【3 次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \ (a \neq 0)$ のグラフが点対称であることの証明】

準備：2 次関数 $y = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)$ のグラフが線対称であることの証明

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)$ のグラフが $x = -\dfrac{b}{2a}$ に関して線対称であることは，ほとんどの人が知っている事実でしょう．しかし，これを示せと言われると，どうしてよいか分からない人も多いのではないでしょうか？

対称であるとは，ある変換に関して不変であるということです（例．♡ は，真ん中を貫く直線で折り返すという変換に対して，図形が不変）．よって，証明の方針としては，2 次関数の式が不変になるような変換を考え，その変換の下での不変性が線対称を意味していることを確認すれば良さそうです：

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \qquad ①$$

なので（表面上，[変数]^1 の項を消した；平方完成），

$$\begin{cases} x + \dfrac{b}{2a} = -\left(X + \dfrac{b}{2a}\right) \\ y = Y \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x + X}{2} = -\dfrac{b}{2a} \\ y = Y \end{cases} \qquad ②$$

なる変換の下で，①は

$$Y = a\left[-\left(X + \frac{b}{2a}\right)\right]^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

と不変になる．②の変換は直線 $x = -\dfrac{b}{2a}$ についての対称移動を表すので，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが $x = -\dfrac{b}{2a}$ に関して線対称であることがいえる． ∎

証明：

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d = a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c + \frac{b^2}{3a}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) + d + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a}$$

$$\therefore \quad y - d - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} = a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c + \frac{b^2}{3a}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) \qquad ③$$

と変形すると（表面上，[変数]^2 の項を消した），

$$\begin{cases} x + \dfrac{b}{3a} = -\left(X + \dfrac{b}{3a}\right) \\ y - d - \dfrac{2b^3}{27a^2} + \dfrac{bc}{3a} = -\left(Y - d - \dfrac{2b^3}{27a^2} + \dfrac{bc}{3a}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x + X}{2} = -\dfrac{b}{3a} \\ \dfrac{y + Y}{2} = d + \dfrac{2b^3}{27a^2} - \dfrac{bc}{3a} \end{cases} \qquad ④$$

なる変換の下で，③は

$$-\left(Y - d - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a}\right) = a\left[-\left(X + \frac{b}{3a}\right)\right]^3 + \left(c + \frac{b^2}{3a}\right)\left[-\left(X + \frac{b}{3a}\right)\right]$$

$$\therefore \quad Y - d - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} = a\left(X + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c + \frac{b^2}{3a}\right)\left(X + \frac{b}{3a}\right) + d + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a}$$

$$\iff \quad Y = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

と不変になる．④の変換は点 $\left(-\dfrac{b}{3a}, d + \dfrac{2b^3}{27a^2} - \dfrac{bc}{3a}\right)$ についての対称移動を表すので，3 次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフが点 $\left(-\dfrac{b}{3a}, d + \dfrac{2b^3}{27a^2} - \dfrac{bc}{3a}\right)$ に関して点対称であることがいえる．ちなみに，この点は，変曲点である． ∎

◪　いろいろな関数のグラフ

【例題 4.5】

次の関数の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，グラフの概形をかけ．

(1)　$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$　　　(2)　$y = \dfrac{\ln x}{x}$　$(x > 0)$

✍

問題 4.6　次の関数の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，グラフの概形をかけ．

(1)　$f(x) = \dfrac{x}{e^x}$　　　(2)　$f(x) = x(\ln x)^2$　　　(3)　$f(x) = x^x$　$(x > 0)$

Useful Link:

Wolfram Alpha —さまざまな数学の計算を実行してくれる（グラフもかいてくれる！）サイト

https://www.wolframalpha.com

実は，グラフの概形をかくという話はもう一回出てくるのですが……その話は，また後ほど，改めて．