4.6　極値をとるための条件

復習：　関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，そこで極値をとるならば $f'(a)=0$：

$$\text{関数 } f(x) \text{ が } x=a \text{ で極値をとる} \implies f'(a)=0\,.$$

【例題 4.9】

関数 $f(x)=x^3+ax^2+2x+3$ が次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲をそれぞれ定めよ．

(1)　極値をもつ．　　(2)　常に単調に増加する．

✍

問題 4.10　関数 $y=x^3-12x+a$ の極大値が正，極小値が負になるように，定数 a の範囲を定めよ．

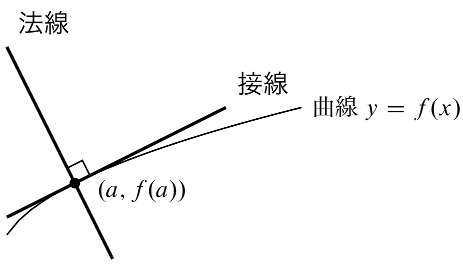
4.7　接線・法線

復習：　点 (x_0, y_0) を通る，傾き a の直線の方程式は，$y-y_0=a(x-x_0)$.

◪　**接線：**　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線 (tangent line) の方程式は，

$$y-f(a)=f'(a)(x-a) \iff y=f(a)+f'(a)(x-a)\,.$$

◪　**法線**



点 $(a, f(a))$ を通り，この点における接線に垂直な直線を，点 $(a, f(a))$ における曲線 $y=f(x)$ の法線 (normal line) という．その方程式は，

$$f'(a)\neq 0 \text{ のとき,}\qquad y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)\,,$$

$$f'(a)=0 \text{ のとき,}\qquad x=a\,.$$

【例題 4.10】

曲線 $y=2\sqrt{x}$ 上の $x=1$ に対応する点における接線と法線の方程式をそれぞれ求めよ．

✍

問題 4.11　次の曲線上の (　) 内の x の値に対応する点における接線の方程式を求めよ．

(1)　$y=x^3$　$(x=2)$　　(2)　$y=\dfrac{1}{x^2}$　$(x=-1)$

(3)　$y=\cos x$　$(x=\pi)$　　(4)　$y=e^x$　$(x=-2)$

問題 4.12　次の曲線上の (　) 内の x の値に対応する点における法線の方程式を求めよ．

(1)　$y=x^2+3x$　$(x=1)$　　(2)　$y=\sin x$　$\left(x=\dfrac{\pi}{2}\right)$

4.8 l'Hôspital（ロピタル）の定理：極限計算への応用 ①

種々の極限計算において，不定形の解消は重要なステップであった．ここでは，導関数を用いて不定形を解消する方法を紹介する．　*cf.* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$ ［例題 4.5 (2)］

定理（l'Hôspital の定理）．関数 $f(x), g(x)$ は $f(a)=g(a)=0$ を満たし，$x=a$ の近くで微分可能で，$g'(x)\neq 0$ $(x\neq a)$ であるとする．このとき，

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在するならば，}\qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

※　証明には，Cauchy（コーシー）の平均値の定理を用いる（→ 第 14 週 ①）．

※　この定理は，形式的に，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の不定形や $x\to\infty$ の場合にも適用できることが知られている．

【例題 4.11】

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{4x^2+3x-7}{2x^2-5x+3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x\ln x$

✍

××× 誤用例 ×××

- $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{2x^2}\overset{\times}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(2x-1)'}{(2x^2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{4x}=\boxed{\frac{1}{4}}$.　⋯ ×××
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x}\overset{\times}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\cos x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sin x}{1}=\lim_{x\to\infty}(1+\sin x)$

  この極限は存在しない．よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x}$ も $\boxed{\text{存在しない}}$．　⋯ ×××

問　これらの極限を正しく計算せよ．　答．$\dfrac{3}{8}$，1

<u>問題4.13</u>　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^3+3x^2-4}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+x)}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\sqrt{x}\ln x$