

実験計画法第3回

三水準系直行配列表実験 球が最も飛ぶ条件は？

中央大学理工学部ビジネスデータサイエンス学科

23D7104001I 高木悠人

1. 実験目的

本実験では、作成した割り箸カタパルトを使って球が最も遠くに飛ぶ最適水準について調べたい。その中で、三水準系直行配列表実験を用いることで先に行った分散分析表実験等の実験法と比較し、それらの違いとメリット、デメリットについて理解したい。

2. 実験方法

本実験では、三水準系直行配列表実験を用いて実験した。先に実施した要因配置実験法では、因子数と水準数が増えると飛躍的に実験回数が増える。分析結果の精度を保つために全ての水準を取り入れた完全配置実験の方が望ましい。一方で、時間的問題や金銭的問題により実験回数を削減したい場合などには事前に無視できると仮定できる水準を除くことで少ない実験回数で適切な評価を行いたい場合には、直行配列表実験を採用する方が妥当である。本実験では、教授による実験の説明や割り箸カタパルトの制作などにより計測に長時間費やすことが困難である点、事前知識により特定の因子は効果がないと仮定できる点から直行配列表実験を採用した。

次に、因子とその水準を決定した。本実験での計測は力学的な物理現象であり、割り箸カタパルトの運動が円運動で発射後の球の運動が斜方投射運動と仮定できると考えた。この時、斜方投射運動の原則として物体の大きさと重さが等しいならば初速度に依存する。つまり、発射速度及び初速度は、円軌道における接線方向の速度と言い換えることができるため、円運動方程式より発射速度が円の半径と角速度に依存すると言える。角速度は、洗濯バサミのバネの強さと言え、定量的な計測を行えない環境であるため扱いづらい。一方、円の半径は割り箸の長さからキャップの位置を引いた長さであると言える。よって、キャップの位置と割り箸の種類を因子として取り入れた。以下に各因子の水準を示す。

1. 因子 A (キャップの位置)

- ・ 水準 1: 1cm
- ・ 水準 2: 3cm
- ・ 水準 3: 5cm

2. 因子 B (割りばしの種類)

- ・ 水準 1: 元禄(長さ:20.2cm)
- ・ 水準 2: 檜(長さ:20.7cm)
- ・ 水準 3: 吉野杉(長さ:24.0cm)

上記の因子と各水準に従って割りばしカタパルトを作成した。作成方法を以下に示す。

1. 洗濯はさみのはさみ部分と持ち手部分を割りばしと重ね合わせ、テープを2周半巻いて固定する。
2. 片方の割りばしの洗濯バサミと反対側の端から該当水準のキャップ位置にペットボトルキャップをセロファンテープで固定する。

上記の手順で該当水準に注意して作成した。該当水準は、後に示す割り付け表に記載することとした。作成した割りばしカタパルトを図 1 で示す。



図 1. 割りばしカタパルト

次に紙球の製作に移った。紙球は A4 用紙の 1/8 サイズを用いて丸めることで作成した。

最後に計測方法を以下に示す。

1. 割りばしカタパルトによる飛距離測定において測定順序効果をないものとするためにランダム化を行う。ランダム化は Excel にて RAND 関数を用いて 8 つの乱数生成し RANK 関数でその順序を決定することとした。
2. 使用する割りばしカタパルトを測定箇所に置く。
3. 測定メジャーの基準位置(0cm)をキャップの位置に合わせて固定する。
4. 紙球が飛ぶ方向に人やモノがないことを確認し、割りばしカタパルトを使って紙球を飛ばす。ただし、実験者による影響をなくするため毎回の測定を同一の実験者によるものとした。

5. 紙球が1度目に落下した地点をメジャーで計測し、記録する。
6. 2から5の計測作業を各条件で行う。

上記の計測を行い、Excel ファイルに記録し解析を進めることとした。

3. 実験で得られたデータ

次に、割り付けとランダム化結果及び計測結果を直行配列表に記入した形式で示す。ただし、実験の計測は割り付けとランダム化を行った後に計測を行っているが、本レポートでは手順ごとに分けず全てまとめて表1に示すこととした。

表 1. 直行配列表における割り付けとランダム化結果

割り付け	A	B	A×B	A×B	水準組み合わせ	データ	実験順序
列番号	[1]	[2]	[3]	[4]			
1	1	1	1	1	A1B1	318.8	9
2	1	2	2	2	A1B2	301.4	4
3	1	3	3	3	A1B3	254.6	2
4	2	1	2	3	A2B1	278.6	6
5	2	2	3	1	A2B2	291.6	1
6	2	3	1	2	A2B3	229.4	3
7	3	1	3	2	A3B1	265.6	5
8	3	2	1	3	A3B2	228.8	8
9	3	3	2	1	A3B3	225.6	7
群	1	2	2	2			
成分	a		a	a^2			
		b	b	b^2			
	1群		2群				

上記の表を元にして解析を進めることとした。

4. 解析方法

1. モデル式の設定

本実験のモデル式を設定する。割り付けを参考にして設定し、誤差項を正規分布に従うこととする。

2. 計算補助表と二元表、仮説の設定

表1の割り付けと計測データを参考にして計算補助表と二元表を作成する。その上で、それぞれの因子の効果があるとする対立仮説と無いと仮定する帰無仮説を設定する。

3. データのグラフ化

計算補助表と二元表を用いてデータをグラフ化する。これを用いて交互作用があるかの検討と大まかなデータの把握と最適水準の予測を行う。

4. 平方和と自由度の計算

各因子における平方和と自由度を計算する。それぞれの計算は計算補助表で求めているため、それらを適宜利用する。

5. 分散分析表の作成
 - 4 で求めた平方和と自由度を用いて分散分析表を作成する。そして、作成した結果分散比が基準や他因子の分散比と比較して小さいと判断できた場合はプーリングを行う。しかし、むやみにプーリングを行うと、検出力が落ち適切な解析結果が得られなくなるため注意する。
6. 分散分析後のモデル式の決定

分散分析の結果を用いてモデル式を再度立式する。ただし、プーリングを行わなかった場合には先の設定と変わらないものとなる。
7. 最適水準の決定

最後に最適水準を決定する。ただし、本実験における最適水準は「最も飛距離が長い割りばしカタパルト」である。

5. 解析結果

4 章の解析手順に則って解析を行った。

1. モデル式の設定

はじめに、モデル式を設定する。本実験では、キャップの位置と割りばしの種類及びその交互作用が飛距離に対して有意な影響を持つと予想した。そのため、以下のようにモデル式を定義した。

$$y_{ij} = \mu + a_i + b_j + ab_{ij} + \varepsilon$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

2. 計算補助表と二元表、仮説の設定

以下に計算補助表と交互作用についての二元表を示す。

表 2. 計算補助表

割り付け	A			B			A×B			A×B		
列番号	[1]			[2]			[3]			[4]		
水準	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
データ	318.8	278.6	265.6	318.8	301.4	254.6	318.8	301.4	254.6	318.8	301.4	254.6
	301.4	291.6	228.8	278.6	291.6	229.4	229.4	278.6	291.6	291.6	229.4	278.6
	254.6	229.4	225.6	265.6	228.8	225.6	228.8	225.6	265.6	225.6	265.6	228.8
T	874.8	799.6	720.0	863.0	821.8	709.6	777.0	805.6	811.8	836.0	796.4	762.0
y	291.6	266.5	240.0	287.7	273.9	236.5	259.0	268.5	270.6	278.7	265.5	254.0
t	2394.4			2394.4			2394.4			2394.4		

表 3. 二元表

	A1	A2	A3
B1	318.8	278.6	265.6
B2	301.4	291.6	228.8
B3	254.6	229.4	225.6

次に仮説を示す。本実験では、それぞれの要因に効果があることを示したい。そのため、帰無仮説を因子の効果がない仮説とし、対立仮説をその逆で定義する。

(1) 因子 A の主効果

帰無仮説 $H_0: a_1 = a_2 = a_3 = 0$

対立仮説 $H_1: a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$

(2) 因子 B の主効果

帰無仮説 $H_0: b_1 = b_2 = b_3$

対立仮説 $H_1: b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 > 0$

(3) 因子 A と B の交互作用

帰無仮説 $H_0: \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |(ab)_{ij}| = 0$

対立仮説 $H_1: \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |(ab)_{ij}| > 0$

3. データのグラフ化

次に、図 2 と 3 に各要因の主効果とその交互作用についてのグラフを示す。

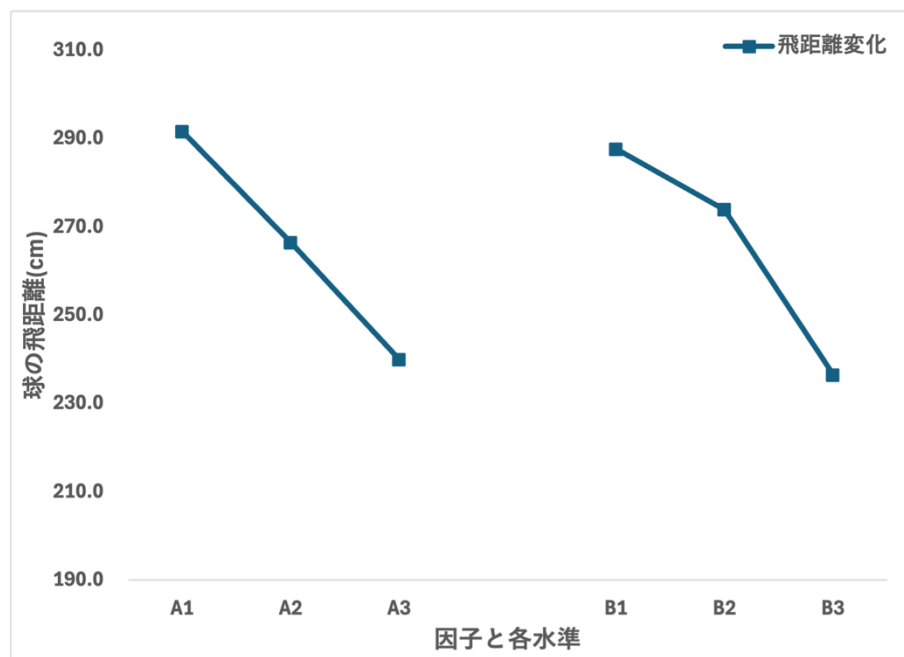


図 2. 要因 A と B の主効果における要因効果図

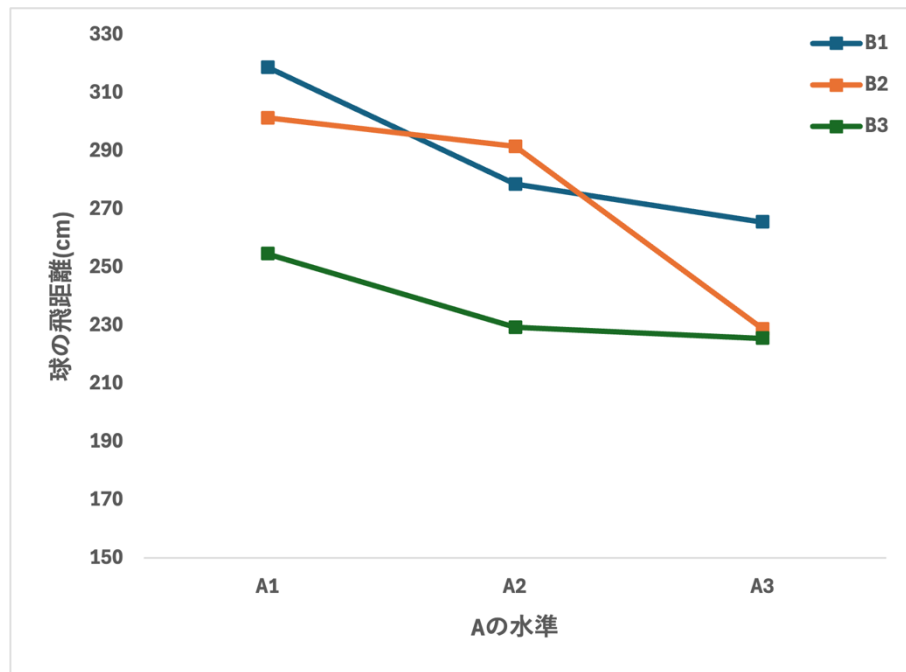


図 3. 要因 A と B の交互作用における要因効果図

まず、図 2 からわかることを箇条に構造化して示す。

- (1) 各水準の違いにより、球の飛距離平均が変化しているため主効果があると推測できる。
- (2) 主効果 A について、第 1 水準から第 3 水準になるにつれて小さくなっていることから、キャップの位置を割りばし末端から離し、カタパルトの円運動半径を短くすると飛距離も短くなると推測できる。ただし、因子 A について有意な効果を持つかどうかは分散分析表を用いて解析する必要がある。
- (3) 主効果 B について、第 1 水準から第 3 水準になるにつれて小さくなっていることから、割りばしを長くすると飛距離が短くなると推測できる。ただし、因子 B についても有意な効果を持つかどうかは分散分析表を用いて解析する必要がある。

次に図 3 からわかることも同様に以下に示す。

- (1) B1 と B3 を用いる場合は、同様に第 1 から 3 水準に変化するにつれて単調的な低下を示しているが B2 は因子 A が第 1,2 水準でほぼ変化なく、第 3 水準で急激に低下する推移となっているため、交互作用が部分的に存在すると推定できる。
- (2) 交互作用についても主効果同様に、有意か判定するために分散分析表を用いた解析を必要とする。

上記より交互作用の存在が示唆されたため、物理的に考察し判断することとする。まず、A と B の交互作用を換言すると、「キャップの位置と割り箸の種類の組み合わせによって飛距離変化が複雑に増減する場合があるか」を意味する。この点について、本実験を剛体として捉える場合は実験方法でも述べた通り、長さに比例し、キャップの位置と割りばしの長さ(種類)の差に飛距離が依存する。そして、運動方程式より、その円半径に対して線形的な変化を示す。よって、スカラー量で表す主効果の効果値であれば、交互作用は考慮する必要がなくそれぞれの和によって示すことができる。

次に、ヤング率を考慮するような物体の弾性変形が存在する場合を考える。ヤング率とは、先のレポートでも明示した通り、初速度に対して一方的な依存関係を持つ。具体的には、物質の弾性的な性質を示すヤング率によって、たわみ δ_i が以下の式のとおり変化するとする(第1週レポートより抜粋)。

$$\delta_i = \frac{E_{base}}{E_i}$$

上記を元に、射出角度を定義し、飛距離を以下のように算出する。

$$\begin{aligned}\theta_{launch} &= \theta_{ideal} + \theta_{deflection} \\ \theta_{deflection} &= \arctan \frac{\delta}{L} \\ d &= \frac{2 \left(\frac{E_i * (\frac{\omega t^3}{12}) * K^2 * L}{m} \right) * \cos \theta_{launch} * \sin \theta_{launch}}{9.81}\end{aligned}$$

上記を元にとすると、剛体における線形関係よりも複雑化するが、ヤング率変化によって影響を受ける部分は θ_{launch} であるため、交互作用を示唆するような定式化における場合分けは必要としていない。つまり、ヤング率に対して連続値に回帰するため、剛体的物理効果値に足し合わせることで、主効果を示すことができる。よって、因子 A と B において特定条件で異なる変化を示す例は見受けられないため、交互作用項はないものとして扱うこととする。要因効果図からは交互作用があるということもできるが、A2B2 の飛距離計測値が変化することで、全て同一の推移となることから、人為的な要因、環境要因問わず、何らかのミスがあった可能性も無視できない。これらより、要因 A と B の交互作用は力学方程式と弾性変形におけるエネルギー変換の観点から無視できるものとし、誤差とみなす。そして、これ以降の解析は当該交互作用項を誤差項とみなして進める。

また、最適水準について上記の 2 つのグラフから A1B1 であると推測できる。

4. 平方和と自由度の計算

各因子における平方和と自由度を計算する。それぞれの計算は計算補助表で求めているため、それらを適宜利用することとする。具体的には、以下の計算をした。

$$CT = \frac{(\text{データの総和})^2}{(\text{総データ数})} = 637016.8$$

$$SS_T = (\text{各データの二乗和}) - CT = 9340.8$$

$$SS_A = \sum_{i=1}^3 \frac{(A_i \text{水準のデータの和})^2}{(A_i \text{水準のデータ数})} - CT = 3994.2$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^3 \frac{(B_j \text{水準のデータの和})^2}{(B_j \text{水準のデータ数})} - CT = 4202.0$$

$$SS_E = SS_{[3]} + SS_{[4]} = 1143.9$$

$$\varphi_T = (\text{総データ数}) - 1 = 8$$

$$\varphi_A = (A \text{の水準数}) - 1 = 2$$

$$\varphi_B = (B \text{の水準数}) - 1 = 2$$

$$\varphi_E = \varphi_T - \varphi_A - \varphi_B = 4$$

5. 分散分析表の作成

4 で求めた平方和と自由度を用いて作成した分散分析表を表 4 に示す。

表 4. 分散分析表

要因	平方和SS	自由度 ϕ	平均平方MS	分散比 F_0	$E(MS)$
A	3994.2	2	1997.1	6.983	$\sigma^2E + 9\sigma^2B$
B	4202.0	2	2101.0	7.347	$\sigma^2E + 9\sigma^2C$
E(誤差)	1143.9	4	286.0		σ^2E
T(計)	9340.1	8			

そして、以下にプーリングの判断に用いるための F 分布の上側 $100 \times \alpha$ % 点 $F(\phi_{\text{要因}}, \phi_E, 0.01)$ を表にして示す。

表 5. $F(\phi_{要因}, \phi_E, 0.01)$

$\phi_{要因}$	$\phi_{誤差}$	有意水準 α	F値
2	4	0.05	6.944
2	4	0.01	18.000
4	4	0.05	6.388
4	4	0.01	15.977

表 4 の F_0 と表 5 の値を比較すると、有意水準 5% について因子 A と B とともに F 分布の上側 $100 \times \alpha$ % 点 $F(\phi_{要因}, \phi_E, 0.01)$ を上回っている。したがって、帰無仮説を棄却し対立仮説を採択する結果であると言える。よって、有意水準 5% において、それらが飛距離に対して有意な効果を与えていると言える。

6. 分散分析後のモデル式の決定

分散分析の結果を用いてモデル式を再度立式する。本解析では、当初のモデル式に対して交互作用を誤差項に含むこととした。よって、以下のようにモデル式を決定する。

$$y_{ij} = \mu + a_i + b_j + \varepsilon$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

7. 最適水準の決定

最後に最適水準を決定する。本解析により、主効果は有意な影響を持っており交互作用はないものと考えられるため、最適水準は A1B1 であると言える。

6. 考察

本実験では、直行配列表を用いた割りばしカタパルトの最適水準における解析を行った。解析結果としては、有意水準 5%において因子 A と B の主効果が有意な効果を飛距離に対して持つと求めることができた。一方で、因子 A と B の交互作用については、要因効果図と物理学的な理論計算より、効果値が 0 であると判断した。前週までの解析結果と比較すると、ヤング率や割りばしの長さ、キャップの位置についての評価と同一の解析結果となった。よって、3 週にわたる実験の結果、洗濯バサミによる角速度が一定であり球が一定の場合は、キャップの位置は末端から近い位置に設置し、割り箸の長さは短い方が良いことがわかった。そして、元禄と檜、吉野杉のヤング率はそれぞれ、 8.5×10^9 , 8.9×10^9 , 6.0×10^9 となっており、元禄と檜がほぼ同じ値で吉野杉よりも高くなっていることから、固い材質ほど飛距離を伸ばすことができると言えた。これは、第一回のレポートで示したエネルギー伝達率の計算に基づいて、ヤング率が小さいほどエネルギー伝達率が高くなるとする公式と同様の意味を示す。エネルギー伝達率が大きい場合、エネルギーの受け渡しロスが少なく、同一の剛体運動の場合でも飛距離を伸ばすことができる。それにより、上記のように最適水準(キャップの位置は 1cm で元禄を使う)が定まったと考察する。

そして、今回用いた直行配列表では計測回数を減らすことができるという利点を持つ。今回の実験では 2 因子 3 水準による実験であったため、その利点を最大限活かすことができなかったものの、2 元配置分散分析表と比較すると、前提知識により因子の選択を行えるという利点があると言える。そのため、交互作用がないと仮定すると、3 因子 3 水準分散分析も同一の実験回数で行うことができる。よって、実験回数が膨大になり、コスト面を考慮する必要がある企業でのデータ収集および解析では、直行配列表を用いた解析も建設的に採用していくべきであると考察する。

7. 結論

本実験では、割りばしカタパルトの最適水準を求めた。その中で、キャップの位置が 1cm、割りばしの種類が元禄である水準が最適と求めることができた。そして、その要因としては、ヤング率によるエネルギー伝達率変化や剛体運動を仮定した円運動の半径変化が影響していると考察した。また、本実験で利用した直行配列表実験について、実験回数の削減や事前知識を元にした応用性についての利点を改めて実感することができた。今後は、一元配置等の分散分析実験や直行配列実験、一対比較実験といった実験法の中から、実験環境にあった実験法を自身で検討することから始め、どのようにデータを収集するべきかなど要件定義を開始したいと考え、実行することを今後の展望とする。

8. 参考文献

1. 中央大学理工学部ビジネスデータサイエンス学科,
データサイエンス実験 A,2024
2. 山田正,木材の特性,木材の力学的性質,
(https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsms1963/28/312/28_312_910/_pdf)
2024/12/31 取得。
3. 山 井 良 三 郎,木材の強度特性について,
(https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsms1952/10/98/10_98_869/_pdf/-char/ja),
2024/12/31 取得。
4. 坪井一洋, 星野貴弘, 浜松芳夫, 「角度に依存する初速度を持つ投射の最適角」,
茨城大学知能システム工学科, 日本大学電気工学科, 日本応用数理学会論文紙,
Vol.25, No.4, 2015, 255~266.
5. 尾縣貢, 関岡康雄, 「遠投における投射角度の変化が投射初速度, 投射高および投
動作に及ぼす影響」, スポーツ教育学研究, 1994, Vol.14, No.1, pp,49-59.