◪ 部分積分法 vs. 置換積分法 — どっちを使う？

部分積分法を使うか置換積分法を使うか，それが問題だ．

【例題 1.16】

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x(2x+3)^5\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx$

考え方 (1) $\displaystyle\int \boxed{x(2x+3)^5}\,dx$

x と $(2x+3)^5$ の積，$2x+3=u$？，x の 6 次式，……

(2) $\displaystyle\int \boxed{\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}}\,dx$

x^2 と $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ の積，$x-1=u$？，$\sqrt{x-1}=u$？，……

✍

問題 1.19 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx$

(3) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$ (4) $\displaystyle\int 2x(2x-1)^7\,dx$

1.7 さまざまな積分計算

ここでは，さまざまな積分計算の手法を，被積分関数の型に着目しながら紹介してゆく．

◪ 多項式の割り算 → 積分計算

復習： 多項式の割り算

例. $(4x^2+8x+5)\div(2x+3)=\dfrac{4x^2+8x+5}{2x+3}=2x+1+\dfrac{2}{2x+3}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x \quad +1 \\ \hline
2x+3\,\big) & 4x^2+8x+5 \\
 & 4x^2+6x \\ \hline
 & \qquad 2x+5 \\
 & \qquad 2x+3 \\ \hline
 & \qquad\quad 2
\end{array}
$$

（復習終わり）

【例題 1.17】

不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^3}{x-1}\,dx$ を求めよ．

考え方 $\displaystyle\int \boxed{\frac{x^3}{x-1}}\,dx$

分数関数，$\dfrac{(\text{高次})}{(\text{低次})}$，$x^3$ と $\dfrac{1}{x-1}$ の積，$x-1=u$？，……

✍

問題 1.20　不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x+1}\,dx$ を求めよ．

◪ 部分分数分解 ➔ 積分計算

復習：　部分分数分解（≒ 通分の逆）　　例. $\dfrac{-1}{x+2}+\dfrac{2}{x-1} \overset{\text{通分}}{\underset{\text{部分分数分解}}{=}} \dfrac{x+5}{(x+2)(x-1)}$

（復習終わり）

【例題 1.18】

不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx$ を求めよ．

考え方 $\displaystyle\int \boxed{\frac{x}{(x+1)(x+2)}}\,dx$

分数関数，$\dfrac{(\text{低次})}{(\text{高次})}$，$x$ と $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ の積，……

✍

問題 1.21　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{4x+1}{(x-2)(x+1)}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+1)}$　（ヒント：$\dfrac{1}{x^2(x+1)}=\dfrac{ax+b}{x^2}+\dfrac{c}{x+1}$ の型に部分分数分解できる．）

※ 準公式　$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \qquad (a>0)$　　問　これを導出せよ．

例題 別解

[1.16 (1)]　気合いで展開！

（与式）

$$
\begin{aligned}
&= \int (32x^6 + 240x^5 + 720x^4 \\
&\qquad + 1080x^3 + 810x^2 + 243x)\,dx \\
&= \frac{32}{7}x^7 + \frac{240}{6}x^6 + \frac{720}{5}x^5 \\
&\qquad + \frac{1080}{4}x^4 + \frac{810}{3}x^3 + \frac{243}{2}x^2 + C \\
&= \frac{32}{7}x^7 + 40x^6 + 144x^5 \\
&\qquad + 270x^4 + 270x^3 + \frac{243}{2}x^2 + C
\end{aligned}
$$

[1.16 (2)]　$x-1=u$ とおく

$u = x-1$ とおくと，$du = dx$ であるから，

（与式）

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}\,du \\
&= \int \left(u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}\right) du \\
&= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{4}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1} + C
\end{aligned}
$$

部分積分・置換積分混合型（どっちも使う）

$$
(\text{与式}) = \cdots = 2x^2\sqrt{x-1} - 4\int x\sqrt{x-1}\,dx
$$

ここで，$u = x-1$ とおくと，

（与式）

$$
\begin{aligned}
&= 2x^2\sqrt{x-1} - 4\int (u+1)\sqrt{u}\,du \\
&= 2x^2\sqrt{x-1} - 4\int (u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}})\,du \\
&= 2x^2\sqrt{x-1} - \frac{8}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\
&= 2x^2\sqrt{x-1} - \frac{8}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C \\
&= 2x^2\sqrt{x-1} - \frac{8}{5}(x^2-2x+1)\sqrt{x-1} \\
&\qquad - \frac{8}{3}(x-1)\sqrt{(x-1)} + C \\
&= \left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{8}{15}x + \frac{16}{15}\right)\sqrt{(x-1)} + C \\
&= \frac{2}{15}(3x^2+4x+8)\sqrt{(x-1)} + C
\end{aligned}
$$

[1.17]　$x-1=u$ とおく

$u = x-1$ とおくと，$du = dx$ であるから，

（与式）

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{(u+1)^3}{u}\,du \\
&= \int \frac{u^3+3u^2+3u+1}{u}\,du \\
&= \int \left(u^2 + 3u + 3 + \frac{1}{u}\right) du \\
&= \frac{1}{3}u^3 + \frac{3}{2}u^2 + 3u + \ln|u| + C \\
&= \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{3}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + \ln|x-1| + C
\end{aligned}
$$

[1.18]　部分積分をどうしても使いたいなら……

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx \\
&= \ln|x+1| - \ln|x+2| + C
\end{aligned}
$$

である．よって，

（与式）

$$
\begin{aligned}
&= \int x \cdot \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx \\
&= x\big(\ln|x+1| - \ln|x+2|\big) \\
&\qquad - \int (\ln|x+1| - \ln|x+2|)\,dx \\
&= x\big(\ln|x+1| - \ln|x+2|\big) \\
&\qquad - \big[(x+1)\ln|x+1| - (x+1)\big] \\
&\qquad + \big[(x+2)\ln|x+2| - (x+2)\big] + C \\
&= -\ln(x+1) + 2\ln(x+2) + C \\
&= \ln\frac{(x+2)^2}{|x+1|} + C
\end{aligned}
$$

※ ほかにも計算の方針はいろいろあると思います．
自分が思い付いた方法を試してみてください．