第五讲 目标规划

北京航空航天大学计算机学院

本讲目标

- 了解目标规划的基本模型；
- 了解解决目标规划的权和法。

目标规划

- 前面介绍的线性规划模型是基于优化单个目标函数的模型。
- 有些情况下，往往要求优化多个目标，甚至其中的某些目标是相互冲突的。
- 找到单个解使它同时能够优化两个项目冲突的目标是不可能的。

目标规划

- 目标规划所要做的就是：根据各个目标的相对重要程度，试图寻找一个折中的解。

本讲内容

一、建立目标规划模型

二、权和法

建立目标规划模型

- 例：某个小城市拥有市民大约2万人，市政府需要制定每年的税收政策。每年该市工业总产值的税收基数为55000万，食品和饮食业的税收基数为3500万，一般工商业的税收基数是5500万。当地每年的汽油消耗为750万升。市税务局希望根据以下4个主要目标确定相应的税率：

建立目标规划模型

1. 总税款至少要达到1600万才能满足市财政的基本要求；
2. 食品和饮食的税收不能超过总税款的10%；
3. 一般工商税不能超过总税款的20%；
4. 汽油税不能超过每升2分。

建立目标规划模型

- 用变量x_p, x_f, x_s分别表示工业的税率、食品和饮食的税率，以及一般工商业的税率，用变量x_g表示汽油税，表示每升征收分。（单位为100万元）

$$550x_p + 35x_f + 55x_s + 0.075x_g >= 16$$

$$35x_f <= 0.1(550x_p + 35x_f + 55x_s + 0.075x_g)$$

$$55x_s <= 0.2(550x_p + 35x_f + 55x_s + 0.075x_g)$$

$$x_g <= 2$$

建立目标规划模型

- 模型中的每一个不等式代表市税务局所希望满足的一个目标，对于这些一些项目可能矛盾的目标，也许最好的办法就是寻找一个折中的解。

- 寻找目标规划的折中解最常用的方法就是将一个不等式转化成一个弹性目标。如果需要的话，对应的这个弹性目标也可以背离相应的约束。

建立目标规划模型

- 弹性目标可以用下面的式子表示：

$$550x_p+35x_f+55x_s+0.075x_g+S_1^- - S_1^+ = 16$$

$$55x_p-31.5x_f+5.5x_s+0.0075x_g+S_2^- - S_2^+ = 0$$

$$110x_p+7x_f-44x_s+0.015x_g+S_3^- - S_3^+ = 0$$

$$x_g+S_4^- - S_4^+ = 2$$

建立目标规划模型

- 由于非负变量 s_i^-和s_i^+ 代表i个约束中低于和高于右端项的一种偏离程度，所以被称为偏离变量。

- 根据偏离变量的定义可以知道，s_i^-和s_i^+是相关的，所以它们不能同时作为基变量。这意味着在单纯形法的任何一次迭代中每一对偏离变量最多只能有一个被赋值为正数。

建立目标规划模型

- 对于原来的第i个形式为<=的不等式，当对应它的S_i^->0时，则第i个目标是满足的；当S_i^+>0时，那么第i个目标是不满足的。

- 按照S_i^-和S_i^+的定义，可根据需要满足或背离第i个目标。这就是所谓的在寻找折中解时目标规划的弹性类型。一个好的折中解就是使得每个目标的背离量尽可能的小。

建立目标规划模型

- 该模型中前3个约束都是“>=”形式的不等式，第4个约束是“<=”形式的不等式，偏离变量S_1^-,S_2^-,S_3^-,S_4^+代表了对应各自目标的偏离量。一个折中解就是尽可能满足一下4个目标：

$$\min\ G_1=S_1^-$$
$$\min\ G_2=S_2^-$$
$$\min\ G_3=S_3^-$$
$$\min\ G_4=S_4^+$$

本讲内容

一、建立目标规划模型

二、权和法

权和法

- 求解目标规划的算法总体思路都是用单个目标函数来代替多个目标。
- 权和法：将问题中代表每个目标的函数进行加权求和以得到单个的目标函数。

权和法

- 假定一个目标规划模型有n个目标，并且第i个目标的形式为：

$$\min\ G_i,\ i=1,\ldots,n$$

- 权和法中定义的组合目标函数可以表示为：

$$\min\ z=w_1G_1+\ldots+w_nG_n$$

其中参数w_i是正的权重，反映了决策者对每个目标的相对重要性的一种量化。

权和法

- 例：某广告代理公司拥有10个雇员，它收到了一份发布一种新产品的合约。代理商可以通过广播和电视两种途径来发布广告。下面的表格给出了这两种不同的发布广告的途径可以覆盖的人数以及需要的花费和雇员人数：

	广告的相关数据	
	广播	电视
覆盖人数(单位：1万人)	4	8
花费(单位：1000元)	8	24
分配的雇员人数	1	2

权和法

- 合同中要求该公司使用广播广告的时间不超过6分钟，另外广播和电视广告所覆盖的人数至少达到45万人。该公司给这个项目的目标预算是10万元。那么这个公司应该如何分配广播和电视的广告时间呢？

权和法

- 令x_1和x_2分别是分配给广播广告和电视广告的时间，单位是分钟。

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad 4x_1+8x_2 &>= 45\\
8x_1+24x_2 &<=100\\
x_1+2x_2 &<= 10\\
x_1 &<= 6
\end{aligned}
$$

权和法

- 令x_1和x_2分别是分配给广播广告和电视广告的时间，单位是分钟。这个问题的目标规划模型可以写成：

$$\min \ G_1 = S_1^-$$

$$\min \ G_2 = S_2^+$$

$$s.t. \quad 4x_1 + 8x_2 + S_1^- - S_1^+ = 45$$

$$8x_1 + 24x_2 + S_2^- - S_2^+ = 100$$

$$x_1 + 2x_2 <= 10$$

$$x_1 \quad <= 6$$

权和法

- 该公司经理认为覆盖目标的重要性是资金预算目标重要性的2倍，那么组合在一起的目标函数就是：

$$\min\ z=2G_1+G_2=2s_1^-+s_2^+$$

最优解中，z=10，x_1=5分钟，x_2=2.5分钟，$S_1^-=5$，其他变量都是0。

权和法

- 从最优值z不等于0可看出：在所要求的目标当中至少有一个是不能被满足的。

- $S_1^- = 5$ 意味着对于要求的覆盖目标（至少覆盖4500万人）没有达到，缺了500万人。

权和法

- 从目标规划所得的只是给原问题找到一个**有效解**，而**并非最优的解**。

- 原问题中，取$x_1=6$ 和$x_2=2$，可得相同的覆盖程度，同时花费更低。

设定优先权法

- 设定优先权法：首先将所有的目标按照重要性编排一个顺序，然后模型最优化的过程就是从具有最高优先级的目标开始每次只优化一个目标，并且使得对较高优先级目标求出的值不会因为求解较低目标时而减少。

谢谢 ！