B　Additional Topics （後期中間）

B.1　例題 3.2 再考

【例題 3.2（再掲）】

ベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ をそれぞれ $\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ に移す線型変換を表す行列 A を求めよ．

※　行列のベクトルへの分割

2 次正方行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ について，$\vec{a} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ とおいて，$\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix}$ のように書く．このとき，適当な行列 A との積 $A\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix}$ は，

$$A\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{a} & A\vec{b} \end{bmatrix}$$

である．（行列の積の計算方法を考えれば，これが成立することが納得できる筈.）

✍

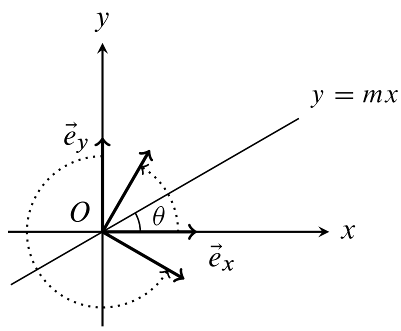
問　配布プリントの問題 3.3，及び教科書 p. 136 練習問題 1A の大問 3 をこの方法で解け．

B.2　直線 $y = mx$ に関する線対称移動を表す行列

前回の授業では，$\dfrac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -1+m^2 \end{bmatrix}$ が直交行列の例であることを紹介した．ここでは，この行列が，直線 $y = mx$ に関する線対称移動を表すことを確認しよう．

✍

（参考図）



B.3　線型変換を表す行列の行列式

線型変換 f を表す行列を，$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする．このとき，A の行列式：

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\ ,$$

の意味を考えよう．A の行列式は，$\vec{a} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ の張る平行四辺形の符号付き面積 (signed area) を表すのであった．他方，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は，線型変換 f による $\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の像である．

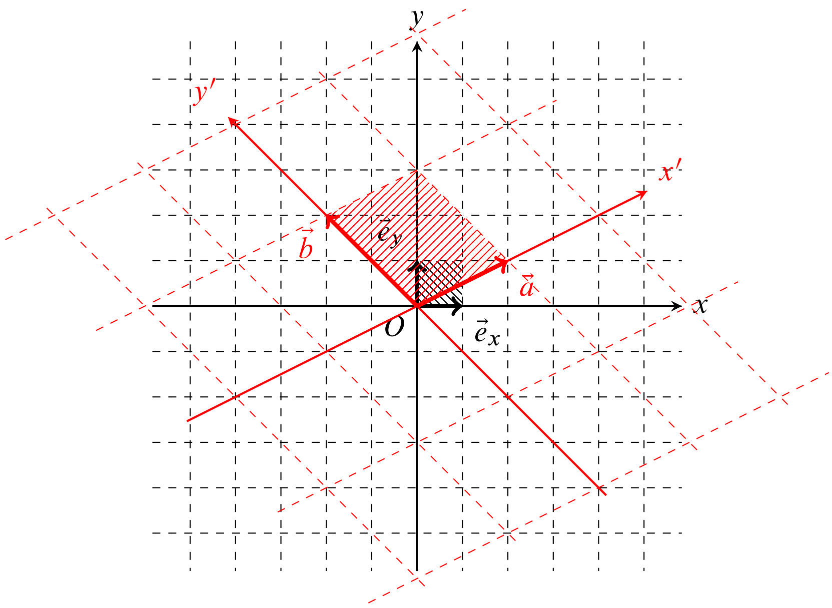
以上から，

A の行列式の絶対値 $|\det A|$ は，下図の赤斜線部（▨）の面積を表している

ことがわかる．さらに，$\vec{e}_x$ と $\vec{e}_y$ の張る平行四辺形（正方形；下図の黒斜線部▧）の面積が 1 であることから，

$|\det A|$ は，行列 A が表す線型変換による，図形の面積の拡大率を表している

といえる．



問　教科書 p. 137 練習問題 1B の大問 3 を解け．