◪ 不定積分の性質（線型性）

導関数の線型性

- $\left[f(x)+g(x)\right]'=f'(x)+g'(x)$
- $\left[kf(x)\right]'=kf'(x)$

まとめると，

$$\left[kf(x)+\ell g(x)\right]'=kf'(x)+\ell g'(x)$$

不定積分の線型性

- $\displaystyle\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$

まとめると，

$$\int\left[kf(x)+\ell g(x)\right]dx=k\int f(x)\,dx+\ell\int g(x)\,dx$$

例.　$\displaystyle\int(8x^3+60x^2+150x+125)\,dx=$ ✍

問題 1.5　次の関数の不定積分を求めよ.

(1)　$2x^3+3x^2-2x+5$　　(2)　$3\cos x+4e^x$

(3)　$6\sin x+\dfrac{2}{x}$　　(4)　$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$

◪ 不定積分の公式 ②

微分公式（復習）

- $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

  $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x$

※ $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec} x=\dfrac{1}{\sin x}$, $\tan x=\dfrac{1}{\cot x}$

- $(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

  $(\cos^{-1}x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

  $(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

- $(\sinh x)'=\cosh x$,　$(\cosh x)'=\sinh x$

  $(\tanh x)'=\dfrac{1}{\cosh^2 x}$

不定積分

- $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\sec^2 x\,dx=\tan x+C$

  $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\operatorname{cosec}^2 x\,dx=-\cot x+C$

- $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x+C\quad\left(\text{or}\ \ \cos^{-1}x+C\right)$

  $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x+C$

  ☞　置換積分法.

- $\displaystyle\int\sinh x\,dx=\cosh x+C$

  $\displaystyle\int\cosh x\,dx=\sinh x+C$

  $\displaystyle\int\frac{dx}{\cosh^2 x}=\tanh x+C$

- $(\sinh^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

  $(\cosh^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

  $(\tanh^{-1} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$

※ $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$

$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $x \in (1, \infty)$

$\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

  ☞ 置換積分法.

  $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

  ☞ 部分分数分解.

【例題 1.4】

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ (3) $\displaystyle\int \frac{x^2+5}{x^2+4}\,dx$

✍

※ 次の公式が成り立つ：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+A}\right| + C \qquad (A \neq 0)$$

問 以上を導出せよ.

問題 1.6 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}$ (3) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx$

問 次の不定積分を求めよ. ☞ 置換積分法／部分積分法など.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

(2) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,dx$ *cf.* $\displaystyle\int (x^2 \pm a^2)\,dx$ はカンタン♪