0　オリエンテーション

みなさん，こんにちは．今年度，「数学 AI」の講義を担当する奈須田です．

居室：管理棟・一般教科棟 3 階 305 号室（奈須田教員室）　メール：y.nasuda@gunma-ct.ac.jp
個人 Web サイト：https://yuta-nasuda.github.io ☞

0.1　この授業について（※シラバスを参照）

概要　この授業（と後期の「数学 AII」）では，数学の主要な分野の一つである解析学のうち，微分積分学 (calculus) を 1 変数関数の範囲に限って講義する．前期には微分法とその応用を，後期には積分法とその応用を扱う．微分積分学は，線型代数学とともに，自然科学・工学の専門的な内容を学ぶための基礎となる数学である．

教科書・参考書

[1] 高遠節夫ら，新微分積分 I 改訂版，大日本図書 (2021).

[2] 高遠節夫ら，新微分積分 I 問題集 改訂版，大日本図書 (2021).

【大学生向け】

[3] 高木貞治，解析概論 改訂第三版 軽装版，岩波書店 (1983).

[4] 杉浦光夫，基礎数学 2　解析入門 I，東京大学出版会 (1980).

[5] 小平邦彦，［軽装版］解析入門 I，岩波書店 (2003).

[6] 黒田成俊，共立講座 21 世紀の数学 第 1 巻 微分積分，共立出版 (2002).

[7] James Stewart, *Calculus: Early Transcendentals*, 6th Edition, Thomson (2008).

[8] 森毅，現代の古典解析 微積分基礎課程，ちくま学芸文庫 (2006).

【高校生向け】

[9] 清史弘，新数学 Plus Elite　数学 I・A ／数学 II・B ／数学 III，駿台文庫 (2016, 2017, 2019).

[10] 宮腰忠，高校数学 ＋α：基礎と論理の物語，共立出版 (2004).

授業の進め方　授業は，板書を中心とした講義形式で行う．ノートをとって復習できるようにしておくこと（配布するプリントは，あくまで授業の補足のためである）．授業内で，適宜，演習の時間も設ける．

予習・復習　予習の必要はない（教科書を読んでおくと授業の理解度が上がるかもしれない）．また復習に関しては，課題や問題集を解くなど演習を積んで講義内容の理解を深めること．何も見ずに教科書や授業の流れを再現する，というのも良い復習の方法である．

課題の提出：　授業後から次の授業前日の 23:59 までに，Teams のクラス内へ．

質問　質問は，随時受け付けています．直接居室に来るか，MS Teams のチャット機能を使う（返信の目安：遅くとも 24 時間以内）など，各自の状況・都合に合わせた方法を選んでください．

0.2　概観

微分積分学（解析学）は，他の数学の分野とは違い，静的ではなく動的 (dynamic) である．つまり，微分積分学は物体の運動（速度の変化）や人口の増減など，量の変化を調べる数学の一分野であるといえる．

- 関数の極限：　関数の振る舞い（どのように変化するか；behavior）を調べる道具立て．
- 微分法：　変化を追う → 接線を引く．
- 積分法：　変化を積み上げる → 面積を求める．

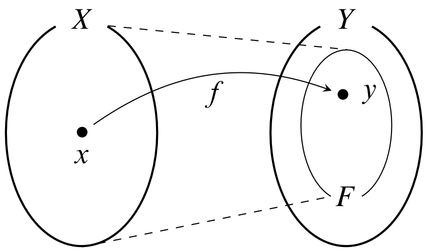
0.3　いろいろな関数

◪　関数とは

定義（関数）．空でない数の集合 X, Y があって，X の任意の要素 x に対して，対応する $y \in Y$ がただ 1 つだけ存在するとき，この対応関係を集合 X から Y への関数（函数；function）と呼び，

$$f : X \to Y \qquad や \qquad y = f(x)$$

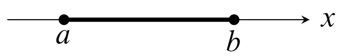
などと表す．また，このとき，X を定義域 (domain)，$y = f(x)$ と書ける y の集合 F を値域 (range) と呼ぶ．



※ 区間 (interval) I．　2 つの実数 a, b $(a < b)$ について，

$(a, b) := \{x | a < x < b\}$　：開区間 ,

$[a, b] := \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$　：閉区間 .



ほかにも，$(a, b]$ や $[a, b)$ もある．また，“無限に延びた”区間：

$$(a, \infty) = \{x | x > a\}, \qquad (-\infty, b) = \{x | x < b\},$$
$$[a, \infty) = \{x | x \geqslant a\}, \qquad (-\infty, b] = \{x | x \leqslant b\}$$

も考える．さらに，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は，

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

とも書ける．

なお，区間 I 内の実数 x を点 x と呼ぶことがある．

◪ 関数の表し方

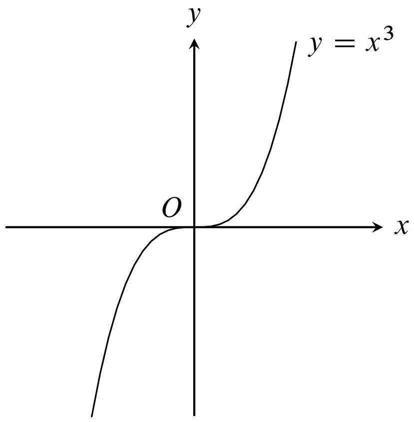
A. 式で書く，　B. グラフにする，　C. 表にまとめる，　D. 言葉で説明する，...

◪ 初等関数

これまでに，以下のような関数を学んできた：

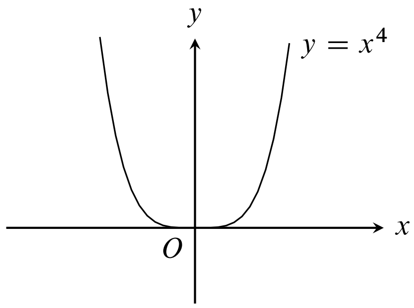
- 冪関数　$f(x) = x^n$.

<u>n が奇数のとき</u>



奇関数 ($f(-x) = -f(x)$) であり，グラフは原点対称.

<u>n が偶数のとき</u>

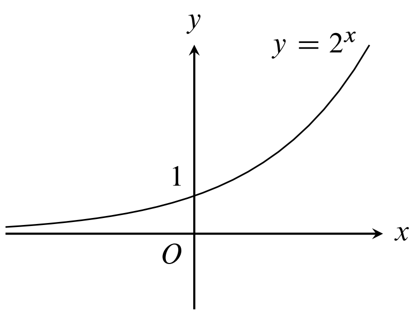


偶関数 ($f(-x) = f(x)$) であり，グラフは y 軸対称.

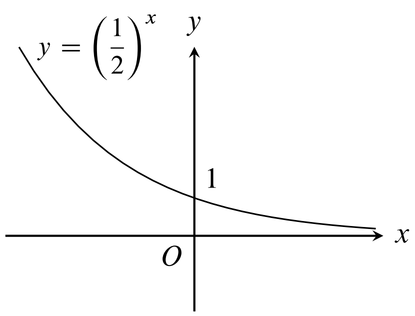
※　$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $(x \geqslant 0)$, $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ $(x \neq 0)$ などである.

- 指数関数　$f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$.

<u>$a > 1$ のとき</u>

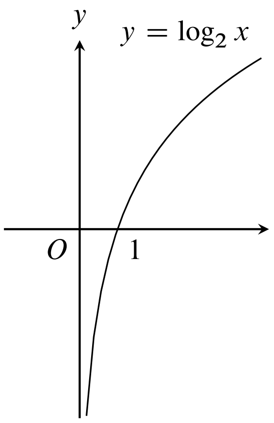


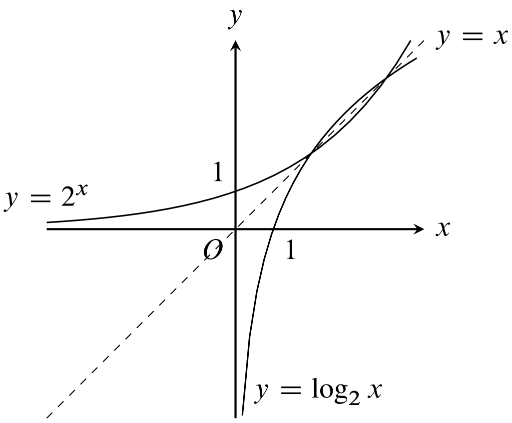
<u>$0 < a < 1$ のとき</u>



※ 指数法則：　$a^p a^q = a^{p+q}$,　$(a^p)^q = a^{pq}$,　$(ab)^p = a^p b^p$.

- 対数関数　$f(x) = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$.

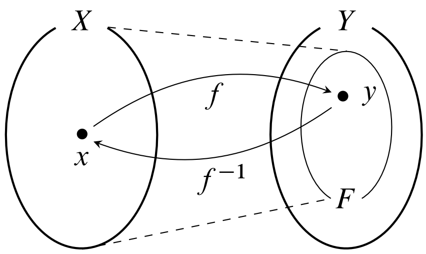




対数関数 $y = \log_a x$ は，指数関数 $y = a^x$ の逆関数である：

$$y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y \ .$$

※ 逆関数　集合 X から Y への関数 $y = f(x)$ が，Y の任意の要素 y に対しても $y = f(x)$ となる $x \in X$ がただ 1 つだけ存在するとき，$y \in Y$ に $x \in X$ を対応させる関数を f の逆関数 (inverse function) と呼び，f^{-1} などと表す．



※　$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$，　$\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$，　$\log_a x^p = p \log_a x$,

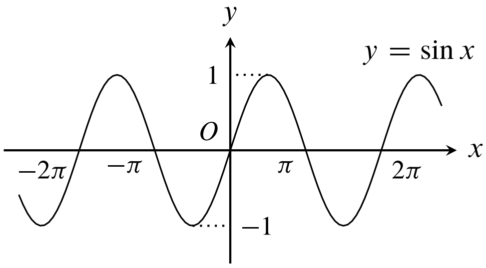
　$\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$ （対数関数の底の変換）.

※ 指数関数の底の変換：　$a^p = \left(b^{\log_b a}\right)^p = b^{p \log_b a}$.

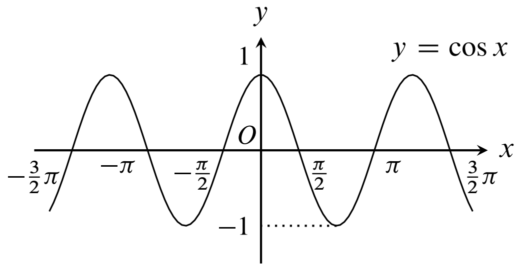
問題 0.1　2 は 3 の何乗か？

- 三角関数

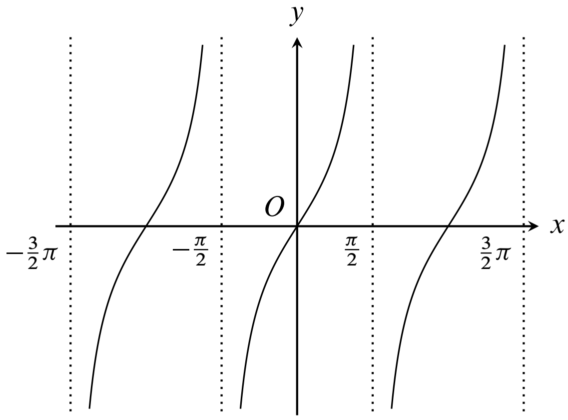
$f(x) = \sin x$ （周期 2π，奇関数）



$f(x) = \cos x$ （周期 2π，偶関数）



$f(x) = \tan x$ （周期 π，奇関数）



ほかにも，

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{［セカント］},$$
$$f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x} \quad \text{［コセカント］},$$
$$f(x) = \cot x = \frac{1}{\tan x} \quad \text{［コタンジェント］}$$

を用いることもある．

以上に加えて，今後，

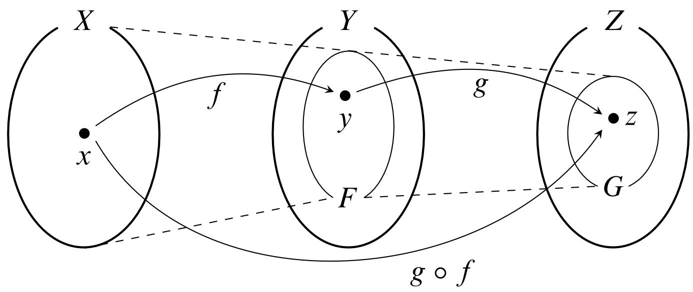
- 逆三角関数 $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \arctan x$ など
- 双曲線関数 $f(x) = \sinh x$, $f(x) = \cosh x$, $f(x) = \tanh x$ などとその逆関数（逆双曲線関数）

なども学習する．

さらに，これらの関数を（有限回）“合成”して得られる関数も考える：

- $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ （定義域に注意）.
- 合成関数

  定義（合成関数）**.** 集合 X から Y への関数 $y=f(x)$ と Y から Z への関数 $z=g(y)$ が与えられたとき，x に z を対応させる関数 $z=g(f(x))$ を関数 f と g の合成関数 (composite function) と呼び，$g\circ f$ などと書く．



  例 1. $f(x)=x^2+1, g(y)=\sqrt{y}$ のとき，$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^2+1}$.

  例 2. $y=f(u)=u^5, u=g(x)=ax+b$ のとき，$y=f(ax+b)=(ax+b)^5$.

- 平行移動，スケール変換，対称移動，回転移動.

  問題 0.2 $y=2x^2-4x+5$ のグラフは $y=2x^2$ のグラフをどのように平行移動したものか？

cf. 特殊関数，関数 $f(x)=\begin{cases}1 & （x \text{ は有理数}）\\ 0 & （x \text{ は無理数}）\end{cases}$，…

◪ 確認テスト（点数は成績に影響しません；念のため）

I. 次の式を展開せよ．

(1) $(x+5)^3$　(2) $(x+4)(x^2-4x+16)$　(3) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(4) $(x+y)^5$　(5) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

II. 計算せよ．

(1) 3^4　(2) $(-3)^4$　(3) -3^4　(4) 3^{-4}

(5) $\sqrt[4]{16}$　(6) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$　(7) $49^{\frac{1}{2}}$　(8) $8^{\frac{4}{3}}$

(9) 2^0　(10) $2^2\cdot 2^3$　(11) $(2^2)^3$　(12) 2^{10}

III. 計算せよ．

(1) $\log_3 27$　(2) $\log_4 8$　(3) $\log_2 1$　(4) $\log_{10} 10000$

(5) $\log_3 \dfrac{1}{81}$　(6) $\log_{\sqrt{2}} 8$　(7) $\log_2 9\cdot\log_3 5\cdot\log_{25} 8$

IV. 次の値を求めよ（(8) は式を簡単にせよ）．

(1) $\sin\dfrac{\pi}{6}$　(2) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$　(3) $\sin\dfrac{5}{6}\pi$　(4) $\sin\dfrac{7}{6}\pi$

(5) $\sin\dfrac{\pi}{12}$　(6) $\cos\dfrac{\pi}{12}$　(7) $\tan\dfrac{\pi}{12}$　(8) $1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}$

V.

1 次関数 $y=ax+b$ において，a,b はそれぞれグラフの傾きと y 切片を表す．では，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ において，a,b,c はそれぞれ何を表すか？ また，$a+b+c, a-b+c, b^2-4ac$ はそれぞれ何を表すか？

問　微分法の知識は仮定せずに，$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ のグラフの $x=t$ における接線の方程式を求めよ．