2.5　微分法再考：「微分」とは何か？

◪　円の面積の問題を例に

【例題 2.6】

半径 r の円の面積 A は，$A = \pi r^2$ である．$\dfrac{dA}{dr}$ を求めよ．

— A は r の関数なので，A を（r で）微分して $\dfrac{dA}{dr} = 2\pi r$ とするのが，「模範解答」だとは思いますが，ここでは“平均変化率の極限”という導関数の定義に戻って考えてみましょう．

✍

問　関数 $y = x^3$ の導関数を，上と同じやり方で求めよ．

✍

◪　微分　　“微小変化分”

関数 $y = f(x)$ は滑らかだとする．x, y の変化分（増分）をそれぞれ $\Delta x, \Delta y$ と書くのであった．

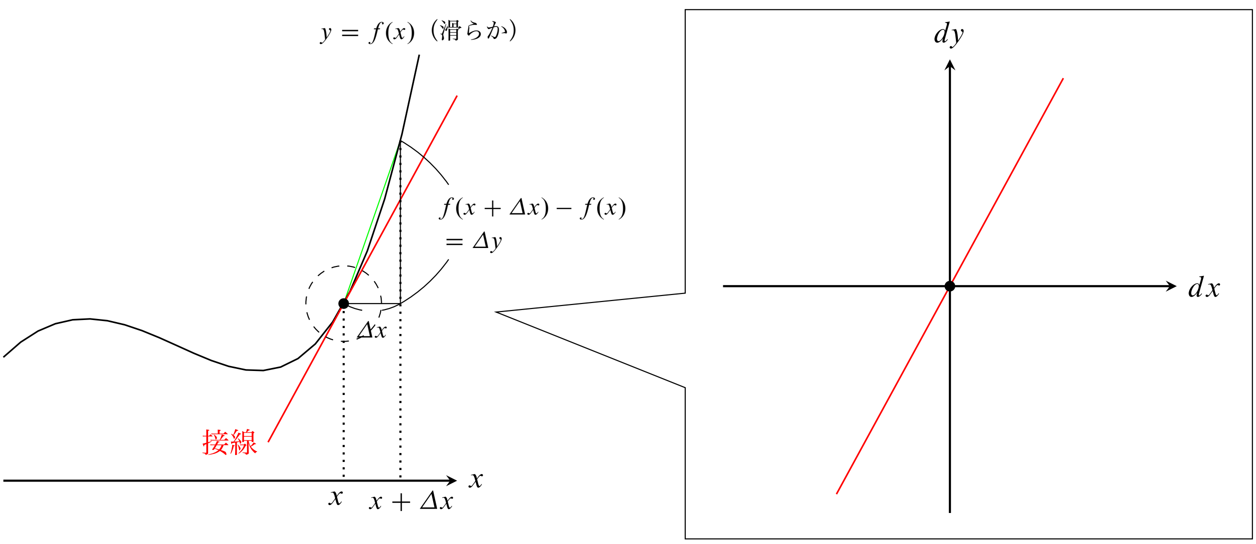
$|\Delta x|$ が十分小さいとき，

$$\Delta y \fallingdotseq [\text{接線の傾き}] \times \Delta x = f'(x)\Delta x \qquad cf.\quad \Delta y = [\text{平均変化率}] \times \Delta x\,.$$

$\Delta x \to 0$ のとき，$\Delta x, \Delta y$ を dx, dy と書き，x の微分，y の微分 (differential) という．

$$dy = f'(x)\,dx \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx} = f'(x)\,.$$

$\dfrac{dy}{dx}$，あるいは $f'(x)$ を求めることを y を x で微分するという．　✍



定義（高位の無限小）． $\lim_{x \to a} f(x) = 0,\ \lim_{x \to a} g(x) = 0$ であり，かつ

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$$

のとき，$f(x) \ll g(x),\ f(x) = o(g(x))$ などと書き，（$x = a$ において）$f(x)$ は $g(x)$ より高位の無限小であるという．

導関数 $f'(x)$ の定義より，

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \therefore\ \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{\Delta x} \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Delta y - f'(x)\Delta x = o(\Delta x)\ .$$

すなわち，$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$ であり，これを $dy = f'(x)\, dx$ と書く．

2.6 微分法の基本法則 ②

◪ 合成関数の微分法 (chain rule)

$y = f(u),\ u = g(x)$ がいずれも微分可能な関数であるとき，

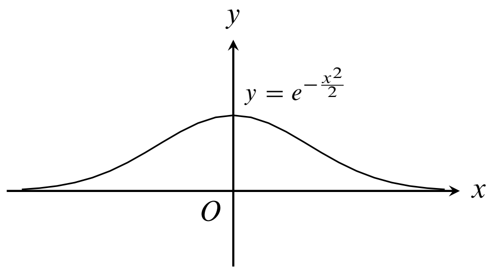
(v) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

法則 (v) の説明． ✍

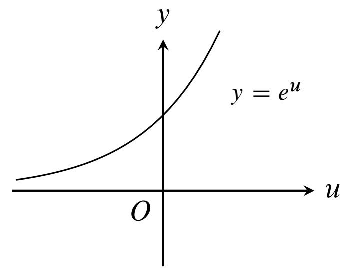
cf. Y は U に比例し（比例係数は 3），U は X に比例する（比例係数は 2）とき，
Y は X に比例する（比例係数は $3 \times 2 = 6$）．

問　これを証明せよ．

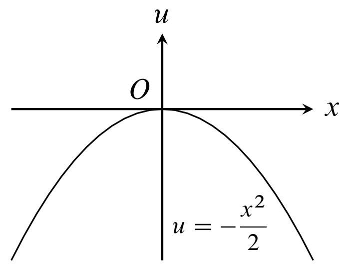
例． $y = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = e^u \\ u = -\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$



$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$



$y = e^u$



$u = -\dfrac{x^2}{2}$

【例題 2.7】

次の関数を微分せよ．

(1) $y = (x^2 + x + 1)^8$ (2) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

(3) $y = \sqrt{6x + 2}$ (4) $y = \log_3(4x - 1)$

(5) $y = \sin^3 2x$ (6) $y = e^{x^2} \sin 3x$

✍

問題 2.14 次の関数を微分せよ．

(1) $y = (x^2 - x + 1)^5$ (2) $y = e^{\cos x}$ (3) $y = \ln(x^2 - 1)$ (4) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

(5) $y = \cos^2 x$ (6) $y = \tan^2 x$

問題 2.15 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \cos^3 2x$ (2) $y = e^{4x} \cos(x^2)$ (3) $y = [\ln(x^3 + 1)]^5$

問題 2.16 次の関数を微分せよ． ※ これまでの $[f(ax + b)]'$ に関する問題の再掲.

(1) $y = (-2x + 1)^5$ (2) $y = (2x - 3)^{\frac{5}{2}}$ (3) $y = \sqrt{(3x + 1)^3}$ (4) $y = \dfrac{1}{(5x + 1)^2}$

(5) $y = \sin(3x + 2)$ (6) $y = \cos(3 - 2x)$ (7) $y = \tan 3x$ (8) $y = e^{-2x}$

(9) $y = e^{2x} \cos 3x$ (10) $y = \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$ (11) $y = \ln(3x - 2)$ (12) $y = \ln(-x)$

(13) $y = \log_3(2x + 1)$ (14) $y = \ln|2x + 1|$ (15) $y = \ln|3 - x|$