# 第七讲 动态规划

北京航空航天大学计算机学院

# 本讲目标

- 了解动态规划递归思想；
- 掌握动态规划向前递归和向后递归方法；
- 掌握背包模型等动态规划应用问题。

# 本讲内容

**一、动态规划的递归性质**

二、后向递归

三、动态规划应用

# 动态规划

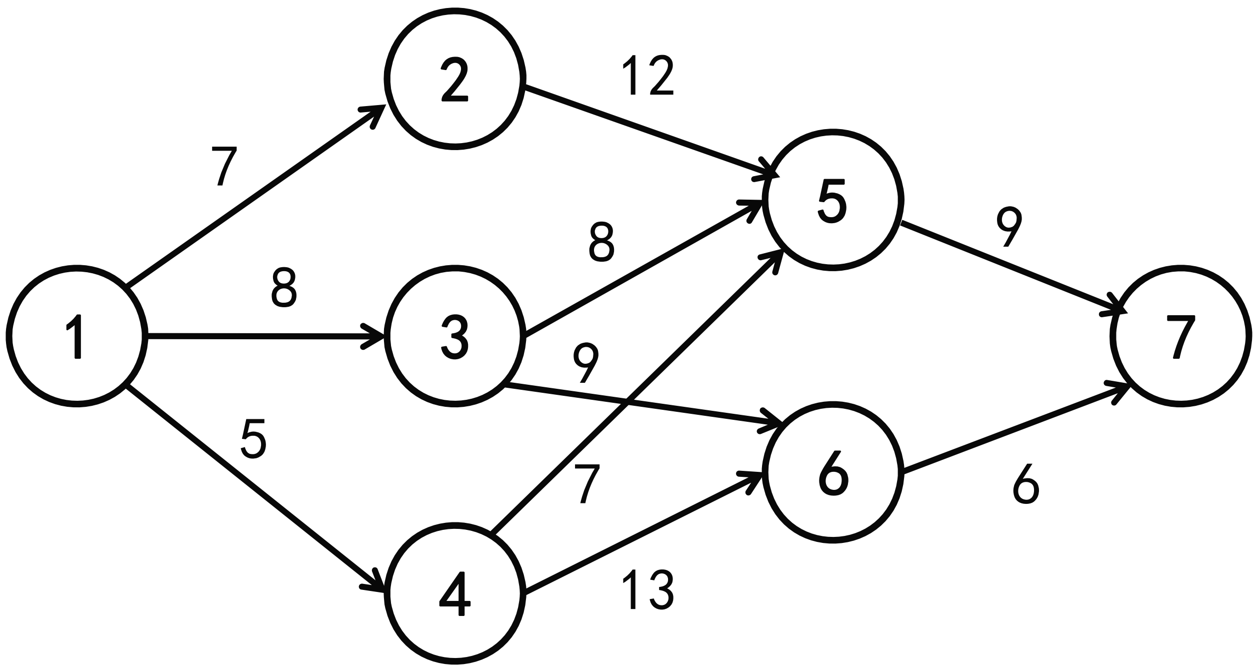
- 动态规划(Dynamic Programming)通过把一个多变量问题分解成若干个阶段，每个阶段组成为一个单变量的子问题，来求出这个多变量问题的最优解。
- 动态规划模型基本上是一种递归方程。

# 动态规划的递归性质

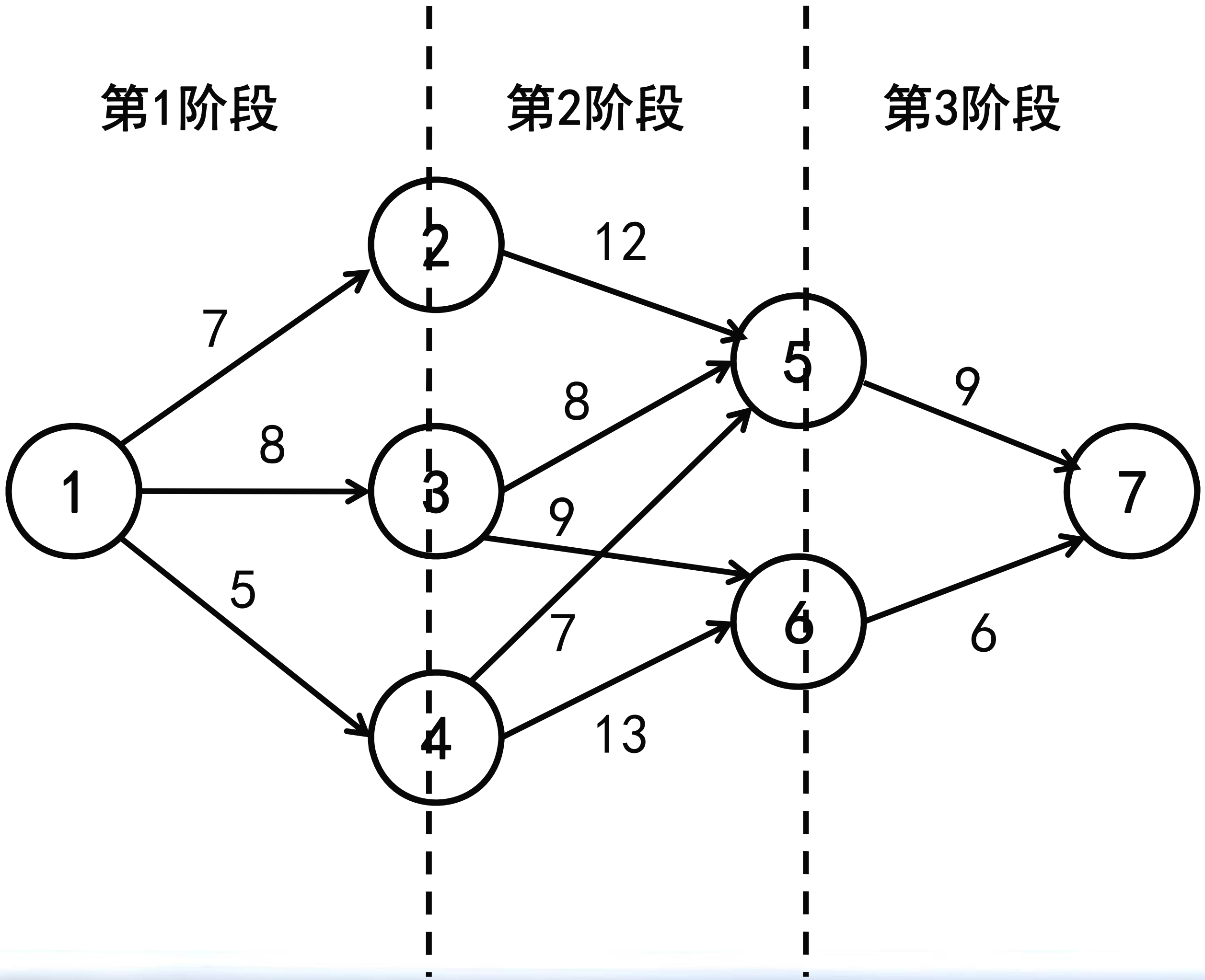
- 动态规划的计算是递归进行的，一个子问题的最优解作为下一个子问题的输入。当最后一个子问题求解完成，也就得到了整个问题的最优解。

# 动态规划的递归性质

- 例1：从出发城市节点1到目的城市节点7，选择一条最短的路径，节点2到节点6表示这些路径通过的中间城市



# 动态规划的递归性质



# 动态规划的递归性质

- 第1阶段

从节点1开始，阶段1包括3个终点（2，3，4）。

从节点1到节点2的最短距离=7

从节点1到节点3的最短距离=8

从节点1到节点4的最短距离=5

# 动态规划的递归性质

- 第2阶段

阶段2有两个终结点：节点5和节点6 。

到节点5的最短距离= $\min\limits_{i=2,3,4}${到节点 i 的最短距离+从节点 i 到节点5的最短距离}

$$=\min\begin{Bmatrix} 7+12=19 \\ 8+8=16 \\ 5+7=12 \end{Bmatrix}=12$$（节点4出发）

# 动态规划的递归性质

- 第2阶段

到节点6的最短距离= $\min\limits_{i=3,4}$ {到节点 i 的最短距离+从节点 i 到节点6的最短距离}

$$= \min\begin{Bmatrix} 8+9=17 \\ 5+13=18 \end{Bmatrix} = 17$$ （节点3出发）

从节点1到节点5的最短距离=12（从节点4出发）

从节点1到节点6的最短距离=17（从节点3出发）

# 动态规划的递归性质

- 第3阶段

到节点7的最短距离= $\min\limits_{i=5,6}${到节点 i 的最短距离+从节点 i 到节点7的最短距离}

$$= \min\begin{Bmatrix} 12+9=21 \\ 17+6=23 \end{Bmatrix} = 21$$ （节点5出发）

从节点1到节点7的最短距离=21（从节点5出发）

最短路径：1->4->5->7

# 动态规划的递归性质

- 动态规划中计算的基本特性：

（1）每个阶段所做的计算都是该阶段可行路径的函数，并且只针对该阶段；

（2）当前阶段仅仅连接到紧接着的上一阶段，与再前面的阶段无关。这种连接是以最短距离小结的形式表示出上一阶段的输出。

# 动态规划的递归性质

- 递归公式：

令$f_i(x_i)$表示阶段$i$到达节点$x_i$的最短距离，定义$d(x_{i-1},x_i)$为从节点$x_{i-1}$到节点$x_i$的距离，则$f_i$是利用下面的递归关系从$f_{i-1}$计算出来：

$$f_i(x_i)=\min_{\text{所有可行的}(x_{i-1},x_i)\text{路径}}\{d(x_{i-1},x_i)+f_{i-1}(x_{i-1})\}$$

从i=1开始，递归设置$f_0(x_0)=0$.

# 后向递归

- 前面的求解过程采用前向递归的方法，同样也能采用后向递归的方法求解。

后向递归方程为：

$$f_i(x_i) = \min_{\text{所有可行的}(x_i, x_{i+1})\text{路径}} \{d(x_i, x_{i+1}) + f_{i+1}(x_{i+1})\}$$

其中当$x_4=7$时$f_4(x_4)=0$. 相应计算顺序为$f_3$->$f_2$->$f_1$

# 后向递归

- 阶段3

由于节点7（$x_4$=7）分别只有一条路径连接到节点5和节点6（$x_3$=5和6），没有其他选择，因此阶段3的结果归纳为

| $x_3$ | $d(x_3,x_4)$ | 最优解 | |
|---|---|---|---|
| | $x_4=7$ | $f_3(x_3)$ | $x_4^*$ |
| 5 | 9 | 9 | 7 |
| 6 | 6 | 6 | 7 |

# 后向递归

- 阶段2

| $x_2$ | $d(x_2,x_3)+f_3(x_3)$ | | 最优解 | |
|---|---|---|---|---|
| | $x_3=5$ | $x_3=6$ | $f_2(x_2)$ | $x_3^*$ |
| 2 | 12+9=21 | -- | 21 | 5 |
| 3 | 8+9=17 | 9+6=15 | 15 | 6 |
| 4 | 7+9=16 | 13+6=19 | 16 | 5 |

阶段2的最优解可解释成：假如在城市2或城市4，最短路径将经过城市5；如果在城市3，则最短路径经过城市6.

# 后向递归

- 阶段1

| $x_1$ | $d(x_1,x_2)+f_2(x_2)$ | | | 最优解 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x_2=2$ | $x_2=3$ | $x_2=4$ | $f_1(x_1)$ | $x_2^*$ |
| 1 | 7+21=28 | 8+15=23 | 5+16=21 | 21 | 4 |

阶段1的最优解表示：城市1连到城市4. 接下来，阶段2的最优解把城市4连到城市5. 最后，阶段3的最优解把城市5连到城市7. 因此，最优的整条路径为1->4->5->7。

# 动态规划应用

- 动态规划模型的3个基本要素：

（1）定义阶段
（2）定义每个阶段的可选方案
（3）定义每个阶段的状态

状态的定义根据要建模的实际情况会有很大的不同。

# 动态规划应用

- 背包模型

经典的背包问题：一个徒步者必须决定在背包里携带哪些价值最大的物品。这个问题其实是一般性的资源分配模型，即有限资源分配多个可选方案，使得总收益最大。

# 动态规划应用

- 背包模型

对能装n件物品、W千克的背包问题，建立一个后向递归方程。令$m_i$为背包中物品$i$的数量，定义$r_i$和$w_i$分别是每单位物品$i$的收益和重量：

$$\max z = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_n m_n$$

$$s.t.\ \ w_1 m_1 + w_2 m_2 + \cdots + w_n m_n \le W$$

$$m_1, m_2, \ldots, m_n \ge 0 \quad \text{并且为整数}$$

# 动态规划应用

➢ 模型的3个要素：

（1）用物品i表示阶段i

（2）阶段i的可能方案用背包所装入的物品i的数量$m_i$来表示，相关的收益为$r_i m_i$，定义$\left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor$为小于等于$\frac{W}{w_i}$的最大整数

（3）阶段i的状态用$x_i$表示，其含义为放置到阶段（物品）i，i+1，…，n的总重量

# 动态规划应用

- 背包模型

$f_i(x_i)$=给定状态$x_i$下，阶段i，i+1，…，n的最大收益。

步骤1　把$f_i(x_i)$表示成下面$f_{i+1}(x_{i+1})$的函数

$$f_i(x_i)=\max_{m_i=0,1,\ldots,\left\lfloor \frac{W}{w_i}\right\rfloor}\{r_i m_i+f_{i+1}(x_{i+1})\}$$

步骤2　将$x_{i+1}$表示成$x_i$的函数，$f_i(x_i)$仅是$x_i$的函数，$x_i-x_{i+1}=w_i m_i$表示阶段i所用的重量。

$$f_i(x_i)=\max_{m_i=0,1,\ldots,\left\lfloor \frac{W}{w_i}\right\rfloor}\{r_i m_i+f_{i+1}(x_i-w_i m_i)\}$$

# 动态规划应用

- 例2：　一艘载货量4吨的货船可载装3种货物，下表给出每种货物i的单位重量$w_i$(吨)以及单位收益$r_i$（1万元），该货船应如何装载这些货物才能获得最大收益？

| 货物i | $w_i$ | $r_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 31 |
| 2 | 3 | 47 |
| 3 | 1 | 14 |

# 动态规划应用

- 阶段3

$$f_3(x_3) = \max_{m_3=0,1,\dots,4} \{14m_3\}$$

| $x_3$ | $14m_3$ | | | | | 最优解 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $m_3=0$ | $m_3=1$ | $m_3=2$ | $m_3=3$ | $m_3=4$ | $f_3(x_3)$ | $m_3^*$ |
| 0 | 0 | -- | -- | -- | -- | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 14 | -- | -- | -- | 14 | 1 |
| 2 | 0 | 14 | 28 | -- | -- | 28 | 2 |
| 3 | 0 | 14 | 28 | 42 | -- | 42 | 3 |
| 4 | 0 | 14 | 28 | 42 | 56 | 56 | 4 |

# 动态规划应用

- 阶段2

$$f_2(x_2) = \max_{m_2=0,1}\{47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)\}$$

| $x_2$ | $47m_2+f_3(x_2-3m_2)$ | | 最优解 | |
|---|---|---|---|---|
| | $m_2=0$ | $m_2=1$ | $f_2(x_2)$ | $m_2^*$ |
| 0 | 0+0=0 | -- | 0 | 0 |
| 1 | 0+14=14 | -- | 14 | 0 |
| 2 | 0+28=28 | -- | 28 | 0 |
| 3 | 0+42=42 | 47+0=47 | 47 | 1 |
| 4 | 0+56=56 | 47+14=61 | 61 | 1 |

# 动态规划应用

- 阶段1

$$f_1(x_1) = \max_{m_1=0,1,2} \{31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)\}$$

| $x_1$ | $31m_1+f_2(x_1-2m_1)$ | | | 最优解 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $m_1=0$ | $m_1=1$ | $m_1=2$ | $f_1(x_1)$ | $m_1^*$ |
| 0 | 0+0=0 | -- | -- | 0 | 0 |
| 1 | 0+14=14 | -- | -- | 14 | 0 |
| 2 | 0+28=28 | 31+0=31 | -- | 31 | 1 |
| 3 | 0+47=47 | 31+14=45 | -- | 47 | 0 |
| 4 | 0+61=61 | 31+28=59 | 62+0=62 | 62 | 2 |

- 最优解 $m_1^* = 2, m_2^* = 0, m_3^* = 0$

# 动态规划应用

- 劳动力规模模型

在建筑工程中，常用招工和解聘的做法来保证工人的数量满足工程的需要。招聘和解聘工人肯定需要额外的费用，如何在工程期间保持足够的劳动力?

# 动态规划应用

- 劳动力规模模型

假设工程为n个星期，且第 i 周最少需要$b_i$个劳动力。一种经济的做法：维持某个劳动力规模，让它大于通过招工方式达到的最小需求数。

假定$x_i$为第i周雇用的实际工人数，第i周可能出现2笔费用：$C_1(x_i-b_i)$是维持多余劳动力$(x_i-b_i)$的费用，$C_2(x_i-x_{i-1})$是招聘更多劳动力$(x_i-x_{i-1})$的费用。

# 动态规划应用

- 劳动力规模模型的三要素：

（1）用周i代表阶段i；

（2）阶段i的备选方案为$x_i$，它是第i周的工人数；

（3）阶段i的状态用第(i-1)阶段已有的劳动力数$x_{i-1}$来表示

$$f_i(x_{i-1}) = \min_{x_i \geq b_i}\{C_1(x_i - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\}$$

$$f_{n+1}(x_n) \equiv 0$$

从阶段n开始，用$x_n=b_n$开始计算，到阶段1停止。

# 动态规划应用

- 例3：某建筑工程承包商估计，在未来5周内，所需的劳动力数量分别为5，7，8，4和6个工人。对解雇的工人，每人每周的成本费用是300元，不论在哪一周，每次雇用工人的固定费用是400元，外加每人每周200元。

$$b_1 = 5, b_2 = 7, b_3 = 8, b_4 = 4, b_5 = 6$$

$$C_1(x_i - b_i) = 3(x_i - b_i), x_i > b_i$$

$$C_2(x_i - x_{i-1}) = 4 + 2(x_i - x_{i-1}), x_i > x_{i-1}$$

# 动态规划应用

- 阶段5 （$b_5=6$）

| $x_4$ | $C_1(x_5-6)+C_2(x_5-x_4)$ | 最优解 | |
|---|---|---|---|
| | $x_5=6$ | $f_5(x_4)$ | $x_5^*$ |
| 4 | 3(0)+4+2(2)=8 | 8 | 6 |
| 5 | 3(0)+4+2(1)=6 | 6 | 6 |
| 6 | 3(0)+0=0 | 0 | 6 |

# 动态规划应用

- 阶段4 （$b_4=4$）

| $x_3$ | $C_1(x_4-4)+C_2(x_4-x_3)+f_5(x_4)$ | | | 最优解 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x_4=4$ | $x_4=5$ | $x_4=6$ | $f_4(x_3)$ | $x_4^*$ |
| 8 | 3(0)+0+8=8 | 3(1)+0+6=9 | 3(2)+0+0=6 | 6 | 6 |

# 动态规划应用

- 阶段3 （$b_3$=8）

| $x_2$ | $C_1(x_3-8)+C_2(x_3-x_2)+f_4(x_3)$ | 最优解 | |
|---|---|---|---|
| | $x_3=8$ | $f_3(x_2)$ | $x_3^*$ |
| 7 | 3(0)+4+2(1)+6=12 | 12 | 8 |
| 8 | 3(0)+0+6=6 | 6 | 8 |

# 动态规划应用

➤ 阶段2 （$b_2$=7）

| $x_1$ | $C_1(x_2-7)+C_2(x_2-x_1)+f_3(x_2)$ | | 最优解 | |
|---|---|---|---|---|
| | $x_2$=7 | $x_2$=8 | $f_2(x_1)$ | $x_2^*$ |
| 5 | 3(0)+4+2(2)+12=20 | 3(1)+4+2(3)+6=19 | 19 | 8 |
| 6 | 3(0)+4+2(1)+12=18 | 3(1)+4+2(2)+6=17 | 17 | 8 |
| 7 | 3(0)+0+12=12 | 3(1)+4+2(1)+6=12 | 12 | 7 |
| 8 | 3(0)+0+12=12 | 3(1)+0+6=9 | 9 | 8 |

# 动态规划应用

- 阶段1 （$b_2=7$）

| $x_0$ | $C_1(x_1-5)+C_2(x_1-x_0)+f_2(x_1)$ | | | | 最优解 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1=5$ | $x_1=6$ | $x_1=7$ | $x_1=8$ | $f_2(x_1)$ | $x_1^*$ |
| 0 | 3(0)+4+2(5)+19=33 | 3(1)+4+2(6)+17=36 | 3(2)+4+2(7)+12=36 | 3(2)+4+2(8)+9=35 | 33 | 5 |

- 最优解

$$x_0=0 \to x_1^*=5 \to x_2^*=8 \to x_3^*=8 \to x_4^*=6 \to x_5^*=6$$

# 动态规划应用

- 设备更新模型

一台机器用得越久，维修成本就越高，生产能力就越低。当一台机器到了某个年限后，对其及时更新可能会更加经济。因此，如何确定最经济的机器更新年限问题成为动态规划中的设备更新模型。

# 动态规划应用

- 设备更新模型

研究一个n年期间的设备更新问题。在每年的年初，决定这台机器是要再使用一年，还是要用一台新的机器来更新它。令$r(t)$、$c(t)$和$s(t)$分别表示某一台运行了$t$年的机器的年收入、运行费用和折旧现值，购买一台新机器的费用每年都是$I$。

# 动态规划应用

- 设备更新模型的三要素是

（1）用年度i代表阶段i；

（2）阶段i的备选方案为在 年度i年初时继续使用这台机器，还是进行更新；

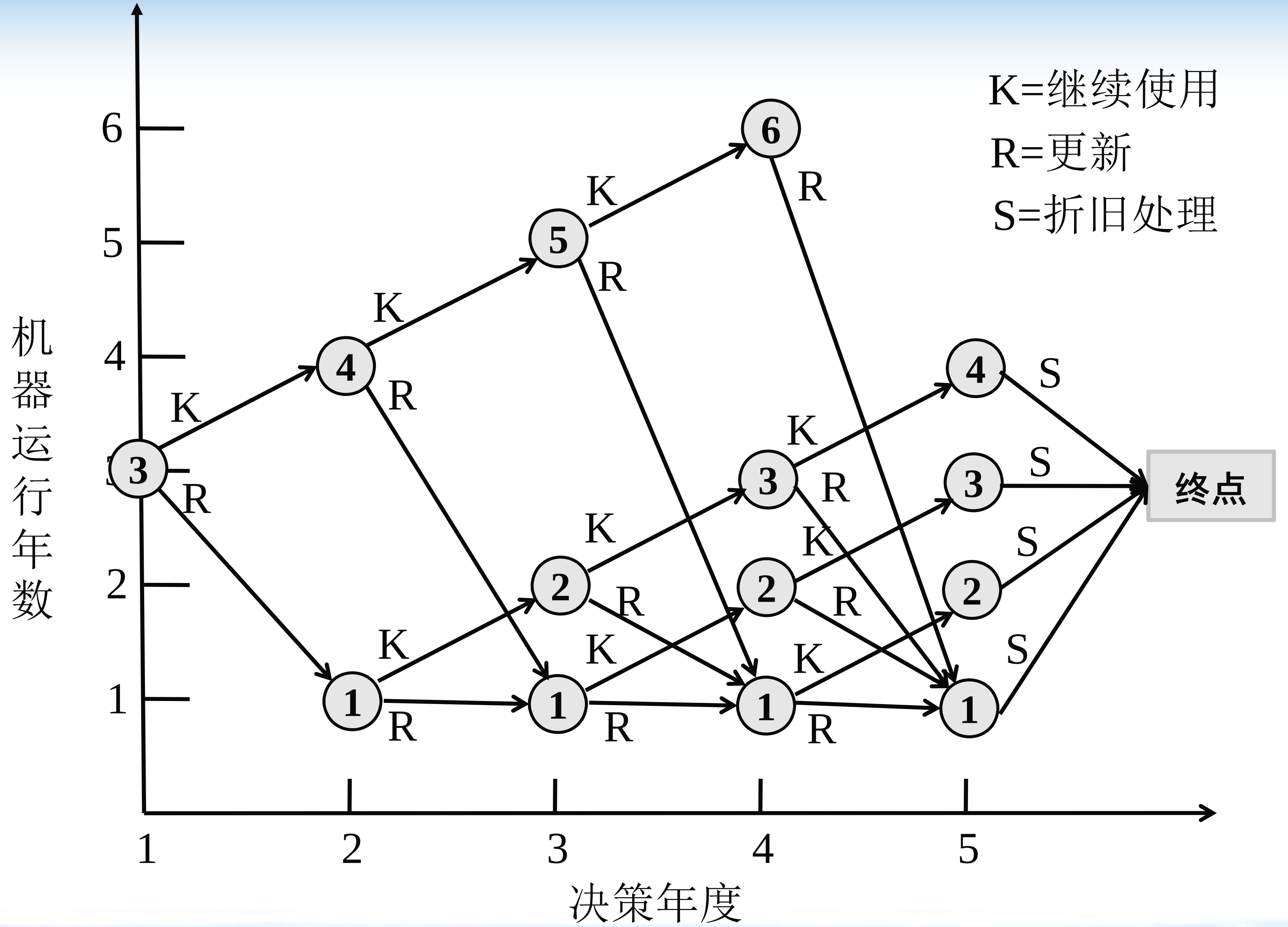
（3）阶段i的状态在i年初的设备运行年数为t，定义$f_i(t)$=年度i,i+1,…,n的最大净收入

$$f_i(t)=\max\begin{cases} r(t)-c(t)+f_{i+1}(t+1),\text{如果继续使用} \\ r(0)+s(t)-I-c(0)+f_{i+1}(1),\text{如果更新} \end{cases}$$

# 动态规划应用

- 例4：某公司需要对一台已经使用了3年的机器确定今后4年（n=4）的最优更新策略。公司要求，用了6年的机器就要更新，购买一台新机器的价格是100000元。

| 使用年数t(年) | 收入r(t) | 运行成本c(t) | 折旧现值s(t) |
|---|---|---|---|
| 0 | 20000 | 200 | ---- |
| 1 | 19000 | 600 | 80000 |
| 2 | 18500 | 1200 | 60000 |
| 3 | 17200 | 1500 | 50000 |
| 4 | 15500 | 1700 | 30000 |
| 5 | 14000 | 1800 | 10000 |
| 6 | 12200 | 2200 | 5000 |


K=继续使用
R=更新
S=折旧处理
机器运行年数
决策年度
终点
K
R
S
1
2
3
4
5
6

# 动态规划应用

- 阶段4：

| t | K | R | 最优解 | |
|---|---|---|---|---|
| | r(t)+s(t+1)-c(t) | r(0)+s(t)+s(1)-c(0)-I | $f_4(t)$ | 决策结果 |
| 1 | 19.0+60-0.6=78.4 | 20+80+80-0.2-100=79.8 | 79.8 | R |
| 2 | 18.5+50-1.2=67.3 | 20+60+80-0.2-100=59.8 | 67.3 | K |
| 3 | 17.2+30-1.5=45.7 | 20+50+80-0.2-100=49.8 | 49.8 | R |
| 6 | (必须更新) | 20+5+80-0.2-100=4.8 | 4.8 | R |

# 动态规划应用

- 阶段3：

| t | K | R | 最优解 | |
|---|---|---|---|---|
| | $r(t)-c(t)-f_4(t+1)$ | $r(0)+s(t)-c(0)-I+f_4(1)$ | $f_3(t)$ | 决策结果 |
| 1 | 19.0-0.6+67.3=85.7 | 20+80-0.2-100+79.8=79.6 | 85.7 | K |
| 2 | 18.5-1.2+49.8=67.1 | 20+60-0.2-100+79.8=59.6 | 67.1 | K |
| 5 | 14.0-1.8+4.8=17.0 | 20+10-0.2-100+79.8=19.6 | 19.6 | R |

# 动态规划应用

- 阶段2：

| t | K | R | 最优解 | |
|---|---|---|---|---|
| | $r(t)-c(t)-f_3(t+1)$ | $r(0)+s(t)-c(0)-I+f_3(1)$ | $f_2(t)$ | 决策结果 |
| 1 | 19.0-0.6+67.1=85.5 | 20+80-0.2-100+85.7=85.5 | 85.5 | K或R |
| 4 | 15.5-1.7+19.6=33.4 | 20+30-0.2-100+85.7=35.5 | 35.5 | R |

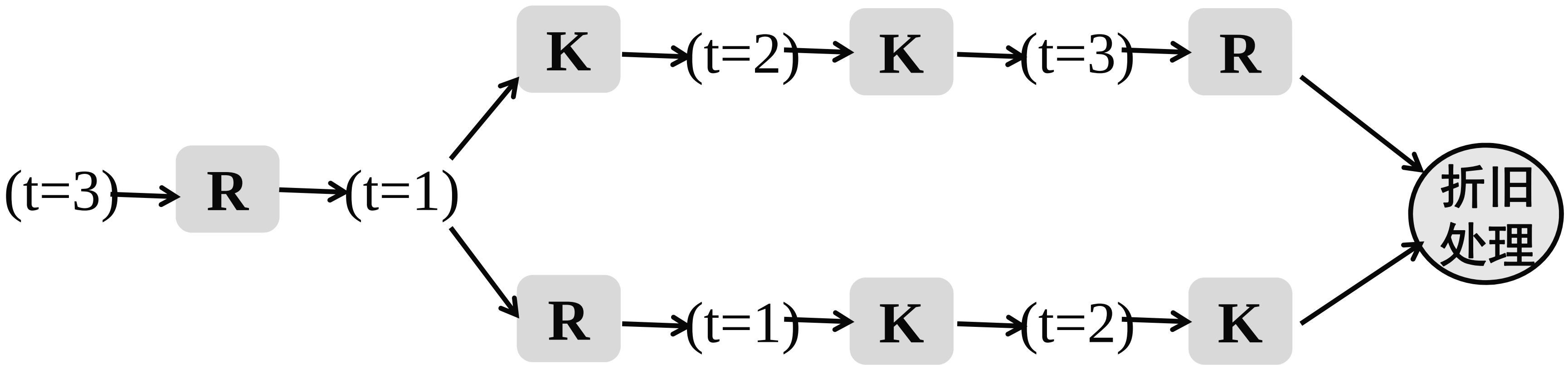
# 动态规划应用

- 阶段1：

| t | K | R | 最优解 | |
|---|---|---|---|---|
| | $r(t)-c(t)-f_2(t+1)$ | $r(0)+s(t)-c(0)-I+f_2(1)$ | $f_1(t)$ | 决策结果 |
| 3 | 17.2-1.5+35.5=51.2 | 20+50-0.2-100+85.5=55.3 | 55.3 | R |

# 动态规划应用

- 最优策略：



# 本节作业

- 一艘载货量6吨的货船可载装3中货物，下表给出每种货物i的单位重量$w_i$(吨)以及单位收益$r_i$（1万元），该货船应如何装载这些货物才能获得最大收益?

| 货物i | $w_i$ | $r_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 70 |
| 2 | 1 | 20 |
| 3 | 2 | 40 |

谢 谢 ！