1.6 部分積分法：積分計算の技術 ②

◪ 積の微分法の逆演算としての「部分積分法」 — *Integration by Parts*

復習： 積の微分法

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

（復習終わり）

この両辺を積分すると，

$$\int [f(x)g(x)]'\,dx = \int \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)dx$$

$$\therefore \quad f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

よって，以下の部分積分法の公式が得られる：

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

または，（同じことであるが）

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

※ 被積分関数が2つの関数の積で表されるとき，「部分積分法が使えないかな？」と考える．

※ ただし，この公式を適用しても積分計算が完了するわけではない．部分積分法は，$\int f(x)g'(x)\,dx$ を，より簡単な $\int f'(x)g(x)\,dx$ に置き換える手法だと考えるべきである．

【例題 1.13】

不定積分 $\int x\sin x\,dx$ を求めよ．

✍

例. $\int \ln x\,dx =$ ✍

問 $\int \ln(-x)\,dx = ?$

問題 1.16 次の不定積分を求めよ．

(1) $\int xe^x\,dx$

(2) $\int x\cos x\,dx$

(3) $\int x\ln x\,dx$

(4) $\int \dfrac{\ln x}{x^2}\,dx$

【例題 1.14】

不定積分 $\displaystyle\int x^2 e^{2x}\,dx$ を求めよ．

考え方　部分積分法を繰り返し用いる．　　*cf.*　テーブル法 “瞬間部分積分法”

✍

問題 1.17　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2 \cos x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx$

◪ 定積分における部分積分法

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ の計算法を考えよう．

関数 $f(x)g'(x)$ の不定積分が $\displaystyle f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$ となることから，

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\right]_a^b = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

である．

【例題 1.15】

次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x\,dx$

✍

問題 1.18　次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$