第一讲 线性规划基本原理与基本算法

北京航空航天大学计算机学院

本讲目标

- 了解最优化方法的基本模型；
- 学习线性规划的必要性；
- 了解线性规划建模思路和方法；
- 了解线性规划的应用范围。

2

本讲内容

一、最优化方法基本模型

二、最优化方法的基本步骤

三、二维变量的线性规划模型

四、线性规划图解法

五、线性规划工程应用

3

最优化案例

案例一：张三（北京某软件公司售前工作人员）在帮上海某企业制定某项目的解决方案，需往返北京和上海之间4次。每周一从北京出发，每周四返回。假设北京与上海航线价格为1000元，单程不打折，普通往返机票9折，跨越周末的往返机票8折。如何购买机票使得花费最少？

4

最优化案例

- 案例看作一个最优化决策问题：

  1. 有哪些可能的**决策方案**？

  2. 是在什么**限制条件**下作出这个决策？

  3. 评价此方案的**最优化目标评判标准**是什么？

5

最优化案例

- 方案一：购买8张单程机票；
- 方案二：购买4张普通的往返机票；
- 方案三：购买1张北京飞上海单程票，3张跨越周末的往返机票，再买1张上海飞北京单程票；
- 方案四：先购买1张第一周星期一从北京出发，第四周星期四返程的往返机票，再购买3张跨周末的往返机票。

6

最优化案例

- 最优化目标评判标准是花费最少：
  - 方案一：1000*8=8000；
  - 方案二：1000*2*0.9*4=7200；
  - 方案三：1000+1000*2*0.8*3+1000=6800；
  - 方案四：1000*2*0.8*4=6400；

7

最优化案例

案例二：假设北京市轨道交通路网中1号线早高峰的客流量为2万人次，1号线新型列车每趟运量为600人次，费用为2万元，老式列车每趟运量为450人次，费用为1.6万元。请问如何安排不同型号的列车在满足客运量的前提下费用最少？

8

最优化案例

解决思路：

（1）把两种类型的列车趟数定义为变量，用来标识该问题的所有可能方案

令 x=新型列车的趟数；

y=老式列车的趟数。

9

最优化案例

解决思路：

（2）案例的限制条件为

新型列车的运量+老式列车的运量 >= 高峰时段的客流量；

即 600x+450y>=20000

此外，x和y必须为正整数（x, y∈N+）

10

最优化案例

解决思路：

（3）最优化目标，即费用最少

令z为总的费用，则整个模型为

min z=2x+1.6y

s.t. 600x+450y>=20000

x, y∈N+

11

最优化模型

- 一般最优化模型表示的通用格式：

min 或 max	目标函数
s.t.	约束条件

- 一个模型的解如果满足所有的约束条件，则称它是**可行解**，否则为**不可行解**。
- 如果是可行解，且又取得了目标函数的最佳值（最大或最小），则称它是**最优解**。

12

本讲内容

一、最优化方法基本模型

二、最优化方法的基本步骤

三、二维变量的线性规划模型

四、线性规划图解法

五、线性规划工程应用

最优化方法的基本步骤

最优化方法的基本步骤

（1）问题定义

问题定义涉及所需研究问题的范围，同时找出这个最优化问题的三个因素：

（a）描述可能的决策方案；

（b）指出需建模系统中的限制条件；

（c）确定问题的最优化目标。

最优化方法的基本步骤

（2）模型构造

模型构造要求把问题的定义转化成数学关系，力争将要产生的模型成为某种标准的数学模型：

（a）线性规划；

（b）整数规划、动态规划、网络规划等；

（c）非线性规划。

最优化方法的基本步骤

（3）模型求解

模型求解是最优化方法基本步骤中最简单的一步，只需利用成熟的最优化算法进行求解。

灵敏度分析是为了解当模型参数发生改变时，最优解会有怎样的表现。

最优化方法应用的基本步骤

（4）模型验证

验证一个模型是否正确的一般方法，就是把模型的输出结果与历史的输出结果进行比较。

如果模型是基于对历史数据的仔细分析，所输出的结果应该优于历史结果。

本讲内容

一、最优化方法基本模型
二、最优化方法的基本步骤
三、二维变量的线性规划模型
四、线性规划图解法
五、线性规划工程应用

二维变量的线性规划模型

例1：某集成商生产AG、BOM两种轨道交通AFC终端设备产品，要占用A、B设备及调试时间，每件产品利润如表所示

	AG	BOM	每天可用时间(时)
占用A机时	0	5	15
占用B机时	6	2	24
调试时间	1	1	5
利润	2万	1万	

如何生产使每天利润最大？

二维变量的线性规划模型

- （二维变量的）线性规划模型，与任何最优化模型一样，由3个基本部分组成：
  ① 寻求需要确定的决策变量(variable)；
  ② 需要优化（求极大或极小）的目标函数(objective)；
  ③ 解必须满足的约束条件 (constraint conditions)

二维变量的线性规划模型

- 确定决策变量是模型建立过程中重要的第一步，一旦决策变量确定后，构造目标函数和约束函数的工作就变得非常简单。
- 此问题中需要确定AG和BOM的日生产量。因此，模型的变量定义为

  x = AG的日生产数
  y = BOM的日生产数

二维变量的线性规划模型

- 构造目标函数。集成商打算最大化两种产品的日总利润。已知每个AG、BOM的利润分别为2万和1万，因此

  AG的总利润 = 2x
  BOM的总利润 = 1y

令z表示日总利润，则公司的目标为：

$$\max z = 2x + y$$

二维变量的线性规划模型

- 构造约束条件。

(1) 设备A的每日可用时间不能超过15小时：

$$5y <= 15$$

(2) 设备B的每日可用时间不能超过24小时：

$$6x+2y <= 24$$

(3) 调试时间每日不能超过5小时：

$$x+y <= 5$$

(4) 隐含的限制条件：x和y不能出现负值

二维变量的线性规划模型

➢ 完整模型

max z = 2x + y

s.t. 5y <= 15

6x+2y <= 24

x+y <= 5

x , y >= 0

本讲内容

线性规划图解法

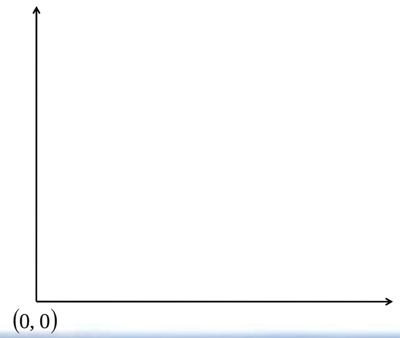
➢ 图解法的过程：

(1) 确定可行解空间；

(2) 从可行解空间所有的可行点中确定最优解。

这个过程可解决求极大或极小的目标函数。

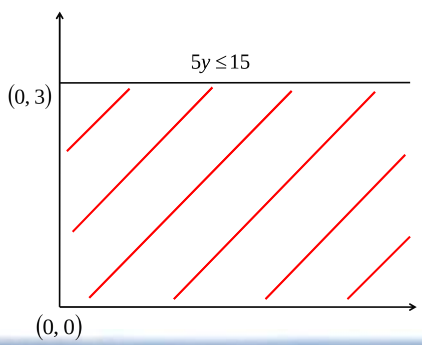
线性规划图解法



约束：

x , y >= 0

线性规划图解法

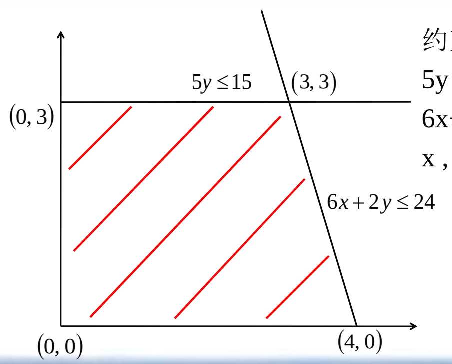


约束：

5y <= 15

x , y >= 0

线性规划图解法



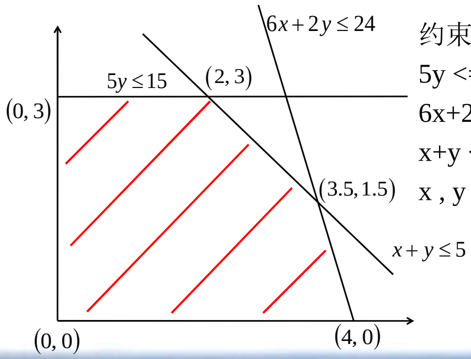
约束：

5y <= 15

6x+2y <= 24

x , y >= 0

线性规划图解法



约束：

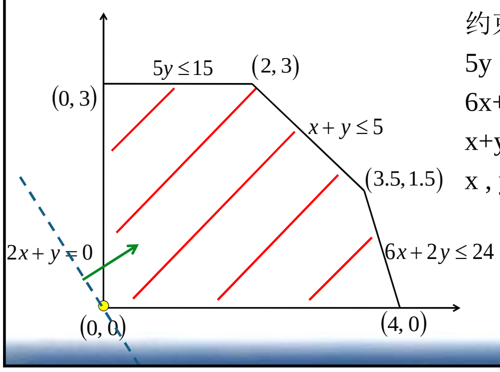
5y <= 15

6x+2y <= 24

x+y <= 5

x , y >= 0

线性规划图解法



约束：

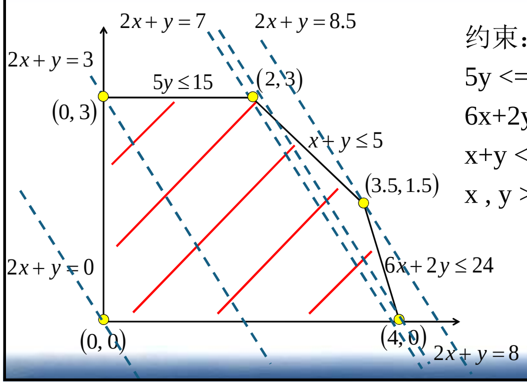
5y <= 15

6x+2y <= 24

x+y <= 5

x , y >= 0

线性规划图解法



约束：

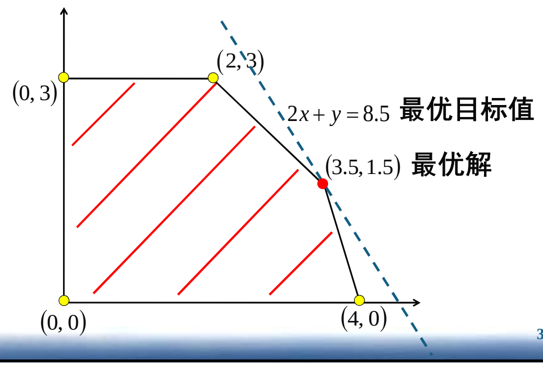
5y <= 15

6x+2y <= 24

x+y <= 5

x , y >= 0

线性规划图解法



案例分析

例2：某农场每天至少使用800千克特殊饲料，这种特殊饲料由玉米和大豆粉配制而成，并含有以下成分：

饲料	成分的重量(每千克饲料) 蛋白质	成分的重量(每千克饲料) 纤维	费用(元/千克)
玉米	0.09	0.02	3
大豆粉	0.60	0.06	9

特殊饲料的营养要求是至少30%的蛋白质和至多5%的纤维。如何确定每天最小成本的饲料配制？

案例分析

- 确定决策变量。因为饲料由玉米和大豆粉配制而成，所以模型的决策变量定义为

  x = 混合饲料中玉米的重量(千克)

  y = 混合饲料中大豆粉的重量(千克)

- 确定目标函数。目标函数是使得配制这种饲料的每天总成本最小，因此表示为

  min　z = 3x + 9y

案例分析

- 构造约束条件。

(1) 农场一天至少需要饲料800千克：

$$x+y >= 800$$

(2) 对于蛋白质的需求约束，蛋白质总量至少等于总饲料的30%：

$$0.09x+0.6y >= 0.3(x+y)$$

(3) 纤维的需求最多为总饲料的5%：

$$0.02x+0.06y <= 0.05(x+y)$$

案例分析

- 完整模型

$$\min\ z = 3x + 9y$$

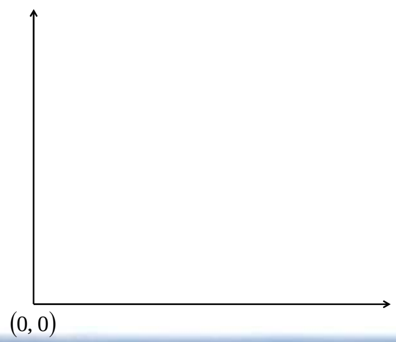
$$\text{s.t.}\quad x+y >= 800$$

$$0.21x-0.3y <= 0$$

$$0.03x-0.01y >= 0$$

$$x , y >= 0$$

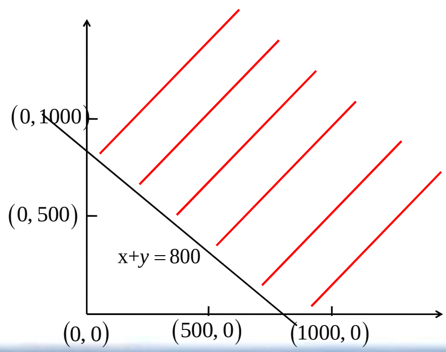
案例分析



约束：

x , y >= 0

案例分析

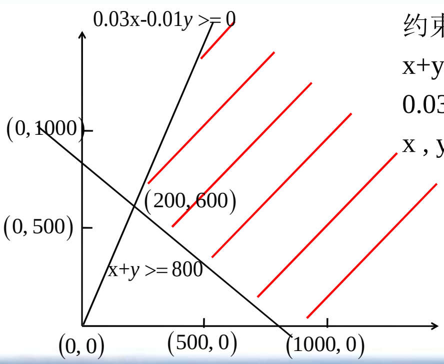


约束：

x+y >= 800

x , y >= 0

案例分析



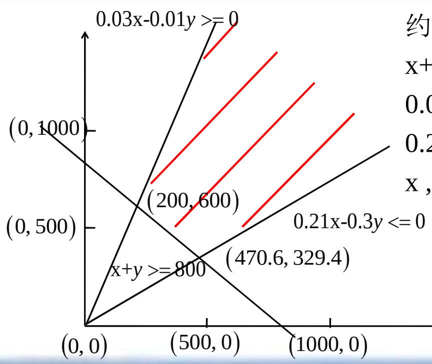
约束：

x+y >= 800

0.03x-0.01y >= 0

x , y >= 0

案例分析



约束：

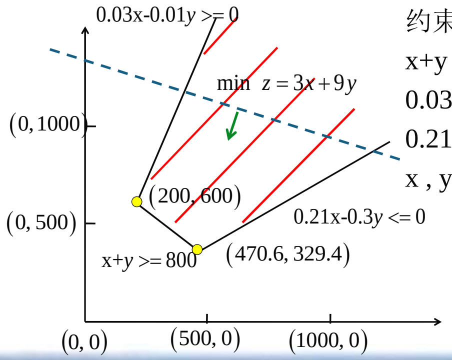
x+y >= 800

0.03x-0.01y >= 0

0.21x-0.3y <= 0

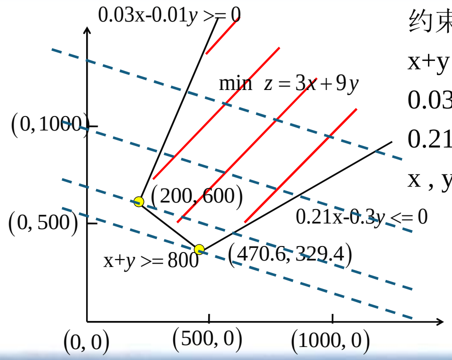
x , y >= 0

案例分析



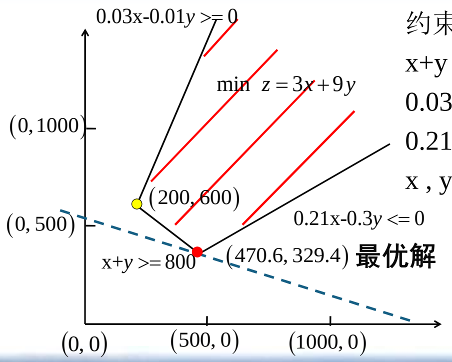
约束：
x+y >= 800
0.03x-0.01y >= 0
0.21x-0.3y <= 0
x , y >= 0

案例分析



约束：
x+y >= 800
0.03x-0.01y >= 0
0.21x-0.3y <= 0
x , y >= 0

案例分析



约束：
x+y >= 800
0.03x-0.01y >= 0
0.21x-0.3y <= 0
x , y >= 0

最优目标值
$z = 4376.4$

本讲内容

一、最优化方法基本模型
二、最优化方法的基本步骤
三、二维变量的线性规划模型
四、线性规划图解法
五、线性规划工程应用

城市扩建模型

例1：A市面临严重预算不足问题，为寻求一种长期的解决方案，市议会投票决定，征用一块城郊的住宅区域，进行公租房开发，以增加来源。

改造工程包括两个阶段：(a)拆除不符合标准的住宅，为新的开发提供土地；(b)建造新的建筑。

(1)拆除大约300套不符合标准的住宅。每套住宅占地0.25英亩。拆除一套征地住宅的成本是2000美元。

城市扩建模型

(2)新的单、双、三和四户住宅的土地面积分别是0.18、0.28、0.4和0.5英亩。街道、开阔地和公共设施占总面积的15%。

(3)三户和四户的住宅单元数总和至少占总住宅单元数的25%，单户住宅单元数至少占20%，双户住宅单元数至少占10%。

(4)对于单、双、三和四户住宅，每单元每年的租金分别为1000美元、1900美元、2700美元和3400美元。

城市扩建模型

(5)对于单、双、三和四户住宅，每单元建筑成本分别是50000美元、70000美元、130000美元和160000美元。市政府筹措资金总计最高达1500万美元。

如何建各种类型的住宅使得每年租金收入总额最大？

城市扩建模型

- 确定决策变量。除了确定建造每种类型住宅单元的数量外，还需要确定有多少旧房屋必须拆除，为新的开发提供场地。

x_1 = 建造单户住宅的单元数

x_2 = 建造双户住宅的单元数

x_3 = 建造三户住宅的单元数

x_4 = 建造四户住宅的单元数

x_5 = 拆除旧住宅的单元数

城市扩建模型

- 确定目标函数。从所有4中类型的住宅中使得总的租金收入最大。

$\max\ z = 1000\,x_1 + 1900\,x_2 + 2700\,x_3 + 3400\,x_4$

- 确定约束条件。

(1) 土地的可用量：

用于新建住宅面积<=净可用面积

$0.18\,x_1 + 0.28\,x_2 + 0.4\,x_3 + 0.5\,x_4 <= 0.85*0.25\,x_5$

城市扩建模型

(2) 被拆除住宅数量不能超过300套：

$x_5 <= 300$

(3) 各种类型住宅单元数量的限制约束：

$x_1 >= 0.2*(x_1+x_2+x_3+x_4)$

$x_2 >= 0.1*(x_1+x_2+x_3+x_4)$

$x_3+x_4 >= 0.25*(x_1+x_2+x_3+x_4)$

(4) 确保拆除和建造的费用在允许的预算内，以10000美元表示费用的单位：

$5x_1+7\,x_2+13x_3+16x_4 +0.2x_5 <= 1500$

城市扩建模型

- 完整模型。

$\max\ z = 1000\,x_1 + 1900\,x_2 + 2700\,x_3 + 3400\,x_4$

s.t. $0.18\,x_1+0.28\,x_2+0.4\,x_3+0.5\,x_4-0.2125x_5<=0$

$x_5 <= 300$

$-0.8x_1+0.2x_2+0.2x_3+0.2x_4<=0$

$0.1x_1-0.9x_2+0.1x_3+0.1x_4<=0$

$0.25x_1+0.25x_2-0.75x_3-0.75x_4<=0$

$5x_1+7\,x_2+13x_3+16x_4 +0.2x_5 <=1500$

$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 >=0$

贷款策略模型

例2：A银行在制定一项总额1200万的贷款策略，下表提供了各种贷款的相关数据。

贷款类型	利率	坏账比率
个人	0.14	0.1
汽车	0.13	0.07
住房	0.12	0.03
农场	0.125	0.05
商业	0.1	0.02

坏账不可收回且不产生利息收入。

贷款策略模型

为了与其他金融机构竞争，要求银行把至少40%的资金分配给农场和商业贷款。为扶持当地的住房产业，住房贷款至少要等于个人、汽车和住房贷款总额的50%。银行还有一项明确的政策，不允许坏账的总比例超过全部贷款的4%。

贷款策略模型

- 确定决策变量。确定每一种贷款的数额（单位：100万）。

x_1 = 个人贷款
x_2 = 汽车贷款
x_3 = 住房贷款
x_4 = 农场贷款
x_5 = 商业贷款

56

贷款策略模型

- 确定目标函数。银行的目标是使得净收益（即利息收入与坏账损失之差）达到最大。只有良性的贷款才会产生利息收入。

总利息= $0.14(0.9\ x_1)+0.13(0.97x_2)+0.12(0.97x_3)$
$+0.125(0.95x_4)+0.1(0.98\ x_5)$

坏账=$0.1x_1+0.07x_2+0.03x_3+0.05x_4+0.02\ x_5$

max z = 总利息 - 坏账

$=0.026x_1+0.0509x_2+0.0864x_3+0.06875x_4$
$+0.078\ x_5$

57

贷款策略模型

- 构造约束条件。

(1) 资金总额应该不超过1200万：

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 <= 12$

(2) 农场和商业贷款至少等于总贷款的40%：

$x_4+x_5 >= 0.4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$

(3) 住房贷款应该至少等于个人、汽车和房屋贷款的50%：

$x_3>= 0.5(x_1+x_2+x_3)$

(4) 坏账比例不超过总贷款的4%：

$0.1x_1+0.07x_2+0.03x_3+0.05x_4+0.02x_5<= 0.04(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$

58

贷款策略模型

- 完整模型。

max z = $0.026x_1+0.0509x_2+0.0864x_3+0.06875x_4$
$+0.078\ x_5$

s.t. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 <=12$

$0.4\ x_1+0.4\ x_2+0.4\ x_3-0.6x_4-0.6x_5<=0$

$0.5x_1+0.5x_2-0.5x_3<=0$

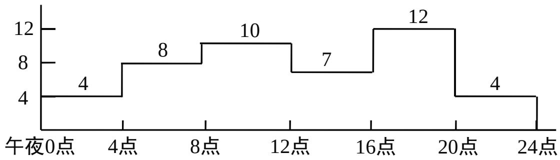
$0.06x_1+0.03x_2-0.01x_3+0.01x_4-0.02x_5 <=0$

$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 >=0$

59

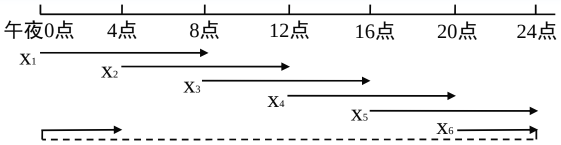
公交车调度模型

例3：某市在研究如何寻求满足运输需求的最少公交车数。工程师注意到所需的最少公交车数随一天中的时间不同而变化，且所需公交车数连续4小时间隔内可以被近似为一个常数。每辆公交车一天只能连续运行8小时。



60

公交车调度模型



x_1 = 凌晨0点开始的公交车数
x_2 = 凌晨4点开始的公交车数
x_3 = 上午8点开始的公交车数
x_4 = 中午12点开始的公交车数
x_5 = 下午4点开始的公交车数
x_6 = 晚上8点开始的公交车数

61

公交车调度模型

- 完整模型。

min $z = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$

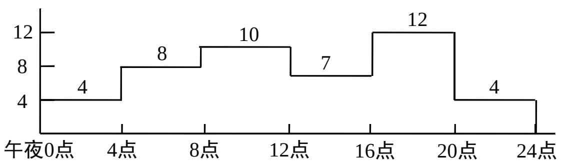
s.t.
$$x_1 + x_6 >= 4$$
$$x_1 + x_2 >= 8$$
$$x_2 + x_3 >= 10$$
$$x_3 + x_4 >= 7$$
$$x_4 + x_5 >= 12$$
$$x_5 + x_6 >= 4$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 >= 0$$

62

公交车调度模型

- 模型最优解

$x_1 = 4$　$x_2 = 10$　$x_3 = 0$
$x_4 = 8$　$x_5 = 4$　$x_6 = 0$



63

谢 谢 ！