第三讲 对偶理论与灵敏度分析

北京航空航天大学计算机学院

本讲目标

- 了解原始-对偶之间的关系；
- 掌握灵敏度分析方法。

本讲内容

一、灵敏度分析

二、对偶理论

灵敏度分析

- **灵敏度分析**主要研究在线性规划中，模型的参数（输入数据）能够在一定的限度范围内变化而不引起最优解的改变。

灵敏度分析

- 图形灵敏度分析
  - 右端项的变化
  - 目标系数的变化
- 代数灵敏度分析
  - 右端项的变化
  - 目标系数的变化

图形灵敏度分析

- 最优解对于资源的可利用性（约束的右端项）变化的灵敏度分析；
- 最优解对于单位利润或单位费用（目标函数的系数）变化的灵敏度分析。

图形灵敏度分析

例1：某公司在两台机器上生成两种产品。1个单位的产品1需要2小时机器1和1小时机器2；对于产品2，1个单位需要1小时机器1和3小时机器2。每个单位产品1和产品2的收益分别是30元和20元。每台机器总的日可加工时间是8小时。

图形灵敏度分析

令x_1和x_2分别表示产品1和产品2的日产量，则线性规划给出如下模型：

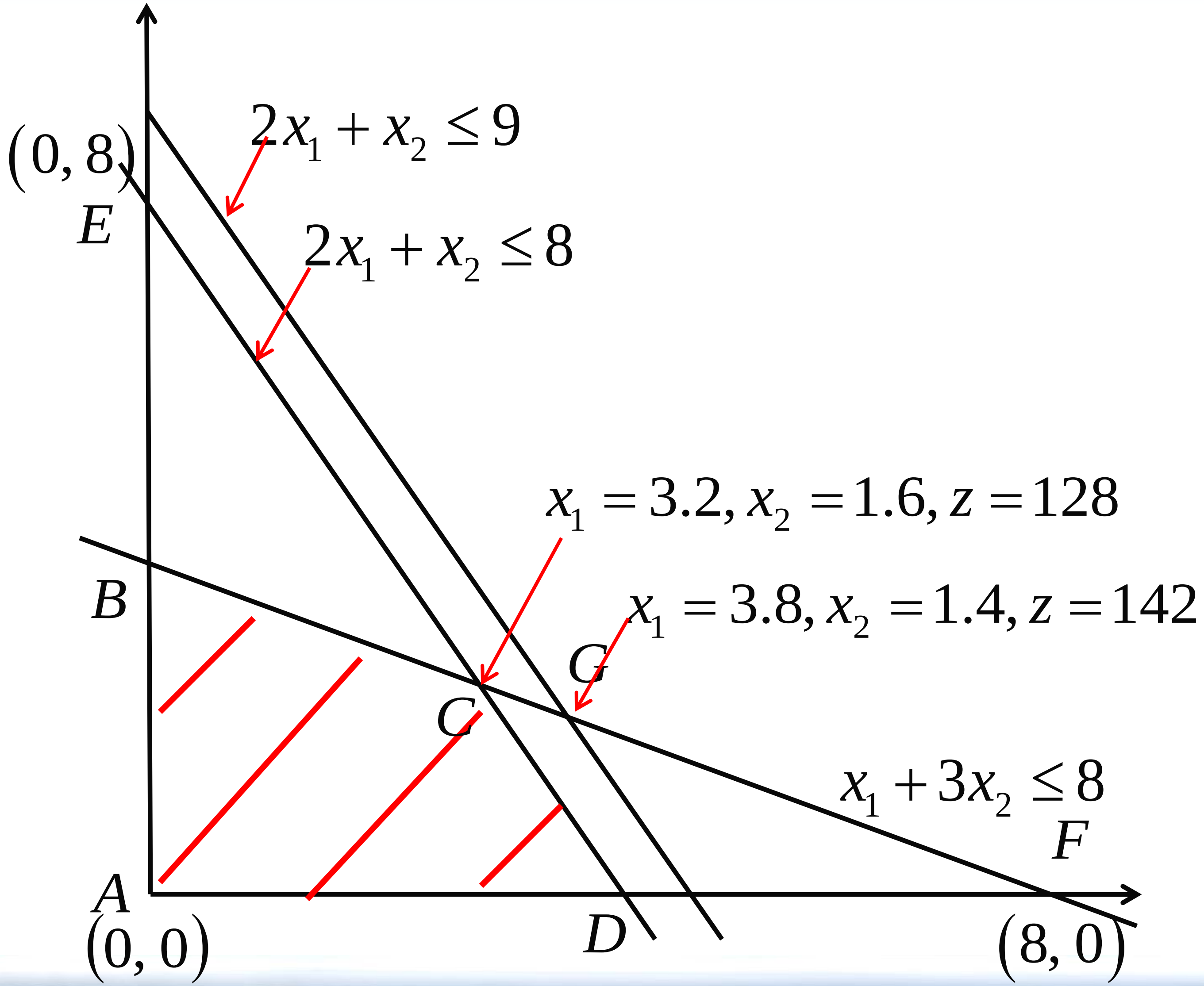
$$\max \quad z = 30x_1 + 20x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 <= 8$$

$$x_1 + 3x_2 <= 8$$

$$x_1 , x_2 >= 0$$

图形灵敏度分析



$2x_1 + x_2 \le 9$
$(0,8)$
E
$2x_1 + x_2 \le 8$
$x_1 = 3.2, x_2 = 1.6, z = 128$
B
$x_1 = 3.8, x_2 = 1.4, z = 142$
G
C
$x_1 + 3x_2 \le 8$
F
A
$(0, 0)$
D
$(8, 0)$

图形灵敏度分析

- 图形法解释了当机器1的工作能力发生改变时最优解的变化。
- 如果日工作能力从8小时增加到9小时，新的最优解将在点G出现。

$$\frac{z_G - z_C}{\text{工作能力的改变}} = \frac{142-128}{9-8} = 14\text{（元/小时）}$$

图形灵敏度分析

- 变化率提供了模型的输入（资源）和它的输出（总收益）的直接关系，表示成资源的单位价值，即资源可用性的单位变化引起最优目标函数值的变化。
- 机器1的能力增加（减少）1个单位将增加（减少）收益14元。
- 资源的单位价值是目标函数变化率的恰当描述，从技术的角度称为对偶价格。

图形灵敏度分析

- 针对机器1，每小时14元的对偶价格将在如下区域保持不变：

  2.67小时 <= 机器1的工作能力 <= 16小时

  - 可行性区域

- 类似地计算机器2的情况

图形灵敏度分析

- Questions:

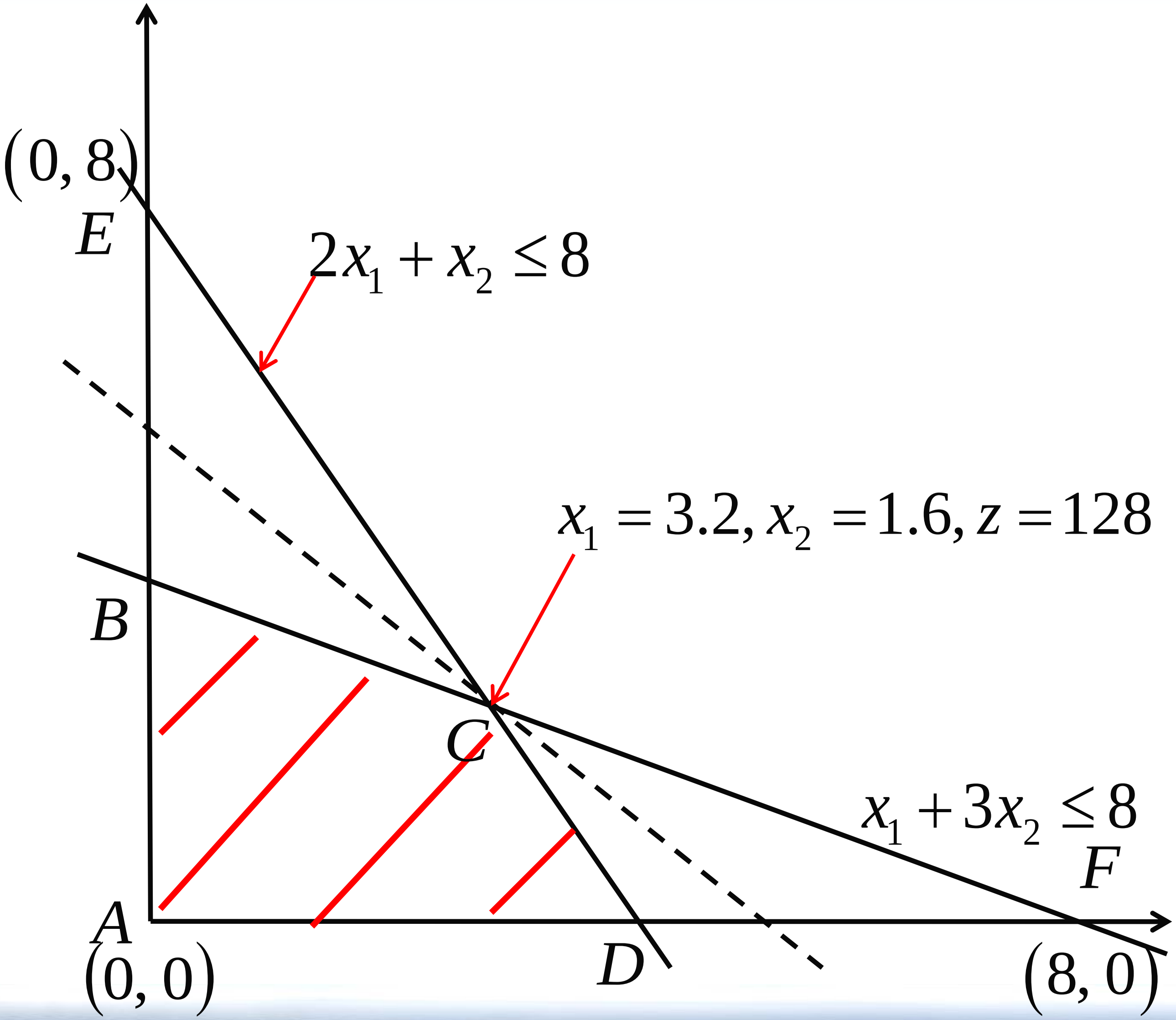
  （1）如果能增加两种机器的能力，哪种机器应具有更高的优先权？

  （2）根据某建议，要以10元/小时的额外费用增加机器1和机器2的能力，这项建议可取吗？

  （3）如果机器1的工作能力从现有的8小时增加到13小时，这项增加将如何影响最优收益？

  （4）假设机器1的工作能力可增加到20小时，这项增加将如何影响最优收益？

图形灵敏度分析



图形灵敏度分析

- 目标函数的系数变化将改变z的斜率。
- 只要目标函数位于直线BF和直线DE之间，最优点将保持在点C，这2个约束确定了最优点。这意味着存在一个关于目标函数系数的区域，在这个区域内最优解在C处保持不变。

图形灵敏度分析

- 目标函数的一般形式：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2$$

  - 只要 $z = c_1x_1 + c_2x_2$ 介于直线 $x_1 + 3x_2 = 8$ 和直线 $2x_1 + x_2 = 8$ 之间，最优解始终保持在点C。

$$\frac{1}{3} \le \frac{c_1}{c_2} \le \frac{2}{1}$$

图形灵敏度分析

❖Questions:

（1）假设产品1和产品2的单位收入分别增加到35元和25元，当前的最优解保持不变吗？

（2）假定产品2的单位收入固定为20元，请问使产品1的单位收入保持最优值不变的区域？

$$6.67 \le c_1 \le 40$$

这个区域称为C_1的最优性区域

代数灵敏度分析

例2：某公司通过3种操作装配3种玩具—火车、卡车和汽车。此3种操作的可用时间限制分别是430、460和420分钟，对应玩具的单位收入分别为3、2、5元。每辆玩具火车在3种操作的装配时间分别为1分钟、3分钟和1分钟。每辆玩具卡车和汽车分别相应时间为(2,0,4)和(1,2,0)分钟。

代数灵敏度分析

令x_1、x_2和x_3分别表示每天装配火车、卡车和汽车的总数量，则线性规划给出如下模型：

$$\max \quad z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 <= 430$$

$$3x_1 + 2x_3 <= 460$$

$$x_1 + 4x_2 <= 420$$

$$x_1, x_2, x_3 >= 0$$

代数灵敏度分析

- 最优表

基	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	解
z	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
x_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	20

代数灵敏度分析

- 对偶价格的确定

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 430 - x_4 \quad \text{（操作1）}$$

$$3x_1 + 2x_3 = 460 - x_5 \quad \text{（操作2）}$$

$$x_1 + 4x_2 = 420 - x_6 \quad \text{（操作3）}$$

在松弛变量上减少1分钟等价于在操作时间上增加1分钟。

代数灵敏度分析

- 从最优表的z方程中确定对偶价格

$$z + 4x_1 + x_4 + 2x_5 + 0x_6 = 1350$$

$$z = 1350 - 4x_1 + 1(-x_4) + 2\,(-x_5) \;+ 0(-x_6)$$

$= 1350 - 4x_1 + 1$*增加操作1的时间

$+ 2$*增加操作2 的时间

$+ 0$*增加操作3的时间

代数灵敏度分析

- 直接产生对偶价格

资源	松弛变量	松弛变量的最优z方程系数	对偶价格
操作1	x_4	1	1
操作2	x_5	2	2
操作3	x_6	0	0

代数灵敏度分析

- 可行性区域的确定

令D_1、D_2和D_3分别分配给操作1、操作2和操作3的每天生成时间的改变量：

$$\max \quad z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 <= 430 + D_1 \\ & 3x_1 + 2x_3 <= 460 + D_2 \\ & x_1 + 4x_2 <= 420 + D_3 \\ & x_1 , x_2 , x_3 >= 0 \end{aligned}$$

代数灵敏度分析

- 具体方法是用所修正的右端项重新计算最优单纯形表，然后获得保持解可行的条件，即最优表的右端项保持非负。以修正解列开始。

代数灵敏度分析

- 最优表提供如下最优解：

$$z = 1350 + D_1 + 2D_2$$

$$x_2 = 100 + 1/2D_1 - 1/4D_2 \quad >=0$$

$$x_3 = 230 + 1/2D_2 \quad >=0$$

$$x_6 = 20 - 2D_1 + D_2 + D_3 \quad >=0$$

代数灵敏度分析

- 可行性区域分析：

  (1)假定操作1、操作2和操作3的可利用生产时间分别为480分钟、440分钟和410分钟；

  (2)假定资源的变化使得D_1=-30；D_2=-12；D_3=10；

- 每次仅改变一种资源，获得可行性区域；

代数灵敏度分析

- 对偶价格和可行性区域如下：

资源	对偶价格	可行性区域	资源数量		
			最小值	当前值	最大值
操作1	1	$-200<=D_1<=10$	230	430	440
操作2	2	$-20<=D_2<=400$	440	460	860
操作3	0	$-20<=D_3$	400	420	-

代数灵敏度分析

- 对偶价格保持有效：只要约束右端项的改变量在同步改变时满足所有可行性条件，或相应的某个右端项在单个发生改变时处于可行性区域内。

- 如：改变量$D_1=30$；$D_2=-12$；$D_3=100$, 仍然保持解可行。

代数灵敏度分析

➢ 最优性区域的确定

确定使最优解保持不变的条件。

令d_1、d_2和d_3分别表示火车、卡车和汽车在单位收入上的改变量：

$$\max \quad z = (3+d_1)x_1 + (2+d_2)x_2 + (5+d_3)x_3$$

代数灵敏度分析

◆处理一般情况：目标函数所有的系数同步改变

基	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	解
z	$-3-d_1$	$-2-d_2$	$-5-d_3$	0	0	0	0

✓ 使用相同的进基变量和离基变量序列来产生单纯形表

代数灵敏度分析

- ✓ 从最优表可得，除了z方程系数发生改变外，新的最优表与原始最优表完全相同。

- ✓ 这意味着目标函数系数的改变可以只影响问题的最优性条件。

代数灵敏度分析

- ✓ 一种简便z方程系数的计算方法：在最优表上增加一个新的顶行和新的最左边列。对于松弛变量d=0

- ✓ 针对极大化问题，只要所有的非基变量z方程系数保持非负，当前解就保持最优。针对极小化问题，条件刚好相反。

代数灵敏度分析

- ✓ 一次仅有一个变量发生改变，而不是同步改变，需分情况讨论。

- ✓ 分析多个变量同步改变的情况。

代数灵敏度分析

- 最优性区域分析：

(1)假定目标函数变为：

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2 + 6x_3$$

(2)改变量d_j一次仅有一个发生改变：

$$\max \quad z = (3+d_1)x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\max \quad z = 3x_1 + (2+d_2)x_2 + 5x_3$$

$$\max \quad z = 3x_1 + 2x_2 + (5+d_3)x_3$$

代数灵敏度分析

✓ 只要目标函数系数的改变量满足所有的最优性条件，那么变量的最优值保持不变。

本讲内容

一、灵敏度分析

二、对偶理论

对偶理论

- 对偶(dual)问题是由原始线性规划模型直接按系统化定义的一种线性规划。这两个问题有着如此紧密的关系，以至于一个问题的最优解自动地提供另一个问题的最优解。

对偶理论

- 对偶问题的定义要求将原始问题表示成等式约束形式（所有约束是等式方程，有非负的右端项，并且所有变量非负）。这与初始单纯形表的形式是一致的。因此，从原始问题最优解得到的任何结果都可以直接用到相应的对偶问题上。

对偶理论

- 为了说明如何构造对偶问题，定义等式形式的原始问题如下：

$$\max(\text{或}\min)\ \ z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, i=1,2,\ldots,m$$

$$x_j\ge 0, i=1,2,\ldots,n$$

- 变量x包含任何剩余变量、松弛变量和人工变量。

对偶理论

- 如何从原始问题构造出对偶问题：
  - 对偶变量是针对原始问题每个（约束）方程定义的。
  - 对偶约束是针对原始问题的每个变量定义的。
  - 原始问题变量约束（列）的系数定义对偶约束左端项的系数，它的目标系数定义了右端项。
  - 对偶目标系数等于原始问题约束方程的右端项。

对偶理论

- 下表概况了确定最优化（最大化或最小化）、约束类型（<=, >=或=）以及对偶变量符号的规则。

原始问题的目标	对偶问题		
	目标	约束类型	变量符号
极大化	极小化	>=	无限制
极小化	极大化	<=	无限制

- 示例说明转换规则。

对偶理论

- 原始问题

$$\max \quad z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.} \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 <= 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 >= 0$$

对偶理论

- 等式方程形式的原始问题
- 对偶变量

$$\max \quad z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \qquad y_1$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \qquad y_2$$

$$x_1 , x_2 , x_3 >= 0$$

对偶理论

- 对偶问题

$$\min \quad w = 10y_1 + 8y_2$$

s.t.

$$y_1 + 2x_2 >= 5$$

$$2y_1 - y_2 >= 12$$

$$y_1 + 3x_2 >= 4$$

$$y_1 \qquad >= 0$$

y_1 , y_2 无限制

对偶理论

- 单纯形表的计算只用到3种初等矩阵运算：（行向量）*（矩阵），（矩阵）*（列向量），以及（标量）*（矩阵）。

  - 维数为(m*n)的矩阵A；
  - 维数为m的行向量V；
  - 维数为n的列向量P。

对偶理论

- 原始问题与对偶问题的解有着如此紧密的关系，以至于任何一个问题的最优解直接产生（几乎不用再计算）另一个问题的最优解。

- 在线性规划模型中，变量的个数比约束的个数小得多时，可通过求解对偶问题节省计算量，因为从对偶问题的解可以自动地求出原始问题的解。

对偶理论

- 对偶问题的对偶是原始问题本身。对偶问题的解还可以用来自动生成原始问题的最优解。

- 对偶变量y_i的最优值=初始变量x_i的最优原始z系数+ x_i的原始目标系数。

- 对偶变量的最优值=最优原始基变量的原目标系数的行向量*最优原始逆矩阵。

本节作业

- 原始问题

$$\min \quad z = 7x_1 + 9x_2 + 10x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_3 <= 8 \\ 2x_2 - 8x_3 >= 1 \\ x_1, x_2, x_3 >= 0 \end{cases}$$

- 求对偶问题

谢 谢 ！