第六讲 整数规划

北京航空航天大学计算机学院

本讲目标

- 了解纯整数规划和混合整数规划的区别；
- 掌握求解整数规划算法的基本步骤；
- 掌握分支限界算法。

整数规划

- 整数规划(Integer Linear Program)是要求某些或者全部的变量只取整数值（或离散值）的线性规划。

- 当所有变量都是整数型时称为纯整数规划；否则，如果一个问题中既有连续的变量又有整数的变量，则称混合整数规划。

整数规划

- 整数规划的两种经典算法：
  - 分支界限法；
  - 割平面法；

整数规划

整数线性规划问题

$$\max\left(\text{or}\ \min\right)\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \left(\ \text{or}\ =\ \text{or}\ \ge\right) b_i,\quad i = 1,2,\cdots,m$$

$$x_j \ge 0,\quad j = 1,2,\cdots,n$$

纯整数线性规划：所有变量是整数变量

混合整数线性规划：同时包含整数和非整数变量

0-1型整数线性规划：所有变量只能等于**0**或**1**

本讲内容

一、实例应用

二、分支限界法

实例应用

- 整数规划的实例应用一般分为两类：直接的和转化的。
- 在直接的应用类中，变量自然为整数型，并可以假定是二元的（0或1）或者一般离散型的。
- 在转化的应用类中，原始问题可能不涉及整数型变量，但可通过使用辅助整数型变量将问题转化成容易处理的。

实例应用

- 资本预算问题---研究在项目中决定是否需要进行某些投资。既要考虑投资在整个项目中带来的收益，又要考虑总预算的额度限制。

实例应用

- 例1：在一个3年的规划周期内，有5个项目可供选择。下面的表格给出了每一个项目可以带来的期望收益以及相应每年的支出（单位为百万元）

项目	每年支出			收益
	1	2	3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
可用资金	25	25	25	

在这个3年规划周期应该选择那些项目？

实例应用

问题可以转化成一个对于每个项目的选择为“是–否”的决策，引入二元变量x_j

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{如果选择项目j} \\ 0, & \text{如果不选择项目j} \end{cases}$$

实例应用

整数规划模型为

$$\max \ z = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5$$

$s.t.$

$$5x_1+4x_2+3x_3+7x_4+8x_5<=25$$

$$x_1+7x_2+9x_3+4x_4+6x_5<=25$$

$$8x_1+10x_2+2x_3+x_4+10x_5<=25$$

$$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,=(0,1)$$

实例应用

最优整数解为

$$x_1=x_2=x_3=x_4=1$$

$$x_5=0$$

$$z=95$$

实例应用

如果用连续的线性规划求解得

$x_1=0.5789$

$x_2=x_3=x_4=1$

$x_5=0.7368$

$z=108.68$

在整数规划问题中，变量取小数是不合理的

实例应用

例2： 有资金 B，可以投资 n 个项目，

投资额和收益分别为 a_j 和 c_j，要考虑三个条件：

1）若选择项目1就必须选择项目2；2）项目3和项目4至少选一个；3）项目5、6、7中选两个，

如何投资使总效益最大？

变量：$x_j = 1$，投资项目 j，$x_j = 0$，不投项目 j

条件1） $x_2 \geq x_1$

条件2） $x_3 + x_4 \geq 1$

条件3） $x_5 + x_6 + x_7 = 2$

实例应用

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$ 总投资效益

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le B$$ 投资总额约束

$$x_2 \ge x_1$$ 条件1）

$$x_3 + x_4 \ge 1$$ 条件2）

$$x_5 + x_6 + x_7 = 2$$ 条件3）

$$x_j \in \{0, 1\}, \ \forall 1 \le j \le n$$

实例应用

整数线性规划的松弛问题

去除整数规划的整数约束后的问题称为其松弛问题

如前面的一般性整数规划问题的松弛问题为

$$\max\ (\text{or } \min)\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (\text{ or } = \text{ or } \ge) b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

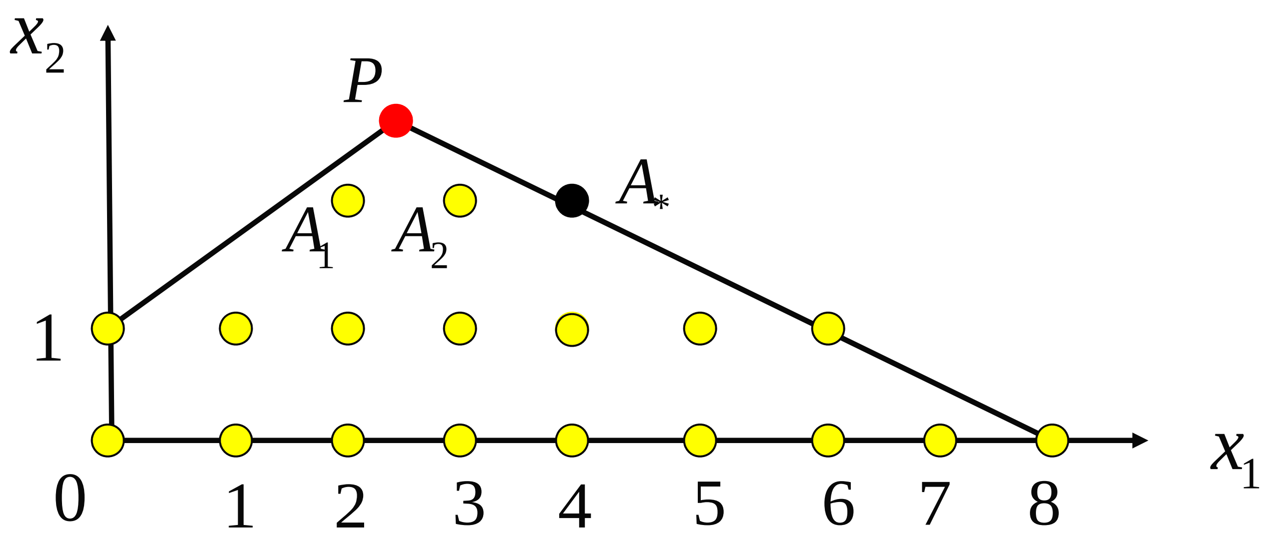
$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

一般情况，原问题的解并不一定是其松弛问题的最优解附近的整数解

实例应用

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.}\ & -2x_1 + 3x_2 \le 3 \\
& x_1 + 2x_2 \le 8 \\
& x_1, x_2\ \text{非负且取整数值}
\end{aligned}
$$

实例应用



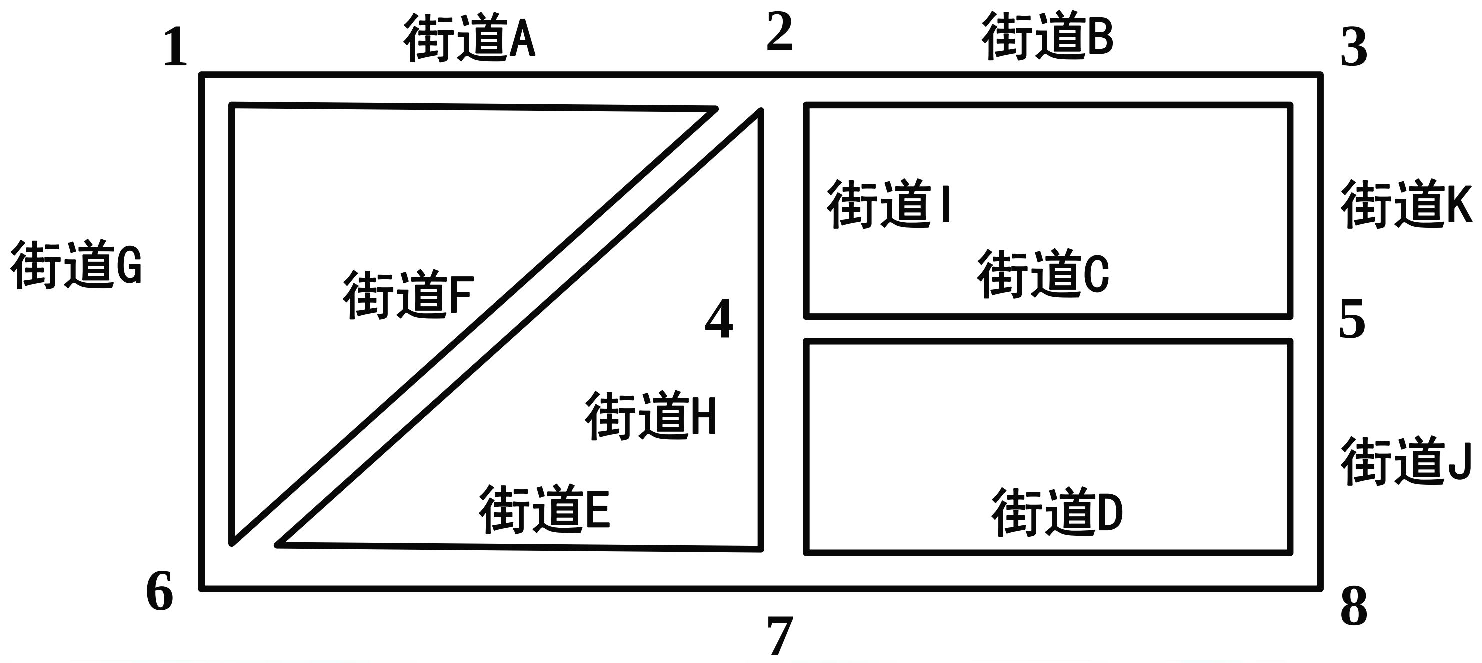
P 点是松弛问题最优解，距其最近的整数可行解是 A_1, A_2 ，但最优解是 A_*

实例应用

- 集合覆盖问题---此类问题涉及许多服务装置为一些设备提供互相重叠的服务，目标是确定安装数目最少的装置来覆盖每一个设备的服务需求。

实例应用

- 例3：为提高校园的安全性，某大学的保安部门决定在校园内的几个位置安装紧急报警电话。保安部门希望在校园的每条主要街道上都至少有一部电话的情况下，使得安装的总电话数目最少。



实例应用

- 将电话安装在街道的交叉口是比较合理的，可至少为两套街道提供服务。

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{如果位置j安装电话} \\ 0, & \text{如果位置j不安装电话} \end{cases}$$

- 问题是求每一条街道都至少安装一部电话。

实例应用

$$
\begin{aligned}
\min\ z = & x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8 \\
\text{s.t.}\quad & x_1+x_2 >= 1 \\
& x_2+x_3 >= 1 \\
& x_4+x_5 >= 1 \\
& x_7+x_8 >= 1 \\
& x_6+x_7 >= 1 \\
& x_2 + x_6 >= 1 \\
& x_1 + x_6 >= 1 \\
& x_4 + x_7 >= 1 \\
& x_2 + x_4 >= 1 \\
& x_5 + x_8 >= 1 \\
& x_3 + x_5 >= 1 \\
& x_j = (0,1)
\end{aligned}
$$

本讲内容

一、实例应用

二、分支限界法

分支限界法

- 求解整数线性规划的算法大都建立在求解大规模线性规划问题的算法基础上的：

第1步　首先对整数线性规划的可行解空间进行松弛，成为一个规则的线性规划模型。

第2步　求解这个线性规划模型，并得到连续最优解。

第3步　根据得到的连续最优解，通过增加一些特殊的约束逐步改变线性规划的可行解空间，最终得到一个满足整数要求的最优极点。

分支限界法

- 从前面的例题中可看出，分支限界法有一个非常大的缺点：

  给定多个可供选择的子问题时，如何确定下一个求解的子问题以及分支变量?

本节作业

- 针对例2，增加资本预算模型的约束：

（a）如果选择了项目1，那么一定要选择项目5;

（b）项目2和项目3相互排斥。

请写出该问题的整数线性规划模型。

谢谢 ！