第四讲 运输问题

北京航空航天大学计算机学院

本讲目标

- 了解运输模型是一类特殊的线性规划问题；
- 掌握运输模型在满足供需约束条件下使得总的运输费用最小。

本讲内容

一、**运输模型的定义**

二、非传统运输问题

三、运输算法

运输模型的定义

- 一般的运输问题可用网络图表示。

图中有m个起点和n个终点，每个用节点表示。连接起点和终点的路线用弧表示。连接起点i到终点j的弧（i，j）带有两个信息：每单位运输费用为c_{ij}，运输量为x_{ij}。起点i的供应量a_i，终点j的需求量为b_j。这一模型的目标是确定未知变量x_{ij}，在满足供应和需求约束的情况下，使得运输总费用最小。

运输模型的定义

例：某汽车制造公司有3个生产厂，分别位于洛杉矶、底特律和新奥尔良，在丹佛和迈阿密有2个主要分销中心。这3个厂一月份的生产能力分别为1000，1500，1200辆汽车。2个分销中心一月份的需求分别为2300和1400辆汽车。生产厂与分销中心之间的距离里程如下表所示。

	丹佛	迈阿密
洛杉矶	1000	2690
底特律	1250	1350
新奥尔良	1275	850

运输模型的定义

负责运送这些汽车的卡车运输公司按照每辆汽车每公里8美分收取运费，每辆汽车不同路线上的费用如下表所示（单位：美元）。

	丹佛	迈阿密
洛杉矶	80	215
底特律	100	108
新奥尔良	102	68

运输模型的定义

本问题的线性规划模型为：

$$\min \ z = 80x_{11}+215x_{12}+100x_{21}+108x_{22}+102x_{31}+68x_{32}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} = 1000$$
$$x_{21} + x_{22} = 1500$$
$$x_{31} + x_{32} = 1200$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2300$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1400$$

$$x_{ij} >= 0$$

运输模型的定义

这个线性规划模型可以运用单纯形方法求解。

$x_{11}=1000$； $x_{12}=0$；

$x_{21}=1300$； $x_{22}=200$；

$x_{31}=0$； $x_{32}=1200$；

（最优解图）

然而由于运输问题的特殊结构，采用运输表的方法来求解此问题更为方便。

运输模型的定义

销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	供应量
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{12}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$					$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mn} x_{mn}	a_m
需求量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

运输模型的定义

- 运输模型的平衡

运输算法假定模型是平衡的，即总需求量等于总供应量。如果模型不是平衡的，可以通过增加一个虚设起点或一个虚设终点以使得模型达到平衡。

运输模型的定义

例：假设底特律工厂的生产能力为1300辆汽车（而不是1500辆汽车）。总供应量（=3500辆汽车）小于总需求（=3700辆汽车），这意味着丹佛和迈阿密的部分需求将得不到满足。

由于需求量大于供应量，需增加一个生产能力为200辆汽车的虚设起点来平衡运输模型。因为这样的工厂并不存在，单位运输费用从虚设起点到终点的运输费为0。（最优运输模型）

运输模型的定义

例：为了说明供应量大于需求量的情况，假设丹佛的需求只有1900辆汽车。在这种情况下，需要增加一个虚设分销中心来“接收”多余的汽车，同样地，从工厂到该虚设终点的运输费用为0。（最优运输模型）

本讲内容

一、运输模型的定义

二、非传统运输问题

三、运输算法

非传统运输问题

- 运输模型的应用并不仅限于在不同起点和终点之间运送货物，还广泛存在于工业生产过程中。

非传统运输问题

例：某公司生产专业徒步旅行者使用的徒步套件。产品需求通常出现在每年的1至4月，该公司估计这4个月的需求量分别为100，200，180，300个。由于公司雇佣兼职人员生产徒步套件，因此每个月的生产能力都不一样。据估计，该公司从3月到6月能够生产50，180，280，270个。因为不同月份的生产能力和需求不匹配，当前月份的需求可能通过以下3种方法来满足：

非传统运输问题

（1）当月生产；

（2）以前某个月剩余的产品；

（3）以后某个月多余的产品（延期交货）。

在第1种情况下，套件的生产费用为每个40元，第2种情况下每个套件每月的储存费用为0.5元，第3种情况下每个套件每月的延期交货惩罚费为2元。该公司希望确定这4个月期间的最优生产计划。

非传统运输问题

- 通过找到生产—库存问题与运输模型要素之间的对应关系，可以把这个问题建立为一个运输问题。

生产—库存
(1)生产周期i
(2)需求周期j
(3)生产周期i的生产能力
(4)周期j的需求量
(5)周期i为周期j生产的单位费用（生产+库存+惩罚）

运输
(1)起点i
(2)终点j
(3)起点i的供应量
(4)终点j的需求量
(5)从起点i到终点j的单位运输费用

非传统运输问题

- 从周期i到周期j的单位“运输”费用可计算为：

$$c_{ij}=\begin{cases}\text{周期i的生产费用，} & i=j\\ \text{周期i的生产费用+从i到j的库存费用，} & i<j\\ \text{周期i的生产费用+从i到j的惩罚费用，} & i>j\end{cases}$$

非传统运输问题

$$c_{11} = 40$$

$$c_{24} = 40+(0.5+0.5) = 41$$

$$c_{41} = 40+(2+2+2) = 46$$

求该问题的运输模型表及最优解图

本讲内容

一、运输模型的定义

二、非传统运输问题

三、运输算法

运输算法

- 运输算法完全采用单纯形算法的步骤，但运输算法没有采用常规单纯形表，而是根据运输模型的特殊结构来构造一个更方便的计算方法。

运输算法

- 运输算法

第1步　确定一个初始的基本可行解，转到第2步；

第2步　利用单纯形算法的最优性条件，在所有非基变量中确定进基变量。如果最优条件满足，停止。否则，转到第3步；

第3步　利用单纯形算法的可行性条件，在所有现有的基变量中确定离基变量，寻求新的基本解，返回到第2步。

运输算法

例：某运输公司从3个仓库把粮食运输到4个加工厂。供应量（按车数）、需求量（按车数），以及不同路线每辆运粮车的单位运输费用如下表中的运输模型所示。单位运输费用为c_{ij}（表示在每个方格的右上方），以1000元为单位。本模型寻求从仓库i到加工厂j之间的最小费用运输计划量x_{ij}。

运输算法

	加工厂 1	2	3	4	供应量
仓库 1	$\boxed{10}$ x_{11}	$\boxed{2}$ x_{12}	$\boxed{20}$ x_{13}	$\boxed{11}$ x_{14}	15
2	$\boxed{12}$ x_{21}	$\boxed{7}$ x_{22}	$\boxed{9}$ x_{23}	$\boxed{20}$ x_{24}	25
3	$\boxed{4}$ x_{31}	$\boxed{14}$ x_{32}	$\boxed{16}$ x_{33}	$\boxed{18}$ x_{34}	10
需求量	5	15	15	15	

运输算法

➢ 初始解的确定

一个具有m个起点和n个终点的一般运输模型包含(m+n)个约束方程，每一个起点和终点都对应一个约束方程。然而，因为运输模型总是平衡的（总供应量=总需求量），这些约束方程中有一个方程是冗余的。因此，运输模型有(m+n-1)个独立的约束方程，即初始基本解由(m+n-1)个基变量组成。

运输算法

由于运输问题的特殊结构，运用下面3种方法可以保证找到一个初始基本解：

- 西北角法；
- 最小费用法；
- Vogel（沃格尔）近似法。

运输算法

- 西北角法

这个方法从表中西北角的元素开始。

第1步　在表中尽量选择一个最大的元素，使其相应的行和列都减去相应的选定元素的值。

第2步　删去零供应的行或零需求的列，即表示不可能分配给那一行或那一列。如果行和列都为零，那么仅删除一个。

第3步　如果恰好剩下一行或一列没有被删除，停止。否则，如果列被删除则转移到右边，如果行被删除则转移到下面，转到第1步。

运输算法

西北角法的初始基本解为

$x_{11}=5$； $x_{12}=10$；

$x_{22}=5$； $x_{23}=15$；

$x_{24}=5$； $x_{34}=10$；

相应的费用为

$Z=5*10+10*2+5*7+15*9+5*20+10*18$

$=520$

运输算法

- 最小费用法

最小费用法是通过寻找最小费用的路径来找到一个更好的初始解。这种方法尽量找到一个最小单位费用的单元。然后，删除满足条件的行或列，调整相应的供应和需求量。

如果行和列都同时满足，同西北角法一样，仅需要删除一个。重复检查没有被删去的行或列，直到只剩下一行或一列为止。

运输算法

- 用最小费用法，按照下列步骤求解：

(1)在运输表中，单元(1,2)有最小单元费用。通过(1,2) 最多能运输15辆运粮车，这样刚好同时满足第1行和第2列，删除第2列，并把第1行的供应调整为0。

(2)单元(3,1)有最小未删除的单元费用，选择5，因为第1列满足，所以删除第1列，调整第3行的需求为10-5=5 。

(3)继续采用同样的方法，分配15到单元(2,3)，0到单元(1,4)，5到单元(3,4)，以及10到单元(2,4)。

运输算法

最小费用法的初始基本解为

$x_{12}=15$； $x_{14}=0$；

$x_{23}=15$； $x_{24}=10$；

$x_{31}=5$； $x_{34}=5$；

相应的费用为

$Z=15*2+0*11+15*9+10*20+5*4+5*18$

$=475$

运输算法

- Vogel（沃格尔）近似法：

第1步　对每一行（列）确定惩罚量：在每一行（列）中找到一个最小的单位费用单元，再在同一行（列）中找到一个次小的单位费用单元，惩罚量即为次小的单位费用减去最小的单位费用。

第2步　找出惩罚量最大的行或列。尽量分配给最小单位费用的单元最多的供应量。调整供应和需求，删去已满足的行或列。如果行和列同时满足，删除二者之一。

运输算法

- Vogel（沃格尔）近似法：

第三步

（a）如果仅由一个未被删去的零供应的行或零需求的列，则停止。

（b）如果具有一个未被删去的大于零供应（需求）的行（列），那么采用最小费用方法确定行（列）的基变量。停止。

（c）如果所有的未被删去的行和列都有零供应和零需求，那么采用最小费用法确定零基变量。停止。

（d）否则，转到第1步。

运输算法

Vogel法的初始基本解为

$x_{12}=15$； $x_{14}=0$；

$x_{23}=15$； $x_{24}=10$；

$x_{31}=5$； $x_{34}=5$；

相应的费用为

$Z=15*2+0*11+15*9+10*20+5*4+5*18$

$=475$

运输算法

➢ 运输算法的迭代计算

确定初始解后，采用下面的算法来确定最优解：。

第1步　采用单纯形法的最优性条件，来确定能够改进解的作为当前非基变量的进基变量。如果最优性条件满足，停止。否则，转到第2步。

第2步　采用单纯形可行性条件确定离基变量。改变基变量，返回到第1步。

运输算法

利用西北角法得到的初始解作为起点。

从现有的非基变量（不作为初始基本解的一部分）中通过用乘子法计算z行的非基系数，来求出进基变量。

在乘子法中，用u_i和v_j来表示运输表中第i行和第j列的乘子。对每一个现有的基变量x_{ij}，满足下面的方程：

$$u_i+v_j=c_{ij}$$ 对于每一个基变量

运输算法

- 使用u_i和v_j，通过对每个非基变量计算$u_i+v_j-c_{ij}$的值。

- 形成单纯形表的Z行。

- 运输模型寻求费用最小化，进基变量时具有z行中最正系数的变量。

运输算法

- 实际直接在运输表上进行计算，确定每行和每列的乘子后，计算非基变量对应的值，写于右下角。

- 选择x_{31}为进基变量，意味着运输将采用这个路径，因为它降低了总的运输费用。如果路径（3，1）运输θ个单位，那么θ的最大值基于以下两个条件确定：

(1) 仍然满足供应上限和需求约束；

(2) 通过所有路径的运输量仍然非负。

运输算法

- 这两个条件决定了θ的最大值和离基变量。

首先建立一个起点和终点都在进基变量单元的闭圈，这个闭圈仅由连接在一起的水平线段和垂直线段组成，除进基变量单元以外，闭圈的每一个角都与一个基变量重合。

分配θ给进基变量单元，在供应和需求约束方面仍需要满足条件，且变量的新值为非负。

运输算法

最优解为 $x_{12}=5$； $x_{14}=10$；

$x_{22}=10$； $x_{23}=15$；

$x_{31}=5$； $x_{34}=5$；

从仓库	到工厂	运输车数
1	2	5
1	4	10
2	2	10
2	3	15
3	1	5
3	4	5
最优费用 435		

本节作业

➢ 运输模型

￥10	￥4	￥2	8
￥2	￥3	￥4	6
￥2	￥3	￥1	5
7	6	6	

① 求初始解

② 求最优解的迭代步骤

谢 谢 ！