◪ 三角関数を含む関数の積分

復習： 三角関数の諸公式（一部；次数下げ）

倍角公式　$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$，$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$，$\sin x\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$

積→和公式　$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\bigl[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\bigr]$，

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\bigl[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\bigr]$，$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\bigl[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\bigr]$

問　これらを導出せよ．　（復習終わり）

【例題 1.19】

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin 5x\cos 4x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

考え方　(1) $\displaystyle\int \boxed{\cos^2 x}\,dx$

$1-\sin^2 x$，三角関数の 2 次式，……

(2) $\displaystyle\int \boxed{\sin 5x\cos 4x}\,dx$

sin と cos の積（三角関数の 2 次式），$5x \neq 4x$，……

(3) $\displaystyle\int \boxed{\frac{1}{\sin x}}\,dx$

$(\sin x)^{-1} = \operatorname{cosec} x$，$\sin x = u$?，1 と $\dfrac{1}{\sin x}$ の積，……

★ $f(\cos x)\sin x$，$f(\sin x)\cos x$，$\dfrac{f(\tan x)}{\cos^2 x}$ の形を作る ⇒ 置換積分．

✍

問題 1.22　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cos 3x\sin 2x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos 4x\cos 3x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \sin 2x\sin 5x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

◪ 無理関数の積分

※ 準公式

- $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) + C \qquad (a > 0) \tag{1}$$
- $$\int \sqrt{x^2 + A}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + A} + A \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| \right) + C \qquad (A \neq 0) \tag{2}$$

【例題 1.20】

上の準公式 (1) を導出せよ．

✍

問題 1.23　上の準公式 (2) を導出せよ．

問　上の準公式 (1), (2) について，右辺を微分し，左辺の被積分関数と一致することを確かめよ．

【例題 1.21】

定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ の値を求めよ．ただし，a は正の定数とする．

✍

問題 1.24　次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

【例題 1.22】

定積分 $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{3 + 2x - x^2}\, dx$ の値を求めよ．

✍

問題 1.25　次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{x^2 - 4x + 5}\, dx$

※　**置換積分法の variation**（バリエーション）　　以下，不定積分について記述するが，定積分の場合も同様である．

<u>*Var. 1*</u>　$\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$　（$x = g(t)$ とおいた.）

※　$\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$ より，$dx = g'(t)\,dt$.

※　置換積分法の公式で，第 2 辺から第 1 辺に変形した，と考えればよい.

例 1.　$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$　（$x = 2\sin\theta$ とおいた.）

$$= \int \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta = \int d\theta = \theta + C = \boxed{\sin^{-1}\frac{x}{2} + C}$$

☞　例題 1.4 (1)

例 2.　$\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{1}{4+4\tan^2\theta}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta$　（$x = 2\tan\theta$ とおいた.）

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int d\theta = \frac{1}{2}\theta + C = \boxed{\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C}$$

例 3.　$\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (t^2-1)t\cdot 2t\,dt$　（$\sqrt{x+1} = t$　$\therefore\ x = t^2 - 1$ $(t \geqslant 0)$ とおいた.）

$$= \int (2t^3 - 2t^2)\,dt = \frac{1}{2}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + C = \boxed{\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C}$$

cf.　$x + 1 = t$ とおいてもよい.

※　うまい変数変換によって，「$f(g(t))\cdot g'(t)$」の不定積分が簡単にわかるようになる場合がある.
$\longrightarrow$　どういう場合にうまくいくかは，上の例のような「定石」を学んで覚えていくしかない.

<u>*Var. 2*</u>　$\displaystyle\int f(g(x))\,dx = \int f(u)\frac{1}{g'(x)}\,du$　（$u = g(x)$ とおいた.）

$$= \int f(u)\frac{1}{\frac{du}{dx}}\,du = \int f(u)\frac{dx}{du}\,du$$

例 1.　$\displaystyle\int (4x+3)^5\,dx = \int u^5\cdot\frac{1}{4}\,du$　（$u = 4x + 3$ とおいた.）　☞　例題 1.11 (2)

$$= \frac{1}{4}\int u^5\,du = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}u^6 + C = \boxed{\frac{1}{24}(4x+3)^6 + C}$$

例 2.　$\displaystyle\int \tan^2 x\,dx = \int u^2\cos^2 x\,du$　（$u = \tan x$ とおいた.）　☞　例題 1.5

$$= \int \frac{u^2}{1+u^2}\,du = \cdots\ ??$$

※　置換して積分が簡単になるとは限らない.

例 3.　$\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \int u^2\cdot\frac{1}{\cos x}\,du$　（$u = \sin x$ とおいた.）

$$= \int \frac{u^2}{\pm\sqrt{1-u^2}}\,du = \cdots\ ??$$

※　置換して簡単になっていない.

※　置換積分の定石（無理関数）

- $\sqrt{ax+b}$ があれば，$\sqrt{ax+b}=u$ とおく．
- $\sqrt{x^2+A}$ があれば，$x+\sqrt{x^2+A}=t$ とおく．
  $\sqrt{x^2+a^2}$ なら，$x=a\tan\theta$ や，　▶ $\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ の利用．
  $x=a\sinh t$ とおくこともある．　▶ $\sinh^2 t+1=\cosh^2 t$ の利用．
- $\sqrt{a^2-x^2}$ があれば，$x=a\sin\theta$ とおく．　▶ $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ の利用．