工業数学演習 I — 基礎数学　　*as of October 28, 2024*

（担当： 奈須田*）

はじめに

　みなさん，はじめまして．基礎数学を担当する奈須田です．　— 演習の題材を選ぶにあたって，手元にある「基礎数学」の教科書の章立てを調べてみました：

・数と式の計算　・方程式と不等式　・関数とグラフ　・指数関数と対数関数　・三角関数
・図形と式　・場合の数と数列

これだけ内容が多岐に亘っていると，2 回の授業でこれを全てカバーするのは難しそうです．ということで，私の独断と偏見で題材を選びました：

第 1 週：　2 次曲線とその周辺
第 2 週：　関数方程式

これは，2 週間で，「基礎数学」の教科書のうち以下の**太字**の単元（の一部）を扱うことになります：

・数と式の計算　・方程式と不等式　・関数とグラフ　**・指数関数と対数関数　・三角関数**
・図形と式　・場合の数と数列

ただし，これらを個別に扱うわけではなく，基礎数学以外の知識を織り交ぜながら，週ごとに「2 次曲線とその周辺」「関数方程式」というテーマに沿って体系的にまとめ直したものを，演習問題として提供していきます．

【課題】　「基礎数学」の成績評価は，2 回のレポート提出によって行います．各 100 点満点で，それらの平均値を四捨五入した整数値を成績点とします．

課題 1　以下に取り組み，**11/4（月）の 16:00 までに** Teams のクラス内の提出先に提出すること．

- 問題 [1], [2], [3], [4] を解く（必修）；
- 問題 [5] を解く（任意）；
- 2 次曲線に関する他の話題について，詳細な解説ノートを作る（任意）．

課題 2　以下に取り組み，**11/11（月）の 16:00 までに** Teams のクラス内の提出先に提出すること．

- 問題 [6], [7], [8], [9], [14], [15], [16] を解く（必修）；
- 問題 [10], [11], [12], [13], [17], [18] を解く（任意）；
- 関数方程式や $\sum$ 公式に関する他の話題について，詳細な解説ノートを作る（任意）．

*所属：一般教科（自然科学）
居室：管理棟・一般教科棟 3 階 305 号室（奈須田教員室）　E-mail: `y.nasuda@gunma-ct.ac.jp`

第 1 週　2 次曲線とその周辺

§1.1　2 次曲線の統一的理解

（復習：2 次曲線）　一般に，方程式が

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (A, B, C \text{ のうち少なくとも 1 つは 0 でない})$$

で表される座標平面上の曲線を 2 次曲線と呼ぶ．特に，

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ , \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ , \quad y^2 = 4px$$

は，それぞれ楕円，双曲線，放物線の方程式の標準形である．標準形とは，適当な直交変換によって，任意の 2 次曲線がこれらの形に表されるということである．

2 次曲線は円錐曲線とも呼ばれ，しばしば，円錐面を任意の平面で切断したときの断面の曲線として理解される．しかしここでは，空間図形に頼らず，平面上で 2 次曲線を統一的に理解する方法を考えよう．

平面上の定点 F と，F を通らない定直線 ℓ からの距離の比が $e:1$ である点 P の軌跡は，e の値によって，次のようになる：

- $0 < e < 1$ のとき，F を焦点の 1 つとする楕円；
- $e = 1$ のとき，F を焦点，ℓ を準線とする放物線；
- $e > 1$ のとき，F を焦点の 1 つとする双曲線.

e の値は，2 次曲線の離心率と呼ばれる．また，$e \to 0$ の極限は，円に対応する．◇

---

[1]　（2 次曲線の統一的理解）

定点 F と F を通らない定直線 ℓ がある．点 P から ℓ に下ろした垂線の足を H とするとき，

$$PF : PH = e : 1 \qquad i.e. \qquad \frac{PF}{PH} = e$$

であるような点 P の軌跡を求めたい．ここでは，次のそれぞれの場合について，配布した図に点を書き込みそれらを滑らかにつなぐことで，軌跡の概形を把握しよう．

(1)　$e = \dfrac{1}{2}$　　(2)　$e = 1$　　(3)　$e = 2$

（復習：極方程式）　ある曲線が極座標 (r, θ) に関する方程式 $r = f(\theta)$ や $F(r, \theta) = 0$ で表されるとき，この方程式を曲線の極方程式という．◇

[2]　（2 次曲線の極方程式①）

極座標が $(a, 0)$ である点 A を通り，始線（半直線 $\theta = 0$）に垂直な直線を ℓ とする．極を O，P から ℓ に下ろした垂線の足を H とするとき，

$$\frac{OP}{PH} = e \quad (\text{一定})$$

であるような点 P の軌跡は 2 次曲線になる．このような 2 次曲線の極方程式は

$$r = \frac{ea}{1 + e\cos\theta}$$

であることを示せ．

[3]　（2 次曲線の極方程式②）

極方程式 $r = \dfrac{ea}{1 + e\cos\theta}$ を直交座標に関する方程式で表すと，

$$(1 - e^2)x^2 + 2e^2 ax + y^2 = e^2 a^2$$

となることを示せ．

§1.2　Kepler 軌道

距離の 2 乗に反比例する引力のみを及ぼし合う 2 粒子の軌道について考察しよう．相対座標（ある粒子から見たもう 1 つの粒子の位置座標）$\boldsymbol{r}$ の軌跡は，2 次曲線を描くことが知られている．これを Kepler 軌道と呼ぶ．

（復習：Kepler 問題［物理］）　Kepler 問題とは，距離の 2 乗に反比例する引力（万有引力）のみを及ぼし合う 2 粒子の 2 体問題のことである．相対運動の運動方程式が，

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\kappa}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \qquad (\mu, \kappa \text{ は正の定数}) \tag{$*$}$$

で与えられたとする．ただし，$r = |\boldsymbol{r}|$，また $\dot{} = \dfrac{d}{dt}$，$\ddot{} = \dfrac{d^2}{dt^2}$ である．

$(*)$ の両辺について，$\dot{\boldsymbol{r}}$ との内積をとって $(\ \cdot \dot{\boldsymbol{r}})$，

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\kappa}{r^3}\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \qquad \therefore\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 - \frac{\kappa}{r}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 - \frac{\kappa}{r} = E \quad (\text{定数}).$$

他方，$(*)$ の両辺と $\boldsymbol{r}$ との外積 $(\boldsymbol{r} \times\ )$ を計算すると，

$$\mu\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\kappa}{r^3}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} \qquad \therefore\ \frac{d}{dt}(\mu\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{L} \quad (\text{定ベクトル}).$$

これらは，それぞれ，力学的エネルギー保存則と角運動量保存則である．

ここで $\dot{\boldsymbol{r}}$ は相対速度ベクトルであり，動径方向成分とそれに垂直な成分とに分けて，

$$\dot{\boldsymbol{r}}^2 = v^2 = {v_{/\!/}}^2 + {v_\perp}^2\ , \quad v_{/\!/} = \dot{r}\ , \quad v_\perp = r\dot{\theta}$$

と書くことにすれば，力学的エネルギー保存則と角運動量保存則は，それぞれ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\mu v^2 - \dfrac{\kappa}{r} = E \\ \mu r v_\perp = L \end{cases}$$

となる.（ただし，$L = |\boldsymbol{L}|$ である.） ◇

---

[4] （Kepler 軌道の導出）

Kepler 軌道を導出せよ.（いくつかの方法が考えられるが，例えば以下の方針 I, II を参考にせよ.）

※

方針 I　r と θ の関係式（微分方程式）を導く.

(i) $\dfrac{1}{2}\mu {v_{/\!/}}^2 + \dfrac{L^2}{2\mu r^2} - \dfrac{\kappa}{r} = E$ を導く.

(ii) $l = \dfrac{L^2}{\mu\kappa}$, $u = \dfrac{\kappa}{L}$, $e = \sqrt{1 + \dfrac{2L^2}{\mu\kappa^2}E}$ とおく.

(iii) $v_{/\!/}$, $v_\perp$ を求める.

(iv) $\dfrac{dr}{d\theta}$ を求める.　（ヒント：$\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \dfrac{r v_{/\!/}}{v_\perp}$）

方針 II　微分方程式を解いて，軌道の式（極方程式）を得る.

(i) 変数変換 $s = \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{l}{r} - 1\right)$ を施し，$\dfrac{ds}{dr}$, $\dfrac{ds}{d\theta}$ を求める.　（ヒント：$\dfrac{ds}{d\theta} = \dfrac{ds}{dr}\dfrac{dr}{d\theta}$）

(ii) 微分方程式 $\dfrac{ds}{d\theta} = [s \text{ の式}]$ を解く．ただし，$v_{/\!/} = 0$ となる点を $\theta = 0$ にとる.

(iii) $r = [\theta \text{ の式}]$ に変形する.

---

[5] （有効ポテンシャルと運動領域；おまけ）

$U_L(r) = \dfrac{L^2}{2\mu r^2} - \dfrac{\kappa}{r}$ のグラフの概形をかけ．また，r についての方程式 $U_L(r) = E$ が次のようになるとき，$e = \sqrt{1 + \dfrac{2L^2}{\mu\kappa^2}E}$ の値の範囲を求めよ.

(1) 相異なる 2 実数解をもつ　　(2) ただ 1 つの実数解をもつ

第 2 週　関数方程式

方程式とは，通常，未知数を含む等式のことを指す．その等式を成立させる未知数の値を定めることを「方程式を解く」という．

他方，未知関数を含む等式は関数方程式と呼ばれ，その等式を成立させる未知関数を定めることを「関数方程式を解く」という．関数方程式の代表例として，微分方程式や漸化式が挙げられる．

§2.1　関数方程式と初等関数

---

[6]（加法性を満たす関数；Cauchy の関数方程式）

関数 $f(x)$ が任意の実数 x, y に対して $f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(0)$ を求めよ．

(2) すべての実数 x に対して $f(-x) = -f(x)$ であることを示せ．

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = a$（a は定数）であるとき，$f(x)$ を求めよ．

---

[7]（$f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たす関数）

関数 $f(x)$ が任意の実数 x, y に対して $f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x) > 0$ のとき，$f(0)$ を求めよ．

(2) すべての実数 x に対して $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ であることを示せ．

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = a$（a は定数）であるとき，$f(x)$ を求めよ．

---

[8]（$f(xy) = f(x) + f(y)$ を満たす関数）

関数 $f(x)$ が任意の正の実数 x, y に対して $f(xy) = f(x) + f(y)$ を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(1)$ を求めよ．

(2) すべての実数 x に対して $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$ であることを示せ．

(3) $f(x)$ は $x = 1$ で微分可能で $f'(1) = a$（a は定数）であるとき，$f(x)$ を求めよ．

---

[9] （加法定理を満たす関数）　　九州大学の 2023 年の入試問題より．

以下の文章を読んで後の問いに答えよ．

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ については加法定理が成立するが，逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか．実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$, $g(x)$ が以下の条件を満たすものとする．

(A) すべての x, y について $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$

(B) すべての x, y について $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$

(C) $f(0) \neq 0$

(D) $f(x)$, $g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=0$, $g'(0)=1$

①$\underline{\text{条件 (A), (B), (C) から } f(0)=1,\ g(0)=0 \text{ がわかる}}$．以上のことから ②$\underline{f(x), g(x) \text{ はすべての } x \text{ の値で微分可能で，} f'(x)=-g(x),\ g'(x)=f(x) \text{ が成立する}}$ことが示される．③$\underline{\text{上のことから } \{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x) = 1 \text{ であることが，実部と虚部を調べることによりわかる}}$．ただし，$i$ は虚数単位である．よって条件 (A), (B), (C), (D) を満たす関数は三角関数 $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$ であることが示される．

さらに，a, b を実数で $b \neq 0$ とする．このとき条件 (D) をより一般的な

(D)' $f(x)$, $g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=a$, $g'(0)=b$

におきかえて，条件 (A), (B), (C), (D)' を満たす $f(x)$, $g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる．この場合でも，条件 (A), (B), (C) から $f(0)=1$, $g(0)=0$ が上と同様にわかる．ここで

$$p(x) = e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right) \ , \quad q(x) = e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと，④$\underline{\text{条件 (A), (B), (C), (D) において，} f(x) \text{ を } p(x) \text{ に，} g(x) \text{ を } q(x) \text{ におきかえた条件が満たされる}}$．すると前半の議論により，$p(x)$, $q(x)$ がまず求まり，このことを用いると $f(x) = \boxed{\text{ア}}$, $g(x) = \boxed{\text{イ}}$ が得られる．

(1) 下線部①について，$f(0)=1$, $g(0)=0$ となることを示せ．

(2) 下線部②について，$f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり，$f'(x)=-g(x)$ となることを示せ．

(3) 下線部③について，下線部①，下線部②の事実を用いることにより，$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x) = 1$ となることを示せ．

(4) 下線部④について，条件 (B), (D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされることを示せ．つまり $p(x)$ と $q(x)$ が，

　(B) すべての x, y について $q(x+y) = p(x)q(y) + q(x)p(y)$

　(D) $p(x)$, $q(x)$ は $x=0$ で微分可能で $p'(0)=0$, $q'(0)=1$

を満たすことを示せ．また空欄 $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に入る関数を求めよ．

[10] （指数関数による三角関数の定義；おまけ①）　　問題末尾のリンク先より一部改変．

次の文章を読んで，以下の問いに答えよ．

> あなたが長い眠りから目を覚ますと，そこは 20xx 年の某国．そこでは，「三角関数は不要だ」と考える権力者によって全ての教科書から三角関数の記述が消されてしまっていた．これは大変だ．しかし幸いなことに，指数関数や複素数に関する記述は残っていた．そこであなたは複素指数関数
>
> $$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$
>
> を用いて三角関数を定義し，そこから三角関数の性質を導くことにした．

関数 $c(\theta)$, $s(\theta)$ を以下の関係式で定義する：

$$e^{i\theta} = c(\theta) + is(\theta)\ . \qquad (*)$$

ただし i は虚数単位，θ は実数であり，$c(\theta)$, $s(\theta)$ については実関数（実数値を与える関数）であること以外は知らないと仮定する．一方で，左辺の $e^{i\theta}$ については指数関数としての性質が成立すると仮定する．例えば $\theta = 0$ を代入すると左辺は $e^0 = 1$，右辺は $c(0) + is(0)$ となるため，両辺の実部と虚部を比較して $c(0) = 1$, $s(0) = 0$ が得られる．このように，指数関数と複素数の性質から $c(\theta)$, $s(\theta)$ の性質を求めようというわけだ．

(1) 式 $(*)$ の複素共役から $e^{-i\theta} = c(\theta) - is(\theta)$ が成り立つとし，さらに指数関数の性質から $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$ が成り立つとする．これらの式から $c(\theta)^2 + s(\theta)^2 = 1$ を導け．

(2) 指数関数の性質から $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$ が成り立つとする．この両辺に式 $(*)$ を代入して比較することで，$c(\alpha+\beta)$ および $s(\alpha+\beta)$ を $c(\alpha)$, $c(\beta)$, $s(\alpha)$, $s(\beta)$ で表す関係式（加法定理）を導け．

(3) ある値 $\theta = \theta_0 \neq 0$ で $c(\theta_0) = 1$, $s(\theta_0) = 0$ であるとする．このとき任意の θ に対して $c(\theta + \theta_0) = c(\theta)$, $s(\theta + \theta_0) = s(\theta)$ が成り立つこと（周期性）を示せ．

出典： https://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~hama/lectures/lecture_files/QM_Komaba_2022_exam_v2.pdf

---

[11] （双曲線関数 $\tanh x$ がらみ；おまけ②）　　京都大学の 2007 年の入試問題より．

全ての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ を満たし，さらに任意の実数 a, b に対して $1 + f(a)f(b) \neq 0$ であって

$$f(a+b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$$

を満たしている．

(1) 任意の実数 a に対して，$-1 < f(a) < 1$ であることを証明せよ．

(2) $y = f(x)$ のグラフは $x > 0$ で上に凸であることを証明せよ．

§2.2　差分方程式（漸化式）

（復習：数列と漸化式）　n を自然数とする．n の式 $f(n)$ において，$n = 1, 2, 3, \ldots$ を代入した数の列

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots$$

のことを数列と呼ぶ．（$f(n)$ は，しばしば a_n のようにも表される．）このとき，n の式 $f(n)$ は，この数列の一般項という．また，数列の各数は項と呼ばれる．

いくつかの項の間の関係式は，漸化式または差分方程式と呼ばれる．　$\diamond$

この関係式を満たす数列の一般項を求めることを差分方程式（漸化式）を解くといい，その一般項のことを差分方程式の解という．一般に，1 つの差分方程式を満たす数列は無数にある．与えられた差分方程式の任意の解を表す n の式は，この差分方程式の一般解と呼ばれる．

$f(n+1)$ と $f(n)$ の関係式は，1 階差分方程式と呼ばれる．1 階差分方程式では，例えば $f(1)$ の値が与えられれば，その関係式を満たす数列は一意に定まることが知られている．

以下では，1 階差分方程式に限って話を進めることにしよう．　*cf.*　1 階微分方程式

---

[12]　（差分方程式 ①）

次の差分方程式の一般解を求めよ．ただし，a, b は定数である．

(1) $f(n+1) = f(n) + b$　$\cdots$ 等差型　　*cf.*　微分方程式 $f'(x) = b$

(2) $f(n+1) = af(n)$　$\cdots$ 等比型　　*cf.*　微分方程式 $f'(x) = (a-1)f(x)$

(3) $f(n+1) = af(n) + b$　　*cf.*　微分方程式 $f'(x) = (a-1)f(x) + b$

---

[13]　（差分方程式 ②）　　*cf.*　微分方程式 $f'(x) = b(x)$

差分方程式 $f(n+1) = f(n) + b(n)$ の一般解を求めよ．ただし，$b(n)$ は既知の数列である．

---

[14]　（差分方程式；具体例）

次の差分方程式を解け．

(1) $f(1) = 2,\ f(n+1) = f(n) + 4$

(2) $f(1) = 5,\ f(n+1) = 3f(n)$

(3) $f(1) = 6,\ f(n+1) = 4f(n) - 9$

(4) $f(1) = 1,\ f(n+1) = f(n) + 2n - 3$

(5) $f(1) = 10,\ f(n+1) = 3f(n) + 2^{n+2}$

(6) $f(1) = 1,\ f(n+1) = \dfrac{f(n)}{2f(n) + 3}$

ここで，「関数方程式」のテーマから少し外れるが，差分の考え方を用いて，有名な $\sum$ の公式を導く方法を紹介しよう．

$f(n)$ の差分 $\Delta f(n)$ とは， *cf.* 微分 $df(x)$

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

のことをいう．

---

[15] （差分）

次の数列 $f(n)$ に対して，差分 $\Delta f(n)$ を求めよ．

(1) $f(n) = n^2$

(2) $f(n) = n^3$

(3) $f(n) = n(n+1)$

(4) $f(n) = n(n+1)(n+2)$

(5) $f(n) = r^n$

$\Delta F(n) = f(n)$ を満たす $F(n)$ を，$f(n)$ の不定和分と呼ぶことにする． *cf.* 問題 [13]
（$F'(x) = f(x)$ を満たす $F(x)$ は，$f(x)$ の不定積分である．）
このとき，（微積分の基本定理が成り立つのと同様に）以下の定理が成り立つ：

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \Big[F(k)\Big]_a^{b+1} = F(b+1) - F(a)\ . \qquad \diamond$$

これは，次のようにして，簡単にわかる：

$$\begin{aligned}\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a}^{b} \Delta F(k) = \sum_{k=a}^{b}\Big(F(k+1) - F(k)\Big) &= \cancel{F(a+1)} - F(a)\\ &\quad + \cancel{F(a+2)} - \cancel{F(a+1)}\\ &\quad + F(a+3) - \cancel{F(a+2)}\\ &\qquad \vdots\\ &\quad + \cancel{F(b)} - F(b-1)\\ &\quad + F(b+1) - \cancel{F(b)} = F(b+1) - F(a)\end{aligned}$$

■

上の定理と問題 [15] の結果から，$\sum$ の公式が導かれる．このことを，次の問題で確かめてみよう．

[16]　（$\sum$ の公式の導出）

前ページの定理と問題 [**15**] の結果から，次の公式を導け．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r(r^n-1)}{r-1} \qquad (r \neq 1)$

また，次のような和も，前ページの定理を用いることで，計算できる．

[17]　（$\sum$ の計算）

次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$　　（ヒント：　$\Delta\Big(n(n+1)(n+2)(n+3)\Big)$ を計算してみよ．）

参考文献：　渡部隆一，数学ワンポイント双書 37「差分と和分」，共立出版 (1982).

§2.3　微分方程式

☞　次回 (11/11, 11/18) のテーマです．

§2.4　積分方程式

ここでは，最も簡単な例を 2 つ挙げるだけに留めておきます．

[18]　（積分方程式）

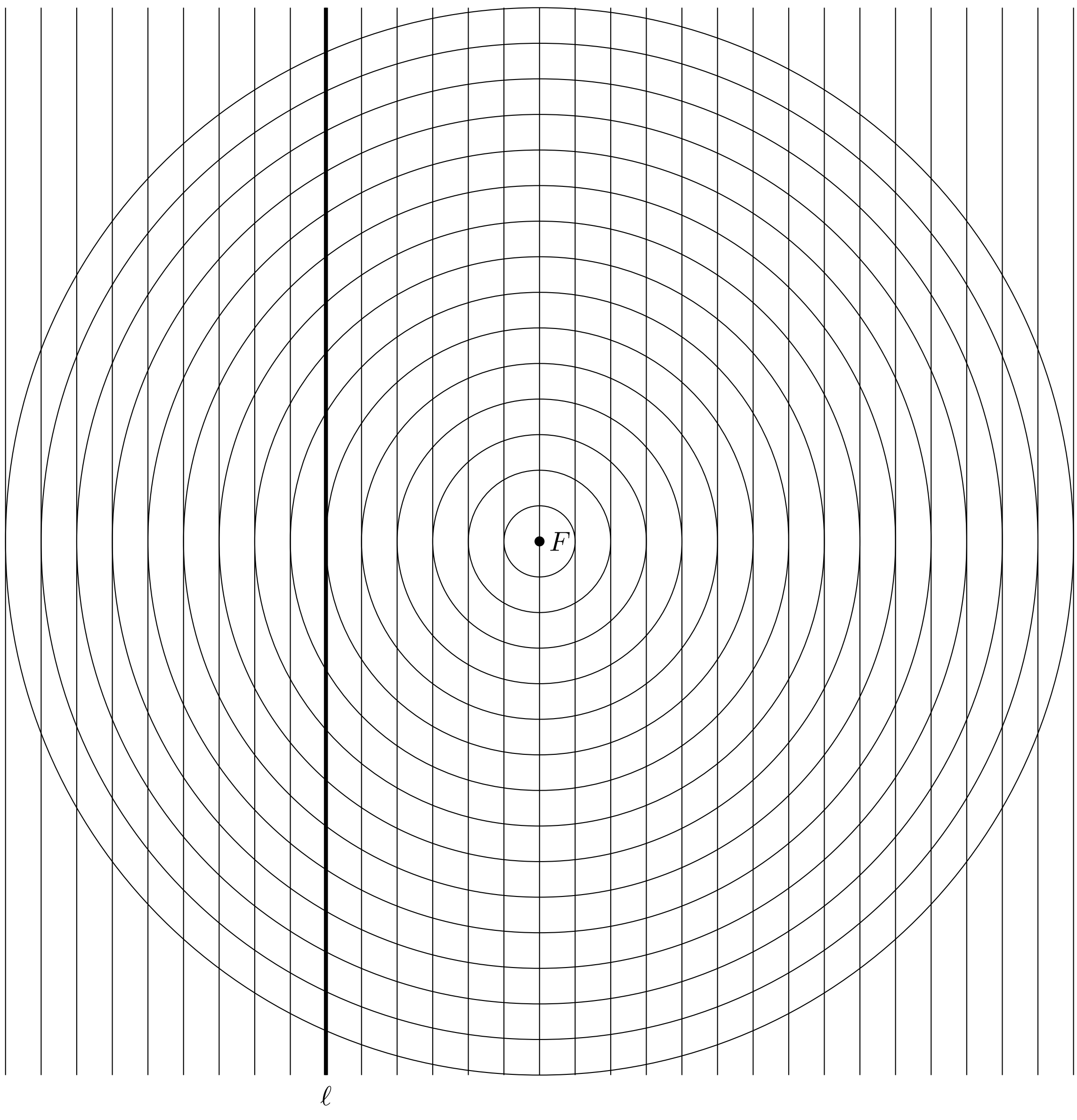
次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．(2) では，定数 a の値も求めよ．

(1) $\displaystyle f(x) = 2x + \int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$

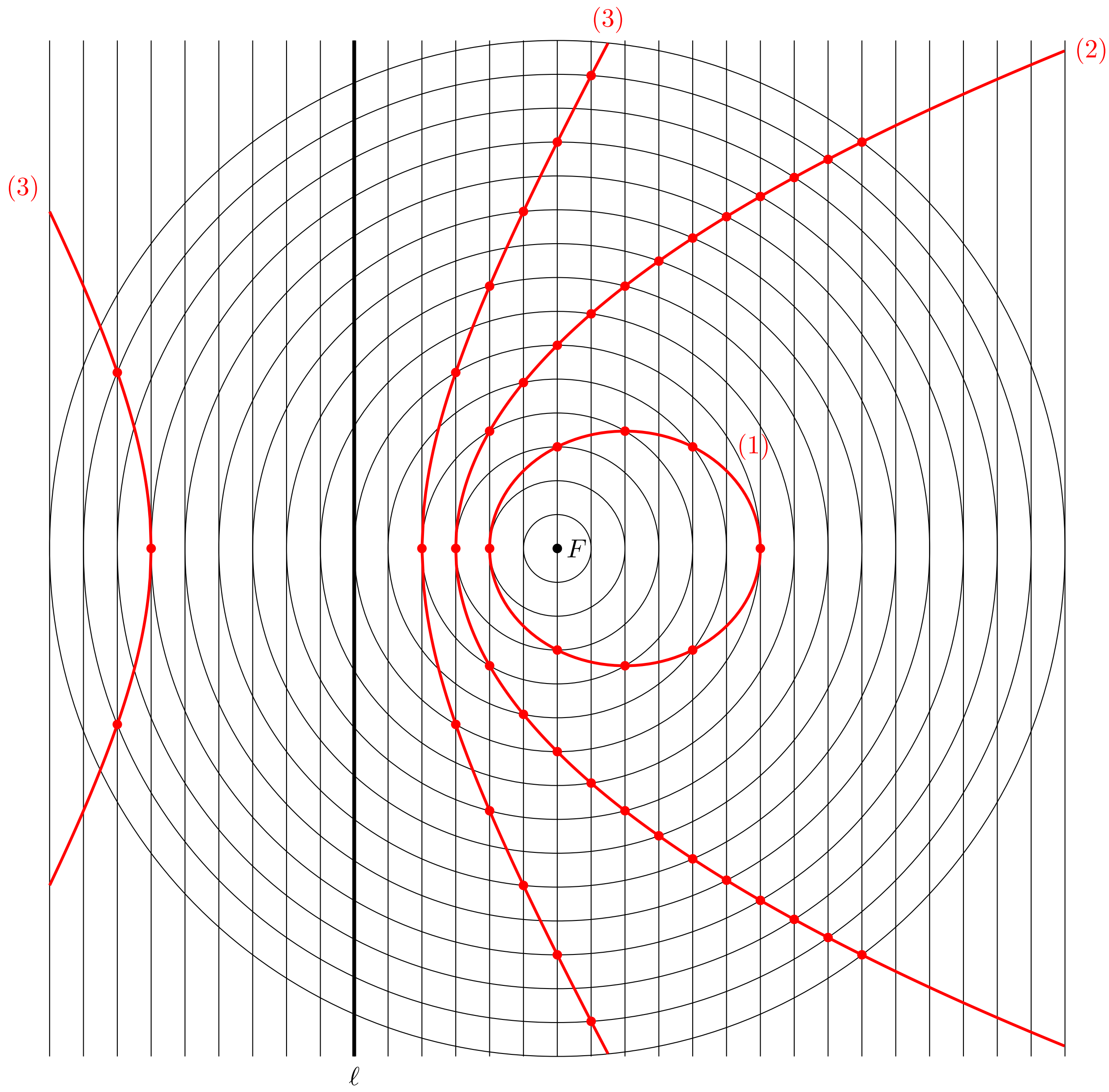
(2) $\displaystyle\int_1^{x}(x-t)f(t)\,dt = \ln x - x + a$

☞　より難しい＝実践的な積分方程式の問題は，

後藤憲一ら，詳解 物理応用数学演習，共立出版 (1979)　　などを参照してください．



F
ℓ



(3)
(2)
(3)
(1)
F
ℓ