◪ 「指数関数×三角関数」の積分

※ 準公式　a, b を 0 でない定数とする．

- $$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C \tag{1}$$
- $$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C \tag{2}$$

【例題 1.23】

上の準公式 (1) を導出せよ．

✍

問題 1.26　上の準公式 (2) を導出せよ．

問　上の準公式 (1), (2) について，右辺を微分し，左辺の被積分関数と一致することを確かめよ．

※　準公式 (1), (2) の別導出は，問題解答 [Math-A2_kotae.pdf] を参照．

問題 1.27　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int e^{3x}\cos 4x\,dx$

◪ 漸化式の利用

【例題 1.24】

n を 0 以上の整数とし，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とする．このとき，次の (1), (2) が成り立つことをそれぞれ証明せよ．

(1)　$n \geqq 2$ のとき，

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n\text{ が偶数のとき}) \\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}.$$

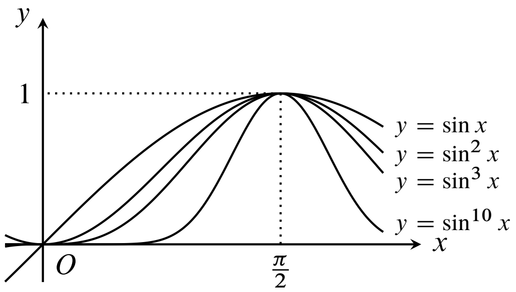
(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = I_n$.

✍

※ $$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{{}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{(n-1)!!}{n!!}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2^{n-1}}{{}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}}$$

とも書ける．ただし，$n!!$ は二重階乗 (double factorial)，${}_n\mathrm{C}_r$ は n 個から r 個取る組合せの総数（二項係数）$\dfrac{n!}{r!(n-r!)}$ である． **問** このことを確認せよ．

※



問題 1.28 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 x\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x\,dx$

問 I_0, I_1, I_2 の値を（上の例題の結果を用いずに）求めよ．

※ $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$ は「Wallis（ウォリス）積分」と呼ばれる．

Wallis 積分から導かれる Wallis の公式や，それを発展させた Stirling（スターリン）の公式：

$$\text{十分大きな } n \text{ に対して，}\qquad n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

は，離散量を連続量で近似する（見積もる）ために，統計分野などでしばしば用いられる．

✎ さまざまな積分計算に関しては，

池谷哲，数 III の積分計算が面白いほどわかる本，KADOKAWA (2016)

が，良い本だったのですが...... いまは絶版になってしまいました．