◪ 定積分の計算（続き）

【例題 1.8】

定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ の値を求めよ．

✍

問題 1.10　次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}$　　　(2) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^3 \frac{dx}{x^2+9}$

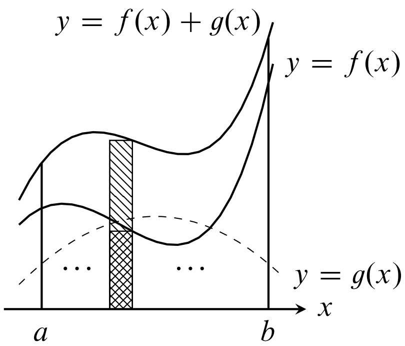
◪ 定積分の性質

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$　：線分の面積は 0.　　（*cf.*　第 1 週②の微積分学の基本定理の議論）

- 線型性：　$\displaystyle\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

  $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$　　（☞　第 3 週①のプリント参照）

説明



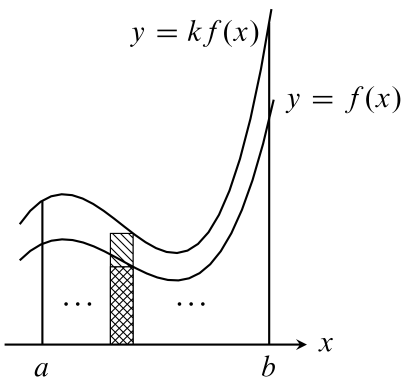
微小長方形の面積 $[f(x)+g(x)]\,dx$ は，

2 つの　〃　$f(x)\,dx$ と $g(x)\,dx$ の和.

それらを同じ $x=a$ から $x=b$ まで，それぞれ足し合わせるから，

$\displaystyle\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]dx$　も

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$　と　$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$　の和.



微小長方形の面積 $kf(x)\,dx$ は，

〃　$f(x)\,dx$ の k 倍.

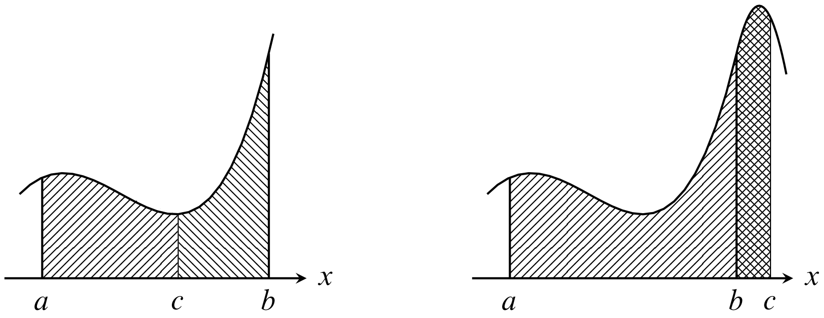
それらを同じ $x=a$ から $x=b$ まで，それぞれ足し合わせるから，

$\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx$　も　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$　の k 倍.　◇

- $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ （*cf.* 第 3 週①の符号付き面積の約束）

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

  説明



etc. ◇

- $f(x)$ が偶関数，すなわち $y = f(x)$ のグラフが y 軸対称のとき，

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x) \qquad \left(\because \quad \int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx\right).$$

$f(x)$ が奇関数，すなわち $y = f(x)$ のグラフが原点対称のとき，

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0 \qquad \left(\because \quad \int_{-a}^0 f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx\right).$$

例. $\displaystyle\int_{-1}^1 (2x^3 + x^2 + 4x - 3)\,dx =$ ✍

問題 1.11　次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 (4x^3 - 3x^2 - 2x + 5)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x)\,dx$

- 単調性 （☞ 次回の内容）

◪ 定積分と面積

※ 次の 2 つの問題を比較してみよう：

A. 定積分 $\displaystyle\int_1^2 (2x^2 + 3x)\,dx$ の値を求めよ．　*cf.* 例題 1.6 (1)

B. 区間 $[1, 2]$ において，$y = 2x^2 + 3x$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

★ 問題文の表現（問われ方）は異なるが，これらは同じ意味の問題である．

ただし，以下の例題の (2), (3) のような場合には，注意が必要である．

【例題 1.9】

次の区間において，曲線 $y = \sin x$ と x 軸で囲まれた面積を求めよ．

(1) $[0, \pi]$　　(2) $[\pi, 2\pi]$　　(3) $\left[0, \dfrac{3}{2}\pi\right]$

✍

問題 1.12　次の図形の面積を求めよ．

(1) 曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ と 2 直線 $x = 1, x = 3$，および x 軸で囲まれた図形

(2) 曲線 $y = e^x$ と両座標軸および $x = 2$ で囲まれた図形

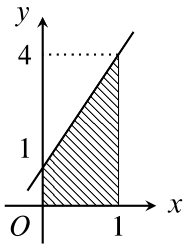
(3) 曲線 $y = x^2 - 3x$ と x 軸で囲まれた図形

～ どっちが楽？　積分計算 vs. 図形的に求める ～

(1) $\displaystyle\int_0^1 (3x+1)\,dx$

積分計算　$\displaystyle\int_0^1 (3x+1)\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + x\right]_0^1 = \frac{3}{2} + 1 = \boxed{\frac{5}{2}}$

図形的



求める値は，左図の斜線部（台形）の面積だから，

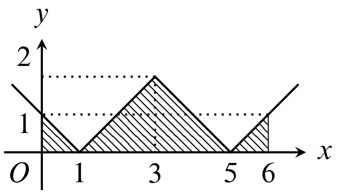
$$\frac{1}{2}\cdot(1+4)\cdot 1 = \boxed{\frac{5}{2}}$$

(2) $\displaystyle\int_0^6 \big||x-3|-2\big|\,dx$

積分計算

$$\begin{aligned}\int_0^6 \big||x-3|-2\big|\,dx &= \int_0^1 (-x+1)\,dx + \int_1^3 (x-1)\,dx + \int_3^5 (-x+5)\,dx + \int_5^6 (x-5)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^3 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 5x\right]_3^5 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 5x\right]_5^6 \\ &= \frac{1}{2} - 0 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{25}{2} - \frac{21}{2} - 12 + \frac{25}{2} = \boxed{5}\end{aligned}$$

図形的



求める値は，左図の斜線部の面積だから，

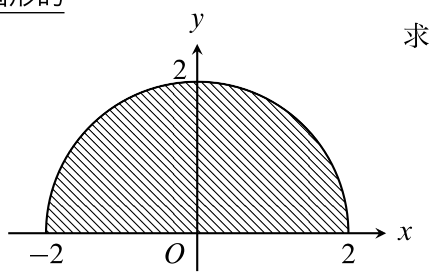
$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\boxed{5}$$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$

積分計算

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{4-x^2}+4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{2}=2\sin^{-1}1-2\sin^{-1}(-1)=\boxed{2\pi}$$

図形的



求める値は，左図の斜線部（半円）の面積だから，

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2=\boxed{2\pi}$$

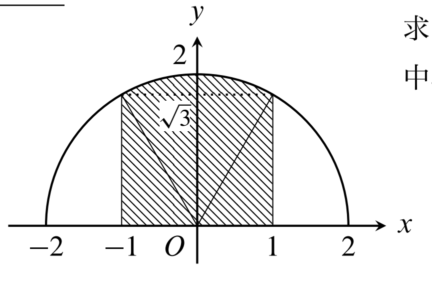
(3)' $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx$

積分計算

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{4-x^2}+4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\boxed{\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi}$$

図形的



求める値は，左図の斜線部の面積で，直角三角形 2 つと中心角 $60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$ の扇形とに分けて，

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}=\boxed{\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi}$$

注． どちらが楽かは問題による（個人差もある）．さらに，必ず図形的に計算できるとは限らない．そのため，積分計算を基本として，図形的な計算はその方が簡単に計算できると知っている場合（あるいは検算）のみに用いるのが無難か．