### 1.5　行列式の計算（まとめ）

当面の目標は正しく行列式の計算ができることなので，ここで行列式計算の方針をまとめておく．

（ • 定義に従って計算する．）

- 2, 3 次なら，Sarrus の方法を用いる．
- 行（列）基本変形を施して，
  - 「次数を下げる公式」を用いて，2, 3 次の行列式に帰着させる（Sarrus の方法）．
  - 三角化 → 対角成分の積で計算する．
- 諸性質を使う．

※　あとは，これらを正しく実行できるように，たくさん練習を積んでください．すでに解いたことのある問題を別の方法で解き直してみたり，自分で適当に数字を並べて行列式を作り計算してみたり（この場合，友人らと答えを比べてみるのが良いでしょう）するのも，良い練習になると思います．

【例題 1.6】

次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 0 & 13 \end{vmatrix}$$

✍

※　行列式の次数を下げる一般公式

$$\begin{vmatrix} & A & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & & B & \\ m_{i1} & \cdots & m_{i(j-1)} & m_{ij} & m_{i(j+1)} & \cdots & m_{in} \\ & C & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & & D & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} m_{ij} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} & A & & \begin{matrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{(i-1)j} \end{matrix} & & B & \\ 0 & \cdots & 0 & m_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ & C & & \begin{matrix} m_{(i+1)j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{matrix} & & D & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} m_{ij} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}.$$

## A　トレース（跡；対角和）

この授業（前期分）のイントロダクションとして，次のような話をしました：

> 行列は，大雑把にいえば，縦横に数を並べた数の表です．ある正方行列が与えられたときに，それが $n$ 次であれば，$n^2$ 個の数が並んでいます．この行列を，たった 1 つの数で代表させたい．もちろん，この 1 つの数さえ知っていれば元の行列の全てが分かるということはないけれども，それでもその行列を特徴付けるような—magical な—数を考えることはできないだろうか？ そうして導入されたのが，行列式です．

当然，「行列式以外にも正方行列を特徴付けるような数はないのか？」という疑問をもつ人もいるでしょう．（いくつか）あります．— 今回は，正方行列を特徴付けるもう一つの数に関するお話です．

### ◪ 定義

$n$ 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ について，その対角成分の和：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jj} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \ ,$$

のことをトレース (trace) または跡（せき），対角和，シュプール (Spur) といい，tr $A$ などと表す．

例.　$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d \ ,\quad \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 + 5 + 9 = 15.$

**問**　次のトレースの値を求めよ．

(1) $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$　(2) $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix}$　(3) $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

### ◪ 性質

$A, B$ を $n$ 次の正方行列，$c$ を定数とする．

(i) 線型性.
  (a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}\,A + \mathrm{tr}\,B$
  (b) $\mathrm{tr}(cA) = c\,\mathrm{tr}\,A$

(ii) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

---

**問**　以上の性質を示せ．

**問**　次のことを示せ．ただし，$A, B, C$ は $n$ 次の正方行列だとする．

(1) $\mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}) = \mathrm{tr}\,A$　(2) $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BCA) = \mathrm{tr}(CAB)$