1.3 一般（n 次）の場合（続き）

◪ 定義

n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式 $\det A$ は,

$$\det A = \sum_{P} \varepsilon_P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

と定義される．ここで,

$$\varepsilon_P = \begin{cases} +1 & (P \text{ が偶順列のとき}) \\ -1 & (P \text{ が奇順列のとき}) \end{cases}$$

である．

問 $n \geqslant 4$ の場合には，Sarrus の方法は使えない．このことを，$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ を例に確かめよ．

◪ 順列

$n = 3$ の場合の行列式の定義を見ると,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} ,$$

次のことに気が付く：

- 各項を見ると，各行から 1 つずつ数を選びそれらを掛けたものになっている．
- 行の添字を $(1, 2, 3)$ の順に固定したとき，列の添字は

  $$(1, 2, 3) ,\ (2, 3, 1) ,\ (3, 1, 2) ,\ (1, 3, 2) ,\ (2, 1, 3) ,\ (3, 2, 1)$$

  となっており，これらは 3 数 $1, 2, 3$ 全部を 1 列に並べたもの＝順列 (permutation) で，その総数は $3! = 6$ 通りである．
- さらに,

  $$\begin{array}{ll} (1, 2, 3) ,\ (2, 3, 1) ,\ (3, 1, 2) & \text{のとき符号は } +, \\ (1, 3, 2) ,\ (2, 1, 3) ,\ (3, 2, 1) & \text{のとき符号は } - \end{array}$$

  となっている．

1 から n までの n 個の異なる自然数があるとき，これら全部を並べてできる順列を

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

と表す．このような順列は, 全部で $n!$ 通りある．そのうち小さい方から順に並んでいる順列 $(1, 2, \ldots, n)$ を基本順列と呼ぶことがある．

ある順列 $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ に,

$$\text{その順列の中の 2 数を交換する} \qquad (*)$$

という操作を何回か施して，基本順列に変形するとき，操作 $(*)$ の回数の偶奇は，変形の仕方によらず一定となる．操作 $(*)$ の回数が偶数の場合に P を偶順列，奇数の場合に P を奇順列という．

【例題 1.2】

3 数 $1, 2, 3$ 全部を並べてできるすべての順列について，偶順列か奇順列かを調べよ．

✍

問題 1.3　次の順列について，偶順列か奇順列かを調べよ．

(1)　$(3, 1, 4, 2)$　　(2)　$(5, 3, 4, 1, 2)$

【例題 1.3】

次の行列式の値を定義に従って求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

✍

問題 1.4　次の行列式の値を定義に従って求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

【例題 1.4】

次の等式を証明せよ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

✍

問題 1.5　次の行列式の値を求めよ.　※ それぞれ，問題 1.1 (3)，問題 1.2 (1) と同じ問題.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -7 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{vmatrix}$

問題 1.6　一般の n 次の場合について，性質 (i)–(x) を証明せよ.

《前期中間試験の範囲，終了......？？》