講義資料３ (確率・統計-梅田典晃).

2 条件付き確率.

2.1 条件付き確率.

定義 2.1. 事象 A が起きるという仮定の下で, 事象 B が起きる確率を, **条件付確率**といい,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} (= P_A(B))$$

で求められる.

注意 2.2. 一般的に $P(B|A) = P(B)$ になるとは限らない.

例 2.3. サイコロを振ったとき, 出目が奇数であるという条件の下で 3 以下が出る確率は

$$P(\{3\text{ 以下 }\}|\{\text{ 奇数 }\}) = P(\{1,3\}|\{1,3,5\}) = \frac{2}{3}$$

となる. この時,

$$P(\{3\text{ 以下 }\}) = \frac{1}{2} \neq P(\{3\text{ 以下 }\}|\{\text{ 奇数 }\})$$

である.

条件付き確率の定義から下の定理が出る.

定理 2.4. (乗法定理) 事象 A, B に対して,

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

となる.

注意 2.5. 事象 A と B を交換すると, $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ が成り立つこともわかる.

例 2.6. ジョーカを含まない 1 組のトランプについて, 次の事を考える. ここで, ♡ を引く, A を引くという事象などををそれぞれ「♡」, 「A」などと表すとする.

1. 1 組のトランプから ♡ の J, Q, K を除いた束からカードを 1 枚とるとき,
   (a) $P(\mathrm{A}) = \dfrac{4}{52-3} = \dfrac{4}{49}$.
   (b) $P(\mathrm{A}|\heartsuit) = \dfrac{1}{13-3} = \dfrac{1}{10}$.
2. 1 組のトランプのからカードを 1 枚とるとき,
   (a) $P(\mathrm{A}) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$.
   (b) $P(\mathrm{A}|\heartsuit) = \dfrac{1}{13}$.

つまり, 同じ事象でも条件が異なると確率や条件付確率も異なる.

先に述べた通り, 事象 A, B の確率が

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

を満たすとき A と B は独立であるという. この時, 次の定理が成り立つ.

定理 2.7. 事象 A と B について, 次の 3 つは同値である.

1. A と B が独立である.
2. $P(B|A) = P(B)$.
3. $P(A|B) = P(A)$.

証明. 1 つ目と 2 つ目の関係だけ証明する.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = P(A)P(B) &\Leftrightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A) \\ &\Leftrightarrow P(B) = P(B|A). \end{aligned}$$

1 つ目と 3 つ目の関係も同様に証明できるので, 同値の推移律 (意味が分からなければ調べること. 「同値」と「Wiki」でネット検索すれば出てくる) より 2 つ目と 3 つ目の関係も示せる. □

2.2 独立試行.

定義 2.8. 試行を 2 回繰り返す場合に, これらの施行に対して起こる事象をそれぞれ A, B とする. 1 回目, 2 回目,. . . に事象 A が起こることを, それぞれ ①A, ②A, . . . などとすると (それぞれも事象であることに注意),

$$\langle A, B\rangle = ①A \cap ②B$$

を**事象列**と呼ぶ (事象列も事象である). 3 回以上でも

$$\langle A, B, C\rangle, \quad \langle A_1, A_2, \dots, A_n\rangle$$

などと表すことができる.

注意 2.9. $P(\langle A, B\rangle) = P(①A)P(②B|①A)$.

定理 2.10. 同じサイコロを 2 回振ると, 例えば次のような事象が起きる:

1. ①{ 奇数 } $\cap$ ②$\{4\} = \langle${ 奇数 }, $\{4\}\rangle$.
2. 3 が 1 回 $= \langle\{3\}$, {3 以外 }$\rangle \cup \langle${3 以外 }, $\{3\}\rangle$.

注意 2.11. 1 つのサイコロを 2 回振ることと, 2 つの区別がつくサイコロを同時に振る事は同様に考えることができる.

例 2.12. 硬貨を 2 回投げる. 表, 裏が出るという事象をそれぞれ「表」, 「裏」とすると, 全事象は {⟨ 表, 表 ⟩, ⟨ 表, 裏 ⟩, ⟨ 裏, 表 ⟩, ⟨ 裏, 裏 ⟩} となり, これらの元は根源事象となる.

例 2.13. 袋の中に白い球 3 つと黒い球 3 つ入っている. 1 つ取った後に, それを戻さずにもう 1 つ取る. 白い球, 黒い球が出るという事象をそれぞれ「白」, 「黒」とすると,

1. $P(②黒 | ①白) = \frac{3}{5}$.

2. $P(②白 | ①白) = \frac{2}{5}$.

3. $P(\langle 白, 黒 \rangle) = P(①白)P(②黒 | ①白) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$.

4. $P(\langle 白, 白 \rangle) = P(①白)P(②白 | ①白) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

例 2.14. ジョーカを含まないトランプの束から 1 枚カードを取った後に, 戻さずにもう 1 枚とることを考える. ここで, ♡ を引く, A を引く, ♡ の A を引くという事象などををそれぞれ「♡」, 「A」, 「♡A」などと表すとする.
(1) $P(②\mathrm{A}|①\heartsuit)$ を求めてみる.

$$\langle \heartsuit, \mathrm{A} \rangle = \langle \heartsuit\mathrm{A}, \mathrm{A} \rangle \cup \langle (\heartsuit \backslash \heartsuit\mathrm{A}), \mathrm{A} \rangle$$

より,

$$P(\langle \heartsuit, \mathrm{A} \rangle) = P(\langle \heartsuit\mathrm{A}, \mathrm{A} \rangle) + P(\langle (\heartsuit \backslash \heartsuit\mathrm{A}), \mathrm{A} \rangle) = \frac{1}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{12}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{1}{52}$$

となる. また, $P(\langle \heartsuit, \mathrm{A} \rangle) = P(①\heartsuit)P(②\mathrm{A}|①\heartsuit)$ より, $P(①\heartsuit) = 1/4$ から,

$$P(②\mathrm{A}|①\heartsuit) = \frac{1}{52} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{13}.$$

(2) $P(②\mathrm{A}|①\mathrm{K})$ を求めてみる.
$P(\langle \mathrm{K}, \mathrm{A} \rangle) = \frac{1}{13} \cdot \frac{4}{51}$ で, $P(①\mathrm{K}) = \frac{1}{13}$ より,

$$P(②\mathrm{A}|①\mathrm{K}) = \frac{1}{13} \cdot \frac{4}{51} \div \frac{1}{13} = \frac{4}{51}.$$

注意 2.15. (1)(2) により, ①によって, $P(②\mathrm{A})$ の値が異なる.

定義 2.16. (独立試行と重複試行) 1 回目の試行が 2 回目の試行に影響を与えない時, これらの組を (2 回の) **独立試行**という. この時

$$P(②B|①A) = P(②B)$$

となる (例 3, 4 は独立試行だが, 例 5, 6 はちがう). また, 同じ試行を 2 回独立に繰り返すことを 2 回の**重複試行**といい, このとき

$$P(\langle A, B \rangle) = P(A)P(B)$$

を意味する, 3 回以上独立に繰り返す試行を (n 回の) 重複試行と言い,

$$P(\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n)$$

となる. 特に, 試行 A は起きる場合と起きない場合のみを考える場合, $P(A) = p$ を満たすとするときは**確率** p **の** n **回の重複試行**という.

例 2.17. サイコロで $A = \{1\}$ と置く. 2 回の重複試行で

1. $\{1 が 1 回も出ない \} = \langle A^c, A^c \rangle$,

2. $\{1 が 1 回出る \} = \langle A, A^c \rangle \cup \langle A^c, A \rangle$,

3. $\{1$ が 2 回出る $\} = \langle A, A \rangle$,

の事象が起こりうる.

例 2.18. 確率 p の 3 回の重複試行において,

$$「A が 2 回起こる」 = \langle A, A, A^c \rangle \cup \langle A, A^c, A \rangle \cup \langle A^c, A, A \rangle$$

で, さらに

$$P(\langle A, A, A^c \rangle) = P(\langle A, A^c, A \rangle) = P(\langle A^c, A, A \rangle) = p^2(1-p)$$

となる事から,

$$P(\{A \text{ が } 2 \text{ 回起こる }\}) = 3p^2(1-p)$$

となる.

定理 2.19. 事象 A に対して, $P(A) = p$ としたとき, n 回の重複試行に対して,

$$P(\{A \text{ が } r \text{ 回 }\}) = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} p^r(1-p)^{n-r}$$

となる (例 1.18 を参照の事). また, これらの和に対して

$$\sum_{r=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} p^r(1-p)^{n-r} = 1.$$

2.3 確率の公理.

確率の公理としてよく知られているコルモゴルフの著書に書かれているものを紹介する. 詳しくは教科書 P18〜19 を参照の事.

公理 2.20. 確率の公理. 標本空間 Ω の各事象 A に対して次の性質を満たす実数 $P(A)$ が定まるとき, $P(A)$ を事象 A の確率という.

1. すべての事象 A に対し, $0 \leq P(A) \leq 1$ が成り立つ.
2. $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$ である.
3. 事象 A_1, A_2, $\ldots$,A_n, $\ldots$ がどの異なる 2 つも互いに排反であれば, 次式が成り立つ:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

ここで, 先に述べた通り, $\emptyset$ は空事象である. また,

$$\bigcup_{k=1}^{m} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{m \to \infty} \left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right)$$

である.