みなさん，お久しぶりです．— 夏休みはどうでしたか？（私の感想は「短い！」です．）

数学の授業とは関係ないのですが，国際交流室員としての奈須田から，お願いがあります．

✎ 群馬高専では，今年度末の 3 月 16 日（日）〜3 月 23 日（日）にシドニーで短期海外語学研修を実施する予定です．つきましては，参加に関する希望調査を form で行うので，ご回答ください．

3　線型変換と表現行列

3.0　結局，行列は何を表しているのか？

◪ 行列とは

行列とは，いくつかの数を縦横に並べた数の表のことをいう（*cf.* 第 1 週 §0.2）．

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}$$

↑ 第 j 列

: m 行 n 列の行列，$m \times n$ 行列．

a_{ij} : (i, j) 成分．

では一体，この数が並んでいる表＝行列は，何を表しているのだろうか？

— 行列は「線型写像」と呼ばれる写像を表しており，その性質を調べることが線型代数学の重要な主題の一つである．（線型代数＝行列の計算，ジャナイヨ．）

線型写像は数学の他の分野でも現れ，広く数学を理解する上で欠かせないだけでなく，自然科学・工学の分野への応用の点からも重要である．後期の授業では，線型写像（特に線型変換）について扱う．

◪ 行列の積と行列の型（復習）

$A = [a_{ij}]$ を $m \times n$ 行列，$B = [b_{ij}]$ を $n \times \ell$ 行列とすると，A と B の積 AB が定義され，これは $m \times \ell$ 行列となる．

$$\underbrace{A}_{m\times n}\,\underbrace{B}_{n\times \ell} = \underbrace{C}_{m\times \ell}$$

例. $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{3\times 2}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{2\times 2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 18 & 31 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}}_{3\times 2}$

特に $\ell = 1$（B が n 次の列ベクトル）のとき，

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{n\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}}_{m\times 1}$$

となり，積 AB は ℓ 次の列ベクトルとなる．つまり，$m \times n$ 行列は，

これを“左から掛ける”ことで，n 次の列ベクトルを m 次の列ベクトルに写す

$$\underset{n\text{ 次の列ベクトル}}{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}} \xmapsto{A\vec{b}} \underset{m\text{ 次の列ベクトル}}{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}}$$

といえる．

例．$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ は，4 次の列ベクトル $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を 3 次の列ベクトル $\begin{bmatrix} 80 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix}$ に写す．

$$\because)\quad \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

※　1 つの行だけからなる $1 \times n$ 行列 $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ のことを n 次の行ベクトル (row vector) という．

1 つの列だけからなる $m \times 1$ 行列 $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ のことを m 次の列ベクトル (column vector) という．列ベクトルは，座標のように $(a_1, \ldots, a_m)$ と書かれることもある．また，列ベクトルは $\vec{a}$ や $\boldsymbol{a}$（手書きの場合は $\mathbb{a}$）と表す．

問題 3.1　次の行列の積について，その型を答えよ．（積を計算する必要はない．）

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

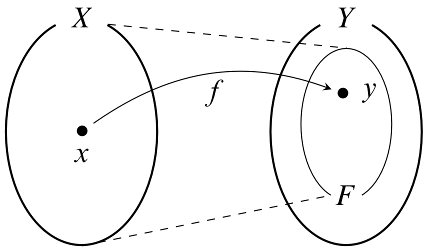
(4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$　(6) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

◪ 行列と線型写像

定義（写像）． 集合 X, Y があって，X の任意の要素 x に対して，Y の要素 y をただ 1 つ対応させる対応関係 f を, X から Y への写像 (map, mapping) と呼び,

$$f : X \to Y \qquad や \qquad f : x \mapsto y \qquad や \qquad y = f(x)$$

などと表す．またこのとき，X を定義域または始域 (domain)，Y を終域 (codomain)，$y = f(x)$ と書ける y の集合 F を値域 (range) と呼ぶ．



定義（線型写像，線型変換）． n 次の列ベクトル $\vec{x}$ を m 次の列ベクトルに写す操作 f が次の 2 条件：

(i) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

(ii) $f(k\vec{x}) = kf(\vec{x}) \qquad$ （k は定数）

を満たすとき，f を線型写像 (linear mapping) という．特に $n = m$ のとき，f を線型変換または 1 次変換 (linear transformation) と呼ぶ． ◇

※ (i), (ii) は，操作 f によってベクトルの演算（和，定数倍）が保たれることを意味している．

cf. 比例関数 $y = f(x) = ax$.

A を $m \times n$ 行列とするとき，$f(\vec{x}) = A\vec{x}$ が線型写像となっていることを確認しよう．

行列の積についての演算法則（☞ 教科書 p. 59）から，

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{y}) &= A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) , \\ f(k\vec{x}) &= A(k\vec{x}) = k(A\vec{x}) = kf(\vec{x}) , \end{aligned}$$

となる．

逆に，任意の線型写像 f は，適当な行列を用いて表すことができる．このとき，この行列を（ある基底に関する）f の表現行列 (representation matrix) という．

以降この授業では，特に断らない限り，$n = m = 2$ の場合のみを考える．

すなわち，行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の表す線型変換のみを考える．

3.1　線型変換

◪　$n = m = 2$ の場合の線型写像

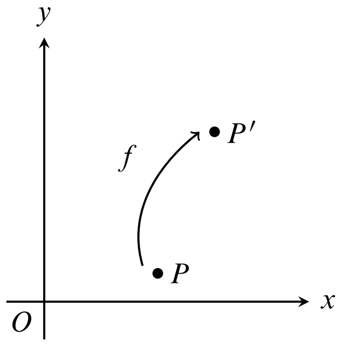
行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の表す線型変換 f によって，平面ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は平面ベクトル $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ へと写される：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad i.e. \quad f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right).$$

あるいは，平面ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は座標平面上の点 $P\,(x,y)$ と同一視できるので，f によって点 $P\,(x,y)$ が点 $P'\,(x',y')$ に移される：

$$f : (x,y) \mapsto (x',y') \quad \text{or} \quad P' = f(P)\,,$$

と見ることもできる（この方が直感的に理解しやすい？）．



注意．　線型変換で，原点は常に原点に移される（不変）．　　　$\because$)　$A\vec{0} = \vec{0}$.

【例題 3.1】

行列 $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ の表す線型変換を f とするとき，点 $P\,(3,1)$, $Q\,(-1,2)$ が移る点 $P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$ の座標を求めよ．（点 P', Q' は，それぞれ点 P と Q の像と呼ばれる．）

✍

問題 3.2　次の行列が表す線型変換について，点 $(2,3)$ の像の座標を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$　　　(2) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$