

3.3 双曲線関数

双曲線関数を，三角関数（円関数と呼ぶべき？）と類比しながら紹介してゆく．

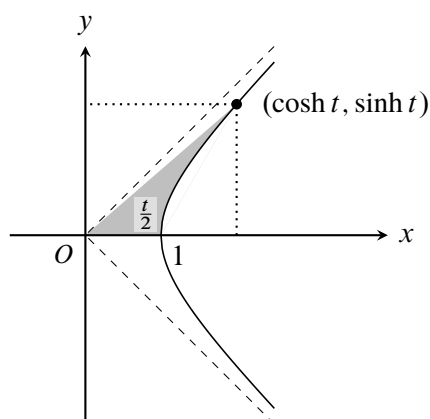
hyperbolic function 双曲線関数

定義 1.

$$\begin{aligned}\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.\end{aligned}$$

これら以外にも， $\operatorname{sech} x$, $\operatorname{csch} x$, $\operatorname{coth} x$ がある．

定義 2. “単位双曲線” $x^2 - y^2 = 1$ 上の点を $(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$ と定める ($x > 0$).



- 相互関係 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ など．

問 これ（ら）を示せ．

- 偶奇性 $\sinh x$ は奇関数，
 $\cosh x$ は偶関数，
 $\tanh x$ は奇関数．

問 これらを示せ．

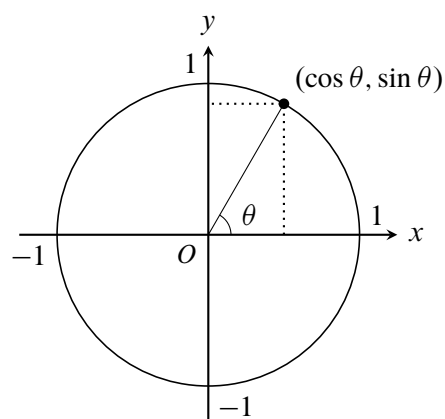
trigonometric function 三角関数（円関数）

定義 1.

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \\ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}.\end{aligned}$$

これら以外にも， $\sec x$, $\csc x$, $\cot x$ がある．

定義 2. 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点を $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ と定める．

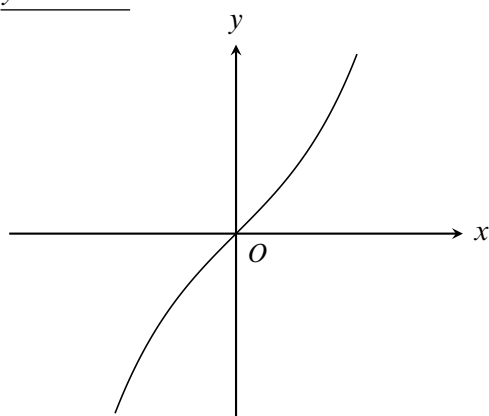


- 相互関係 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ など．

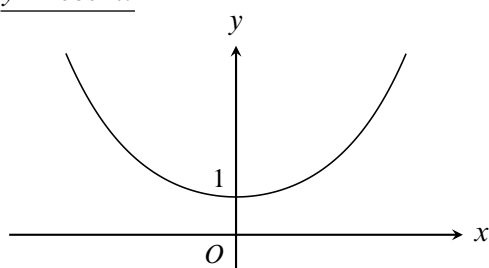
- 偶奇性 $\sin x$ は奇関数，
 $\cos x$ は偶関数，
 $\tan x$ は奇関数．

● グラフ

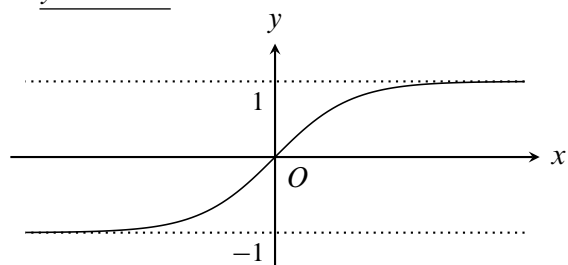
$y = \sinh x$



$y = \cosh x$



$y = \tanh x$



● 加法定理 (複合同順)

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

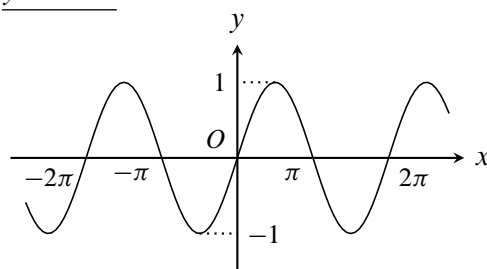
$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

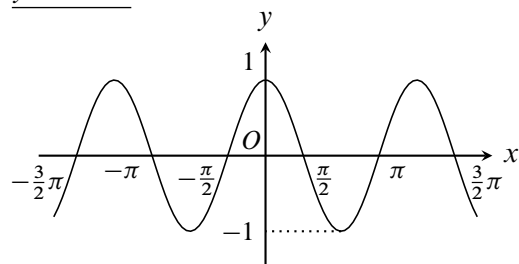
問 これらを示せ.

● グラフ

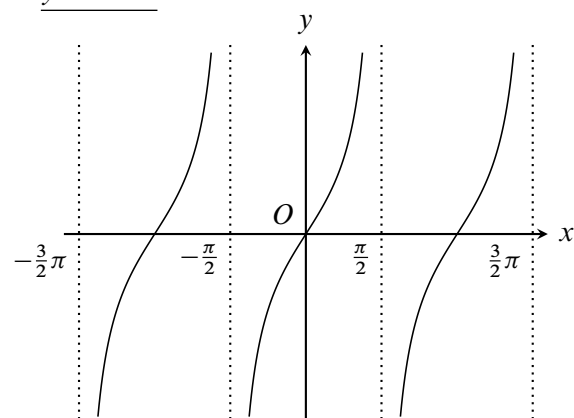
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \tan x$



● 加法定理 (複合同順)

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

● 導関数

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

問 これらを導出せよ.

● 逆双曲線関数

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \in [1, \infty)$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1)$$

問 これらを示せ.
また, グラフの概形を描け.

また逆双曲線関数の導関数は,

$$(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$(\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x \neq 1),$$

$$(\tanh^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

問 これらを導出せよ.

● 導関数

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

● 逆三角関数

$$\sin^{-1} x, \quad x \in [-1, 1]$$

$$\cos^{-1} x, \quad x \in [-1, 1]$$

$$\tan^{-1} x, \quad x \in \mathbb{R}$$

また逆三角関数の導関数は,

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \neq \pm 1),$$

$$(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \neq \pm 1),$$

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

問題 3.5

$\sinh x = a$ のとき, $\cosh x, \tanh x$ の値を求めよ.

$\sin x = a$ のとき, $\cos x, \tan x$ の値を求めよ.