## 3.5 直交変換

直交行列によって表される線型変換を，直交変換 (orthogonal transformation) という．

### ◪ 直交行列

直交行列 (orthogonal matrix) とは，

$$A^{\mathsf{T}}A = I \qquad (A^{\mathsf{T}} \text{ は } A \text{ の転置行列}) \tag{$*$}$$

すなわち，$A^{\mathsf{T}} = A^{-1}$ を満たす正方行列 $A$ のことをいう．

例. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ($\theta$ 回転)，$\dfrac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -1+m^2 \end{bmatrix}$ (直線 $y = mx$ に関する線対称移動)，
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (置換行列；$m = 1$ の場合)

問　これらの行列が直交行列であることを確かめよ．

### ◪ 内積と直交行列

復習：　平面ベクトル $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ に対して，$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 (inner product; dot product) という．（より正確には，標準内積という．）内積は1つの数である．

（復習終わり）

ここで，行列の計算を思い出すと，

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad (\leftarrow \text{行列の積})$$

の形で書けることがわかる．$\vec{a}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$ であることより，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \vec{a}^{\mathsf{T}}\vec{b}$$

と書き表すこともできる． ◇

($*$) の左辺について，$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \vec{a} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ とすると，

$$A^{\mathsf{T}}A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\vec{a}|^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} & |\vec{b}|^2 \end{bmatrix}.$$

これが単位行列になることから，以下の定理が導かれる：

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} \text{が直交行列である} \quad \Longleftrightarrow \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \quad \text{かつ} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$ ◇

【例題 3.8】

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ は直交行列であることを示せ．

✍

問題 3.12 $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ は直交行列であることを示せ．

## ◪ 直交変換の性質

復習： ベクトル $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ の大きさ（長さ）$|\vec{a}|$ は，

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

によって計算される． （復習終わり）

$A$ を直交行列とし，$f$ を $A$ で表される線型変換とすれば，どんな平面ベクトル $\vec{x}, \vec{y}$ に対しても，

$$f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

が成立する．なぜなら，

$$f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = A\vec{x} \cdot A\vec{y} = \left(A\vec{x}\right)^{\mathsf{T}} A\vec{y} = \vec{x}^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} A\vec{y} = \vec{x}^{\mathsf{T}} I \vec{y} = \vec{x}^{\mathsf{T}} \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}\,.$$

つまり直交変換は，内積を変えない，すなわち，

**ベクトルたちの 大きさ も なす角 も変えない変換**

であるといえる．

～おまけ～

$a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ のとき，ベクトル $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ の内積（標準内積）は，

$$\begin{bmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \overline{a_1} b_1 + \overline{a_2} b_2$$

で定義される（他の定義もある）．