Lecture 2 Elimination

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 8y + z = 12 \\ 4y + z = 2 \end{cases}$$

b should follow the same pattern

1st pivot

pivot can't be 0

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(2,1)]{\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3,2)]{\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix}$$

2nd pivot

3rd pivot

矩阵A为可逆矩阵，消元结束后得到上三角阵U（Uppertriangular matrix），其左侧下半部分的元素均为0，而主元1,2,5分列在U的对角线上。主元之积即行列式的值。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}$$

augmented matrix

U

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2y - 2z = 6 \\ 5z = -10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

需要说明的是，主元不能为0，如果恰好消元至某行，0出现在了主元的位置上，应当通过与下方一行进行"行交换"使得非零数字出现在主元位置上。如果0出现在了主元位置上，并且下方没有对等位置为非0数字的行，则消元终止，并证明矩阵A为不可逆矩阵，且线性方程组没有唯一解。

矩阵左乘向量则是对矩阵行向量进行线性组合

$$\underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}} \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}}$$

Matrices: ① subtract $3 \times$ row 1 from row 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

elementary matrix 初等矩阵 E_{21}

② Subtract $2 \times$ row 2 from row 3

$$E_{32} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{E_{32}(E_{21}A) = U} \iff (E_{32}E_{21})A = U$$

Permutation (Exchange rows)

置换矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

You can't change the order of matrices during the multiplication

Inverses

$$\underset{E^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}\underset{E}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$