1　行列式の定義と性質

1.1　2 次の場合：導入

◪　定義

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式 $\det A$ は，$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ である．

◪　性質

行列式 $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ のもつ性質を具体的に示してゆく．なお，以下の性質は，一般に n 次正方行列の行列式に対しても同様に成り立つ（成り立つように定義を拡張する）．

(i) 単位行列の行列式の値は 1 である．

(ii) 2 つの行を交換すると行列式の符号が変わる．

(iii) 行列式は，各行について線型性をもつ．

  (a) 1 つの行の各成分が 2 数の和として表されているとき，この行列式は 2 つの行列式の和として表すことができる．

  (b) 1 つの行のすべてに共通な因数は，行列式の因数としてくくり出すことができる．

※ 以上の 3 つが特に重要な性質である．以下の 7 つの性質は，これら 3 つを用いて示すことができる．

(iv) 2 つの行が等しい行列式の値は 0 である．

(v) 1 つの行の各成分に同一の数を掛けて他の行に加えても，行列式の値は変わらない．

(vi) 1 つの行のすべての成分が 0 のとき，行列式の値は 0 である．

(vii) 三角行列の行列式は，すべての対角成分の積である．

(viii) 正則でない行列の行列式の値は 0 であり，正則な行列の行列式の値は 0 でない．

(ix) 2 つの行列の積 AB の行列式は，2 つの行列式 $|A|, |B|$ の積である．

(x) A の転置行列 A^{T} の行列式は A の行列式に等しい．

※　(ii)–(vi) において，「行」を「列」に置き換えても成り立つ．

問　このことを確認せよ．

問　以上の性質 (i)–(x) から，逆に行列式の定義式 $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ を導け．

性質 (ix) の確認． $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ とする．

$$
\begin{aligned}
|AB| &= \begin{vmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{vmatrix}\\
&\overset{\text{(iii-a)}}{=} \begin{vmatrix}a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{vmatrix}\\
&\overset{\text{(iii-a)}}{=} \begin{vmatrix}a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}\\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}\\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22}\\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22}\end{vmatrix}\\
&\overset{\text{(iii-b)}}{=} a_{11}\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12}\end{vmatrix} + a_{11}\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22}\end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix}b_{21} & b_{22}\\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12}\end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix}b_{21} & b_{22}\\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22}\end{vmatrix}\\
&\overset{\text{(iii-b)}}{=} a_{11}a_{21}\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{11} & b_{12}\end{vmatrix} + a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix} + a_{12}a_{21}\begin{vmatrix}b_{21} & b_{22}\\ b_{11} & b_{12}\end{vmatrix} + a_{12}a_{22}\begin{vmatrix}b_{21} & b_{22}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}\\
&\overset{\text{(ii),(vi)}}{=} a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix} - a_{12}a_{21}\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix} = |A||B| \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

性質 (x) の確認． $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ $(a_{11}\neq 0)$ とすると，

$$
A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}\end{pmatrix} \qquad (= LU \text{ とおく})
$$

と分解できる． $A^\top = U^\top L^\top$ であり，

$$
|A^\top| = |U^\top L^\top| \overset{\text{(ix)}}{=} |U^\top||L^\top| \overset{\text{(vii)}}{=} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\cdot 1 = |A| \qquad \blacksquare
$$

1.2 3 次の場合

3 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ の行列式 $\det A$ は，

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\
&= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

と定義される．

問　この定義が，(i)–(x) の性質を満たしていることを確認せよ．

問　性質 (i)–(x) から，逆に 3 次の場合の行列式の定義式を導け．

問題 1.1　次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -7 \end{vmatrix}$

1.3　一般（n 次）の場合

◪　性質

すでに述べたように，p. 4 で挙げた行列式の性質は，一般に n 次の正方行列の行列式に対しても成り立つ（そのように定義を拡張する）．

これらの性質を用いることで，（行列式の定義はまだ与えられていないが）一般に n 次の場合の行列式についても，その値を求めることができる．

【例題 1.1】

行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

✍

問題 1.2　次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

※　次の関係式を覚えておくと便利である：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$