【例題 1.5】

不定積分 $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$ を求めよ．

✍

<u>問題 1.7</u>　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cot^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{2+5\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx$

1.3　定積分

◪　定積分の計算

$\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ のとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

であった．$F(b) - F(a)$ のことを $\Big[F(x)\Big]_a^b$ または $F(x)\Big|_a^b$ などと書くことがある．すなわち，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

などである．

例．$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \boxed{\frac{1}{3}}$　　*cf.*　例題 1.1

$\displaystyle\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 = \boxed{\frac{1}{2}}$　　*cf.*　問題 1.1

<u>問題 1.8</u>　次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx$

◪ 定積分の線型性

$\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x)+C,\ \int g(x)\,dx = G(x)+C$ のとき，$\displaystyle\int \big[f(x)+g(x)\big]\,dx = F(x)+G(x)+C$ だから，

$$\begin{aligned}\int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,dx &= \Big[F(x)+G(x)\Big]_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b + \Big[G(x)\Big]_a^b \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

また，$\displaystyle\int kf(x)\,dx = kF(x)+C$ だから，

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)\,dx &= \Big[kF(x)\Big]_a^b = k\Big[F(x)\Big]_a^b \\ &= k\int_a^b f(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

【例題 1.6】

次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 (2x^2+3x)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 (5x^2+3x-4)\,dx$

✍

問題 1.9　次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^2 (5x^3+3x^2-3x-2)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (3\sin x - 2\cos x)\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-2}^2 (e^x+e^{-x})\,dx$

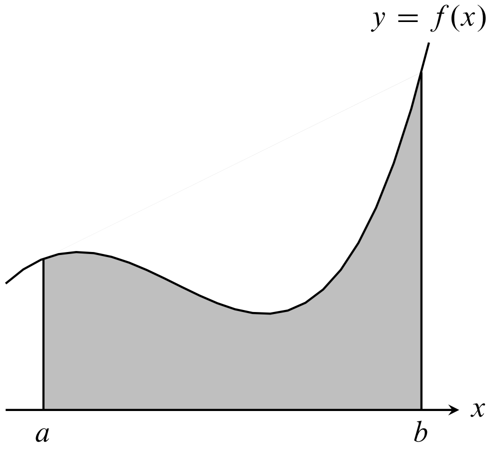
【例題 1.7】

次の定積分の値を求めよ．

$\displaystyle\int_{-1}^1 (2x^3+x^2+4x-3)\,dx$

✍

◪ 定積分と「符号付き面積」



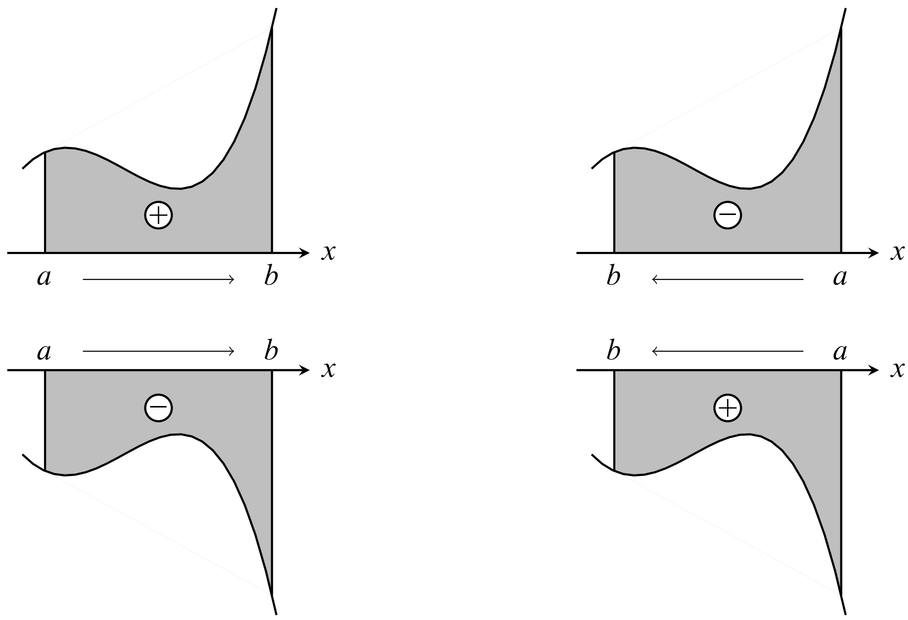
$f(x) \geqslant 0, a \leqslant b$ のとき，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は,

$y = f(x)$ のグラフと x 軸,
及び 2 直線 $x = a, x = b$

とで囲まれた部分の面積を表すのであった.

では，$f(x) < 0$ や $a > b$ のときはどう考えれば良いのだろうか？ あるいは，例題 1.6 (2) のように定積分の値が負になるとはどういうことだろうか？（面積は正の値の筈.）

ここで，これらを説明するために，面積の概念を拡張した「符号付き面積 (signed area)」の概念を導入しよう．符号付き面積とは，絶対値を面積の値として，以下の約束に従って符号を決めたものとする：



例. $y = x$ のグラフと x 軸，直線 $x = \pm 1$ とで囲まれた部分の符号付き面積は，$\pm\dfrac{1}{2}$.

「符号付き面積」を用いると，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は,

$y = f(x)$ のグラフと x 軸，及び 2 直線 $x = a, x = b$ とで囲まれた部分の符号付き面積

である，といえる.

参考：ベクトルの内積と「符号付き長さ」

2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の内積：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

について考える．ただし，θ はベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角である．この右辺を，「$|\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos\theta$」という 3 つの数の積ではなく，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \cos\theta$$

という 2 つの数「$|\vec{a}|$」と「$|\vec{b}| \cos\theta$」の積と見ることにしよう．このとき，

- $|\vec{a}|$ は $\vec{a}$ の大きさ（長さ）であり，
- $|\vec{b}| \cos\theta$ を「$\vec{b}$ の $\vec{a}$ に対する正射影の符号付き長さ」と呼ぶことにする．

符号付き長さは，絶対値を正射影の長さとして，以下の約束に従って符号を決めたものとする．