教科書：「不定積分の積分定数 C を~~省略する~~.」 省略しません.

1.5　置換積分法：積分計算の技術 ①

◪　合成関数の微分法の逆演算としての「置換積分法」

復習：　合成関数の微分法.

$y = f(u) = f(g(x))$ のとき，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$$

つまり，微分して $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ になる関数は，$f(g(x))$ である.　（復習終わり）

これの “逆” を考えると，$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = f(g(x)) + C$ なる不定積分の公式が得られる．この左辺について，$u = g(x), g'(x) = \dfrac{du}{dx}$ であることを用いると，

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f'(u) \frac{du}{dx}\, dx = \int f'(u)\, du$$

と変形できる．置換積分法が有効なのは，<u>$f'(g(x)) \cdot g'(x)$ という複雑な被積分関数が $f'(u)$ というシンプルな関数に置き換えられるから</u>である.

以上より，（少し記号を整理して）次の置換積分法の公式を得る：

> $F'(u) = f(u), u = g(x)$ とすると，
>
> $$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

※　被積分関数が「$f(g(x)) \cdot g'(x)$」という型であれば，$u = g(x)$ とおいて，上の公式が使える.

【例題 1.11】

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int (4x+3)^5\, dx$

✍

問題 1.13　次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (\sin^2 x + 1) \cos x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int \sqrt{2x+3}\, dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\, dx$　　(4) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\, dx$

◪ 特に $f(u) = \dfrac{1}{u}$ の場合

$f(u) = \dfrac{1}{u}$ のとき，置換積分法の公式は，

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|g(x)| + C$$

となる．

※　これは，対数微分 $\dfrac{d}{dx}\ln|f(x)| = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ の逆である．

例. $\displaystyle\int \tan x\,dx =$ ✍

<u>問題 1.14</u>　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cot x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+5}\,dx$

◪ 定積分における置換積分法

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$ の計算法を考えよう．

これまでの議論から，関数 $f(g(x))\cdot g'(x)$ の不定積分は $F(g(x)) + C$ とわかっているので，

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \Big[F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

である．ただし，実際の計算では，x を変数とした $F(g(x))$（複雑）ではなく，u を変数とした $F(u)$（シンプル）を使って計算することも多い．x が a から b まで変化するとき，

$u = g(x)$ は，$g(a)$（$= \alpha$ とおく）から $g(b)$（$= \beta$ とおく）まで変化する　　$(*)$

ことに注意して，

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(u)\,du = \Big[F(u)\Big]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$$

となる．

※　$(*)$ について，右のような対応表をかいておくと良い：

x	a	$\to$	b
u	α	$\to$	β

【例題 1.12】

次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 (2x-3)^4\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

✍

<u>問題 1.15</u>　次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 (3x-1)^3\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos x\,dx$

◪ 置換積分法の variation（バリエーション）

以下，不定積分の置換積分法について記述する．定積分の場合も同様である．

<u>*Var. 1*</u>　$\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$　　（$x=g(t)$ とおいた．）

※　$\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$ より，$dx = g'(t)\,dt$．

※　置換積分法の公式で，第 2 辺から第 1 辺に変形した，と考えればよい．

例 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$　　（$x = 2\sin\theta$ とおいた．）

$$= \int \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta = \int d\theta = \theta + C = \boxed{\sin^{-1}\frac{x}{2} + C}$$

☞　例題 1.4 (1)

例 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{1}{4+4\tan^2\theta}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta$　　（$x = 2\tan\theta$ とおいた．）

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int d\theta = \frac{1}{2}\theta + C = \boxed{\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C}$$

例 3. $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (t^2-1)t\cdot 2t\,dt$　　（$\sqrt{x+1} = t$　$\therefore\ x = t^2-1$ $(t \geqslant 0)$ とおいた．）

$$= \int (2t^3-2t^2)\,dt = \frac{1}{2}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + C = \boxed{\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C}$$

cf.　$x+1=t$ とおいてもよい．

※　うまい変数変換によって，「$f(g(t))\cdot g'(t)$」の不定積分が簡単にわかるようになる場合がある．

$\longrightarrow$　どういう場合にうまくいくかは，上の例のような「定石」を学んで覚えていくしかない．

<u>*Var. 2*</u>
$$\int f(g(x))\,dx = \int f(u)\frac{1}{g'(x)}\,du \qquad (u = g(x) \text{ とおいた.})$$
$$= \int f(u)\frac{1}{\dfrac{du}{dx}}\,du = \int f(u)\frac{dx}{du}\,du$$

例 1.
$$\int (4x+3)^5\,dx = \int u^5 \cdot \frac{1}{4}\,du \qquad (u = 4x+3 \text{ とおいた.})$$
$$= \frac{1}{4}\int u^5\,du = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}u^6 + C = \boxed{\frac{1}{24}(4x+3)^6 + C}$$

☞ 例題 1.11 (2)

例 2.
$$\int \tan^2 x\,dx = \int u^2\cos^2 x\,du \qquad (u = \tan x \text{ とおいた.})$$
$$= \int \frac{u^2}{1+u^2}\,du = \cdots ??$$

☞ 例題 1.5

※ 置換して積分が簡単になるとは限らない.

例 3.
$$\int \sin^2 x\,dx = \int u^2\cdot\frac{1}{\cos x}\,du \qquad (u = \sin x \text{ とおいた.})$$
$$= \int \frac{u^2}{\pm\sqrt{1-u^2}}\,du = \cdots ??$$

※ 置換して簡単になっていない.