

難しいけど解けそうで解けない気がするけどでも解ける 方程式

2023 年 12 月 1 日

第 1 問

$$(x-1)(x^2+x+1) \tag{1}$$

を展開せよ。(90 点)

第 2 問

$$x^4 + 3x^3 + x^2 - 2 = 0 \tag{2}$$

を複素数の範囲で解け。(10 点)

解答例

第 1 問は分配法則から逐一計算すると

$$x^3 - 1$$

となる。第 2 問は頑張って次の式変形を思いつくと簡単に解ける (もちろん因数定理やその発展版を用いることもできる)。

$$\begin{aligned}x^4 + 3x^3 + x^2 - 2 &= x^2(x^2 + x + 1) + 2(x^3 - 1) \\&= x^2(x^2 + x + 1) + 2(x - 1)(x^2 + x + 1) \\&= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x - 2)\end{aligned}\tag{3}$$

式 3 から

$$x^2 + x + 1 = 0\tag{4}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0\tag{5}$$

式 4、5 を解くと、

$$x = -1 \pm \sqrt{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

を得る。ここで i は $\sqrt{-1}$ である。