

# 微分法を通して、虹をみる — Rainbows through Calculus Glasses —

(なすだ ゆうた)

## 0 イントロダクション

以前，群馬高専の公式×（みなさんフォローしてますか？）に，このような投稿がありました：



虹が二重に架かっているのが見えますか？

右側の明るい虹を「主虹<sup>しゅこう</sup>」，左側の暗い虹を「副虹<sup>ふくこう</sup>」といいます（その間の暗い部分は，「Alexander<sup>アレキサンダー</sup>の暗帯」と呼ばれています）。

虹は眺めているだけでも十分美しく，神秘的なものでさえあります。しかし，皆さんはせっかく理系に進んだので，虹という現象を数学という道具を通して“みる”＝解析する，ということをやってみても面白いと思います。虹の“みえ方”が変わるかもしれません。—前期の数学 A の総まとめとして，虹という現象を微分法を用いて解析してみましょう。

「虹はどの向きにできるのか？」というのが，当面の問いです。

## 1 光の反射・屈折・分散（復習）

- 反射の法則 入射角と反射角は等しい。
- 屈折の法則（<sup>スネル</sup>Snellの法則）  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ 。
- 光の分散 光の屈折の向きは波長（色）によって異なる。そのため、複数の波長成分を含む光が屈折すると、光は波長成分ごとに分離される。ちなみに可視光では、
  - ー 赤に近いほど、屈折率は小さく、あまり屈折しない；
  - ー 紫に近いほど、屈折率は大きく、よく屈折する。



## 2 虹の発生

虹は、大気中の（数多くの）水滴の中で太陽光が屈折・反射することで生じる。

大気中の水滴に入射した太陽光は屈折し、さらに水滴内部で複数回反射し、出射時に再び屈折することで大気中へと散乱する。

水滴に入射することなく表面で反射される光を、1次散乱光という。反射では分散は起きない。

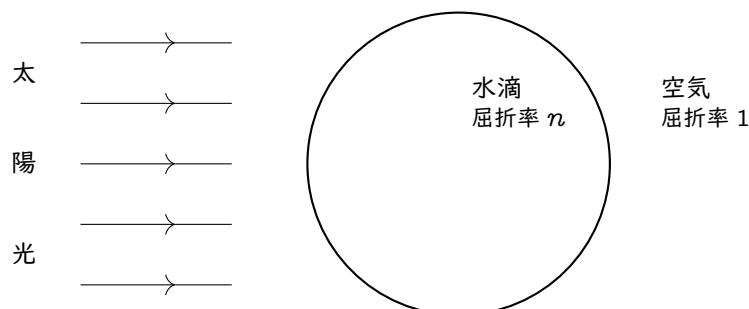
水滴に入射し、内部で1度も反射することなく大気中へと出てくる光は、2次散乱光と呼ばれる。これは、2度の屈折で太陽光は分散されるが、太陽光とほぼ同じ向きの光で、太陽が眩しいために観測できない。

3次散乱光は、水滴内部で1回反射されて大気中へと出てくる光で、これが主虹を形成する。4次散乱光は、水滴内部で2回反射されて大気中へと出てくる光で、副虹を形成する。

### 2.1 問題設定

ここでは、<sup>for simplicity</sup>簡単のため、水滴は球、空気の屈折率は1として考える。また、水の屈折率を $n$ とする。

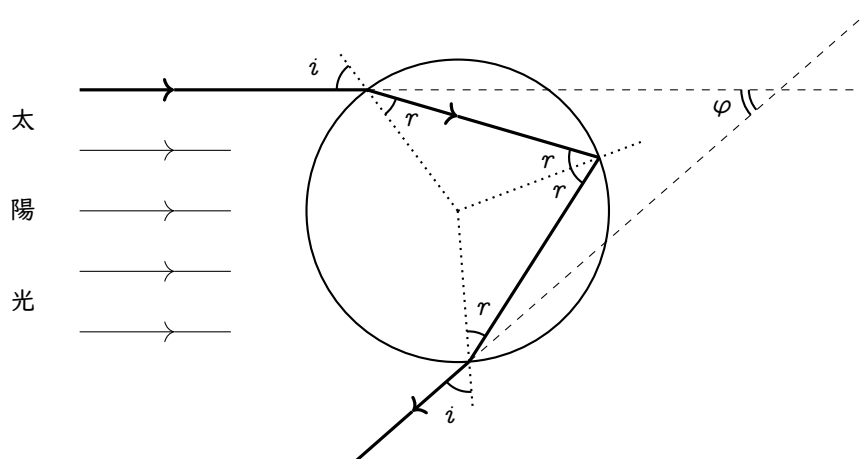
\* 屈折率 $n$ は、光の波長 $\lambda$ に依存する。



## 2.2 主虹（3次散乱光）

太陽光の入射角を  $i$ ，屈折角を  $r$  とする．

3 次散乱光の経路を，以下に図示する．なお図中の  $\varphi$  は，散乱補角と呼ばれる．



Snell の法則より，

$$\sin i = n \sin r$$

が成り立つ．さらに，3つの角度  $i$ ， $r$ ， $\varphi$  の間には

$$\varphi = \pi - ((i - r) + (\pi - 2r) + (i - r)) \quad \therefore \varphi = 4r - 2i$$

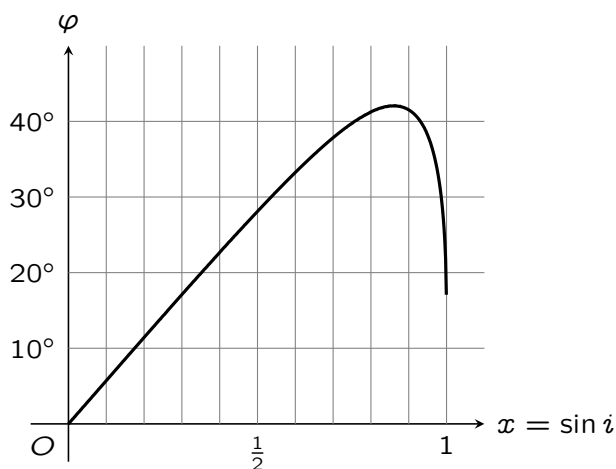
という関係が成り立っている．

以上の2式から  $r$  を消去して， $\sin i = x$  とおくと，

$$\varphi = 4 \arcsin \left( \frac{1}{n} \sin i \right) - 2i = 4 \arcsin \left( \frac{x}{n} \right) - 2 \arcsin x$$

が得られる．ただし，入射角  $i$  が負のとき，3次散乱光は地上を向かないので， $0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}$  つまり  $0 \leq x \leq 1$  のときを考えれば十分である．

適当な  $n$  に対して， $\varphi$ - $x$  グラフを描いてみると（コンピュータを用いた），以下のようなになる．



これは、等間隔の一樣な太陽光の入射に対して、(ある波長成分の) 3 次散乱光の向きは等間隔でなくなっていることを表している。3 次散乱光は、およそ  $\varphi$  の極大値の向きによく散乱される (それ以外の向きにも散乱されるが、そのような光は非常に弱く、観測しづらい)。

では、 $\varphi$  の極大値  $\varphi_{\max}$  を、計算によって求めてみよう。  $\varphi$  が極大値をとるとき、 $\frac{d\varphi}{dx} = 0$  であるから、まず  $\varphi$  を  $x$  で微分して、

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[ 4 \arcsin \left( \frac{x}{n} \right) - 2 \arcsin x \right] \\ &= \frac{4}{n \sqrt{1 - \left( \frac{x}{n} \right)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{n^2 - x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}\end{aligned}$$

が得られる。これが 0 となるのは、





$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{n^2 - x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 &\iff \frac{4}{\sqrt{n^2 - x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &\iff \sqrt{n^2 - x^2} = 2\sqrt{1 - x^2} \\ &\iff n^2 - x^2 = 4(1 - x^2) \\ &\iff 3x^2 = 4 - n^2 \\ &\iff x = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}\end{aligned}$$

のときである。このときの  $\varphi$  の値 (つまり極大値)  $\varphi_{\max}$  は、

$$\varphi_{\max} = 4 \arcsin \left( \sqrt{\frac{4 - n^2}{3n^2}} \right) - 2 \arcsin \left( \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \right)$$

と求まる (単位は <sup>ラジアン</sup> rad であることに注意)。

具体的に、数値を代入してみよう。理科年表 [3] によると、波長  $\lambda$  ごとの水 (20 °C) の屈折率  $n$  は、次のようになる：

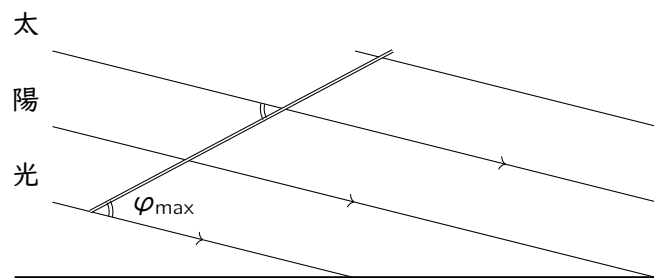
波長 $\lambda$ /nm	色	屈折率 $n$
656.3		1.3311
589.3		1.3330
546.1		1.3345
404.7		1.3428

よって、 $\varphi_{\max}$  をそれぞれ計算すると、次のようになる：

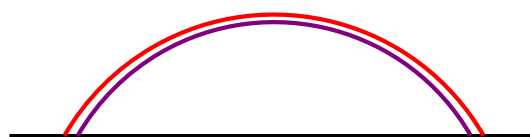
波長 $\lambda/\text{nm}$	色	屈折率 $n$	$\varphi_{\max}$ [deg]
656.3	■	1.3311	42.3552
589.3	■	1.3330	42.0781
546.1	■	1.3345	41.8605
404.7	■	1.3428	40.6741

$\varphi_{\max}$  の具体的な値が求まったところで、 $\varphi_{\max}$  の意味を再度確認してみよう。 $\varphi$  は 3 次散乱光の散乱補角を表し、 $\varphi_{\max}$  は特定の波長成分の 3 次散乱光がよく散乱される向きを表すのであった。地上で虹を観測する我々にとって、この量はどのような意味をもつのだろうか。

以下の図に示すように、観測者の後ろから太陽光が差し込んできており、観測者の前的大気中には大量の水滴が存在している状況を考える。(ちなみに、このときの観測者の影は、図のようになることはわかりますか?) 水滴に入射してきた太陽光は、入射してきた向きから  $\varphi_{\max}$  だけ曲がった向きに特定の波長の光が散乱されるのだから、その散乱光が観測者の目に入るのは、水滴が下図の二重線上にある場合に限られる。つまり観測者にとって、太陽光線から  $\varphi_{\max}$  だけ見上げた向きにある水滴に特定の色が付いて見える、ということである。

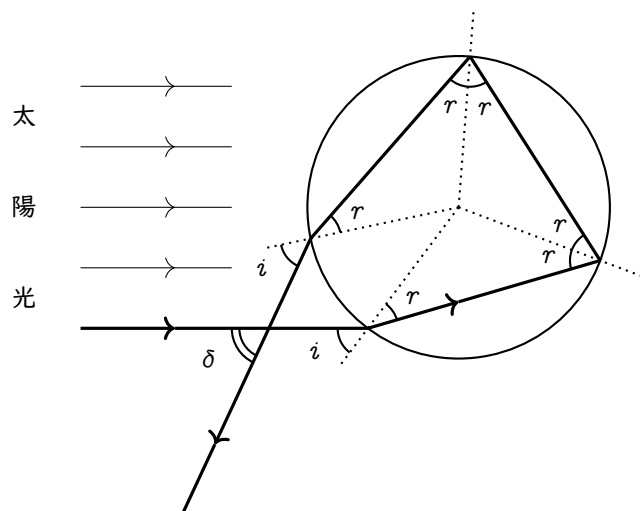


上図の観測者が観測する虹の模式図を、以下に示す：



## 2.3 副虹（4次散乱光）

副虹の場合も、同様に考えていく。4次散乱光の散乱補角を  $\delta$  と書く。



Snell の法則より、

$$\sin i = n \sin r$$

が成り立つ。さらに、3つの角度  $i$ ,  $r$ ,  $\delta$  の間には

$$\delta = ((i - r) + (\pi - 2r) + (\pi - 2r) + (i - r)) - \pi \quad \therefore \delta = 2i - 6r + \pi$$

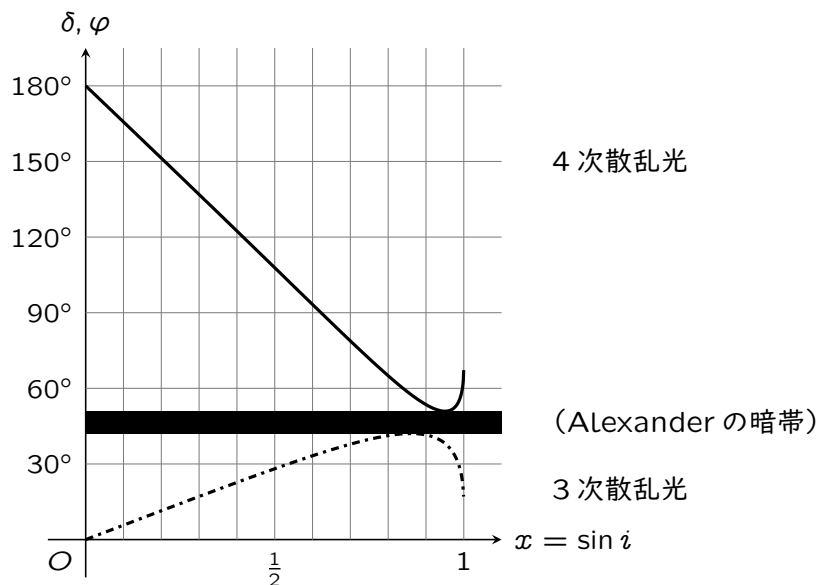
という関係が成り立っている。

以上の2式から  $r$  を消去して、 $\sin i = x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) とおくと、

$$\delta = 2i - 6 \arcsin \left( \frac{1}{n} \sin i \right) + \pi = 2 \arcsin x - 6 \arcsin \left( \frac{x}{n} \right) + \pi$$

が得られる。

適当な  $n$  に対して、 $\delta$ - $x$  グラフを描いてみると（コンピュータを用いた）、以下ようになる。ただし、比較のために、3 次散乱光の散乱補角  $\varphi$  のグラフも 1 点鎖線で描画した。



4 次散乱光も 3 次散乱光と同様に、等間隔の様な太陽光の入射に対して、出射の向きは等間隔でなくなっている。4 次散乱光は、およそ  $\delta$  の極小値の向きによく散乱される。

また、3 次散乱光も 4 次散乱光も散乱しない領域が存在する。この領域は、他の領域と比べて極端に暗くなる。これを Alexander の暗帯と呼ぶ。

話を元に戻して、 $\delta$  の極小値  $\delta_{\min}$  を計算によって求めてみよう。 $\delta$  が極小値をとるとき、 $\frac{d\delta}{dx} = 0$  であるから、まず  $\delta$  を  $x$  で微分して、

$$\begin{aligned}\frac{d\delta}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[ 2 \arcsin x - 6 \arcsin \left( \frac{x}{n} \right) + \pi \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{6}{n\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{6}{\sqrt{n^2-x^2}}\end{aligned}$$

が得られる。これが 0 となるのは、

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{6}{\sqrt{n^2-x^2}} &= 0 &\iff \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{6}{\sqrt{n^2-x^2}} \\ &\iff 3\sqrt{1-x^2} &= \sqrt{n^2-x^2} \\ &\iff 9(1-x^2) &= n^2-x^2 \\ &\iff 8x^2 &= 9-n^2 \\ &\iff x &= \sqrt{\frac{9-n^2}{8}}\end{aligned}$$

のときである。このときの  $\delta$  の値（つまり極小値） $\delta_{\min}$  は、

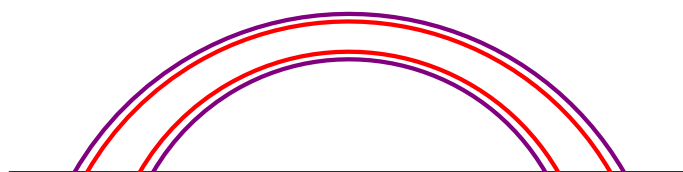
$$\delta_{\min} = 2 \arcsin \left( \sqrt{\frac{9 - n^2}{8}} \right) - 6 \arcsin \left( \sqrt{\frac{9 - n^2}{8n^2}} \right) + \pi$$

と求まる（単位はラジアン<sup>ラジアン</sup>であることに注意）。

具体的に、数値を代入してみよう。主虹の場合と同様に、各  $n$  ごとに  $\delta_{\min}$  をそれぞれ計算すると、次のようになる：

波長 $\lambda$ /nm	色	屈折率 $n$	$\varphi_{\max}$ [deg]	$\delta_{\min}$ [deg]
656.3	■	1.3311	42.3552	50.3915
589.3	■	1.3330	42.0781	50.8908
546.1	■	1.3345	41.8605	51.2832
404.7	■	1.3428	40.6741	53.4267

また、観測者が観測する虹は、以下のようになる（副虹の色の並び順は、主虹のそれとは逆になっている）：



なお副虹は、主虹と比べて非常に暗い（しばしば見逃される）。それは、3次散乱までで入射光のエネルギーの大部分を散乱しており、残されたエネルギーは3次散乱光のエネルギーと比べて非常に小さいため、4次散乱光は3次散乱光よりかなり弱くなる。

## 参考文献等

- 1 MIT OpenCourseWare 8.03 (Prof. Walter Lewin) — Lect. 22 — Rainbows, Coronae, Glories, Glass Bow, Great Demos. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=aF6auqBCPnY&list=PLyQSN7X0ro22WeXM2QCKJm2NP\\_xHpGV89&index=23](https://www.youtube.com/watch?v=aF6auqBCPnY&list=PLyQSN7X0ro22WeXM2QCKJm2NP_xHpGV89&index=23)
- 2 James Stewart, *Calculus: Early Transcendentals*, 6th Edition, Thomson (2008).
- 3 国立天文台 編, 理科年表 2023, 丸善出版 (2022).