

计算机学院《算法设计与分析》

(2019 年秋季学期)

第三次作业

作业提交截止时间：2019 年 12 月 5 日 23 : 55

1 最长空位问题 (20 分)

给定一长度为 n 的 01 串 $S = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ ，你仅有一次机会挑选其中两个元素 $s_i, s_j (1 \leq i, j \leq n)$ 并交换他们的位置。请你设计算法求出交换之后 S 中最多有几个连续的 0，并分析该算法的时间复杂度。

例如，串 $S = \text{"10010101"}$ 通过交换 s_4 和 s_7 可以变为 "10000111" ，连续的 0 的数量为 4。

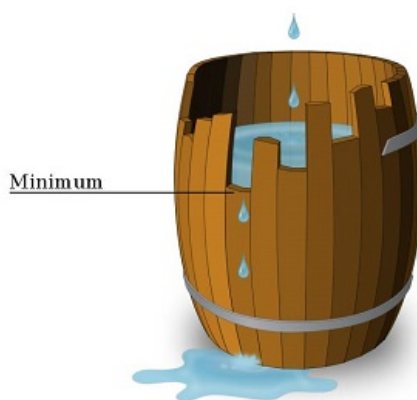
2 最大收益问题 (20 分)

某公司有一台机器，在每天结束时，该机器产出的收益为 X_1 元。在每天开始时，若当前剩余资金大于等于 U 元，则可以支付 U 元来升级该机器（每天最多只能升级一次）。从升级之日起，该机器每天可以多产出 X_2 元的收益。即是说，在执行 K 次升级之后，这台机器每天的产出为 $X_1 + K \times X_2$ 元。

该公司初始资金为 C 元，请你设计算法求出 n 天之后该公司拥有的总资金的最大值并分析该算法的时间复杂度。

3 水桶问题 (20 分)

给定 $m = n \times k$ 块木板，第 i 块木板的长度为 a_i ，现需要用它们围成 n 个水桶，每个水桶使用 k 块木板。第 j 个水桶的体积 V_j 等于其中最短的那块木板的长度。



为了保持水桶的体积均衡，任两个水桶的体积之差不能超过 l 。即是说，这 n 个水桶应满足：

$$|V_x - V_y| \leq l \quad \forall 1 \leq x, y \leq n$$

请你设计算法判断能否围成这样的 n 个水桶并分析该算法的时间复杂度。

4 无向图定向问题 (20 分)

给定一个连通无向图 $G = (V, E)$, 满足 $|E| = |V|$ 。

1. 请证明总是存在一种方法对该无向图的每条边进行定向, 使得每个点的出度均为 1。
(5 分)
2. 请设计一种算法来完成该定向过程并分析该算法的时间复杂度。(15 分)

5 最短路径问题 (20 分)

在二维平面上有 n 个点, 第 i 个点的坐标为 $(x_i, y_i) (1 \leq i \leq n)$ 。从第 i 个点到第 j 个点的距离为这两点的曼哈顿距离: $d(i, j) = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|$ 。此外, 这 n 个点中某些点为传送点, 用 $t[i]$ 来表示第 $i (1 \leq i \leq n)$ 个点是否为传送点。 $t[i]$ 为 0 表示该点不是传送点, $t[i]$ 为 1 表示该点为传送点。任意两个传送点之间的距离均为 0。请设计算法求出在此情况下从点 x 到点 y 的最短路径长度并分析该算法的时间复杂度。