【例題 1.10】

$a > 0, b > 0$ のとき，次の値の大小関係を調べよ．

$$\int_b^{b+1} \frac{dx}{\sqrt{x+a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a+b}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a+b+1}}$$

✍

◪ 定積分の単調性（定積分の大小関係）

区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqslant g(x)$ のとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

※ 恒等的に $f(x) = g(x)$ でなければ，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$.

※ 逆：「$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$ のとき，区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqslant g(x)$」はいえない．

1.4 ここまでのまとめ：微積分学の基本定理

◪ 概観

求積問題 ➡ 符号付き面積 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ （定積分）

↖

一見，無関係

↙

微分の逆演算： $\displaystyle F(x) + C = \int f(x)\,dx \ \overset{\text{微分}}{\underset{\text{積分}}{\rightleftarrows}}\ F'(x) = f(x)$ （不定積分）

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

両者を結び付けるのが，

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{dS}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

という関係式であった（☞ 第 1 週②）．これを微分積分学の基本定理 (the fundamental theorem of calculus) という．

以下では，微分積分学の基本定理を（第 1 週②のときよりも厳密に）導く．

◪ 定積分に関する平均値の定理

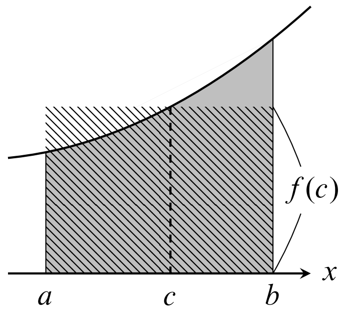
（証明は教科書 p. 91 を参照）

$f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続ならば，

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \qquad i.e. \qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a) \qquad (a < c < b)$$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．

※　デコボコしてる $y = f(x)$ のグラフを，平ら（定数関数 $y = f(c)$）に“ならす”イメージ．
（あるいは，$y = f(x)$ のグラフの高さの“平均”をとっているイメージ．）



※　Lagrange の平均値の定理との関係

$S(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とする．$S(x)$ について Lagrange の平均値の定理を書き下すと，

$$\frac{S(b)-S(a)}{b-a} = S'(c) \qquad i.e. \qquad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,.$$

これは，定積分に関する平均値の定理にほかならない．

◪ 微分積分学の基本定理の証明

$\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}$ を計算する．ただし，$x, x+h\ (h \neq 0)$ は区間 $[a, b]$ 内の点である．

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx\,.$$

ここで，定積分に関する平均値の定理より，

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx = f(x+\theta h) \qquad (0 < \theta < 1)$$

とできる．よって，$h \to 0$ のとき，

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = f(x+\theta h) \to f(x)\,,$$

すなわち，$S(x)$ は x で微分可能で $\dfrac{dS}{dx} = f(x)$ となる． ∎