◪ ここまでのまとめ

平面ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$（あるいは点 $P\,(x, y)$）は，線型変換 f によって，$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$（$P'\,(x', y')$）へと写される．このことを，

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \qquad \text{あるいは} \qquad P' = f(P)$$

などのように書く．なお，この線型変換 f は，必ず 2×2 行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ で表される．このとき，

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

である．

◪ 図形の変換

これまで考えていた「点」も図形だけど……

【例題 3.4】

行列 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ および $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ で表される線型変換をそれぞれ f, g とするとき，直線 $y = -x + 1$ は，f, g によってそれぞれどのような図形に移されるか．

（線型変換 f による図形 G 上の各点の像全体が作る図形 G' を，f による G の像という．）

✍

問題 3.6　次の像を求めよ．

(1)　行列 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ で表される線型変換による直線 $y = x + 1$ の像

(2)　行列 $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ で表される線型変換による直線 $2x + y = 1$ の像

3.2　線型変換の合成：合成変換

cf.　合成関数 $g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$

線型変換 f によって，平面ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$（あるいは点 $P\,(x, y)$）が $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$（$P'\,(x', y')$）に移され，さらに線型変換 g によって，$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$（$P'\,(x', y')$）が $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$（$P''\,(x'', y'')$）に移されるとする：

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = g\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = g\left(f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right).$$

このとき，$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$ に対応させる変換 h を，f と g の合成（composition）変換といい，$g \circ f$ と表す：

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = h\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (g \circ f)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = g\left(f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right).$$

ここで，線型変換 f を表す行列を $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，$g$ を表す行列を $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = (g \circ f)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= g\left(f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right) \\ &= g\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であり（ただし，$BA = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ とおいた），合成変換 $g \circ f$ は行列 BA で表される ことが分かる．

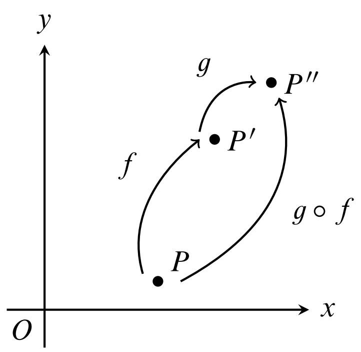
【例題 3.5】

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の表す線型変換をそれぞれ f, g とする．これらの変換について，合成変換 $g \circ f$ を表す行列を求めよ．

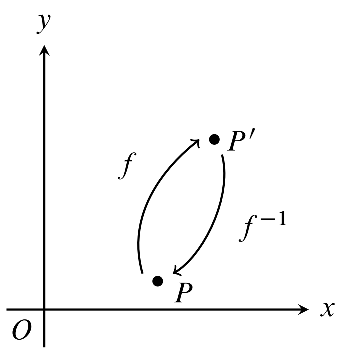
✍

問題 3.7　例題 3.5 の f, g について，合成変換 $f \circ g$ を表す行列を求めよ．

※　一般に，$BA \neq AB$ であり，$g \circ f \neq f \circ g$ である．



合成変換.



逆変換.

3.3 線型変換の逆変換

行列 A の表す線型変換 f によって，ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$（点 $P\,(x, y)$）が $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$（$P'\,(x', y')$）に移され，また行列 B の表す線型変換 g によって，逆に $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$（$P'\,(x', y')$）が $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$（$P\,(x, y)$）に戻される状況を考える．すなわち，

$$g \circ f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

であり，$g \circ f$ は恒等変換になっている．このとき，g を f の逆変換 (inverse transformation) といい，f^{-1} で表す．（$f^{-1} \circ f$ は恒等変換．）

また f^{-1} を表す行列について，恒等変換 $g \circ f = f^{-1} \circ f$ を表す行列が $BA = I$ であることより，$B = A^{-1}$，すなわち $\boxed{f^{-1} \text{ を表す行列は } A^{-1}\ (A \text{ の逆行列}) \text{ である}}$ ことが分かる．なおこのことは，

$$\text{行列 } A \text{ の表す線型変換 } f \text{ が逆変換をもつ} \quad \Longrightarrow \quad A \text{ は正則行列である}$$

を意味している．逆に，「A が正則行列である $\Longrightarrow$ A の表す線型変換 f は逆変換をもつ」も成立する．よって，

$$\text{行列 } A \text{ の表す線型変換 } f \text{ が逆変換をもつ} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ は正則行列である}.$$

【例題 3.6】

線型変換 f を表す行列を $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ とする．このとき，点 $P'\,(2, -1)$ に移される元の点 $P\,(x, y)$ の座標を求めよ．

✍

問題 3.8　線型変換 f を表す行列を $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ とする．このとき，点 $P'\,(-1, 4)$ に移される元の点 $P\,(x, y)$ の座標を求めよ．

問題 3.9　行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ で表される線型変換を f とする．このとき，f によって，直線 $3x + y = 6$ に移される元の図形を求めよ．