2.2 行列式と連立 1 次方程式（行列式を用いた連立 1 次方程式の解法）

$$A\vec{x} = \vec{b}\,, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

と表される連立 1 次方程式を考える．

例 1. $\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}.$

例 2. $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$

$|A| \neq 0$ のとき，$(*)$ の解は，形式的に

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \tag{$**$}$$

と書かれる．以下，特に断らない限り，$|A| \neq 0$ とする．

◪ Cramer（クラメル）の公式

$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$ と計算されることを用いると，$(**)$ は

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}\,\vec{b} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}b_1 + \tilde{a}_{21}b_2 + \cdots + \tilde{a}_{n1}b_n \\ \tilde{a}_{12}b_1 + \tilde{a}_{22}b_2 + \cdots + \tilde{a}_{n2}b_n \\ \vdots \\ \tilde{a}_{1n}b_1 + \tilde{a}_{2n}b_2 + \cdots + \tilde{a}_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

となる（ただし，$\tilde{a}_{ij}$ は第 (i, j) 余因子を表す）．ここで，行列式 $|A|$ の第 j 列を $\vec{b}$ に置き換えた行列式を Δ_j として，第 j 列に関する余因子展開をすると，

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \tilde{a}_{1j}b_1 + \tilde{a}_{2j}b_2 + \cdots \tilde{a}_{nj}b_n$$

であるから，

$$\vec{x} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} \qquad i.e. \quad x_j = \frac{\Delta_j}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

を得る．これを，Cramer の公式と呼ぶ．

例 1.　$ad - bc \neq 0$ のとき，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ の解は，$x = \dfrac{ds - bt}{ad - bc}$, $y = \dfrac{at - cs}{ad - bc}$.

例 2.　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ のとき，$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の解は，

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} .$$

【例題 2.2】

次の連立 1 次方程式を解け．

$$\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ 3x + 4y - 2z = 19 \\ 4x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

✍

問題 2.2　次の連立 1 次方程式を解け．

(1) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x - 4y = 3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x - 5y - 5z = 0 \\ 2x - 7y - 5z = -1 \\ 5x + 6y - 2z = 3 \end{cases}$

◪ 特に $\vec{b}=\vec{0}$ の場合

ここで，$\vec{b}=\vec{0}$ の場合について考察しよう．

当然，$|A|\neq 0$ であれば，$A\vec{x}=\vec{0}$ の解は $\vec{x}=\vec{0}$ である．他方，$|A|=0$ のとき，$\vec{x}=\vec{0}$ は $A\vec{x}=\vec{0}$ の解であるが，これ以外にも解は存在する（これを非自明な (nontrivial) 解という）．

例. $\begin{cases} x-3y=0 \\ 2x-6y=0 \end{cases}$ の解は，t を任意の実数として，$\begin{cases} x=3t \\ y=t \end{cases}$.

次の定理が成立することが知られている：

定理（$A\vec{x}=\vec{0}$ が非自明な解をもつ条件）．連立方程式 $A\vec{x}=\vec{0}$ が $\vec{x}=\vec{0}$ 以外の解をもつための必要十分条件は，

$$|A|=0 \qquad \textit{i.e.} \quad A\text{ が正則でない}$$

ことである．

【例題 2.3】

次の連立 1 次方程式が $x=y=z=0$ 以外の解をもつように定数 k の値を定めよ．また，そのときの解を求めよ．

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -2x+3y-z=0 \\ -x+ky+z=0 \end{cases}$$

✍

問題 2.3　次の連立 1 次方程式が非自明な解をもつように定数 k の値を定めよ．また，そのときの解を求めよ．

(1) $\begin{cases} 5x+ky=0 \\ -\dfrac{15}{2}x+6y=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+3y-z=0 \\ x+4y-2z=0 \\ kx+7y-3z=0 \end{cases}$

復習：　2 つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ がいずれも零ベクトルでなく，平行でないとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ とは線型独立 (linearly independent) または 1 次独立であるという．$\vec{a}, \vec{b}$ が線型独立であるための必要十分条件は，

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad x = y = 0$$

が成り立つことである．　　　　（復習終わり）

$\vec{a}, \vec{b}$ を並べてできる行列 $(\vec{a}\ \ \vec{b})$ を A，また $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，これは，連立方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ が非自明な解をもたない（自明な (trivial) 解のみをもつ）ことと言い換えられる．すなわち，$\vec{a}, \vec{b}$ が線型独立であるための必要十分条件は，

$$\det\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad i.e. \quad A \text{ が正則である}$$

ことである．

同様に，n 個の n 次元ベクトル $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$，$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$，$\ldots \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ について，これらが線型独立であるとは，

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_1 + \cdots x_n\vec{a}_n = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

が成り立つことをいう．よって，$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ を並べてできる行列 $(\vec{a}_1\ \cdots\ \vec{a}_n)$ を A，また $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とすれば，$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ が線型独立であるための必要十分条件は，

$$\det\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_n\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad i.e. \quad A \text{ が正則である}$$

ことである．

例．$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は線型独立である．

問題 2.4　次のベクトルの組は線型独立か線型従属かを調べよ．

(1)　$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2)　$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$，$\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$