みなさん，お久しぶりです．— 夏休みはどうでしたか？（私の感想は「短い！」です．）

数学の授業とは関係ないのですが，国際交流室員としての奈須田から，お願いがあります．

✎ 群馬高専では，今年度末の 3 月 16 日（日）〜3 月 23 日（日）にシドニーで短期海外語学研修を実施する予定です．つきましては，参加に関する希望調査を form で行うので，ご回答ください．

さて，後期の「数学 AII」を始める前に，2 点 確認です．

成績評価について　前期「数学 AI」同様，

［成績点 100 点］＝［中間試験 100 点］× 0.4 ＋［定期試験 100 点］× 0.4 ＋［平常点 20 点］

として計算します．平常点は，毎回の課題の提出 $+\alpha$ によって評価されます．

課題提出について　提出期限を，**次の授業がある日の午前 8:30 まで** と変更します．提出方法はこれまでと同様，Teams 上で提出してください．

0　イントロダクション

0.1　微分の復習

関数 $y = f(x)$ の微分 (differential) dy は，

$$dy = \underbrace{f'(x)}_{\text{導関数 (derivative)}}\,dx\ .$$

例 1.　$f(x) = x^2$ の微分．

無視

$$\Delta\left(x^2\right) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = \left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) - x^2 = 2x\Delta x + \cancel{(\Delta x)^2}$$

$$\therefore\quad \boxed{d\left(x^2\right) = 2x\,dx}$$

（別）　$\left(x^2\right)' = 2x$ だから，$d\left(x^2\right) = 2x\,dx$．

例 2.　$f(x) = \sin x$ の微分．

$$\begin{aligned}\Delta(\sin x) &= \sin(x+\Delta x) - \sin x = \sin x\cos\Delta x + \cos x\sin\Delta x - \sin x\\ &= \sin x(\underbrace{\cos\Delta x}_{\approx 1} - 1) + \cos x\underbrace{\sin\Delta x}_{\approx \Delta x}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boxed{d(\sin x) = \cos x\,dx}$$

（別）　$(\sin x)' = \cos x$ だから，$d(\sin x) = \cos x\,dx$．

問題 0.1　次の関数を微分せよ．ただし，c, α は定数とする．　☞ 微分公式を復習しておくこと．

(1)　$y = c$　(2)　$y = x^\alpha$　(3)　$y = \cos x$　(4)　$y = e^x$　(5)　$y = \ln|x|$

～微分法の大雑把なまとめ～

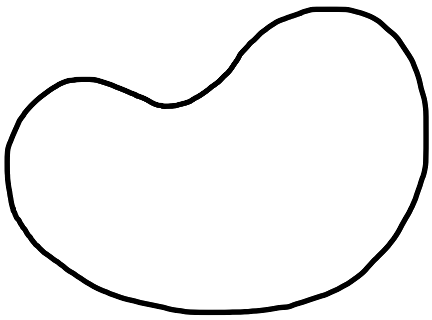
- 微分（differential）とは，微小な変化量のこと．
- 微分（differentiation）することの <u>意味</u> は，接線の傾きを求める（1 次近似する）ことで，

  その <u>計算方法</u> は，定義，あるいはそれから導いた諸公式による． ◇

0.2　微分法以前の求積法

◪　水たまりの面積

以下の囲まれた部分の面積を求めるには，どうしたら良いだろうか？
※ ここでは，そもそも面積（あるいは体積）とは何か？ という議論には立ち入らない．



- 面積 1（＝基準）のタイルを何枚分かを数える
- いくつかの長方形に分ける
-

  ⋮

重要なアイデア：　細かく分けて，足し合わせる！

◪　四角錐の体積

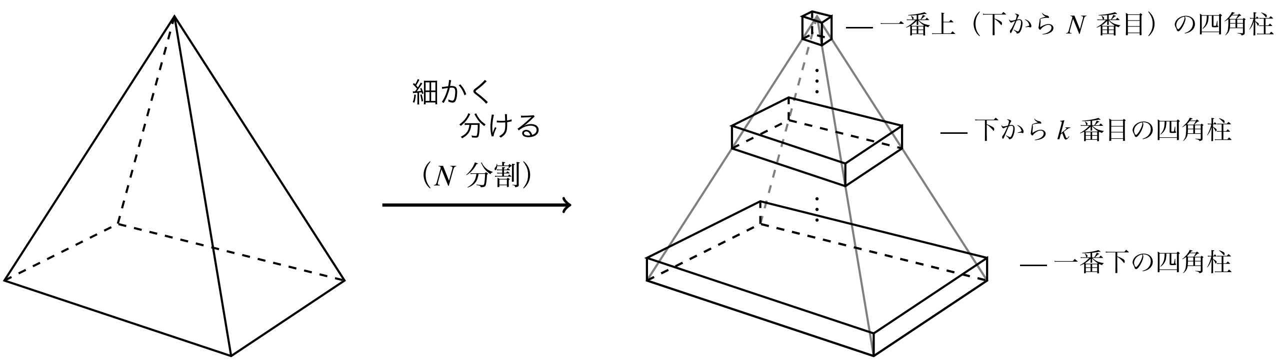
底面積 a，高さ h の四角錐の体積 V が，$V = \dfrac{1}{3}ah$ で求められることは，小学校で学習した．では，この公式はどのようにして導かれたのだろうか？ あるいは，なぜこの式が成り立つのだろうか？

— ここでは，「水たまりの面積」の考察で得られた教訓（lesson）：細かく分けて，足し合わせる，

というアイデアを使って考えてみよう．

小学校では，四角錐の容器と，これと同じ底面積と高さの直方体の容器とを使って，直方体の容器には四角錐の容器 3 杯分の水が入ることを実験で確かめて納得させられた... 筈．

四角錐を，下図のように，N 個の四角柱に分割して考える．



下から k 番目の四角柱は，底面積が $\left(\dfrac{N-k+1}{N}\right)^2 a$，高さが $\dfrac{h}{N}$ の四角柱で，その体積は

$$\frac{(N-k+1)^2}{N^3}ah$$

である．求めたい四角錐の体積は，この四角柱の体積を，$k=1$（一番下）から $k=N$（一番上）まで足し合わせたものにほぼ等しい．特に，四角柱の高さが“限りなくゼロに近づけば”（分割を細かくする；$N \to \infty$ に対応），その和は求めたい体積に等しくなると考えられる．すなわち，

$$\begin{aligned}
V &\approx \frac{1}{N}ah + \frac{(N-1)^2}{N^3}ah + \frac{(N-2)^2}{N^3}ah + \cdots + \frac{1}{N^3}ah = \sum_{k=1}^{N} \frac{(N-k+1)^2}{N^3}ah \\
&= \frac{ah}{N^3}\sum_{k=1}^{N}(N-k+1)^2 = \frac{ah}{N^3}\sum_{j=1}^{N} j^2 = \frac{ah}{N^3}\cdot\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) \\
&= \frac{1}{3}ah + \frac{1}{2N}ah + \frac{1}{6N^2}ah \quad \to \frac{1}{3}ah \quad (N\to\infty) \qquad\qquad \therefore \quad V = \frac{1}{3}ah\,.
\end{aligned}$$

問題 0.2　（Archimedes（アルキメデス）の方法）

放物線 $y=x^2$ 上に異なる 2 点 $A\,(\alpha,\alpha^2)$, $B\,(\beta,\beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ がある．線分 AB と放物線とが囲む図形を切片 AB と呼び，接線が AB に平行な放物線上の点 P をこの切片の頂点という．このとき

$$\triangle ABP = T_1$$

とする．（$\triangle ABP$ の面積を T_1 とする．）次に，切片 AP, PB の頂点をそれぞれ P_1, P_2 とおき

$$\triangle APP_1 + \triangle PBP_2 = T_2$$

とする．さらに，切片 AP_1, P_1P, PP_2, P_2B の頂点をそれぞれ P_3, P_4, P_5, P_6 とおき

$$\triangle AP_1P_3 + \triangle P_1PP_4 + \triangle PP_2P_5 + \triangle P_2BP_6 = T_3$$

とする．以下同様にして，$T_4, T_5, \ldots, T_n, \ldots$ を定める．

(1)　$T_2 = \dfrac{1}{4}T_1$ であることを示せ．

(2)　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k$ を T_1 を用いて表せ．

(3)　切片 AB の面積 S を α, β を用いて表せ．　　　答：　$S = \dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

～ 積分法の概観 ～

- 積分（integral）とは，微小量を積み上げていくこと.
- 積分する（integration）ことの 意味 は，“面積” を求めることで，　☞ 定積分

  その 計算方法 は，微分計算の逆.　☞ 不定積分 ◇