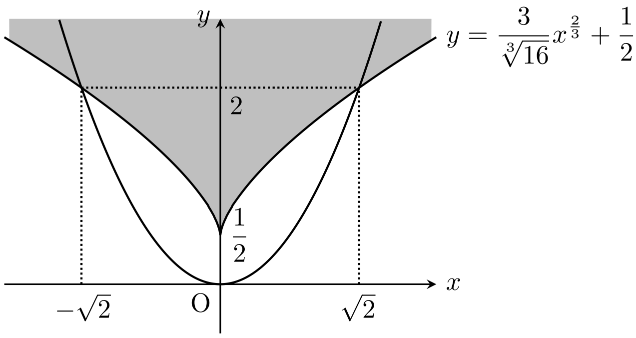
したがって, $g(x)=\dfrac{3}{\sqrt[3]{16}}x^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{2}$ とすると, Q の存在範囲は $y=g(x)$ のグラフよりも上の部分。$g(x)=g(-x)$ なので $g(x)$ は偶関数だから, $x>0$ において考えると,

$$g'(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{16}}x^{-\frac{1}{3}}>0$$
$$g''(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{16}}x^{-\frac{4}{3}}<0$$

よって, $g(x)$ の増減表は以下の通りで, $b \geqq \dfrac{1}{2}$ をみたす。

x	0	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$+$	
$g''(x)$		$-$	
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	∞

以上より, Q の存在範囲は下図斜線部。(境界を含まない)



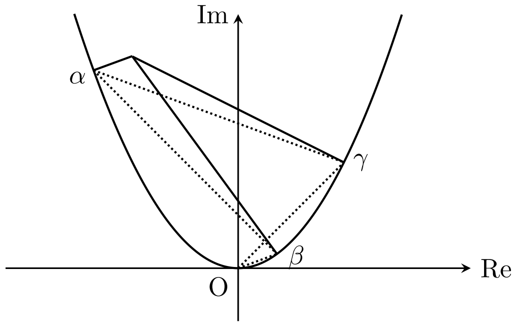
$\boxed{\text{考察}}$ 曲線 $y=g(x)$ は P の**縮閉線**である。

(2) A, B, C の x 座標をそれぞれ t_1, t_2, t_3 $(t_1<t_2<t_3)$ としてもよい。このとき, t_1, t_2, t_3 は $f(t)=0$ の 3 解であるから, 解と係数の関係より,

$$t_1+t_2+t_3=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ※$$

ここで, O を原点とする複素数平面において, A, B, C に対応する複素数をそれぞれ α, β, γ とすると,

$$\alpha=t_1+t_1^2 i,\quad \beta=t_2+t_2^2 i,\quad \gamma=t_3+t_3^2 i$$



$\beta=0$ または $\gamma=0$ のとき, A, B, C, O は同一円周上にあるから, $\beta\neq 0$ かつ $\gamma\neq 0$ のときについて示す。

$z_1=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$, $z_2=\dfrac{\gamma-0}{\beta-0}=\dfrac{\gamma}{\beta}$ とおくと, $z_2\neq 0$ であり,

$$z_1=\frac{(t_3+t_3^2i)-(t_1+t_1^2i)}{(t_2+t_2^2i)-(t_1+t_1^2i)}=\frac{(t_3-t_1)\{1+(t_3+t_1)i\}}{(t_2-t_1)\{1+(t_2+t_1)i\}}$$
$$z_2=\frac{t_3+t_3^2i}{t_2+t_2^2i}$$

※より,

$$z_1=\frac{(t_3-t_1)(1-t_2i)}{(t_2-t_1)(1-t_3i)}$$

したがって, $z_2\neq 0$ より,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(t_3-t_1)(1-t_2i)(t_2+t_2^2i)}{(t_2-t_1)(1-t_3i)(t_3+t_3^2i)} \\ &= \frac{(t_3-t_1)(t_2+t_2^3)}{(t_2-t_1)(t_3+t_3^3)}\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

よって, 上図より,

$$\arg z_1=\arg z_2 \quad\Leftrightarrow\quad \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\arg\left(\frac{\gamma-0}{\beta-0}\right)$$

なので, 円周角の定理の逆より, A, B, C, O は同一円周上にある。 □