2　微分法

2.0　変化量の表し方

量 X が X_1 から X_2 まで変化したとすると，その変化分（増分）ΔX は，

$$\Delta X = X_2 - X_1 \quad \Longleftrightarrow \quad X_2 = X_1 + \Delta X$$

と表される（$\overset{\text{デルタ}}{\Delta}$ は difference（差）の頭文字 D に対応するギリシャ文字で，「ΔX」で 1 つの記号）．

特に，変数 x の値が x_1 から x_2 まで変化するとき，これに伴って変数 y の値が $y_1 = f(x_1)$ から $y_2 = f(x_2)$ まで変化するとする．このとき，y の増分と x の増分の比：

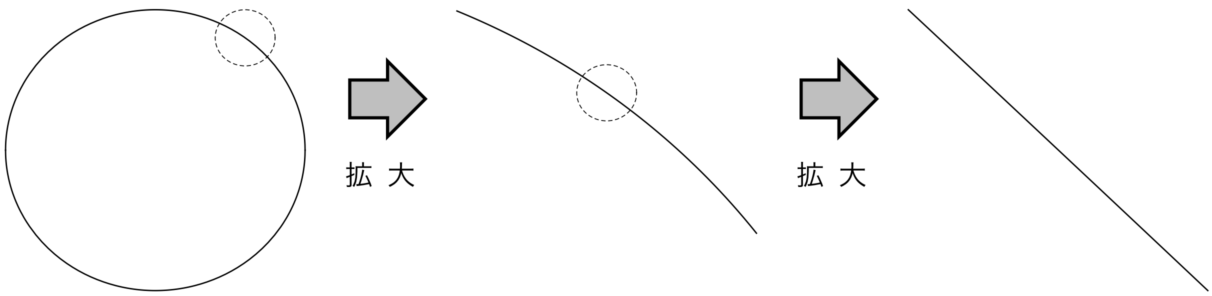
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

を $y = f(x)$ の x_1 から x_2 までの平均変化率という（例：平均の速さ）．

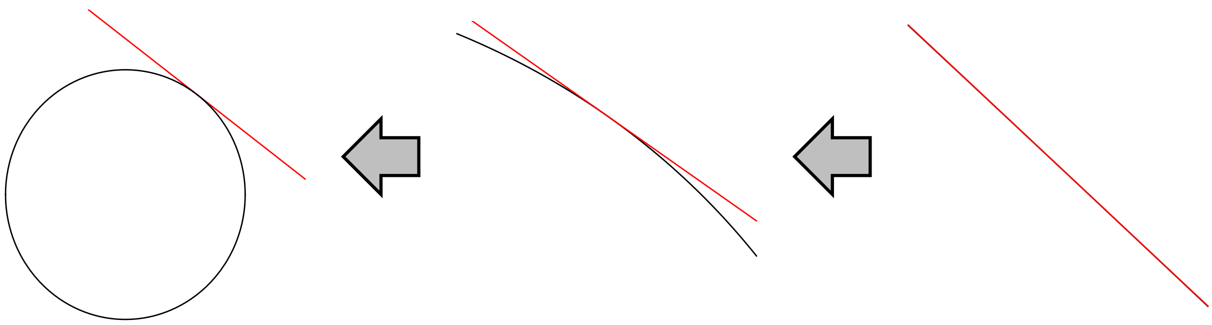
2.1　微分法の考え

◪　「微分する」とは？（イメージ）

どんな曲線であれ，十分滑らかであれば，ある部分をどんどん拡大していくと“直線”が見えてくる：

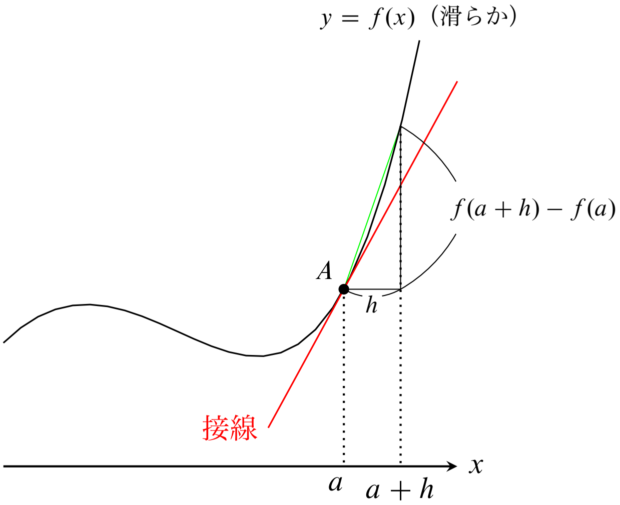


この直線に赤い色をつけて，元の縮尺に戻してやると，この赤い直線はその曲線の（拡大した部分における）接線であることが分かる：



★　以上の考えを，数学的に定式化するためには，どうしたら良いだろうか？

◪ 微分係数



平均変化率：

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

について，$h \to 0$ としたときの極限値が存在するとき，これを $f(x)$ の $x = a$ における微分係数といい，$f'(a)$ などと書く：

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

また，$x = a$ における微分係数 $f'(a)$ が存在するとき，関数 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるという．

※　微分係数と接線の傾き

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A\,(a, f(a))$ における接線の傾きは，微分係数 $f'(a)$ に等しい．従って，接線の方程式は，

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a) \quad \Longleftrightarrow \quad y = f'(a)\,x + f(a) - af'(a)$$

と書ける．

【例題 2.1 (a)】

関数 $y = x^3$ の $x = 2$ における微分係数を求めよ．

✍

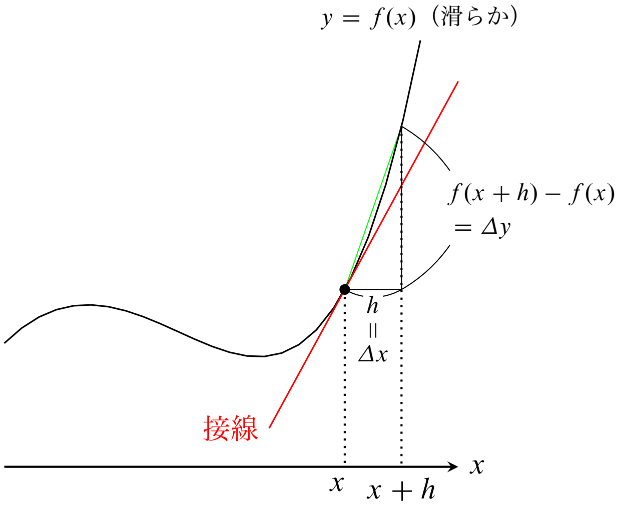
問題 2.1　次の値を求めよ．

(1) 関数 $y = x^2$ の $x = 1$ から 3 までの平均変化率と，$x = 1$ 及び $x = 3$ における微分係数．

(2) 関数 $y = x^2$ の $x = a$ から $b\ (\neq a)$ までの平均変化率と，$x = a$ における微分係数．

問題 2.2　曲線 $y = x^2$ 上の点 $(2, 4)$ における接線の方程式を求めよ．

◪ 導関数



ある区間内のすべての点において関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，関数 $f(x)$ はその区間で微分可能であるという．

このとき，区間内の x の値に関数 $f(x)$ の微分係数を対応させる関数を $f(x)$ の導関数 (derivative) といい，$f'(x)$ などと表す：

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' .$$

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を（x で）微分する (differentiate) という．

【例題 2.1 (b)】

関数 $y = x^3$ の導関数を求めよ．

✍

問題 2.3　導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ．

(1)　$y = 3x^2$　　　(2)　$y = -x^2$

2.2　いろいろな関数の導関数 ①

◪ 定数関数　$f(x) = c$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0 \qquad \therefore\ (c)' = 0 .$$

◪ 冪関数　$f(x) = x^n$（n は正の整数）

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} \right) = nx^{n-1} \qquad \therefore\ (x^n)' = nx^{n-1} . \end{aligned}$$

2.3　微分法の基本法則 ①

◪　線型性

微分可能である関数 $f(x), g(x)$ 及び定数 c について，次の性質が成り立つ：

(i) $\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x)$

(ii) $\left[cf(x)\right]' = cf'(x)$

以上をまとめると，次のように書ける（α, β は定数）：

$$\left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right]' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)\,.$$

法則 (i) の証明.

$$\begin{aligned}\left[f(x) \pm g(x)\right]' &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h) \pm g(x+h)\right] - \left[f(x) \pm g(x)\right]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x) \pm g'(x) \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

法則 (ii) の証明.

$$\begin{aligned}\left[cf(x)\right]' &= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}\\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= cf'(x) \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

【例題 2.2】

関数 $y = 3x^4 - 5x + 2$ を微分せよ.

✍

問題 2.4　次の関数を微分せよ.

(1)　$y = x^3 + 2$　　(2)　$y = x^2 + 3x$　　(3)　$y = -x^3 + \sqrt{2}$

(4)　$y = \dfrac{1}{3}(2x^3 + 3x)$　　(5)　$y = \dfrac{x^6 + x^4}{2}$