【例題 3.2】

ベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ をそれぞれ $\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ に移す線型変換を表す行列 $A$ を求めよ．

✍

※　行列のベクトルへの分割

2 次正方行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ について，$\vec{a} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ とおいて，$\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix}$ のように書く．このとき，適当な行列との積 $A\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix}$ は，

$$A\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{a} & A\vec{b} \end{bmatrix}$$

である．（行列の積の計算方法を考えれば，これが成立することが納得できる筈．）

<u>問題 3.3</u>　ベクトル $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ をそれぞれ $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ に移す線型変換を表す行列 $A$ を求めよ．

## ◪　線型変換の“イメージ”

線型変換は，以下のように考えると理解しやすい．まず，

- $x$ 軸正の向きの単位ベクトル $\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $y$ 軸正の向きの単位ベクトル $\vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

※　これらは標準基底と呼ばれる．

について，行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の表す線型変換 $f$ によって，それぞれどのようなベクトルに写されるか，調べてみよう．

- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ なので，$f : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ $(= \vec{a}$ とおく$)$．
- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ なので，$f : \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ $(= \vec{b}$ とおく$)$．

以上を踏まえて，ベクトル $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ が，$f$ によって，どのようなベクトルに写されるか考える．

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) = f\left( x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= xf\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + yf\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} \end{aligned}$$

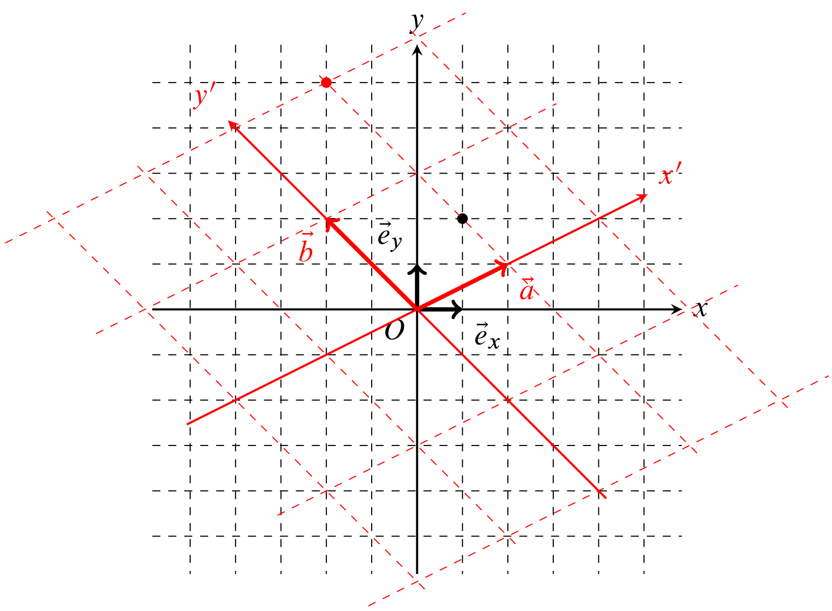
とできる．これは，行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ で表される線型変換 $f$ によって，

点 $(x, y)$（原点から $\vec{e}_x$ 方向に $x$，$\vec{e}_y$ 方向に $y$ 進んだ点）

が

原点から $\vec{a}$ 方向に $x$，$\vec{b}$ 方向に $y$ 進んだ点

に移された，と考えることができる（下図参照）．




問　$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}), f(k\vec{x}) = kf(\vec{x})$ のとき，

$$f(k\vec{x} + \ell\vec{y}) = kf(\vec{x}) + \ell f(\vec{y}) \qquad (k, \ell \text{ は定数})$$

であることを示せ．

## ◪ さまざまな変換の行列表現

- **偏倍変換**

例.　任意の点 $(x, y)$ を，$x$ 座標を 2 倍，$y$ 座標を 3 倍した点 $(x', y')$ に移す変換.

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases} \qquad i.e. \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- **直線に関する対称変換**

例.　任意の点 $(x, y)$ を，$x$ 軸に関して線対称である点 $(x', y')$ に移す変換.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \qquad i.e. \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- **恒等変換** (identity transformation)

例.　任意の点 $(x, y)$ を，それ自身に対応させる変換.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \qquad i.e. \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}}_{\text{単位行列}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- **原点に関する対称変換**

例.　任意の点 $(x, y)$ を，原点に関して対称である点 $(x', y')$ に移す変換.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \qquad i.e. \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- **回転変換**　...... また今度.

- **その他**

例.　任意の点 $(x, y)$ を，$\begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = 2x - 4y \end{cases}$ によって点 $(x', y')$ に移す変換.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

**問**　点 $P$ を，$x$ 軸方向に 1，$y$ 軸方向に $-2$ 平行移動した点 $P'$ に移す変換は，線型変換か？

<u>問題 3.4</u>　次の線型変換を表す行列を求めよ.

(1)　任意の点 $(x, y)$ を，$y$ 軸に関して線対称である点 $(x', y')$ に移す変換.

(2) $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x - 2y \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x \end{cases}$

**【例題 3.3】**

ベクトル $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ をそれぞれ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ に移す線型変換について，ベクトル $\vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ の $f$ による像を求めよ．

✍

**問題 3.5**

例題 3.3 のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ および線型変換 $f$ について，ベクトル $\vec{a} + 2\vec{b}$ の $f$ による像を求めよ．

**【例題 3.4】**

行列 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ および $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ で表される線型変換をそれぞれ $f, g$ とするとき，直線 $y = -x + 1$ は，$f, g$ によってそれぞれどのような図形に移されるか．

（線型変換 $f$ による図形 $G$ 上の各点の像全体が作る図形 $G'$ を，$f$ による $G$ の像という．）

✍

**問題 3.6**　次の像を求めよ．

(1)　行列 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ で表される線型変換による直線 $y = x + 1$ の像

(2)　行列 $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ で表される線型変換による直線 $2x + y = 1$ の像

**参考：ベクトルの公理的取り扱い** ........................................

集合 $\mathcal{V}$ が次の条件（公理）を満たすとき，$\mathcal{V}$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間（線型空間）といい，$\mathcal{V}$ の元をベクトルと呼ぶ．ただし，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ である．

(I) $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ に対して和 $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{V}$ が定義され，次の性質が成り立つ：

- (i) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$　（交換律）；
- (ii) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$　（結合律）；
- (iii) 零ベクトルと呼ばれる特別な元 $\vec{0}$ がただ一つ存在し，任意の $\vec{x} \in \mathcal{V}$ に対して $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$；
- (iv) 任意の $\vec{x} \in \mathcal{V}$ に対し $\vec{x} + \vec{x}' = \vec{0}$ なる $\vec{x}' \in \mathcal{V}$ がただ一つ存在する（これを $\vec{x}$ の逆ベクトルといい，$-\vec{x}$ と表す）．

(II) $\vec{x} \in \mathcal{V}, a \in \mathbb{K}$ に対して定数倍（スカラー倍）$a\vec{x} \in \mathcal{V}$ が定義され，次の性質が成り立つ：

- (v) $(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$；
- (vi) $a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$；
- (vii) $(ab)\vec{x} = a(b\vec{x})$；
- (viii) $1\vec{x} = \vec{x}$.

さらに，$\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}'$ への写像 $\mathcal{T}$ が次の条件を満たすとき，$\mathcal{T}$ を $\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}'$ への線形写像という．

- (i) $\mathcal{T}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{T}\vec{x} + \mathcal{T}\vec{y}$；
- (ii) $\mathcal{T}(a\vec{x}) = a(\mathcal{T}\vec{x})$.

特に，$\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}$ 自身への線型写像を，線型変換という．◇