

## 実験計画法

# 1. 割りばしカタパルトを用いた要因配置実験

中央大学理工学部ビジネスデータサイエンス学科

23D7104001I 高木悠人

### 1. 実験目的

本実験では、2つの要因の水準を変えて製作した割りばしカタパルトを用いて飛距離を計測し、要因配置実験を用いて測定及び解析し最適水準とその飛距離を求めることを目的とした。

### 2. 実験方法

本実験では、3種類の割りばしと3種類の大きさを変えた紙球を用いて実験した。利用した実験器具は表1の通りである。

表 1. 実験材料

割りばし カタパルト	割りばし	檜
		吉野杉
		元禄
	A4用紙	1/2
		1/8
		1/16
	ペットボトルキャップ	
	洗濯ばさみ(トラスコ中山)	
	セロファンテープ	
計測	メジャー	

#### 2.1. 割りばしカタパルトと紙球製作手法

次に割りばしカタパルトの製作手法を以下に示す。

- 洗濯ばさみのはさみ部分と持ち手部分を割りばしと重ね合わせ、テープを2周半巻いて固定する。
- 片方の割りばしの洗濯バサミと反対側の端から2cmの位置にペットボトルキャップをセロファンテープで固定する。

上記の手順で3種類の割りばしごとに作成した。作成した割りばしカタパルトを図1で示す。



図 1. 割りばしカタパルト

次に紙球の製作に移った。紙球は A4 用紙の 1/2 サイズ,1/8 サイズ,1/16 サイズを用いて丸めることで作成した。大きさについては、ペットボトルキャップに嵌めることで飛距離に影響を与えることがないようできる限り統一することとした。

## 2.2.測定手法

上記の方法で作製された 3 種類の割りばしカタパルトと 3 種類の紙球の全組み合わせである 9 通りの計測を行う。計測手順を以下に示す。

1. 9 通りの測定において測定順序効果をないものとするためにランダム化を行う。ランダム化は Excel にて RAND 関数を用いて 9 つの乱数生成し RANK 関数でその順序を決定することとした。
  2. 使用する割りばしカタパルトを測定箇所に置く。
  3. 測定メジャーの基準位置(0cm)をキャップの位置に合わせて固定する。
  4. 紙球が飛ぶ方向に人やモノがないことを確認し、割りばしカタパルトを使って紙球を飛ばす。ただし、実験者による影響をなくするため毎回の測定を同一の実験者によるものとした。
  5. 紙球が 1 度目に落下した地点をメジャーで計測し、記録する。
  6. 2 から 5 の計測作業を各条件で行う。
- 上記の計測を 2 回行い、Excel ファイルに記録し解析を進めることとした。

### 3. 実験で得られたデータ

本実験で得られた計測順序におけるランダムイズ結果と飛距離の結果を表 2 と 3、4 にそれぞれ示す。

表 2.1 回目計測順序におけるランダムイズ結果

割りばし種別	玉の種類(×A4用紙)		
	1/2	1/8	1/16
元禄	3	2	1
檜	8	7	6
吉野杉	5	9	4

行方向に割りばしの素材における水準、列方向に紙球の材料となる A4 用紙の大きさの水準とし、各要素にその計測順序を Excel の関数を利用して作成した。

表 3.2 回目計測順序におけるランダムイズ結果

割りばし種別	玉の種類(×A4用紙)		
	1/2	1/8	1/16
元禄	4	5	1
檜	9	7	8
吉野杉	6	2	3

表 4. 飛距離の結果(1 回目)

		玉の種類(× A4用紙)		
		1/2	1/8	1/16
割りばし 種別	元禄	243.0	236.0	189.0
	檜	201.0	202.0	198.0
	吉野杉	250.0	208.0	210.0

単位[cm]

表 5. 飛距離の結果(2 回目)

		玉の種類(× A4用紙)		
		1/2	1/8	1/16
割りばし 種別	元禄	243.0	236.0	189.0
	檜	201.0	202.0	198.0
	吉野杉	250.0	208.0	210.0

単位[cm]

上記のデータをもとにして、解析を行うこととした。

#### 4. 解析方法

本解析で進める要因配置実験の手法について示す。本実験では、割りばし種別と球の種類 の 2 つの要因の水準を変えることで条件を設定した。そのため、二元配置実験の分散分析に従って進めることとした。以下に、その手順を示す。

### 1. データのモデル式の設定

本実験では、割りばし種別の主効果を $a_i$ 、玉の種類の主効果を $b_j$ 、その2つの要因の交互作用を $(ab)_{ij}$ として以下のモデル式を採用することとなる。ただし、要因Aの水準を $i$ 、要因Bの水準を $j$ 、試行回次を $k$ とする。

$$y_{ij} = \mu + a_i + b_j + \epsilon_{ijk}$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^3 b_j = \sum_{i=1}^3 (ab)_{ij} = \sum_{j=1}^3 (ab)_{ij} = 0$$

そして、誤差項となる $\epsilon_{ijk}$ は均一分散であり、正規分布に従うとする。

$$\epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3 \quad k = 1, 2$$

### 2. AB 二元表の作成

AB 二元表を表6で示す計算の通りに水準合計、水準平均を計算し作成する。

表 6. 二元表の作成法

割りばし 種別	玉の種類(×A4用紙)			A <sub>i</sub> の水準合計
	1/2	1/8	1/16	A <sub>i</sub> の水準平均
元禄	$y_{111}$	$y_{121}$	$y_{131}$	$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 y_{1jk}$
	$y_{112}$	$y_{122}$	$y_{132}$	$\frac{1}{6} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 y_{1jk}$
檜	$y_{211}$	$y_{221}$	$y_{231}$	$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 y_{2jk}$
	$y_{212}$	$y_{222}$	$y_{232}$	$\frac{1}{6} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 y_{2jk}$
吉野杉	$y_{311}$	$y_{321}$	$y_{331}$	$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 y_{3jk}$
	$y_{312}$	$y_{322}$	$y_{332}$	$\frac{1}{6} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 y_{3jk}$
B <sub>i</sub> の水準合計	$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 y_{i1k}$	$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 y_{i2k}$	$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 y_{i3k}$	$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 y_{ijk}$
B <sub>i</sub> の水準平均	$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 y_{i1k}$	$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 y_{i2k}$	$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 y_{i3k}$	$\frac{1}{18} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 y_{ijk}$

### 3. 仮説の設定

モデル式を用いて仮説を設定する。本実験では、それぞれの要因について有意な効果があると言いたい。そのため、対立仮説を $a_{i \sim (i=1,2,3)} \neq 0$ などとして鬼無仮説を効果がないとする $a_{i \sim (i=1,2,3)} = 0$ とするべきである。よって、帰無仮説 $H_0$ と対立仮説 $H_1$ を以下のように設定する。

(1) 因子 $a$ の主効果における帰無仮説と対立仮説

帰無仮説 $H_0: a_1 = a_2 = a_3 = 0$

対立仮説 $H_1$ : 少なくとも1つの $i$ で $a_i \neq 0$ ,  $\sum_{i=1}^3 |a_i| \neq 0$

(2) 因子 $b$ の主効果における帰無仮説と対立仮説

帰無仮説 $H_0: b_1 = b_2 = b_3 = 0$

対立仮説 $H_1$ : 少なくとも1つの $j$ で $b_j \neq 0$ ,  $\sum_{j=1}^3 |b_j| \neq 0$

(3) 因子 $a$ と因子 $b$ の交互作用( $ab$ )における帰無仮説と対立仮説

帰無仮説 $H_0: (ab)_{11} = (ab)_{12} = (ab)_{13} = (ab)_{21} = \dots = (ab)_{33} = 0$

対立仮説 $H_1$ : 少なくとも1つの $i, j$ で $(ab)_{ij} \neq 0$ ,  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |(ab)_{ij}| \neq 0$

#### 4. データのグラフ化

データの平均をグラフ化した要因効果図を作成する。そして、その折れ線の傾きに大きな違いがあるか、交互作用と言えるような交差は見られるか確認する。

#### 5. 平方和と自由度の計算

分散分析表を作成するために、以下の計算を行う。

$$CT = \frac{(\text{データの総和})^2}{(\text{総データ数})} = \frac{T^2}{N} \quad (\text{修正項, Correction Term})$$

$$SS_T = (\text{データの二乗和}) - CT = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 y_{ijk}^2 - CT$$

$$SS_A = \sum_{i=1}^3 \frac{(A_i \text{水準のデータの和})^2}{A_i \text{水準のデータ数}} - CT = \sum_{i=1}^3 \frac{T_{i..}^2}{6} - CT$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^3 \frac{(B_j \text{水準のデータの和})^2}{B_j \text{水準のデータ数}} - CT = \sum_{j=1}^3 \frac{T_{.j.}^2}{6} - CT$$

$$SS_{AB} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{(A_i B_j \text{水準のデータの和})^2}{A_i B_j \text{水準のデータ数}} - CT = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{T_{ij.}^2}{2} - CT$$

$$SS_{A \times B} = SS_{AB} - SS_A - SS_B$$

$$SS_E = SS_T - SS_A - SS_B - SS_{A \times B} = SS_T - SS_{AB}$$

$$\phi_T = (\text{総データ数}) - 1 = N - 1$$

$$\phi_A = (A \text{の水準数}) - 1 = l - 1$$

$$\phi_B = (B \text{の水準数}) - 1 = m - 1$$

$$\phi_{A \times B} = (A \text{の水準数}) \times (B \text{の水準数}) - 1 = (l - 1)(m - 1)$$

$$\phi_E = \phi_T - (\phi_A + \phi_B + \phi_{A \times B})$$

## 6. 分散分析表の作成

算出した平方和と自由度を用いて分散分析表を作成する。各平方和、自由度の該当箇所を表 7 に示す。

表 7. 分散分析表作成法

要因	平方和SS	自由度 $\phi$	平均平方MS	$F_0$	E(MS)
$A$	$SS_A$	$\phi_A$	$MS_A = SS_A / \phi_A$	$MS_A / MS_E$	$\sigma^2 + mn\sigma_A^2$
$B$	$SS_B$	$\phi_B$	$MS_B = SS_B / \phi_B$	$MS_B / MS_E$	$\sigma^2 + ln\sigma_B^2$
$A \times B$	$SS_{A \times B}$	$\phi_{A \times B}$	$MS_{A \times B} = SS_{A \times B} / \phi_{A \times B}$	$MS_{A \times B} / MS_E$	$\sigma^2 + n\sigma_{A \times B}^2$
$E$	$SS_E$	$\phi_E$	$MS_E = SS_E / \phi_E$		$\sigma^2$
$T$	$SS_T$	$\phi_T$			

ただし、 $\sigma_z^2$  ( $z = A, B, A \times B$ ) は以下の式で示す。

$$\sigma_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^l a_i^2}{l-1}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{\sum_{j=1}^m a_j^2}{m-1}$$

$$\sigma_{A \times B}^2 = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m (ab)_{ij}^2}{(l-1)(m-1)}$$

上記の分散分析表をもとに、 $F_0$  の値が自由度( $\phi_{要因}, \phi_E$ )の F 分布の上側  $100 \times \alpha$  %点  $F(\phi_{要因}, \phi_E, \alpha)$  よりも大きいと有意であると判断する。ただし、主効果及び交互作用の  $F_0$  の値が小さく実際の現象をよく勘案した上で妥当だと考えられた場合は、誤差自由度を大きくし検定の検出力を上げ検定の性能を上げるためにプーリングを行う。

## 7. 分散分析後のデータのモデル式の設定

分散分析にて適するモデルとなった場合、モデル式を再度設定する。ただし、プーリングを行わない場合は分散分析前と同様である。

## 8. 最適水準の決定

上記のモデル式を用いて  $A_i B_j$  の母平均を以下の式で算出する。

$$\hat{\mu}(A_i B_j) = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} = \overline{y_{ij}}$$

この母平均が最大となった最適水準は換言するならば飛距離を伸ばすための最適なカタパルトと紙球の条件となる。

上記の手順で解析を進め、行うこととした。

## 5. 解析結果

手順に従って解析結果を示す。

### 1. データのモデル式の設定

本実験では、割りばし種別の主効果を $a_i$ 、玉の種類の主効果を $b_j$ 、その2つの要因の交互作用を $(ab)_{ij}$ として以下のモデル式を採用した。ただし、要因Aの水準を $i$ 、要因Bの水準を $j$ 、試行回次を $k$ とした。

$$y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + \epsilon_{ijk}$$
$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^3 b_j = \sum_{i=1}^3 (ab)_{ij} = \sum_{j=1}^3 (ab)_{ij} = 0$$

そして、誤差項となる $\epsilon_{ijk}$ は均一分散であり、正規分布に従うとした。

$$\epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3 \quad k = 1, 2$$

### 2. AB 二元表の作成

AB 二元表を表6で示す。計算の通りに水準合計、水準平均を計算し作成した。

表 8. 二元表の作成法

割りばし種別	球の種類(×A4紙)			Aiの水準合計
	1/4	1/8	1/16	Aiの水準平均
元禄	485.0	461.0	377.0	1323.0
	242.5	230.5	188.5	220.5
檜	391.0	396.0	380.0	1167.0
	195.5	198.0	190.0	194.5
吉野杉	491.0	427.0	438.0	1356.0
	245.5	213.5	219.0	226.0
Bjの水準合計	1367.0	1284.0	1195.0	3846.0
Bjの水準平均	227.8	214.0	199.2	213.7



### 3. 仮説の設定

#### (1) 因子 $a$ の主効果における帰無仮説と対立仮説

帰無仮説 $H_0: a_1 = a_2 = a_3 = 0$

対立仮説 $H_1$ : 少なくとも1つの $i$ で $a_i \neq 0$ ,  $\sum_{i=1}^3 |a_i| \neq 0$

#### (2) 因子 $b$ の主効果における帰無仮説と対立仮説

帰無仮説 $H_0: b_1 = b_2 = b_3 = 0$

対立仮説 $H_1$ : 少なくとも1つの $j$ で $b_j \neq 0$ ,  $\sum_{j=1}^3 |b_j| \neq 0$

#### (3) 因子 $a$ と因子 $b$ の交互作用 $(ab)$ における帰無仮説と対立仮説

帰無仮説 $H_0: (ab)_{11} = (ab)_{12} = (ab)_{13} = (ab)_{21} = \dots = (ab)_{33} = 0$

対立仮説 $H_0$ : 少なくとも1つの $i, j$ で $(ab)_{ij} \neq 0$ ,  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |(ab)_{ij}| \neq 0$

### 4. データのグラフ化

データの平均をグラフ化した要因効果図を以下に示す。

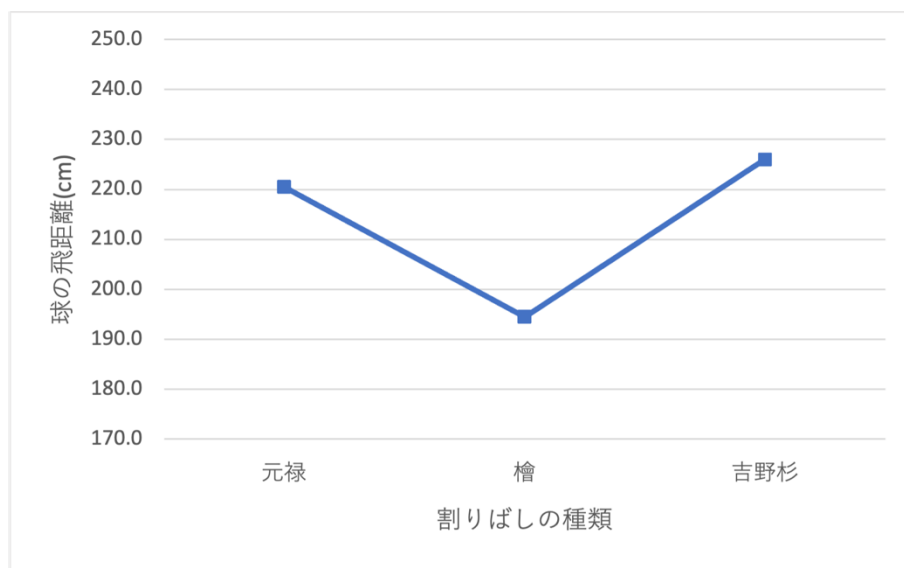


図 2. 要因効果図(割りばしの主効果)

図 2 より、檜の割りばしの飛距離の平均が最も短く吉野杉が最も長く飛ぶことがわかった。そして最大で 30cm ほどの差が生じているため、割りばしの種類が飛距離に効果を与えていることが予想できる。

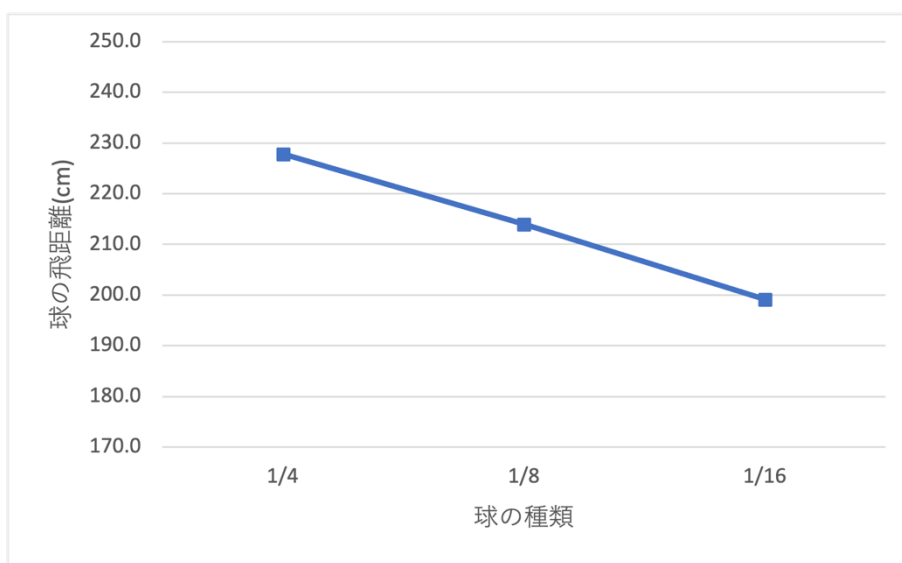


図 3. 要因効果図(球の種類の主効果)

上記の図から球の大きさを大きくすることで、飛距離を伸ばすことができると予想できる。しかし、上記の図は平均をプロットした単純な可視化であるため、分散分析表等を用いた解析を行い、その傾向が有意といえるのか評価する必要があると言える。

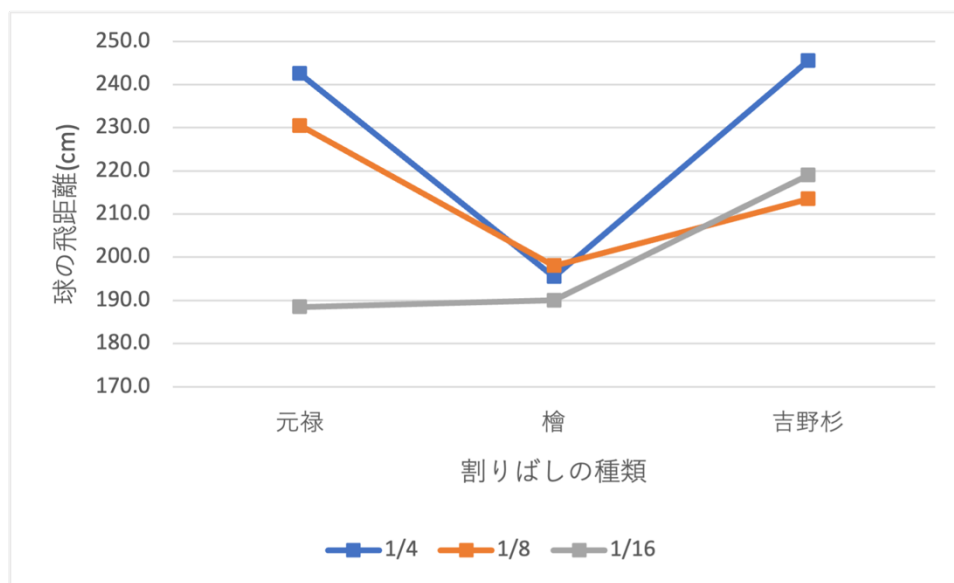


図 4. 要因効果図(割りばしの種類の交互作用)

上記の図から交差が生じており、割りばしの種類について球の大きさによる順位の入れ替えがあるため、分散分析を行う際に交互作用を考慮するべきであると言える。

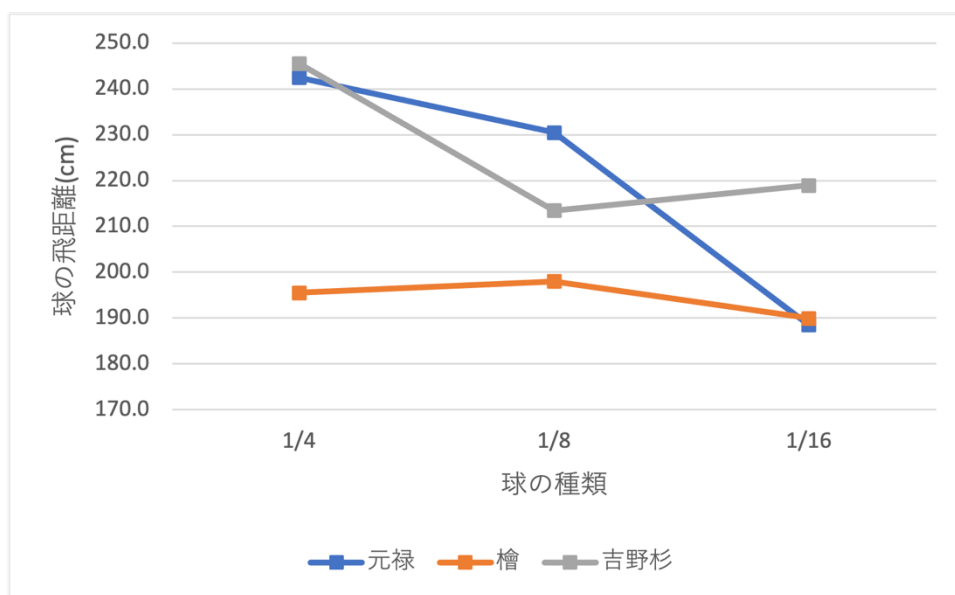


図 5. 要因効果図(球の種類の交互作用)

図 5 より、球の種類と割りばしの種類における折れ線が交差しているため交互作用を考慮する必要があると言える。

## 5. 分散分析表の作成

算出した平方和と自由度を用いて分散分析表を作成した。各平方和や自由度などを以下の分散分析表に示す。

表 9. 分散分析表

要因	平方和SS	自由度 $\phi$	平均平方MS	$F_0$	E(MS)
A	3397.0	2	1698.5	28.0	$\sigma^2 + 6\sigma_A^2$
B	2466.3	2	1233.2	20.4	$\sigma^2 + 6\sigma_B^2$
A $\times$ B	1987.7	4	496.9	8.2	$\sigma^2 + 2\sigma_{A \times B}^2$
E	545.0	9	60.6		$\sigma^2$
T	8396.0	17			

ただし、 $\sigma_z^2$  ( $z = A, B, A \times B$ ) は以下の式で示す。

$$\sigma_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^l a_i^2}{l-1}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{\sum_{j=1}^m a_j^2}{m-1}$$

$$\sigma_{A \times B}^2 = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m (ab)_{ij}^2}{(l-1)(m-1)}$$

次に、自由度( $\phi_{要因}, \phi_E$ )の F 分布の上側  $100 \times \alpha$  %点  $F(\phi_{要因}, \phi_E, \alpha)$ を表にして以下に示す。

表 10. F 分布の上側  $100 \times \alpha$  %点  $F(\phi_{要因}, \phi_E, \alpha)$

$\phi_{要因}$	$\phi_E$	$\alpha$	$F(\phi_{要因}, \phi_E, 0.05)$
2	9	0.5	4.26
4	9	0.5	3.63
2	9	0.01	8.02
4	9	0.01	6.42

表 9 の  $F_0$  と表 10 の値を比較すると、有意水準 1%において 2 つの主効果とその交互作用における  $F_0$  が F 分布の上側  $100 \times \alpha$  %点  $F(\phi_{要因}, \phi_E, 0.01)$ を上回っている。したがって、帰無仮説を棄却し対立仮説を採択する結果であると言える。よって、有意水準 1%において、それらが飛距離に対して有意な効果を与えていると言え、それらの効果のプーリングを行えないと言える。

#### 6. 分散分析後のデータのモデル式の設定

分散分析にて適するモデルがわかった。今回はプーリングを行わずはじめに立てたモデルから変更していないため、本データのモデル式は以下の式となる。

$$y_{ij} = \mu + a_i + b_j + \epsilon_{ijk}$$

誤差項となる  $\epsilon_{ijk}$  は均一分散であり、正規分布に従う。

$$\epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3 \quad k = 1, 2$$

## 7. 最適水準の決定

上記のモデルと分散分析結果から最適水準を以下のように決定する。

### 1. 最適水準

#### (1) 点推定値

$$\mu(\widehat{A_1B_1}) = \frac{485.0}{2} = 220.5$$

$$\mu(\widehat{A_1B_2}) = \frac{461.0}{2} = 230.5$$

$$\mu(\widehat{A_1B_3}) = \frac{377.0}{2} = 188.5$$

$$\mu(\widehat{A_2B_1}) = \frac{391.0}{2} = 195.5$$

$$\mu(\widehat{A_2B_2}) = \frac{396.0}{2} = 198.0$$

$$\mu(\widehat{A_2B_3}) = \frac{380.0}{2} = 190.0$$

$$\mu(\widehat{A_3B_1}) = \frac{491.0}{2} = 245.5$$

$$\mu(\widehat{A_3B_2}) = \frac{427.0}{2} = 213.5$$

$$\mu(\widehat{A_3B_3}) = \frac{438.0}{2} = 219.0$$

#### (2) 95%信頼区間

$$\mu(\widehat{A_1B_1}): \mu(\widehat{A_1B_1}) \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{V_E}{n}} = 220.5 \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{60.6}{18}} = 220.5 \pm 4.2$$

$$\mu(\widehat{A_1B_2}): \mu(\widehat{A_1B_2}) \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{V_E}{n}} = 230.5 \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{60.6}{18}} = 230.5 \pm 4.2$$

$$\mu(\widehat{A_1B_3}): \mu(\widehat{A_1B_3}) \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{V_E}{n}} = 188.5 \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{60.6}{18}} = 188.5 \pm 4.2$$

$$\mu(\widehat{A_2B_1}): \mu(\widehat{A_2B_1}) \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{V_E}{n}} = 195.5 \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{60.6}{18}} = 195.5 \pm 4.2$$

$$\mu(\widehat{A_2B_2}): \mu(\widehat{A_2B_2}) \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{V_E}{n}} = 198.0 \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{60.6}{18}} = 198.0 \pm 4.2$$

$$\mu(\widehat{A_2B_3}): \mu(\widehat{A_2B_3}) \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{V_E}{n}} = 190.0 \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{60.6}{18}} = 190.0 \pm 4.2$$

$$\mu(\widehat{A_3B_1}): \mu(\widehat{A_3B_1}) \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{V_E}{n}} = 245.5 \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{60.6}{18}} = 245.0 \pm 4.2$$

$$\mu(\widehat{A_3B_2}): \mu(\widehat{A_3B_2}) \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{V_E}{n}} = 213.5 \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{60.6}{18}} = 213.5 \pm 4.2$$

$$\mu(\widehat{A_3B_3}): \mu(\widehat{A_3B_3}) \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{V_E}{n}} = 219.0 \pm t(9,0.05) \sqrt{\frac{60.6}{18}} = 219.0 \pm 4.2$$

$$\text{最小有意差} lsd_{0.05} = t(9,0.05) \sqrt{\frac{2V_E}{n}} = 5.9$$

### (3) 信頼区間

よって、信頼区間は以下の表のように定められる。

表 11. 信頼区間

	下限	上限
$\mu(A_1B_1)$	238.3	246.7
$\mu(A_1B_2)$	226.3	234.7
$\mu(A_1B_3)$	184.3	192.7
$\mu(A_2B_1)$	191.3	199.7
$\mu(A_2B_2)$	193.8	202.2
$\mu(A_2B_3)$	185.8	194.2
$\mu(A_3B_1)$	241.3	249.7
$\mu(A_3B_2)$	209.3	217.7
$\mu(A_3B_3)$	214.8	223.2

上記の信頼区間を図 6 に示す。

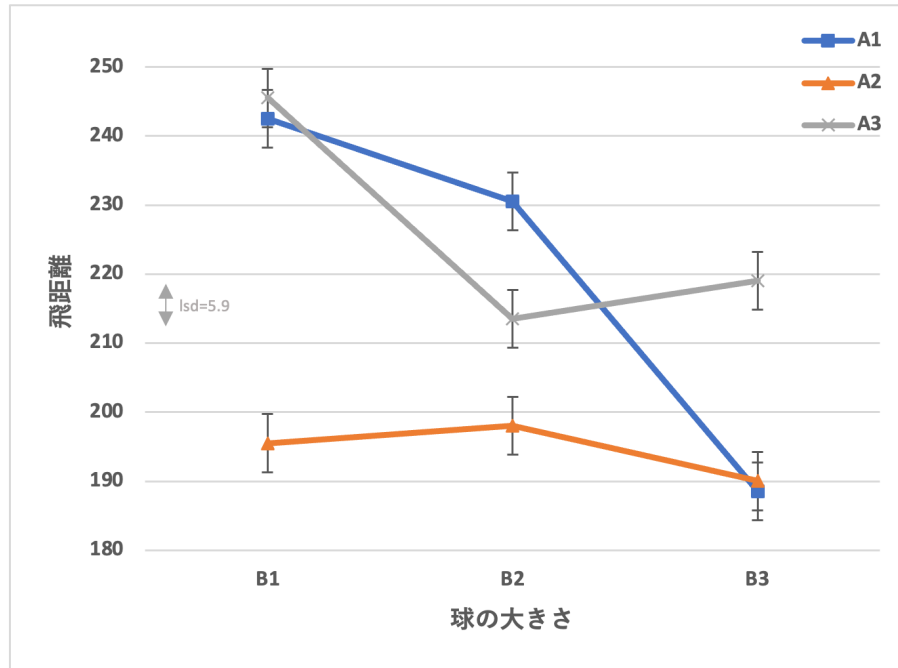


図 6. 要因効果図(割りばしの種類の主効果)

図 6 より、最適と言える組み合わせは A<sub>3</sub> の吉野杉に対して B<sub>1</sub> の 1/4 の大きさの球であると言える。したがって、本実験の最適なモデルは以下の式の通りである。

$$\overline{y_{31k}} = \mu + a_3 + b_1 + \epsilon_{31k}$$

## 6. 考察

本実験より、飛距離に対して、割りばしの種類と球の大きさとその組み合わせが有意な影響を与えていることがわかった。そして最適水準の組み合わせは、吉野杉の1/4の球であることがわかった。

割りばしの種類については、物理特性の違いにより飛距離に影響を与えていると考えた。今回の実験では元禄(アスペン材)、檜、吉野杉と、材質が異なっていた。そのため、それぞれの示す物理特性は異なると言える。具体的には、ヤング率や密度、エネルギー損失率により、直線的な単純円運動による斜方投射ではなく、洗濯バサミを中心とした円運動と割りばしのたわみ(歪み)による円運動による投射と予想できる。具体的に力学の運動方程式を用いて以下に示していくこととする。

### 1. 割りばしのたわみ量を定義

割りばしのたわみ量をヤング率で定義する。ヤング率は、物質の弾性的な性質を示し、その値は、硬さに比例する。そのため、たわみを意味している「曲がりやすさ」に、反比例すると仮定できる。したがって、たわみ $\delta_i$ をヤング率 $E_i$ (基準を $E_{base}$ とする。)を用いて以下の式で定義する。

$$\delta_i = \frac{E_{base}}{E_i}$$

### 2. たわみ量による発射角度の変化

たわみ量が大きくなるほど、発射の瞬間に基準角度を超えた発射角度になり下向きになることが予想できる。そのため、発射角度を以下のように定める。

$$\theta_{launch} = \theta_{ideal} + \theta_{deflection}$$

ただし、 $\theta_{deflection}$  は割りばしの長さ $L$ を用いて以下のように定義する。

$$\theta_{deflection} = \arctan \frac{\delta}{L}$$

### 3. 弾性エネルギー

次に、割りばしのたわみによる弾性エネルギーを定める。弾性エネルギーが大きい場合、発射の際の初速度に変換されるエネルギー量が大きくなり飛距離が大きくなると推測できる。したがって、ヤング率とたわみを用いて以下のように定める。



$$U = \frac{1}{2} E_i * I * K^2 * L$$

ただし、 $I$ を割りばしの断面二次モーメントとして定める。断面の二次モーメントとは、断面の形状や材質により曲がりやすさが変わることを示すパラメータである。そのため、公式では以下のように定義されている。

$$I = \int_A y^2 dA$$

しかし、本割りばしでは直方体と仮定できるため短形断面における二次モーメントとして以下の式で示すことができる。

$$I = \frac{\omega * t^3}{12}$$

ただし、 $\omega$ が割りばしの広い方の面積であり、 $t$  は断面積を意味することとする。

#### 4. 射出速度

次に、弾性エネルギーを用いた射出速度を定義する。先に述べた通り、弾性エネルギーが大きければエネルギー変換により射出速度が速くなると推測できる。したがって、 $m$  を球の質量として以下の式で定義する。

$$v = \sqrt{\frac{2U_{effective}}{m}}$$

#### 5. 水平飛距離

上記の初速度と角度から、その水平方向と鉛直方向の初速度を以下のように算出する。

$$v_x = v * \cos \theta_{launch}$$

$$v_y = v * \sin \theta_{launch}$$

よって、飛距離は以下のように定義できる。

$$d = v_x * \frac{2v_y}{9.81}$$

上記をもとに Python でシミュレーションし飛距離を算出しグラフにしたものを図7に示す。ただし、それぞれの特性については、参考文献の資料をもとにして決定した。

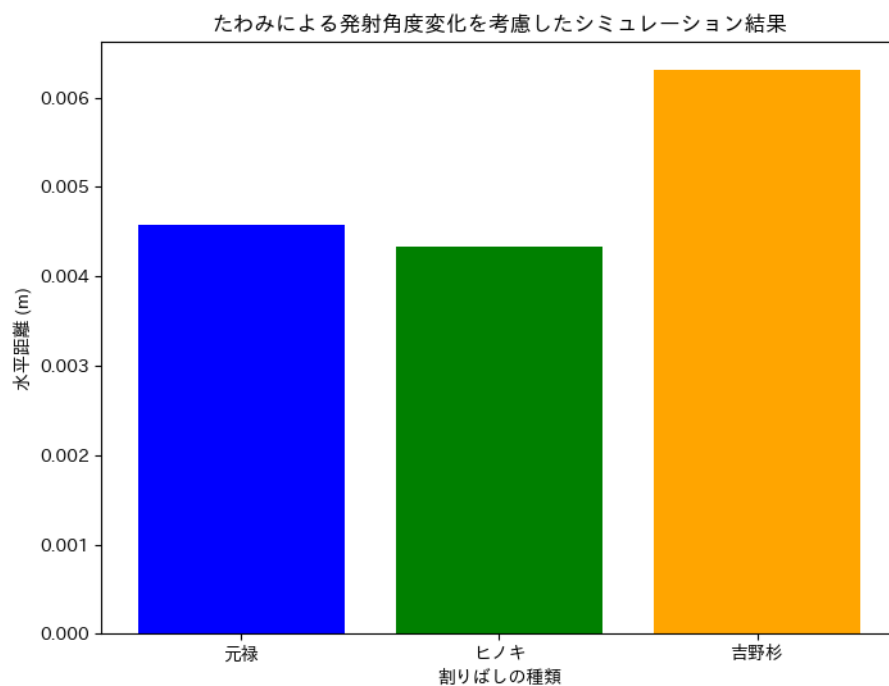


図7, 割りばしの種類による飛距離の変化

シミュレーションのコードは付録の項に示すこととした。

上記の図から、吉野杉の飛距離が最も長いことがわかる。そのため、木材のたわみ等の物理特性からも本結果である飛距離変化について有意な差が生じた原因について示すことができた。

次に、質量を変えてシミュレーションする。本実験では紙を丸めることによって、球を作成した。よって、以下のパラメータを作成した。

#### 1. 空気抵抗

本実験で利用した球は大きさをもつため、空気抵抗を受けると考えられる。そこで、空気抵抗をその物体速度によって変化するパラメータと仮定して以下のように定義する。

$$F = \frac{1}{2} \rho C_d A v^2$$

この時、空気密度は一定であると仮定すると、抗力係数 $C_d$ と断面積 $A$ 、物体速度 $v$ が変数と言える。そこで、それらの値を以下のように定義した。

- ・ 抗力係数は、断面の荒さに依存すると仮定し、紙の面積が大きい場合に抗力係数が大きくなると定義する。
- ・ 物体速度は、先にシミュレートした斜方投射の運動をもとに算出する。

よって、上記を用いてシミュレーションした結果、以下のグラフが得られた。

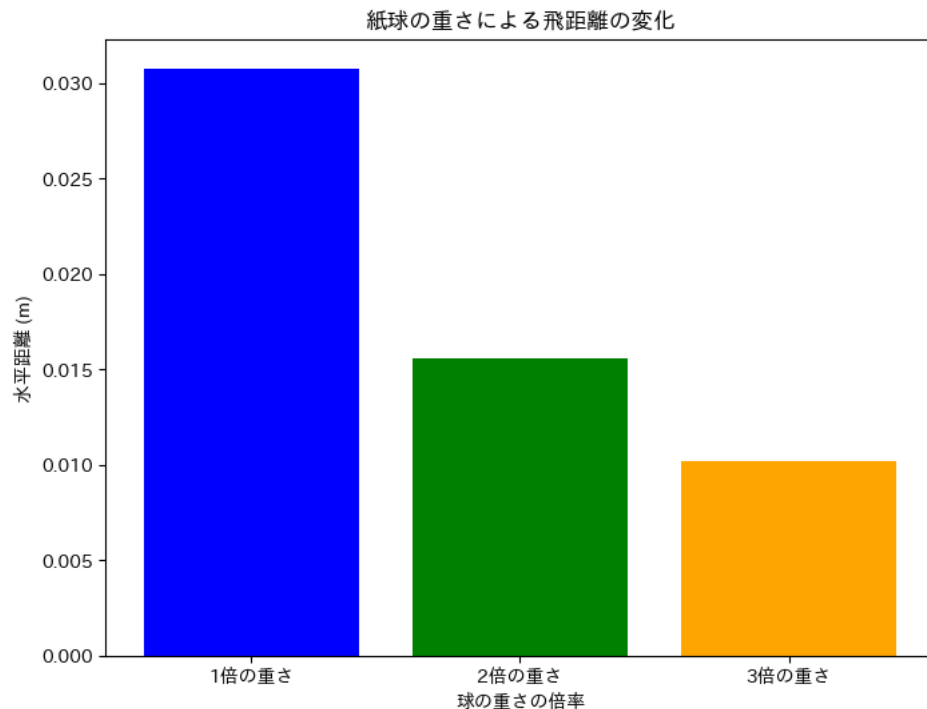


図 8. 球の重さによる飛距離の変化

上記より、本実験で得られた結果とは反対のシミュレーション結果となった。そのため、球の材質である紙が軽すぎたことで、重さ変化を無視できる状態であったことにより物理シミュレーションと逆の結果になったと考察した。

## 7. 結論

本実験では、二元配置実験による割りばしカタパルトの飛距離に与える影響の検証を行った。その結果、吉野杉を用いた割りばしと重い球を使うことが飛距離を伸ばすことにつながるとわかった。そして、それらの物理特性を用いてシミュレーション

した結果、割りばしに関しては結果通りの推移が得られたものの、球の重さによる違いは逆の相関を示す結果となった。そのため、今後の展望として、重さのみに注目した補足実験を行うことで、その検証をすることが必要であると考えた。

## 8. 参考文献

1. 中央大学理工学部ビジネスデータサイエンス学科,  
データサイエンス実験 A,2024
2. 山田正,木材の特性,木材の力学的性質,  
([https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsms1963/28/312/28\\_312\\_910/\\_pdf](https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsms1963/28/312/28_312_910/_pdf))  
2024/12/10 取得。
3. 山井良三郎,木材の強度特性について,  
([https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsms1952/10/98/10\\_98\\_869/\\_pdf/-char/ja](https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsms1952/10/98/10_98_869/_pdf/-char/ja)),  
2024/12/10 取得。

## 9. 付録

シミュレーションに利用したコードを本項で示す。

1. 割りばしの種類の違いによるシミュレーション

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
import pandas as pd
```

```
# 材質ごとの特性（元禄、ヒノキ、吉野杉）
```

```
materials = {
```

```
    "元禄": {"E": 8.5e9, "density": 500, "loss_factor": 0.04}, # 文献参考: 一般木材
```

```
    "ヒノキ": {"E": 8.9e9, "density": 410, "loss_factor": 0.05}, # 文献参考: ヒノキ
```

```
    "吉野杉": {"E": 6.0e9, "density": 350, "loss_factor": 0.03}, # 文献参考: スギ
```

```
}
```

```
# 割りばしの形状とサイズ
```

```
width = 0.02 # 幅 (m)
```

```
thickness = 0.003 # 厚さ (m)
```

```
length = 0.35 # 長さ (m)
```

```
base_deflection = 0.05 # 基準たわみ量 (m)
```

```
# 投石の質量
```

```
mass = 0.05 # 投石の質量 (kg)
```

```

# シミュレーション結果を保存
results = {}

for name, props in materials.items():
    E = props["E"]
    density = props["density"]
    loss_factor = props["loss_factor"]

    # 材質ごとのたわみ量（ヤング率が小さいほどたわみが大きい）
    deflection = base_deflection * (8.0e9 / E)

    # 断面二次モーメント
    I = (width * thickness**3) / 12

    # 弾性エネルギー
    curvature = deflection / length # 曲率
    U = 0.5 * E * I * curvature**2 * length

    # エネルギー損失を考慮
    U *= (1 - loss_factor)

    # 射出速度
    v = np.sqrt(2 * U / mass)

    # たわみによる発射角度の修正
    deflection_angle = np.degrees(np.arctan(deflection / length)) # たわみ角度
    launch_angle = 45 + deflection_angle # 修正発射角度

    # 水平・垂直速度成分
    vx = v * np.cos(np.radians(launch_angle))
    vy = v * np.sin(np.radians(launch_angle))

    # 重力による飛距離
    g = 9.81 # 重力加速度 (m/s^2)
    flight_time = 2 * vy / g

```

```

horizontal_distance = vx * flight_time
results[name] = {
    "ヤング率 (GPa)": E / 1e9,
    "密度 (kg/m³)": density,
    "エネルギー損失率": loss_factor,
    "たわみ角度 (°)": deflection_angle,
    "射出角度 (°)": launch_angle,
    "射出速度 (m/s)": v,
    "水平距離 (m)": horizontal_distance,
}

```

# グラフ描画

```

plt.figure(figsize=(8, 6))
material_names = list(results.keys())
distances = [results[name]["水平距離 (m)"] for name in material_names]

```

```

plt.bar(material_names, distances, color=["blue", "green", "orange"])
plt.title("たわみによる発射角度変化を考慮したシミュレーション結果")
plt.xlabel("割りばしの種類")
plt.ylabel("水平距離 (m)")
plt.show()
display(results)

```

## 2. 球の重さ変化のシミュレーション

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

```

# 吉野杉の特性

```

material = {
    "E": 6.0e9, # ヤング率 (Pa)
    "density": 350, # 密度 (kg/m³)
    "loss_factor": 0.03, # エネルギー損失率
}

```

# 割りばしの形状とサイズ

```

width = 0.02 # 幅 (m)

```

```

thickness = 0.003 # 厚さ (m)
length = 0.35 # 長さ (m)
base_deflection = 0.05 # 基準たわみ量 (m)

# 空気抵抗の特性 (紙球)
air_density = 1.225 # 空気密度 (kg/m³)
drag_coefficient = 1.05 # 紙球の抗力係数
base_radius = 0.05 # 基準球の半径 (m)

# 基準となる紙球の質量
base_mass = 0.01 # 投石の基準質量 (kg)

# 球の質量倍率 (重くする)
mass_multipliers = [1, 2, 3]

# シミュレーション結果を保存
results = {}

E = material["E"]
density = material["density"]
loss_factor = material["loss_factor"]

for multiplier in mass_multipliers:
    mass = base_mass * multiplier # 球の質量を計算
    radius = base_radius * multiplier**(1/3) # 半径は質量の 3 乗根に比例
    area = np.pi * radius**2 # 球の断面積を更新

    # 材質ごとのたわみ量 (ヤング率が小さいほどたわみ大きい)
    deflection = base_deflection * (8.0e9 / E)

    # 断面二次モーメント
    I = (width * thickness**3) / 12

    # 弾性エネルギー
    curvature = deflection / length # 曲率
    U = 0.5 * E * I * curvature**2 * length

```

```

# エネルギー損失を考慮
U *= (1 - loss_factor)

# 射出速度
v = np.sqrt(2 * U / mass)

# 最適な発射角度（やや低め）
launch_angle = 40 # 最適化した発射角度

# シミュレーション（空気抵抗を考慮）
vx = v * np.cos(np.radians(launch_angle))
vy = v * np.sin(np.radians(launch_angle))
dt = 0.01 # 時間ステップ
x, y = [0], [0] # 初期位置

g = 9.81 # 重力加速度 (m/s^2)
while y[-1] >= 0:
    speed = np.sqrt(vx**2 + vy**2)
    drag_force = 0.5 * air_density * drag_coefficient * area * speed**2
    ax = -drag_force * vx / mass
    ay = -g - (drag_force * vy / mass)
    vx += ax * dt
    vy += ay * dt
    x.append(x[-1] + vx * dt)
    y.append(y[-1] + vy * dt)

# 結果を保存
results[f"{multiplier}倍の重さ"] = {
    "球の質量 (kg)": mass,
    "射出速度 (m/s)": v,
    "射出角度 (°)": launch_angle,
    "水平距離 (m)": max(x),
}

# グラフ描画

```



```

plt.figure(figsize=(8, 6))
labels = list(results.keys())
distances = [results[label]["水平距離 (m)"] for label in labels]

plt.bar(labels, distances, color=["blue", "green", "orange"])
plt.title("紙球の重さによる飛距離の変化")
plt.xlabel("球の重さの倍率")
plt.ylabel("水平距離 (m)")
plt.show()

# 結果の表示
results_df = pd.DataFrame(results).T
import ace_tools as tools; tools.display_dataframe_to_user(name="紙球の重さによる
飛距離の変化結果", dataframe=results_df)

```

### 3. 物理特性についての定義

```

{'元禄': {'ヤング率 (GPa)': 8.5,
          '密度 (kg/m³)': 500,
          'エネルギー損失率': 0.04,
          'たわみ角度 (°)': 7.657709693713878,
          '射出角度 (°)': 52.657709693713876,
          '射出速度 (m/s)': 0.21556258230675446,
          '水平距離 (m)': 0.004568502242588131},
 'ヒノキ': {'ヤング率 (GPa)': 8.9,
            '密度 (kg/m³)': 410,
            'エネルギー損失率': 0.05,
            'たわみ角度 (°)': 7.317359277962056,
            '射出角度 (°)': 52.317359277962055,
            '射出速度 (m/s)': 0.20956271830957185,
            '水平距離 (m)': 0.004331469512536542},
 '吉野杉': {'ヤング率 (GPa)': 6.0,
            '密度 (kg/m³)': 350,
            'エネルギー損失率': 0.03,
            'たわみ角度 (°)': 10.784297867562602,
            '射出角度 (°)': 55.7842978675626,
            '射出速度 (m/s)': 0.2579036364890688,

```

'水平距離 (m)': 0.006305487284348227}}