実験計画法第 2 週目
―割りばしカタパルトを用いた 2 水準系直交配列表実験―
23D7104001I 高木悠人

1. 実験目的

本実験では、割りばしカタパルトにおける最適水準を少ない実験回数で求めることを目的とした。前回の実験における解析手法では、2 元配置分散分析表を用いた。しかし、多次元配置分散分析の場合、実験回数が指数的に増加する。そのため、事前知識として交互作用がないと予測できる因子を省略し実験回数を減らす直交配列表実験を実施した。

2. 実験方法

2.1. 要件定義

本実験では、最適水準を「最も飛距離が長い水準」と定義し、以下の特性と因子、その水準のもとで実験を行った。

特性:球が飛んだ飛距離(cm)

因子と水準:4 因子 2 水準

(1) キャップを取り付ける位置（A）1cm, 3cm
(2) 割りばしの種類（B）白樺，檜
(3) 球の大きさ（C）(A4 紙一枚に対して) 1/4, 1/8
(4) 洗濯ばさみ（D）トラスコ中山，オーエ

取り上げた 4 つの因子が球の飛ぶ距離に影響を与えるかどうかを検証する。そして、以下の交互作用があると推測したため、その有無についても検証する。

(1) B×C
割りばしの種類と球の大きさについて、球が大きく歪みやすい素材の場合には、軌道のずれがおきやすくカタパルトの運動エネルギーが球に伝達されにくく、初速度が小さくなると予想できるため、採用する。
(2) B×D
割りばしの種類と洗濯ばさみについて、歪みが大きくバネの力が強い割りばしカタパルトでは、先に述べた通りエネルギー伝達率の低下につながると予想できるため、採用する。

2.2.測定方法
次に割りばしカタパルトの製作手法を以下に示す。

1. 洗濯ばさみのはさみ部分と持ち手部分を割りばしと重ね合わせ、テープを 2 周半巻いて固定する。
2. 片方の割りばしの洗濯バサミと反対側の端から該当水準のキャップ位置にペットボトルキャップをセロファンテープで固定する。

上記の手順で各 4 因子の該当水準に注意して作成した。作成した割りばしカタパルトを図 1 で示す。

図 1. 割りばしカタパルト

次に紙球の製作に移った。紙球は A4 用紙の 1/2 サイズ,1/8 サイズを用いて丸めることで作成した。大きさについては、ペットボトルキャップに嵌ることで飛距離に影響を与えることがないようできる限り統一することとした。

2.3.割り付け方法
本実験で使う $L_8(2^7)$直交配列表における因子の割り付けを行った。ただし、先に挙げた各因子と交互作用以外は無視できるものと仮定し、交絡しないように気をつけて行うこととした。

2.4.測定手法
上記の方法で作製された 8 通りの計測を行った。計測手順を以下に示す。

1. 8 通りの割りばしカタパルトによる飛距離測定において測定順序効果をないものとするためにランダマイズを行う。ランダマイズは Excel にて RAND 関数を用いて 8 つの乱数生成し RANK 関数でその順序を決定することとした。
2. 使用する割りばしカタパルトを測定箇所に置く。
3. 測定メジャーの基準位置(0cm)をキャップの位置に合わせて固定する。
4. 紙球が飛ぶ方向に人やモノがないことを確認し、割りばしカタパルトを使って紙球を飛ばす。ただし、実験者による影響をなくすため毎回の測定を同一の実験者によるものとした。
5. 紙球が 1 度目に落下した地点をメジャーで計測し、記録する。
6. 2 から 5 の計測作業を各条件で行う。

上記の計測を行い、Excel ファイルに記録し解析を進めることとした。

3. 実験で得られたデータ

1. 割り付け

本実験で用いた割り付け表を表 1 に示す。

表 1. L8(27)直交配列表における割り付け結果

割り付け	A	B	E	C	D	B×C	B×D	水準組み合わせ	データ	実験順序
列番号	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]			
1	1	1	1	1	1	1	1	A1B1C1D1	y_1	
2	1	1	1	2	2	2	2	A1B1C2D2	y_2	
3	1	2	2	1	1	2	2	A1B2C1D1	y_3	
4	1	2	2	2	2	1	1	A1B2C2D2	y_4	
5	2	1	2	1	2	1	2	A2B1C1D2	y_5	
6	2	1	2	2	1	2	1	A2B1C2D1	y_6	
7	2	2	1	1	2	2	1	A2B2C1D2	y_7	
8	2	2	1	2	1	1	2	A2B2C2D1	y_8	
群	1	2	2	3	3	3	3			
成分	a		a		a		a			
		b	b			b	b			
				c	c	c	c			
	1群	2群			3群					

各因子における水準は、2.1.要件定義と対応しており水準 1 が左、水準 2 が右とした。その上で、成分を見て、a に A、b に B、a と c の交互作用がないものと仮定して D を割り付け、a×b×c の交互作用もないものと仮定して E を割り付けた。

2. ランダマイズ

以下にランダマイズ結果を示す。

表 2. ランダマイズ結果

割り付け	A	B	E	C	D	B×C	B×D	水準組み合わせ	データ	実験順序
列番号	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]			
1	1	1	1	1	1	1	1	A1B1C1D1		8
2	1	1	1	2	2	2	2	A1B1C2D2		2
3	1	2	2	1	1	2	2	A1B2C1D1		3
4	1	2	2	2	2	1	1	A1B2C2D2		1
5	2	1	2	1	2	1	2	A2B1C1D2		6
6	2	1	2	2	1	2	1	A2B1C2D1		7
7	2	2	1	1	2	2	1	A2B2C1D2		5
8	2	2	1	2	1	1	2	A2B2C2D1		4
群	1	2	2	3	3	3	3			
成分	a		a		a		a			
		b	b			b	b			
				c	c	c	c			
	1群	2群			3群					

ランダマイズ方法は測定手法にて述べたとおりとした。

3. 実験結果

以下に実験結果を示す。

表 3. 計測結果

割り付け	A	B	E	C	D	B×C	B×D	水準組み合わせ	データ	実験順序
列番号	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]			
1	1	1	1	1	1	1	1	A1B1C1D1	236.4	8
2	1	1	1	2	2	2	2	A1B1C2D2	248.3	2
3	1	2	2	1	1	2	2	A1B2C1D1	243.1	3
4	1	2	2	2	2	1	1	A1B2C2D2	257.2	1
5	2	1	2	1	2	1	2	A2B1C1D2	247.8	6
6	2	1	2	2	1	2	1	A2B1C2D1	291.4	7
7	2	2	1	1	2	2	1	A2B2C1D2	277	5
8	2	2	1	2	1	1	2	A2B2C2D1	290	4
群	1	2	2	3	3	3	3			
成分	a		a		a		a			
		b	b			b	b			
				c	c	c	c			
	1群	2群			3群					

上記の測定結果をもとに解析することとする。

4. 解析方法

表 3 の測定結果をもとに、$L_8(2^7)$直交配列表による解析を行う手順を以下に示す。

1. 得られたデータのモデル式の決定

　はじめに、データのモデル式を決定する。今回の実験では、A,B,C,D における主効果と B と C、B と D 間における交互作用があると仮定したため、それらを定式化する。

2. 計算補助表の作成

　次に計算補助表を作成する。計算補助表の作成方法は、データサイエンス実験 A 教書(p.23)をもとに作成した。ただし、計算補助表の計算方法や参照先は以下のように定義する。

表 4. 計算補助表

割り付け	=INDEX($C$4:$I$4,1,1)		=INDEX($C$4:$I$4,1,2)		=INDEX($C$4:$I$4,1,3)		=INDEX($C$4:$I$4,1,4)		=INDEX($C$4:$I$4,1,5)		=INDEX($C$4:$I$4,1,6)		=INDEX($C$4:$I$4,1,7)	
列番号	=INDEX($C$5:$I$5,1,1)		=INDEX($C$5:$I$5,1,2)		=INDEX($C$5:$I$5,1,3)		=INDEX($C$5:$I$5,1,4)		=INDEX($C$5:$I$5,1,5)		=INDEX($C$5:$I$5,1,6)		=INDEX($C$5:$I$5,1,7)	
水準	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
データ	=L23	=L27	=L23	=L25	=L23	=L25	=L23	=L24	=L23	=L24	=L23	=L24	=L23	=L24
	=L24	=L28	=L24	=L26	=L24	=L26	=L25	=L26	=L25	=L26	=L26	=L25	=L26	=L25
	=L25	=L29	=L27	=L29	=L29	=L27	=L27	=L28	=L28	=L27	=L27	=L28	=L28	=L27
	=L26	=L30	=L28	=L30	=L30	=L28	=L29	=L30	=L30	=L29	=L30	=L29	=L29	=L30
T[k]1,T[k]2	=SUM(R7:R10)	=SUM(S7:S10)	=SUM(T7:T10)	=SUM(U7:U10)	=SUM(V7:V10)	=SUM(W7:W10)	=SUM(X7:X10)	=SUM(Y7:Y10)	=SUM(Z7:Z10)	=SUM(AA7:AA10)	=SUM(AB7:AB10)	=SUM(AC7:AC10)	=SUM(AD7:AD10)	=SUM(AE7:AE10)
y	=AVERAGE(R7:R10)	=AVERAGE(S7:S10)	=AVERAGE(T7:T10)	=AVERAGE(U7:U10)	=AVERAGE(V7:V10)	=AVERAGE(W7:W10	=AVERAGE(X7:X10)	=AVERAGE(Y7:Y10)	=AVERAGE(Z7:Z10)	=AVERAGE(AA7:AA1	=AVERAGE(AB7:AB1	=AVERAGE(AC7:AC1	=AVERAGE(AD7:AD1	=AVERAGE(AE7:AE1
T[k]1+T[k]2	=R11+S11		=T11+U11		=V11+W11		=X11+Y11		=Z11+AA11		=AB11+AC11		=AD11+AE11	
T[k]1-T[k]2	=R11-S11		=T11-U11		=V11-W11		=X11-Y11		=Z11-AA11		=AB11-AC11		=AD11-AE11	
S[k]	=R14^2/COUNTA(R7:S10)		=T14^2/COUNTA(T7:U10)		=V14^2/COUNTA(V7:W10)		=X14^2/COUNTA(X7:Y10)		=Z14^2/COUNTA(Z7:AA10)		=AB14^2/COUNTA(AB7:AC10)		=AD14^2/COUNTA(AD7:AE10)	

上記の表は割り付け表を参照したエクセル上の計算式である。L 列における 23 行目から 30 行目に実験 1 から 8 までのデータが格納されている。

　上記の計算補助表を参考にして作成することとする。

3. 二元表の作成

次に二元表の作成をおこなう。本実験では、交互作用があると仮定した B と C,B と D の組み合わせについて作成する。以下に、表形式を示す。

表 5. 二元表

	C1	C2
B1		
B2		

上記の表は B と D の交互作用についての一例である。

4. データのグラフ化

上記の二元表や計算補助表をもとに、主効果と交互作用についてそれぞれ、要因効果図を作成する。

5. 仮説の設定

データのモデル式をもとに、各効果における帰無仮説と対立仮説を次のように設定する。本実験では、各因子の効果が存在すると言いたい。よって、水準が違うことにより、その効果値が異なることを示したい。そのため、それを対立仮説として設定する。一方で、帰無仮説は逆となる数式となる必要がある。よって、水準による効果値の差がないと示す数式であるため、すべて 0 であるとする式となる。

6. 平方和と自由度の計算

次に、平方和と自由度を計算する。この計算は計算補助表における該当箇所が存在するが、数式を以下に示すこととする。

$$CT = \frac{\left(データの総和\right)^2}{総データ数}$$

$$SS_A = \sum_{i=1}^{2} \frac{\left(A_i 水準データの和\right)^2}{A_i 水準のデータ数} - CT = \frac{(T_{A1} - T_{A2})^2}{N}$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^{2} \frac{\left(B_j 水準データの和\right)^2}{B_j 水準のデータ数} - CT = \frac{(T_{A1} - T_{A2})^2}{N}$$

$$SS_C = \sum_{k=1}^{2} \frac{\left(C_k 水準データの和\right)^2}{C_k 水準のデータ数} - CT = \frac{(T_{A1} - T_{A2})^2}{N}$$

$$SS_D = \sum_{l=1}^{2} \frac{\left(D_l 水準データの和\right)^2}{D_l 水準のデータ数} - CT = \frac{(T_{A1} - T_{A2})^2}{N}$$

$$SS_{B\times C} = \frac{\left(T_{B\times C_1} - T_{B\times C_2}\right)^2}{N}$$

$$SS_{B\times D} = \frac{\left(T_{B\times D_1} - T_{B\times D_2}\right)^2}{N}$$

$$SS_E = \frac{(T_{E1} - T_{E2})^2}{N}$$

$$SS_T = \sum_{t=1}^{7} SS_{[t]}$$

$$\varphi_A = \varphi_B = \cdots \varphi_{B\times D} = \varphi_E = 1$$

$$\varphi_T = \sum_{t=1}^{7} \varphi_{[t]}$$

水準数は、各列に割り付けられる水準数から 1 引いたものであるから$\varphi_{[k]}$は常に 1 となる。よって、列自由度は以下の式から算出できる。

$$\varphi_T = \sum_{k=1}^{7} \varphi_{[k]}$$

7. 分散分析表の作成

上記までの計算補助表と平方和と自由度を用いて分散分析表を作成する。そして、必要であれば検出力を上げることを目的にプーリングを行う。

8. 分散分析後のモデル式の再決定

分散分析表を作成する際に、プーリングを行った場合はモデル式の再決定を行う。プーリングした要因は、有意と言える効果を持たないため誤差に含む。そのため、効果は 0 となるので、モデル式における該当項は不必要と言える。よって、モデルの再決定を行うこととする。

9. 最適水準の決定

上記のモデル式や要因効果図をもとに、最適水準を決定する。

5. 解析結果

計測結果をもとにして、手順に従い解析を行なった。

1. 得られたデータのモデル式の決定

まず、でーたのモデル式を決定する。解析でも示したとおり、本実験での目的変数に該当する特性は、飛距離である。それに対して目的変数が各因子となる。そして、それらの因子の主効果に加えて交互作用も部分的に考慮することとした。よって以下のように定義できる。

$$y_{ijkl} = a_i + b_j + c_k + d_l + (bc)_{jk} + (bd)_{jl} + \varepsilon$$

ただしεは正規分布 $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$に従うと仮定する。

2. 計算補助表の作成

計算補助表を、先に実施した割り付けに従って、以下のように作成した。

表 6. 計算補助表

割り付け	A		B		E		C		D		B×C		B×D	
列番号	[1]		[2]		[3]		[4]		[5]		[6]		[7]	
水準	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
データ	236.4 248.3 243.1 257.2	247.8 291.4 277 290	236.4 248.3 247.8 291.4	243.1 257.2 277 290	236.4 248.3 277 290	243.1 257.2 247.8 291.4	236.4 243.1 247.8 277	248.3 257.2 291.4 290	236.4 243.1 291.4 290	248.3 257.2 247.8 277	236.4 257.2 247.8 290	248.3 243.1 291.4 277	236.4 257.2 291.4 277	248.3 243.1 247.8 290
T[k]1,T[k]2	985	1106.2	1023.9	1067.3	1051.7	1039.5	1004.3	1086.9	1060.9	1030.3	1031.4	1059.8	1062	1029.2
y	246.25	276.55	255.975	266.825	262.925	259.875	251.075	271.725	265.225	257.575	257.85	264.95	265.5	257.3
T[k]1+T[k]2	2091.2		2091.2		2091.2		2091.2		2091.2		2091.2		2091.2	
T[k]1-T[k]2	-121.2		-43.4		12.2		-82.6		30.6		-28.4		32.8	
S[k]	1836.18		235.445		18.605		852.845		117.045		100.82		134.48	

3. 二元表の作成

次に、割り付け表をもとにして、二元表を作成する。本実験では、B と C、B と D における交互作用について注目したため、その 2 つについてそれぞれ二元表を作成した。

表 7. 交互作用 B×C における二元表

	C1	C2
B1	484.2 242.1	539.7 269.85
B2	520.1 260.05	547.2 273.6

上記のデータは、B 要因で i 水準、C 要因で j 水準をとった場合には、i 行 j 列に格納している。例えば、要因 B で水準 1、要因 C で水準 1 を利用したものを左上に格納することとした。

表 7. 交互作用 B×D における二元表

	D1	D2
B1	527.8	496.1
	263.9	248.05
B2	533.1	534.2
	266.55	267.1

4. データのグラフ化

上記の二元表を用いて各主効果における水準別効果値と、各交互作用で要因効果図を作成し、それぞれ図 2 と 3 に示す。

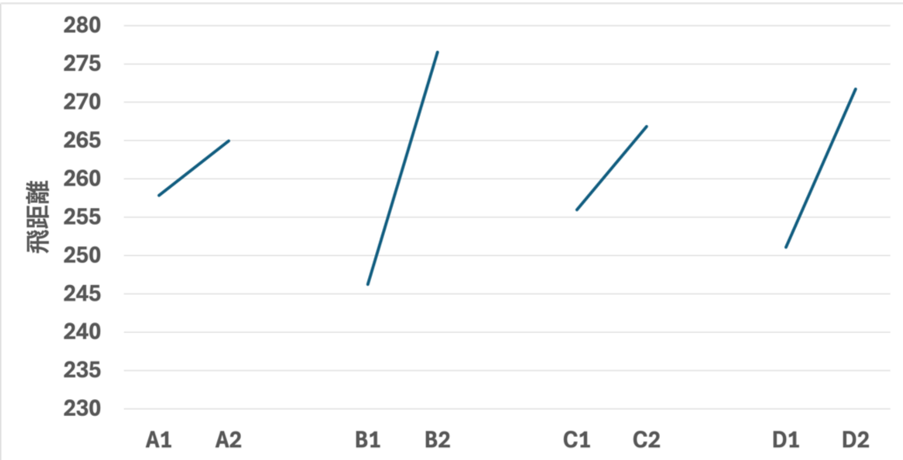

図 2. 各要因の主効果における要因効果図

図 2 を見ると、各要因において効果値に差が生じていることがわかる。しかし、有意と言える効果値なのかわからないため、分散分析表を用いて有意性を示す必要があると考える。

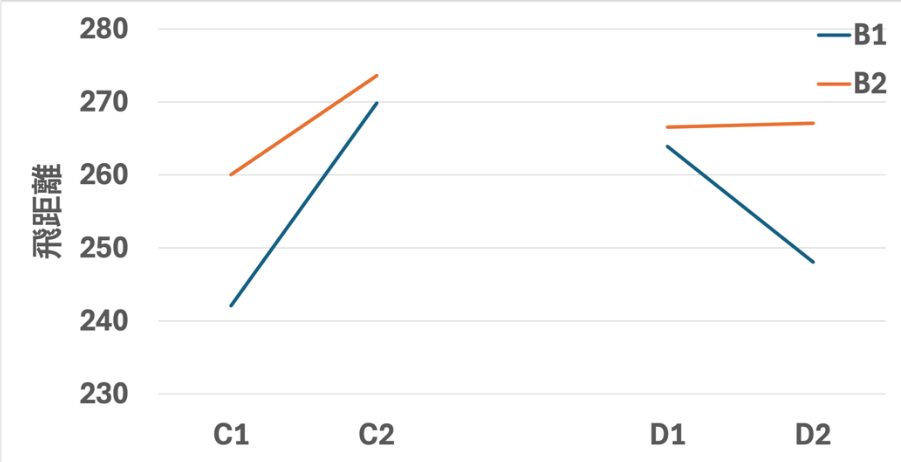

図 3. 各交互作用における要因効果図

図 3 から水準間での交互作用は存在しないと推測できる。しかし、主効果の要因効果図と同様に分散分析表を用いた有意性の確認が必要であると言える。

5. 仮説の設定

上記の要因効果図とモデル式から仮説を設定する。本実験の目的は、各要因に効果があると示しことである。そのため、対立仮説では、効果値がすべて 0 であるとは言えないとする数式が適している。それに対して、帰無仮説は効果がないとする仮説である。よって、すべて 0 であることを数式で示せば良いと言える。よって、各要因について、以下のように仮説を立てることができる。

(1) 要因 A について

帰無仮説: $a_1 = a_2 = 0$

対立仮説: $\sum_{i=1}^{2} a_i^2 \neq 0$ (少なくとも 1 つのa_iが 0 でない)

(2) 要因 B について

帰無仮説: $b_1 = b_2 = 0$

対立仮説: $\sum_{j=1}^{2} b_j^2 \neq 0$ (少なくとも 1 つのb_iが 0 でない)

(3) 要因 C について

帰無仮説: $c_1 = c_2 = 0$

対立仮説: $\sum_{k=1}^{2} c_k^2 \neq 0$ (少なくとも 1 つのc_kが 0 でない)

(4) 要因 D について

帰無仮説: $d_1 = d_2 = 0$

対立仮説: $\sum_{l=1}^{2} d_l^2 \neq 0$ (少なくとも 1 つのd_lが 0 でない)

(5) 交互作用 B×C について

帰無仮説: $(bc)_1 = (bc)_2 = 0$

対立仮説: $\sum_{m=1}^{2} (bc)_m^2 \neq 0$ (少なくとも 1 つの$(bc)_m$が 0 でない)

(6) 交互作用 B×D について

帰無仮説: $(bd)_1 = (bd)_2 = 0$

対立仮説: $\sum_{n=1}^{2}(bc)_n^2 \neq 0$（少なくとも 1 つの$(bd)_n$が 0 でない）

6. 平方和と自由度の設定

次に平方和と自由度を以下のように求めた。

分散分析表を作成するために、以下の計算を行う。

$$CT = \frac{\left(データの総和\right)^2}{総データ数} = 546639.4$$

$$SS_A = \sum_{i=1}^{2} \frac{\left(A_i 水準データの和\right)^2}{A_i 水準のデータ数} - CT = \frac{(T_{A1} - T_{A2})^2}{N} = 134.5$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^{2} \frac{\left(B_j 水準データの和\right)^2}{B_j 水準のデータ数} - CT = \frac{(T_{A1} - T_{A2})^2}{N} = 235.4$$

$$SS_C = \sum_{k=1}^{2} \frac{\left(C_k 水準データの和\right)^2}{C_k 水準のデータ数} - CT = \frac{(T_{A1} - T_{A2})^2}{N} = 852.8$$

$$SS_D = \sum_{l=1}^{2} \frac{\left(D_l 水準データの和\right)^2}{D_l 水準のデータ数} - CT = \frac{(T_{A1} - T_{A2})^2}{N} = 1836.2$$

$$SS_{B\times C} = \frac{\left(T_{B\times C_1} - T_{B\times C_2}\right)^2}{N} = 100.8$$

$$SS_{B\times D} = \frac{\left(T_{B\times D_1} - T_{B\times D_2}\right)^2}{N} = 18.6$$

$$SS_E = \frac{\left(T_{E_1} - T_{E_2}\right)^2}{N} = 117.0$$

$$SS_T = \sum_{t=1}^{7} SS_{[t]} = 243.1$$

$$\varphi_A = \varphi_B = \cdots \varphi_{B\times D} = 1$$

$$\varphi_T = \sum_{t=1}^{7} \varphi_{[t]} = 7$$

7. 分散分析表の作成

上記の計算をもとにして、以下の分散分析表を作成した。

表 8. 分散分析表 1

要因	平方和SS	自由度φ	平均平方MS	F_0	E(MS)
A	1836.18	1	1836.18	98.6928245	$\sigma^2_E + 4\sigma^2_A$
B	235.445	1	235.445	12.6549315	$\sigma^2_E + 4\sigma^2_B$
C	852.845	1	852.845	45.8395593	$\sigma^2_E + 4\sigma^2_C$
D	117.045	1	117.045	6.29105079	$\sigma^2_E + 4\sigma^2_D$
B×C	100.82	1	100.82	5.41897339	$\sigma^2_E + 2\sigma^2_{B\times C}$
B×D	134.48	1	134.48	7.22816447	$\sigma^2_E + 2\sigma^2_{B\times D}$
E	18.605	1	18.605		σ^2_E
T	3295.42	7			

上記の分散分析表を見ると、F_0値が大きく異なっていることがわかる。そして、それらのうち、有意水準 5%において F_0 が F 分布の上側 100×α%点 F(1,1,0.05)=161.45 を大きく下回っている。そのため、それらの要因のうち過剰に小さい(F_0 が 10 に満たない)要因である主効果 D と交互作用 B×C と交互作用 B×D についてプーリングすることとした。以下にプーリング後の分散分析表を示す。

表 9. プーリング結果の分散分析表 2

要因	平方和SS	自由度φ	平均平方MS	F_0	E(MS)
A	1836.18	1	1836.18	19.7997574	$\sigma^2_E + 4\sigma^2_A$
B	235.445	1	235.445	2.53883273	$\sigma^2_E + 4\sigma^2_B$
C	852.845	1	852.845	9.19633374	$\sigma^2_E + 4\sigma^2_C$
E	370.95	4	92.7375		σ^2_E
T	3295.42	7			

上記の表についても同様に、F 分布の上側 100×α%点 F(1,4,0.05)=7.71 に対して比較する。主効果における A と C では、7.71 を上回っているため、有意判定式を満たす結果となっている。しかし、B では 2.53 であり下回っており有意であると断言できない。これらより、B についてプーリングを行うかについて、因子の影響を過度に無視することにつながると考えたためプーリングすべきだないと判断した。

8. 分散分析後のデータのモデル式の再決定

プーリング後の結果からモデル式を再決定する。表 9 を見ると、要因 A と要因 C の主効果が有意となっている。つまり、それらの要因が特性飛距離に対して有意な影響を与えていると言える。しかし、要因 B については、有意水準 5%にて有意であるとは言えないため、効果を持っているのか不明である。よって、データのモデル式に採用するべきではないと考える。これらより、最適なモデル式は以下のとおりである。

$$y_{ik} = a_i + c_k + \varepsilon$$

ただしεは正規分布 $N(0, \sigma^2)$に従うと仮定する。

9. 最適水準の決定

上記のモデル式と要因効果図を参考にして、最適水準を以下に示す。

$$(A_{best}, C_{best}) = (A_2, C_2)$$

よって、以下のモデル式で示すことができる。

$$y_{best} = a_2 + c_2 + \varepsilon$$

6. 考察

本実験では、割りばしカタパルトにおける飛距離特性を最大化する要因の最適水準を求めた。それにより、キャップの位置と球の大きさが有意な影響を与えていることがわかった。割りばしカタパルトの飛距離は、力学的物理法則に従うと言える。よって、運動方程式を用いた物理シミュレーションを第一回と同様に実施し、本実験の評価をすることとした。

まずは、キャップの位置を変えてシミュレーションすることとした。まず、キャップの位置 1cm から 3cm に変えることにより、球の円運動における半径が小さくなると言える。具体的には、割りばしの長さを 20cm とした時に 19cm の半径から 17cm に変化する。そのため、発射速度が速くなると言える。具体的に定式化すると以下のように示せる。

$$F = mr\omega^2$$
$$v = r\omega^2$$

よって、円運動における瞬間の物体速度が割りばしカタパルトの初速度に該当するため、本物体の運動における初速度は、軌道半径、つまり支点からキャップまでの長さに比例すると言える。ただし、キャップの位置が円運動の中心から離れることにより、割りばしの運動に左右のブレが生じると予想できる。さらに、初速度が大きいことにより、その割りばしの方向のずれの影響を受けやすいと言える。具体的には、洗濯バサミと割りばしの結合部が平行に接合されていれば、基準方向に飛ぶ可能性が高い。しかし、結合部において噛み合わせが悪く割りばしが歪んでいる場合には、基準方向からずれた方向に飛ぶ可能性が高い。さらには、投射方向と円運動の軌道方向がずれていることで、エネルギー伝達率が減少する可能性を示唆できる。そのため、ネルギー伝達率を以下のように定義することとした。

$$rate_{Energy} = 1 - |\sin\theta| , (-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$$

θ は円軌道の運動方向と投射方向のずれを示している。このエネルギー伝達率について、半径が大きくなることで影響を受けやすくなると重みづけする。ただし、エネルギー伝達率は半径 10cm の時を 1 と定義し、半径変化に対して軌道の孤長変化は大きいものであるため、2 乗した値を利用し、定式化することとした。

$$rate_{Energy} = (1 - |\sin\theta|) * \left(\frac{10}{r}\right)^2 \ , (-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$$

上記より、同じカタパルトを利用したと仮定すると、以下のように変換できる。

$$rate_{Energy} = K * \left(\frac{10}{r}\right)^2$$

よって、そのエネルギー伝達率を用いると、初速度は以下のように定義できる。

$$v_0 = rate_{Energy} * r\omega^2$$

$$v_0 = 100 * \omega^2 * (1 - \sin(\theta)) * \frac{1}{r}$$

よって、上記の式を初速度として定義して利用することとした。これを用いて空気抵抗をないものと仮定してシミュレーションすると以下のような変化が生じた。

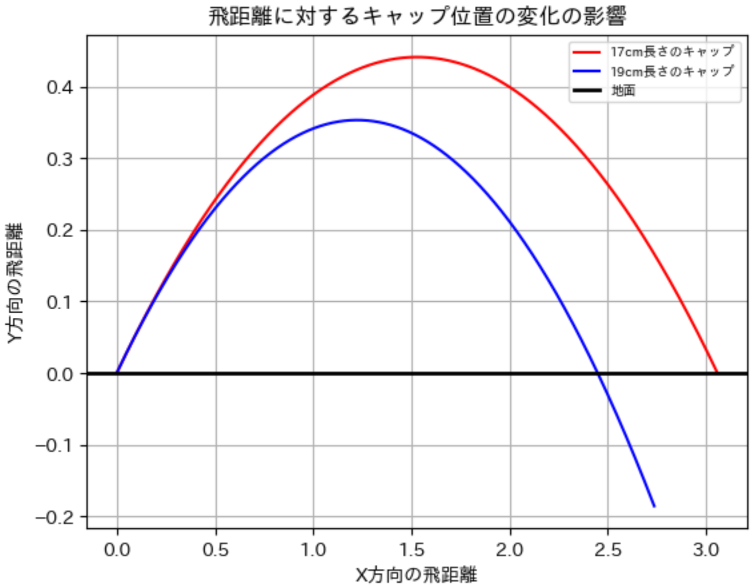

図 4. キャップ位置の違いによる飛距離特性の変化

上記の図を見ると、腕の長さが長い 19cm のカタパルトの飛距離特性が小さくなっていることがわかる。これは、先に示した初速度の定義式において半径 r が分母に位置し、その半径に依存するとしたためである。坪井一洋氏らによる「角度に依存する初速度をもつ投射の最適角」という論文によると、”水平方向速度の効果が 3 次の項に現れることを示した。つまり、投射運動における水平方向飛距離は水平方向初速度の 3 乗に依存する“と述べている。上記の論文での実験環境では、物質の形状が揚力を考慮するものとしており、本実験で扱ったものよりその傾向が強いと推測できる。それに

より、3 乗には満たないが水平方向初速度の 2~3 乗に影響を受けており水平方向初速度は、はじめに述べた投射方向と円軌道方向のずれθに依存すると言えるため、上記の力学モデリングおよびそのシミュレーションは適していると裏付けができる。よって、本実験の結果として得られたキャップの位置による飛距離は、特性変化は有意であり第 2 水準が最適となる要因として、カタパルト制作におけるずれが影響を与えていると考える。

次に、球の大きさについて考える。本実験での球の大きさの最適水準は 1/8 の大きさである。そのため、球の大きさは連続値による解釈が可能であると仮定すると、小さい球の飛距離が大きいと言える。これについて、先のモデルを利用して評価する。本実験では、球の大きさを利用した用紙の大きさによって定義した。つまり面積あたりの質量が等しいと言えるため、小さい球は軽いと言える。この時、先の考察における引用文献の実験環境と比較すると、本実験では揚力を持たない物体であると言える。さらに、空気抵抗は物体断面積に対して正の相関を持つため、物体が大きくなれば効力も大きくなり飛距離が小さくなる傾向は言うまでもない。また、物体の斜方投射運動中の力を鉛直、水平方向に分解して考えると、重力が常に下向きに働いている。従って、重力が大きくなることで着地までの時間が短くなる。よって、球の大きさが影響を与えたのではないかと考察した。

7. 結論

本実験では、割りばしカタパルトの最適条件を直交配列表に基づいて分析することとした。その結果、キャップの位置は 3cm、球の大きさは 1/8 が最適条件であり、飛距離を最も伸ばせる試験機であることがわかった。さらに、それらの条件が有意な影響を与えている要因として物理シミュレーションを用いて物理力学の観点から理論的に評価することができた。そのため、実測値による有意性と理論値による有意性の二面から最適水準を評価できた。また、実験回数の削減のため、実験法として直交配列実験を採用し、複数の交互作用を無視できると仮定し進めたため、実際に無視できると言えるのか、多次元配置分散分析実験や一対比較実験等を用いて評価することを今後の展望とする。

8. 参考文献

(1) 中央大学理工学部ビジネスエータサイエンス学科,データサイエンス実験 A,2024, pp.76-87

(2) 坪井一洋，星野貴弘，浜松芳夫，「角度に依存する初速度を持つ投射の最適角」，茨城大学知能システム工学科，日本大学電気工学科，日本応用数理学会論文紙, Vol.25, No.4, 2015, 255~266.

(3) 尾縣貢，関岡康雄，「遠投における投射角度の変化が投射初速度， 投射高および投動作に及ぼす影響」，スポーツ教育学研究, 1994, Vol.14, No.1, pp,49-59.

9. 付録

本実験で利用した力学シミュレーションのコードを以下に示す。

```
import matplotlib.pyplot as plot
import japanize_matplotlib
import math
def calculate_initial_velocity(arm_length):
    base_velocity = 10   # 基本の初速度（m/s）
    efficiency_factor = 10/arm_length   # 腕の長さによるエネルギー効率の低下
    velocity = base_velocity * efficiency_factor   # 効率を考慮した初速度
    return velocity
# 球の大きさ->重さと空気抵抗が小さくなると仮定する。
#初期設定
position_x_17 = []
position_y_17 = []
position_x_19 = []
position_y_19 = []
init_x,init_y = 0,0
velocity_x_17= calculate_initial_velocity(17)*math.cos(math.radians(30))
velocity_y_17= calculate_initial_velocity(17)*math.sin(math.radians(30))
velocity_x_19= calculate_initial_velocity(19)*math.cos(math.radians(30))
velocity_y_19= calculate_initial_velocity(19)*math.sin(math.radians(30))

#シミュレーション
time= 0
pos_x,pos_y_ = 0.000001,0.000001
```

```
for time in ([i*0.0001 for i in range(400000)]):
    #17 でのシミュレーション
    pos_x =velocity_x_17*time
    pos_y_7=velocity_y_17*time-0.5*9.8*(time**2)
    position_x_17.append(pos_x)
    position_y_17.append(pos_y_7)
    #19 でのシミュレーション
    pos_x =velocity_x_19*time
    pos_y_9 =velocity_y_19*time-0.5*9.8*(time**2)
    position_x_19.append(pos_x)
    position_y_19.append(pos_y_9)
    if pos_y_7<0 and pos_y_9<0:
        break


plot.plot(position_x_17,position_y_17,color="red")
plot.plot(position_x_19,position_y_19,color="blue")
plt.axhline(0, color="black", linewidth=2)  # y=0 のラインを「地面」として表示
plt.xlabel("X 方向の飛距離")
plt.ylabel("Y 方向の飛距離")
plt.legend(["17cm 長さのキャップ","19cm 長さのキャップ","地面"],loc='upper
right',fontsize=7)
plt.grid(True)
plt.title("飛距離に対するキャップ位置の変化の影響")
plt.show()
```