Simplificación de funciones lógicas por el método gráfico de Karnaugh

Sistemas de Procesamiento de Datos
Tecnicatura Superior en Programación.
UTN-FRA

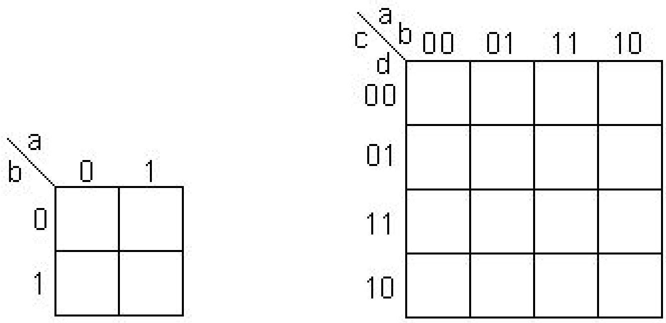
Autores: *Ing. Darío Cuda*

Revisores: *Lic. Mauricio Dávila*

Versión : 1

Mapas de Karnaugh

El aspecto de los mapas de Karnaugh es el de la siguiente figura:



En cada mapa existe una línea diagonal en la esquina superior izquierda. Por encima y por debajo de dicha línea aparecen los nombres de las variables implicadas (en este caso a, b, c y d, según el mapa, aunque pudieran ser otros diferentes), de tal forma que para el mapa de cuatro variables, por ejemplo, las combinaciones de ceros y unos de la parte superior del mapa son las combinaciones posibles de las variables a y b, en este orden, y las combinaciones de dígitos binarios del lateral izquierdo son la posibles combinaciones de las variables c y d, también en ese orden.

Formas canónicas de las funciones lógicas

Toda función lógica es posible expresarla en cualquiera de las dos formas canónicas que existen, maxitérminos o maxterms y minitérminos o minterms. Cada una de estas formas canónicas está formada por un número de términos variable. En cada uno de esos términos **deben aparecer todas las variables de la función, ya sea en forma negada o en forma directa (sin negar)**.

En la forma canónica de **minitérminos** cada uno de los términos estará formado por productos lógicos de variables , teniendo que aparecer finalmente en cada término todas y cada una de las variables que intervienen en la función (negadas o no). Por último, todos los términos involucrados deberán sumarse lógicamente en una única expresión.

El aspecto de una forma canónica de este tipo tendrá un aspecto similar a los siguientes:

$$F = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} + \overline{a}\,b\,c\,\overline{d} + a\,\overline{b}\,\overline{c}\,d + \overline{a}\,b\,\overline{c}\,d$$

$$H = p\,q\,r + \overline{p}\,q\,\overline{r} + p\,\overline{q}\,\overline{r} + \overline{p}\,\overline{q}\,r + \overline{p}\,q\,r + p\,q\,\overline{r}$$

$$K = \overline{a}\,\overline{b} + a\,b$$

En la forma canónica de maxitérminos los términos se forman no con el producto lógico, sino con la suma lógica y la expresión completa de maxitérminos se consigue multiplicando lógicamente todos los términos y no sumándolos como pasaba en la otra forma canónica.

Así, ejemplos de formas canónicas de maxitérminos podrían ser los siguientes:

$$F = (\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d})(a + b + c + d)(\overline{a} + b + c + \overline{d})(a + \overline{b} + \overline{c} + d)$$

$$G = (\overline{p} + \overline{q} + \overline{r})(\overline{p} + q + r)(p + q + r)(p + \overline{q} + \overline{r})(\overline{p} + \overline{q} + r)(\overline{p} + q + \overline{r})$$

$$K = (\overline{a} + \overline{b})(a + \overline{b})$$

La relación existente entre tablas de la verdad y las formas canónicas

Supongamos que tenemos una tabla de la verdad de una función lógica tal como la que sigue (W es la función y a, b y c las variables de dicha función):

a	b	c	W
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Para expresar W en forma canónica de **minitérminos** debemos fijarnos en aquellas filas de la tabla en las que W=1. Cada una de estas filas corresponderá a un término de la forma canónica. Dentro de cada término, si una variable tiene valor cero deberá negarse. Por contra, si tiene valor uno deberá aparecer sin negar. Entonces, la forma canónica de minitérminos correspondiente a la función W es la siguiente:

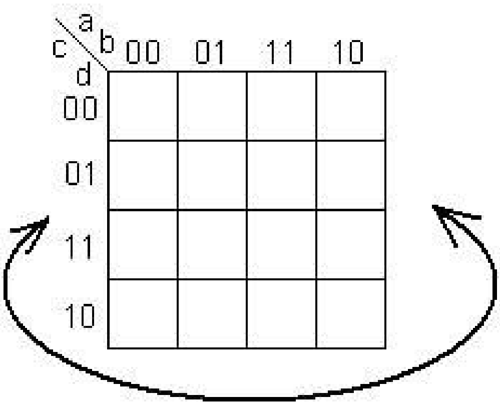
$$W = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,b\,c + a\,\overline{b}\,\overline{c}$$

Veamos ahora la forma canónica de **maxitérminos**. En este caso es necesario fijarse en las filas de la table en las que W=0. Igual que antes, cada una de estas filas corresponderá a un término de la forma canónica de maxitérminos. Ahora bien, dentro de cada término la variable que tenga valor cero debe aparecer sin negar y negada la que tenga valor uno. Entonces, W en forma canónica de maxitérminos sería la siguiente:

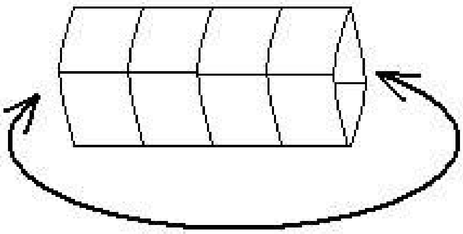
$$W = (a + \overline{b} + c)(\overline{a} + b + \overline{c})(\overline{a} + \overline{b} + c)(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})$$

La adyacencia gráfica y la adyacencia algebraica

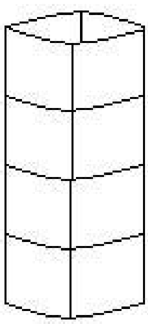
Dos celdas son adyacentes gráficamente si están una junto a otra en el mapa de Karnaugh, teniendo en cuenta que nunca deben considerarse las diagonales. Por otro lado, dos celdas de un mapa de Karnaugh son adyacentes algebraicamente si en el conjunto formado por los bits de sus coordenadas x e y sólo hay un dígito diferente, no importando la posición en la que se encuentre dicho dígito.

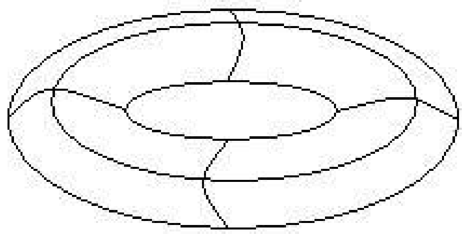


Primero doblar formando un cilindro



Segundo doblar formando un toroide (donut)





Simplificación gráfica de Karnaugh

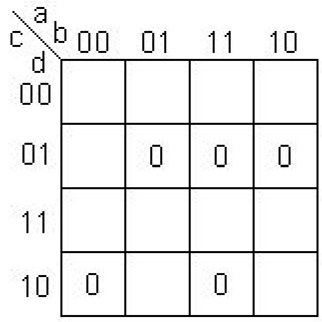
En la tabla de verdad que se presenta a continuación se han diferenciado las **funciones de salida** de las **variables de entrada** empleando mayúsculas (para las funciones) y minúsculas (para las variables).

a	b	c	d	F	G	H
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	1

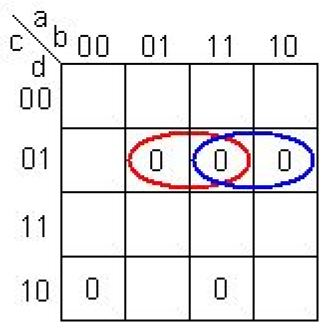
Existen cuatro variables de entrada y tres funciones de salida. Cada una de estas funciones corresponderá a una salida de nuestro circuito combinacional (es por eso que reciben ese nombre, funciones de salida). Cada una de las variables de entrada corresponderá a una entrada del circuito. Entonces, la tabla de la verdad indica cómo se comportará el circuito, desde el punto de vista de sus salidas, ante cualquier combinación lógica en sus entradas, por lo cual en la tabla deben aparecer todas las combinaciones lógicas posibles de entrada.

En el caso de la **función F** de la tabla estaríamos hablando de forma canónica de maxitérminos. Bien, pues simplifiquemos primeramente F en su forma canónica de maxitérminos. Para ello se debe utilizar un mapa de Karnaugh de igual número de variables que las que tenga la función a simplificar, en este caso será de cuatro variables.

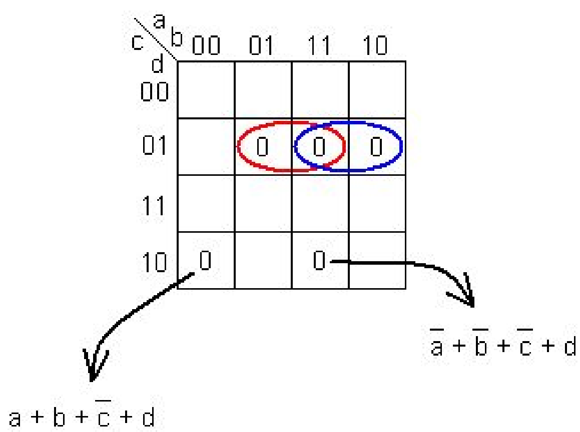
A continuación, colocaremos ceros en las casillas del mapa cuyas coordenadas corresponden con los valores de las variables que producen los ceros de F:



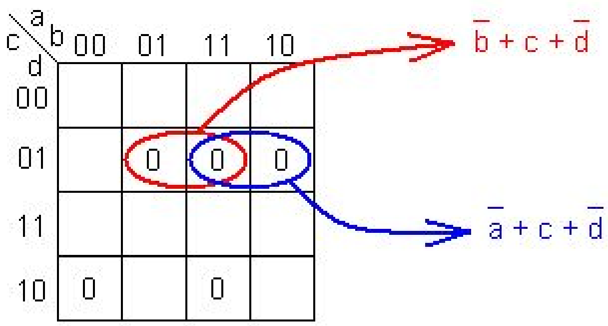
A continuación hay que intentar realizar agrupamientos de los ceros colocados en el mapa. Sólo se permiten agrupamientos de un número de ceros que sea una potencia de dos (2, 4, 8, 16 , etc.) y nunca en diagonal. Además, los agrupamientos que se hagan hay que tratar que sean lo mayor posible. Los agrupamientos que pueden realizarse en el mapa de más arriba son los siguientes:



La simplificación de la función se producirá en los agrupamientos. Así, ninguno de los dos ceros de la línea inferior no se han podido agrupar. Eso hará que cada uno de ellos de lugar a un maxitérmino de la siguiente forma:



O sea, la variable que tenga valor cero aparece en el maxitérmino de forma directa y la que tenga el valor uno aparece de forma negada. Esto respecto a los términos que no se simplifican. Respecto a los que sí se simplifican lo hacen de la siguiente forma

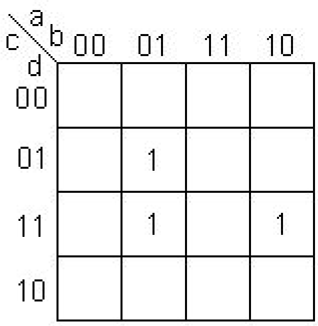


Como puede verse, se sigue la misma regla que en los términos no simplificados en cuanto a la negación o no de una variable, pero además, cada agrupamiento (y no cada casilla) da lugar a un término en el que la variable que cambia de valor en las casillas del agrupamiento desaparece del término directamente, o sea, no se incluye en él.

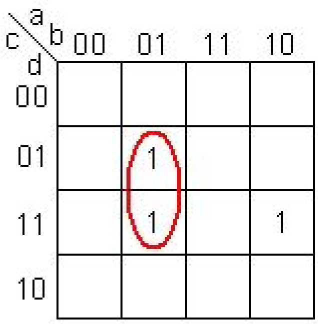
La función F simplificada tendrá el siguiente aspecto:

$$F = (\overline{b}+c+\overline{d})(\overline{a}+c+\overline{d})(a+b+\overline{c}+d)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+d)$$

Pasemos a simplificar otra función de las de la tabla. Esta función tiene menor número de unos que de ceros. Por tanto, simplificamos por minitérminos. Además, como G tiene cuatro variables deberemos usar un mapa de Karnaugh de ese número de variables. Ahora se irán rellenando las casillas igual que en el caso anterior pero con unos en lugar de con ceros (es un convenio que permite que se sepa con un simple vistazo si se está trabajando con base en minitérminos o en maxitérminos):



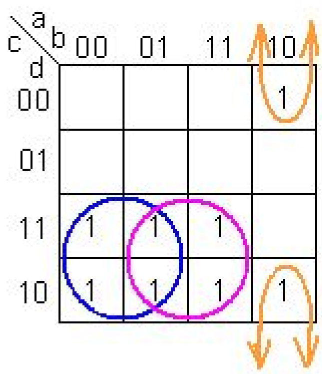
Agrupando según la regla que ya se ha visto tendremos:



En el agrupamiento cambia la variable c , en el uno no agrupado no se puede hacer simplificación alguna y por tanto su término contendrá todas las variables. Obteniendo como resultado:

$$G = \bar{a}\,b\,d + a\,\bar{b}\,c\,d$$

Solo resta simplificar la función H. Esta función tiene igual número de ceros que de unos, así que es indiferente que nos basemos en minitérminos o en maxitérminos. El mapa de Karnaugh con los agrupamientos ya hechos será el siguiente:



La función H simplificada según Karnaugh será:

$$H = a\,\bar{b}\,\bar{d} + \bar{a}\,c + b\,c\,\cdot$$