2.3 微分法の基本法則 ①（続き）

◪ 積の微分法・商の微分法

微分可能である関数 $f(x), g(x)$ について，次の性質が成り立つ：

(iii) $\left[f(x)g(x)\right]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(iv) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ $\quad (g(x) \neq 0)$

特に，$f(x) \equiv 1$ のとき，$\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]' = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$.

法則 (iii) の証明. ✍

※ $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ が微分可能な関数であるとき，

$$\left[f_1(x)f_2(x)f_3(x)\right]' = f_1'(x)f_2(x)f_3(x) + f_1(x)f_2'(x)f_3(x) + f_1(x)f_2(x)f_3'(x)$$

である.

問 これを証明せよ.

問 一般に，微分可能な関数 $f_j(x)\ (j = 1, 2, \ldots, n)$ について，$\left[f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\right]'$ はどうなるか？

法則 (iv) の証明. ✍

【例題 2.3】

次の関数を微分せよ.

(1) $y = (x+4)(x^2+2x-3)$ (2) $y = \dfrac{x+3}{x-1}$

✍

問題 2.5 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (x+2)(2x-5)$ (2) $y = (2x-1)(2x^2-3x+1)$ (3) $y = (x^2+3)(x^3+2)$

(4) $y = \dfrac{2x}{x+3}$ (5) $y = \dfrac{1}{x-4}$ (6) $y = x^2 + \dfrac{3}{x+1}$

(7) $y = (x+2)(x-1)(x-4)$ (8) $y = (x^2+2)(x^2-1)(x^2-5)$

2.4 いろいろな関数の導関数 ②

◪ **冪関数**　$f(x) = x^{-m}$（m は正の整数）

- $(x^{-m})' = -mx^{-m-1}$

証明. ✍

◪ **冪関数**　$f(x) = x^{r}$（r は有理数）

- $(x^r)' = rx^{r-1}$　　例：$(x^{\frac{1}{3}})' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

問題 2.6　次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{1}{x^5}$　(2) $y = \dfrac{3}{x^4}$　(3) $y = 3x^{-2} + 2x^{-3}$　(4) $y = 3x^2 + \dfrac{1}{x^3}$

(5) $y = x^{\frac{2}{3}}$　(6) $y = \sqrt[5]{x^3}$　(7) $y = x\sqrt{x}$

問題 2.7　次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$　(2) $y = (x+1)\sqrt{x}$

◪ **関数**　$f(ax+b)$（$a \neq 0$）

- $\left[f(ax+b)\right]' = af'(ax+b)$　　$\leftarrow u = ax+b$ とおくと，$\dfrac{d}{dx}f(ax+b) = a\dfrac{df(u)}{du} = \dfrac{du}{dx}\dfrac{df(u)}{du}$.

証明. ✍

【例題 2.4】

次の関数を微分せよ.

(1) $y = (3x+2)^5$　(2) $y = \sqrt{4x-1}$

✍

問題 2.8　次の関数を微分せよ.

(1) $y = (-2x+1)^5$　(2) $y = (2x-3)^{\frac{5}{2}}$　(3) $y = \sqrt{(3x+1)^3}$　(4) $y = \dfrac{1}{(5x+1)^2}$

◪ **三角関数**　$f(x) = \sin x$，$\cos x$，$\tan x$

- $(\sin x)' = \cos x$，$(\cos x)' = -\sin x$，$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

証明. ✍

問題2.9　次の関数を微分せよ．

(1)　$y = \sin x + \cos x$　　(2)　$y = \sin x \cos x$　　(3)　$y = \sin(3x+2)$　　(4)　$y = \cos(3-2x)$

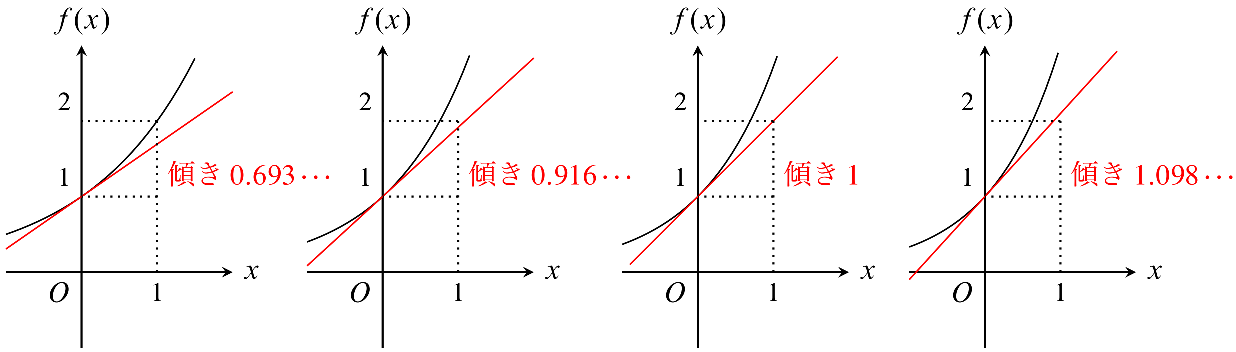
(5)　$y = \tan 3x$

◪　指数関数　$f(x) = a^x$（$a > 0, a \neq 1$）

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{=?}$$

★　$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$ となるような a の値は？　　［答え：$a = e$（Napier 数）］

$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ は，$y = a^x$ の $x = 0$ における微分係数であるから，いくつかの a の値に対する $y = a^x$ の点 $(0, 1)$ における接線の傾きを調べてみよう．



$a = 2$ のとき　　$a = 2.5$ のとき　　$a = e$ のとき　　$a = 3$ のとき

このように，$a = 2.5$ から 3 の間に，$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$，すなわち $y = a^x$ の点 $(0, 1)$ における接線の傾きが 1 になるような a の値が存在することが分かる．これが，Napier（ネイピア）数 $e = 2.718281828459\cdots$ のもう一つの定義である：

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\ .$$

問　この定義から $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ を導け．

以上から，

$$(e^x)' = e^x\ .$$

また，$a^x = e^{x \ln a}$（底の変換）より，

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a\ .$$

問題 2.10 次の関数を微分せよ．

(1) $y = e^{-2x}$ (2) $y = x^2 e^x$ (3) $y = e^x \sin x$ (4) $y = e^{2x} \cos 3x$

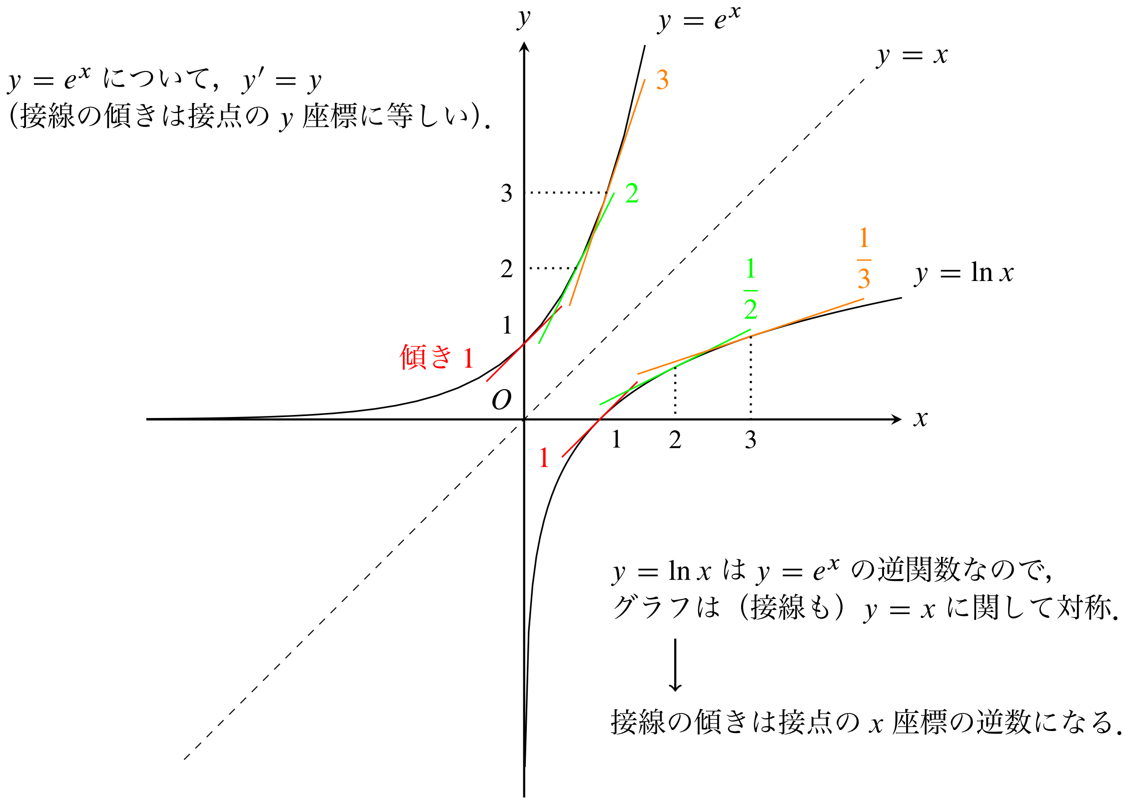
(5) $y = \dfrac{e^x}{x}$ (6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$ (7) $y = 5^x$ (8) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

◪ 対数関数 $f(x) = \log_a x$ （$a > 0, a \neq 1$）

- $a = e$ のとき，$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

  問 これを証明せよ．

《直観的な説明》



- $(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}$ $\quad \because$ $x > 0$ のとき $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$，$x < 0$ のとき $\left[\ln(-x)\right]'$ を計算．

- $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ （底の変換）より，

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

問題 2.11 次の関数を微分せよ．

(1) $y = x \ln x$ (2) $y = \ln(3x - 2)$ (3) $y = \ln(-x)$ (4) $y = \log_2 x$

(5) $y = \log_3(2x + 1)$ (6) $y = \ln |2x + 1|$ (7) $y = \ln |3 - x|$