연습 3 & 4장 학번: 2023082524 이름: 이유석

3.7 3개의 부품으로 구성된 전자제품에서 고장 난 부품의 수를 X라고 할 때, 다음과 같은 확률분포를 갖는 확률변수라고 하자.

x	0	1	2	3
P(X = x)	0.3	0.1	0.4	0.2
$g(X) = (2X + 1)^2$	1	9	25	49
$(g(X))^2$	1	81	625	2401

이때 $g(X) = (2X + 1)^2$에 대한 평균 (μ)과 분산(σ^2)을 구하여라.

Sol) $E(4x^2+4x+1) = 4E(X^2) + 4E(X) + 1 = \underbrace{(4\times 3.5)}_{14} + \underbrace{(4\times 1.5)}_{6} + 1 = \boxed{21}$ 평균

$V(4x^2+4x+1) = V(4x^2+4x) = 16\,V(x^2+x)$

$x^2+x = y$

y^2	0	4	36	144
y	0	2	6	12
확률	0.3	0.1	0.4	0.2

$E(y) = 5$

$E(y^2) = 43.6$

$V(y) = E(y^2) - [E(y)]^2$

$= 43.6 - 25 = 18.6$

$16\,V(y) = V(g(x)) = 16 \times 18.6 = 297.6$ 분산

연습 3 & 4장 학번: 2024082529 이름: 이유석

연습 4.3. $0 \le x \le 1$ 에서 연속확률변수 X 가 확률밀도함수 $f(x) = c\,(1 - x^2)$

일 때, c 값을 구하고 X의 평균과 분산을 구하여라.

$$\int_0^1 c(1-x^2)\,dx = 1 \qquad \boxed{c = \frac{3}{2}}$$

밀도함수 평균은 $\int x f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x(1-x^2)\,dx = \boxed{\frac{3}{8} = \text{평균}}$

$$\frac{3}{2}\left[\int_0^1 x^2(1-x^2)\,dx - \left[\int_0^1 x(1-x^2)\,dx\right]^2\right] = \boxed{\frac{1}{5} = \text{분산}}$$

연습 3 & 4장 학번: 이름:

연습 4.9 자동차를 생산하는 공장의 기계가 평균 1개월에 3번씩 고장을 일으키는 지수분포를 가진다. 기계가 고장나서 고친 후에 다시 고장이 발생할 때까지 걸리는 시간을 측정하는 분포를 구하고, 1개월 이내에 한 번도 고장나지 않을 확률을 구하여라.

Sol) $\lambda = 3$ 지수분포 $e^{-\lambda x}\lambda$ 누적분포 $1-e^{-\lambda x}$

답 = 1 − P(1개월 이내고장) P(1개월 이내) = $1-e^{-3}$

답 = $1-(1-e^{-3}) = \boxed{e^{-3}}$

연습 3 & 4장 학번: 이름:

4.19 평균이 $1/\lambda$인 지수분포를 따르는 확률변수 X에 대해 다음의 무기억성 성질을 만족하는지 보여라. $P(X > s + t \mid X>t) = P(X > s)$

Sol) 주사위를 한번 실패했어도 그다음 성공확률이 그대로인거랑 동일한 의미다

식: $\frac{P(s+t)}{P(t)} = P(s)$ 지수분포 누적분포 $1-e^{-\lambda t}$ $(x<t)$

$P(X>t) = e^{-\lambda t}$ $P(X>s+t) = e^{-(s+t)\lambda}$

$$\frac{P(s+t)}{P(t)} = \frac{e^{-(s+t)\lambda}}{e^{-t\lambda}} = e^{-s\lambda} = P(X>s)$$

연습 3 & 4장 학번: 이름:

[증명] 포아송분포~$p(x;\lambda t)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$ [개수 $x=0,1,2,\ldots$]에서, $E[X]=\lambda$와, $Var(X)=\lambda$를 증명

Pf) λt를 Λ로 치환 → $e^{-\Lambda}\frac{\Lambda^x}{x!}$ 각각의 확률 포아송은 이산확률이므로 평균은

$E(X)=\sum_{0}^{\infty} x\, e^{-\Lambda}\frac{\Lambda^x}{x!}$ Σ는 0 일때 0 이니 1부터시작 + 분모와 x곱

$\rightarrow \sum_{1}^{\infty}\frac{\Lambda^x}{(x-1)!}e^{-\Lambda} = \Lambda e^{-\Lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\Lambda^{x-1}}{(x-1)!}$ $x-1=n$ $\rightarrow \Lambda e^{-\Lambda}e^{\Lambda} = \boxed{\Lambda}$ = 평균

분산 $E[X^2]-E(X) = E(X^2)-\Lambda^2$ $E[X^2]=\sum_{1}^{\infty}x^2\frac{\Lambda^x}{x!}e^{-\Lambda}$

$= e^{-\Lambda}\sum_{1}^{\infty}\frac{\Lambda^x}{(x-1)!}x \equiv e^{-\Lambda}\left[\underbrace{\sum_{1}^{\infty}\frac{\Lambda^x}{(x-1)!}(x-1)}_{①} + \underbrace{\sum_{1}^{\infty}\frac{\Lambda^x}{(x-1)!}}_{②}\right]$ $e^{\Lambda}\Lambda = ②$

$① = \sum_{1}^{\infty}\sim$ 1일때 차피 0 이니까 2부터 시작 $\sum_{2}^{\infty}\frac{\Lambda^{x-2}}{(x-2)!}\Lambda^2 = e^{\Lambda}\Lambda^2$

$=[①+②]e^{-\Lambda} = [e^{\Lambda}\Lambda + e^{\Lambda}\Lambda^2]e^{-\Lambda} = \underline{\Lambda+\Lambda^2 = E(X^2)}$

$E(X^2)-[E(X)]^2 = \Lambda$

연습 3 & 4장 학번: 이름:

[증명] 이항분포에 대한 포아송분포의 근사 증명 $P(x) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ If $p \to 0$ $n \to \infty$

Pf) 이항분포 ${}_nC_x \; p^x (1-p)^{n-x}$ $p = \frac{\lambda}{n}$

$${}_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots (n-x+1)}{x!} \fallingdotseq \frac{n^x}{x!} \qquad {}_nC_x \fallingdotseq \frac{n^x}{x!}$$

$$(1-p)^{n-x} = (1-p)^n (1-p)^{-x} \fallingdotseq (1-p)^n$$

종합하면 $\frac{n^x}{x!}(1-p)^n p^x$

$p = \frac{\lambda}{n}$ $\frac{1}{p} = \frac{n}{\lambda}$ $n = \frac{\lambda}{p}$

$$\frac{\lambda^x}{x!}(1-p)^n = \frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

연습 3 & 4장 학번: 이름:

정규분포의 기대값과 분산을 구해보시오 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ for $-\infty < x < \infty$

Sol) 1) (using Math. tabke), 증명하시오. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu,\sigma^2)dx = 1$

일반 정규분포 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-u}{\sigma}\right)^2} dx = 1$

$\frac{x-u}{\alpha} = z \qquad \alpha z = x-u \qquad x = \alpha z + u \qquad dx = \alpha\, dz$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1$$ 표준정규분포

2) $E[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int \underbrace{(\alpha z + u)}_{\text{분리}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\underbrace{\alpha \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz}_{\text{홀이드는 기함수}=0} + \underbrace{u \int e^{-\frac{1}{2}z^2}}_{u\sqrt{2\pi}}\right] = \boxed{u}$$

연습 3 & 4장 학번: 202308 2529 이름: 이유석

3) $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 =$ $Var(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-u)^2 f(x)\, dx = \alpha^2$

$Z = \frac{x-u}{\alpha}$ $x = \alpha Z + u$ 치환 $\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha Z)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$

$= \frac{\alpha^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z^2 e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ = \alpha^2$

---

4) $\Pr(X \leq L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{L} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d$ 단 $\int_p^q e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\mathrm{erf}(q) - \mathrm{erf}(p))$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\mu x^2} dx = \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}$, $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{erf}(x) = -1$, $\lim_{x \to 0} \mathrm{erf}(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} \mathrm{erf}(x) = 1$

???