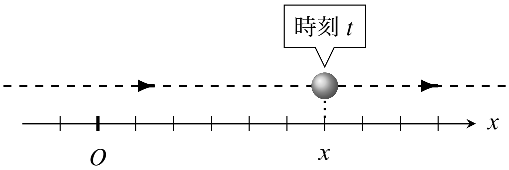
6.4　速度・加速度：物理への応用①（運動学）

◪　直線上の点の運動

直線上を運動する点 P（*cf.* 大きさのある物体の代表点）を考える．点 P が運動する直線上に適当に原点 O をとり，この直線に数直線を対応させる．点 P の時刻 t における座標（つまり位置）を x とすると，x は t の関数である：

$$x = f(t)\,.$$

ただし，物理の文脈では，これを $x = x(t)$ と略記することが多い．



速度　時刻 t から $t + \Delta t$ の間に，点 P は $x(t)$ から $x(t + \Delta t)$ に動くから，その平均速度 $\overline{v(t)}$ は

$$\overline{v(t)} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

と表される（平均変化率）．時刻 t における点 P の速度 (velocity) $v(t)$ は，$\Delta t \to 0$ として

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$$

で定義される．また，速度 v の絶対値 $|v|$ を速さ (speed) という．

加速度　さらに，時刻 t における速度 v の時間変化率 a を，時刻 t における点 P の加速度 (acceleration) $a(t)$ という：

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)\,.$$

【例題 6.5（等加速度運動）】

地上 y_0 [m] の位置から v_0 [m/s] の速度で真上に打ち上げられた物体の t 秒後の高さを y [m] とすると，次の等式が成り立つ：

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0\,.$$

ただし，g [m/s^2] は重力加速度の大きさを表す．次の問いに答えよ．

(1)　この物体の t 秒後の速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ を求めよ．

(2)　最高の高さに到達するまでの時間 T [s] とその高さ H [m] を求めよ．

(3)　$y_0 = 1.8$ m, $v_0 = 29.4$ m/s, $g = 9.8$ m/s^2 とする．このときの T と H の値を求めよ．

◪ 平面上の点の運動

平面上を運動する点 P の速度と加速度について考える．点 P が運動する平面上に適当に原点 O をとり，この平面に xy 平面を対応させる．点 P の時刻 t における座標（位置）を (x, y) とすると，x, y はそれぞれ t の関数である．点の位置は，位置ベクトル $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて表すのが便利である．

平面上を運動する点 P の速度と加速度は，x 成分と y 成分をそれぞれ独立に考え，直線上を運動する点の問題に帰着させれば良い（空間内の点の運動の場合も同様）．つまり，x の時間変化率 $\dfrac{dx}{dt}$, y の時間変化率 $\dfrac{dy}{dt}$ を用いて，

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

が時刻 t における点 P の速度（速度ベクトルともいう）であり，その速さは $\vec{v}$ の大きさ

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

である．同様に，時刻 t における点 P の加速度 $\vec{a}(t)$ は

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dv_x}{dt} \\ \dfrac{dv_y}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

である（加速度ベクトルともいう）．

【例題 6.6（等速円運動）】

原点 O を中心とする半径 r の円周上を運動する点 P がある．いま，点 P が点 $A\ (r, 0)$ を出発し，原点 O のまわりを角速度 ω [rad/s] で回転するものとする．次の問いに答えよ．

(1) 出発してから t 秒後の速度 $\vec{v}(t)$ と加速度 $\vec{a}(t)$ を求めよ．

(2) $\vec{v}(t)$ と $\vec{a}(t)$ の大きさをそれぞれ求めよ．

(3) 速度 $\vec{v}(t)$ の x 成分がゼロとなるときの点 P の座標を求めよ．

※ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{v_y}{v_x}$ は，点 P の描く曲線の点 P における接線の傾きを表す．

cf. 速度ベクトルの向き．

※ 媒介変数表示 $(*)$ された曲線は，時刻 t に伴って動く点 P の軌跡と考えることができる：

$$x = f(t)\,, \quad y = g(t) \qquad \text{and} \qquad \vec{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}.$$