【前期中間試験の講評】

問 1. (a) の「線型性」は，2, 3 年生の数学 B で（おそらく）最も重要な概念です．

問 2. (2) は，オンデマンド授業で強調したつもりだったのですが……

問 3. 行列式の計算の検算は，どうすればよいのでしょうか...？ 一つの方法は，別の計算法で同じ答えになることを確かめることでしょうか．よりよい方法を知っている方，ぜひ教えてください．

問 4. (1) $e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$ です（この指数計算は常識にしておいてください）.
(2) 山を張って，最終的な答えを暗記していた人もいたようです．運も実力のうち？

問 5. $x = 0, 1, 2, \ldots$ とシラミツブシに調べていくのも一考 (?)

問 6. 「○○を示せ」という問題で，その○○を使って証明しようとしても，なんの意味もありません（所謂「進次郎構文」？）．いきなり「$|A||A^{-1}| = 1$ だから〜」と書くのも，ほぼ同罪．
また，行列 A に対して，$1/A$ は（通常）定義されません（逆行列 A^{-1} は別概念）.

問 7. (2) で $-(4x^2 - 1) = -4x^2 - 1$ とする計算ミスが多かったです．これに限らず，いろいろな計算ミスに気が付けるよう「$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$」を与えたつもりだったのですが……

1.6 行列式の展開

行列 A（正方行列に限らない）から，p 個の行と p 個の列を取り出して作った p 次の正方行列を A の p 次小行列といい，その行列式を p 次の小行列式 (minor determinant) という.

ふたたび，行列 A を n 次の正方行列に限ろう．n 次の行列式 $|A|$ の第 i 行と第 j 列とを取り除いてできる $n-1$ 次の小行列式を (i, j) 成分の小行列式や第 (i, j) 小行列式といい，D_{ij} などと表す：

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}.$$

$$\uparrow$$
$$\text{第 } j \text{ 列}$$

(i, j) 成分の小行列式 D_{ij} に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものを第 (i, j) 余因子 (cofactor) といい，$\tilde{a}_{ij}$ と表す．

例. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の第 $(2, 3)$ 余因子は，$\tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$

問　上の A に対して，第 $(1, 2)$ 余因子，第 $(2, 2)$ 余因子，第 $(3, 3)$ 余因子を求めよ．

定理（余因子展開；Laplace expansion）． n 次の正方行列 A に対して，

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}D_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}D_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}D_{in} = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}$$

（第 i 行に関する展開）

$$= (-1)^{1+j}a_{1j}D_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}D_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}D_{nj} = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}$$

（第 j 列に関する展開）．

※　第 i 行［第 j 列］に関する線型性と「行列式の次数を下げる一般公式」とによって，証明される．

【例題 1.7】

次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

✍

問題 1.8　次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$