4　微分法の応用

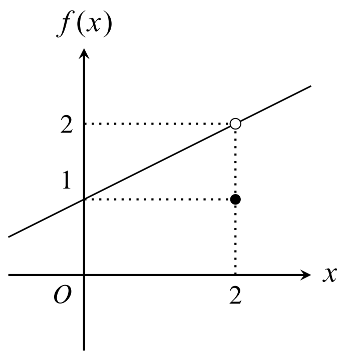
4.1　関数の連続性

定義（連続）．関数 $f(x)$ の定義域内の点 $x = a$ において，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し，かつその値が $f(a)$ に等しいとき，つまり，

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$$

が成り立つとき，$f(x)$ は $x = a$ で連続であるという．また，$f(x)$ がある区間 I のすべての点で連続であるとき，$f(x)$ は I で連続であるという．

※ イメージ：　グラフがつながっている．



※　$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ が存在しても，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ となる例．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{2(x-2)} & (x \neq 2 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

◪　微分可能性

定義（微分可能）．関数 $f(x)$ の定義域内の点 $x = a$ において，微分係数 $f'(a)$ が存在するとき，つまり，極限値

$$\lim_{x\to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するとき（有限確定値），$f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるという．また，$f(x)$ がある区間 I のすべての点で微分可能であるとき，$f(x)$ は I で微分可能であるという．

※ イメージ：　グラフが尖っていたり（折れていたり）切れていたりしない．

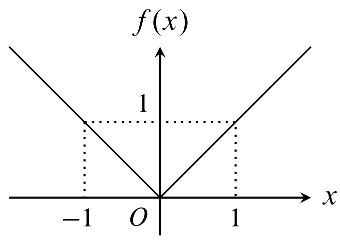
次の定理が成り立つ：

$$f(x) \text{ は } x = a \text{ で微分可能} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \text{ は } x = a \text{ で連続}.$$

なお，この逆は必ずしも成り立たない．　　　　証明．✍

※　$f(x)$ が $x = a$ で連続であっても，$x = a$ で微分可能でない例．

$$f(x) = |x|$$



◪ 中間値の定理

定理（中間値の定理）. 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ のとき，$f(a)$ と $f(b)$ との間にある任意の値 k に対して

$$f(c) = k \quad (a < c < b)$$

を満たす点 c が少なくとも一つ存在する．

特に，$f(a)$ と $f(b)$ とが異符号 $(f(a)f(b) < 0)$ のとき，$k = 0$ として，

$$f(x) = 0 \quad (a < x < b)$$

を満たす x，すなわち，方程式 $f(x) = 0$ の実数解 $x = c$ が少なくとも一つ存在する．

【例題 4.1】

方程式 $\cos x = x$ は，区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に実数解をもつことを証明せよ．

✍

問題 4.1　方程式 $x^4 - 5x + 2 = 0$ は，区間 $(-1, 1)$ に少なくとも一つの実数解をもつことを証明せよ．

問題 4.2　方程式 $\sin x = x - 1$ は，区間 $(0, \pi)$ に少なくとも一つの実数解をもつことを証明せよ．

以上の定理を用いると，方程式の解の近似値（数値解）を求めることができる．その方法を，§4.2 で紹介する．

◪ 最大値・最小値

定理（最大値・最小値の存在）. 閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ は，この区間で必ず最大値と最小値をもつ．すなわち，区間 $[a, b]$ 内の任意の x について，

$$f(c_1) \leqslant f(x) \leqslant f(c_2)$$

を満たすような c_1 および c_2 が区間 $[a, b]$ に必ず存在する（$f(c_1), f(c_2)$ がそれぞれ最小値，最大値である）．

問題 4.3　次の関数の最大値と最小値を求めよ．

(1)　$y = x^2 - 2x - 3 \ (0 \leqslant x \leqslant 4)$　　(2)　$y = -2x^2 + 4x \ (-2 \leqslant x \leqslant 0)$

4.2　方程式の数値解法

実用上，解くべき方程式が必ずしも手計算によって解くことができるとは限りません（問題集やテストでは手計算で解ける問題しか出題されない）．あるいは，手計算で解くことはできるけれども計算が煩雑で時間がかかる場合に，必ずしも手計算で頑張らなくとも，コンピュータで近似的な解を求めてしまえばそれで十分ということもあります．

ここでは，これまでに学習してきた知識を元手に，そのようなコンピュータで近似的な解を求めるための方法を紹介します．例題として，5 次方程式 $x^5 + x - 1 = 0$ を解くことを考えましょう．

◪　二分法

$f(x) = x^5 + x - 1$ とおくと，

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,,\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

なので，中間値の定理により，方程式 $f(x) = x^5 + x - 1 = 0$ は少なくとも一つ実数解をもつことが分かります（実際は，この方程式は実数解をただ一つだけもつ）．もう少し“当たりをつけて”,

$$f(0) = -1 < 0\,,\quad f(1) = 1 > 0$$

なので，方程式 $f(x) = 0$ は区間 $(0, 1)$ に少なくとも一つ実数解をもつことが分かります．

次に，区間 $[0, 1]$ の中点 $x = 0.5$ について調べてみると，

$$f(0.5) = -0.46875 < 0$$

なので，方程式 $f(x) = 0$ の実数解は区間 $(0.5, 1)$ にあることが分かります．さらに，区間 $[0.5, 1]$ の中点 $x = 0.75$ について調べてみると，

$$f(0.75) = -0.0126953125 < 0$$

より方程式 $f(x) = 0$ の実数解は区間 $(0.75, 1)$ にあり，区間 $[0.75, 1]$ の中点 $x = 0.875$ について調べてみると，

$$f(0.875) = 0.387908935546875 > 0$$

より方程式 $f(x) = 0$ の実数解は区間 $(0.75, 0.875)$ にあり，......

というふうにして，方程式 $f(x) = 0$ の実数解が存在する区間の幅を半分，また半分と小さくしていくと，方程式 $f(x) = 0$ の実数解の近似値を求めることができます．この方法を二分法といい，これをコンピュータで実行するためのコードは，Listing 1 のようになります（計算精度を 10^{-10} としている）．なお，二分法の誤差（真の値との差）の上限は，区間の幅の半分です．

実際に Listing 1 を実行してみると，

```
x =  0.7548776663
```

という結果が表示されます．

Listing 1: 二分法の計算プログラムの例 (C++).

```
#include<cmath>
#include<iostream>
#include<iomanip>
using namespace std;

int main(){
  double xl, xr, xc;
  double fl, fr, fc, ss;

  ss=1.0;

  xl=0.0; xr=1.0;

  while(ss>1.0e-11){
    xc = (xl+xr)/2;
    fl = xl*xl*xl*xl*xl + xl - 1.;
    fr = xr*xr*xr*xr*xr + xr - 1.;
    fc = xc*xc*xc*xc*xc + xc - 1.;

    if(fl*fc<0){
      xr = xc;
    }
    else{
      xl = xc;
    }

    ss = fabs(1-xr/xl);
  }

  cout << setprecision(10);
  cout << "x= " << xc << '\n';

  return 0;
}
```

◪ Newton 法

ほかにも，方程式の数値解法として，Newton（ニュートン）法と呼ばれる方法もよく知られています．これは，曲線 $y = f(x)$ の接線の方程式を利用して，方程式 $f(x) = 0$ の解の近似値を求める方法です．

まず，“解に近い値” x_1 をとり，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x_1, f(x_1))$ における曲線の接線：

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)\,,$$

を引きます．この直線の x 切片を x_2 とすると，

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

が成り立ちます．

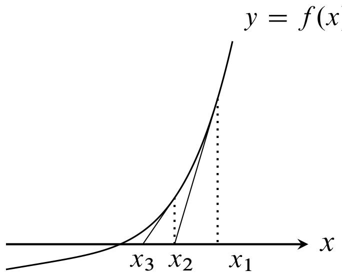
次に，点 $(x_2, f(x_2))$ における曲線の接線の x 切片を x_3 とし，点 $(x_3, f(x_3))$ における曲線の接線の x 切片を x_4 とし，...... というふうにこの操作を繰り返してゆくと，数列

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

が得られます．この数列は

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{$*$}$$

を満たしており，数列 $\{x_n\}$ は初期値 x_1 と漸化式 $(*)$ とから決定することができます．



この数列 $\{x_n\}$ は，初期値を“適切に”選べば，方程式の解の真の値に急速に近づいてゆき，効率よく方程式の解の近似値を求めることができます．この方法を Newton 法といいます．なお，Newton 法の誤差の上限は，$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon$ となったとすると，ε です．

問　Newton 法を用いて 5 次方程式 $x^5 + x - 1 = 0$ の数値解を求めるプログラムを作れ．

問　a を正の定数とする．$f(x) = x^2 - a$ 上の点 $(x_n, f(x_n))$ における接線の x 切片を x_{n+1} とする．このようにして，x_1 から順に $x_2, x_3, \ldots$ を求める．ただし，$x_1 > \sqrt{a}$ とする．

(1)　x_{n+1} を x_n を用いて表せ．

(2)　$x_{n+1} - \sqrt{a} < \dfrac{1}{2}(x_n - \sqrt{a})$ であることを示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．