3　逆三角関数と双曲線関数

3.1　逆三角関数

ここでは，三角関数の逆関数を考える．　— “$\sin\theta$ が $\dfrac{1}{2}$ になるような θ は？”

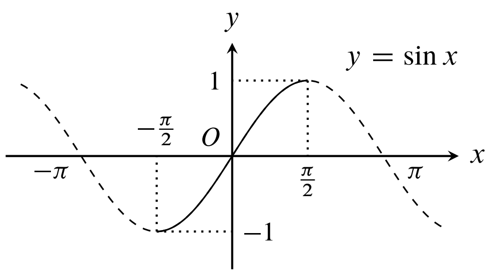
ただし，三角関数は周期関数なので，定義域を適当に限定する必要がある．

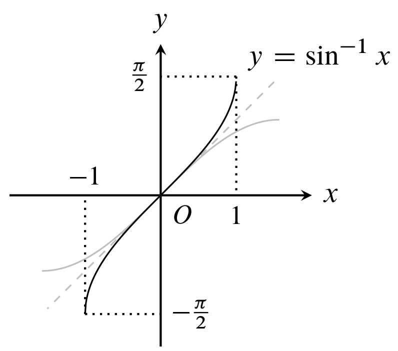
◪　逆正弦関数　$y = \sin^{-1} x$

正弦関数 $y = \sin x$ は，定義域を $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ に限定すれば，ある $y \in [-1, 1]$ の値に対して x の値がただ一つに決まる（主値）．つまり，逆関数が存在する．これを逆正弦関数 (arcsine)（アークサイン）といい，

$$y = \sin^{-1} x \qquad や \qquad y = \arcsin x \qquad\qquad (\iff x = \sin y)$$

などと表す．定義域は $x \in [-1, 1]$ で，値域は $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ である．





例.　$\sin^{-1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$，$\sin^{-1}\dfrac{1}{3} = 0.3398369\cdots$ rad.

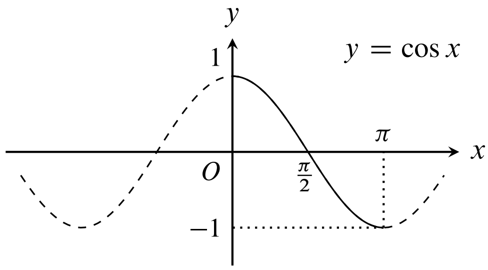
注意.　$\sin^2 x = (\sin x)^2$ であるが，$\sin^{-1} x = (\sin x)^{-1} = \dfrac{1}{\sin x}$ ではない．$f^{-1}(x)$ と同じ記法である．三角関数の n 乗を $\sin^n x$ のように書くのは，n が正の整数のときだけである．

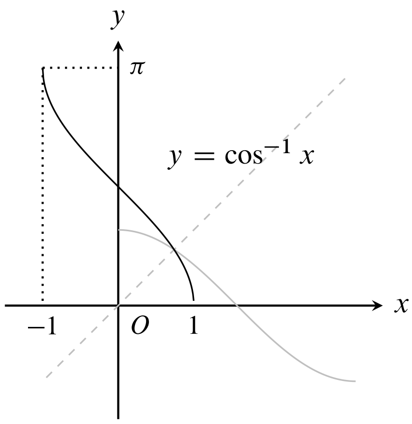
◪　逆余弦関数　$y = \cos^{-1} x$

余弦関数 $y = \cos x$ は，定義域を $x \in [0, \pi]$ に限定すれば，ある $y \in [-1, 1]$ の値に対して x の値がただ一つに決まる（主値）．つまり，逆関数が存在する．これを逆余弦関数 (arccosine)（アークコサイン）といい，

$$y = \cos^{-1} x \qquad や \qquad y = \arccos x \qquad\qquad (\iff x = \cos y)$$

などと表す．定義域は $x \in [-1, 1]$ で，値域は $y \in [0, \pi]$ である．





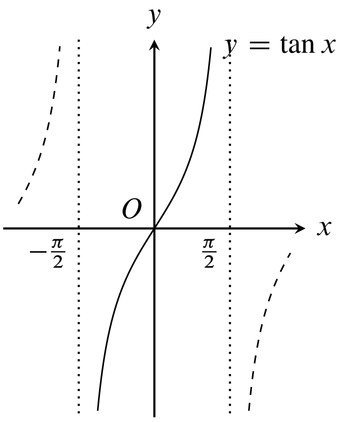
例.　$\cos^{-1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$，$\cos^{-1}\dfrac{1}{3} = 1.230959\cdots$ rad.

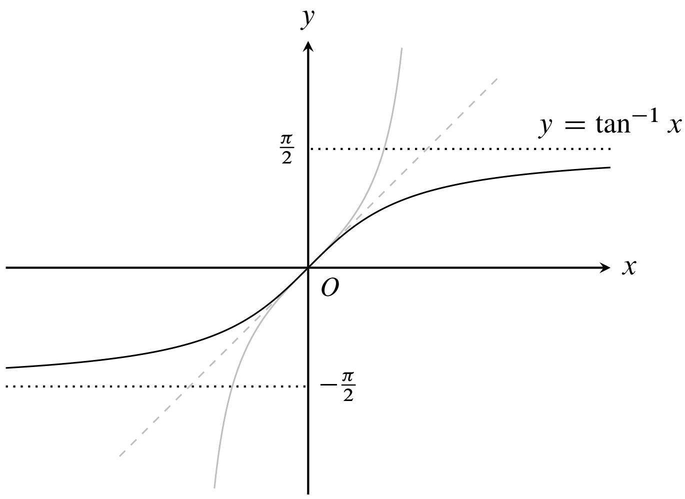
◪ 逆正接関数　$y = \tan^{-1} x$

正接関数 $y = \tan x$ は，定義域を $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ に限定すれば，ある $y \in (-\infty, \infty)$ の値に対して x の値がただ一つに決まる（主値）．つまり，逆関数が存在する．これを逆正接関数 (arctangent)（アークタンジェント）といい，

$$y = \tan^{-1} x \qquad や \qquad y = \arctan x \qquad (\iff x = \tan y)$$

などと表す．定義域は $x \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$（実数全体）で，値域は $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ である．





例.　$\tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$，$\tan^{-1}\dfrac{1}{2} = 0.4636476\cdots$ rad.

◪ その他

$y = \sec x$, $y = \csc x$, $y = \cot x$ についても，同様に逆関数を考えられる．

問　$y = \sec^{-1} x$, $y = \csc^{-1} x$, $y = \cot^{-1} x$ はどんな関数か？

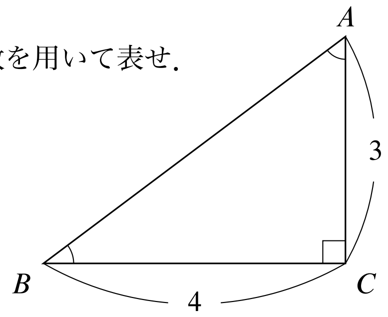
<u>問題 3.1</u>　次の値を求めよ．

(1)　$y = \sin^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$y = \sin^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$y = \cos^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(4)　$y = \cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(5)　$y = \tan^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(6)　$y = \tan^{-1} 1$　　(7)　$y = \sin^{-1} \left(-\dfrac{1}{2}\right)$　　(8)　$y = \cos^{-1} \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(9)　$y = \sin^{-1} 0$

<u>問題 3.2</u>　右図の直角三角形 ABC について，角 A, B を逆正弦関数を用いて表せ．



<u>問題 3.3</u>　$0 < x < 1$ とする．図を用いて，$\cos^{-1} x = \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$ を証明せよ．

3.2　逆三角関数の導関数

- $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$　　$(x \neq \pm 1)$　　導出.　✍
- $(\cos^{-1} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$　　$(x \neq \pm 1)$　　導出.　✍
- $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$　　導出.　✍

【例題 2.9】

関数 $y = \sin^{-1} \dfrac{x}{a}$ を微分せよ．ただし，$a > 0$ とする．

✍

<u>問題 3.4</u>　次の関数を微分せよ．ただし，$a \neq 0$ とする．

(1)　$y = \cos^{-1} 2x$　　(2)　$y = \sin^{-1} \dfrac{x}{2}$　　(3)　$y = \tan^{-1} \sqrt{x}$　　(4)　$y = \dfrac{1}{a} \tan^{-1} \dfrac{x}{a}$