1.4 いろいろな行列式

【例題 1.5】

次の行列式を因数分解せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

✍

問題 1.7 次の行列式を因数分解せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & a \\ x & y & b \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

◪ Vandermonde（ヴァンデルモンド）行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} (x_i - x_j) .$$

ここで，$\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (x_i - x_j)$ は，m 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ の多項式で，全ての 2 変数の組の差の積：

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (x_i - x_j) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \cdots (x_1 - x_m) \\ \times (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \cdots (x_2 - x_m) \\ \ddots \\ \times (x_{m-1} - x_m) , \end{aligned}$$

であり，差積と呼ばれ，$\varDelta(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ などと表される．

問 Vandermonde 行列式を導け．

問 差積 $\varDelta(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ が交代式であることを示せ．

ここで，交代式とは，m 変数の多項式 $f(x_1, \ldots, x_m)$ で，その中の任意の 2 変数を入れ替えて符号が変化する，つまり $-f(x_1, \ldots, x_m)$ となる式のことである．

◪ ヤコビアン（Jacobi 行列式）

$(x, y) \to (u, v)$ なる座標変換を考える．$x = f_1(u, v), y = f_2(u, v)$ のとき，偏導関数の行列式

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

を x, y の u, v に関するヤコビアン（Jacobi 行列式）という．

問 次の行列式を計算せよ．

(1) $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$ （座標変換 $(x, y) \to (r, \theta)$；$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のとき）

(2) $J = \begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}$ （座標変換 $(x, y) \to (u, v)$；$x = Au + Bv + C, y = Du + Ev + F$ のとき）

◪ 1 次の行列式

$A = (a_{11})$ とする．

$$\det A = |a_{11}| = a_{11} \ .$$

◪ 巡回行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} (a_1 + a_2\omega_k + a_3{\omega_k}^2 \cdots a_n{\omega_k}^{n-1}) , \quad \omega_k \equiv e^{2\pi i \frac{k}{n}} \ .$$

問 これを示せ．

◪ 縁付け行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = z \det A - x^{\mathsf{T}} A y \ , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} , \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} , \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \ .$$

問 これを示せ．

◪ 多項式の行列式表示

1 変数の n 次多項式

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

は，行列式を用いて以下のように表すこともできる：

$$p_n(x) = \begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_1 & \vdots & \ddots & \ddots & x & -1 \\ a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

問　このことを示せ．

◪ ロンスキアン（Wroński 行列式）

2 つの関数 $f(x), g(x)$ が 1 次独立（線型独立）であるとは，

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$$

を恒等的に満たす α, β が $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ 以外に存在しないことをいう．関数 $f(x), g(x)$（十分滑らかだとする）が 1 次独立であるための必要十分条件は，

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$$

であり，左辺の行列式はロンスキアン（Wroński 行列式）と呼ばれる．

cf.　グラミアン（Gram 行列式），カゾラーティアン（Casorati 行列式）

問　n 個の関数 $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ の場合はどうなるか？

◪ 交代行列の行列式

n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ が $A^{\mathsf{T}} = -A$ であるとき，A を交代行列という．その行列式は，n が奇数なら 0，n が偶数なら a_{ij} のある多項式の平方になる：

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \ddots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} (\mathrm{Pf}\ A)^2 & (n \text{ は偶数}) \\ 0 & (n \text{ は奇数}) \end{cases}.$$

なお，多項式 Pf A はパフィアン (Pfaffian) と呼ばれる．

問　Pf A は具体的にどのように書き表されるか？