4.4 関数の最大値・最小値

関数の最大値・最小値（あるいはそれらをとる変数の値）を求める問題は，応用上，重要である．1 変数関数の場合，グラフの概形をかけば，視覚的に，関数の最大値・最小値（あるいはそれらをとる変数の値）を求めることができる．

◪ 基本問題

【例題 4.6】

次の関数の ( ) 内の区間における最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 20 \qquad (-3 \leqslant x \leqslant 3)$

(2) $y = e^x - e^{-x} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$

✍

問題 4.7　次の関数の ( ) 内の区間における最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 2)$

(2) $y = x + 2\cos x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$

(3) $y = x^2 e^{-x} \quad (0 \leqslant x \leqslant 3)$

(4) $y = x - 2\sqrt{x} \quad (0 \leqslant x \leqslant 4)$

◪ その応用

【例題 4.7】

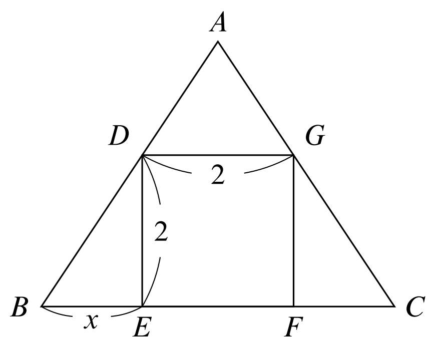
半径 a の円に内接する長方形のうち，面積が最大となるものを求めよ．

✍

問題 4.8　図のように，$AB = AC$ の二等辺三角形 ABC と 1 辺の長さが 2 の正方形 $DEFG$ がある．点 D, G をそれぞれ辺 AB, AC 上，点 E, F を辺 BC 上にとる．BE の長さを x とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 二等辺三角形 ABC の面積 S を x の式で表せ．
また，x の変域を求めよ．

(2) S が最小になるときの x の値を求めよ．



4.5 不等式の証明

【例題 4.8】

$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ のとき，不等式 $x \geqslant \sin x$ が成り立つことを証明せよ．

✍

問題 4.9　次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1)　すべての実数 x について，$e^x \geqslant 1 + x$

(2)　$x \geqslant 0$ のとき，$x \geqslant \tan^{-1} x$

★ 不等式の証明には，以下の方針が考えられる：

- [左辺] $\gtreqless \cdots \gtreqless \cdots \gtreqless$ [右辺] と式変形する；
- [左辺] − [右辺] $\gtreqless 0$ を示す；
- 有名不等式を用いる．