0　オリエンテーション

みなさん，こんにちは．今年度，「数学 B」の講義を担当する奈須田です．

居室：管理棟・一般教科棟 3 階 305 号室（奈須田教員室）　メール：y.nasuda@gunma-ct.ac.jp
個人 Web サイト：https://yuta-nasuda.github.io ☞

0.1　この授業について（※シラバスを参照）

概要　この授業では，数学の主要な分野の一つである代数学のうち，線型代数学 (linear algebra) の入門的な内容を講義する．前期には行列式を，後期には線型変換と固有値・固有ベクトルを扱う．線型代数学は，微分積分学とともに，自然科学・工学の専門的な内容を学ぶための基礎となる数学である．

教科書・参考書

[1] 高遠節夫ら，新線形代数 改訂版，大日本図書 (2021).

[2] 高遠節夫ら，新線形代数問題集 改訂版，大日本図書 (2021).

【大学生向け】

[3] 佐武一郎，数学選書 1 線型代数学（新装版），裳華房 (2015).

[4] 齋藤正彦，基礎数学 1 線型代数入門，東京大学出版会 (1966).

[5] 村上正康ら，教養の線形代数 五訂版，培風館 (2008).

[6] 長谷川浩司，線型代数—Linear Algebra［改訂版］，日本評論社 (2015).

[7] Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 5th Edition, Wellesley - Cambridge Press (2016).

[8] 瀬山士郎，「正比例」の数学—線形代数学の基礎理論案内，東京図書 (2014).

【高校生向け】

[9] 清史弘，分野別 受験数学の理論 9. 行列，駿台文庫 (2004).

[10] 宮腰忠，高校数学＋α：基礎と論理の物語／なっとくの線形代数，共立出版 (2004, 2007).

授業の進め方　授業は，板書を中心とした講義形式で行う．ノートをとって復習できるようにしておくこと（配布するプリントは，あくまで授業の補足のためである）．授業内で，適宜，演習の時間も設ける．

予習・復習　予習の必要はない（教科書を読んでおくと授業の理解度が上がるかもしれない）．また復習に関しては，課題や問題集を解くなど演習を積んで講義内容の理解を深めること．何も見ずに教科書や授業の流れを再現する，というのも良い復習の方法である．

課題の提出：　授業後から次の授業前日の 23:59 までに，Teams のクラス内へ．

質問　質問は，随時受け付けています．直接居室に来るか，MS Teams のチャット機能を使う（返信の目安：遅くとも 24 時間以内）など，各自の状況・都合に合わせた方法を選んでください．

0.2 行列の復習

◪ 行列とは

いくつかの数を縦横に並べた数の表のことを行列という．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}$$

↑
第 j 列

: m 行 n 列の行列，
$m \times n$ 行列．

a_{ij} : (i, j) 成分．

なお，$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ とも書かれる．$m = n$ の場合，A は n 次の正方行列と呼ばれ，特に，

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を単位行列といい，I_n などと表す（δ_{ij} は，Kronecker（クロネッカー）のデルタ）．

◪ 連立 1 次方程式と行列

行列を考える一つの動機は，連立 1 次方程式を“ラクに”解くことであった．

【例題 0.1】

次の連立 2 元 1 次方程式を解け．

$$\begin{cases} 5x + 3y = 7 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

※ $\begin{cases} 5x + 3y = 7 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$

✍

結局，$A\vec{x} = \vec{b}$ で表される連立 1 次方程式を解くには，A が正則であれば，両辺に左から A^{-1} を掛けて，$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ を計算すればよい．

✍

問題0.1　次の連立 1 次方程式を，行列を用いて解け．

(1) $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = -12 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x - y = -5 \\ -6x + 3y = 15 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} -x - 2y + 3z = 4 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \\ 2x - y + 4z = 12 \end{cases}$

以降この授業では，特に断らない限り，行列は正方行列のみを考える．

0.3　概観（前期分）

✍

問題0.2　次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}$

前期の授業では，行列式そのものについて，詳しく学んでいく：

- 行列式の定義
- 行列式の性質
- 行列式の計算方法
- 行列式を用いた連立 1 次方程式の解法
- 行列式の図形的意味

行列式は，逆行列の存在や連立 1 次方程式の解法以外にも，行列の固有値を求める際にも重要な役割を果たす．これが，後期の主題の一つである．

問　$a \neq 0, ad - bc \neq 0$ のとき，連立 1 次方程式：

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

を授業で示した 3 通りの方法で解いてみよ．