問題 3.9　行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ で表される線型変換を f とする．このとき，f によって，直線 $3x + y = 6$ に移される元の図形を求めよ．

✍

◪ ここまでのまとめ②

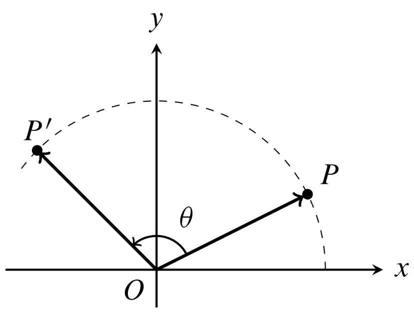
- 線型変換 f $\longleftrightarrow$ 行列 A
- 合成変換 $g \circ f$ $\longleftrightarrow$ 積 BA
- 逆変換 f^{-1} $\longleftrightarrow$ 逆行列 A^{-1}

問題 3.10　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ で表される線型変換をそれぞれ f, g とする．このとき，変換 $f^{-1}, g^{-1}, (f \circ g)^{-1}$ によって点 $(1, 0)$ はどのような点に移されるか．

※　合成変換，逆変換の意味を考えれば，$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ である．これは，行列の計算規則 $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ とも符合する．

3.4　回転変換

◪ 平面ベクトルの回転（平面上の点の原点まわりの回転移動）



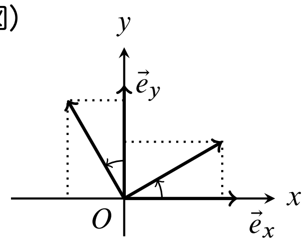
左図のように，座標平面上で，ベクトル $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を θ 回転したベクトルを $\overrightarrow{OP'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ とする．

同じことであるが，点 $P\,(x, y)$ を原点のまわりに θ 回転した点を $P'\,(x', y')$ とする，ということもできる．

ここで，2 つのベクトル $\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ について，これらを θ 回転させることを考える．

- $\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$
- $\vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$

（参考図）



したがって（回転変換が線型変換であることを認めると），ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を θ 回転するという操作は，行列 $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ を用いて，

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と表すことができる．さらに，

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} \qquad \therefore \quad \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

とわかる．

※　回転変換が線型変換であることは，次のように確かめられる：

$$x = r\cos\alpha\,, \quad y = r\sin\alpha$$

とおくと，

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta = y\cos\theta + x\sin\theta \end{cases}$$

◇

例．　平面ベクトルを［座標平面上の点を原点のまわりに］$\dfrac{\pi}{6}$ 回転する線型変換を表す行列は，

$$R_{\frac{\pi}{6}} = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

問題 3.11

座標平面上の点を原点のまわりにそれぞれ $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \pi, -\dfrac{\pi}{4}$ 回転する線型変換を表す行列を求めよ．

◪　空間ベクトルの回転（空間内の点の回転移動）

☞　教科書 p. 157

空間ベクトルの回転は，平面ベクトルの回転ほど単純ではない．実は，空間ベクトルの回転は原点を通るある直線まわりの回転である．

（略）

◪ 回転変換の合成

座標平面上でベクトル $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を θ 回転し，さらにそのベクトル $\overrightarrow{OP'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ を φ 回転し，ベクトル $\overrightarrow{OP''} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$ を得ることを考えよう．このとき，

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{R_\theta} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}_{R_\varphi} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

であり，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{R_\varphi R_\theta} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が成立する．他方，ベクトル $\overrightarrow{OP''}$ は，ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を $(\theta + \varphi)$ 回転したベクトルともいえるので，

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{bmatrix}}_{R_{\theta+\varphi}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

以上より，

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \end{bmatrix}.$$

この両辺を比較すると，三角関数の加法定理

$$\begin{cases} \cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ \sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi \end{cases}$$

が得られる．

◪ 回転変換の逆変換

座標平面上でベクトル $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を θ 回転する変換の逆変換は，ベクトルを $-\theta$ 回転する変換である．実際，

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1}}_{R_\theta{}^{-1}} = \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}}_{R_{-\theta}}$$

【例題 3.7】

原点 O と点 $A\,(1,3)$ に対して，$\triangle OAB$ が正三角形になるような点 B の座標を求めよ．

✍

◪ 回転変換の性質（まとめ）

- $R_{\alpha+\beta} = R_\beta R_\alpha = R_\alpha R_\beta$
- $R_\theta{}^{-1} = R_{-\theta}$
- $R_{2\pi n} = I \quad (n \in \mathbb{Z})$
- $\det R_\theta = 1$

問　以上を示せ．

cf.　$R_\theta \longleftrightarrow e^{i\theta}$