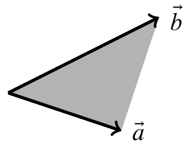
2.3 行列式の図形的意味

◪ 2 次の行列式の図形的意味

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ の図形的意味を考える．はじめに，次の例題を考えてみよう．

【例題 2.4】

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ の張る三角形の面積を求めよ．



復習： $\vec{a}, \vec{b}$ の張る三角形の面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \qquad (\theta \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角}) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \qquad (*) \\ &= \cdots \end{aligned}$$

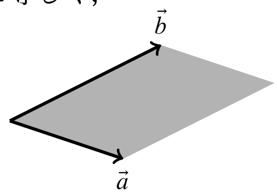
（復習終わり）

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおいて，$(*)$ に代入すると，

$$S = \frac{1}{2}|ad - bc| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix}\right| .$$

つまり，$\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|$ は，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ の張る三角形の面積の 2 倍に等しく，

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ の張る平行四辺形の面積



に等しいことがいえる．

問 $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の符号は何を表しているか？

答． $\vec{a}$ に対して，$\vec{b}$ が左側のとき正．右側のとき負．

cf. $\vec{a}' = \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とすると，$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \vec{a}'\cdot\vec{b}$ である．

ここで，$\vec{a}' = \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$ は $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ を $\dfrac{\pi}{2}$ 回転したベクトルである．

<u>問題 2.5</u> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ の張る平行四辺形の面積を求めよ．

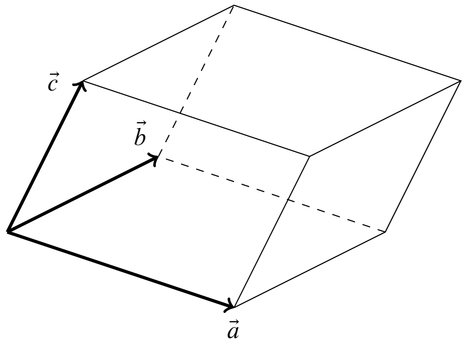
<u>問題 2.6</u> 平面上に 3 点 $A\ (4, -5)$, $B\ (1, -1)$, $C\ (2, 3)$ があるとき，$\triangle ABC$ の面積を求めよ．

◪ 3 次の正方行列の図形的意味

次に，$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の図形的意味を考える．$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$，$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とおく．

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の張る平行六面体（parallelepiped；向かい合った 3 組の面がそれぞれ平行である六面体で，全ての面が平行四辺形である）を考えよう．

この体積 V は，次のようにして求められる：

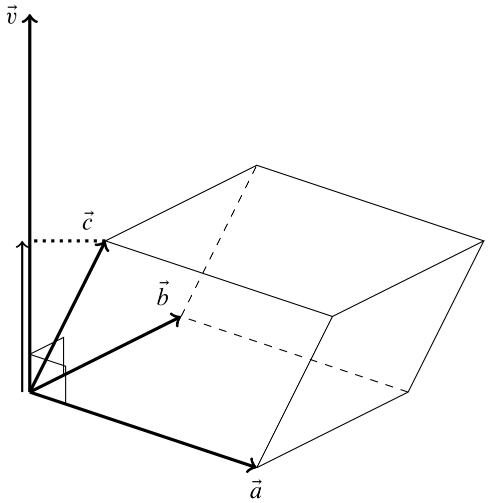


まず，$\vec{a}, \vec{b}$ の張る平行四辺形（底面）の面積 S は，

$$
\begin{aligned}
S &= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \qquad (\theta \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角}) \\
&= \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \\
&= \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}
\end{aligned}
$$

である．ここで，

$$
\vec{v} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \qquad (**)
$$



とすると，$\vec{v}$ は $|\vec{v}| = S$ であり $\vec{a}$ にも $\vec{b}$ にも垂直な ($\because\ \vec{a}\cdot\vec{v} = \vec{b}\cdot\vec{v} = 0$) ベクトルである．この立体の高さは，$\vec{c}$ の $\vec{v}$ 上への正射影ベクトルの大きさに等しいから，

$$
\begin{aligned}
V &= S \cdot \frac{|\vec{v}\cdot\vec{c}|}{|\vec{v}|} = |\vec{v}\cdot\vec{c}| \\
&= |(a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3| \\
&= |a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2| = \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\right|.
\end{aligned}
$$

よって，

$\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\right|$ は，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$，$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ の張る平行六面体の体積に等しい．

問 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の符号は何を表しているか？ *cf.* 右手系，左手系

問題 2.7 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ の張る平行六面体の体積を求めよ．

◪ 外積（ベクトル積，クロス積）

(∗∗) のベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積，あるいはベクトル積 (vector product)，クロス積 (cross product) といい，$\vec{a}\times\vec{b}$ で表す：

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\vec{e}_x + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\vec{e}_y + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\vec{e}_z\ .\end{aligned}$$

ただし，$\vec{a},\vec{b}$ が線型従属の場合，$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ とする．

この定義より，$\vec{a}\times\vec{b}$ は次の性質をもつことが判る：

- $\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a}$ とも $\vec{b}$ とも直交する；
- $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ はこの順に右手系をなす；
- $\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは $\vec{a},\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

さらに，

- $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$;
- $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$;
- $k(\vec{a}\times\vec{b}) = k\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times k\vec{b}$,

などの計算法則が成り立つ．

<u>問題 2.8</u>　$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．$\vec{a}\times\vec{b}$ を計算せよ．

<u>スカラー三重積</u>　$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

例.　$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする．

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 12\ .$$