◪　復習：　$[\ln|f(x)|]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}.$

2.7　対数微分法：微分法の技術 ①

【例題 2.8】

$y = x^{\sin x}$ $(x > 0)$ を微分せよ．

今までの知識だけでこの問題を解く場合，次のような解答があり得る：

$$y = x^{\sin x} = e^{\ln x \cdot \sin x} \qquad \therefore\ y' = e^{\ln x \cdot \sin x}\left(\frac{1}{x}\cdot\sin x + \ln x \cdot \cos x\right)$$
$$= x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \ln x \cdot \cos x\right).$$

ここでは，対数微分法と呼ばれる方法を紹介する．

✍

問題 2.17　次の関数を対数微分法で微分せよ．ただし，$x > 0$ とする．

(1)　$y = x^x$　　(2)　$y = x^{\cos x}$

問題 2.18　$x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ のとき，次の公式を証明せよ．

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

2.8　逆関数の微分法：微分法の技術 ②

関数 $y = f^{-1}(x)$ を微分せよ，という問題を考える．例えば，$f(x) = e^x$ なら，$y = f^{-1}(x) = \ln x$ は微分すると $y' = \dfrac{1}{x}$ である．ほかにも，$f(x) = x^2$ $(x > 0)$ なら，$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ は微分すると $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ である．—「$y' = \dfrac{1}{f'(y)}$」という関係が成り立っていそうだ．以下，これを示す．　✍

関数 f が微分可能であるとき，その逆関数 $y = f^{-1}(x)$ について，

$$y' = [f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \qquad \textit{i.e.}\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad \left(\text{ただし，} f'(y) = \frac{dx}{dy} \neq 0\right).$$

問題 2.19

関数 $f(x) = x^4$ $(x \geqslant 0)$ の逆関数が $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$ であることを用いて，関数 $y = \sqrt[4]{x}$ を微分せよ．