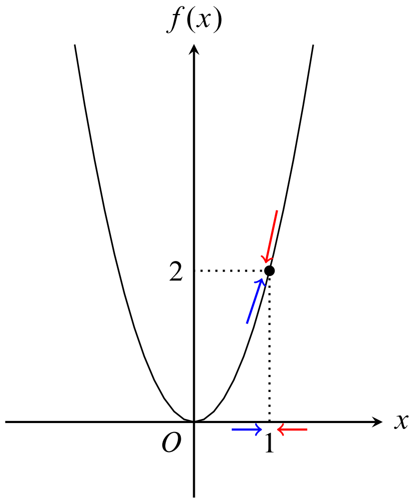
1　関数の極限

cf.　数列の極限

1.1　極限とは

◪　極限のイメージ

例 1.　$f(x) = 2x^2$

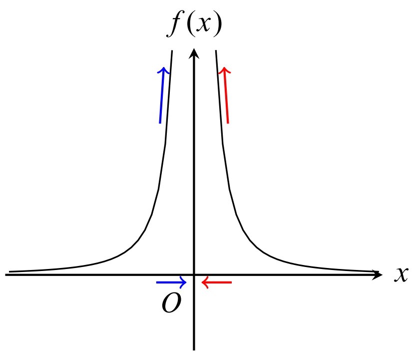


x が，1 とは異なる値をとりながら，
1 に限りなく近づいていく（近づき方は自由）.

↓

$f(x)$ の値は，2 に限りなく近づいていく.

例 2.　$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

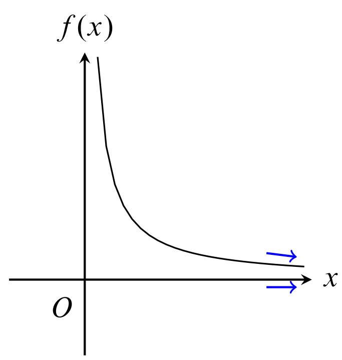


x が，0 とは異なる値をとりながら，
0 に限りなく近づいていく（近づき方は自由）.

↓

$f(x)$ の値は，限りなく大きくなっていく.

例 3.　$f(x) = \dfrac{1}{x}$



x の値が，限りなく大きくなっていく.

↓

$f(x)$ の値は，0 に限りなく近づいていく.

◪ 定義（2 年生向け） *cf.* ε-δ 論法

定義（関数の極限）．関数 $f(x)$ において，x が定数 a とは異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，その近づき方によらず，$f(x)$ の値が一定値 α に限りなく近づくならば，x が a に近づくとき $f(x)$ は α に収束するといい，α を極限値という．これを，

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \alpha \quad (x \to a)$$

などと表す．

また，$x \to a$ のとき，関数 $f(x)$ の値が（負でその絶対値が）限りなく大きくなるならば，$x \to a$ のとき $f(x)$ は正（負）の無限大に発散する，あるいは $f(x)$ の極限は $\pm\infty$ であるといい，

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \pm\infty \quad (x \to a)$$

と表す．

同様にして，$x \to \pm\infty$ のときの極限も考える．

問題 1.1　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2} x^4$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} 3^x$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x$

定義（片側極限）．関数 $f(x)$ において，x が定数 a より大きい値をとりながら a に限りなく近づくときの極限を

$$\lim_{x\to a+0} f(x)\,, \quad \lim_{x\to a^+} f(x)\,, \quad \lim_{x\searrow a} f(x)\,,$$

などと表し，右側極限と呼ぶ．同様に，x が定数 a より小さい値をとりながら a に限りなく近づくときの極限は

$$\lim_{x\to a-0} f(x)\,, \quad \lim_{x\to a^-} f(x)\,, \quad \lim_{x\nearrow a} f(x)\,,$$

などと表され，左側極限と呼ばれる．特に $a = 0$ のとき，$x \to 0 \pm 0$ は $x \to \pm 0$ と略記される．

次の定理も重要である：

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha \iff \lim_{x\to a} f(x) = \alpha\,.$$

なお，極限 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ が存在しなくても，2 つの片側極限が存在する場合もある．

◪ 性質

関数 $f(x), g(x)$ について，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x)$ が存在するとき，次の性質が成り立つ：

(i) $\displaystyle\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$　（複合同順）

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$　（c は定数）

（(i), (ii)：線型性）

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)}{\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)}$　（$g(x) \neq 0,\ \displaystyle\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$）

1.2　極限の計算

【例題 1.1】

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2+x)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2x+1)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+1}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to 2} 4$

✍

問題 1.2　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+5x}{5x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+5x+2}{x^2+3x+2}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^4-1}{x+1}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{2x+1}$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{x^2+3x+1}$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$　(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$　(12) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$

関数の極限について，さらに次のことが成り立つ：

定理（関数の極限と大小関係）．関数 $f(x), g(x)$ について，$x=a$ の近くで $f(x)\leqslant g(x)$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x)$ が存在すれば，

$$\lim_{x\to a} f(x)\leqslant \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

さらに，$x=a$ の近くで $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ であり，かつ $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$ ならば，

$$\lim_{x\to a} g(x)=\alpha$$

である（はさみうちの原理）．

また，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ のとき，十分大きい x で $f(x)\leqslant g(x)$ ならば，$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ である．

1.3 さまざまな関数の極限

◪ 冪関数の極限

- $n > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n = \infty.$

  $n = 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n = 1.$

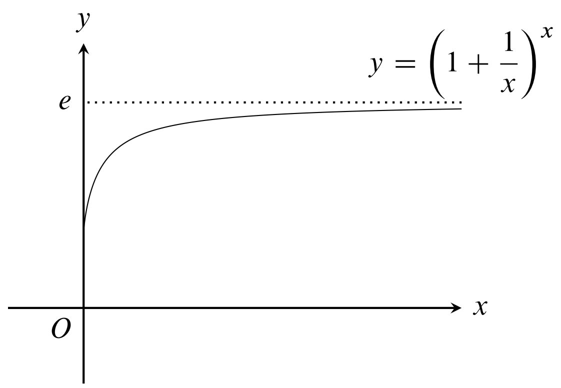
  $n < 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n = 0.$

◪ 指数関数，対数関数がらみの極限

- $a > 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty$.

  $0 < a < 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+0} \log_a x = \infty$.

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ （Napier（ネイピア）数の定義）



極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ は収束し，その極限値は

$$e = 2.718281828459\cdots \quad \text{（無理数）}$$

であることが知られている．

問 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ が収束することを示せ．

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

※ $\log_e x$ を $\ln x$ と書く．

問 これらの公式を示せ．

問題 1.3 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ (2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1-2h)^{\frac{1}{h}}$

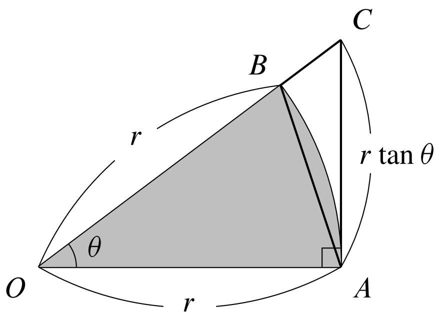
◪ 三角関数がらみの極限

- $\theta \to \infty$ のとき，$\sin\theta, \cos\theta$ の極限は存在しない．
  また，$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} \tan\theta = \infty$，$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0} \tan\theta = -\infty$ であり，$\theta \to \dfrac{\pi}{2}$ のときの $\tan\theta$ の極限も存在しない．

- $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

  ∵) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ として，右図のように O を中心として，半径が r，中心角が θ の扇形 OAB を考える．直線 OA の点 A を通る垂線と直線 OB との交点を C として，$\triangle OAB$, 扇形 OAB, $\triangle OAC$ の面積について，以下の不等式が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}r^2\sin\theta < \frac{1}{2}r^2\theta < \frac{1}{2}r^2\tan\theta \\
\Longleftrightarrow\quad & \sin\theta < \theta < \tan\theta \\
\Longleftrightarrow\quad & 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta} \\
\Longleftrightarrow\quad & \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1\,.
\end{aligned}
$$



  この不等式は，$\theta \to -\theta$ としても成り立つ．よって，

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta \leqslant \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \leqslant 1\,.$$

  ここで $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ であるから，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を得る． ■

- $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta} = 1$

  問　これらの公式を示せ．

【例題 1.2】

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\theta}$　　(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos 2\theta}{\theta^2}$

✍

問題 1.4　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 5\theta}{3\theta}$　　(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin 2\theta}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}$

◪ 発散速度

定義（高位の無限大）． $\lim_{x\to a} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a} g(x)=\infty$ であり，かつ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0$$

のとき，$g(x)\ll f(x),\ g(x)=o(f(x))$ などと書き，（$x=a$ において）$f(x)$ は $g(x)$ より高位の無限大であるという．

$x\to\infty$ において，

$$\cdots\ll\log_3 x\ll\ln x\ll\log_2 x\ll\cdots\ll\sqrt{x}\ll x\ll x^2\ll x^3\ll\cdots$$
$$\ll 2^x\ll e^x\ll 3^x\ll\cdots(\ll x!\cdots)\ll x^x\ll\cdots$$

である．

問　次の関係式を示せ．ただし，$a>1,\ p>0$ とし，n は正の整数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^p}=0$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{a^x}=0$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

$$\log_a x\ll x^p\ll a^x\ll x!\ll x^x$$