1.2　不定積分

関数 $f(x)$ について，微分して $f(x)$ になる関数のことを不定積分 (indefinite integral) といい，（定積分の記号を借用して）$\displaystyle\int f(x)\,dx$ と表す．

例．x の不定積分は？ ＝ 微分して x になる関数は？ — $\frac{1}{2}x^2$.　（これだけ？）

$$\frac{1}{2}x^2+1 \text{ も } \frac{1}{2}x^2-5 \text{ も } \cdots \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}x^2+C \quad \text{と表す．}$$

よって，

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C\ .$$

ここで，C は任意の定数で積分定数と呼ばれる．

以降この授業では，特に断らない限り，C は積分定数を表すものとする．

◪　不定積分の公式 ①

微分公式（復習）

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$　　$(\alpha \neq 0)$

  特に，$(x)' = 1$

- $(\sin x)' = \cos x$

  $(\cos x)' = -\sin x$

- $(e^x)' = e^x$

  $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

不定積分

- $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$　　$(\alpha \neq -1)$

  特に，$\displaystyle\int 1\,dx = \int dx = x + C$

- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

  $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

  $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

【例題 1.2】

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3}$　　　(2) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$

✍

★　**慣れるまでは，必ず 計算結果を微分して被積分関数に一致するか確認すること！**

問題 1.2　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^5\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}$　　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

※　不定積分のことを逆微分 (antiderivative) ということもある．

問題 1.3　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x}$　（ヒント：$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$）　(2) $\displaystyle\int a^x\,dx$　（ヒント：$(a^x)' = a^x \ln a$）

問　次の不定積分を求めよ．　　— 積分は微分よりも難しい？

(1) $\displaystyle\int \ln|x|\,dx$　（微分して $\ln|x|$ になる関数は？　☞　部分積分法．）

(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx$　（微分して $\tan x$ になる関数は？　☞　置換積分法．）

◪ $f(ax+b)$ と表される関数の不定積分

復習：　$\left[f(ax+b)\right]' = af'(ax+b)$

例えば，$(3x+2)^5$ を微分すると，$3\cdots5(3x+2)^4 = 15(3x+2)^4$．　　（復習終わり）

【例題 1.3】

不定積分 $\displaystyle\int (2x+5)^3\,dx$ を求めよ．

✍　　（ヒント：$\left(\dfrac{1}{4}u^4\right)' = u^3$）

※　$\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ のとき，$\boxed{\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C}$ となる．

このことは，$\left(\dfrac{1}{a}F(ax+b) + C\right)'$ を計算することで，直ちに分かる．　*cf.*　置換積分法．

問題 1.4　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sqrt{4x-3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos(3x+1)\,dx$　　(3) $\displaystyle\int (4x+1)^4\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sin 3x\,dx$　　(5) $\displaystyle\int e^{5x+2}\,dx$