1　積分法

1.1　概観（積分法の考え）

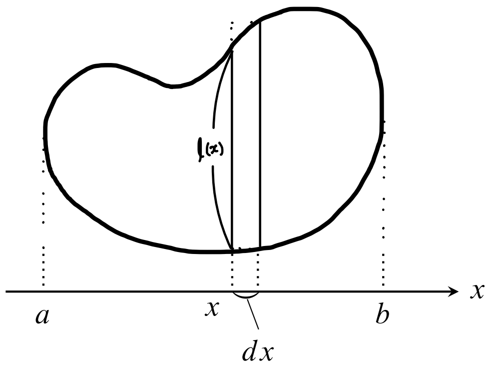
〜積分法の概観〜

- 積分(integral)とは，微小量を積み上げていくこと．　— “細かく分けて，足し合わせる”
- 積分する(integration)ことの 意味 は，“面積”を求めることで，　☞ 定積分

　その 計算方法 は，微分計算の逆．　☞ 不定積分　◇

◪ 例：水たまりの面積

まず初めに，「水たまりの面積」の問題を例に，積分法の定式化を見てゆこう．ここでは，「水たまりの面積」を S とおくことにする．

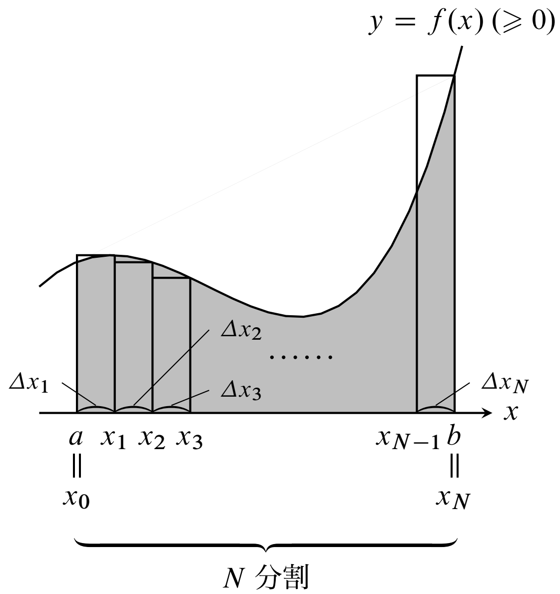


$$S = \left[\begin{array}{l}\text{微小長方形の面積 } \ell(x)\,dx \text{ を} \\ x = a \text{ から } x = b \text{ まで足し合わせる}\end{array}\right]$$

$$= \int_a^b \ell(x)\,dx \qquad \text{と書く．}$$

ここで，$\int$ はインテグラル (integral) や積分記号などと呼ばれ，S を縦に引き伸ばした記号である．

◪ Riemann(リーマン) 和と定積分



左図のように，$y = f(x)$ のグラフと x 軸，直線 $x = a, x = b$ で囲まれる面積を S とする．

また，区間 $[a, b]$ を N 個の小区間：

$$[a = x_0, x_1]\,,\ [x_1, x_2]\,,\ \ldots,\ [x_{N-1}, x_N = b]$$

に分割し，それぞれの区間の長さを

$$\Delta x_1\,,\ \Delta x_2\,,\ \ldots,\ \Delta x_N \qquad (\Delta x_k = x_k - x_{k-1})$$

と書く．

$$S \approx f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_N)\Delta x_N$$

$$= \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x_k \quad = S_\Delta \text{ とおく．}$$

（S_Δ のことを Riemann 和という．）

$N \to \infty$（$\Delta x_k \to 0$；十分細かく分割）のとき，

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}} S_\Delta = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x_k = S \tag{$*$}$$

ならば（$f(x)$ は $[a,b]$ で積分可能 (integrable) という），これを

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書き，$f(x)$ の a から b までの定積分 (definite integral) という．その値を求めることは，$f(x)$ を a から b まで積分する (integrate) といわれる．

$f(x)$ は被積分関数，a は下端，b は上端とそれぞれ呼ばれる．

また，このときの変数 x は積分変数と呼ばれ，束縛変数（ダミー（dummy）の変数）である：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(\heartsuit)\,d\heartsuit = \cdots .$$

※　より厳密に考えるなら，

- $(*)$ はどのようなときに成立するのか？（必ず成立するのか？）
- 区間の分割の仕方（Δx_k のとり方）に決まりはあるのか？

⋮

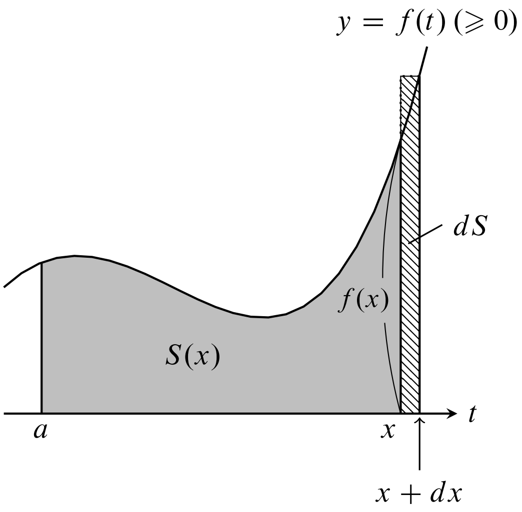
についても議論する必要がある．

★　では，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を計算するには，どうすればよいのか？

方法 1.　極限 $\displaystyle\lim_{N\to\infty} f(x_k)\Delta x_k$ を計算する．

方法 2.　微分積分学の基本定理（以下）による．

◪　定積分の計算方法と不定積分（微分積分学の基本定理）



左図のように，$y = f(t)$ のグラフと t 軸，直線 $t = a, t = x$ で囲まれる面積を $S(x)$ とおけば，

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{である.}$$

このとき，x を $x + dx$ に微小変化させたときの $S(x)$ の微小変化 dS（▧の部分）を考える．

$$dS = f(x)\,dx \qquad \therefore \quad \frac{dS}{dx} = f(x)\ .$$

つまり，$S(x)$ を微分すると $f(x)$ になる．これを言い換えると，

$S(x)$ は，微分すると $f(x)$ になる関数の一つ※ である

※　微分して $f(x)$ になる関数は，無数にある．

といえる．よって，

$S(x)$ を求めるには，微分して $f(x)$ になる関数を一つ見つけることができればよい！

（このように微分して $f(x)$ になる関数の一つのことを $f(x)$ の原始関数 (primitive function) という．）

いま，$f(x)$ 原始関数として $F(x)$ が見つかったとすると，

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + [x \text{ によらない定数}]$$

と書ける．ここで，$x = a$ と選ぶと，$S(a) = 0$ であるから，

$$S(a) = \int_a^a f(t)\,dt = F(a) + [x \text{ によらない定数}] = 0$$

$$\therefore \quad [x \text{ によらない定数}] = -F(a)\ .$$

以上より，

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)\ .$$

（$x = b$，x' を改めて x と書けば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

となる．）

【例題 1.1】

$S = \int_0^1 x^2\,dx$ の値を求めよ．

✍

<u>問題 1.1</u>　上の例題と同様に，2 通りの方法で $S = \int_0^1 x\,dx$ の値を求めよ．　（答：$\frac{1}{2}$）

以上の議論を振り返ると，定積分の計算をするには，原始関数（微分して $f(x)$ になる関数の一つ）を見つけることが重要であった．そこで，微分して $f(x)$ になる関数を，定積分の記号を借用して

$$\int f(x)\,dx$$

と書き，$f(x)$ の不定積分 (indefinite integral) と呼ぶことにする．