5　高次導関数

復習：　関数 $y = f(x)$ が区間 I で微分可能であるとき，

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を $f(x)$ の導関数といい，$f'(x)$ のほかに，y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d}{dx}f(x)$ などと表すこともある．さらに，$f'(x)$ も微分可能であるとき，$f'(x)$ の導関数を $f(x)$ の第 2 次導関数といい，$f''(x)$, y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ などと表す．

（復習終わり）

cf.　$f''(x) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$.

問題 5.1　次の関数の第 2 次導関数を求めよ．

(1)　$y = \sqrt[3]{x^2}$ $(x > 0)$　　(2)　$y = (3x+4)^5$　　(3)　$y = xe^x$

定義（高次導関数）．関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が区間 I で微分可能であるとき，$f'(x)$ の導関数を $f(x)$ の第 2 次導関数または 2 階導関数 (second derivative) といい，$f''(x)$ と表す．同様に，$f''(x)$ が微分可能のとき，$f(x)$ の第 3 次導関数（3 階導関数）$f'''(x)$ が定義される．以下帰納的に，$f(x)$ の第 n 次導関数（n 階導関数）$f^{(n)}(x)$ が定義され微分可能のとき，$f^{(n)}(x)$ の導関数として第 $n+1$ 次導関数 $f^{(n+1)}(x)$ が定義される．次数が 2 以上の導関数を高次導関数 (higher-order derivative) という．

n 階導関数は，$f^{(n)}(x)$ のほかに，$y^{(n)}$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ などと表すこともある．

定義（n 回微分可能）．関数 $y = f(x)$ が区間 I で n 次までの導関数が存在するとき，n 回微分可能であるという．さらに，第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ が I で連続のとき，$f(x)$ は I で C^n 級であるという．

※　$f(x)$ が C^0 級であるとは，単に連続であることを表す．
　　$f(x)$ が任意回数微分可能であるとき，C^∞ 級（または無限回微分可能）であるという．

【例題 5.1】

関数 $y = \dfrac{1}{x}$ の第 n 次導関数を求めよ．

✍

問題 5.2　次の関数の第 n 次導関数を求めよ．

(1)　$y = e^{3x}$　　(2)　$y = \dfrac{1}{1-x}$

復習：　$(fg)' = f'g + fg' \quad \cdots\cdots (*)$

さらに，$(fg)'' = (f''g + f'g') + (f'g' + fg'') = f''g + 2f'g' + fg''$,
$(fg)''' = (f'''g + f''g') + 2(f''g' + f'g'') + (f'g'' + fg''') = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$,
と計算できる．

命題（Leibniz（ライプニッツ）の公式）．　f, g が n 回微分可能な関数のとき，

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n)} &= f^{(n)}g + {}_n\mathrm{C}_1 f^{(n-1)}g' + {}_n\mathrm{C}_2 f^{(n-2)}g'' + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r f^{(n-r)}g^{(r)} + \cdots + fg^{(n)} \\
&= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r f^{(n-r)}g^{(r)} .
\end{aligned}
$$

ただし，${}_n\mathrm{C}_r$ は $\dbinom{n}{r}$ とも書かれ，$(a+b)^n$ を展開したときの $a^{n-r}b^r$ の係数（二項係数）である．

cf.　Pascal（パスカル）の三角形．

証明.　数学的帰納法を用いる．$n = 1$ のとき，$(*)$ であり Leibniz の公式は成立する．ここで $n = k$ のときに Leibniz の公式 が成り立つと仮定すると，

$$
(fg)^{(k)} = \sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r f^{(k-r)}g^{(r)}
$$

であり，両辺を x で微分して，

$$
(fg)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r \left[f^{(k-r+1)}g^{(r)} + f^{(k-r)}g^{(r+1)} \right]
$$

を得る．${}_k\mathrm{C}_{r-1} + {}_k\mathrm{C}_r = {}_{k+1}\mathrm{C}_r$ に注意して，この右辺を $g^{(r)}$ に関する和に書き直すと，

$$
\sum_{r=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}g^{(r)}
$$

となる．よって，任意の n に対して Leibniz の公式が成立する．　∎

【例題 5.2】

$y = x^2 \sin x$ の第 3 次導関数を求めよ．

✍

問題 5.3　$y = x^3 \cos x$ の第 4 次導関数を求めよ．

6 曲線の媒介変数表示

6.1 媒介変数表示：イントロダクション

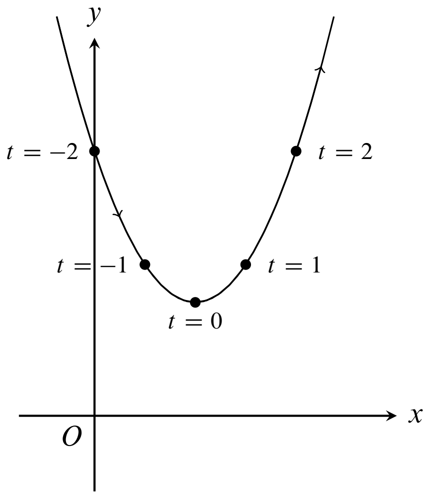
復習： 関数 $y = (x-2)^2 + 3$ のグラフは，$y = x^2$ のグラフを x 軸方向に $+2$，y 軸方向に $+3$ 平行移動した放物線である．

これを，$t = x - 2$ とおいて，次のように考えてみよう．つまり，関数 $y = (x-2)^2 + 3$ のグラフ上の点 P の x 座標と y 座標は，変数 t によって

$$x = t + 2\,,\quad y = t^2 + 3\,,$$

で表される．t の値が変わると，それに対応して x, y の値も変わり，点 P の軌跡は曲線 $y = (x-2)^2+3$ を描く．

t	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x	$\cdots$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
y	$\cdots$	7	4	3	4	7	12	$\cdots$



変数 x, y が，ともに変数 t の関数として

$$x = f(t)\,,\quad y = g(t)\,, \tag{$*$}$$

と表されるとき，それらを座標にもつ点 $P\ (x, y)$ はある曲線を描く．このとき，($*$) をこの曲線の媒介変数表示あるいはパラメータ表示といい，変数 t を媒介変数やパラメータ (parameter) と呼ぶ．

注意. 媒介変数によるある曲線 C の表示は一通りとは限らない．
また，$y = (x-2)^2 + 3$ の例のように，媒介表示された曲線が必ず $y =$［x の式］の形に変形できるわけではない．

復習： 原点 O を中心とする半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ は，一般角 θ を用いて

$$x = r\cos\theta\,,\quad y = r\sin\theta\,,$$

と表される．

【例題 6.1】

$x = t^3 - 2t^2 + 1,\ y = t^2 - t$ で表される曲線の概形をかけ.

✍

問題 6.1　$x = 1 - \dfrac{1}{4}t^2,\ y = \sqrt{t}\ (0 \leqslant t \leqslant 4)$ で表される曲線について，上の例題と同様にして，その概形をかけ.