6　曲線の媒介変数表示

6.1　媒介変数表示：イントロダクション

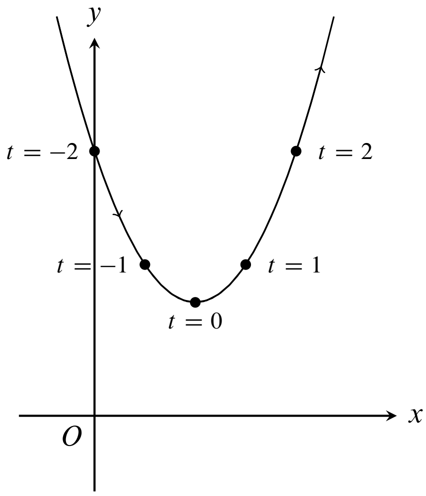
復習：　関数 $y = (x-2)^2 + 3$ のグラフは，$y = x^2$ のグラフを x 軸方向に $+2$，y 軸方向に $+3$ 平行移動した放物線である．

これを，$t = x - 2$ とおいて，次のように考えてみよう．つまり，関数 $y = (x-2)^2 + 3$ のグラフ上の点 P の x 座標と y 座標は，変数 t によって

$$x = t + 2\,,\quad y = t^2 + 3\,,$$

で表される．t の値が変わると，それに対応して x, y の値も変わり，点 P の軌跡は曲線 $y = (x-2)^2 + 3$ を描く．

t	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x	$\cdots$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
y	$\cdots$	7	4	3	4	7	12	$\cdots$



変数 x, y が，ともに変数 t の関数として

$$x = f(t)\,,\quad y = g(t)\,, \tag{$*$}$$

と表されるとき，それらを座標にもつ点 $P\ (x, y)$ はある曲線を描く．このとき，$(*)$ をこの曲線の媒介変数表示あるいはパラメータ表示といい，変数 t を媒介変数やパラメータ (parameter) と呼ぶ．

注意.　媒介変数によるある曲線 C の表示は一通りとは限らない．
また，$y = (x-2)^2 + 3$ の例のように，媒介表示された曲線が必ず $y = [x$ の式$]$ の形に変形できるわけではない．

復習：　原点 O を中心とする半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ は，一般角 θ を用いて

$$x = r\cos\theta\,,\quad y = r\sin\theta\,,$$

と表される．

【例題 6.1】

$x = t^3 - 2t^2 + 1,\ y = t^2 - t$ で表される曲線の概形をかけ.

✍

<u>問題 6.1</u>　$x = 1 - \dfrac{1}{4}t^2,\ y = \sqrt{t}\ (0 \leqslant t \leqslant 4)$ で表される曲線について，上の例題と同様にして，その概形をかけ.

6.2　いろいろな曲線の媒介変数表示

◪ **円**　　*cf.*　配布プリント p. 49 下．

◪ **楕円**

問題 6.2　媒介変数 t によって

$$x = 3\cos t\,,\quad y = 2\sin t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

と表される曲線は楕円 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ であることを証明せよ．　　*cf.*　$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$

◪ **放物線**　　*cf.*　配布プリント p. 49 上，問題 6.4 (1)．

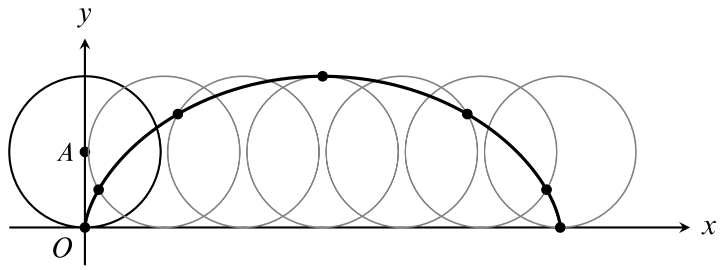
◪ **双曲線**　　*cf.*　双曲線関数，問題 6.3 (2)

◪ **サイクロイド (cycloid)**

【例題 6.2】

点 $A\,(0, a)$ を中心とする半径 a の円がある．この円が x 軸上を正の方向にすべらずに 1 回転するとき，始めに原点にあった点 P の軌跡は，次の媒介変数表示によって与えられることを証明せよ．

$$x = a(t - \sin t)\,,\quad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$



✍

cf.　トロコイド，エピサイクロイド，ハイポサイクロイド

◪ **カージオイド (cardioid)**　　※　エピサイクロイドの特殊な場合．

$$x = a(1 + \cos t)\cos t\,,\quad y = a(1 + \cos t)\sin t$$

◪ **アステロイド (astroid)**　　※　ハイポサイクロイドの特殊な場合．

$$x = a\cos^3 t\,,\quad y = a\sin^3 t$$

cf.　問題 6.3 (1)

◪ **Lissajous（リサージュ）曲線**

$$x = x_0 \sin(\omega_x t)\,,\quad y = y_0 \sin(\omega_y t + \delta)$$

cf.　問題 6.4 (2)，教科書 p. 78，発展問題

6.3　媒介変数表示による関数の導関数

$x = f(t), y = g(t)$ のとき，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \qquad (ただし，\ f'(t) \neq 0)$$

である．

【例題 6.3】

半径 r の円の媒介変数表示 $x = r\cos t,\ y = r\sin t$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

✍

問題6.3　次の媒介変数表示による関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(1)　$x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$　　(2)　$x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2},\ y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

【例題 6.4】

サイクロイド $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$ 上の $t = \dfrac{\pi}{2}$ に対応する点を求めよ．また，その点における接線の方程式を求めよ．

✍

問題6.4　次の媒介変数で表される曲線上の ( ) 内の t の値に対応する点を求めよ．また，その点における接線の方程式を求めよ．

(1)　$x = t - t^2,\ y = t - 1 \quad (t = 1)$　　(2)　$x = 2\sin t,\ y = \cos 2t \quad \left(t = \dfrac{\pi}{3}\right)$

発展問題　曲線 $x = \cos\theta,\ y = \sin 2\theta$ の概形をかけ．