第二讲 单纯形算法

北京航空航天大学计算机学院

本讲目标

- 熟悉线性规划模型的等式约束；
- 熟悉基本单纯形方法；
- 了解改进单纯形法；
- 了解单纯性方法的特殊情况。

本讲内容

等式形式的线性规划模型

- 通过对问题约束施加两个要求方便单纯性方法（标准化和简单化）的计算：

  1. 所有的约束都是等式，且具有非负的右端项。

  2. 所有变量是非负的。

等式形式的线性规划模型

例1：李四使用M1和M2两种原料生产内、外墙涂料，下表提供了问题的基本数据。

	每吨产品使用原料的吨数		日最大可用量(吨)
	外墙涂料	内墙涂料	
原料M1	6	4	24
原料M2	1	2	6
每吨利润(万)	5	4	

市场调查指出：内墙涂料的日需求量不超过外墙涂料的日需要量加上1吨。内墙涂料的最大日需求量是2吨。

等式形式的线性规划模型

李四如何确定最优的内、外墙涂料的产品混合，使得日总利润达到最大。

- 确定决策变量。需要确定内、外墙涂料的日生产量。

x_1 = 外墙涂料的日生产吨数

x_2 = 内墙涂料的日生产吨数

- 确定目标函数。极大化涂料的日总利润，每吨外、内墙涂料的利润分别为5和4万元：

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2$$

等式形式的线性规划模型

- 构造约束条件。

(1) 原料M1和M2的日可用量的限制：

$$6x_1 + 4x_2 <= 24$$

$$x_1 + 2x_2 <= 6$$

(2) 原料内墙涂料的日生产量超过外墙涂料的日生产量的部分不能多于1吨：

$$x_2 – x_1 <= 1$$

(3) 内墙涂料的最大日需求量在2吨以内：

$$x_2 <= 2$$

等式形式的线性规划模型

- 完整模型

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 6x_1 + 4x_2 <= 24$$

$$x_1 + 2x_2 <= 6$$

$$x_2 - x_1 <= 1$$

$$x_2 <= 2$$

$$x_1 , x_2 >= 0$$

等式形式的线性规划模型

- 将不等式转化为带有非负右端项的等式约束
  - 为了把(<=)不等式约束转换成等式约束，在约束的左端，增加非负的松弛变量(slack variable)。

$$6x_1 + 4x_2 <= 24$$

定义s_1为松弛变量，约束可转换如下等式约束：

$$6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \ ,\ s_1 >= 0$$

等式形式的线性规划模型

- 将不等式转化为带有非负右端项的等式约束
  - 为了把(>=)不等式约束转换成等式约束，在约束的左端，减去非负的剩余变量（surplus variable）。

$$3x_1 + 2x_2 >= 14$$

定义s_1为剩余变量，约束可转换如下等式约束：

$$3x_1 + 2x_2 - s_1 = 14 \ , \ s_1 >= 0$$

等式形式的线性规划模型

- 将不等式转化为带有非负右端项的等式约束
  - 让所得到的等式约束的右端项是非负的。必要时可对方程的两端乘上−1。

$$-3x_1 + 5x_2 <= -19$$

约束可转换如下等式约束：

$$-3x_1 + 5x_2 + s_1 = -19 \ , \ s_1 >= 0$$

等式两端乘上−1，转化为非负的右端项：

$$3x_1 - 5x_2 - s_1 = 19$$

本讲内容

一、等式形式的线性规划模型

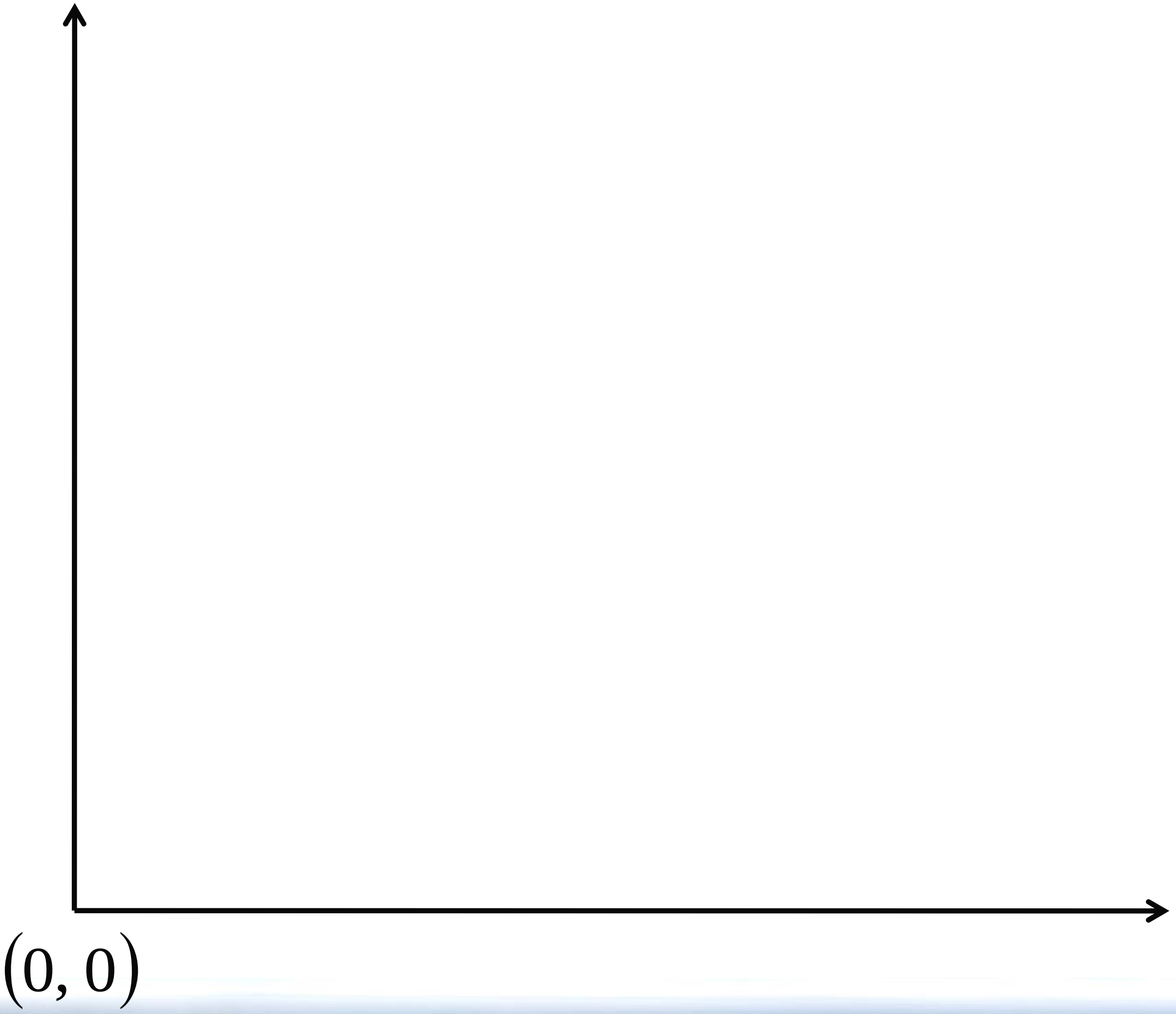
二、图形解与代数解转换

三、单纯性方法

四、改进单纯形方法

五、单纯性方法的特殊情况

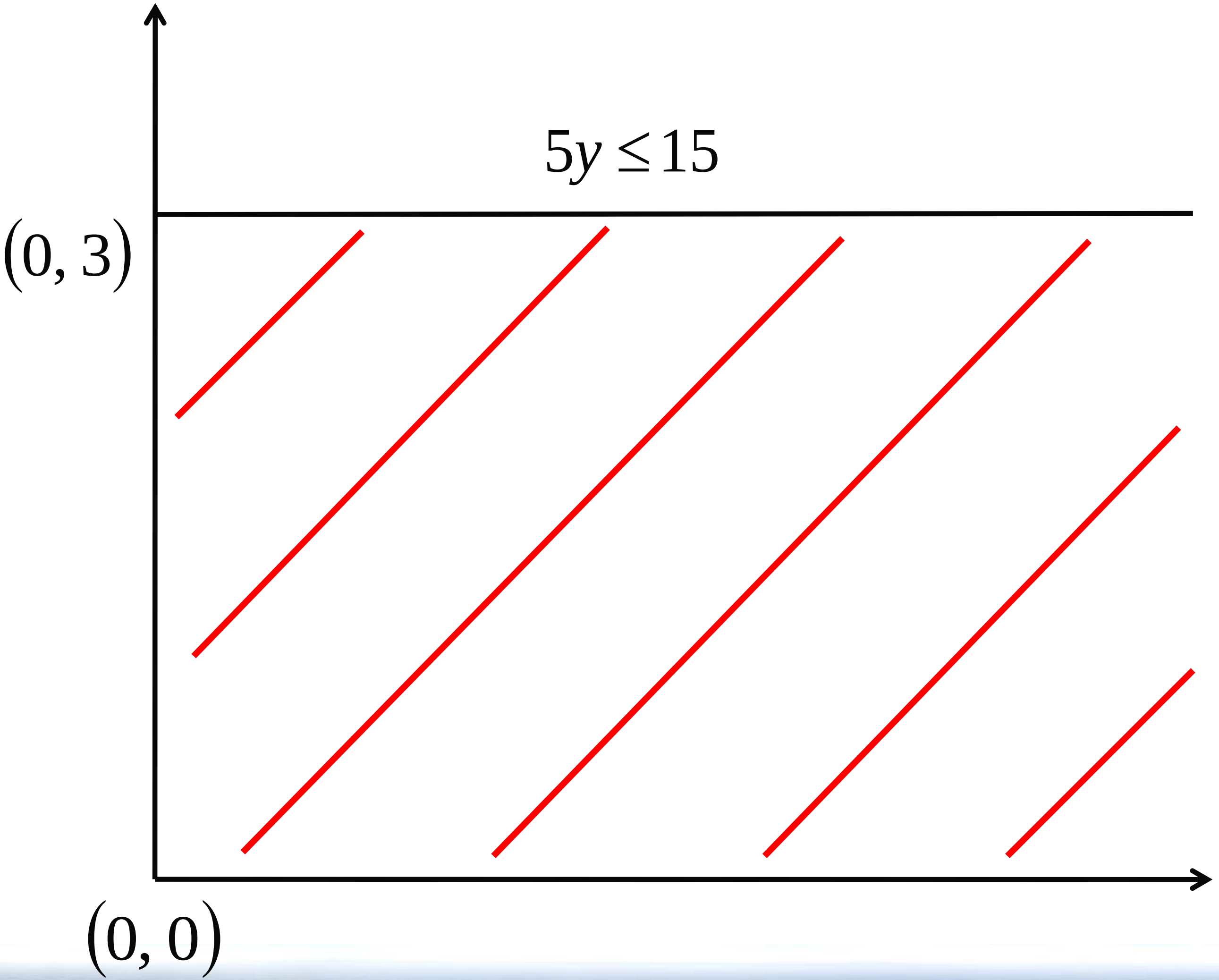
图形解与代数解转换



约束：

x , y >= 0

图形解与代数解转换

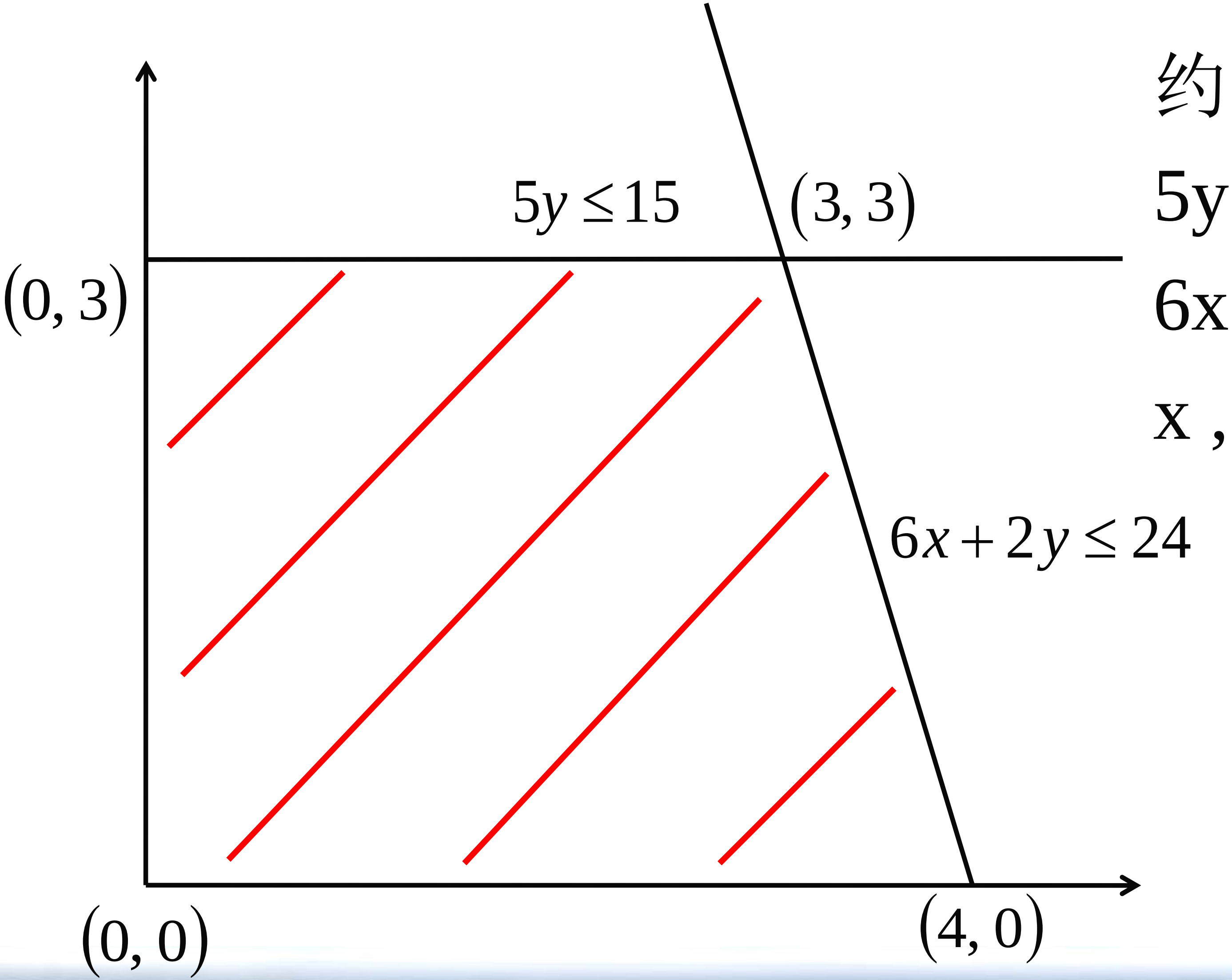


约束：

5y <= 15

x , y >= 0

图形解与代数解转换



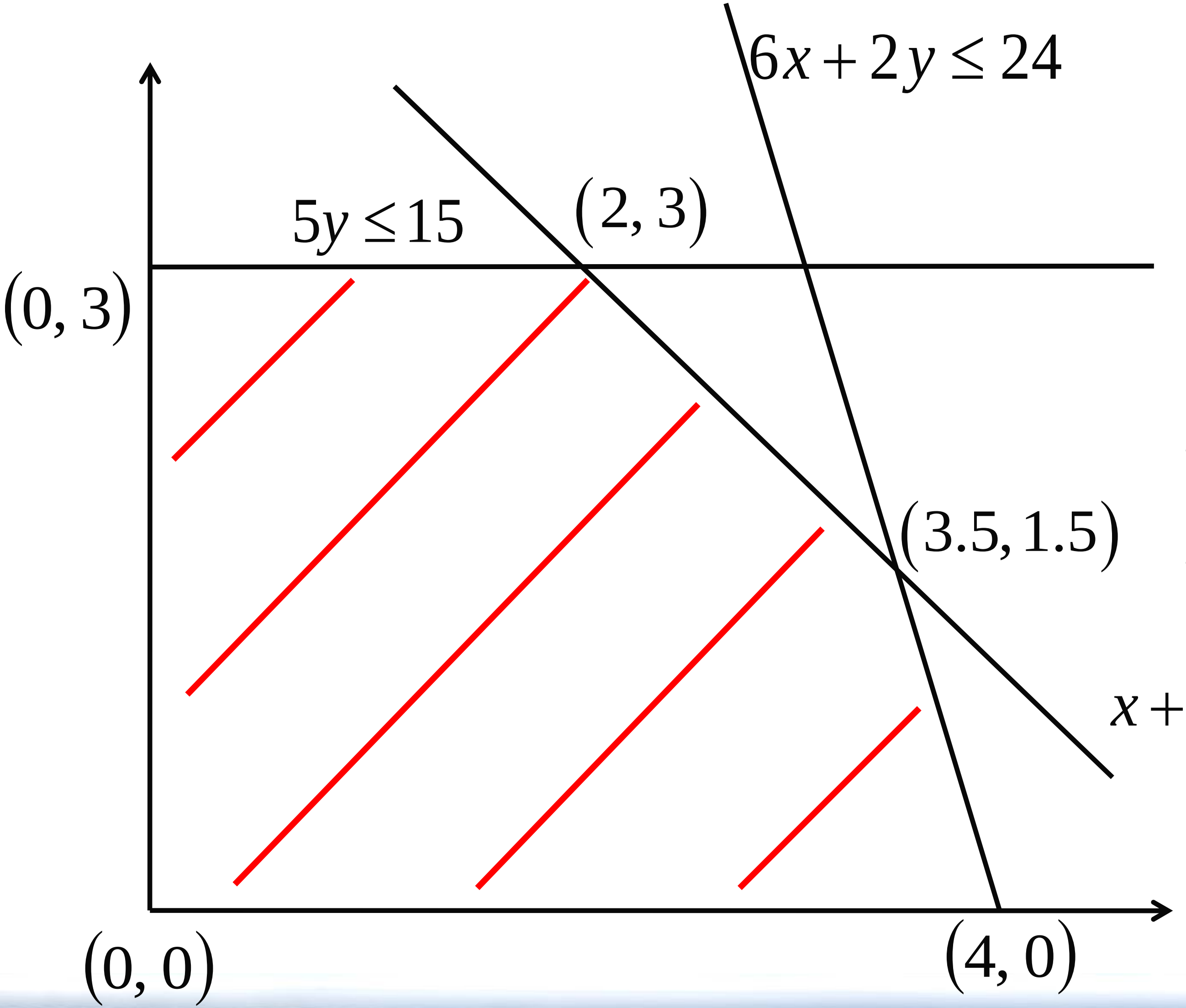
约束：

5y <= 15

6x+2y <= 24

x , y >= 0

图形解与代数解转换



约束：

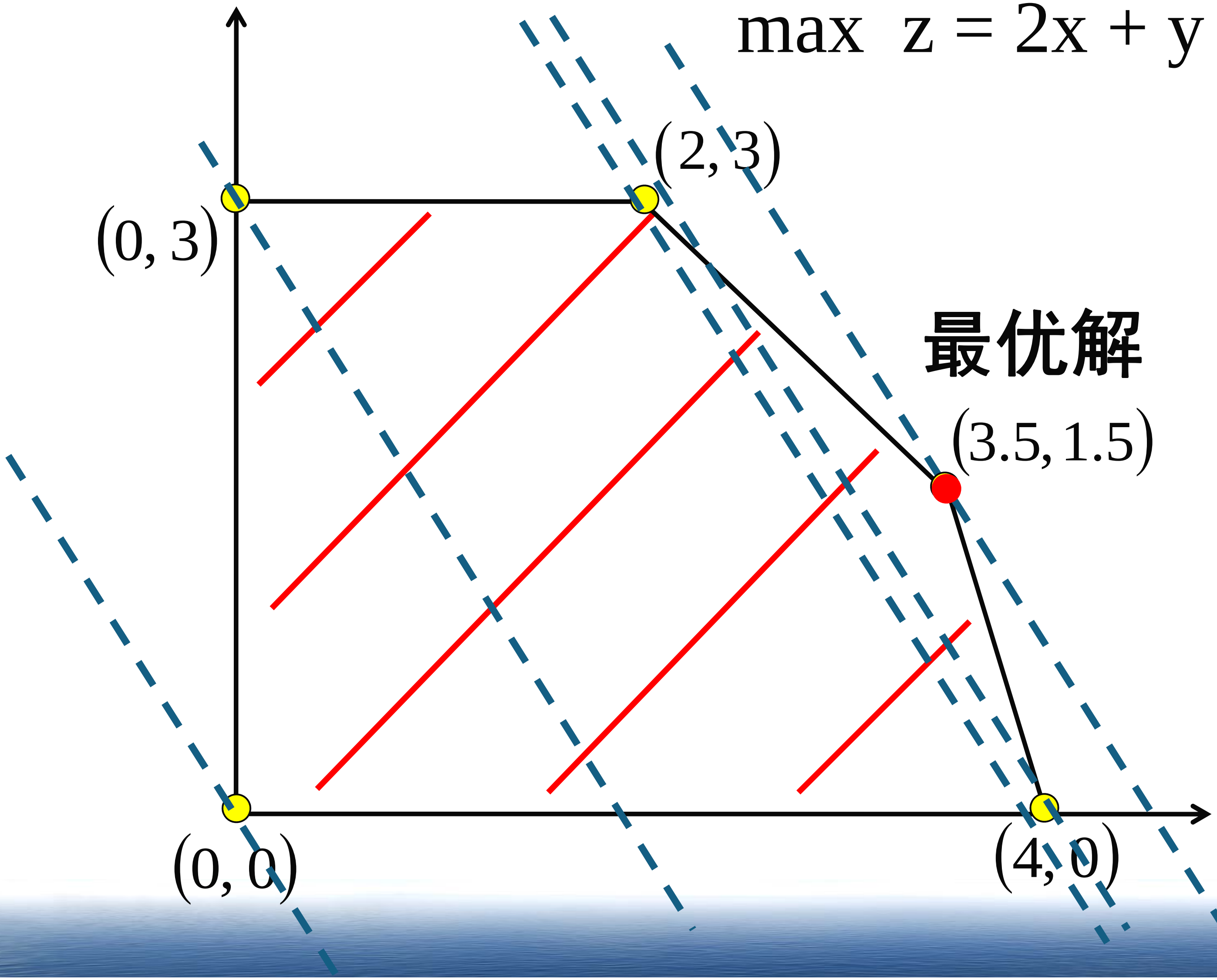
5y <= 15

6x+2y <= 24

x+y <= 5

x , y >= 0

图形解与代数解转换



max z = 2x + y 约束：

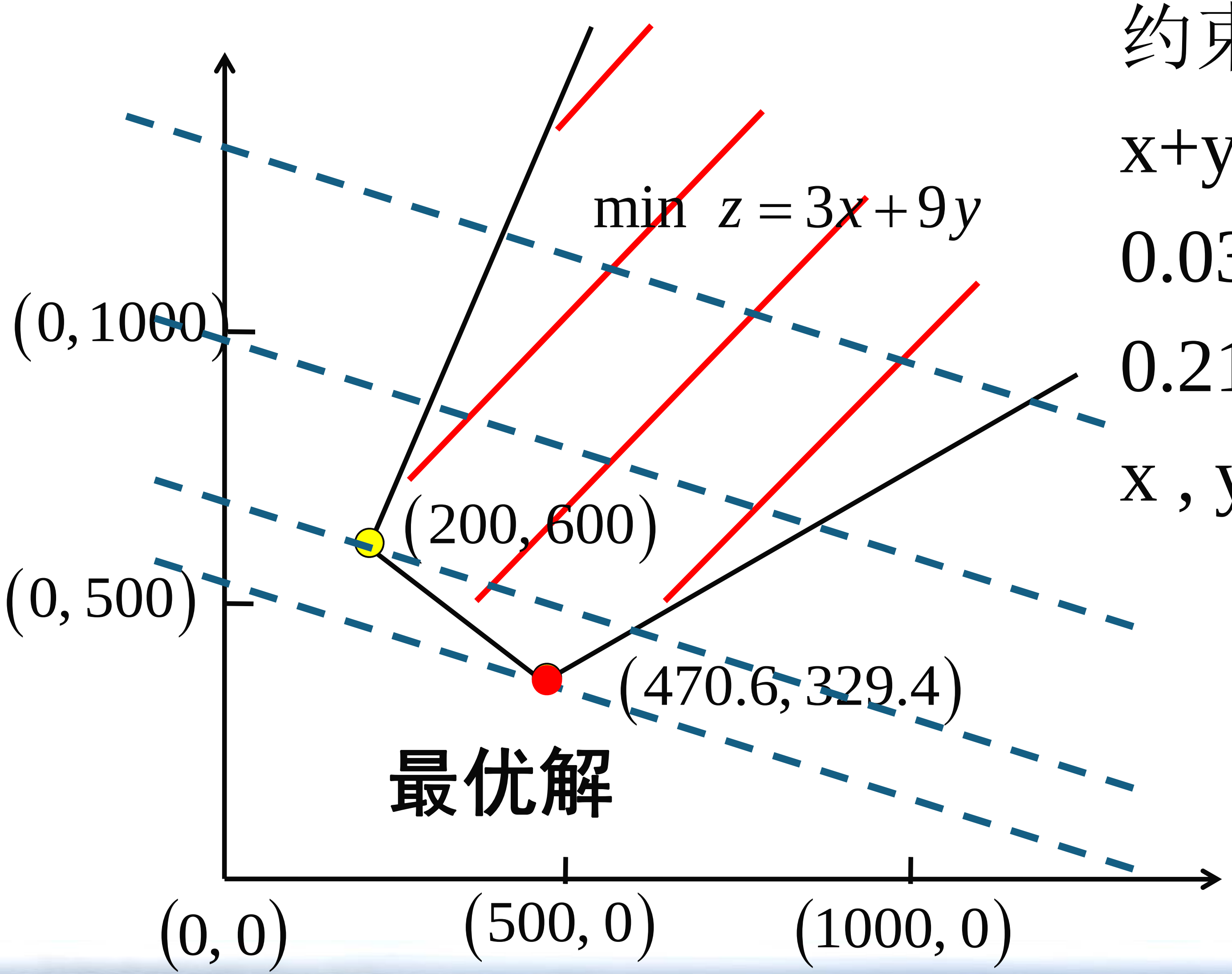
5y <= 15

6x+2y <= 24

x+y <= 5

x , y >= 0

图形解与代数解转换



约束：

x+y >= 800

0.03x-0.01y >= 0

0.21x-0.3y <= 0

x , y >= 0

图形解与代数解转换

图解法

画出所有约束，包括非负限制

解空间由**无穷个可行点**组成

↓

识别解空间的**可行角点**

最优解的候选解由**有限个角点**给出

↓

从所有的候选点中，用目标函数确定**最优的角点**

图形解与代数解转换

- 线性规划的图解法所表达的思想奠定了代数单纯形发展的基础。

- 在图解法中，解空间由表示约束的半空间描述；

- 在单纯形法中，解空间由m个同时成立的线性方程和n个非负变量表示。

图形解与代数解转换

图解法	画出所有约束，包括非负限制
	解空间由**无穷个可行点**组成

代数法	解空间由n个变量的m个方程表示， 所有变量均限制为非负，m<=n
	方程组有**无穷个可行解**

图形解与代数解转换

图解法

识别解空间的**可行角点**
最优解的候选解由**有限个角点**给出

代数法

确定方程的**基本可行解**
最优解的候选解是由**有限个** **基本可行解**给出

图形解与代数解转换

图解法

从所有的候选点中，用目标函数确定**最优的角点**

代数法

从所有的候选解中，用目标函数确定**最优的基本可行解**

图形解与代数解转换

- 角点的代数定义

在m*n(m个线性方程和n个非负变量)阶的方程组中，如果令(n-m)个变量等于0，然后求解其余的含m个变量的m个方程，如果有唯一解，则称相应的解为基本解(basic solution)，它一定对应解空间的一个（可行或不可行）角点。这意味着角点的最大数目是

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

图形解与代数解转换

例2：考虑两个变量的线性规划

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 <= 4$$

$$x_1 + 2x_2 <= 5$$

$$x_1 , x_2 >=0$$

图形解与代数解转换

- 将不等式转化为带有非负右端项的等式约束

线性规划的解空间转化为

$$\begin{array}{lcl} 2x_1 + x_2 <= 4 & & 2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\ x_1 + 2x_2 <= 5 & \Longrightarrow & x_1 + 2x_2 + s_2 = 5 \\ x_1 , x_2 >=0 & & x_1 ,x_2,s_1,s_2 >=0 \end{array}$$

此方程组有m=2个方程和n=4个变量

图形解与代数解转换

由代数式确定角点是令$n-m=2$个变量为0，然后解其余的$m=2$个变量。

令$x_1=0$和$x_2=0$，方程提供唯一的(基本)解：

$s_1=4$， $s_2=5$

令$s_1=0$和$s_2=0$，方程提供唯一的(基本)解：

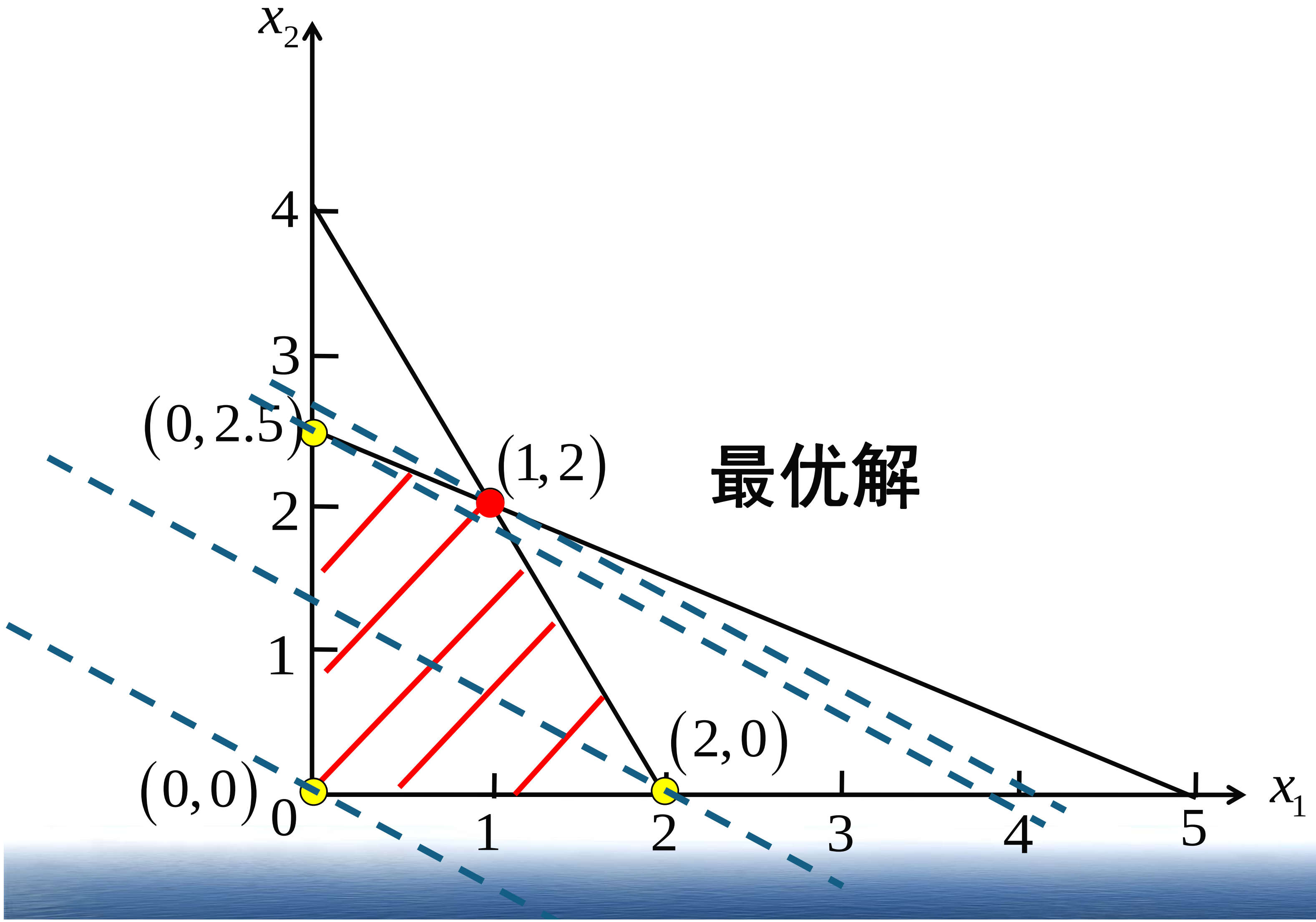
$x_1=1$， $x_2=2$

图形解与代数解转换

到底令哪些(n-m)个变量为零才能对应一个特定的角点？可以利用图解法(仅对二维或三维变量有用)的优点。

枚举解空间的全部角点，考虑(n-m)个变量为零时的全部组合，求解相应的方程，最优解为达到最优目标值的基本可行解(角点) 。

图形解与代数解转换



图形解与代数解转换

从图形解到代数解的转换，(n-m)个零变量为**非基变量**，余下的m个变量为**基变量**(basic variable)，它的解称作**基本解**。

非基变量	基变量	基本解	可行否？	目标值z
(x_1,x_2)	(s_1,s_2)	$(4,5)$	是	0
(x_1,s_1)	(x_2,s_2)	$(4,-3)$	否	$-$
(x_1,s_2)	(x_2,s_1)	$(2.5,1.5)$	是	7.5
(x_2,s_1)	(x_1,s_2)	$(2,3)$	是	4
(x_2,s_2)	(x_1,s_1)	$(5,-6)$	否	$-$
(s_1,s_2)	(x_1,x_2)	$(1,2)$	是	8(最优点)

图形解与代数解转换

当问题的大小增加后(m和n变大)，枚举所有角点的过程包含了巨量计算。

对于m=10和n=20，比较求解C_{20}^{10}个10*10阶的方程。而且在现实问题中，(10*20)的线性规划是一个小规模的问题。

本讲内容

一、等式形式的线性规划模型

二、图形解与代数解转换

三、单纯性方法

四、改进单纯形方法

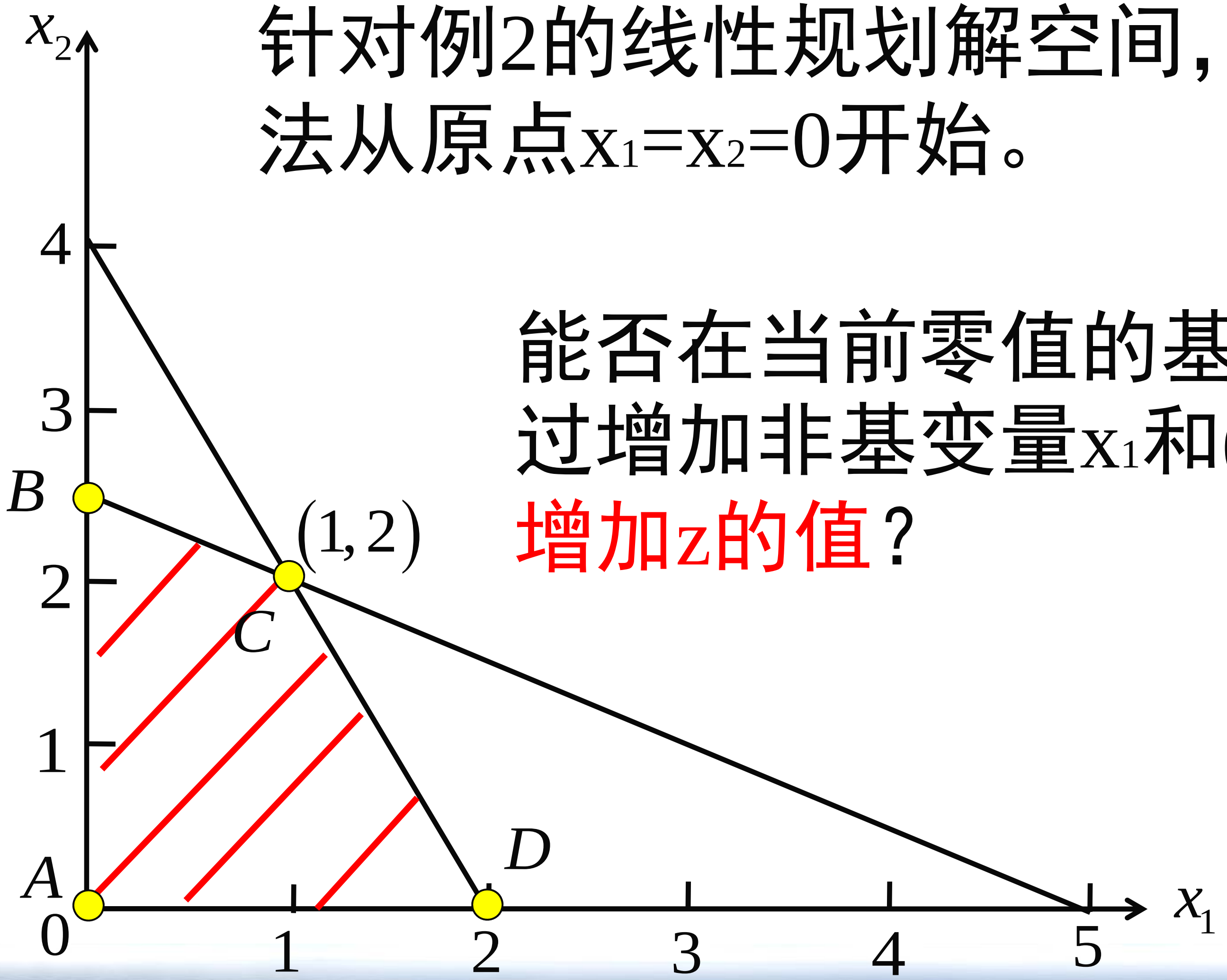
五、单纯性方法的特殊情况

单纯形方法

单纯形方法通过借助于考查解空间中所有可能的基本可行解(角点)的一小部分。

单纯形方法利用一个智能的搜索过程，用有效的方法查找最优角点的位置。

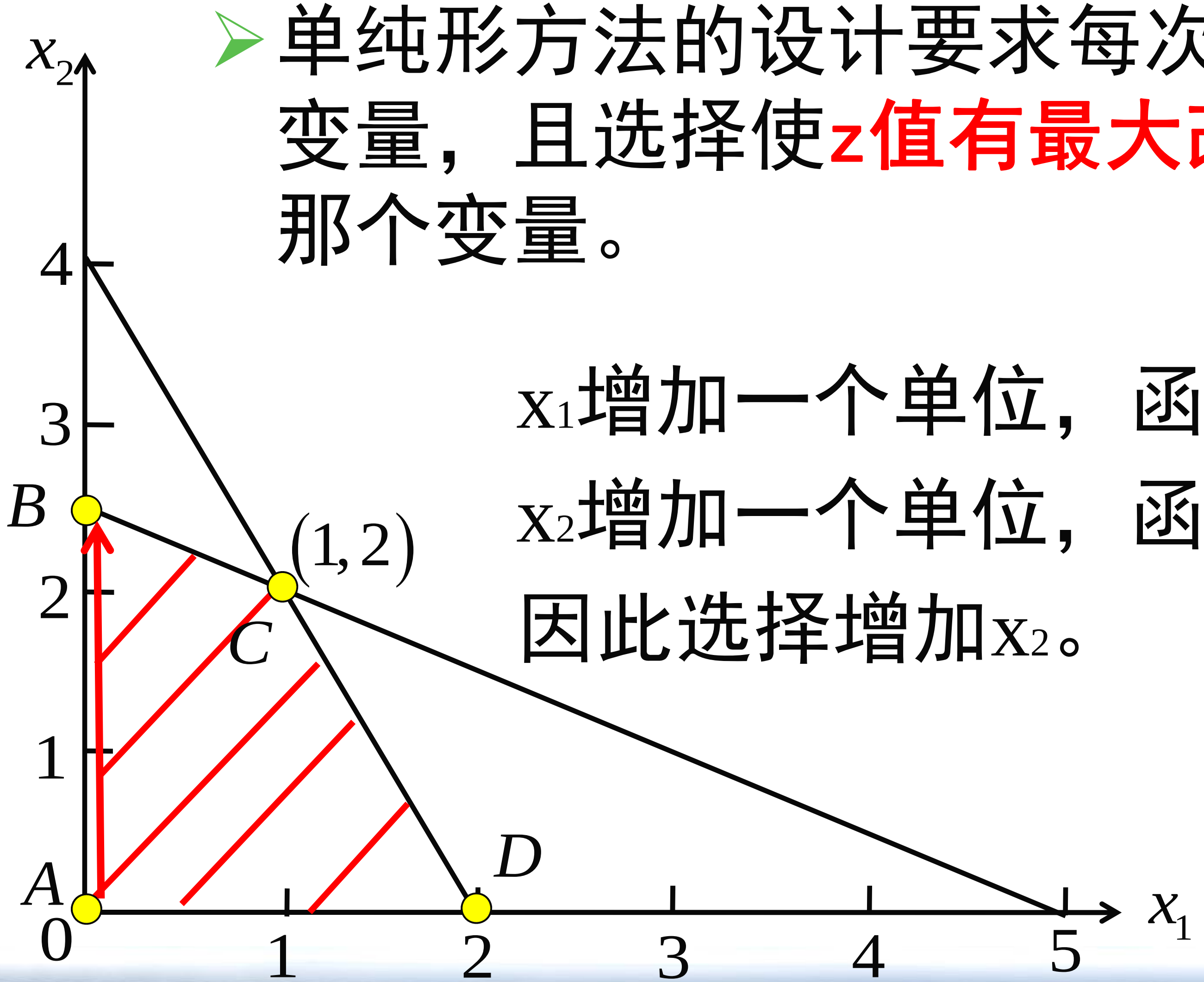
单纯形方法



针对例2的线性规划解空间，单纯形法从原点$x_1=x_2=0$开始。

能否在当前零值的基础上，通过增加非基变量x_1和(或)x_2值来增加z的值？

单纯形方法



- 单纯形方法的设计要求每次增加一个变量，且选择使**z值有最大改善率**的那个变量。

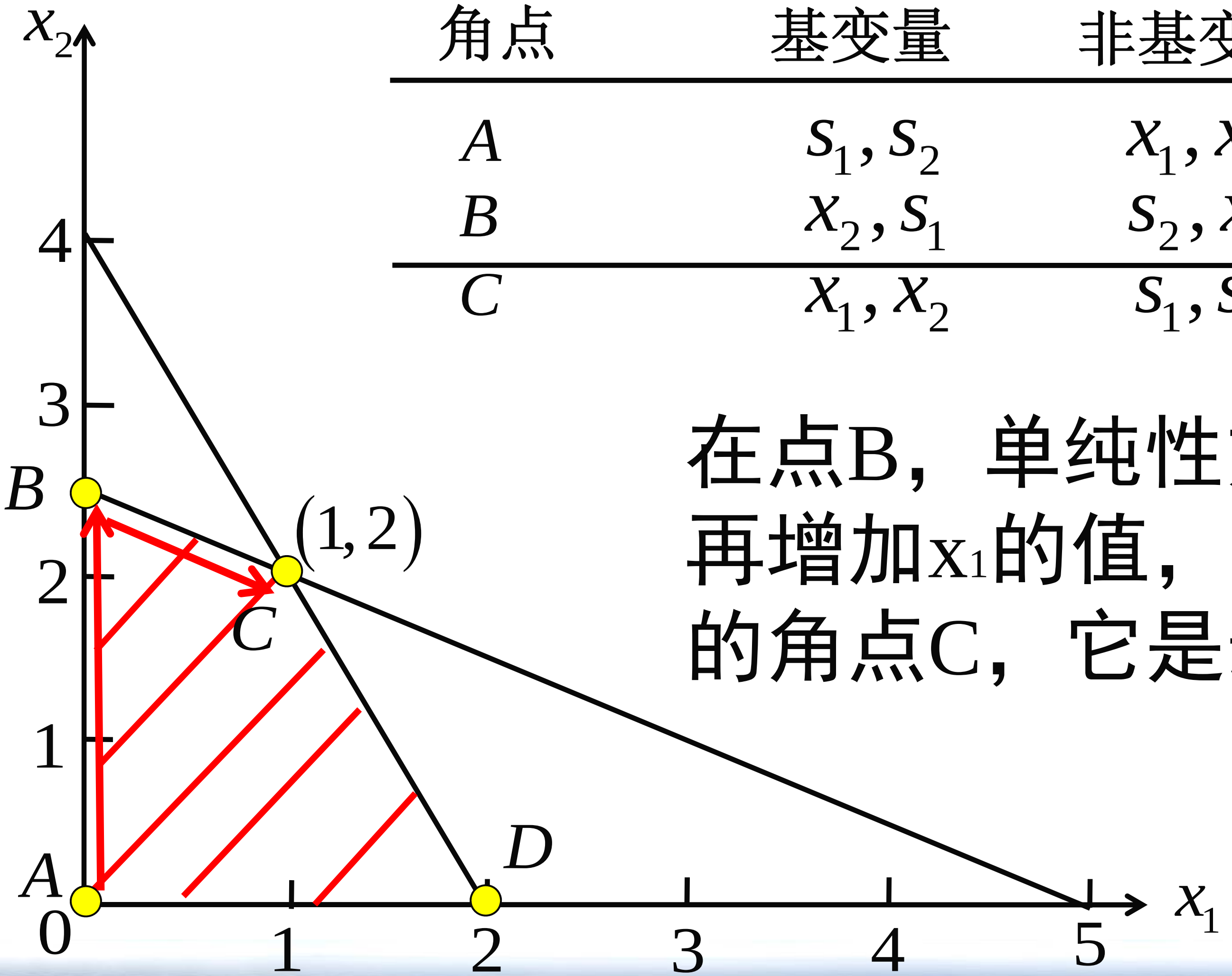
x_1增加一个单位，函数值增加2；

x_2增加一个单位，函数值增加3。

因此选择增加x_2。

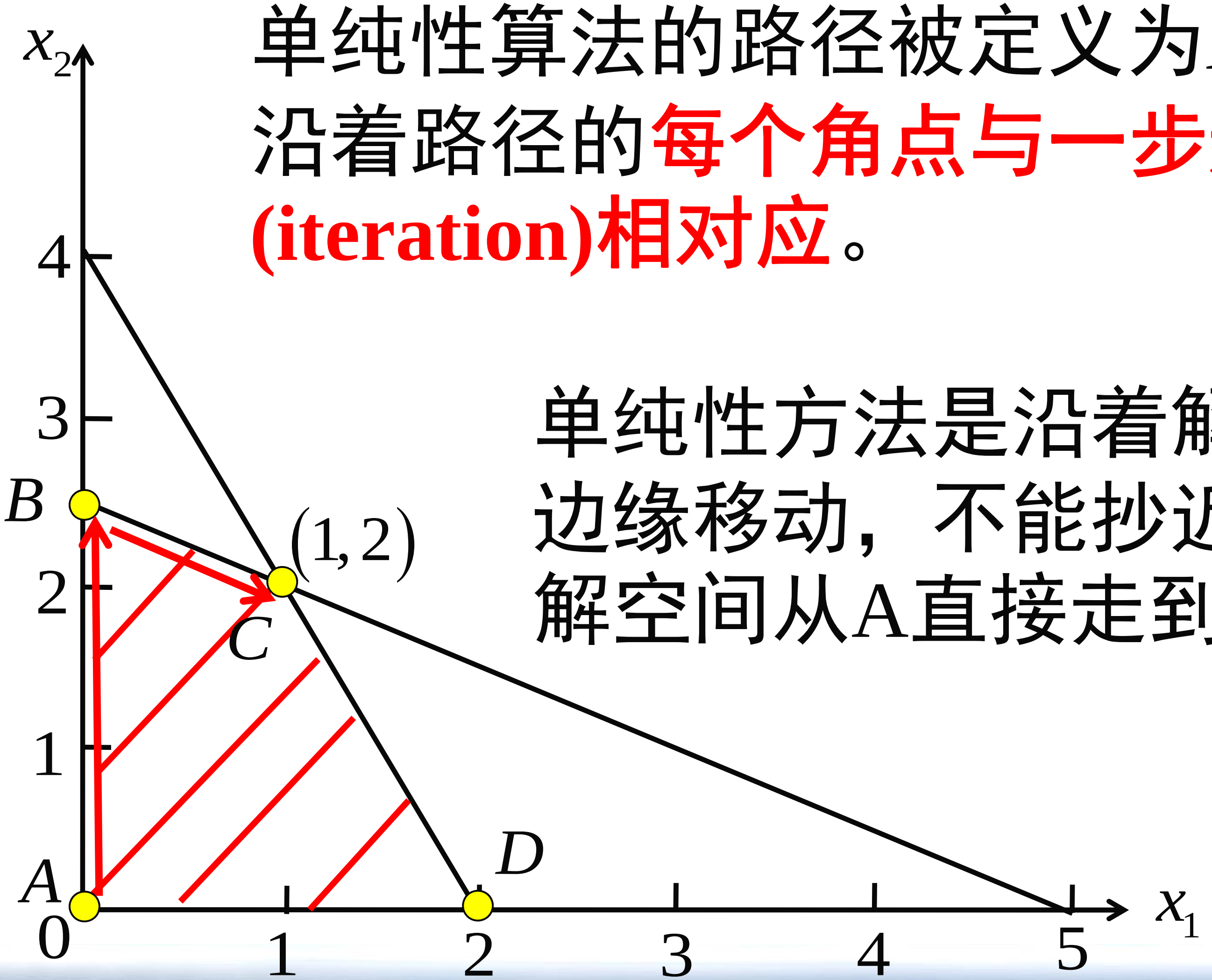
单纯形方法

角点	基变量	非基变量
A	s_1, s_2	x_1, x_2
B	x_2, s_1	s_2, x_1
C	x_1, x_2	s_1, s_2



在点B，单纯性方法这时再增加x1的值，到达改进的角点C，它是最优点。

单纯形方法



单纯性算法的路径被定义为A->B->C。沿着路径的**每个角点与一步迭代(iteration)相对应**。

单纯性方法是沿着解空间的边缘移动，不能抄近路通过解空间从A直接走到C。

单纯形方法

角点	基变量	非基变量
A	s_1, s_2	x_1, x_2
B	x_2, s_1	s_2, x_1
C	x_1, x_2	s_1, s_2

从A->B，在A处的非基变量x_2变成B处的基变量，且在A处的基变量s_2变成在B处的非基变量。

在单纯形方法中，x_2为**进基变量**(entering variable，它进入基本可行解)，s_2为**离基变量**(leaving variable，它离开基本可行解)。

单纯形方法

通过实例展示单纯形迭代的计算细节，包括确定进基变量和离基变量的准则，以及达到最优解时的终止计算准则。

单纯形方法

- 将例1模型表示成等式约束形式：

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad 6x_1 + 4x_2 + s_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 24\\ x_1 + 2x_2 \qquad +s_2 \qquad\qquad\qquad &= 6\\ -x_1 + x_2 \qquad\qquad + s_3 \qquad\quad &= 1\\ x_2 \qquad\qquad\qquad + s_4 &= 2\end{aligned}$$

$$x_1 , x_2 , s_1 , s_2 , s_3 , s_4 >=0$$

目标方程为： $z - 5x_1 - 4x_2 = 0$

单纯形方法

- 初始单纯形表：

基	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	解
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

表的设计指定了基变量和非基变量的集合，同时也提供了相应于初始迭代的解。

单纯形方法

令非基变量$(x_1,x_2)=(0,0)$，注意到表中z的系数和基变量(s_1,s_2,s_3,s_4)特定的0-1排列，可立即得到下面的解：

$z=0$；$s_1=24$；$s_2=6$；$s_3=1$；$s_4=2$。

- 由表中最左端基列所列出的基变量和最右端解列所列出的对应值来显示。该表通过指定它的基变量及其值，定义了当前的角点和目标函数z相应的值。
- 非基变量(不在基列中)总是等于零。

单纯形方法

- 初始解是最优解吗？

目标函数$z=5x_1+4x_2$，可增加x_1和x_2改进这个解。

- 最优性条件

选择具有最正系数的变量作为进基变量。因为单纯形表将目标函数表示为

$z-5x_1-4x_2=0$，则进基变量将对应于目标方程中具有最负系数的变量。

单纯形方法

- 单纯形表中确定离基变量

计算方程的右端项(解列)与相应的进基变量下方的约束系数的非负比。

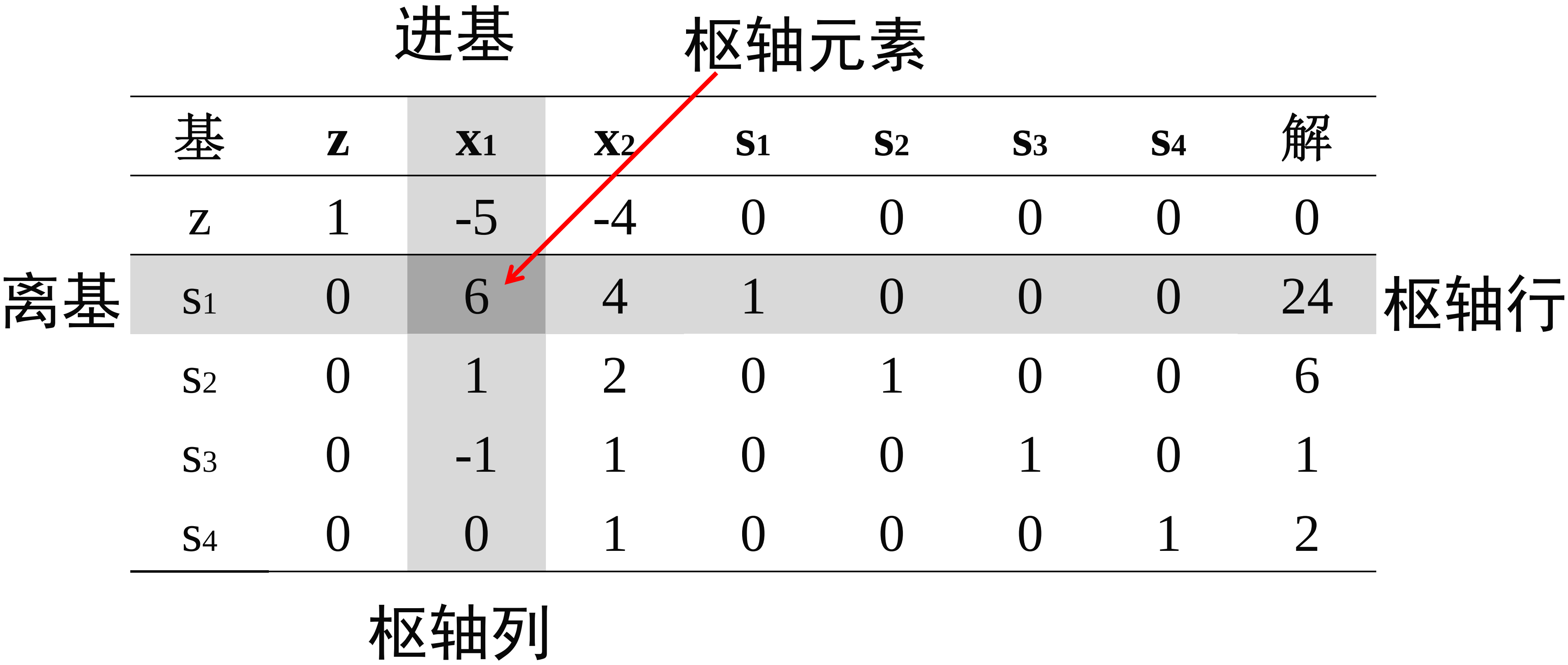
基	进基x_1	解	比
s_1	6	24	$x_1=24/6=4$ 最小值
s_2	1	6	$x_1=6/1=6$
s_3	-1	1	$x_1=1/-1=-1$(不考虑)
s_4	0	2	$x_1=2/0$ (不考虑)

- 可行性条件(二维几何解释)

具有最小非负比的基变量为离基变量。

单纯形方法

- Gauss-Jordan行运算



进基

枢轴元素

离基

枢轴行

基	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	解
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

枢轴列

单纯形方法

- Gauss-Jordan行运算

  (1)枢轴行

    (a)在基列中，以进基变量代替离基变量

    (b)新的枢轴行=当前枢轴行/枢轴元素

  (2)所有其他行

    新的行=当前行-当前行枢轴列的系数*新的枢轴行

单纯形方法

(1)枢轴行

在基列中，以x_1代替s_1

新的x_1行=当前s_1行/6

=(0 6 4 1 0 0 0 24)/6

=(0 1 2/3 1/6 0 0 0 4)

(2)所有其他行

新的z行=当前z行-(-5)*新的x_1行

=(1 -5 -4 0 0 0 0 0)-(-5)*(0 1 2/3 1/6 0 0 0 4)

=(1 0 -2/3 5/6 0 0 0 20)

单纯形方法

新的s_2行=当前s_2行-(1)*新的x_1行

=(0 1 2 0 1 0 0 6)-(1)*(0 1 2/3 1/6 0 0 0 4)

=(0 0 4/3 -1/6 1 0 0 2)

新的s_3行=当前s_3行-(-1)*新的x_1行

=(0 -1 1 0 0 1 0 1)-(-1)*(0 1 2/3 1/6 0 0 0 4)

=(0 0 5/3 1/6 0 1 0 5)

新的s_4行=当前s_4行-(0)*新的x_1行

=(0 0 1 0 0 0 1 2)-(0)*(0 1 2/3 1/6 0 0 0 4)

=(0 0 1 0 0 0 1 2)

单纯形方法

- 新的单纯形表：

基	**z**	**x_1**	**x_2**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**s_4**	解
z	1	0	-2/3	5/6	0	0	0	20
x_1	0	1	2/3	1/6	0	0	0	4
s_2	0	0	4/3	-1/6	1	0	0	2
s_3	0	0	5/3	1/6	0	1	0	5
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

非基变量x_2和s_1为0，新的基本解($x_1=4$; $s_2=2$; $s_3=5$; $s_4=2$)，新的目标函数值$z=20$。

单纯形方法

基	**z**	**x_1**	**x_2**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**s_4**	解
z	1	0	-2/3	5/6	0	0	0	20

- 最优性条件表明x_2为进基变量。
- 根据可行性条件计算：

基	进基x_2	解	比
x_1	2/3	4	x_2=4/(2/3)=6
s_2	4/3	2	x_2=2/(4/3)=3/2(最小值)
s_3	5/3	5	x_2=5/(5/3)=3
s_4	1	2	x_2=2/1=2

单纯形方法

(1)枢轴行

在基列中，以x_2代替s_2

新的x_2行=当前s_2行/(4/3)

=(0 0 1 -1/8 3/4 0 0 3/2)

(2)所有其他行

新的z行=当前z行-(-2/3)*新的x_2行

=(1 0 0 3/4 1/2 0 0 21)

单纯形方法

新的x_1行=当前x_1行-(2/3)*新的x_2行

=(0 1 0 1/4 -1/2 0 0 3)

新的s_3行=当前s_3行-(5/3)*新的x_2行

=(0 0 0 3/8 -5/4 1 0 5/2)

新的s_4行=当前s_4行-(1)*新的x_2行

=(0 0 0 1/8 -3/4 0 1 1/2)

单纯形方法

- 新的单纯形表：

基	**z**	**x_1**	**x_2**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**s_4**	解
z	1	0	0	3/4	1/2	0	0	21
x_1	0	1	0	1/4	-1/2	0	0	3
x_2	0	0	1	-1/8	3/4	0	0	3/2
s_3	0	0	0	3/8	-5/4	1	0	5/2
s_4	0	0	0	1/8	-3/4	0	1	1/2

非基变量s_1和s_2为0，新的基本解(x_1=3; x_2=3/2; s_3=5/2; s_4=1/2)，新的目标函数值z=21。

单纯形方法

基	**z**	**x_1**	**x_2**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**s_4**	解
z	1	0	0	3/4	1/2	0	0	21

- 基于最优性条件，z行中相应于非基变量s_1和s_2的系数没有一个是负的。因此，最后一张表是最优的。

单纯形方法

- 单纯形法的总结

处理最大化和最小化问题中，最优性条件的规则正好相反，可行性条件规则一致。

最优性条件 在最大化(最小化)问题中，进基变量时z行中具有最负(最正)系数的非基变量。如有多个可任选其一。当非基变量的所有z行系数是非负的(非正的)时，迭代达到最优值。

可行性条件 对于最大化和最小化问题，离基变量都是具有最小非负比(带有严格的正分母)的基变量。如有多个可任选其一。

单纯形方法

- 单纯形法的总结

  Gauss-Jordan行运算

  (1)枢轴行

  (a)在基列中，用进基变量替换离基变量

  (b)新的枢轴行=当前枢轴行/枢轴元素

  (2)所有其他行

  新的行=当前行-当前行枢轴列的系数

  *新的枢轴行

单纯形方法

单纯形方法的步骤：

第1步 确定初始基本可行解。

第2步 用最优性条件选择一个进基变量。如果没有进基变量，停止计算；上一个解就是最优的。否则，转到第3步。

第3步 用可行性条件选择离基变量。

第4步 用适当的Gauss-Jordan行运算确定新的基本解。转到第2步。

单纯形方法

第一次课案例　完整模型

$$\max\ z = 2x + y$$

$$\text{s.t.}\quad 5y \le 15$$

$$6x+2y \le 24$$

$$x+y \le 5$$

$$x, y \ge 0$$

单纯形方法

- 将完整模型表示成等式约束形式：

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

$$\text{s.t.} \qquad 5x_2 + s_1 = 15$$

$$6x_1 + 2x_2 + s_2 = 24$$

$$x_1 + x_2 + s_3 = 5$$

$$x_1 , x_2 , s_1 , s_2 , s_3 >= 0$$

目标方程为： $z - 2x_1 - x_2 = 0$

单纯形方法

- 单纯形表：

基	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	解	
z	1	-2	-1	0	0	0	0	
s_1	0	0	5	1	0	0	15	15/0 不考虑
s_2	0	6	2	0	1	0	24	24/6=4
s_3	0	1	1	0	0	1	5	5/1=5

x_1为进基变量，s_2为离基变量。

新的x_1行=当前s_2行/6

=(0 1 1/3 0 1/6 0 4)

单纯形方法

新的z行=当前z行-(-2)*新的x_1行

=(1 0 -1/3 0 1/3 0 8)

新的s_1行=当前s_1行-(0)*新的x_1行

=(0 0 5 1 0 0 15)

新的s_3行=当前s_3行-(1)*新的x_1行

=(0 0 2/3 0 -1/6 1 1)

单纯形方法

- 新的单纯形表：

基	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	解	
z	1	0	-1/3	0	1/3	0	8	
s_1	0	0	5	1	0	0	15	15/5=3
x_1	0	1	1/3	0	1/6	0	4	4/(1/3)=12
s_3	0	0	2/3	0	-1/6	1	1	1/(2/3)=3/2

x_2为进基变量，s_3为离基变量。

新的x_2行=当前s_3行/(2/3)

=(0 0 1 0 -1/4 3/2 3/2)

单纯形方法

新的z行=当前z行-(-1/3)*新的x_2行

=(1 0 0 0 1/4 1/2 17/2)

新的s_1行=当前s_1行-(5)*新的x_2行

=(0 0 0 1 5/4 -15/2 15/2)

新的x_1行=当前s_3行-(1/3)*新的x_2行

=(0 1 0 0 1/12 -1/2 7/2)

单纯形方法

- 新的单纯形表：

基	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	解
z	1	0	0	0	1/4	1/2	17/2
s_1	0	0	0	1	5/4	-15/2	15/2
x_1	0	1	0	0	1/12	-1/2	7/2
x_2	0	0	1	0	-1/4	3/2	3/2

- 基于最优性条件，z行中相应于非基变量s_2和s_3的系数没有一个是负的。因此，最后一张表是最优的。

本讲内容

一、等式形式的线性规划模型

二、图形解与代数解转换

三、单纯性方法

四、改进单纯形方法

五、单纯性方法的特殊情况

改进单纯形方法

基本单纯形方法：所有约束是(<=)且有非负右端项的线性规划方便地提供了全部为松弛变量的初始基本可行解。包含(=)和/或(>=)约束的模型就不是如此。

带有(=)和(>=)约束初始“坏状态”线性规划的求解过程是使用在最初迭代中扮演松弛变量角色的人工变量，然后在稍后的迭代中恰当地处理它们。

改进单纯形方法：大M方法和两阶段法。

大*M*方法

大*M*方法以等式形式的线性规划开始。

如果第*i*个等式约束没有松弛变量(或能够扮演松弛变量角色的变量)，那么将人工变量R_i加入到初始解中，类似于所有松弛变量为基本解的情况。

人工变量并不是原始线性规划模型的一部分，对于这些变量，在目标函数中对它们制定非常高的惩罚，强迫它们在最优解中等于零。如果问题有可行解，这种情况总会发生。

大*M*方法

人工变量的惩罚规则

已知M为一个充分大的正数（用数学的语言描述，即M-> ∞）,人工变量的目标系数表示成适当的惩罚：

$$\text{人工变量的目标系数}=\begin{cases} -M\text{，在最大化问题中} \\ M\text{，在最小化问题中} \end{cases}$$

大*M*方法

例1 $\min\ z = 4x_1 + x_2$

s.t. $3x_1+x_2 = 3$

$4x_1+3x_2 >= 6$

$x_1+2x_2 <= 4$

$x_1 , x_2 >= 0$

大*M*方法以等式形式的线性规划开始：

第2个约束减去剩余变量x_3，

第3个约束增加松弛变量x_4。

大*M*方法

等式形式：

$$
\begin{aligned}
\min\ \ & z = 4x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\ \ & 3x_1+x_2 \qquad\qquad\qquad = 3 \\
& 4x_1+3x_2 - x_3 \qquad = 6 \\
& x_1+2x_2 \qquad\quad +x_4 = 4 \\
& x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4 >= 0
\end{aligned}
$$

第3个方程有松弛变量x_4，但第1个和第2个方程却没有。因此，分别增加人工变量R_1和R_2，并在目标函数中用MR_1+MR_2惩罚它们(因为求极小)。

大*M*方法

$$\min \ z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 3x_1+x_2 \qquad\qquad + R_1 = 3 \\ & 4x_1+3x_2 - x_3 \qquad\qquad +R_2 = 6 \\ & x_1+2x_2 \qquad +x_4 \qquad\qquad = 4 \\ & x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , R_1 , R_2 >= 0 \end{aligned}$$

初始基本解由$(R_1,R_2,x_4)=(3,6,4)$给出。

*M*在单纯形表中需要进行代数运算，如用符号会增加没有必要的困难，可用M的适当取值简化。

大*M*方法

*M*的取值依赖于初始线性规划的数据。

***M*相对于初始目标系数必须是充分大**，以使得它将起到惩罚作用迫使人工变量在最优解中取值为零。

$$\min\ z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2 \quad M=100$$

基	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**R_1**	**R_2**	**x_4**	解
z	-4	-1	0	-100	-100	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

大*M*方法

进行单纯形方法之前，**需要将z行与表的其他部分保持一致**。

非基变量$x_1=x_2=x_3=0$，基变量$R_1=3,R_2=6,x_4=4$。

z=100*3+100*6=900 而不是z行右端项当前值0。不一致是由于R_1和R_2在z行有非零系数造成的。

在z行选用适当的约束方法替换出R_1和R_2 。

新的z行=旧的z行+(100*R_1行+100*R_2行)

大M方法

基	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	解
z	696	399	-100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

z=900，与初始基本可行解$R_1=3, R_2=6, x_4=4$ 一致。

应用单纯形法中的最优性和可行性条件，以及Gauss-Jordan行运算进行计算。

大M方法

目标函数求最小值，在z行具有最正系数的变量进入基本解。

基	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	解	
z	696	399	-100	0	0	0	900	
R_1	3	1	0	1	0	0	3	3/3=1
R_2	4	3	-1	0	1	0	6	6/4=3/2
x_4	1	2	0	0	0	1	4	4/1=4

x_1为进基变量，R_1为离基变量。

大*M*方法

新的x_1行=当前R_1行/枢轴元素

=(1 1/3 0 1/3 0 0 1)

新的z行=当前z行-(696)*新的x_1行

=(0 167 -100 -232 0 0 204)

新的R_2行=当前R_2行-(4)*新的x_1行

=(0 5/3 -1 -4/3 1 0 2)

新的x_4行=当前x_4行-(1)*新的x_1行

=(0 5/3 0 -1/3 0 1 3)

大*M*方法

基	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	解	
z	0	167	-100	-232	0	0	204	
x_1	1	1/3	0	1/3	0	0	1	1/(1/3)=3
R_2	0	5/3	-1	-4/3	1	0	2	2/(5/3)=6/5
x_4	0	5/3	0	-1/3	0	1	3	3/(5/3)=9/5

新的x_2行=当前R_2行/枢轴元素

=(0 1 -3/5 -4/5 3/5 0 6/5)

大*M*方法

新的z行=当前z行-(167)*新的x_2行

=(0 0 1/5 -492/5 -501/5 0 18/5)

新的x_1行=当前x_1行-(1/3)*新的x_2行

=(1 0 1/5 3/5 -1/5 0 3/5)

新的x_4行=当前x_4行-(5/3)*新的x_2行

=(0 0 1 1 -1 1 1)

大M方法

基	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	解	
z	0	0	$\boxed{1/5}$	-492/5	-501/5	0	18/5	
x_1	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5	(3/5)/(1/5)=3
x_2	0	1	-3/5	4/5	3/5	0	6/5	--
x_4	0	0	1	1	-1	1	1	1/1=1

新的x_3行=当前x_4行/枢轴元素

=(0 0 1 1 -1 1 1)

大M方法

新的z行=当前z行-(1/5)*新的x_3行

=(0 0 0 -491/5 -100 -1/5 17/5)

新的x_1行=当前x_1行-(1/5)*新的x_3行

=(1 0 0 2/5 0 -1/5 2/5)

新的x_2行=当前x_2行-(3/5)*新的x_3行

=(0 1 0 7/5 0 3/5 9/5)

大*M*方法

基	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	解
z	0	0	0	-491/15	-100	-1/5	17/5
x_1	1	0	0	2/5	0	-1/5	2/5
x_2	0	1	0	7/5	0	3/5	9/5
x_3	0	0	1	1	-1	1	1

非基变量$R_1=R_2=x_4=0$,

最优值$x_1=2/5$, $x_2=9/5$, $z=17/5$ 。

大*M*方法

如果线性规划没有可行解，惩罚项M的使用将不能迫使在最终的单纯性迭代中人工变量取零值。

在这种情况下，最终的单纯形表将**至少包括一个人工变量取正值。**

两阶段方法

在大M方法中，惩罚值M的使用，相对于实际模型的目标系数M而言必须很大，这可能会导致较大的舍入误差，造成单纯性计算精度降低。

两阶段法采用连同常数M一起去掉的办法来减少这个困难。

两阶段法分两个阶段求解线性规划：阶段I试图求一个初始基本可行解，找到一个解后，调用阶段II求解原问题。

两阶段方法

- 两阶段方法的概括

阶段I 将问题变成等式约束形式，并在约束中增加必要的人工变量，以保证找到一个初始基本解。接着求相应方程的基本解，使得无论线性规划是求极大化还是极小化，总是使人工变量之和达到最小。如果其和的最小值为正，则先行规划问题没有可行解，此过程结束。否则，进行阶段II。

阶段II 使用阶段I得到的可行解作为原始问题的初始可行解。

两阶段方法

- 阶段I

$$
\begin{array}{lllll}
\min & r = R_1 + R_2 & & & \\
\text{s.t.} & 3x_1+x_2 & & + R_1 & = 3 \\
 & 4x_1+3x_2 - x_3 & & +R_2 & = 6 \\
 & x_1+2x_2 & +x_4 & & = 4 \\
 & x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , R_1 , R_2 >= 0 & & &
\end{array}
$$

两阶段方法

基	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	解
r	0	0	0	-1	-1	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

$x_1=x_2=x_3=0$,初始基本可行解$R_1=3$,$R_2=6$,$x_4=4$,
$r=R_1+R_2=3+6=9$与$r=0$矛盾，需调整r行。
原因？

两阶段方法

新的r行=旧的r行+(1*R_1行+1*R_2行)

=(7 4 -1 0 0 0 9)

基	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	解	
r	7	4	-1	0	0	0	9	
R_1	3	1	0	1	0	0	3	3/3=1
R_2	4	3	-1	0	1	0	6	6/4=3/2
x_4	1	2	0	0	0	1	4	4/1=4

x_1为进基变量，R_1为离基变量。

两阶段方法

新的x_1行=当前R_1行/枢轴元素

=(1 1/3 0 1/3 0 0 1)

新的r行=当前r行-(7)*新的x_1行

=(0 5/3 -1 -7/3 0 0 2)

新的R_2行=当前R_2行-(4)*新的x_1行

=(0 5/3 -1 -4/3 1 0 2)

新的x_4行=当前x_4行-(1)*新的x_1行

=(0 5/3 0 -1/3 0 1 3)

两阶段方法

基	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{R_1}$	$\mathbf{R_2}$	$\mathbf{x_4}$	**解**	
r	0	5/3	-1	-7/3	0	0	2	
x_1	1	1/3	0	1/3	0	0	1	1/(1/3)=3
R_2	0	5/3	-1	-4/3	1	0	2	2/(5/3)=6/5
x_4	0	5/3	0	-1/3	0	1	3	3/(5/3)=9/5

新的x_2行=当前R_2行/枢轴元素

=(0 1 -3/5 -4/5 3/5 0 6/5)

两阶段方法

新的r行=当前r行-(5/3)*新的x_2行

=(0 0 0 -1 -1 0 0)

新的x_1行=当前x_1行-(1/3)*新的x_2行

=(1 0 1/5 3/5 -1/5 0 3/5)

新的x_4行=当前x_4行-(5/3)*新的x_2行

=(0 0 1 1 -1 1 1)

两阶段方法

基	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	解
r	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
x_2	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
x_4	0	0	1	1	-1	1	1

$R_1=R_2=x_3=0$,此时最小值r=0,阶段I产生了基本可行解$x_1=3/5$,$x_2=6/5$,$x_4=1$。

人工变量已完成其使命，能从表中连同它们所在的列一起去掉，并转入阶段II。

两阶段方法

- **阶段II**

去掉人工变量列后，原始问题如下：

$$\min \ z = 4x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1+1/5x_3 = 3/5$$

$$x_2-3/5x_3 = 6/5$$

$$x_3+x_4 = 1$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 >= 0$$

两阶段方法

阶段II问题的单纯形表如下：

基	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	解
z	-4	-1	0	0	0
x_1	1	0	1/5	0	3/5
x_2	0	1	-3/5	0	6/5
x_4	0	0	1	1	1

$x_3=0$,初始基本可行解$x_1=3/5, x_2=6/5, x_4=1$，

$z=4x_1+x_2=18/5$与$z=0$矛盾，需调整z行。

两阶段方法

新的z行=旧的z行+(4*x_1行+1*x_2行)

=(0 0 1/5 0 18/5)

基	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	解	
z	0	0	$\boxed{1/5}$	0	18/5	
x_1	1	0	1/5	0	3/5	(3/5)/(1/5)=3
x_2	0	1	-3/5	0	6/5	--
x_4	0	0	1	1	1	1/1=1

x_3为进基变量，x_4为离基变量。

两阶段方法

新的x_3行=当前x_4行/枢轴元素

=(0 0 1 1 1)

新的z行=当前z行-(1/5)*新的x_3行

=(0 0 0 -1/5 17/5)

新的x_1行=当前x_1行-(1/5)*新的x_3行

=(1 0 0 -1/5 2/5)

新的x_2行=当前x_2行-(-3/5)*新的x_3行

=(0 1 0 3/5 9/5)

两阶段方法

基	x_1	x_2	x_3	x_4	解
z	0	0	0	-1/5	17/5
x_1	1	0	0	-1/5	2/5
x_2	0	1	0	3/5	9/5
x_3	0	0	1	1	1

非基变量$x_4=0$,

最优值$x_1=2/5$, $x_2=9/5$, $z=17/5$ 。

本讲内容

一、等式形式的线性规划模型

二、图形解与代数解转换

三、单纯性方法

四、改进单纯形方法

五、单纯性方法的特殊情况

单纯形方法的特殊情况

（1）退化

（2）可选择最优解

（3）无界解

（4）不存在解

退化

在单纯形方法可行性条件中，最小非负比可能循环出现。

当这种情况发生时，至少有一个基变量在下一次迭代中变为零，并称**新的解是退化的**。

退化解的不方便是产生循环。从实用的观点来看，此条件揭示了模型至少有一个多余的约束。

退化

- 例

$$\max\ z = 3x_1 + 9x_2$$

$$\text{s.t.}\quad x_1+4x_2 <= 8$$

$$x_1+2x_2 <= 4$$

$$x_1 , x_2 >= 0$$

约束条件添加松弛变量x_3和x_4。

退化

基	x_1	x_2	x_3	x_4	解
z	-3	-9	0	0	0
x_3	1	4	1	0	8
x_4	1	2	0	1	4
z	-3/4	0	9/4	0	18
x_2	1/4	1	1/4	0	2
x_4	1/2	0	-1/2	1	0
z	0	0	3/2	3/2	18
x_2	0	1	1/2	-1/2	2
x_1	1	0	-1	2	0

退化

退化问题的（二维）图解表示。

退化问题模型存在多余的约束。在实际问题中，了解到一些资源是多余的，此信息可引导发现模型构造中的缺陷。

可选择最优解

当目标函数平行于非冗余的紧约束（即在最优解处作为方程而被满足的约束）解，目标函数可以在多余一个解点处有相同的最优值，因此产生可选择最优解。

可选择最优解

- 例

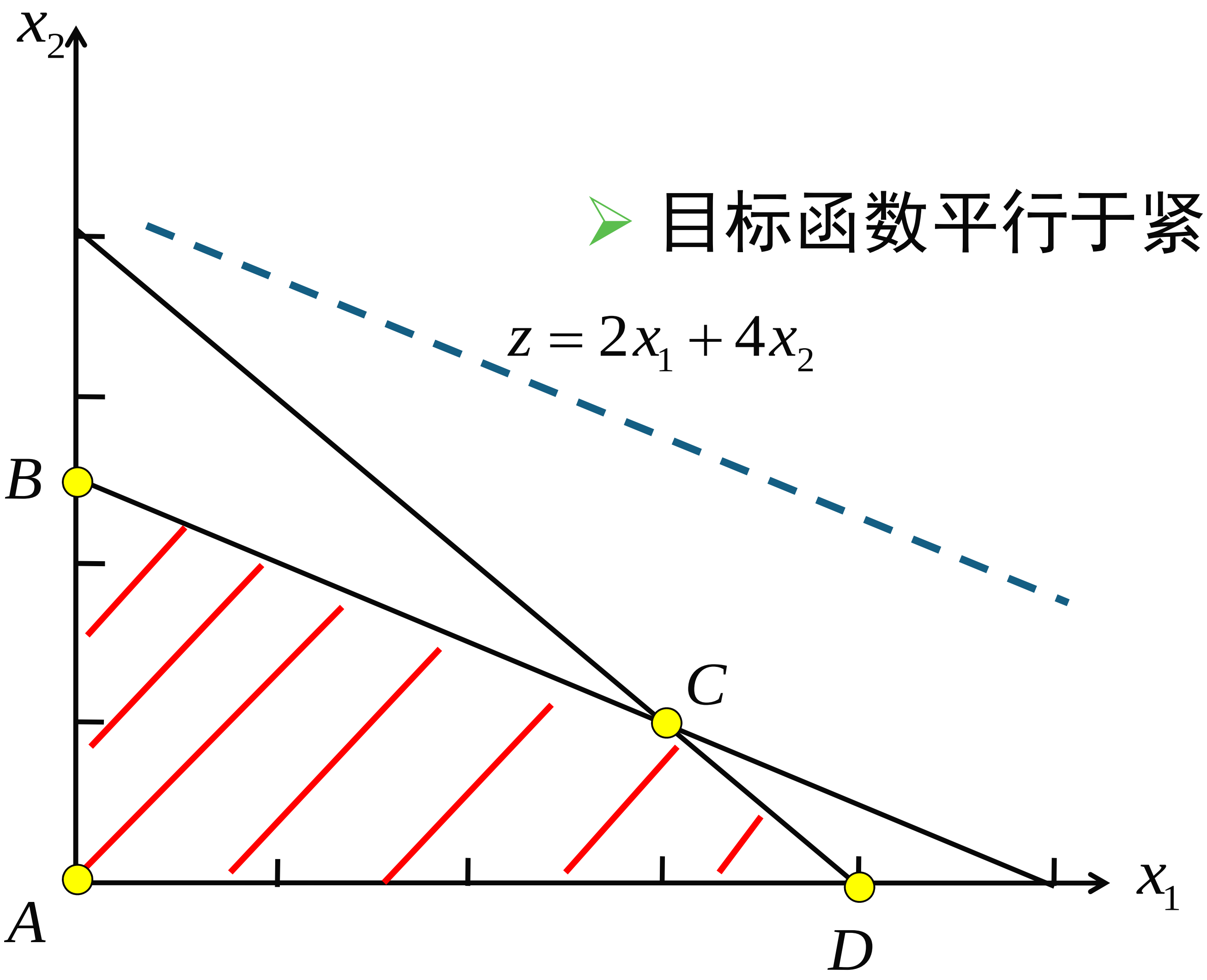
$$\max \quad z = 2x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} \qquad x_1 + 2x_2 <= 5$$

$$x_1 + x_2 <= 4$$

$$x_1 , x_2 >= 0$$

可选择最优解



- 目标函数平行于紧约束。

可选择最优解

基	x_1	x_2	x_3	x_4	解	
z	-2	-4	0	0	0	
x_3	1	2	1	0	5	
x_4	1	1	0	1	4	
z	0	0	2	0	10	
x_2	1/2	1	1/2	0	5/2	B点
x_4	1/2	0	-1/2	1	3/2	
z	0	0	2	0	10	
x_2	0	1	1	-1	1	C点
x_1	1	0	-1	2	3	

可选择最优解

如何从单纯形表中知道可选择最优解存在呢？

在第一次迭代表中，z行方程非基变量x_1的系数是零，表明x_1进入基本解而不会改变z的值，但会引起变量值的改变。

在实际应用中，可选择最优解是有用的，因为可从许多最优解中选择而不会损害目标值。

无界解

在一些线性规划模型中，可以无限制地增加变量的值但不破坏任何一个约束，这意味着解空间至少有一个变量是无界的。

在此模型中，目标值可以无限制地增加（求极大值）或减少（求极小值），解空间和最优目标值都是无界的。

无界解

出现无界点可能是由于模型构造得不合理。在此类模型中最大可能的缺陷是一个或多个非多余约束没有考虑在内，或者一些约束的参数可能没有得到正确的估计。

无界解

- 例

$$\max \ z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 <= 10$$

$$2x_1 <= 40$$

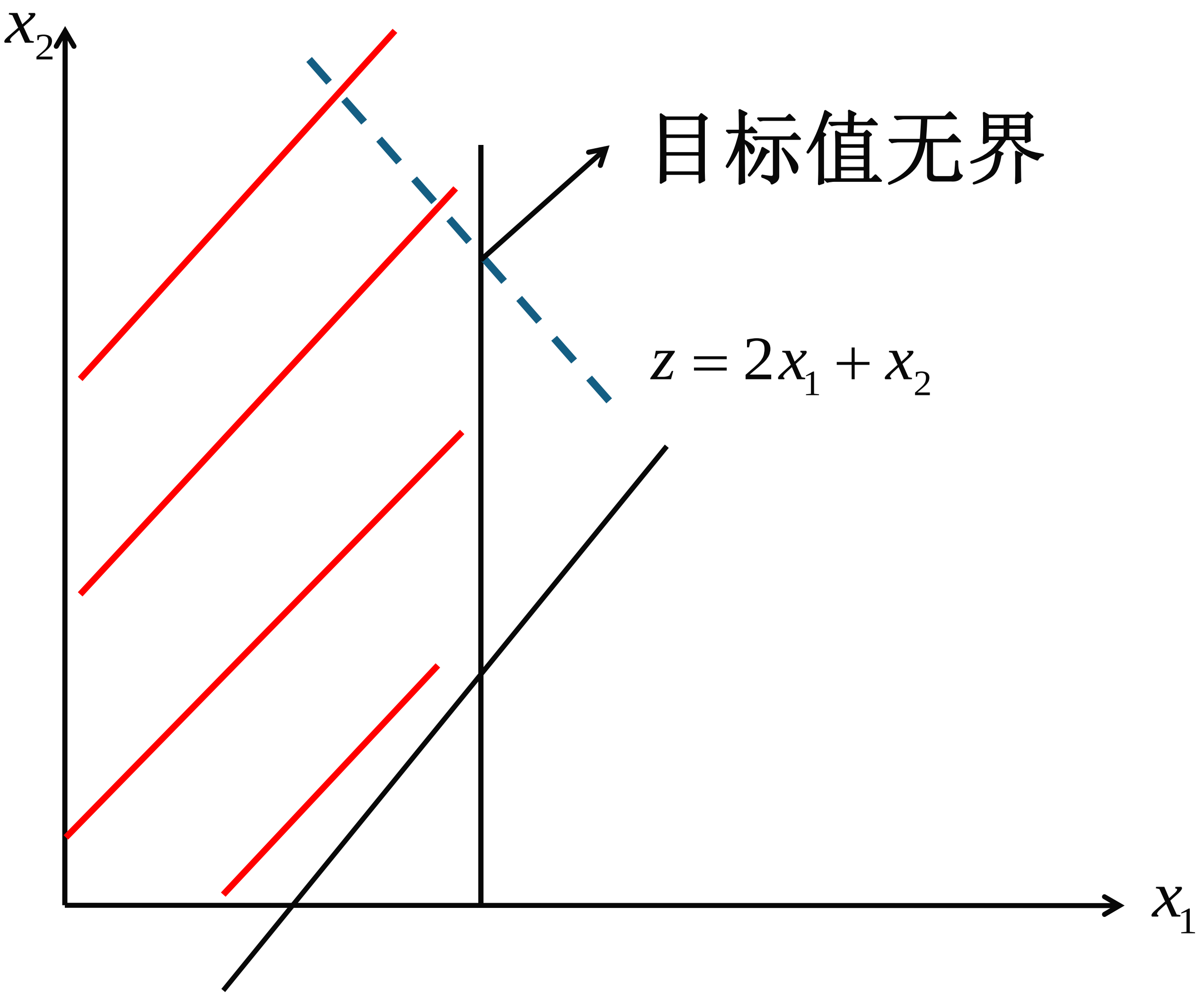
$$x_1 , x_2 >= 0$$

无界解

基	x_1	x_2	x_3	x_4	解
z	-2	-1	0	0	0
x_3	1	-1	1	0	10
x_4	2	0	0	1	40

x_1和x_2都能改进解z。因为x_1有最负的系数，通常选择它为进基变量。然后，在x_2下方所有约束的系数是负的或零，意味着没有离基变量，而且x_2能无限制地增加而不破坏任何约束。

无界解



不可行解

具有不相容约束的线性规划模型没有可行解。

如果所有的约束都是<=类型且具有非负的右端项，则这种情况将永远不会出现，因为松弛变量提供了一个可行解。

不可行解

对于其他类型的约束，可以使用人工变量。

尽管在目标函数中惩罚人工变量迫使它们在最优值处取零，这仅当模型有可行空间时才能够发生。否则，至少有一个人工变量在最优迭代中取值为正。

不可行解

- 例

$$\max\ z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 <= 2$$

$$3x_1 + 4x_2 >= 12$$

$$x_1,\ x_2 >= 0$$

不可行解

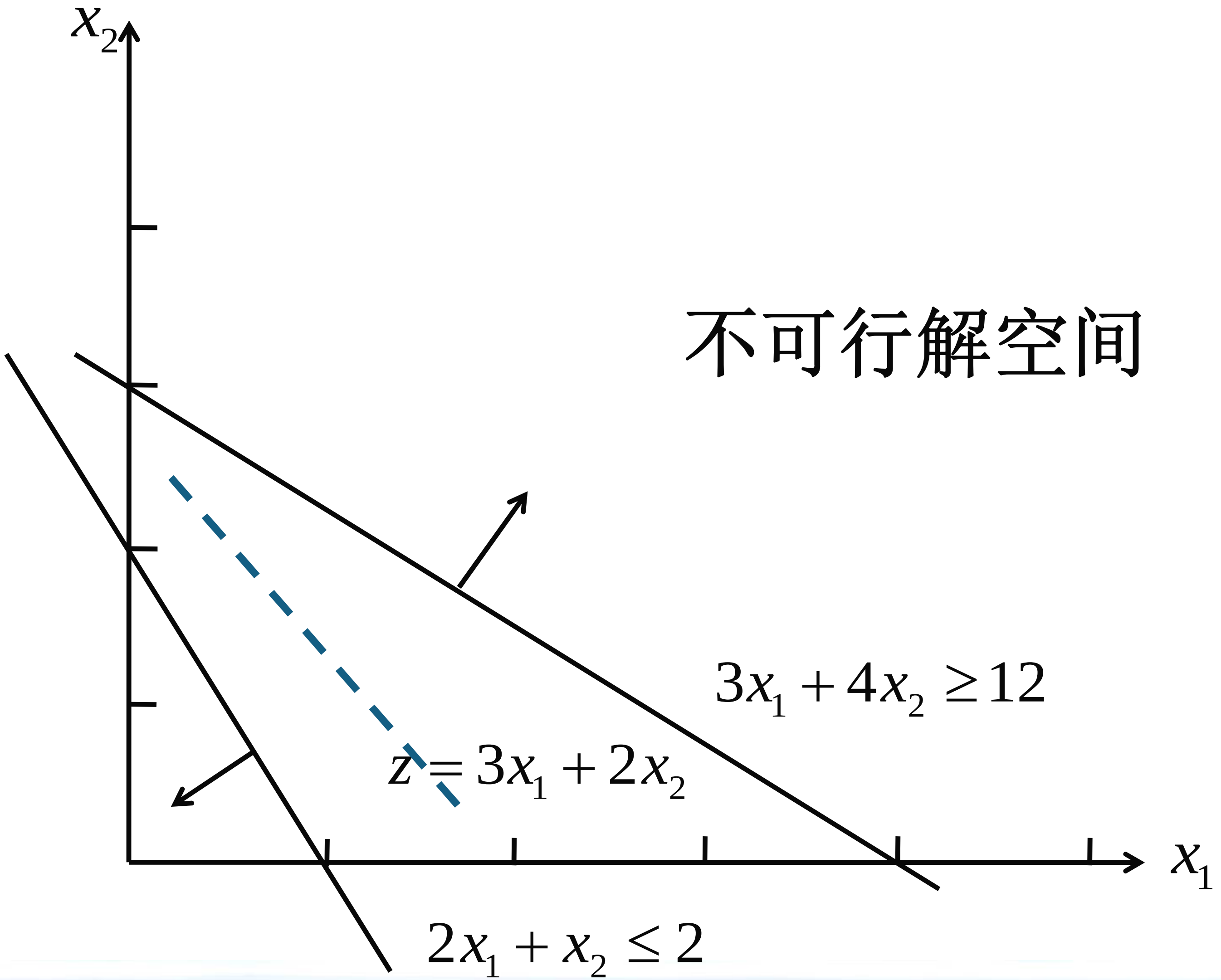
对于人工变量R使用惩罚M=100。

基	**x_1**	**x_2**	**x_4**	**x_3**	**R**	解
z	-303	-402	100	0	0	-1200
x_3	2	1	0	1	0	2
R	3	4	-1	0	1	12

基	**x_1**	**x_2**	**x_4**	**x_3**	**R**	解
z	501	0	100	402	0	-396
x_2	2	1	0	1	0	2
R	-5	0	-1	-4	1	4

人工变量R取值为正表明问题不可行。

不可行解



本节作业

- **习题1**

$$\max \ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &<= 8 \\ 4x_1 \quad &<= 16 \\ 4x_2 &<= 12 \\ x_1, x_2 &>= 0 \end{aligned}$$

本节作业

- 作业要求

1. 提交纸版作业；
2. 提交时间：下次课上课前
3. 写好学号、姓名和班次

谢谢 ！