2024年度　数学B　前期定期試験　（実施日：2024年7月24日）

得点	100

3年___科　学籍番号：__________　氏名：解答例

注意： 試験時間は **50分** です．問4以降は，最終的な答えがどこか分かるように解答すること．またそれに至る過程も採点対象です．採点者に伝わるように書いてください．
この試験では，正方行列 A の行列式を $\det A$ で表します． *** If you need English assistance, see the right half of page 2.**

問 1. 次の空欄 (a) から (c) に当てはまる語句を解答欄に記せ．　[3点 × 3]

(1) n 次正方行列 A の第 i 行と第 j 列とを取り除いてできる $n-1$ 次正方行列の行列式に，符号 $(-1)^{i+j}$ を掛けたものを A の第 (i,j) $\boxed{\text{(a)}}$ といい，$\tilde{a}_{ij}$ などと表す．

(2) 2次の行列式 $\det\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{pmatrix}$ の絶対値は，$\vec{a}, \vec{b}$ の張る $\boxed{\text{(b)}}$ の面積を表す．
また，3次の行列式 $\det\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}$ の絶対値は，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の張る $\boxed{\text{(c)}}$ の体積を表す．

(a)	余因子	(b)	平行四辺形	(c)	平行六面体

問 2. 次の図形の面積または体積を求め，その値を解答欄に記せ．　[4点 × 3]

(1) $\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ の張る三角形の面積

(2) $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ の張る平行四辺形の面積

(3) $\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\6\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}$ の張る平行六面体の体積

(1)	7	(2)	25	(3)	20

問 3. 次の (1) から (3) について，与えられたベクトルの組が線型独立なら◯を，線型従属なら×を，それぞれ解答欄に書け．　[4点 × 3]

(1) $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(1)	◯	(2)	×	(3)	◯

問 4. 次の連立1次方程式を解け．　[10点 × 3]

(1) $\begin{cases} 51x + 49y = 1 \\ 49x + 51y = 2 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}1 & 49\\ 2 & 51\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}51 & 49\\ 49 & 51\end{vmatrix}} = \underline{-\frac{47}{200}}_{/\!/}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix}51 & 1\\ 49 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}51 & 49\\ 49 & 51\end{vmatrix}} = \underline{\frac{53}{200}}_{/\!/}.$$

(2) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + 4y + 9z = 1 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{vmatrix}} = \underline{1}_{/\!/}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{vmatrix}} = \underline{0}_{/\!/}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{vmatrix}} = \underline{0}_{/\!/}.$$

(3) $\begin{cases} x + y + 2z + w = -1 \\ x + y + 3z + 2w = 2 \\ 2x - 2y + 2z - w = -1 \\ -x + y + w = 1 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 2\\ 2 & -2 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = -2 \text{ であるから，}$$

$$x = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 2\\ -1 & -2 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = \underline{1}_{/\!/},$$

$$y = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = \underline{-3}_{/\!/},$$

$$z = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = \underline{-2}_{/\!/},$$

$$w = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 3 & 2\\ 2 & -2 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = \underline{5}_{/\!/}.$$

問 5. 行列式 $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & -1\\ -4 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 0 & 2\end{vmatrix}$ の値を，次の方法でそれぞれ求めよ．　[7点 × 2]

(1) 第3行に関する余因子展開．

$$\begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & -1\\ -4 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 0 & 2\end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix} - 0 - 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ -4 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}$$
$$= (1+3-4) - (8+4-4-2) - 2(-4+4-6)$$
$$= \underline{6}_{/\!/}$$

(2) 第2列に関する余因子展開．

$$\begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & -1\\ -4 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 0 & 2\end{vmatrix} = -0 + 2\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 2\end{vmatrix} - 0 + 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ -4 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}$$
$$= 2(-4-4+2-2) + (12+1-4+3+8+2)$$
$$= \underline{6}_{/\!/}$$

問題は裏面にもあります．

問 6. 次の連立 1 次方程式が非自明な解（$x = y = \cancel{z =} 0$ 以外の解）をもつような定数 k の値を求めよ． [10 点]

$$\begin{cases}(1-k)x + 2y = 0\\ -x + (4-k)y = 0\end{cases}$$

この連立方程式が非自明な解をもつ条件は，

$$\begin{vmatrix}1-k & 2\\ -1 & 4-k\end{vmatrix} = 0 \qquad \therefore \quad (1-k)(4-k) + 2 = 0$$

$$\iff \quad k^2 - 5k + 6 = 0\,.$$

よって，これを解いて，$\underline{k = 2 \text{ または } k = 3}_{/\!/}$ と求まる．

問 7. 2 つの平面ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ について考えよう．ただし，$\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{p} \neq \vec{0}$ とする． [(1) 3 点，(2), (3) 5 点]

(1) $L = \det\begin{pmatrix}\vec{x} & \vec{p}\end{pmatrix}$ を計算せよ．

$$L = \det\begin{pmatrix}\vec{x} & \vec{p}\end{pmatrix} = \underline{xq - yp}_{/\!/}$$

$\vec{x}, \vec{p}$ が，それぞれ

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longrightarrow \vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{u}\Delta t = \begin{pmatrix}x + u\Delta t\\ y + v\Delta t\end{pmatrix},$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} \longrightarrow \vec{p}\,' = \vec{p} + \vec{F}\Delta t = \begin{pmatrix}p + F\Delta t\\ q + G\Delta t\end{pmatrix}.$$

と変化したとする．ただし，$\vec{u} = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$, $\vec{F} = \begin{pmatrix}F\\G\end{pmatrix}$ である．

(2) このとき，L の変化量 $\Delta L = \det\begin{pmatrix}\vec{x}\,' & \vec{p}\,'\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}\vec{x} & \vec{p}\end{pmatrix}$ を求めよ．

$$\begin{aligned}\Delta L &= (x + u\Delta t)(q + G\Delta t) - (y + v\Delta t)(p + F\Delta t) - xq + yp\\ &= xq + xG\Delta t + uq\Delta t + uG(\Delta t)^2\\ &\qquad - yp - yF\Delta t - vp\Delta t - vF(\Delta t)^2 - xq + yp\\ &= \underline{(xG + uq - yF - vp)\Delta t + (uG - vF)(\Delta t)^2}_{/\!/}\end{aligned}$$

以降，$|\Delta t|$ が十分小さいとき ($|\Delta t| \ll 1$, $\Delta t \neq 0$) を考える．つまり，$(\Delta t)^2$ に比例する項を無視して，

$$\Delta L = (xG + uq - yF - vp)\Delta t$$

とする．

(3) $\vec{u}$ と $\vec{p}$ が平行，すなわち $\det\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{p}\end{pmatrix} = 0$ であり，さらに $\vec{F} \neq \vec{0}$ とする．このとき，$\Delta L = 0$ となるためには，F, G はどのような条件を満たせば良いか．

$\Delta L = 0$ となるのは，$xG + uq - yF - vp = 0$ のとき．
ここで，$\det\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{p}\end{pmatrix} = 0$ より $uq - vp = 0$ なので，求める条件は，

$$\underline{xG - yF = 0}_{/\!/}\,.$$

※ $\det\begin{pmatrix}\vec{x} & \vec{F}\end{pmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix}x & F\\ y & G\end{vmatrix} = 0$, $\vec{x} /\!/ \vec{F}$ なども可．

$\vec{x}$ を位置ベクトル，$\vec{p}$ を運動量ベクトルとすると，L は角運動量（ベクトルの z 成分）であり，回転運動の “勢い” を表すと解釈される．このとき，$\vec{u}$ は速度ベクトル，$\vec{F}$ は力であり，(3) は $\dfrac{dL}{dt} = 0$，すなわち角運動量が保存するための条件を求める問題だといえる．よく知られているように，角運動量が保存するための条件は，力が中心力であること（$\vec{F}$ が $\vec{x}$ に平行であること）である．

問題は以上です．

※ Eɴɢʟɪsʜ Assɪsᴛᴀɴᴄᴇ （不要な方は，無視してください．）

NOTES:

This exam is **<u>50 minutes</u>** long. In Question 4–7, make sure that the marker can tell where your final results are. It is important to write down the processes of how you get the final results, because they are also to be evaluated (descriptive type exam).

In this exam, the determinant of a square matrix A is denoted by $\det A$.

<u>* You can answer the questions either in English or in Japanese.</u>

問 1. Fill in the blanks (a)–(c).

(1) The determinant of the $(n-1)\times(n-1)$ matrix, which is cut down from an $n \times n$ matrix A by removing the i-th row and the j-th column, multiplied by the sign $(-1)^{i+j}$ is called the (i, j) $\boxed{\quad\text{(a)}\quad}$ of A, and is denoted by $\tilde{a}_{ij}$.

(2) The absolute value of a determinant of order two, $\det\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{pmatrix}$, is equal to the area of the $\boxed{\quad\text{(b)}\quad}$ spanned by $\vec{a}$, $\vec{b}$. Also, the absolute value of a determinant of order three, $\det\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}$, is equal to the volume of the $\boxed{\quad\text{(c)}\quad}$ spanned by $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

問 2. Evaluate the following quantities. Write down your answers in the space provided.

(1) The area of the triangle spanned by $\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

(2) The area of the parallelogram spanned by $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

(3) The volume of the parallelepiped spanned by $\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\6\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}$.

問 3. Write ◯ in the space provided if the set of vectors provided is linearly independent, and write × if linearly dependent.

問 4. Find the solutions of the following systems of linear equations.

問 5. Compute the determinant $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & -1\\ -4 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 0 & 2\end{vmatrix}$ in the following ways:

(1) Laplace expansion along the third row.

(2) Laplace expansion along the second column.

問 6. Determine the value(s) of k, so that the system linear equations has non-trivial solutions (solutions other than $x = y = z = 0$).

問 7. Let us consider two vectors $\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ with $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{p} \neq \vec{0}$.

(1) Compute the determinant $L = \det\begin{pmatrix}\vec{x} & \vec{p}\end{pmatrix}$.

The vectors $\vec{x}$, $\vec{p}$ change as

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longrightarrow \vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{u}\Delta t = \begin{pmatrix}x + u\Delta t\\ y + v\Delta t\end{pmatrix},$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} \longrightarrow \vec{p}\,' = \vec{p} + \vec{F}\Delta t = \begin{pmatrix}p + F\Delta t\\ q + G\Delta t\end{pmatrix}.$$

Here, $\vec{u} = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ and $\vec{F} = \begin{pmatrix}F\\G\end{pmatrix}$.

(2) Compute the difference in L, $\Delta L = \det\begin{pmatrix}\vec{x}\,' & \vec{p}\,'\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}\vec{x} & \vec{p}\end{pmatrix}$.

Now, take $|\Delta t|$ to be sufficiently small ($|\Delta t| \ll 1$, $\Delta t \neq 0$). This means that the terms proportional to $(\Delta t)^2$ is negligible:

$$\Delta L = (xG + uq - yF - vp)\Delta t\,.$$

(3) Assume that $\vec{u}$ and $\vec{p}$ are parallele, *i.e.*, $\det\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{p}\end{pmatrix} = 0$, and also that $\vec{F} \neq \vec{0}$. Find the condition on F, G for $\Delta L = 0$.

Note that L corresponds to the *angular momentum* (z component) when $\vec{x}$ is the position vector and $\vec{p}$ is the momentum. Angular momentum is the rotational analogue of linear momentum, describing the quantity of rotation. Then, $\vec{u}$ represents the velocity and $\vec{F}$ is the force, and (3) asks for the condition for the conservation of angular momentum, $\dfrac{dL}{dt} = 0$. As is well-know in physics, angular momentum is conserved if the force is a central force (*i.e.*, $\vec{F}$ is parallele to $\vec{x}$).