

MATEMÁTICA I

0011001010101101000101001011

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Avellaneda
Secretaría de Cultura y Extensión
Universitaria

Ing. Juan Carlos Colubi

Ing. Ruben Ricardo Fonte

MATEMÁTICA

Unidad 1: Conjuntos

Noción de conjuntos. Inclusión. Subconjuntos. Conjuntos numéricos. Unión. Intersección. Complemento. Diferencia. Diferencia simétrica. Leyes de De Morgan. Problemas de conteo. Traducción de lenguaje coloquial a notación conjuntista.

Unidad 2 : Matrices

Matriz. Orden. Fila. Columna. Matrices cuadradas y rectangulares. Propiedades. Matriz traspuesta. Matriz simétrica. Rango de una matriz. Matriz inversa. Obtención por método de Gauss – Jordan.

Unidad 3 : Relaciones

Producto cartesiano. Relaciones binarias. Dominio. Imagen. Representación. Relaciones en un conjunto. Grafos dirigidos como representación de una relación. Camino. Matriz booleamas. Matriz asociada a una relación. Propiedades. Representación en computadoras de relaciones y grafos. Propiedades de una relación. Clasificación. Relaciones de equivalencia y orden. Análisis de las propiedades según la matriz asociada a la relación y el dígrafo correspondiente. Diagrama de Hasse.

Unidad 4: Grafos y Árboles

Grafos no dirigidos. Camino, circuito, trayectoria. Árboles binarios. Recorrido en orden inicial, intermedio y final. Valor numérico. Redes. Problemas de aplicación.

Unidad 5: Recta en el plano

Ecuación de la recta. Pendiente. Ordenada al origen. Rectas paralelas y perpendiculares. Cociente incremental. Representación gráfica. Inecuaciones. Representación en el plano. Problemas de aplicación.

Unidad 6: Sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales en el plano

Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolución gráfica y analítica. Posiciones relativas de dos rectas en el plano. Análisis del posible conjunto solución y su relación con la gráfica. Método de Gauss – Jordan. Problemas de aplicación. Sistemas de inecuaciones. Representación en el plano.

Unidad 7: Sistemas de ecuaciones lineales de $m \times n$

Sistemas de m ecuaciones con n incógnitas. Teorema de Rouché – Frobenius. Resolución por método de Gauss – Jordan. Conjunto solución. Problemas de aplicación.

Unidad 8: Cálculo combinatorio

Principio de la multiplicación. Permutaciones simples y con repetición. Variaciones simples y con repetición. Combinaciones simples y con repetición. Ejercicios de aplicación.

Bibliografía:

Álgebra I . Armando Rojo . Editorial El Ateneo
Álgebra II . Armando Rojo . Editorial El Ateneo
Matemática discreta . Grassman . Editorial PRENTICE - HALL

TABLA DE SÍMBOLOS O NOTACIÓN

N	conjunto de números naturales
N_0	conjunto de números naturales incluido el cero
Z	conjunto de números enteros
Q	conjunto de números racionales
I	conjunto de números irracionales
R	conjunto de números reales
C	conjunto de números complejos
R^+	conjunto de números reales positivos
R^-	conjunto de números reales negativos
$R^+ \cup \{0\}$	conjunto de números reales positivos incluido el cero

\subset	se lee " está incluido estrictamente en " o " incluye estrictamente a "
\subseteq	se lee " está incluido ampliamente en " o " incluye ampliamente a "
$\not\subset$	se lee " no contenido o no incluido "
\in	se lee " pertenece "
\notin	se lee " no pertenece "
\exists	se lee " existe por lo menos uno "
\exists^*	se lee " existe uno y solo uno "
\nexists	se lee " no existe "
\Rightarrow	se lee " implica "
\Leftrightarrow	se lee " si y solo si "
\forall	se lee " para todo "
$ x $	se lee " valor absoluto de X "
\emptyset	indica " conjunto vacío "
U	indica " conjunto universal "
$/$	se lee " tal que "
\vee	se lee " o "
\wedge	se lee " y "
$<$	se lee " menor " estrictamente
\leq	se lee " menor o igual "
$>$	se lee " mayor " estrictamente
\geq	se lee " mayor o igual "
\cong	se lee " igual o semejante "
\neq	se lee " no es igual "
\cup	se lee " unión "
\cap	se lee " intersección "
\equiv	se lee " equivalente "
$\#$	se lee " cardinal "

Unidad 1. Conjuntos.

PROBLEMAS DE TEORÍA DE CONJUNTOS

DEFINICIÓN: Cuando decimos $A = \{x / x \text{ tiene la propiedad "p"}\}$, cualquier elemento que tenga esa propiedad pertenece al conjunto. En símbolos es $x \in A$, en consecuencia (\therefore) la pertenencia es una relación de elemento a conjunto.

1) Sea $A = \{1, 2, 4, a, b, c\}$. Indicar cada uno de los siguientes casos como verdadero "V" o falso "F".

- | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) | b) | c) | d) | e) |
| $2 \in A$ | $3 \in A$ | $c \notin A$ | $\emptyset \in A$ | $A \in A$ |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

DEFINICIÓN: Cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen a otro, se dice que está incluido. En consecuencia (\therefore) la inclusión es una relación de conjunto a conjunto.

\subseteq se lee "está incluido ampliamente en" o "incluye ampliamente a"

Simbólicamente: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

\subset se lee "está incluido estrictamente en" o "incluye estrictamente a"

Simbólicamente: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B \wedge \exists y \in B / y \notin A$

2) Sean $A = \{1\}$, $B = \{1, a, 2, b, c\}$, $C = \{b, c\}$, $D = \{a, b\}$, $E = \{1, a, 2, b, c, d\}$

Completar con incluido: \subset o no incluido: $\not\subset$, para dar un enunciado verdadero.

- a) $A \subset B$ b) $\emptyset \subset A$ c) $B \subset C$ d) $C \subset E$ e) $D \subset C$ f) $B \subset E$

3) Escribir el conjunto de potencia de B, (P_B), siendo el conjunto $B = \{C\#; JAVA; VB.NET.\}$.

4) A) Considerando los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, c, d\}$ con dominio $D = \{a, b, c, d, e\}$ y las formas proposicionales:

$p(x) = x \text{ pertenece al conjunto A}$, $q(x) = x \text{ pertenece al conjunto B}$

Definir por extensión el conjunto de verdad correspondiente a:

- | | | | | |
|------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|----------------------------|----------------|
| a) $p(x) \wedge q(x)$ | b) $p(x) \vee q(x)$ | c) $p(x) \wedge \neg q(x)$ | d) $\neg p(x) \wedge q(x)$ | e) $\neg p(x)$ |
| f) $\neg [p(x) \wedge q(x)]$ | g) $\neg p(x) \vee \neg q(x)$ | h) $\neg p(x) \wedge \neg q(x)$ | i) $\neg [p(x) \vee q(x)]$ | |

B) Sombrear en un diagrama de Venn el conjunto verdad correspondiente a cada uno de los casos anteriores, considerando dominio $D = U$

5) Considerando las formas proposicionales:

$p(x) = x \text{ pertenece al conjunto A}$, $q(x) = x \text{ pertenece al conjunto B}$

a) Escribir en lenguaje simbólico la siguiente proposición:

"Todos los elementos del dominio verifican que si pertenecen al conjunto A, entonces pertenecen al conjunto B".

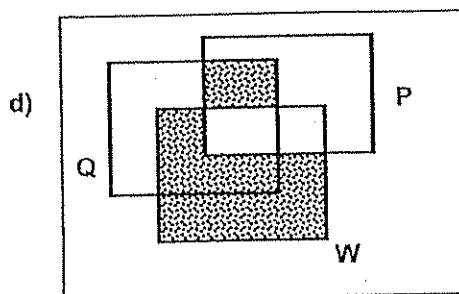
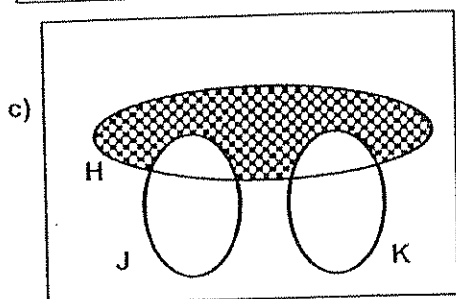
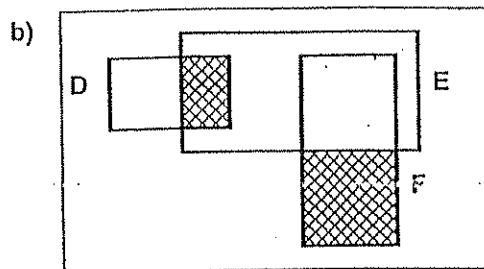
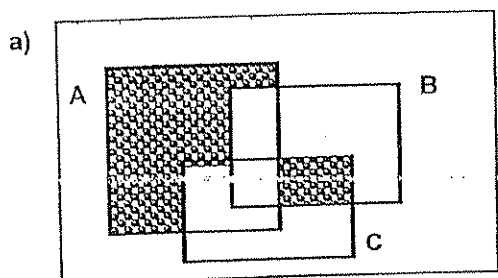
b) Dar el valor de verdad siendo:

b₁) $A = \{1, 2, 3\} \wedge B = \{1, 2, 3, 4, 0\}$

b₂) $A = \{1, 2, 3, 4, 0\} \wedge B = \{3, 2, 1\}$

b₃) $A = \emptyset \wedge B = \{-1, 0, 1\}$

6) Escribir con notación conjuntista una operación que represente las regiones sombreadas en los siguientes diagramas

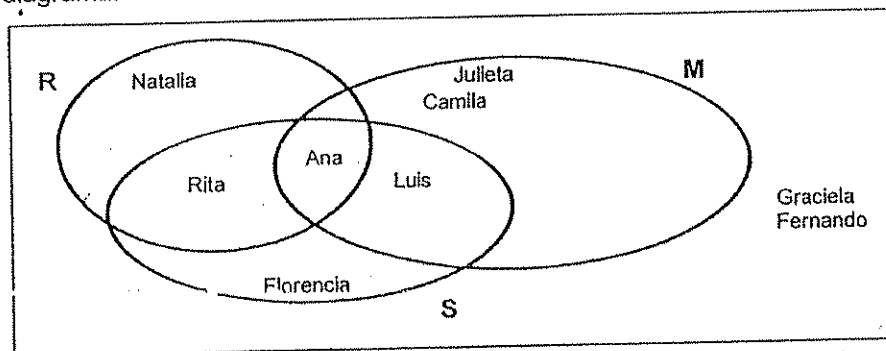


7) Verificar mediante diagramas de Venn las leyes de De Morgan para tres conjuntos.

PROBLEMAS DE CONTEO

8) Dados los conjuntos:

R = personas de cabello rubio M = personas con ojos marrones S = personas que miden menos de 1,70 m y el siguiente diagrama:



Definir por extensión y describir las características de los elementos pertenecientes a los siguientes conjuntos:

- a) $\overline{R \cap M \cap S}$ b) $R - M$ c) $\overline{R \cap M \cap S}$ d) $\overline{M \cap S \cap R}$ e) $\overline{R \cap S \cap M}$

9) Sombrear en un diagrama la región correspondiente a:

- a) $\overline{A \cap B \cap C}$ b) $\overline{A \cap B \cap C}$ c) $\overline{A \cup B \cup C}$ d) $\overline{A \cap B \cap C}$

10) Dados tres conjuntos sombrear en un diagrama de Venn la región donde ubicarla a:

- a) Los elementos que pertenecen por lo menos a dos de los conjuntos.
b) Los elementos que pertenecen a sólo dos de los conjuntos.
c) Los elementos que pertenecen a lo sumo a uno de los conjuntos.
d) Los elementos que pertenecen exactamente a uno de los conjuntos.

11) Sabiendo que:

$$\#(A \cup B \cup C) = 65 \quad \#(A \cap B \cap C) = 3 \quad \#(A \cap B) = 20 \quad \#A = \#B = 35$$

$$\#(B \cap C) = 10 \quad \#[(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)] = 32$$

Calcular:

a) $\# [C \cap (A \cap B)]$

b) La cantidad de elementos que pertenecen a sólo un conjunto, escribirlo en notación conjuntista.

12) Se tienen tres conjuntos A, B y C. Sabiendo que:

$$\#(A \cap B \cap C) = 90 \quad \#(A \cap B \cap \bar{C}) = 5 \quad \#(B \cap C) = 16 \quad \#[(A \cup B \cup C)] = 20$$

$$\#A = 50 \quad \#B = 30 \quad \#[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] = 30 \quad \#(A \cap B) = 17$$

a) ¿Cuántos elementos hay a lo sumo en dos conjuntos?

b) ¿Cuántos elementos hay solamente en dos conjuntos?

c) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto C?

Nota: en los siguientes problemas realizar el diagrama de Venn correspondiente y expresar los datos y las respuestas en notación conjuntista.

13) En un atlas hay 97 mapas de Argentina, de los cuales 35 están coloreados.

El atlas tiene un total de 128 mapas coloreados. Hay 30 mapas que no tienen color ni son de Argentina.

a) ¿Cuántos mapas tiene el atlas?

b) ¿Cuántos mapas son de Argentina pero sin color?

c) ¿Cuántos mapas coloreados no son de Argentina?

14) Sobre un total de 80 personas se sabe que:

44 se inscribieron en un curso de Windows

5 " " " " Windows y DOS solamente

16 en DOS y Cobol

17 en Windows y DOS

28 se inscribieron por lo menos en dos cursos

17 en ninguno de esos cursos

30 en DOS

Se pide { a) ¿Cuántos se anotaron en un solo curso?
b) ¿Cuántos se anotaron a lo sumo en dos cursos?
c) ¿Cuántos se anotaron solamente en dos cursos?

SOLUCIÓN: (no es única)

A partir de los datos podemos calcular los valores que necesitamos para completar el diagrama:

Primero:

$$D = (D \cap W \cap \bar{C}) \cup (D \cap C \cap W) \cup (D \cap C \cap \bar{W}) \cup (D \cap \bar{C} \cap \bar{W})$$

$$30 = 5 + 12 + 4 + \#(D \cap \bar{C} \cap \bar{W})$$

$$\#(D \cap \bar{C} \cap \bar{W}) = 9$$

Segundo:

$$U = (W \cup D \cup C) \cup W \cup (D \cap C \cap \bar{W}) \cup (D \cap C \cap W) \cup (C \cap \bar{D} \cap \bar{W})$$

$$80 = 17 + 44 + 4 + 9 + \#(C \cap \bar{D} \cap \bar{W})$$

$$\#(C \cap \bar{D} \cap \bar{W}) = 6$$

Tercero:

$$28 = \#(D \cap W \cap \overline{C}) + \#(D \cap C \cap \overline{W}) + \#(C \cap W \cap \overline{D}) + \#(D \cap C \cap W)$$

$$28 = 5 + 4 + \#(C \cap W \cap \overline{D}) + 12$$

$$\#(C \cap W \cap \overline{D}) = 7$$

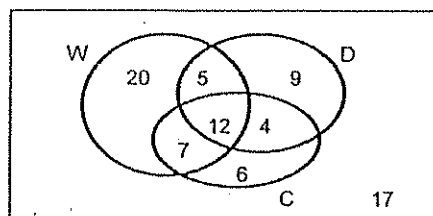
Cuarto:

$$W = \#(W \cap D \cap \overline{C}) + \#(W \cap D \cap C) + \#(W \cap C \cap \overline{D}) + \#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C})$$

$$44 = 5 + 12 + 7 + \#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C})$$

$$\#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C}) = 20$$

El diagrama completo es:



a) Los que se anotan en un solo curso son:

$$\#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C}) + \#(C \cap \overline{D} \cap \overline{W}) + \#(D \cap \overline{W} \cap \overline{C}) = 20 + 6 + 9 = 35$$

b) Los que se anotaron a lo sumo en dos cursos son:

$$\text{En ningún curso: } \#(W \cup D \cup C) = 17$$

$$\text{En un curso: } \#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C}) + \#(C \cap \overline{D} \cap \overline{W}) + \#(D \cap \overline{W} \cap \overline{C}) = 20 + 6 + 9 = 35$$

$$\text{En dos cursos: } \#(W \cap D \cap \overline{C}) + \#(W \cap \overline{D} \cap C) + \#(\overline{W} \cap D \cap C) = 5 + 7 + 4 = 16$$

$$\text{El total será: } 17 + 35 + 16 = 68$$

c) Los que se anotaron **solamente** en dos cursos son:

$$\text{En dos cursos: } \#(W \cap D \cap \overline{C}) + \#(W \cap \overline{D} \cap C) + \#(\overline{W} \cap D \cap C) = 5 + 7 + 4 = 16$$

15) En una encuesta se supo que:

4 personas leen las revistas: Caras, El Gráfico y Muy Interesante.

6 leen solamente la revista M I

16 las revistas M I y E G

20 leen C pero no M I

12 leen C y E G

4 sólo leen E G

26 leen C

50 ninguna de las tres revista

Se desea saber:

- ¿Cuántas personas leen alguna de las tres revistas?
- ¿Cuántas leen una sola revista?
- ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
- ¿Cuántas personas leen por lo menos dos revistas?

- 16) En el primer año de una carrera de computación se registró la siguiente estadística:
El 10% de los alumnos estudiaban **por lo menos** una de las siguientes materias: Matemática, Programación I e Inglés. Además 28 estudian Matemática, 22 Programación I, y 28 Inglés; **sólo 2** alumnos estudian las tres materias, 12 estudian Matemática e Inglés, 12 estudian Programación I e Inglés y **10 sólo** Matemática.
Se pide:
- ¿Cuántos alumnos estudian **alguna** de las tres materias?
 - ¿Cuál es la cantidad **total** de alumnos?
 - ¿Cuántos estudian Matemática y Programación I pero no Inglés?
 - ¿Cuántos estudian **sólo 2** materias?
-
- 17) Un video club cuenta con 200 películas, de las cuales 125 son de cortometraje y 94 son de color. Además 38 de las películas de largometraje son de color.
- ¿ Cuántas películas blanco y negro hay ?
 - ¿ Cuántas de las de cortometraje son de color ?
-
- 18) En una ciudad existen tres cadenas de supermercados: A , B , C.
Una encuesta indicó que el 70 % de los habitantes compra en alguno de esos supermercados, el 30 % compra en por lo menos dos de ellos, mientras que el 25 % lo hace exactamente en dos de ellos.
Hay un 5 % de habitantes que compra sólo en B y C.
Se sabe, además, que el porcentaje de personas que compra sólo en A y B es igual al que compra sólo en A y C.
La cadena A acapara el 40 % del público al igual que la cadena B.
- ¿Qué cantidad de personas compra **sólo** en la cadena B?
 - ¿Qué porcentaje lo hace en una sola de las cadenas existentes?
-
- 19) Los empleados de una gran empresa de insumos para computación, cuando asisten a Buenos Aires, pueden hospedarse en tres grandes hoteles: el Sheraton, el Bauen y el Libertador, o bien por su cuenta en algún otro.
Se sabe por experiencias anteriores, que el 80 % elige uno de los tres hoteles citados. Además, el 20 % se hospedó alguna vez en el Sheraton y el Bauen, el 15 % en los tres hoteles, el 12 % eligió sólo el Bauen y el Libertador y nadie eligió sólo el Sheraton y el Libertador.
Si los porcentajes de personas que prefieren sólo uno de los hoteles mencionados son iguales, se pide:
- ¿Qué porcentaje de personas se aloja en **sólo uno** de los hoteles citados?
 - ¿Qué porcentaje lo hace en **por lo menos dos** de ellos?
-
- 20) Un video – club ofrece a sus socios tres estrenos: una película de acción, una de terror y una comedia.
Se sabe que 46 de los 100 socios que tiene el video aceptaron la propuesta, de los cuales 40 alquilaron por lo menos dos de las películas, 6 alquilaron las 3,
30 alquilaron la película de acción y la de terror, mientras que 4 alquilaron sólo la película de acción y la comedia, 3 alquilaron sólo la comedia y la película de acción la alquilaron 37 personas.
El dueño del video quiere saber:
- ¿Cuántas personas alquilaron **sólo** la película de terror?
 - ¿Cuántas personas alquilaron **sólo dos** películas?
-
- 21) En el museo de Bellas Artes hubo una muestra de tres pintores: Joan Miró, Juan Gris y Kandinsky.
Se sabe que el fin de semana fueron al museo 3540 personas de las cuales el 40 % visitaron las muestras, el 30 % visitaron por lo menos dos de las muestras, el 5 % visitaron las tres muestras.
Las muestras de Joan Miró y Juan Gris la visitaron un 20 %, un 3 % fue sólo a la muestra de Joan Miró y Kandinsky, un 2 % fueron sólo a la de Kandinsky y a la muestra de Juan Gris fue un 32 %.
- Se pide:
- ¿Qué porcentaje visitó sólo la muestra de Joan Miró?
 - ¿Qué porcentaje visitó la muestra de Joan Miró y Juan Gris pero no la de Kandinsky?
 - ¿Cuántas personas no visitó ninguna de las tres muestras?
-
- 22) Entre los 76 alumnos de primer año de un colegio, se efectuó un test de tres preguntas. Acerca de los resultados se tienen los siguientes datos:
44 alumnos respondieron bien la segunda pregunta y 28 bien la tercera; 12 alumnos respondieron bien la primera y la segunda, 2 la primera y la tercera, 10 alumnos respondieron bien sólo la primera pregunta, en tanto 18 respondieron bien la tercera pero no la segunda, ninguno respondió bien sólo la primera y la tercera.

- a) ¿Cuántos alumnos no respondieron bien ninguna pregunta?
- b) ¿Cuántos alumnos respondieron bien la primer pregunta?
- c) ¿Cuántos alumnos respondieron por lo menos dos preguntas?

23) Se realiza una encuesta entre 50 alumnos de un aula preguntándoles que tipo de música les gustaba: clásica, heavy o tecno.
A 30 de los alumnos les agradaba la música clásica, pero a 10 de ellos les gustaba sólo la música clásica, 20 alumnos se inclinaron por heavy pero a 5 de ellos sólo heavy y tecno. Hubo 12 personas que admitieron no escuchar ningún tipo de música, uno dijo que escuchaba sólo heavy y 16 que escuchaban tecno.

- a) ¿Cuántos alumnos escuchaban los tres tipos de música?
- b) ¿Cuántos alumnos escuchaban sólo heavy y clásica?

24) En una cierta encuesta, se preguntó a 500 ejecutivos acerca de su lectura de los periódicos Barricada, Lucha y Construcción.

Las respuestas mostraron que

250 leían Barricada

270 leían Construcción

190 leían Lucha

70 leían Barricada y el Construcción

20 leían los tres periódicos.

50 leían el Barricada y el Lucha

110 leían Lucha y el Construcción

Calcular:

- a) La cantidad de personas que leían a lo sumo un periódico.
- b) La cantidad de personas que no leen ninguno de estos periódicos.

25) Se entrevistó a un universo de personas que solamente escuchan las siguientes radios (en AM): La Voz de las Madres (530), Cooperativa (740) y Nacional (870), obteniéndose los siguientes datos:

140 escuchan La Voz de las Madres , 40 escuchan La Voz de las Madres y Cooperativa,
100 escuchan Cooperativa, 50 escuchan La Voz de las Madres y Nacional, 60 escuchan Nacional .

Se sabe que nadie escucha las tres emisoras simultáneamente y no hay ningún oyente que escuche la emisora Nacional exclusivamente.

Calcular:

- a) La cantidad de personas que escuchan por lo menos una radio.
- b) La cantidad de personas que escuchan sólo Cooperativa.

26) De los 200 estudiantes' a ingresar en una universidad, 98 son mujeres.

60 estudian comunicación.

60 son mujeres que no estudian comunicación.

¿ Cuántos hombres no estudian comunicación ?.

27) En una academia se realiza una encuesta a 120 jóvenes y se obtienen los siguientes datos:

80 quieren ser actores.

70 quieren ser cantantes.

50 quieren ser actores y cantantes.

Determinar:

a) no quieren ser cantantes.

b) no quieren ser actores.

c) quieren ser cantantes, pero no actores.

d) quieren ser actores, pero no cantantes.

e) no quieren ser actores ni cantantes.

28) De 200 profesores de una universidad, 115 son licenciados y 60 son investigadores.

De los licenciados 33 son investigadores.

Indique cuántos de estos profesores:

a) son licenciados o investigadores

b) no son licenciados ni investigadores.

29) En un concurso de baile hay 55 parejas.

38 son latinas.

27 bailan tango y 46 bailan salsa.

13 son latinas y bailan tango.

18 bailan tango y salsa.

Todas las latinas bailan salsa.

Todas las parejas tienen al menos una de las características anteriores.

a) ¿ Cuántas tienen las tres características ?

b) ¿ Cuántas tienen exactamente dos características ?

c) ¿ Cuántas tienen exactamente una característica ?

30) En una investigación hecha en un grupo de 100 estudiantes, la cantidad de personas que estudiaban varios idiomas fueron las siguientes:

Español, 28.

Español y alemán, 8.

Los tres idiomas, 3.

Alemán, 30.

Español y francés, 10.

Francés, 42.

Alemán y francés, 5.

a) ¿ Cuántos alumnos no estudian ningún idioma ?

b) ¿ Cuántos alumnos tenían al francés como único idioma de estudio ?

31) En un análisis posterior sobre los 100 estudiantes (del ejercicio anterior) la cantidad de personas que estudiaban varios idiomas resultaron ser:

Alemán únicamente, 18.

Alemán pero no español, 23.

Alemán y francés, 8.

Alemán, 26.

Francés, 48.

Francés y español, 8.

Ningún idioma, 24.

a) ¿ Cuántos estudiantes aprendían el español ?

b) ¿ Cuántos estudiantes aprendían alemán y español pero no francés ?

Unidad 1. Conjuntos. Respuestas.

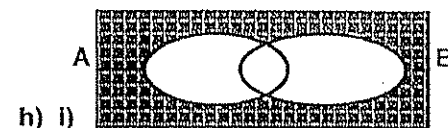
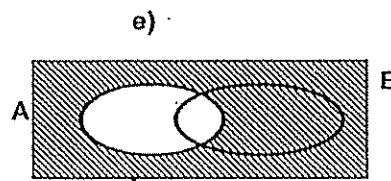
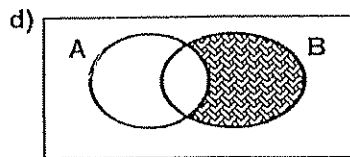
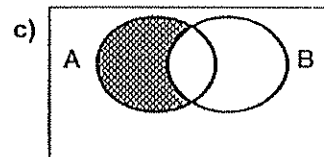
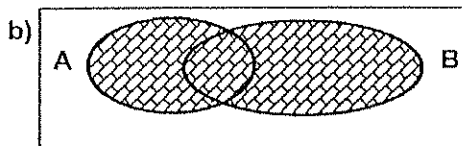
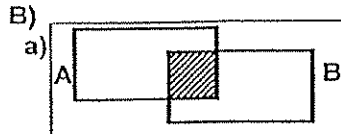
PROBLEMAS DE TEORÍA DE CONJUNTOS

1) a) V b) F c) F d) F e) F

2) a) $A \subset B$ b) $\emptyset \subset A$ c) $B \not\subset C$ d) $C \subset E$ e) $D \not\subset C$ f) $B \subset E$

3) $P_{\{B\}} = \{\{C\#, JAVA; VB.NET.\}; \{C\#, JAVA\}; \{C\#, VB.NET.\}; \{JAVA, VB.NET.\}; \{C\#\}; \{JAVA\}; \{VB.NET.\}; \emptyset\}$

4) A) a) $C_v = \{b, c\}$ b) $C_v = \{a, b, c, d\}$ c) $C_v = \{a\}$ d) $C_v = \{d\}$
 e) $C_v = \{d, e\}$ f) $C_v = \{a, d, e\}$ g) $C_v = \{a, d, e\}$ h) $C_v = \{e\}$ i) $C_v = \{e\}$



5) a) $\forall x / x \in p(x) \Rightarrow x \in q(x)$ b₁) $V_v = 1$ b₂) $V_v = 0$ b₃) $V_v = 0$

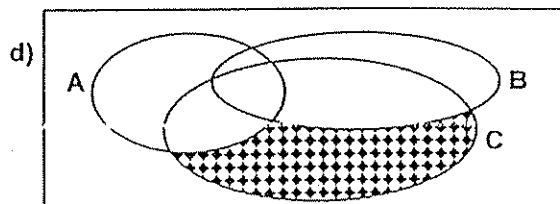
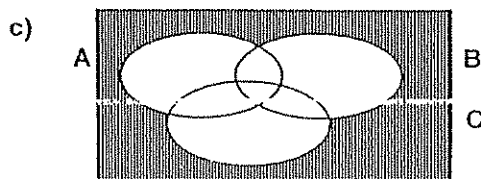
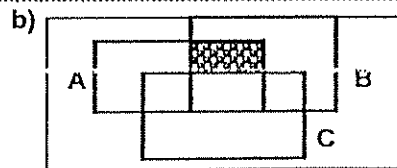
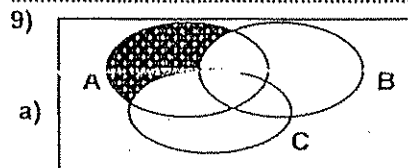
6) a) $[A - (B \cup C)] \cup [(B \cap C) - A]$ b) $(D \cap E) \cup (F - E)$

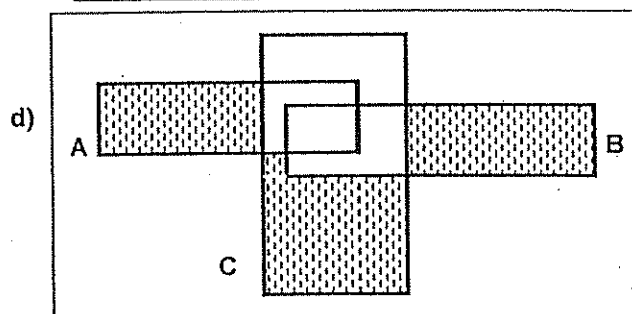
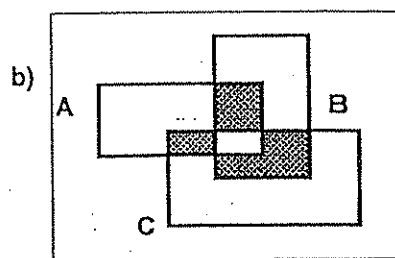
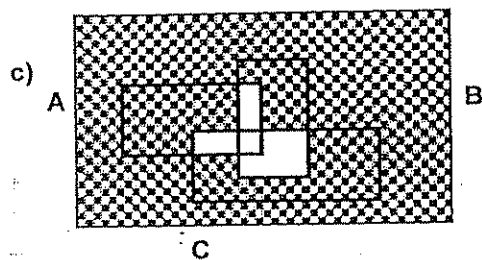
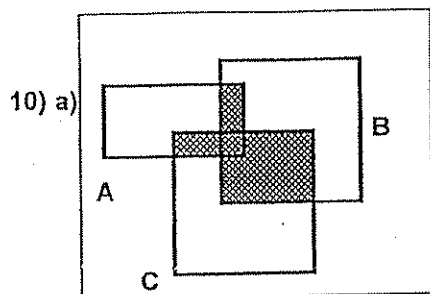
c) $\overline{H \cap J \cap K}$ d) $\overline{(P \cap Q \cap W) \cup (W - P)}$

7) a) $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ b) $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

PROBLEMAS DE CONTEO

8) a) Natalia b) Natalia, Rita c) Graciela, Fernando d) Luis e) \emptyset





11) a) 15 b) 30

12) a) 98 b) 18 c) 52

13) a) 220 b) 62 c) 93

14) a) , b) , c) está resuelto

15) a) 48 b) 22 c) 98 d) 26

16) a) 48 b) 480 c) 6 d) 26

17) a) 106 b) 56

18) a) 20 % b) 40 %

19) a) 48 % b) 32 %

20) a) 0 b) 34

21) a) 3 % b) 15 % c) 2124

22) a) 4 b) 22 c) 20

23) a) 3 b) 11

24) a) 310 b) 0 25) a) 200 b) 50

26) 80

27) a) 50 b) 40 c) 20 d) 30 e) 20

28) a) 142 b) 58

29) a) 13 b) 30 c) 12

30) a) 20 b) 30

31) a) 18 b) 0

Unidad 2. Matrices.

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos.
El elemento a_{ij} de la matriz A ocupa la fila i y la columna j del arreglo.
Se dice que una matriz con m filas y n columnas tiene el orden o el tamaño $m \times n$.

- a) Una matriz cuadrada tiene $m = n$.
- b) Un vector fila es una matriz con un renglón y n columnas.
- c) Un vector columna es una matriz con m filas y una columna.

1) Escriba las siguientes matrices definidas en forma explícita:

- a) $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4} / a_{ij} = 1 + j$
- b) $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / b_{ij} = (-1)^{i+j}$
- c) $C \in \mathbb{R}^{4 \times 4} / c_{ij} = 1$ (si $i + j$ es primo); $c_{ij} = 0$ (si $i + j$ no es primo)
- d) $D \in \mathbb{R}^{n \times n} / d_{ij} = 1$ (si $i = j$); $d_{ij} = 0$ (si $i \neq j$)

SUMA DE MATRICES

La suma de matrices se define entre matrices que tienen el mismo número de renglones y de columnas (o sea del mismo tamaño: $m \times n$). Matrices conformes.

Siendo:

$$A = [a_{ij}] \wedge B = [b_{ij}] \text{ y la operación: } A + B = C$$

Los elementos de la matriz C se obtienen haciendo:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}]$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 4+5 & -1+3 \\ 5+0 & 0+(-3) & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Sean las matrices de $\mathbb{R}^{2 \times 3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1/2 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular:

- a) $A + B$
- b) $A - B$
- c) $2A - 3B$
- d) $\sqrt{2} A + 0B$

3) Hallar $X \in \mathbb{R}^{2 \times 4} / A + X = B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

4) Calcular x, y, z para que las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ sean iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & x & -1 \\ y & 5 & 2 \\ 4 & -4 & z \end{pmatrix}$$

5) Hallar A y $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ / verifiquen simultáneamente las siguientes ecuaciones:

$$3A + 4B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \quad -2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$$

6) Expresar el vector: $\vec{V} = (7, -6, 0)$ como combinación lineal de los vectores: \vec{P} , \vec{Q} , \vec{R}

$$\vec{P} = (2, 0, 1) \quad \vec{Q} = (0, 3, 0) \quad \vec{R} = (-1, 0, 3)$$

7) Escribir la matriz: $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como una combinación lineal de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8) Analice si existe $K \in \mathbb{R}$ para que la matriz dada (M) se pueda escribir como una combinación lineal de $A \wedge B$.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & K-1 \\ 2K+1 & 3K \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Planteamos la situación con los escalares α y β .

$$\begin{pmatrix} 3 & K-1 \\ 2K+1 & 3K \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{operando queda:} \quad \begin{pmatrix} 3 & K-1 \\ 2K+1 & 3K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \beta \end{pmatrix}$$

$$\text{Por igualación de matrices obtenemos las siguientes cuatro ecuaciones:} \quad \begin{cases} 3 = \alpha \\ K-1 = \beta \\ 2K+1 = \beta \\ 3K = \beta \end{cases}$$

De la 1ª es $\alpha = 3$

La 2ª y la 3ª tienen los segundos miembros iguales \therefore las podemos igualar: $K-1 = 2K+1$

Obtenemos $K = -2$ y con este valor será $\beta = -3$

Reemplazamos en la 4ª (para verificar):

$$3K = \beta$$

$$3(-2) = -3 \quad \text{esto nos da:} \quad -6 = -3 \quad (\text{no existe}) \quad \therefore \text{no se verifica}$$

Conclusión:

No existe $K \in \mathbb{R}$ y M no puede expresarse como combinación lineal de las matrices $A \wedge B$ propuestas.

9) Analice si existe $K \in \mathbb{R}$ para que la matriz dada (M) se pueda escribir como una combinación lineal de A, B, C, D .

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & K \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: cuando planteamos la combinación lineal igualada a cero tendremos:
 I) para que sea **dependencia** debe ser distinto de **cero algún** coeficiente.
 II) para que sea **independencia** deben ser **cero todos** los coeficientes.

10) Analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

11) Dado el siguiente conjunto:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

a) Determinar los valores de k para los cuales B es una base de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

b) Para $k = 0$, obtener las coordenadas de

$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ respecto de la base B .

PRODUCTO DE MATRICES

Condición de existencia de producto: $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge B \in \mathbb{R}^{n \times r}$

Si: (la cantidad de columnas de A) = (la cantidad de filas de B)

Existe: $A * B$ y su tamaño es: $A * B \in \mathbb{R}^{m \times r}$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 8 & 0 & 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3/16 & 0 & -1/16 \\ -1/2 & 1 & -1/4 \\ -1/8 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 3/16 + 0 \cdot (-1/2) + 4 \cdot (-1/8) & 8 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 8 \cdot (-1/16) + 0 \cdot (-1/4) + 4 \cdot 1/8 \\ 6 \cdot 3/16 + 1 \cdot (-1/2) + 5 \cdot (-1/8) & 6 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 6 \cdot (-1/16) + 1 \cdot (-1/4) + 5 \cdot 1/8 \\ 8 \cdot 3/16 + 0 \cdot (-1/2) + 12 \cdot (-1/8) & 8 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 12 \cdot 0 & 8 \cdot (-1/16) + 0 \cdot (-1/4) + 12 \cdot 1/8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 - 1/2 & 0 & -1/2 + 1/2 \\ 9/8 - 4/8 - 5/8 & 1 & -3/8 - 2/8 + 5/8 \\ 3/2 - 3/2 & 0 & -1/2 + 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12) Efectuar, si es posible, los siguientes productos:

a) $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

13) Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcular A^2 y A^3

b) Dado $P(x) = x^2 - 3x + 2 \cdot I$, compruebe que: $P(A) = A^2 - 3A + 2 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz identidad (I):

se define con los elementos de la diagonal principal todos "1" y el resto "0"

Ejemplo: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

14) Dado el conjunto: $S = \{ X \in \mathbb{R}^{3 \times 1} / A \cdot X = N \}$

Siendo $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ una matriz de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar la base y la dimensión (S).

15) Dado el conjunto: $W = \{ X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / X \cdot A = A \cdot X \}$

Siendo $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ una matriz de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar la base y dimensión (W).

16) Hallar, si existe, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices mediante el método de Gauss - Jordan

Matriz inversa:

Dada una matriz A, si existe una matriz B que cumple con: $A \cdot B = B \cdot A = I$

Esta matriz B se llama inversa de A, y se la simboliza con: A^{-1} o sea que $B = A^{-1}$

Determinante de una matriz cuadrada: $\det. A$ ó $|A|$

Una forma de calcular del determinante (3×3) es la siguiente (menores complementarios):

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Si el determinante de la matriz: $|A| = 0$, la matriz inversa no existe.

Las matrices que no tienen inversa se llaman singulares.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

17) Dada la matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & k-1 & 2 \\ 0 & 3 & k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

a) Analizar para que valores de k, la matriz P es inversible.
b) Hallar P^{-1} para $k = 1$.

18) Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.

a) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} : (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

b) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^2 - B^2 = (A+B) * (A-B)$

c) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^2 - I = (A+I) * (A-I)$

Matriz transpuesta: Dada $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matriz que se obtiene intercambiando renglones y columnas sera: $A^T = [a_{ij}]^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$
o sea que: $[a_{ij}]^T = a_{ji}$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

19) Dado el conjunto: $S = \{X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / X * A \text{ es simétrica}\}$

Siendo $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ una matriz de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar la base y dimensión (S).

Interpretación del conjunto dato:

El conjunto S es el de todas las matrices X que cuando se las multiplica por A dan por resultado una nueva matriz Y pero con la propiedad de ser simétrica:

$$X * A = Y ; Y : \text{simétrica.}$$

Matriz simétrica: una matriz Y se llama simétrica cuando coincide con su traspuesta: $Y = Y^T$
o sea que: $a_{ij} = a_{ji}$

Solución:

Proponemos que la matriz sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ siendo $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

El producto $X * A = Y$ será:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a*0+b*1 & a*1+b*0 \\ c*0+d*1 & c*1+d*0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

Según la condición $Y = Y^T$ nos queda:

$$\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}^T \therefore \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}$$

Esta última igualdad se produce cuando $a = d$ \therefore la matriz X será: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$

A esta matriz X la podemos pensar como la suma de tres matrices:

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Esto lo podemos escribir de la siguiente forma:

$$X = a * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La base será:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La dimensión será: $S = 3$

20) Dado el conjunto: $S = \{ X \in R^{3 \times 3} / X * A \text{ es antisimétrica} \}$

Siendo $A \in R^{3 \times 3}$ una matriz de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar la base y dimensión (S).

La diferencia con la definición del ejercicio 17) es que: $X * A = Y$; Y: antisimétrica.

Matriz antisimétrica: una matriz Y se llama antisimétrica cuando coincide con la opuesta a su traspuesta: $Y = -Y^T$, o sea que: $a_{ij} = -a_{ji}$

El rango de una matriz está dado por el arreglo mas grande, de la matriz, con determinante no nulo.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Utilizando el método de menores complementarios ($i+j = \text{par} \therefore \text{va} +$, $i+j = \text{impar} \therefore \text{va} -$) y desarrollando por la 1ª fila, el determinante será:

$$|A| = +a_{11} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = +1(21-20) - 2(14-12) + 3(10-9) = 0$$

Un arreglo de 2×2 puede ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ el determinante será: } (3-4) = -1 \neq 0 \therefore \text{el rango} = 2$$

21) ¿Cuánto debe valer k para que el rango de la matriz A sea igual a 2?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

La traza de una matriz queda definida por: $\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj}$
O sea que es la suma de los elementos de la diagonal.

22) Dada la matriz:

$$A_{(i,j)} = \begin{cases} j^2 & \text{si } i < j \\ j-i & \text{si } i = j \\ 2j-3i & \text{si } i > j \end{cases}$$

Hallar su traza, sin hallar A

23) Dado el conjunto: $S = \{ A \in R^{2 \times 2} / A = A^T \wedge \text{traza}(A) = 0 \}$

Hallar la base y dimensión (S).

Unidad 2. Matrices. Respuestas.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

SUMA DE MATRICES

a) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \sqrt{2} & -1/2 \\ \sqrt{2} & 2 & & -1 \end{pmatrix}$ b) $A - B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \sqrt{2} + 1/2 \\ -\sqrt{2} & 4 & -1 \end{pmatrix}$

c) $2A - 3B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 2\sqrt{2} + 3/2 \\ -3\sqrt{2} & 9 & -2 \end{pmatrix}$ d) $2A + 0B = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

3) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ 4) $(x, y, z) = (-3, 0, 6)$

5) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

6) $\alpha = 3$ $\beta = -2$ $\gamma = -1$

7) $M = 3A - 2B - C$

8) Está resuelto

9) no existe $K \in \mathbb{R}$

10) a) Las matrices del conjunto A son linealmente dependientes.
b) Las matrices del conjunto B son linealmente independientes.

11) a) $k \neq -1$ b) $M = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

PRODUCTO DE MATRICES

12) a) $\begin{pmatrix} 13 & 35 & 18 \\ 20 & 26 & 20 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 58 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 19 & -17 & 34 \\ 8 & -12 & 20 \\ -8 & -11 & 7 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 7 & 16 \end{pmatrix}$ e) no existe

13) a) $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 14 & 15 \end{pmatrix}$ 14) $S = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $S = 1$

15) $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ $W = 2$

16) a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$

c) C^{-1} no existe

17) a)

$k \in \mathbb{R} - \{-3; 2\}$

b)

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & -1/4 & 1/2 \\ 3/2 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}$

18) a) falsa

b) falsa

c) verdadera

19) Está resuelto

20)

$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad S=3$

21) $K = 3$

22) $\text{tr } A = 0$

23)

$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad S=2$

Unidad 3. Relaciones.

1) Encontrar x ó y de manera que el enunciado sea verdadero.

a) $(x, 3) = (4, 3)$ b) $(4x, 6) = (16, y)$ c) $(3x + 1, 2) = (7, 2)$ d) $(x^2, 5) = (49, y)$

2) Siendo $A = \{p, q\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$ hallar:

a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) A^2 d) B^2

3) Un experimento de genética clasifica las moscas de la fruta de acuerdo con los dos siguientes criterios:

Género: masculino (M), femenino (F)

Alas extendidas: cortas (c), medianas (m), largas (l)

a) ¿Cuántas categorías hay en este esquema de clasificación?

b) Hacer una lista de todas las categorías de este esquema de clasificación.

4) Siendo $A = \{a / a \text{ es un número real}\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$.

Hacer un esquema de cada uno de los siguientes casos en el plano cartesiano.

a) $A \times B$ b) $B \times A$

5) Siendo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$

$A_2 = \{5, 6, 7\}$

$A_3 = \{4, 5, 7, 9\}$

$A_4 = \{4, 8, 10\}$

$A_5 = \{8, 9, 10\}$

$A_6 = \{1, 2, 3, 6, 8, 10\}$

Decir cuales de las siguientes son particiones de A. Justificar.

a) $\{A_1, A_2, A_5\}$ b) $\{A_1, A_3, A_5\}$ c) $\{A_3, A_6\}$ d) $\{A_2, A_3, A_4\}$

6) Utilizar los conjuntos:

$A = \{1, 2, 4\}$

$B = \{2, 5, 7\}$

$C = \{1, 3, 7\}$

Para analizar si se cumple la siguiente igualdad:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Investigue que pasa en la unión.

Explique sus conclusiones.

Relación; Dados dos conjuntos A y B y una propiedad P, se llama relación al conjunto:

$$R = \{(x, y) \in A \times B / P(x, y)\}$$

Interpretación: De todos los pares ordenados de $A \times B$, tomo sólo los que cumplen la propiedad.

7) Si A tiene n elementos y B tiene m elementos. ¿ Cuántas relaciones diferentes hay de A a B?

8) Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$

Se definen las relaciones $R : A \rightarrow B$

I) $R_1 = \{(a, 1); (a, 2); (a, 3)\}$

II) $R_2 = \{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (b, 2)\}$

III) $R_3 = \{(a, 1); (b, 1); (c, 2); (d, 2)\}$

En cada caso indicar:

a) Dominio e imagen.

b) Su representación por tabla de doble entrada y diagramas de Venn.

c) Definir por extensión una relación $R : B \rightarrow A$ tal que el dominio de la misma coincida con el conjunto de partida y la imagen con el conjunto de llegada.

9) Determinar, en cada caso, dominio, imagen, matriz y cuando $A = B$ el dígrafo de la relación R.

a) $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{1, 2, 3\}$

$$R : A \rightarrow B / R = \{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (c, 2); (d, 1)\}$$

b) $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$

$$R = \{(x, y) \in A^2 / x + y \leq 9\}$$

c) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$$

d) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$$R = \{(a, b) \in A^2 \mid b < a\}$$

e) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$

$$R = \{(x, y) \in A^2 \mid x - y < 0\}$$

10) Una línea aérea da servicio a cinco ciudades: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 . La tabla muestra el costo (en dólares) del viaje desde C_i a C_j .

Hasta:	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Desde:					
C_1		140	100	150	200
C_2	190		200	160	220
C_3	110	180		190	250
C_4	190	200	120		150

Se define la siguiente relación R sobre el conjunto de las cinco ciudades:

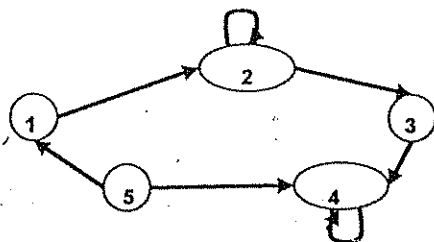
" $C_i R C_j$ si y sólo si el costo de ir de C_i a C_j es menor o igual a 180 dólares"

Determinar la relación R por extensión.

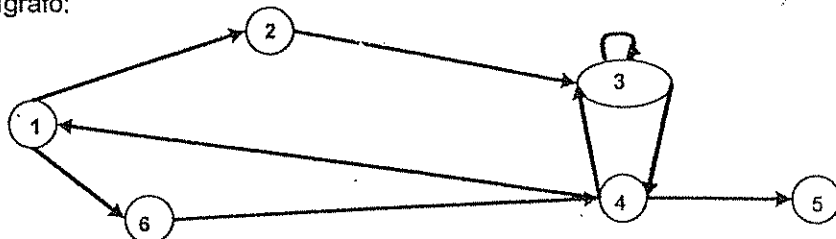
11) Dar por extensión la relación R definida en $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y su dígrafo, siendo su matriz asociada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12) Dar por extensión la relación R y su matriz asociada, siendo su dígrafo:



13) Dado el siguiente dígrafo:



Indicar:

- Todas las trayectorias de longitud 2, que inicien en el vértice 2.
- Todas las trayectorias de longitud 3
- Un ciclo que comience en el vértice 6
- Todas las trayectorias de longitud 1

14) Dado el conjunto: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$ y la relación: $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x^2 - y \geq 2\}$

- Definir por extensión A y R .
- Determinar la matriz asociada y el dígrafo.
- Indicar dos trayectorias de longitud 4 que inicie en el vértice -2.
- Indicar un ciclo que comience en el vértice -1.

15) Determinar en cada relación definida en $A = \{1, 2, 3, 4\}$ si es reflexiva, arreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica o transitiva.

a) $R = \{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 3); (4, 4)\}$

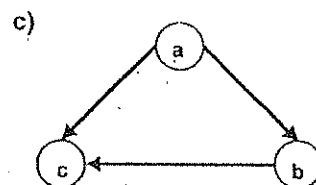
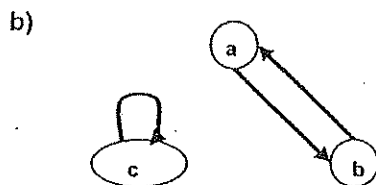
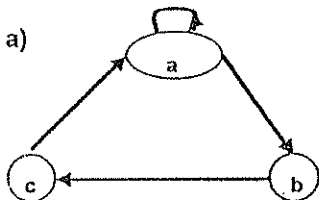
b) $R = \{(1, 3); (1, 1); (3, 1); (1, 2); (3, 3); (4, 4)\}$

c) $R = \{(1, 2); (1, 3); (3, 1); (1, 1); (3, 3); (3, 2); (1, 4); (4, 2); (3, 4)\}$

	a)	b)	c)
reflexiva			
irreflexiva			
simétrica			
asimétrica			
antisimétrica			
transitiva			

(completar con sí √ no según corresponda)

16) Dados los siguientes dígrafos:



Analizar sus propiedades y clasificar si es posible.

	a)	b)	c)
reflexiva			
irreflexiva			
simétrica			
asimétrica			
antisimétrica			
transitiva			

(completar con si √ no según corresponda)

17) Para completar: ¿, qué características deben observarse en la matriz ? asociada a una relación que sea:

- a) reflexiva:
- b) irreflexiva:
- c) simétrica:
- d) asimétrica:
- e) antisimétrica:
- f) transitiva:

18) Para completar: ¿, qué características deben observarse en el dígrafo ? asociado a una relación que sea:

- a) reflexiva:
- b) irreflexiva:
- c) simétrica:
- d) asimétrica:
- e) antisimétrica:
- f) transitiva:

19) Escribir la matriz o el dígrafo que represente a una relación que resulte:

- a) Reflexiva pero no simétrica b) Sólo transitiva
c) Antisimétrica pero no reflexiva d) Simétrica y no transitiva

Explicar el razonamiento.

Relación de orden: establecen jerarquías entre los elementos de un conjunto, pueden compararse.

Cumplen con ser: **reflexiva – antisimétrica – transitiva**

Relación de equivalencia: permite agrupar los elementos de un conjunto A en subconjuntos no vacíos del conjunto A , disjuntos, y tal que la unión resulta ser el conjunto A .
(Estos subconjuntos se llaman clases de equivalencia).

Cumplen con ser: **reflexiva – simétrica – transitiva**

20) Analizar las propiedades y clasificar, si es posible, las relaciones R cuyas matrices asociadas son:

a)

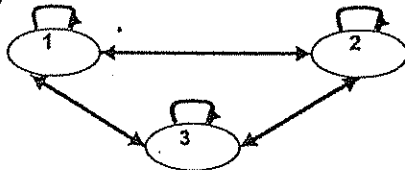
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

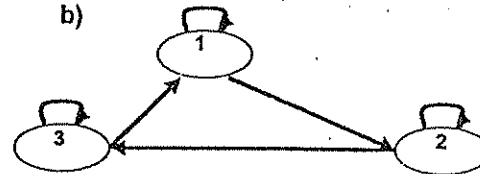
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21) Determinar si la relación R , cuyo dígrafo se proporciona, es una **relación de equivalencia**. Justificar.

a)



b)



22) Siendo $\{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}\}$ una partición del conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
Determinar la relación de equivalencia correspondiente R .

23) Dado $A = \{1, 2, 3, 4\}$

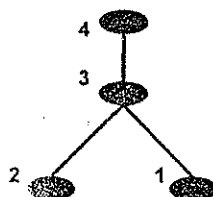
- a) analizar las propiedades de la relación:
b) clasificar la relación si es posible

$$R = \{(1, 1); (1, 2); (2, 2); (2, 4); (1, 3); (3, 3); (3, 4); (1, 4); (4, 4)\}$$

En caso de que resulte de orden parcial, determinar el **diagrama de Hasse**.

24) Escribir los pares ordenados en la relación determinada por el **diagrama de Hasse** sobre el conjunto A .

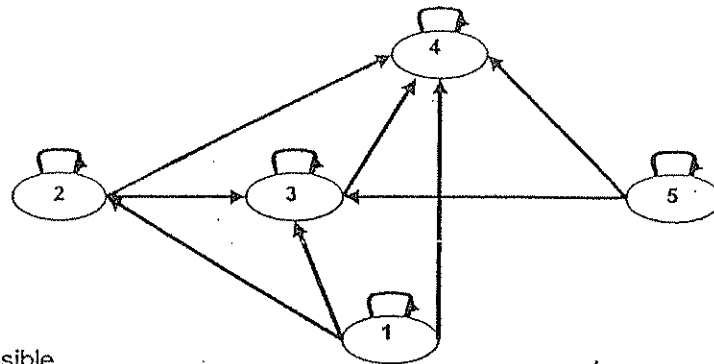
a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$



b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$



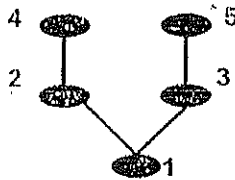
25) Dado el siguiente dígrafo:



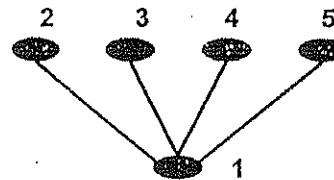
- Definir por extensión la relación.
- Hallar su matriz asociada.
- Analizar sus propiedades y clasificarla.
- Realizar el diagrama de Hasse, si es posible.

26) Determinar, en cada caso, las matrices de orden parcial con los diagramas de Hasse dados.

a)



b)



PROBLEMAS

27) Sea (A, R)

Siendo $A = \{\text{serpiente, pollito, canario, gato, león, hormiga, araña}\}$

Siendo R : "tiene menos patas que o es el mismo animal que"

Hacer el diagrama de Hasse.

28) Sea (B, R)

Siendo $B = \{\text{Laura, Karina, Juan, Sebastián, Ariel}\}$

ALUMNO	Laura	Karina	Juan	Sebastián	Ariel
NOTA	7	9	8	7	10

Siendo $R: x R y \Leftrightarrow "x \text{ sacó mayor nota que } y" \vee x = y$

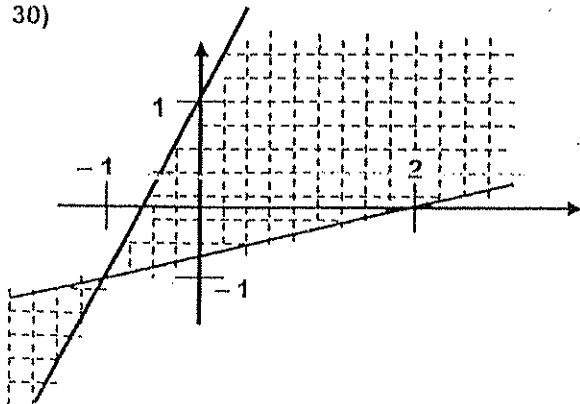
Hacer el diagrama de Hasse.

29) Sea $A = \{1, 2, 4, 5, 9\}$

Se tiene en A la siguiente relación $R = \{(1, 1), (2, 2), (4, 2), (2, 9), (9, 9)\}$

Se pide agregar a R la menor cantidad posible de pares ordenados para que resulte una relación de equivalencia en A .

30)



Si se considera la siguiente relación definida en R a través de su gráfica, decir si resulta:

- reflexiva
- simétrica
- antisimétrica
- transitiva

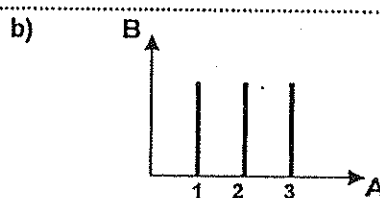
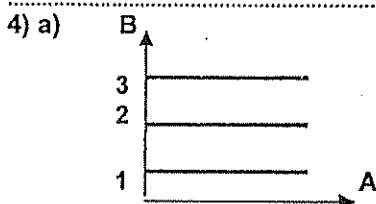
(se sugiere utilizar argumentos de tipo gráfico)

Unidad 3. Relaciones. Respuestas.

1) a) $x = 4$ b) $x = 4, y = 6$ c) $x = 2$ d) $x = 7 \vee x = -7 \wedge y = 5$

2) a) $(p, 4); (p, 5); (p, 6); (q, 4); (q, 5); (q, 6)$
 b) $(4, p); (4, q); (5, p); (5, q); (6, p); (6, q)$
 c) $(p, p); (p, q); (q, p); (q, q)$
 d) $(4, 4); (4, 5); (4, 6); (5, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 4); (6, 5); (6, 6)$

3) a) 6 categorías b) $G \times A = \{(M, c); (M, m); (M, l); (F, c); (F, m); (F, l)\}$



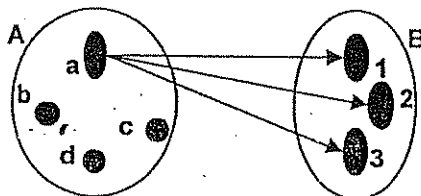
5) a) sí b) no c) sí d) no

6) Conclusión: el producto cartesiano es distributivo en la unión y en la intersección 7) $2^{n \cdot m}$

8) I) a) $D_R = \{a\}$ $I_R = \{1; 2; 3\}$

b)

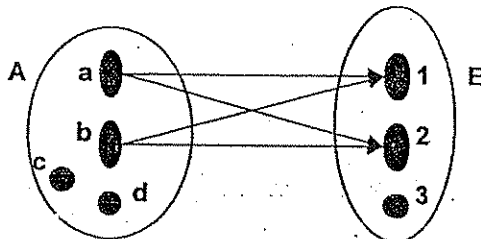
B	1	2	3
A			
a	1	1	1
b	0	0	0
c	0	0	0
d	0	0	0



II) a) $D_R = \{a; b\}$ $I_R = \{1; 2\}$

b)

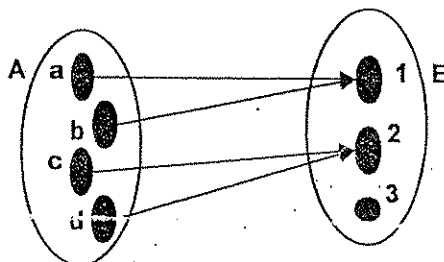
B	1	2	3
A			
a	1	1	0
b	1	1	0
c	0	0	0
d	0	0	0



III) a) $D_R = \{a; b; c; d\}$ $I_R = \{1; 2\}$

b)

B	1	2	3
A			
a	1	0	0
b	1	0	0
c	0	1	0
d	0	1	0



9) a)

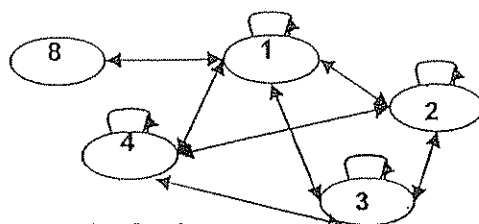
$D_R = \{a; b; c; d\}$ $I_R = \{1; 2\}$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$D_R = I_R = \{1; 2; 3; 4; 8\}$$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



c)

$$D_R = \{1; 2; 3\}$$

$$I_R = \{1; 4; 9\}$$

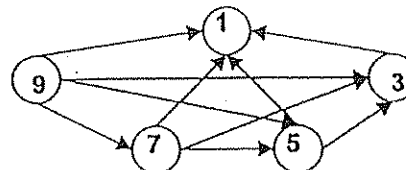
$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$D_R = \{3; 5; 7; 9\}$$

$$I_R = \{1; 3; 5; 7\}$$

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

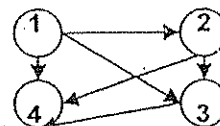


e)

$$D_R = \{1; 2; 3\}$$

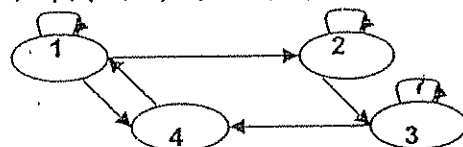
$$I_R = \{2; 3; 4\}$$

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$10) R = \{(C_1, C_2); (C_1, C_3); (C_1, C_4); (C_2, C_4); (C_3, C_1); (C_3, C_2); (C_4, C_3); (C_4, C_5)\}$$

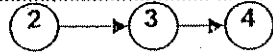
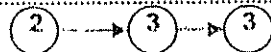
$$11) R = \{(1, 1); (1, 2); (1, 4); (2, 2); (2, 3); (3, 3); (3, 4); (4, 1)\}$$



$$12) R = \{(1, 2); (2, 2); (2, 3); (3, 4); (4, 4); (5, 1); (5, 4)\}$$

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

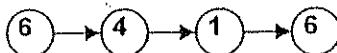
13)a)



b)

1-2-3-3	2-3-3-3	3-3-3-3	4-1-2-3	6-4-1-2
1-2-3-4	2-3-3-4	3-3-3-4	4-1-6-4	6-4-1-6
1-6-4-1	2-3-4-1	3-3-4-1	4-3-3-3	6-4-3-3
1-6-4-3	2-3-4-3	3-3-4-3	4-3-3-4	6-4-3-4
1-6-4-5	2-3-4-5	3-3-4-5	4-3-4-1	
		3-4-1-2	4-3-4-3	
		3-4-1-6	4-3-4-5	
		3-4-3-3		
		3-4-3-4		

c)



d)

1-2	2-3	3-3	4-1	6-4
1-6		3-4	4-3	
			4-5	

14) a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

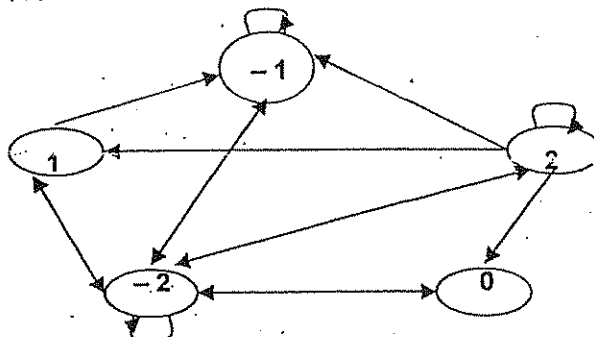
$R = \{(-2, -2); (-2, -1); (-2, 0); (-2, 1); (-2, 2); (-1, -2); (-1, -1); (0, -2); (1, -2); (1, -1); (2, -2); (2, -1); (2, 0); (2, 1); (2, 2)\}$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $-2, -2, -1, -1, -2$

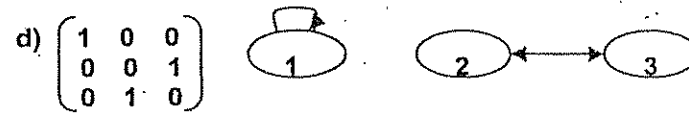
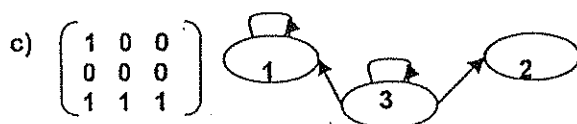
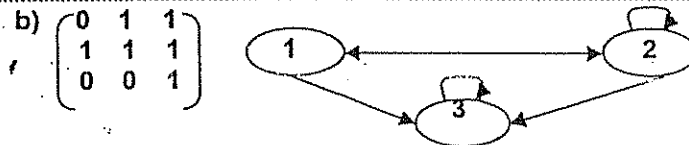
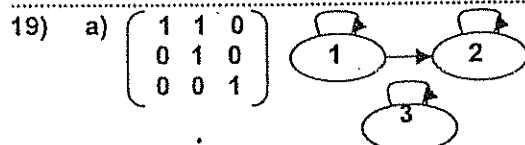
$-2, 1, -2, 0, -2$

d) $-1, -2, -1$



	15)			16)		
	a)	b)	c)	a)	b)	c)
Reflexiva	si	no	no	no	no	no
Arreflexiva	no	no	no	no	no	si
Simétrica	si	no	no	no	si	no
Asimétrica	no	no	no	no	no	si
Antisimétrica	no	no	no	si	no	si
Transitiva	si	no	si	no	no	si

17) \wedge 18) Ver teoría



20)

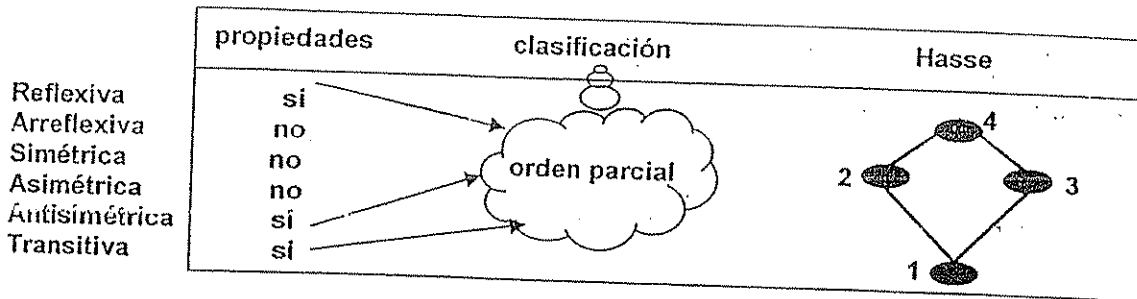
	a)	b)	clasificación
Reflexiva	no	si	equivalencia
Arreflexiva	si	no	
Simétrica	si	si	
Asimétrica	no	no	
Antisimétrica	no	no	
Transitiva	no	si	

21)

	b)	a)	clasificación
Reflexiva	si	si	equivalencia
Arreflexiva	no	no	
Simétrica	no	si	
Asimétrica	no	no	
Antisimétrica	si	no	
Transitiva	no	si	

22) $R = \{(a, a); (a, b); (a, c); (b, a); (b, b); (b, c); (c, a); (c, b); (c, c); (d, d); (d, e); (d, f); (e, d); (e, e); (e, f); (f, d); (f, e); (f, f)\}$

23)



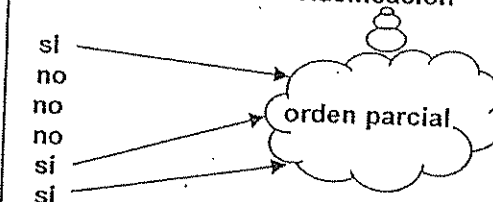
- 24) a) $R = \{(1, 1); (1, 3); (1, 4); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 3); (3, 4); (4, 4)\}$
 b) $R = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 3); (3, 4); (4, 4)\}$
 25) a) $R = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 3); (3, 4); (4, 4); (5, 3); (5, 4); (5, 5)\}$

b) matriz

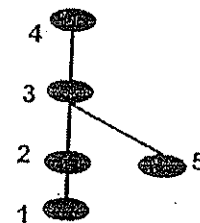
$$\begin{pmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1
 \end{pmatrix}$$

Reflexiva
 Arreflexiva
 Simétrica
 Asimétrica
 Antisimétrica
 Transitiva

c) propiedades



d) Hasse



26)

a)

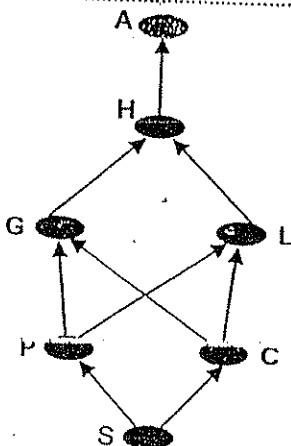
$$M_R = \begin{pmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

b)

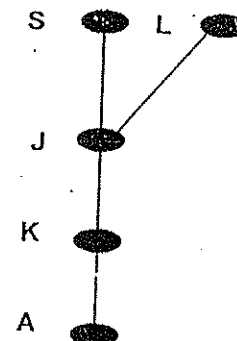
$$M_R = \begin{pmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

PROBLEMAS

27)



28)



- 29) $R = \{(1, 1), (2, 2), (4, 2), (9, 9), (2, 9), (9, 9), (4, 4), (5, 5), (2, 4), (9, 2), (4, 9), (9, 4)\}$
 30) Reflexiva (sí) Simétrica (no) Antisimétrica (no) Transitiva (no)

Unidad 4. Grafos y árboles.

EJEMPLO - DEFINICIONES

Red: conjunto de nodos y conjunto de arcos

Red dirigida: la que tiene todos los arcos dirigidos

Ruta: secuencia de arcos distintos que unen dos nodos (no importa la dirección del flujo de cada arco)

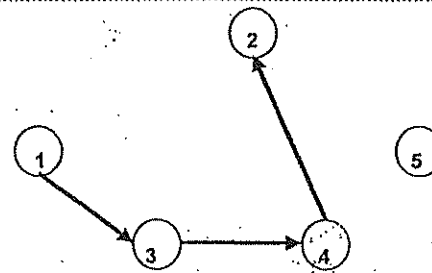
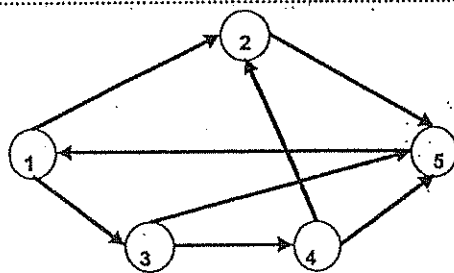
Lazo o ciclo: ruta que conecta un nodo con si mismo (circulo)

Lazo dirigido o circuito: círculo en el que todos los arcos están orientados en la misma dirección

Red conectada: dos nodos distintos están unidos por lo menos por una ruta

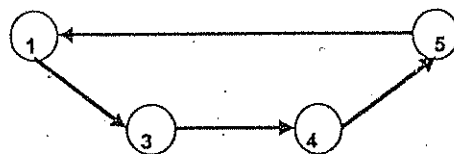
Árbol: red conectada que puede incluir sólo un subconjunto de todos los nodos de la red

Árbol de expansión: une todos los nodos de la red sin permitir ningún lazo



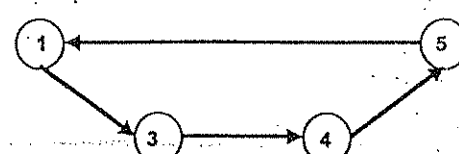
Ruta: 1 - 3 - 4 - 2

2



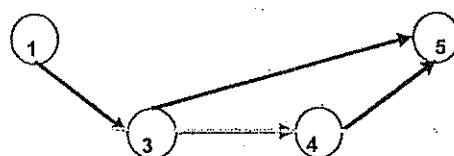
Lazo: 1 - 5 - 4 - 3 - 1

2

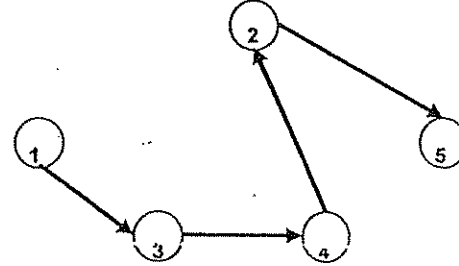


Lazo dirigido (circuito): 1 - 3 - 4 - 5 - 1

2



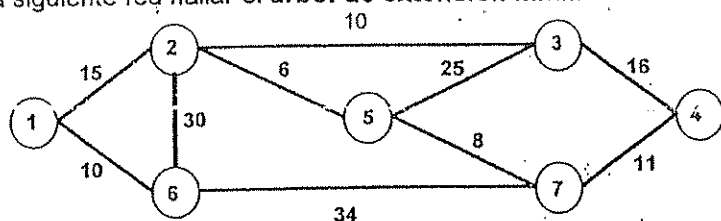
Árbol: { 1 - 3, 3 - 4, 3 - 5, 4 - 5 }



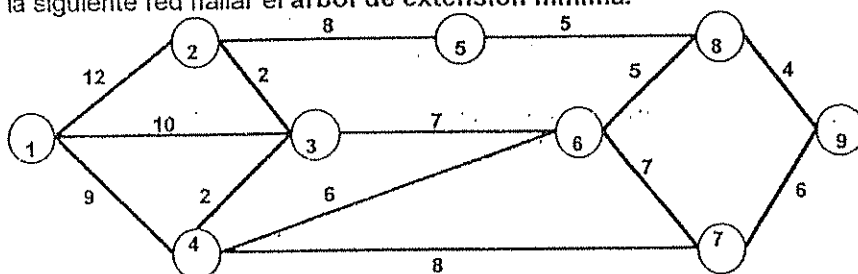
Árbol de expansión: { 1 - 3, 3 - 4, 4 - 2, 2 - 5 }

REDES — Arbol de extensión mínima

- 1) Para la siguiente red hallar el árbol de extensión mínima.



- 2) Para la siguiente red hallar el árbol de extensión mínima.

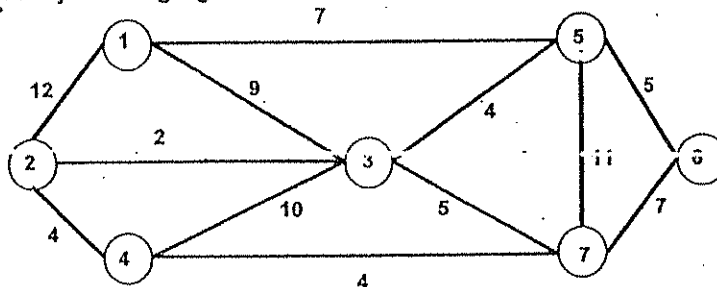


- 3) Una zona de 7 chacras debe ser conectada mediante una **ruta** asfaltada al **menor costo** posible. Los datos indican en Km. las distancias entre chacras, considerando el Índice de la fila y de la columna el número de la chacra. Se da una matriz simétrica, por lo que sólo se escribió el triángulo superior.

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 3 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ & & 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 3 & 0 \\ & & & & 0 & 4 & 7 \\ & & & & & 0 & 2 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Es necesario pavimentar el tramo 1 – 2 ya que en el medio se halla la estación de bomberos y se sabe que la ruta entre las chacras 6 – 7 ya está pavimentada. Determinar el costo de la **ruta de extensión mínima** que vincule todas las chacras con las condiciones dadas, sabiendo que el costo del Km. es de \$ 100.000

- 4) Cablevisión acaba de obtener la aprobación para ofrecer su servicio al barrio de Versalles. Los nodos representan los puntos de distribución que deben llevar las líneas primarias de cables de la compañía. Los arcos indican las cuadras que hay entre los puntos de distribución.
- Determinar la solución que permitirá a Cablevisión llegar a todos los puntos de distribución con una **longitud mínima** de la línea de cable primario.
 - Si entre los nodos 1 y 6 se agrega otro camino de 8 cuadras, ¿se modifica en algo la respuesta?



5) Ocho chacras de las cercanías de Mar del Plata se hallan conectadas por calles de tierra.

El intendente desea pavimentar la **menor cantidad** de calles de tal modo que se enlacen todas las chacras, pero desea que la calle E - H sea una de las asfaltadas, ya que allí se encuentra una sala de primeros auxilios.

¿Cuál sería el trayecto de pavimento?

Distancias:

A - B = 11 Km	B - C = 13 Km	A - D = 12 Km	A - E = 14 Km	B - D = 9 Km
C - D = 18 Km	D - G = 17 Km	C - G = 12 Km	E - F = 10 Km	F - G = 11 Km
G - H = 8 Km	F - H = 10 Km	E - H = 22 Km		

6) La zona cercana a la desembocadura del Salado tiene ocho esteros que deben ser comunicados mediante canales. Suponiendo que todos los canales tienen la misma sección, 3 m de ancho y 2 m de profundidad, Determinar que **cantidad mínima** de tierra se debe mover para que los esteros queden comunicados.

Distancias:

A - B = 11 Km	B - C = 13 Km	A - D = 12 Km	A - E = 14 Km	B - D = 9 Km
C - D = 18 Km	D - G = 17 Km	C - G = 12 Km	E - F = 10 Km	F - G = 11 Km
G - H = 8 Km	F - H = 10 Km	E - H = 22 Km		

7) La siguiente tabla muestra la distancia entre cada dos ciudades:

	Bloom	Evans	Fort	Gary	Indian	Southb
Evans	119					
Fort	174	290				
Gary			132			
Indian	51			153		
Southb		303	79	58	140	
Haute	58	113			71	196

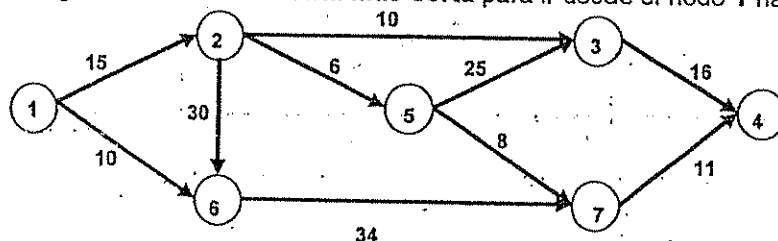
Se piensa construir un sistema de carreteras que comunique las siete ciudades.

Determinar que carreteras deben construirse para que el **costo de construcción sea mínimo**.

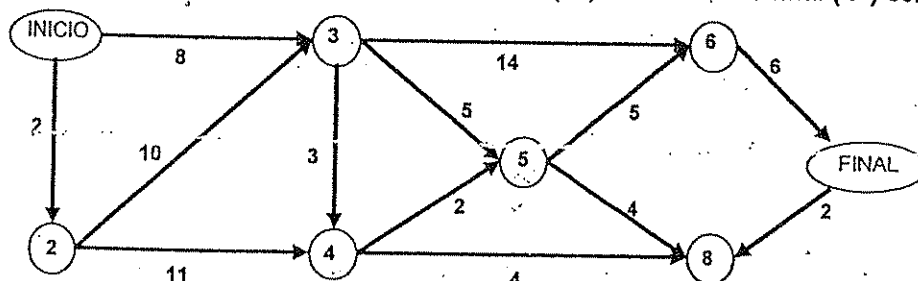
(Se supone que el costo de un Km. es el mínimo sin importar cuales son las ciudades).

REDES - Ruta mas corta

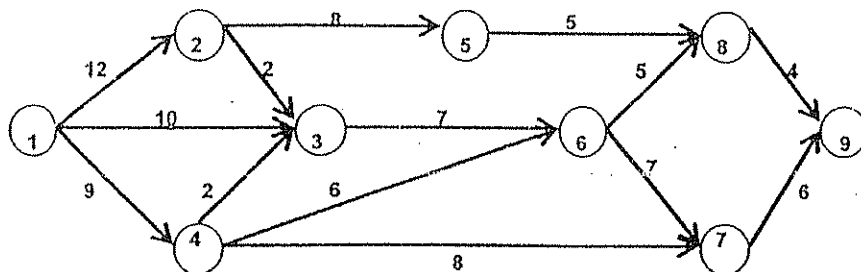
8) En la siguiente red hallar la **ruta mas corta** para ir desde el nodo 1 hasta el nodo 4.



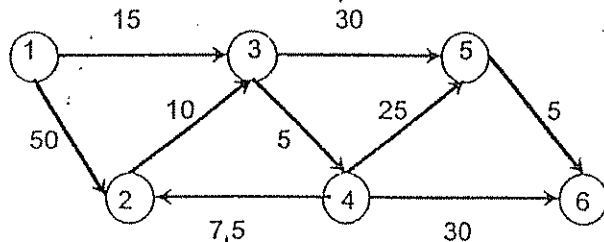
9) Encontrar la **ruta más corta** desde el nodo inicio (1) hasta el nodo final (7) correspondiente a la siguiente red.



10) En la siguiente red hallar la ruta mas corta para ir desde el nodo 1 hasta el nodo 7.



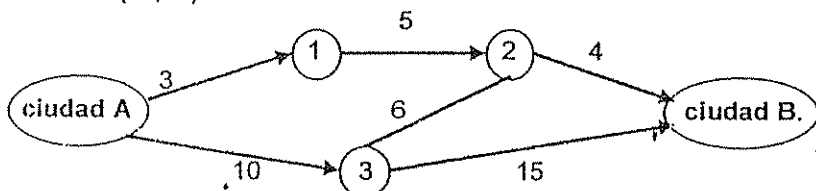
11) En la siguiente red hallar la ruta mas corta para ir desde el nodo 1 hasta el nodo 6. ¿ Es ruta única ?.



12) Para la red de la figura encuentre la ruta mas corta entre la ciudad A y la ciudad B.

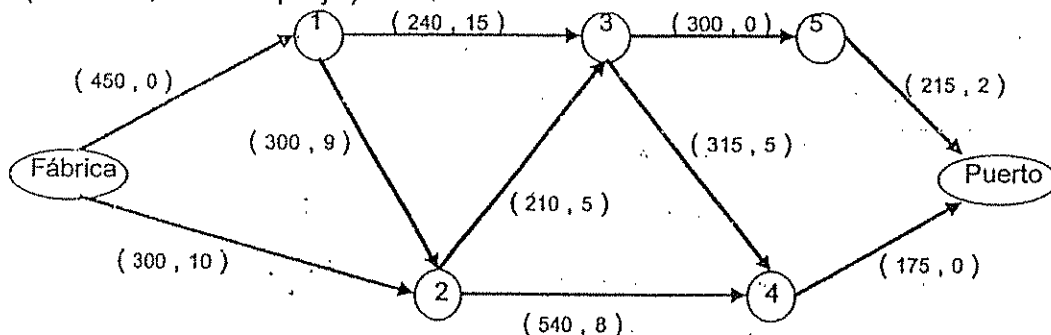
Las distancias están dadas en kilómetros.

El arco (2 , 3) es bi direccional.



13) La división transporte, de una fábrica, desea saber que ruta le conviene usar para llevar sus productos al puerto donde van a ser embarcados.

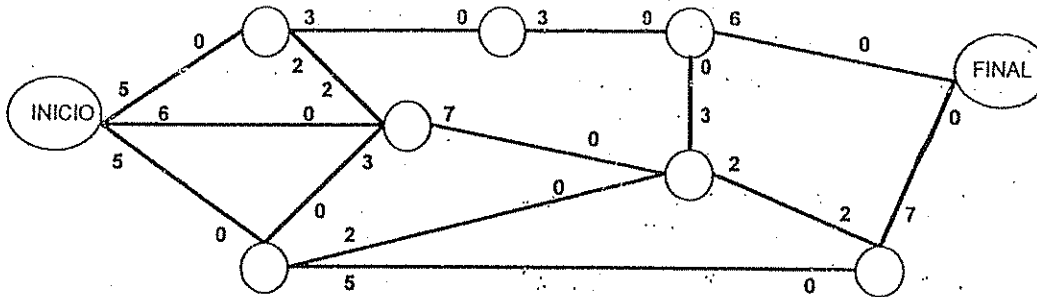
Para tomar la decisión se construye una red de los posibles caminos, en kilómetros, conjuntamente con el valor del peaje en cada tramo, en pesos; o sea que en cada arco de la red está indicado como par ordenado: (distancia , costo del peaje).



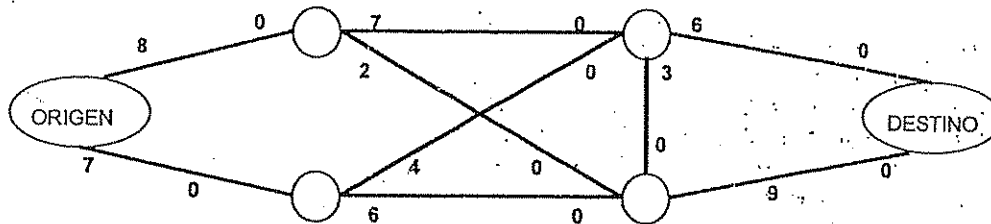
- ¿Cuál es la ruta más conveniente desde la distancia recorrida ?.
- ¿Cuál es la ruta más conveniente desde el costo del peaje ?.
- Dar el par ordenado en cada caso.
- Si usted tuviera que decidir ¿ qué opción elige ?.

REDES – Flujo máximo

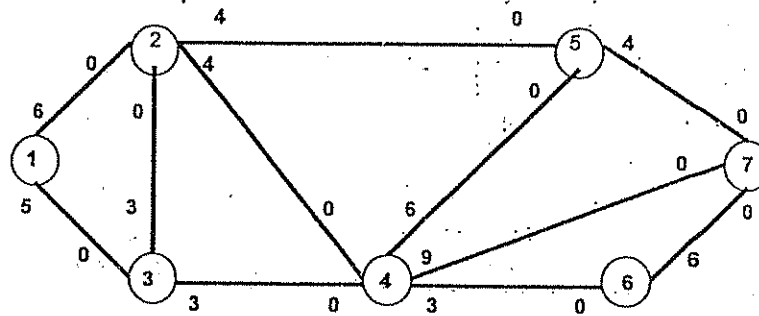
14) Encontrar el flujo máximo desde el nodo INICIO hasta el nodo FINAL en la siguiente red:



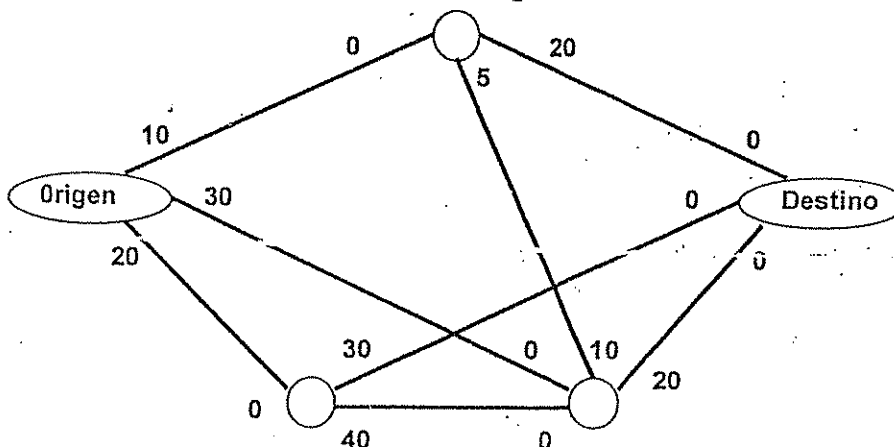
15) Para el sistema de red de carreteras que se muestra en la figura determinar el flujo máximo de vehículos por hora. Se sabe que cada unidad representa 1000 vehículos por hora.



16) La siguiente red representa una serie de autopistas interconectadas. En la misma se muestran las distintas capacidades de flujo de cada una de ellas. Determinar el flujo máximo desde el punto 1 al 7 durante un día, suponiendo que las unidades detalladas marcan un flujo de 1000 vehículos por hora.



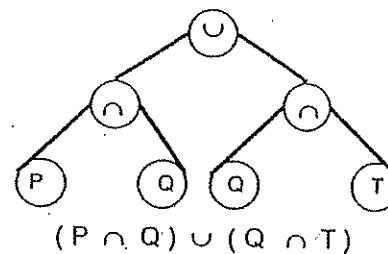
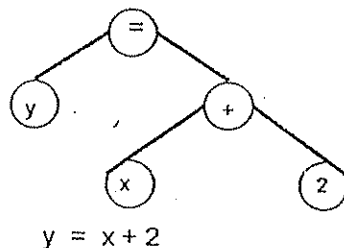
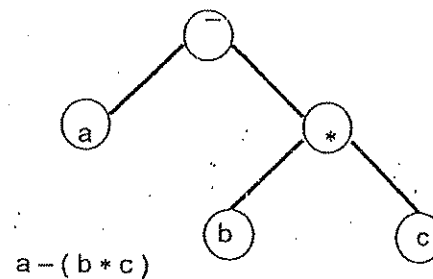
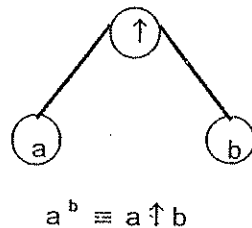
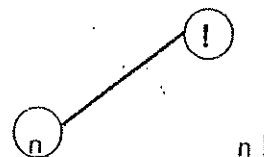
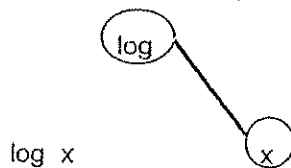
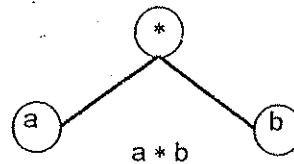
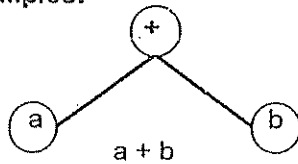
17) Encontrar el flujo máximo desde el nodo Origen hasta el nodo Destino en la siguiente red:



ÁRBOLES – Representación de expresiones algebraicas

Cada operación binaria es representada por un subárbol, cuya raíz contiene la operación aritmética (operador), a izquierda y derecha están los operandos.

Ejemplos:



1) Representar en un árbol binario las siguientes expresiones algebraicas:

a) $(x+1)^4 * (y - \ln 2)$

b) $[-A + B^2] - [C * (A - B)^2 + 2A]$

c) $\{[(A+B) / C] - (C+B)\} * [A * (B-C)]$

d) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

e) $a^2 - b^2 = (a+b) * (a-b)$

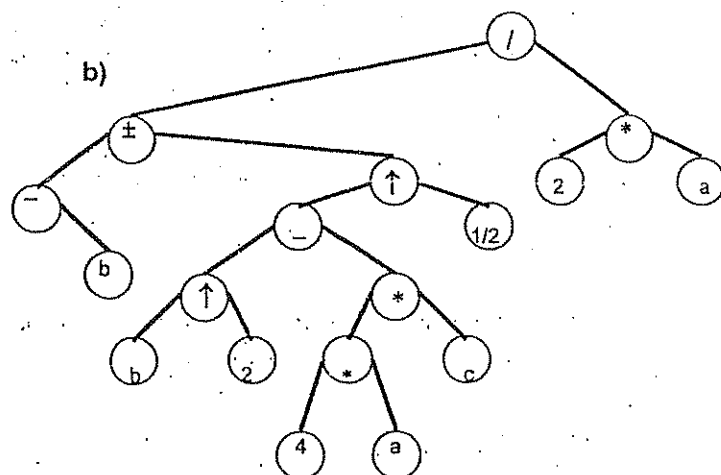
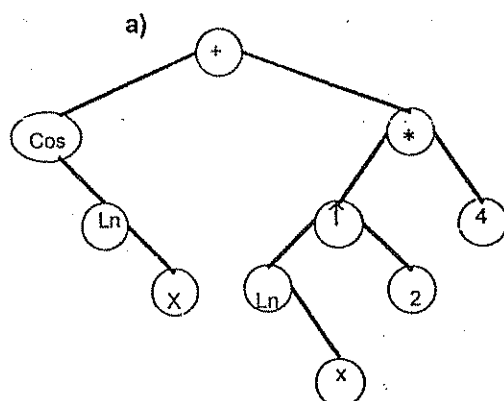
f) $\cos(x+2)^5 * \log(2x-3)^3$

g) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

h) $x = 4 \wedge x = -1/2$

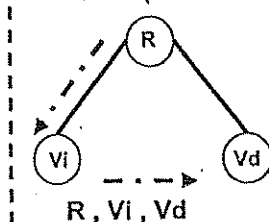
i)
$$\begin{cases} 5 * x + 5 * y = 9 \\ -5 * x + 9 * y = -9 \end{cases}$$

2) Dados los siguientes árboles binarios escribir la expresión algebraica correspondiente:

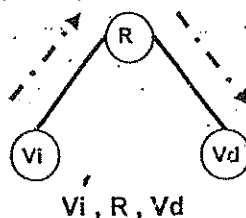


ÁRBOLES – Recorrido

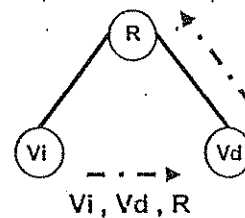
Pre orden (orden inicial)



In orden (orden intermedio)



Post orden (orden final)



3) Efectuar los recorridos (pre orden , in orden , post orden) de los árboles binarios obtenidos a partir de las expresiones algebraicas del ejercicio 1).

4) Siendo: $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 4$

Calcular el valor numérico de las siguientes expresiones dadas en post orden.

a) $A \ B \ + \ C \ -$

b) $A \ B \ C \ + \ -$

c) $A \ D \ B \ C \ D \ * \ - \ + \ *$

d) $A \ B \ A \ B \ * \ + \ * \ D \ *$

e) $A \ B \ C \ * \ * \ A \ B \ C \ + \ + \ -$

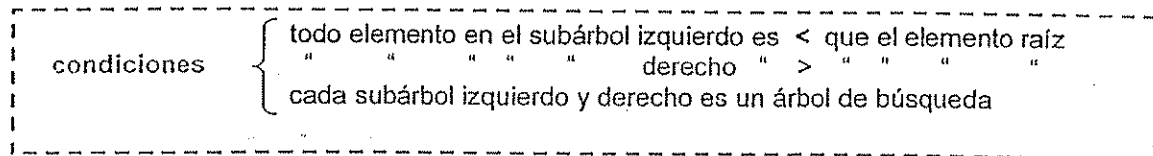
f) $A \ B \ + \ C \ D \ * \ A \ A \ / \ - \ - \ B \ *$

5) Dada la siguiente escritura de un árbol según post orden:

$$3 \ x \ 2 \ - \ 5 \ \uparrow \ * \ x \ 1 \ + \ ! \ *$$

Se pide dibujar el árbol en cuestión y luego dar su escritura según in orden.

ÁRBOLES – Representación de árbol binario de búsqueda



6) El código de ciertos artículos está expresado en el siguiente conjunto de datos:

{ 30 , 25 , 98 , 67 , 31 , 4 , 22 , 90 , 100 }

- a) construir el árbol binario de búsqueda.
- b) ¿cómo insertaría en el árbol el código: 45 ?.
- c) recorrer el árbol en las tres formas canónicas (preorden – inorden – postorden).
- d) ¿cuál es el recorrido conveniente para mostrar en pantalla los códigos ordenados en forma creciente?.

7) Para ingeniosos ó ingeniosas

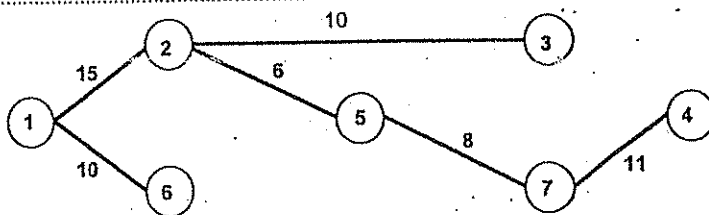
Ordenar alfabéticamente el siguiente conjunto de mujeres utilizando el árbol de búsqueda.

Mujeres = { Elena , Beatriz , Ana , Hilda , Graciela , Daniela ; Carla ; Florencia }.

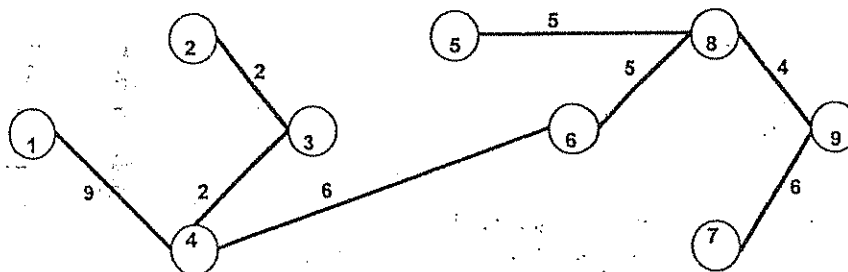
Unidad 4. Grafos y árboles. Respuestas.

REDES - Árbol de extensión mínima

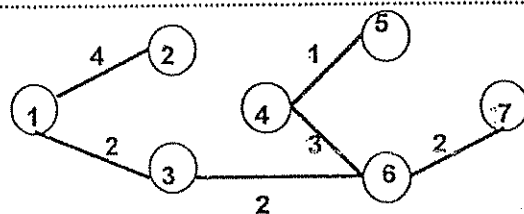
1)



2)

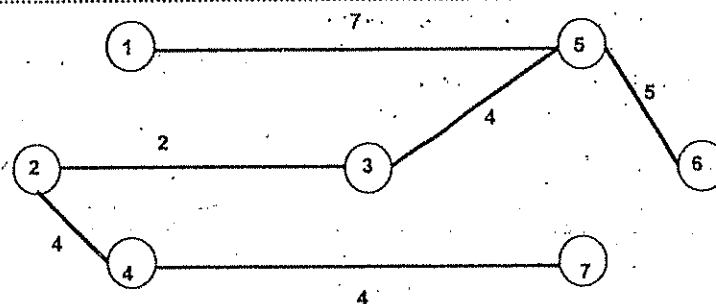


3)



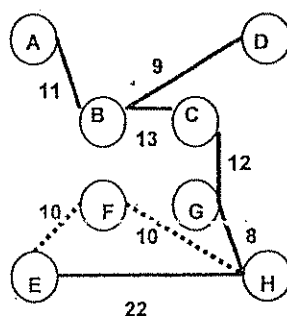
Costo = \$ 1 200 000

4)

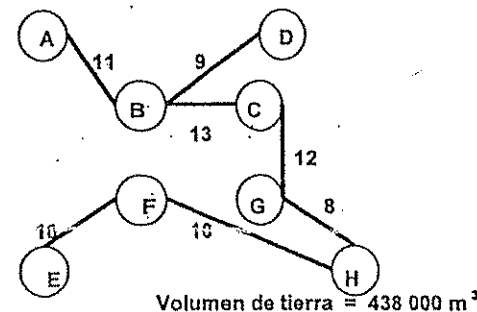


a) Longitud = 26
b) No modifica

5)

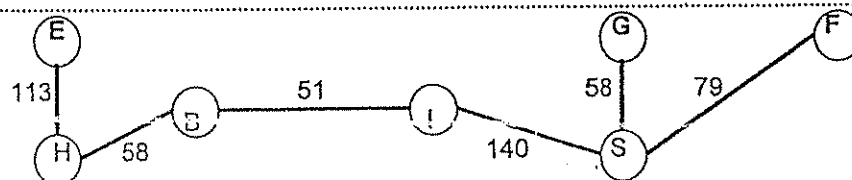


6)



Volumen de tierra = 438 000 m³

7)



REDES - Ruta mas corta

- 8) $1-2-5-7-4 = 40$ 9) Inicio $-3-4-5-6$ - Final $= 24$ \vee Inicio $-3-5-6$ - Final $= 24$
 10) $1-4-7 = 17$ 11) 50. No es ruta única. 12) ciudad A $-1-2$ - ciudad B distancia: 12 Km.
 13) a) $F-2-3-4-P$ b) $F-1-2-3-5-P$ c) (1000Km, \$ 20) (1475 Km, \$ 16)

REDES - Flujo máximo

- 14) Flujo máximo $= 13$ 15) Flujo máximo de vehículos / hora $= 15.000$ vehículos
 16) Flujo máximo / día $= 264.000$ vehículos 17) Flujo máximo $= 60$

ÁRBOLES - Representación de expresiones algebraicas

- 1) a) b) c) d) e) f) g) h) i)

2)

a) $[\cos \ln(x)] + [\ln^2(x) * 4]$

b) $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a$

ÁRBOLES - Recorrido

3)

	pre orden	in orden	post orden
a)	$* \uparrow + x 14 - y \ln 2$	$x + 1 \uparrow 4 y - \ln 2$	$x 1 + 4 \uparrow y 2 \ln - *$
b)	$- + - A \uparrow B 2 + * C \uparrow - A B 2 * 2 A$	$- A + B \uparrow 2 - C * A - B \uparrow 2 + 2 * A$	$A - B 2 \uparrow + C A B - 2 \uparrow * 2 A * -$
c)	$* - / + A B C + C B * A - B C$	$A + B / C - C + B * A * B - C$	$A B + C / C B + - A B C - **$
d)			
e)			
f)			
g)			
h)			
i)			

- 4) a) 0 b) -4 c) -6 d) 16 e) 0 f) -16

- 5) la lectura en in orden es: $3(x-2)^5 * (x+1)!$

ÁRBOLES - Representación de árbol binario de búsqueda

6)

- c) preorden: 30, 25, 4, 22, 98, 67, 31, 45, 90, 100
 inorden: 4, 22, 25, 30, 31, 45, 67, 90, 98, 100
 postorden: 22, 4, 25, 45, 31, 90, 67, 100, 98, 30
 d) inorden

- 7) Mujeres = { Ana, Beatriz, Carla, Daniela, Elena, Florencia, Graciela, Hilda }.

Unidad 5. Recta en el plano.

Ecuaciones:

implícita

$$Ax + By + C = 0$$

explícita

$$y = mx + b$$

segmentaria

$$x/p + y/q = 1$$

1) ¿Los puntos que se indican pertenecen a la recta señalada en cada caso? :

a) $M(2, -1)$; $N(5, 3)$; $4x - 7y - 1 = 0$

b) $R(-5, -3)$; $S(-2, 8)$; $4x + y = 0$

2) Escribir las ecuaciones explícita y segmentaria de las siguientes rectas:

a) $r_1: 5x + y - 2 = 0$

b) $r_2: 2x + 9y - 5 = 0$

c) $r_3: 8x - 7 = 0$

d) $r_4: 5x + 3y = 0$

3) Representar gráficamente las rectas del ejercicio 2)

4) Hallar la intersección, $I(x, y)$, de las rectas: $r_1: -3x + 2y = 7$; $r_2: x + 3y = 5$

Ángulo entre rectas ($r_1 \wedge r_2$) : α

$$\operatorname{tg} \alpha = (m_2 - m_1) / (1 + m_2 m_1)$$

Tabla de valores necesarios:

Ángulo en °	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Ángulo en radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
Valor de tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

5) Hallar el ángulo menor que forman las rectas:

a) $r_1: 2x + y - 7 = 0$ \wedge $r_2: 3x - y + 5 = 0$

b) $r_1: (1 - \sqrt{3})x + (\sqrt{3} + 1)y - 1 = 0$ \wedge $r_2: x - y - 1 = 0$

Condiciones:

paralelismo

$$m_2 = m_1$$

perpendicularidad

$$m_2 = -1 / m_1$$

6) De las rectas cuyas ecuaciones se dan a continuación, decir cuáles son perpendiculares y cuáles son paralelas.

$r_1: 3x - 2y - 5 = 0$

$r_2: -6x + 4y - 3 = 0$

$r_3: 2x + 3y - 7 = 0$

$r_4: 6x + 9y - 4 = 0$

$r_5: 5x - 2y - 1 = 0$

$r_6: 2x + 5y - 8 = 0$

7) Dada la recta $r_1: 4y - 3x - 8 = 0$, hallar:

a) la recta (r_2) paralela a la dada que pasa por el punto $M(1, 2)$

b) la recta (r_3) perpendicular a la dada que pasa por el mismo punto

c) graficar.

8) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $r_1: x - 7y - 11 = 0$ que pase por la intersección, $I(x, y)$, de $r_1: x - 7y - 11 = 0$ con $r_2: 3x + 5y - 7 = 0$

9) Hallar el valor de k para que:

la recta $r_1: 3x - ky - 8 = 0$ forme un ángulo de 45° con la recta $r_2: 2x + 5y - 17 = 0$.

10) a) Hallar k, tal que, $r_1: kx + (k - 1)y - 18 = 0$ sea paralela a la recta $r_2: 4x + 3y + 7 = 0$

b) escribir la ecuación resultante en forma segmentaria.

- 11) Hallar el punto de intersección $I(x, y)$ entre $r_1 \wedge r_2$
Siendo r_1 la recta que pasa por el origen, y es perpendicular a la recta: $x - 12y + 8 = 0$
Además la recta r_2 corta a los ejes x e y en -2 y 5 respectivamente.
- 12) Para que valores de k la recta $r: (k^2 - 4)x + (k - 3)y + k^2 - 3k - 4 = 0$
a) pasa por el origen de coordenadas.
b) es paralela al eje de abscisas
c) es paralela al eje de ordenadas.
- 13) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $R(2, 3)$ y $S(4, 8)$.
Escribirla en forma implícita, explícita y segmentaria.
- 14) Determinar para que valor de " t " las rectas: $r_1: (t - 1)x + ty - 5 = 0 \wedge r_2: tx + (2t - 1)y + 7 = 0$
se cortan en un punto situado en el:
a) eje de abscisas $(?, 0)$ b) eje de ordenadas $(0, ?)$

PROBLEMAS

- 15) En una fábrica se coloca una cinta transportadora desde una altura ubicada a 12 m de altura en un edificio hasta otra abertura ubicada a 7 m de altura en otro edificio que está separado del anterior por una calle de 8 m de ancho.
¿ Qué pendiente tendrá la cinta ?
- 16) Desde un punto ubicado a 2 m de altura se quiere colocar una rampa hasta el piso que debe tener una pendiente de $0,25$.
¿ A cuántos metros del punto inicial se encontrará el final de la rampa ?
- 17) Un psicólogo toma un test de rapidez mental para el ingreso a una universidad.
El test consiste en entregarle a cada individuo una lámina que tiene algunas imágenes que debe recordar.
La siguiente fórmula nos dice (a partir de una lámina de x imágenes) cuántas imágenes recuerda, en promedio.
- $$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ (1/5)x + 4 & \text{si } 5 < x \leq 15 \\ 8 & \text{si } x > 15 \end{cases}$$
- a) Si la lámina tenía 15 imágenes, ¿ cuántas recuerda el postulante ?
b) Si el postulante recuerda 6 imágenes, ¿ cuántas tenía la lámina ?
c) Grafique la situación planteada y verifique los puntos anteriores en el gráfico.
- 18) En algunos países (como E.E.U.U. e Inglaterra) se utiliza para la medición de temperaturas un sistema cuya unidad es el grado Fahrenheit.
Obtenga la ecuación lineal que permite pasar de grados centígrados a grados Fahrenheit, sabiendo que:
 $10^\circ\text{C} = 50^\circ\text{F}$ y $60^\circ\text{C} = 140^\circ\text{F}$.
- 19) El gasto en una factura de Edesur está formado por cargo fijo por medidor más el costo por cada Kwh consumido.
El cargo fijo para clientes de Tarifa 1 es de $\$4,44$ por medidor y el cargo variable es de $\$0,082$ por cada Kwh consumido.
Luego al resultado de esta suma se le aplican diversas cargas impositivas que suman un $27,983\%$.
a) Exprese la fórmula que nos permita calcular lo que debe pagar cualquier cliente de Tarifa 1.
b) Indique lo que deberá pagar un cliente que consumió 248 Kwh .

Unidad 5. Recta en el plano. Respuestas.

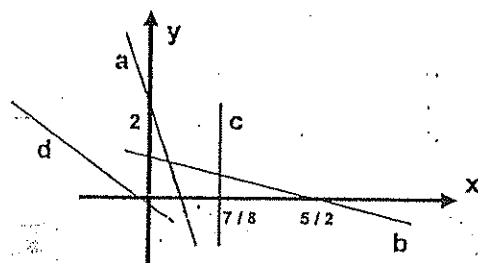
1) a) $M: \notin$ $N: \notin$ b) $R: \notin$ $S: \in$

2)

explícita $\begin{cases} \text{a) } y = -5x + 2 \\ \text{b) } y = -(2/9)x + (5/9) \\ \text{c) } \text{no existe} \\ \text{d) } y = -(5/3)x \end{cases}$

segmentaria $\begin{cases} \text{a) } x/(2/5) + y/2 = 1 \\ \text{b) } x/(5/2) + y/(5/9) = 1 \\ \text{c) } \text{no existe} \\ \text{d) } \text{no existe} \end{cases}$

3)



4) Punto intersección $(-1, 2)$

5) a) $45^\circ \vee \pi/4$

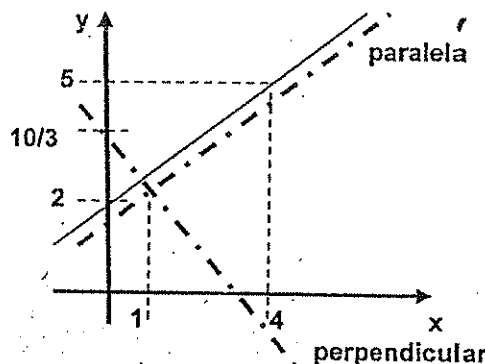
b) $30^\circ \vee \pi/6$

6) $r_1 \parallel r_2 \wedge r_3 \parallel r_4$

$r_5 \perp r_6 \wedge r_3 \perp r_2 \wedge r_4 \perp r_2 \wedge r_3 \perp r_1 \wedge r_4 \perp r_1$

7) a) $y = (3/4)x + (5/4)$

b) $y = -(4/3)x + (10/3)$



8) $y = -7x + 27$

9) $k = -9/7 \vee k = 7$

10) a) $k = 4$

b) $y/6 + x/(9/2) = 1$

11) Punto intersección $(-10/29, 120/29) = (-0,3, 4)$

12) a) $k = -1 \vee k = 4$

b) $k = -2 \vee k = 2$

c) $k = 3$

13) $5x - 2y - 4 = 0$

$y = (5/2)x - 2$

$x/(4/5) + y/(-2) = 1$

14) a) $t = 7/12$

b) $t = 5/17$

PROBLEMAS

15) $m = -5/8$

16) 8 m del punto inicial

17) a) 7 recuerdos b) 10 imágenes c) graficar

18) $F = 9/5 C + 32$

19) a) $G = (C_F + C_V) + 0,27983 * (C_F + C_V)$

b) \$ 31,709

Unidad 6. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones en el plano.

SISTEMAS DE ECUACIONES

1) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones e interpretar geoméricamente:

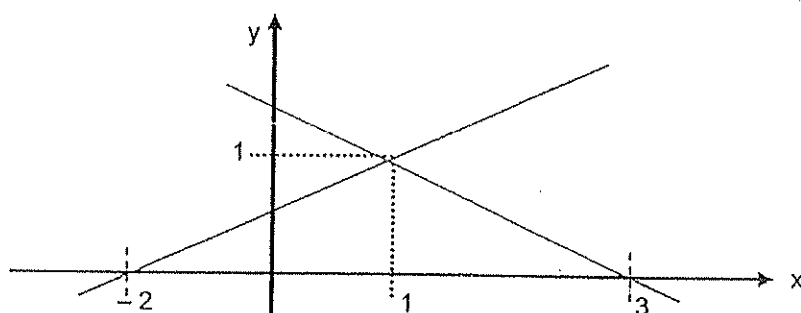
a)
$$\begin{cases} 5x + 5y = 9 \\ -5x + 9y = -9 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 10 \\ 3x_1 + 6x_2 = 15 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 4u - 2v = 5 \\ -6u + 3v = 1 \end{cases}$$

En cada caso verifique la solución hallada.

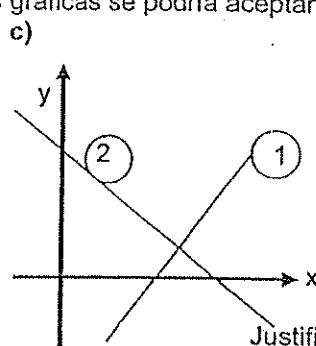
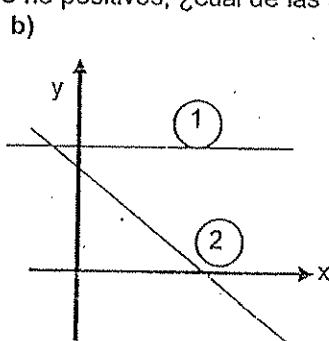
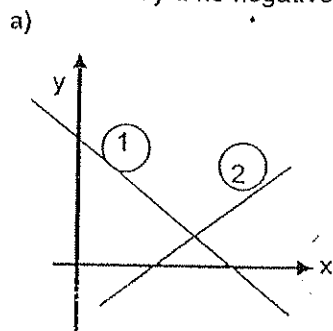
2) Proporcione un sistema de ecuaciones cuya representación gráfica sea la siguiente.



3) En el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} ax + b = y & (1) \\ cx + d = y & (2) \end{cases}$$

siendo a y d no negativos, b y c no positivos, ¿cuál de las siguientes gráficas se podría aceptar como solución?



Justifique la respuesta.

4) Resuelva los siguientes sistemas lineales:

a)
$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ (2x + y) / 3 = y - 6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 4y = 2 - x \\ x = 1 - 2y \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2(x - 1,5y) = 0 \\ x / (3/2) = y + (5/6) \end{cases}$$

Condiciones:

Variable =	$\frac{\text{Numerador (N)}}{\text{Denominador (D)}}$	S.C.D. →	$D \neq 0$
		S.C.I. →	$D = 0 \wedge N = 0$
		S.I. →	$D = 0 \wedge N \neq 0$

5) Determine para qué valores de k, el sistema tiene una, infinitas o ninguna solución:

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + kx_2 = 1 \end{cases}$$

6) Halle los valores de a y b (reales) de forma que el sistema sea compatible determinado (SCD), sistema compatible indeterminado (SCI), ó sistema incompatible (SI).

a)
$$\begin{cases} x + ay = a \\ -by = b \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} ax - y = 0 \\ x - ay = b \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ ax - by = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN del b):

Planteamos el Gauss - Jordan

$$\begin{array}{cc|c} x & y & l \\ \hline a & -1 & 0 \\ \textcircled{1} & -a & b \\ \hline 0 & a^2 - 1 & -ab \\ \hline 1 & -a & b \end{array} \rightarrow$$

$$y = \frac{-ab}{a^2 - 1}$$

S.C.D. $\rightarrow D \neq 0$ el denominador distinto de cero es: $a^2 - 1 \neq 0 \therefore a^2 \neq 1 \therefore |a| \neq 1$ esto nos dá:
($a \neq 1 \wedge a \neq -1$) \wedge b (no tiene restricción) $\therefore b \in \mathbb{R}$

S.C.I. $\rightarrow D = 0 \wedge N = 0$ \begin{cases} El denominador igualado a cero es: $a^2 - 1 = 0 \therefore (a = 1 \vee a = -1)$
 $y (\wedge)$
El numerador igualado a cero es: $-ab = 0$ (por ser $a \neq 0$ debe ser $b = 0$)
 $\left. \vphantom{\begin{cases}} \right\}$

S.I. $\rightarrow D = 0 \wedge N \neq 0$ \begin{cases} El denominador igualado a cero es: $a^2 - 1 = 0 \therefore (a = 1 \vee a = -1)$
 $y (\wedge)$
El numerador distinto de cero es: $-ab \neq 0$ (por ser $a \neq 0$ debe ser $b \neq 0$)
 $\left. \vphantom{\begin{cases}} \right\}$

PROBLEMAS DE SISTEMA DE ECUACIONES

7) En las elecciones para intendente el candidato A recibió 5919 votos más que el candidato B.
El total de votos fue 18653.
¿Cuántos ciudadanos votaron al ganador?

8) La edad de un padre es el cuádruplo de la edad de su hijo. Hace 3 años era el quintuplo.
¿Cuál es la edad actual de cada uno?

9) Antonio tiene \$4 en monedas de 5 centavos y de 20 centavos. Si en total tiene 29 monedas.
¿Cuántas son de 5 centavos y cuántas de 20 centavos?

10) En un número de 2 cifras la cifra de las decenas excede en 5 a la cifra de las unidades.
Si se invierte el orden de las cifras resulta un nuevo número que sumado con el anterior da 121.
Determine el número.

11) Determine los ángulos de un paralelogramo, que tiene la propiedad de que dos ángulos consecutivos difieren en 20°

12) La suma de dos números es 111, y al dividir el mayor por el menor, se obtiene cociente 5 y resto 9.
¿Cuáles son los números?

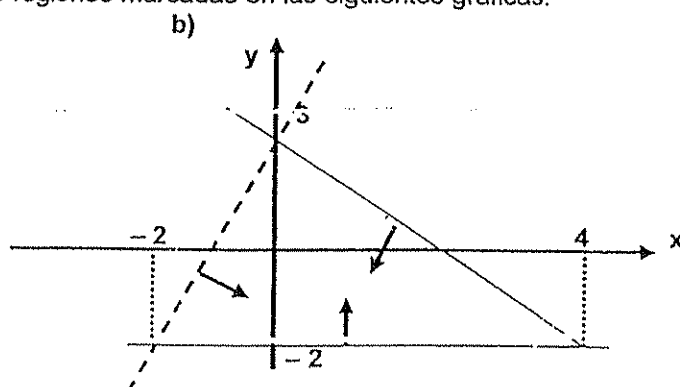
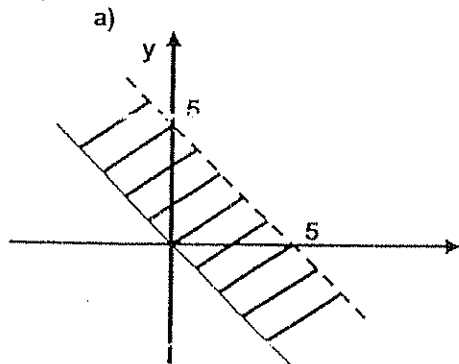
13) Cuando se agrega un disco duro a una computadora personal, el sistema nuevo cuesta \$ 2325.
Se sabe que $\frac{1}{3}$ del valor de la computadora más $\frac{1}{5}$ del valor del disco duro dan un total de \$ 745.
¿Cuál es el costo del disco duro?

14) Los precios por unidad de 2 sustancias son \$ 6 y \$ 10.
Averiguar qué cantidad de cada sustancia debe mezclarse para obtener 50 unidades de mezcla a \$7,60 cada una.

- 15) Una compañía médica produce 2 tipos de válvulas para el corazón; la estándar y la de lujo.
 Para hacer una válvula estándar son necesarios 5 minutos en el torno y 10 en la prensa taladradora.
 Para la válvula de lujo son necesarios 9 minutos en el torno y 15 en la prensa.
 Cierta día el torno estará disponible 4 horas y la prensa 7 horas.
 ¿Cuántas válvulas de cada tipo deben hacerse para utilizar las dos máquinas todo el tiempo posible?
- 16) El día del parcial de matemática se había previsto utilizar un cierto número de aulas.
 Al repartir 35 alumnos por aula quedaron 28 alumnos sin asiento.
 Entonces se ubicaron 38 alumnos en cada aula y quedaron 2 bancos libres.
 ¿Cuántos alumnos se presentaron al examen y cuántas aulas se utilizaron?
- 17) Se desea mezclar café colombiano que vale 2,50 \$ por kg con uno brasileiro que vale 1,80 \$ por kg.
 ¿Cuántos kilogramos de cada uno se deben usar para obtener 30 kg de una mezcla que valga 2 \$ por kg?
- 18) Un granjero desea cercar un lote rectangular de terreno.
 Si usa un material que cuesta 2,40 \$ por metro para el frente del lote y un material que cuesta 2,10 \$ por metro para los otros tres lados, la cerca le cuesta 589,50 \$.
 Si usa el material mas caro para los cuatro lados, la cerca le cuesta 648 \$.
 Determine las dimensiones del lote.

SISTEMAS DE INECUACIONES

- 19) Resolver gráficamente las siguientes inecuaciones, en \mathbb{R}^2 .
- a) $y - x < 2$ b) $y \geq -2$ c) $y \geq x$ d) $x < 1$ e) $2x - 3 < 2y$
- 20) Representar gráficamente el conjunto solución de los siguientes sistemas de inecuaciones.
- a) $\begin{cases} x < 4 \\ y < 2x + 1 \\ y > 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y < x + 1 \\ y > (1/2)x + (3/2) \end{cases}$ c) $\begin{cases} y \leq 3 \\ y \leq 4x + 2 \\ y > -x + 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y \leq 3x + 4 \\ y \geq 2x - 5 \\ y > -x - 2 \\ y \leq -x + 3 \end{cases}$
- 21) Representar gráficamente el conjunto solución de los siguientes sistemas de inecuaciones, solamente en el 1º cuadrante ($x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0$).
- a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 35 \\ x_1 + 5x_2 \leq 42 \\ 3x_1 + x_2 \leq 30 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 25 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + x_2 \leq 22 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 25 \\ 2x_1 - 4x_2 + 10 \geq 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 + x_2 \leq 60 \\ x_1 \leq 50 \\ x_2 \leq 20 \end{cases}$
- 22) Exprese mediante un sistema de inecuaciones las regiones marcadas en las siguientes gráficas.



- 23) Represente el conjunto solución (intersección de los cinco semiespacios) a partir de los datos de un problema que tiene:

$$\begin{array}{l} \text{condiciones de vínculo} \left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + 6x_2 \leq 15000 \\ 10x_1 + 20x_2 \leq 20000 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 6000 \end{array} \right. \quad \text{condiciones de no negatividad} \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

PROBLEMAS DE SISTEMAS DE INECUACIONES

- 24) Un transporte escolar tiene capacidad para 60 personas. Lleva el doble de niños que de niñas.
Mostrar en una gráfica las distintas posibilidades.
- 25) Se mezclan dos tipos de naftas A y B. La mezcla debe contener a lo sumo 40% del tipo A.
Representar gráficamente los posibles porcentajes de nafta A y B que pueden mezclarse.
- 26) Para abrir un curso sobre enseñanza de computación se exige un mínimo de 15 inscriptos y un máximo de 60.
Sólo pueden inscribirse docentes o técnicos en computación.
Los organizadores han decidido no aceptar más de 20 técnicos.
Plantear las inecuaciones y representar la situación en una gráfica.
- 27) En un taller se fabrican 2 tipos de piezas A y B, que deben seguir tres tipos de procesos: moldeado, pintura y horneado.
En el moldeado se emplean 6 horas para las piezas A y 16 horas para las B.
En la pintura se emplean 12 horas para las piezas A y 6 horas para las B.
En el horneado se emplean 9 horas para las piezas A y 9 horas para las B.
El tiempo disponible en cada semana es de 48 horas para moldeado, 42 horas para pintura y 36 horas para horneado.
¿Cuál es el par ordenado (A , B) intersección de las ecuaciones de: pintura \wedge horneado ?
- 28) Una compañía minera explota dos minas, extrayendo dos minerales M y N de cada una de ellas, siendo la pureza de las mismas tal que de la primera puede extraer 50 Kg. de M y 100 Kg. de N por cada tonelada de material bruto, mientras que de la segunda, las respectivas cantidades son 100 y 25.
La compañía debe obtener una producción mínima de $1 \frac{1}{2}$ Tn. de mineral M y $1 \frac{1}{4}$ Tn. de material N.
¿Cuál es el par ordenado intersección de las dos ecuaciones ?
- 29) Los requerimientos de un tratamiento medicinal son tales que deben cubrir una dosis de al menos 200 unidades curativas y no puede superar las 120 unidades tóxicas.
Se dispone de una combinación de medicamentos y radiación, proporcionando los primeros 50 unidades curativas y 40 unidades tóxicas por cada miligramo, mientras que cada minuto de radiación produce 100 unidades curativas y 40 unidades tóxicas.
Analizar gráficamente qué ocurre si la cantidad de miligramos de medicamento es nula.

INECUACIONES CUADRÁTICAS

- 30) Hallar los números reales para los cuales se verifica: $5x^2 - 5x - 30 \geq 0$
- 31) Calcular los números reales para los cuales $4x^2 - 4x + 4$ es positivo.

SISTEMAS DE INECUACIONES CUADRÁTICAS

- 32) Indicar los región del plano que satisfacen los sistemas de inecuaciones :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} y > x^2 - x - 2 \\ y < x + 1 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} y > x^2 + 4 \\ y < x - 6 \end{array} \right. \end{array}$$

Unidad 6. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones en el plano. Respuestas.

SISTEMAS DE ECUACIONES

1) a) $S = \{(9/5; 0)\}$ b) $S = \{(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2 / (x_1; x_2) = (5-2t; t) \wedge t \in \mathbb{R}\}$ c) $S = \emptyset$

2) $y = -(1/2)x + (3/2) \quad \wedge \quad y = (1/3)x + (2/3)$

3) (1) $(m > 0; b < 0) \quad \wedge \quad (2) \quad (m < 0; b > 0)$

4) a) $S = \{(-4; 5)\}$ b) $S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / (x; y) = (1-2t; t) \wedge t \in \mathbb{R}\}$ c) $S = \emptyset$

5) una solución: $k \neq 1 \wedge k \neq -1$ infinitas soluciones: $k = 1$ ninguna solución: $k = -1$

6)

a) $\begin{cases} \text{SCD} : b \neq 0 \wedge a \in \mathbb{R} \\ \text{SCI} : b = 0 \wedge a \in \mathbb{R} \\ \text{SI} : \text{no existe} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{SCD} : b \neq -1 \wedge a \neq 0 \\ \text{SCI} : b = -1 \vee a = 0 \\ \text{SI} : \text{no existe} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{SCD} : a \neq 1 \wedge a \neq -1 \wedge b \in \mathbb{R} \\ \text{SCI} : (a = 1 \wedge b = 0) \vee (a = -1 \wedge b = 0) \\ \text{SI} : (a = 1 \wedge b \neq 0) \vee (a = -1 \wedge b \neq 0) \end{cases}$

PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

7) votos a ganador 12286

8) edad del padre 48, edad del hijo 12

9) 12 monedas de 5 centavos, 17 monedas de 20 centavos

10) número = 83

11) ángulos de 80° y 100°

12) el mayor es 94, el menor es 17

13) costo del disco: \$ 225

14) de una sustancia son 30 unidades y de la otra son 20 unidades.

15) estándar son 12 y de lujo son 20.

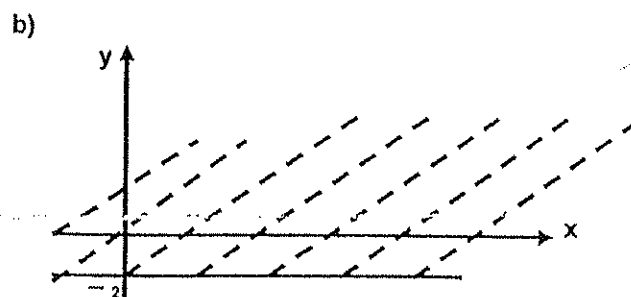
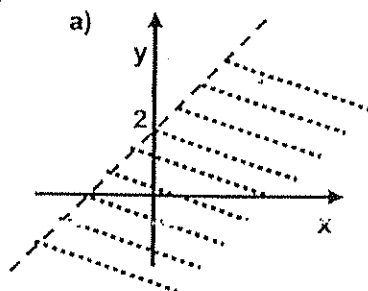
16) se presentaron 378 alumnos y se utilizaron 10 aulas.

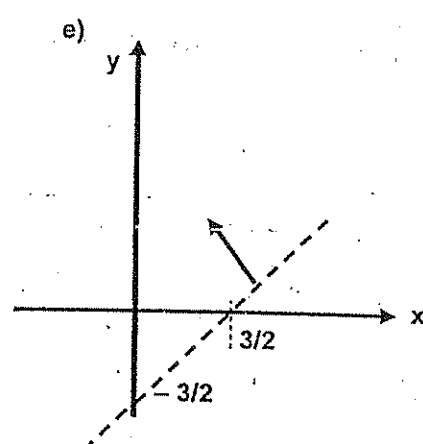
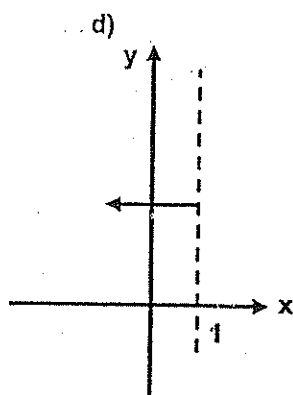
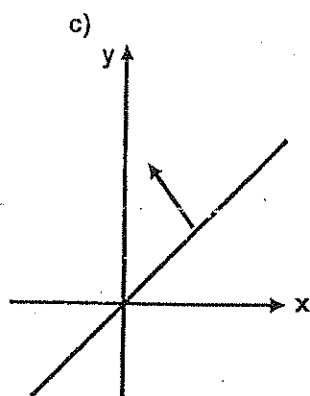
17) $C = 8,57 \text{ Kg}$ $B = 21,43 \text{ Kg}$

18) $x = 75 \text{ m}$ $y = 60 \text{ m}$

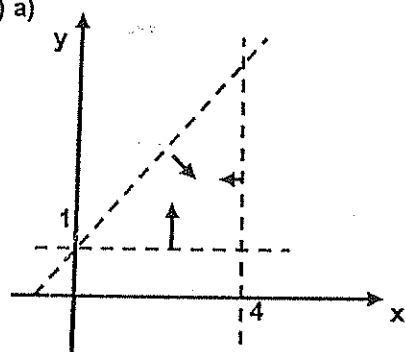
SISTEMAS DE INECUACIONES

19)

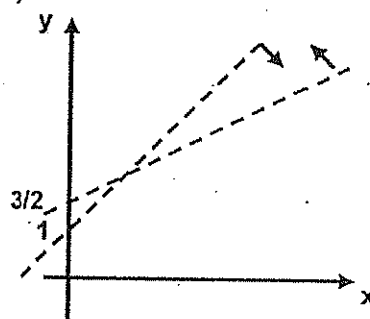




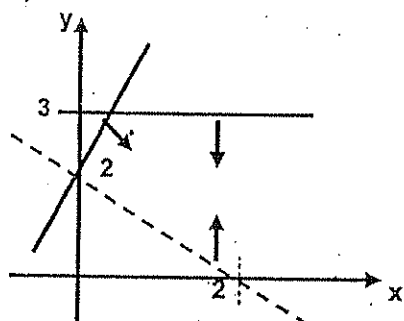
20) a)



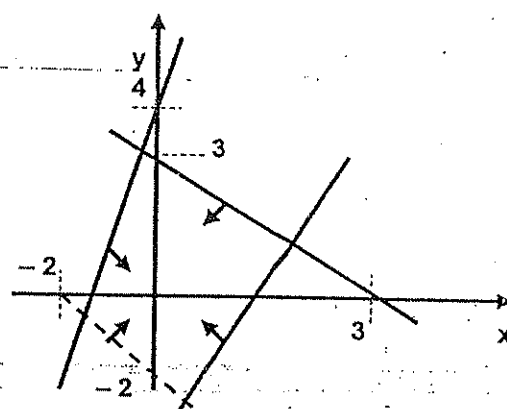
b)



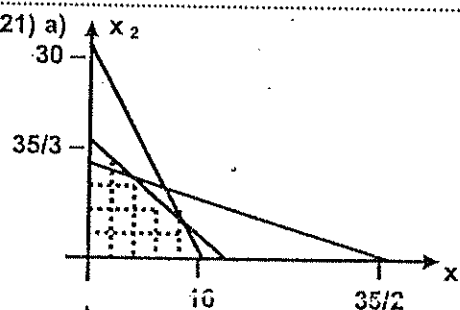
c)



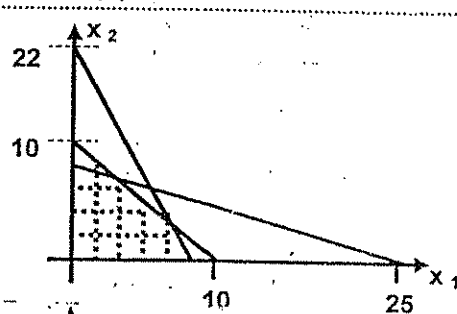
d)



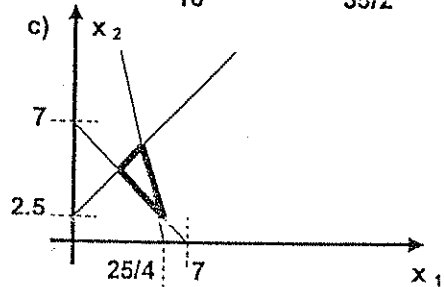
21) a)



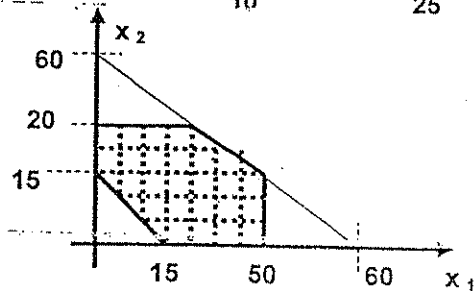
b)



c)



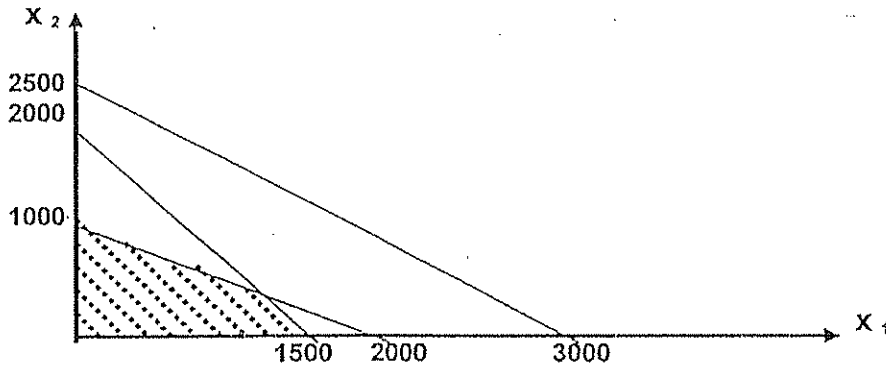
d)



22) a)
$$\begin{cases} y \geq -x \\ y < -x + 5 \end{cases}$$

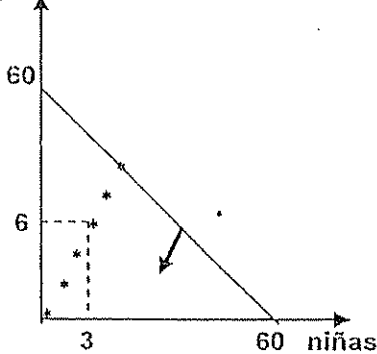
b)
$$\begin{cases} y \geq -2 \\ y < (5/2)x + 3 \\ y \leq -(5/4)x + 3 \end{cases}$$

23)

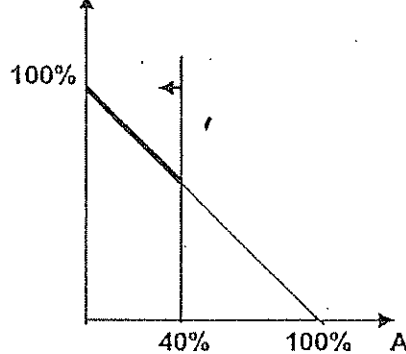


PROBLEMAS DE SISTEMAS DE INECUACIONES

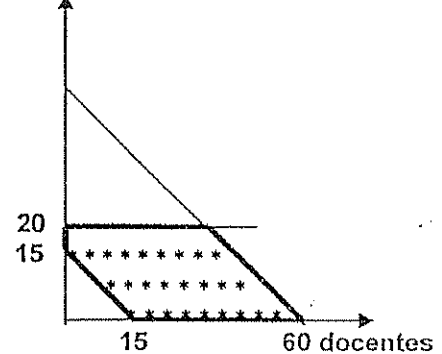
24) niños



25) B



26) técnicos



27) $(A, B) = (3, 1)$ 3 piezas del tipo A \wedge 1 piezas del tipo B

28) $(10, 10)$ Extraer 10 Tn. de cada mina

29) La radiación está en un intervalo: $[2, 3]$, con unidad: minutos.

INECUACIONES CUADRÁTICAS

30) Sol. = $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -2 \vee x \geq 3\} = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$

31) Sol. = \mathbb{R}

SISTEMAS DE INECUACIONES CUADRÁTICAS

32) a) Sol. = $\{(x, y) \in \mathbb{R} / y > x^2 - x - 2 \wedge y < x + 1\}$

b) Sol. = \emptyset

Unidad 7. Sistema de ecuaciones lineales m x n

SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

1) Resolver los siguientes sistemas:

a)
$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x + 3y - 2z = -10 \\ -x + 6z = 9 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y - 2z = -5 \\ 2x - y + z = -2 \\ 4x - y = -4 \end{cases}$$

2) Indicar los valores de k (reales) tales que el sistema sea:

Sistema compatible determinado (SCD).
Sistema compatible indeterminado (SCI).
Sistema incompatible (SI).

a)
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ kx + y = -2 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y - z = k \\ -x + y + kz = 3 \\ ky + z = 5 \end{cases}$$

Solución del ejercicio 2) a)

Primero

Con los coeficientes construimos la tabla de Gauss - Jordan:

x	y	z	I
2	-1	3	3
k	1	0	-2
2	1	1	1
2+k	0	3	1
K	1	0	-2
2-k	0	1	3
2+k-3(2-k)	0	0	-8
k	1	0	-2
2-k	0	1	3

Segundo

Con los coeficientes de la última iteración construimos el sistema equivalente al dado:

$$\begin{cases} 4(k-1)x + 0y + 0z = -8 \\ kx + 1y + 0z = -2 \\ (2-k)x + 0y + 1z = 3 \end{cases}$$

Simplificando la escritura quedaría:

$$\begin{cases} 4(k-1)x = -8 \\ kx + y = -2 \\ (2-k)x + z = 3 \end{cases}$$

Este sistema equivalente es de resolución inmediata

Tercero

Trabajamos sobre la 1ª ecuación por tener una sola variable:

$$4(k-1)x = -8 \therefore (k-1)x = -2 \therefore$$

$$x = \frac{-2}{k-1}$$

Cuarto

A este cociente le aplicamos las condiciones necesarias (recordando que denominador = D y numerador = N):

S.C.D. debe ser: $D \neq 0 \therefore k-1 \neq 0 \therefore k \neq 1$

S.C.I. debe ser: $D = 0 \wedge N \neq 0 \therefore k-1 = 0 \wedge -2 \neq 0$ (no existe) $\therefore k$: no existe

S.I. debe ser: $D = 0 \wedge N = 0 \therefore k-1 = 0 \wedge -2 = 0 \therefore k = 1$

3) Hallar la condición que deben cumplir "a" y "b" para que el siguiente sistema sea compatible.

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y - 3z = a \\ x + 2y = b \end{cases}$$

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Sistemas Homogéneos $\left\{ \begin{array}{l} \text{DETERMINADOS (única solución la trivial)} \\ \text{INDETERMINADOS (infinitas soluciones además de la trivial)} \end{array} \right.$

Solución trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$

4) Resolver los siguientes sistema, clasificarlos como determinado o indeterminado según corresponda:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 8y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 3y + z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$

5) Indicar los valores de k (reales) tales que el sistema sea SCD, SCI, SI.

$$\begin{cases} x + kz = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \\ 2x + ky + 3z = 0 \end{cases}$$

6) A partir del conjunto solución del ejercicio 1) b).

- obtener dos soluciones particulares: $S_1 \wedge S_2$ para valores del parámetro $t = 0 \wedge t = -1$.
- plantear el sistema homogéneo asociado.
- utilizando las soluciones halladas en a), encontrar una solución particular del sistema homogéneo asociado, sabiendo que en general un sistema en forma matricial queda expresado por: $A \cdot X = B$.
- ¿ la solución es única ?
- comprobar si verifica el sistema planteado en b).

TEOREMA DE ROUCHE FROBENIUS

- Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y solo si la matriz de coeficientes y la matriz ampliada con los términos independientes tienen el mismo rango.
- Un sistema de ecuaciones lineales es incompatible si y solo si los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada con la columna de los términos independientes, son distintos.

$\begin{array}{l} \text{Rango} \begin{cases} = \text{S. C.} \\ \neq \text{S. I.} \end{cases} \begin{cases} \text{Rango} = \text{N}^\circ \text{ variables} \\ \text{Rango} \neq \text{N}^\circ \text{ variables} \end{cases} \begin{cases} \text{S. C. D.} \\ \text{S. C. I.} \end{cases} \end{array}$

7) Sea $A \cdot X = B$ un sistema lineal compatible. ¿Qué relación existe entre el rango y el conjunto solución?

8) Comprobar el teorema de Rouché Frobenius I) y II) con el ejercicio 1 a), 1 b), 1 c).

PROBLEMAS DE SISTEMA DE ECUACIONES

9) Se dispone de tres tipos de fertilizantes con las composiciones indicadas en la siguiente tabla:

TIPO	FOSFATO	POTASIO	NITRÓGENO
A	10 %	30 %	60 %
B	20 %	40 %	40 %
C	20 %	30 %	50 %

(no a los transgénicos)

Un análisis de suelo muestra que los requerimientos de fertilizante para un determinado campo son 19 % de fósforo, 34 % de potasio y 47 % de nitrógeno.

¿Puede obtener la mezcla correcta utilizando los tres tipos?

Si es así, ¿ cuántos kilogramos de cada uno deben mezclarse para obtener 100 Kg de la calidad deseada?

- 10) Un turista que fue a Europa gastó € 30 al día por hospedaje en Inglaterra, € 20 al día en Francia y € 20 al día en España. En cuanto a alimentos, el turista gastó € 20 diarios en Inglaterra, € 30 diarios en Francia y € 20 diarios en España. Además, por conceptos diarios el turista gastó € 10 diarios en cada uno de los países mencionados.
A su regreso, el registro de gastos del viajero indicaba un total de € 440 por hospedaje, € 320 por alimentos y € 140 por gastos varios.
Calcule el número de días que el viajero estuvo en cada uno de los tres países o bien muestre que el registro es incorrecto ya que las cantidades gastadas son incompatibles unas con otras.

- 11) Un espía sabe que en cierto aeropuerto secreto hay estacionados 60 aviones, entre cazas y bombarderos. El espía desea determinar cuántos de los 60 aviones son cazas y cuántos son bombarderos. Hay un tipo de cohete que es transportado por ambas clases de aviones; el caza porta 6 de estos cohetes y el bombardero sólo 2.
El agente sabe que con 250 cohetes quedan pertrechados por completo todos los aviones que se hallan en el aeropuerto.
Además, se entera que en esa base el número de aviones caza es el doble del número de bombarderos.

- a) Muestre que la información del agente es incorrecta.
b) Si el agente sabe que con 280 cohetes quedan pertrechados por completo todos los aviones del aeropuerto, ¿cuál es el número de aviones caza y bombarderos que hay en dicho aeropuerto secreto? (no a la guerra).

- 12) En un taller hay tres máquinas trabajando: A, B, C.
Cuando trabajan juntas pueden confeccionar 5700 prendas por semana, cuando sólo trabajaban A y B se producen 3400 por semana, en cambio cuando lo hacen sólo B y C se producen 4200 prendas por semana.
¿Cuántas prendas pueden producir cada máquina por semana?

- 13) En ciertas situaciones lo que ocurre en un tiempo de observación depende sólo de lo que ocurre en el tiempo de observación inmediatamente anterior.
Por ejemplo: en un circuito eléctrico la falla intermitente de un componente puede tener el comportamiento sig.:
I) Si un componente funciona un tiempo "t", entonces funcionará en el siguiente tiempo de observación el 99 % de las veces.
II) Si el componente falla en el tiempo "t", entonces fallará en el siguiente tiempo de observación el 5 % de las veces.

Este método (llamado cadenas de Markov) puede utilizarse para mostrar que (en promedio) la probabilidad de operación exitosa x_1 y la probabilidad de falla x_2 deben satisfacer el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 0.99 x_1 + 0.95 x_2 = x_1 \\ 0.01 x_1 + 0.05 x_2 = x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Halle la probabilidad de falla y de funcionamiento (en promedio) del componente.

- 14) La edad de Juan es la suma de las edades de Carlos y Diego. La edad de Carlos es 2 años más que la suma de las edades de Diego y María, la edad de Diego es 4 veces la de María, la suma de las cuatro edades es 42.
¿Qué edad tiene cada uno?

- 15) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2/x + 2/y - 3/z = 3 \\ 1/x - 2/y - 3/z = 9 \\ 7/x - 2/y + 9/z = -39 \end{cases}$$

- a) decir si el sistema es lineal b) encontrar el conjunto solución

- 16) Luis fue a una ferretería y compró 1 kg de cada uno de los tres tamaños diferentes de clavos: pequeños, medianos y grandes.
Después de haber realizado cierta parte de su trabajo observó que había subestimado la cantidad de clavos pequeños y grandes que necesitaba.
Así, compró otra vez la misma cantidad de clavos pequeños y el doble de lo que había comprado de los grandes.
Luego de haber avanzado un poco mas en su trabajo le volvieron a faltar clavos por lo que necesitó comprar otro kilogramo de clavos pequeños y de medianos respectivamente.
Cuando vió la factura de la ferretería observó que le habían cobrado 60 \$ la primera vez, 65 \$ la segunda y 35 \$ la tercera.
Los precios de los clavos varían de acuerdo con su tamaño. Encuentre dichos precios.
- 17) La superficie total disponible de un estacionamiento es 1000 m^2 .
Un automóvil ocupa 8 m^2 , una camioneta necesita una superficie de 10 m^2 y un camión 15 m^2 .
La tarifa diaria es: 12 \$ por automóvil, 15 \$ por camioneta y 20 \$ por camión.
Durante cierto día ingresaron 100 vehículos obteniéndose una recaudación de 1450 \$.
¿ Cuántos vehículos de cada tipo había ?
- 18) En un número natural de tres cifras la cifra de las centenas es el duplo de la cifra de las unidades.
La cifra de las unidades excede en 1 a la de las decenas.
Si del número se resta 297 se obtiene otro número con las mismas cifras en orden inverso.
¿Cuál es el número ?
- 19) Una parte de un capital de 20.000 \$ está invertido al 3 %, otra parte al 4 % y otra parte al 5 %, lo que produce en total un interés de 750 \$.
Las inversiones al 4 % y al 5 % producen entre ambas 210 \$ más que la inversión al 3 %.
¿ A cuánto ascienden las cantidades invertidas al 3 %, 4 % y 5 % respectivamente ?

Unidad 7. Sistema de ecuaciones lineales $m \times n$.Respuestas.

SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

1) a) Sol. = $(-15; 6; -1)$ b) Sol. = $\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / (x=2+9t; y=1-4t; z=t) \wedge t \in \mathbb{R}\}$ c) Sol. = \emptyset

2) a) SCD: $k \neq 1$

SCI: no existe k

SI: $k = 1$

b) SCD: $k \neq -1 \wedge k \neq 2$

SCI: $k = 2$

SI: $k = -1$

3) $a + b = 9$

SISTEMAS HOMOGENEOS

4) a) Sol. = $\{(0; 0)\}$ sist. determinado

b) Sol. = $\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / (x; y; z) = (5/9t; t; 2/9t) \wedge t \in \mathbb{R}\}$ sist. indeterminado

5) SCD: $k \neq 1$ SCI: $k = 1$ SI: no existe k

6) a) $S_1 = (2, 1, 0) \wedge S_2 = (-7, 5, -1)$

b) los 2º miembros igualados a cero.

c) $(9, -4, 1) \wedge (-9, 4, -1)$

d) no es única.

e) verifica.

TEOREMA DE ROUCHE FROBENIUS

7) Ver cuadro de definición

8) a) Rango = 3 \wedge Nº variables = 3 (Sis. Compatible determinado)

b) Rango = 2 \wedge Nº variables = 3 (Sist. compatible indeterminado)

c) Rango = 2. \wedge Rango = 3 (Sis. incompatible)

PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

9) A = 10 Kg , B = 40 Kg C = 50 Kg

10) Inglaterra = 16 días , Francia = 4 días , España = -6 días ($\notin \mathbb{N}$) \therefore Registro incorrecto

11) I) $0 \cdot x = -30 \Rightarrow (x \text{ no existe}) \therefore$ información incorrecta II) Sol. = $\{40 \text{ cazas}; 20 \text{ bombarderos}\}$

12) A = 1500 B = 1900 C = 2300

13) Porcentaje de operación exitosa = 98.95 %. Porcentaje de operación defectuosa = 1.04 %.

14) Juan = 20 años , Carlos = 12 años , Diego = 8 años , María = 2 años

15) a) no es un sistema lineal b) Sol. = $\{(-1/2; -1; -1/3)\}$

16) p = 15 m = 20 g = 25

17) x = 50 autos y = 30 camionetas z = 20 camiones

18) c = 6 d = 2 u = 3

19) x = \$ 9000 y = \$ 7000 z = \$ 4000

Unidad 8. Cálculo combinatorio

Factorial de un número: $n!$

Es el producto de todos los números naturales desde 1 hasta n .
Siendo n un número natural.

$$n! = n * (n-1) * (n-2) * (n-3) * \dots * 3 * 2 * 1$$

Nota: por convención es $0! = 1$

Interesa el orden: se cuenta el número de secuencias o permutaciones

Pueden repetirse elementos de la secuencia: n^r

Los elementos de la secuencia deben ser distintos: ${}_n P_r = n! / (n-r)!$

Repeticiones limitadas o permutaciones distinguibles: ${}_n P_{K_1 K_2 \dots K_t} = n! / K_1! K_2! \dots K_t!$

No interesa el orden: se cuenta el número de subconjuntos o combinaciones

$${}_n C_r = n! / r!(n-r)!$$

INTERESA EL ORDEN – elementos de la secuencia repetidos

- 1) En una computadora hay 8 posiciones para individualizar un código en sistema binario.
¿ Cuántos símbolos distintos pueden crearse ?.
- 2) ¿ Cuántos pronósticos posibles tiene una fecha de los 13 partidos del PRODE si se puede apostar a local, empate o visitante ?.
- 3) ¿ Cuántos números de 5 dígitos pueden formarse con: 1, 2, 3, 4 ?.
- 4) ¿ Cuántos números de 5 dígitos pueden formarse con: 0, 1, 2, 3, 4 ?.

INTERESA EL ORDEN – elementos de la secuencia distintos con $n = r$

- 5) ¿ De cuántas maneras distintas pueden sentarse 3 varones y 2 mujeres en un banco ? si:
 - a) no hay restricciones.
 - b) los varones se sientan juntos y las mujeres también.
 - c) sólo las mujeres se deben sentar juntas.
- 6) a) ¿ De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra CUATRO ?.
b) ¿ Cuántas comienzan con A ?.
c) ¿ Cuántas comienzan con A y terminan con T ?.
- 7) ¿ En cuántas formas pueden sentarse en una fila 4 africanos, 3 europeos y 5 asiáticos de manera que las personas de un mismo continente queden juntas ?.
- 8) ¿ De cuántas maneras se pueden colocar 12 libros en un estante, si 3 de ellos deben estar juntos ?.

INTERESA EL ORDEN – elementos de la secuencia distintos con $n \neq r$

- 9) Los 100.000 números de una lotería han sido numerados del 00000 al 99999.
¿ Cuántos billetes tienen las 5 cifras diferentes ?
- 10) ¿ Cuántos números, entre el 2000 y el 6000 pueden formarse con los dígitos: 0, 1, 3, 5, 7, sin repetir ?
- 11) ¿ Cuántas patentes de automóvil pueden fabricarse si cada placa contiene 2 letras diferentes entre 26 elegibles, seguidas por 3 dígitos diferentes entre los 10 posibles ?
- 12) ¿ En cuántas formas pueden ocupar 10 personas, 15 juegos individuales, en un parque de diversiones ?
- 13) ¿ Cuántas banderas diferentes de tres bandas horizontales pueden formarse con cinco colores, si dos bandas consecutivas no tienen el mismo color ?
- 14) ¿ Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse con los dígitos impares ?
- 15) Una asamblea de 14 personas desea elegir entre sus miembros un presidente, un vicepresidente y un secretario de actas. ¿ De cuántas maneras puede realizarse la elección ?

INTERESA EL ORDEN – elementos de la secuencia repetidos con limitación

- 16) ¿ De cuántas maneras puede ordenarse las letras de la palabra MATEMÁTICA ?
- 17) ¿ Cuántos números distintos de 7 dígitos pueden formarse con: un 1, dos 3, cuatro 5 ?
- 18) Un equipo de fútbol juega 19 partidos en un campeonato.
¿ De cuántas formas puede terminar con: 10 victorias, 5 empates, 4 derrotas ?

NO INTERESA EL ORDEN

- 19) Se dispone de un billete de \$ 50, uno de \$ 100, uno de \$ 500, uno de \$ 1000 y uno de \$ 5000.
¿ Cuántas sumas diferentes de dinero pueden lograrse? si:
a) se utilizan 3 billetes.
b) se utilizan por lo menos 3 billetes.
- 20) Un estudiante debe contestar, entre 10 preguntas, 8 correctamente.
a) ¿ de cuántas maneras puede elegir las respuestas ?
b) ¿ de cuántas, si las 3 primeras son obligatorias ?
- 21) En un grupo de 8 niños y 7 niñas, ¿ cuántas maneras distintas existen de elegir 12 personas ? si:
a) deben haber 6 niñas.
b) deben haber como mínimo 6 niños.
- 22) ¿ De cuántas maneras pueden elegirse 2 números del conjunto $A = \{1, 2, 3, 8, 9, 10, 11\}$ si su suma debe ser un número par?.
- 23) ¿ Cuántas tarjetas distintas pueden jugarse al QUINI 6 ?
- 24) ¿ De cuántas maneras pueden extraerse 3 cartas de un mazo de 40 ? si:
a) debe salir sólo un as
b) debe salir a lo sumo un as
c) debe salir como mínimo un as

25) En un mazo de 52 cartas de póker (13 de cada palo) se extraen 5, sin reposición.

¿Cuántos grupos pueden formarse?, de tal manera que resulten:

- a) grupos con por lo menos 4 diamantes
- b) grupos con a lo sumo 3 corazones
- c) incluidos el 3 de corazones y el 2 de diamantes en todos los grupos

26) Los 8 participantes de un conferencia se saludan, dándose la mano.

Si cada uno saluda a todos los demás.

¿ Cuántos apretones de manos se dan en total ?.

27) Para un cumpleaños infantil compré 60 juguetes de cotillón diferentes.

Quiero hacer 12 bolsitas de igual número de juguetes cada una:

- a) ¿de cuántas formas diferentes puedo armar la primera bolsita?.
- b) una vez armadas las bolsitas, ¿de cuántas formas distintas las puedo entregar?.

PROBLEMAS COMBINADOS

28) El testigo de un accidente de tránsito es llamado a declarar porque dice haber visto la patente del vehículo que huyó del lugar. Al llegar a la comisaría declaró que recordaba que la patente comenzaba con A.

¿ Cuántas patentes se tendrán que verificar ?.

29) ¿Cuántas piezas tiene un juego de dominó, si en cada pieza figuran 2 símbolos elegidos entre:

blanco, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 ?.

30) En dos clavos tenemos 156 posibilidades de colgar n cuadros.

¿ Cuántos cuadros hay ?.

31) En un campeonato de ajedrez cada maestro juega una vez con cada uno de los restantes.

Si en total se juegan 45 partidas. ¿ Cuántos jugadores son ?.

32) Hallar $x \in \mathbb{N}$ en: ${}_xC_2 = 55$

33) Hallar $x \in \mathbb{N}$ en: ${}_xP_4 = 6 \cdot {}_xP_2$

34) ¿ Cuántos números, de 4 dígitos, múltiplos de 5 pueden formarse con: 0, 1, 2, 3, 4, 5 sin repetirlos ?.

35) ¿ Cuántos números, de 4 dígitos, pueden formarse con: 0, 1, 2, 3, 4, 5 que sean mayores que 1527 y menores que 4512 ?.

36) Dadas dos rectas paralelas y n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra.

¿ Cuántos triángulos pueden determinarse con vértices en esos puntos ?.

37) Determinar el orden de ubicación del número 537128 al ordenar en forma creciente los números obtenidos permutando los dígitos: 1, 2, 3, 5, 7, 8 sin repetir las cifras.

38) Considerando todos los números de 5 cifras que se obtienen permutando los dígitos de 17283.

- a) ¿ Cuántos de ellos son impares ?.
- b) De menor a mayor, ¿ qué lugar ocupa el número 23178 ?.

39) Un menú turístico permite seleccionar una entrada entre cuatro, una comida caliente entre tres, y un postre entre cinco.

- a) ¿ De cuántas formas puede elegir su menú un turista ?.
- b) ¿ De cuántas formas podrá hacerlo si desea que el salpicón de ave y la suprema de pollo no aparezcan en el mismo menú ?.

40) Con 10 consonantes distintas y las 5 vocales, ¿ cuántas palabras de 8 letras se pueden formar, sin repetir ninguna letra, de modo que contengan a lo sumo una vocal ?.

Unidad 8. Cálculo combinatorio. Respuestas

INTERESA EL ORDEN – elementos de la secuencia repetidos

- 1) Se pueden crear 256 símbolos distintos (por ejemplo el ASCII extendido)
- 2) El PRODE tiene 1.594.323 pronósticos posibles
- 3) Pueden formarse 1024 números.
- 4) Pueden formarse 2500 números.

INTERESA EL ORDEN – elementos de la secuencia distintos con $n = r$

- 5) a) De 120 maneras distintas si no hay restricciones
b) De 24 maneras distintas
c) De 48 maneras distintas si sólo las mujeres se sientan juntas
- 6) a) Se pueden ordenar de 720 maneras
b) Las palabras que empiezan con A son 120
c) Las palabras que empiezan con A y terminan con T son 24
- 7) Se pueden sentar de 103.680 formas
- 8) Los 12 libros se pueden colocar de 21.772.800 maneras

INTERESA EL ORDEN – elementos de la secuencia distintos con $n \neq r$

- 9) Son 30.240 billetes con cifras diferentes
- 10) Se pueden formar 48 números
- 11) Se pueden fabricar 468.000 patentes
- 12) 10.897.286.400 formas distintas
- 13) Se pueden hacer 80 banderas
- 14) 60
- 15) 2184

INTERESA EL ORDEN – elementos de la secuencia repetidos con limitación

- 16) Se puede ordenar de 151.200 maneras
- 17) 105 números distintos
- 18) 11.639.628

NO INTERESA EL ORDEN

- 19) a) Se logran 10 sumas diferentes si se utilizan 3 billetes
b) Se logran 16 sumas diferentes si se utilizan 3 billetes por lo menos
- 20) a) Puede elegir las respuestas de 45 maneras
b) De 21 maneras distintas si las 3 primeras son obligatorias
- 21) a) Si deben haber 6 niñas son 196 maneras distintas
b) Si como minimo hay 6 niños son 395 maneras distintas

22) Se pueden elegir de 9 maneras

23) Al QUINI 6 se pueden jugar 9.366.819 tarjetas diferentes

24) a) Son 2.520 maneras diferentes si debe salir sólo un as

b) Son 9.660 maneras diferentes si debe salir a lo sumo un as

c) Son 2.740 maneras diferentes si debe salir como mínimo un as

25) a) Si son por lo menos 4 diamantes se forman 29.172 grupos

b) Si son a lo sumo 3 corazones se forman 2.569.788 grupos

c) Con el 3 de corazones y el 2 de diamante incluidos, se forman 19.600

26) En total se dan 28 apretones de manos

27) a) La primer bolsita se puede armar de 5.461.512 maneras

b) Las puedo entregar de 479.001.600 formas distintas

PROBLEMAS COMBINADOS

28) Se tendrán que verificar 729.000 patentes

29) El juego de dominó tiene 28 fichas

30) Hay 13 cuadros

31) Los jugadores son 10

32) $x = 11$

33) $x = 5$

34) Pueden formarse 108 números

35) Pueden formarse 638 números

36) Si $n = 1 \wedge m \geq 2$ es: $m(m-1)/2$

Si $m = 1 \wedge n \geq 2$ es: $n(n-1)/2$

Si $m \geq 2 \wedge n \geq 2$ es: $(m * n / 2) (m + n - 2)$

37) El orden de ubicación es el 421

38) a) 72 b) 31

39) a) 60 b) 55

40) 26.006.400

rfonte@datafull.com

Ing. Rubén Fonte

jccolubi@hotmail.com

Ing. Juan Carlos Colubi