7　微分法の応用を支える基礎理論

これまでに扱ってきた「微分法の応用」において，その基本にあるのは，多くの場合，

関数 $f(x)$ が，ある区間で微分可能で $f'(x) \geqq 0$ ならば，その区間で $f(x)$ は $\left\{\begin{array}{c}\text{増加}\\ \text{減少}\end{array}\right\}$ する

という性質であった．これは，一見自明に思われる性質であり，このような命題を数学的に証明するのはしばしば難しいことである．しかしここでは，この性質の証明に挑戦してみよう (§7.1).

さらに，以上の証明に用いられる定理（Lagrange（ラグランジュ）の平均値の定理）の拡張を考えることで，第 11 週①で扱った l'Hôspital（ロピタル）の定理を証明することができるので，これもここで扱う (§7.2)．最後に，3 年生で習う微分法の応用の話題に軽く触れて，本章を終える (§7.3).

7.1　関数の増減に関する性質の証明

◪　最大値・最小値の存在定理

☞　第 6 週①

「関数の増減に関する性質の証明」の出発点となるのは，以下の定理である．この定理が成り立つことは，証明なしに認めることにしよう（*cf.* Bolzano–Weierstrass の定理，Heine–Borel の被覆定理）.

定理（最大値・最小値の存在）．閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ は，この区間で必ず最大値と最小値をもつ．すなわち，区間 $[a,b]$ 内の任意の x について，

$$f(c_1) \leqslant f(x) \leqslant f(c_2)$$

を満たすような c_1 および c_2 が区間 $[a,b]$ に必ず存在する（$f(c_1)$, $f(c_2)$ がそれぞれ最小値，最大値である）.

◪　Rolle（ロル）の定理

定理（Rolle の定理）．関数 $f(x)$ が，閉区間 $[a,b]$ で連続で，開区間 (a,b) で微分可能であり，さらに $f(a) = f(b)$ であるとき

$$f'(c) = 0$$

を満たすような c が区間 (a,b) に少なくとも 1 つ存在する．

証明.　$f(x)$ が定数関数のとき，$f'(x) = 0$ だから明らか．以下，$f(x)$ が定数函数でないときを考える．$f(x) - f(a)$ を考えれば，$f(a) = f(b) = 0$ として一般性を失わない．$f(x) > f(a) = 0$ となる x が区間 (a,b) にあると仮定する．このとき，最大値・最小値の存在定理により，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ に正の最大値をもつ．$f(x)$ は $x = c$ で正の最大値をとるとする．$h > 0, c + h \leqslant b$ として，$f(c+h) - f(c) \leqslant 0$ だから，$0 < h \leqslant b - c$ に対して

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0\,.$$

$h \to +0$ とすると，$f(x)$ は $x = c$ で微分可能だから，$f'(c) \leqslant 0$．また，$h > 0, c - h \leqslant a$ として，$f(c-h) - f(c) \leqslant 0$ だから，$0 < h \leqslant c - a$ に対して

$$\frac{f(c-h) - f(c)}{h} \leqslant 0\,.$$

$h \to +0$ とすると，$f(x)$ は $x = c$ で微分可能であり，$f'(c) \geqslant 0$．以上より，$f'(c) = 0$ が分かる．

他方，$f(x) < f(a) = 0$ となる x が区間 (a, b) にあるときは，$-f(x)$ を考えれば上と同様の議論に帰着される．　∎

注意.　Rolle の定理の証明から，

$$f(x) \text{ が } x = c \text{ で極値をとる} \quad \Longrightarrow \quad f'(c) = 0$$

が分かる．

◪ Lagrange（ラグランジュ）の平均値の定理

Rolle の定理の第 3 の仮定「$f(a) = f(b)$ である」は，実は外すことができる．つまり，点 $A\,(a, f(a))$, $B\,(b, f(b))$ が x 軸上に来るように，“うまい変形”をしてやれば良い．それが，Lagrange の平均値の定理である．なお，単に「平均値の定理」というと，この Lagrange の平均値の定理を指す．

定理（Lagrange の平均値の定理）**.**　関数 $f(x)$ が，閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能であるとき

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を満たすような c が区間 (a, b) 内に少なくとも 1 つ存在する．

証明.　点 $A\,(a, f(a))$, $B\,(b, f(b))$ を通る直線の傾きを m とおくと，

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

であり，直線 AB の方程式は，

$$y = f(a) + m(x - a)\,.$$

$y = f(x)$ との差：

$$F(x) = f(x) - f(a) - m(x - a)$$

を作ると，$F(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能であり，

$$F'(x) = f'(x) - m\,.$$

さらに

$$F(a) = f(a) - f(a) - m(a - a) = 0\,,$$
$$F(b) = f(b) - f(a) - m(b - a)$$

$$= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0 \,.$$

したがって，Rolle の定理より，

$$F'(c) = f'(c) - m = 0 \qquad i.e. \qquad f'(c) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たすような c が区間 (a, b) に少なくとも 1 つ存在する． ∎

◪ 関数の増減に関する性質

Lagrange の平均値の定理を用いて，関数の増減に関する性質が証明できる．

定理（関数の増減）． 関数 $f(x)$ が，開区間 (a, b) で微分可能であるとき

(I) I で $f'(x) > 0$ ならば，$f(x)$ は I で単調に増加する．
(II) I で $f'(x) < 0$ ならば，$f(x)$ は I で単調に減少する．

証明． I で $f'(x) > 0$ のとき，I 内の任意の点 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ について，平均値の定理から

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

を満たす c が (x_1, x_2) 内に存在する．$f'(c) > 0, x_2 - x_1 > 0$ だから

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad i.e. \qquad f(x_2) > f(x_1) \,.$$

したがって，$f(x)$ は I で単調に増加する．
他方，I で $f'(x) < 0$ のときも，これと同様に示される． ∎

ほかにも，以下の定理が示される．

定理（定数関数であるための必要十分条件）． 関数 $f(x)$ が区間 I で微分可能であるとする．

$$I \text{ で常に } f'(x) = 0 \text{ である} \quad \Longleftrightarrow \quad I \text{ で定数関数である．}$$

証明． $\Longleftarrow$) 自明．
$\Longrightarrow$) 平均値の定理より，

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

を満たす c が (x_1, x_2) 内に少なくとも 1 つ存在する．仮定より $f'(c) = 0$ なので，

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \qquad i.e. \qquad f(x_2) = f(x_1) \,.$$

よって，$f(x)$ の値は I 内のすべての点で等しいから，$f(x)$ は I で定数関数である． ∎

ロ ピ タ ル
7.2 l’Hôspitalの定理の証明

コ ー シ ー
◪ Cauchyの平均値の定理

Lagrange の平均値の定理にはさまざまな拡張があるが，応用上，次の Cauchy の平均値の定理が重要である．

定理（Cauchy の平均値の定理）． 関数 $f(x), g(x)$ が，閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能で，区間 (a,b) のすべての点 x について $g'(x) \neq 0$ とする．このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たすような c が区間 (a,b) 内に少なくとも 1 つ存在する．

証明. $g'(x) = 0$ より $g(x)$ は単調に増加または減少するから，$g(a) \neq g(b)$ である．Lagrange の平均値の定理の証明と同様に，

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

とおき，

$$F(x) = f(x) - f(a) - m\bigl[g(x) - g(a)\bigr]$$

とすると，$F(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続で，開区間 (a,b) で微分可能であり，

$$F'(x) = f'(x) - mg'(x)\,.$$

さらに

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - f(a) - m\bigl[g(a) - g(a)\bigr] = 0\,, \\ F(b) &= f(b) - f(a) - m\bigl[g(b) - g(a)\bigr] \\ &= f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\bigl[g(b) - g(a)\bigr] = 0\,. \end{aligned}$$

したがって，Rolle の定理より，

$$F'(c) = f'(c) - mg'(c) = 0 \qquad i.e. \qquad f'(c) = mg'(c)$$

を満たすような c が区間 (a,b) に少なくとも 1 つ存在する．よって，$g'(c) \neq 0$ だから

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = m \qquad i.e. \qquad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

∎

※ Lagrange の平均値の定理は，$g(x) = x$ の場合．

ロ ピ タ ル
◪ l’Hôspitalの定理

Cauchy の平均値の定理を用いて，l’Hôspital の定理が証明できる．

定理（l'Hôspital の定理）． 関数 $f(x), g(x)$ は $f(a) = g(a) = 0$ を満たし，$x = a$ の近くで微分可能で，$g'(x) \neq 0$ $(x \neq a)$ であるとする．このとき，

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在するならば，} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

証明. 仮定より $f(a) = g(a) = 0$ なので，Cauchy の平均値の定理から，a と x の間のある値 c に対して，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

が成り立つ．ここで $x \to a$ の極限を考えると，$c \to a$ となるから

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

∎

注意. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が $\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形の場合や $x \to \infty$ の場合については，これでは証明されない．

7.3 Lagrange の平均値の定理とTaylor（テイラー）の定理，Taylor（テイラー）展開

Lagrange の平均値の定理に現れる $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ という式は，$b = a + h, c = a + \theta h$ $(0 < \theta < 1)$ とおいて分母を払うことで，次のように変形される：

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h) \ .$$

あるいは，$h = x - a$ 書き換えると，

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a + \theta(x - a))$$

を得る．これは，$x = a$ の近くで関数 $f(x)$ が 1 次関数で近似できることを意味している．

$x = a$ の近くで関数 $f(x)$ がより高次の多項式で近似できることを主張するのが，以下の Taylor の定理である：

定理（Taylor の定理）． 関数 $f(x)$ が区間 I で n 回微分可能であるとする．a を I 内のある点とすると，I 内の任意の x に対して，a と x の間にある適当な値 c を選べば

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - a)^n$$

が成り立つ．

※ 証明には，Cauchy の平均値の定理を用いる．

cf. Taylor 展開：

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n + \cdots \ .$$

特に $a = 0$ のとき（Maclaurin（マクローリン）展開），

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \cdots \ .$$