2　行列式の応用

2.1　行列式と逆行列

◪　余因子行列

n 次の正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して，第 (i,j) 小行列式を D_{ij} と書けば，

$$\tilde{a}_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$$

を第 (i,j) 余因子と呼ぶのであった．ここでは，これを成分にもつ行列 n 次の正方行列 $\widetilde{A}=(\tilde{a}_{ji})$ （$\tilde{a}_{ji}$ を (i,j) 成分とする行列；添字の順序に注意）：

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1}\\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn}\end{pmatrix},$$

を考える．$\widetilde{A}$ は，A の余因子行列 (adjugate matrix) と呼ばれる．$(\tilde{a}_{ij})=\widetilde{A}^{\mathsf{T}}$ のことを余因子行列 (cofactor matrix) と呼ぶ場合もあるので，注意が必要である．

ここで，

$$|A|=a_{i1}\tilde{a}_{i1}+a_{i2}\tilde{a}_{i2}+\cdots+a_{in}\tilde{a}_{in}\qquad \text{（第 } i \text{ 行に関する展開）}$$

と

$$a_{i1}\tilde{a}_{k1}+a_{i2}\tilde{a}_{k2}+\cdots+a_{in}\tilde{a}_{kn}=\begin{vmatrix}\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \leftarrow \text{ 第 } k \text{ 行}.\\ \\ \end{matrix}$$
$$\overset{\text{(iv)}}{=}0$$

であることとを用いると，

$$A\widetilde{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1}\\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A| & 0 & \cdots & 0\\ 0 & |A| & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & |A|\end{pmatrix}=|A|I_n$$

が導かれる．また同様に，列に関する展開を考えることによって，$\widetilde{A}A=|A|I_n$ も成り立つことが分かる．

例.　$n=2$ の場合.　✍
　　$n=3$ の場合.　教科書 pp. 106–107 参照.

◪ 行列式を用いた逆行列の計算方法

性質 (viii) により，

$$A \text{ が正則である} \iff |A| \neq 0$$

であり，このとき

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \tag{$*$}$$

なる逆行列 A^{-1} がただ一つ存在する．

A が正則であるとき，余因子行列の満たす関係式 $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|I$ において，各辺を $|A|$ ($\neq 0$) で割ると，

$$A\left(\frac{1}{|A|}\widetilde{A}\right) = \left(\frac{1}{|A|}\widetilde{A}\right)A = I$$

を得る．($*$) と比較すると，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$$

であることが分かる．

これを用いて，以下の例題を解いてみよう：

【例題 2.1】

次の行列は正則であるかどうか調べよ．正則ならば，逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

✍

問題 2.1 次の行列は正則であるかどうか調べよ．正則ならば，その逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$