

# 计算机学院《算法设计与分析》

## (2019 年秋季学期)

### 第二次作业

作业提交截止时间：2019 年 11 月 7 日 23 : 55

#### 1 二进制串变换问题 (20 分)

给定两个长度均为  $n$  的仅由 0 和 1 组成的字符串  $a$  和  $b$ ，你可以对串  $a$  进行如下操作：

1. 对任意  $i, j (1 \leq i, j \leq n)$ ，交换  $a_i$  和  $a_j$ ，操作代价为  $|i - j|$ ；
2. 对任意  $i (1 \leq i \leq n)$ ，取反  $a_i$ ，操作代价为 1；

请你设计算法计算将串  $a$  变为串  $b$  所需的最小代价（只能对串  $a$  进行操作），并分析该算法的时间复杂度。

#### 2 最长递增子序列问题 (20 分)

递增子序列是指：从原序列中按顺序挑选出某些元素组成一个新序列，并且该新序列中的任意一个元素均大于该元素之前的所有元素。例如，对于序列  $\langle 5, 24, 8, 17, 12, 45 \rangle$ ，该序列的两个递增子序列为  $\langle 5, 8, 12, 45 \rangle$  和  $\langle 5, 8, 17, 45 \rangle$ ，并且可以验证它们也是原序列最长的递增子序列。请设计算法来求出一个包含  $n$  个元素的序列  $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  中的最长递增子序列，并分析该算法的时间复杂度。

#### 3 括号匹配问题 (20 分)

定义合法的括号串如下：

1. 空串是合法的括号串；
2. 若串  $s$  是合法的，则  $(s)$  和  $[s]$  也是合法的；
3. 若串  $a, b$  均是合法的，则  $ab$  也是合法的。

现在给定由 '['，']' 和 '('，')' 构成的字符串，请你设计算法计算该串中合法的子序列的最大长度，并分析该算法时间复杂度。例如字符串 " $([()])$ "，最长的合法子序列 " $([()])$ " 长度为 6。

#### 4 分组可行性判定问题 (20 分)

给定按非降序排列的  $n$  个数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。现需将这  $n$  个数分组，满足：

1. 每个数  $a_i$  仅属于一个组；
2. 每个组中包含至少  $k$  个数；
3. 对属于同一组的任意两个元素  $a_i, a_j$ ，需满足  $|a_i - a_j| \leq d$ 。

请你设计算法判断是否可以将给定的  $n$  个数按照上述要求分组，并分析该算法的时间复杂度。

## 5 最大分值问题 (20 分)

给定一个包含  $n$  个整数的序列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 对其中任意一段连续区间  $a_i..a_j$ , 其分值为

$$(\sum_{t=i}^j a_t) \% p$$

符号  $\%$  表示取余运算符。

现请你设计算法计算将其分为  $k$  段 (每段至少包含 1 个元素) 后分值和的最大值, 并分析该算法的时间复杂度。

例如, 将 3, 4, 7, 2 分为 3 段, 模数为  $p = 10$ , 则可将其分为 (3, 4), (7), (2) 这三段, 其分值和为  $(3 + 4) \% 10 + 7 \% 10 + 2 \% 10 = 16$ 。