Yuta Kataoka
@yutkatkitkat (Twitter)

2019 年 3 月 24 日

目次

参考文献

[1] 新井 朝雄, フォック空間と量子場 (上), 数理物理シリーズ, 日本評論社 (2000).
[2] 新井 朝雄, 量子現象の数理, 朝倉物理学体系, 朝倉書店 (2006).
[3] 新井 朝雄, 現代ベクトル解析, 共立出版 (2006).
[4] 新井 朝雄, 量子統計力学の数理, 共立出版 (2008).
[5] 新井 仁之, 新・フーリエ解析と関数解析学, 培風館 (2010).
[6] V. I. アーノルド (著), 安藤 韶一 (翻訳), 蟹江 幸博 (翻訳), 丹羽 敏雄 (翻訳), 古典力学の数学的方法, 岩波書店; 第 10 版 (2003).
[7] O. Bratteli, D. W. Robinson, Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics: Equilibrium States. Models in Quantum Statistical Mechanics, Springer; 2nd ed. (1997).
[8] K. R. Davidson, C^*-Algebras by Example, Fields Institute Monographs 6, American Mathematical Society (1996).
[9] J. Derezinski, Introduction to representations of the canonical commutation and anticommutation relations, arXiv:math-ph/0511030.
[10] J. Derezinski, C. Gerard, Mathematics of Quantization and Quantum Fields, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press; 1 版 (2013).
[11] B. Driver, Analysis Tools with Applications, web で公開されているレクチャーノート.
[12] G. Folland, Harmonic Analysis in Phase Space, Annals of Mathematics Studies, 122, Princeton Univ Pr (1989).
[13] G. Folland, A Course in Abstract Harmonic Analysis, Textbooks in Mathematics, CRC Press, 1st ed. (1994).
[14] B. Hall, Quantum Theory for Mathematicians, Graduate Texts in Mathematics, Springer (2013).
[15] 伊藤 秀一, 常微分方程式と解析力学, 共立講座 21 世紀の数学, 共立出版 (1998).
[16] Jürgen Jost, Partial Differential Equations, Graduate Texts in Mathematics, Springer; 3 版 (2012).
[17] A. Ya. Khinchin, Mathematical Foundations of Statistical Mechanics, Dover Publications (1949)
[18] 松島 与三, 多様体入門, 数学選書 (5), 裳華房 (1965).
[19] G. J. Murphy, C^*-Algebras and Operator Theory, Academic Press; 1 版 (1990).
[20] 宮島 静雄, ソボレフ空間の基礎と応用, 共立出版 (2006).
[21] 宮島 静雄, 微分積分学としてのベクトル解析, 共立出版 (2007).
[22] G. K. Pedersen, Analysis Now, Graduate Texts in Mathematics, Springer; 1st ed. (1989).
[23] G. K. Pedersen, C^*-Algebras and Their Automorphism Groups, London Mathematical Society Monographs, Academic Pr.(1979).
[24] W. Rudin, REAL AND COMPLEX ANALYS, Higher Mathematics Series, McGraw-Hill Professional; 3rd ed. (1986).
[25] W. Rudin, Functional Analysis, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Education (ISE Editions); 2nd ed. (1991).
[26] R. E. Showalter, Hilbert Space Methods in Partial Differential Equations , Dover Publications; Dover 版 (2010).
[27] M. Spivak (著), 齋藤 正彦 (翻訳), スピヴァック多変数の解析学 — 古典理論への現代的アプローチ, 東京図書; 新装版 (2007).
[28] 杉浦 光夫, 解析入門 I (基礎数学 2), 東京大学出版会 (1980).
[29] 杉浦 光夫, 解析入門 II (基礎数学 3), 東京大学出版会 (1985).
[30] 砂田 利一, 岩波講座 物理の世界 物の理 数の理〈3〉数学から見た連続体の力学と相対論, 岩波書店 (2004).
[31] 砂田 利一, 岩波講座 物理の世界 物の理 数の理〈4〉数学から見た統計力学と熱力学, 岩波書店 (2004).
[32] M. Takesaki, Theory of Operator Algebras I, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Springer; 1st ed. 1979. 2nd printing (2002).
[33] 梅垣 寿春, 日合 文雄, 大矢 雅則, 作用素代数入門-Hilbert 空間より von Neumann 代数, 共立出版; 復刊版 (2003).
[34] D. P. Williams, Crossed Products of C^*-Algebras, Mathematical Surveys and Monographs, Amer Mathematical Society (2007).
[35] 山内 恭彦, 杉浦 光夫, 連続群論入門, 新数学シリーズ, 培風館; 新装版 (2010).

1 基礎的事項

1.1 順序, 選択公理, Zorn の補題

定義 1.1 (順序, 前順序, 全順序)**.** X を空でない集合とする. X 上の 2 項関係 $\leqslant$ が次を満たすとき $\leqslant$ を X 上の 前順序 と言う.

反射律 任意の $x \in X$ に対し $x \leqslant x$.
推移律 $x, y, z \in X$ が $x \leqslant y$ かつ $y \leqslant z$ を満たすならば $x \leqslant z$.

そして X 上の前順序 $\leqslant$ が次を満たすとき $\leqslant$ を X 上の順序と言う.

反対称律 $x, y \in X$ が $x \leqslant y$ かつ $y \leqslant x$ を満たすならば $x = y$.

さらに X 上の順序 $\leqslant$ が次を満たすとき $\leqslant$ を X 上の全順序と言う.

全順序性 任意の $x, y \in X$ に対し $x \leqslant y$ か $y \leqslant x$ が成り立つ.

順序 (resp. 前順序, 全順序) が備わった集合を順序集合 (resp. 前順序集合, 全順序集合) と言う.
X を前順序集合とする. $x, y \in X$ が $x \leqslant y$ であることを $y \geqslant x$ とも表す. また $x \leqslant y$ かつ $x \neq y$ であることを $x < y$ もしくは $y > x$ とも表す.
X を順序集合 (resp. 前順序集合, 全順序集合) とする. X の任意の空でない部分集合 $E \subseteq X$ は X の順序 (resp. 前順序, 全順序) をそのまま受け継いで順序集合 (resp. 前順序集合, 全順序集合) となる. 以後, 特に断らない限り暗黙に, 順序集合 (resp. 前順序集合, 全順序集合) の空でない部分集合はこうして順序集合 (resp. 前順序集合, 全順序集合) とみなす.

例 1.2. 整数全体 $\mathbb{Z}$ は通常の順序によって全順序集合であり, その部分集合である自然数全体 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\} \subseteq \mathbb{Z}$, 非負整数全体 $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\} \subseteq \mathbb{Z}$ も全順序集合である.

定義 1.3 (包含関係, 逆包含関係による順序)**.** X を集合とし 2^X を X の部分集合全体からなる集合とする. $A, B \in 2^X$ に対し,

$$A \leqslant_{\text{inc.}} B \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} A \subseteq B$$

として 2^X 上の順序 $\leqslant_{\text{inc.}}$ が定義できる. この順序を 包含関係による順序 と言う. また, $A, B \in 2^X$ に対し,

$$A \leqslant_{\text{rev. inc.}} B \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} B \subseteq A$$

として 2^X 上の順序 $\leqslant_{\text{rev. inc.}}$ が定義できる. この順序を 逆包含関係による順序 と言う.

定義 1.4 (上界, 下界, 上に有界, 下に有界)**.** X を前順序集合 (定義 1.1), $E \subseteq X$, $E \neq \varnothing$ とする. $x \in X$ が E の上界 (resp. 下界) であるとは, 任意の $y \in E$ に対し $x \geqslant y$ (resp. $x \leqslant y$) が成り立つことを言う. そして E が上界 (resp. 下界) を持つとき E は上に有界 (resp. 下に有界) であると言う.

定義 1.5 (最大元, 最小元)**.** X を順序集合, $E \subseteq X$, $E \neq \varnothing$ とする. E の上界 (resp. 下界) で E の元であるものを E の最大元 (resp. 最小元) と言う. 順序の反対称律 (定義 1.1) より E の最大元, 最小元はそれぞれ存在するならば唯一つである. そこで E の最大元が存在するときそれを $\max(E)$ と表し, E の最小元が存在するときそれを $\min(E)$ と表す.

定義 1.6 (上限, 下限)**.** X を順序集合, $E \subseteq X$, $E \neq \varnothing$ とし, E は上に有界 (resp. 下に有界) であるとする. E の上界全体からなる集合が最小元を持つ (resp. 下界全体からなる集合が最大元を持つ) とき, それを E の上限 (resp. 下限) と言い, $\sup(E)$ (resp. $\inf(E)$) と表す.

定義 1.7 (整列順序集合)**.** X を順序集合とする. 任意の空でない $E \subseteq X$ が最小元を持つとき, X は整列順序集合であると言う.

命題 1.8. 整列順序集合は全順序集合である.

証明. X を整列順序集合とする．任意の $x, y \in X$ に対し $\{x, y\} \subseteq X$ は最小元を持つ．x が $\{x, y\}$ の最小元ならば $x \leqslant y$ であり，y が $\{x, y\}$ の最小元ならば $y \leqslant x$ である．よって X は全順序集合である． □

定義 1.9 (帰納的順序集合)**.** X を順序集合とする．任意の全順序部分集合が最大元を持つとき，X は帰納的順序集合であると言う．

定義 1.10 (極大元)**.** X を順序集合とする．$\omega \in X$ が X の極大元であるとは，

$$\{x \in X : x > \omega\} = \varnothing$$

であることを言う．

定義 1.11 (選択関数, 選択公理)**.** X を空でない集合，2^X を X の部分集合全体からなる集合とする．関数

$$c : 2^X \backslash \{\varnothing\} \to X$$

で，

$$c(E) \in E \quad (\forall E \in 2^X \backslash \{\varnothing\})$$

を満たすものを X 上の選択関数と言う．任意の空でない集合 X に対し X 上の選択関数が存在すると言う公理を選択公理と言う．この文書では一貫して選択公理は認める立場を採る．

定理 1.12 (Zorn の補題)**.** 任意の帰納的順序集合 (定義 1.9) は極大元 (定義 1.10) を持つ．

証明. X を帰納的順序集合とする．任意の $E \subseteq X$ に対し

$$\mathrm{maj}(E) := \{x \in X : \forall y \in E, x > y\}, \quad \mathrm{minr}(E) := \{x \in X : \forall y \in E, x < y\}$$

とおく．ただし $\mathrm{maj}(\varnothing) = \mathrm{minr}(\varnothing) = X$ である．$c : 2^X \backslash \{\varnothing\} \to X$ を X 上の選択関数 (定義 1.11) とする．今，空でない $C \subseteq X$ が次の条件を満たすとき C をチェインと呼ぶこととする．

(1) C は整列順序集合である．
(2) 任意の $x \in C$ に対し $c\left(\mathrm{maj}\left(C \cap \mathrm{minr}\{x\}\right)\right) = x$ が成り立つ．

一点集合 $\{c(X)\}$ は明らかにチェインである．よってチェインは少なくとも 1 つは存在する．証明を 4 つの段階に分ける．

主張 1: C_1, C_2 をチェインとし，$C_1 \backslash C_2 \neq \varnothing$ であるとする．そして $C_1 \backslash C_2$ の最小元を x_1[*1] とする．このとき，

$$C_1 \cap \mathrm{minr}\{x_1\} = C_2 \tag{1.1}$$

が成り立つ．

主張 1 **の証明**. x_1 は $C_1 \backslash C_2$ の最小元なので，

$$C_1 \cap \mathrm{minr}\{x_1\} \subseteq C_2 \tag{1.2}$$

である．(1.2) の $\subseteq$ が $=$ ではないと仮定して矛盾を導く．すると $C_2 \backslash (C_1 \cap \mathrm{minr}\{x_1\}) \neq \varnothing$ であるから，この最小元を x_2 とおくと，

$$C_2 \cap \mathrm{minr}\{x_2\} \subseteq C_1 \cap \mathrm{minr}\{x_1\} \tag{1.3}$$

となる．ここでもし (1.3) の $\subseteq$ が $=$ であるならば (2) より $x_1 = x_2$ となるが，$x_1 \notin C_2$, $x_2 \in C_2$ なので矛盾する．よって (1.3) の $\subseteq$ は $=$ ではないので，$(C_1 \cap \mathrm{minr}\{x_1\}) \backslash (C_2 \cap \mathrm{minr}\{x_2\}) \neq \varnothing$ である．そこでこの最小元を y とおくと，$y < x_1$ と (1.2) より，

$$C_1 \cap \mathrm{minr}\{y\} \subseteq C_1 \cap \mathrm{minr}\{x_1\} \subseteq C_2$$

であり，y が $(C_1 \cap \mathrm{minr}\{x_1\}) \backslash (C_2 \cap \mathrm{minr}\{x_2\})$ の最小元であることから，

$$C_1 \cap \mathrm{minr}\{y\} \subseteq C_2 \cap \mathrm{minr}\{x_2\} \tag{1.4}$$

[*1] C_1 は整列順序集合であることに注意．

である. $x_2, y \in C_2$ であるから C_2 が整列順序集合であることにより $x_2 \leqslant y$ か $y < x_2$ のどちらかが成り立つが, $y \notin C_2 \cap \mathrm{minr}\{x_2\}$ なので $x_2 \leqslant y$ である. よって (1.3) より,

$$C_2 \cap \mathrm{minr}\{x_2\} \subseteq (C_1 \cap \mathrm{minr}\{x_1\}) \cap \mathrm{minr}\{y\} \subseteq C_1 \cap \mathrm{minr}\{y\}$$

となるので (1.4) の $\subseteq$ は $=$ である. 従って (2) より $y = x_2$ であることになるが, $y \in C_1 \cap \mathrm{minr}\{x_1\}$ であり, $x_2 \notin C_1 \cap \mathrm{minr}\{x_1\}$ なので矛盾する. ゆえに (1.2) の $\subseteq$ は $=$ でなくてはならないので (1.1) が成り立つ.

主張 2:　全てのチェインの合併はチェインである.

主張 2 の証明.　$\{C_j\}_{j \in J}$ をチェイン全体からなる集合とし, $C := \bigcup_{j \in J} C_j$ とおく. C がチェインであることを示せばよい. まず C が整列順序集合であることを示す. 任意の空でない部分集合 $E \subseteq C$ を取り, $E \cap C_j \neq \varnothing$ なる $j \in J$ を取る. C_j が整列順序集合であることから $E \cap C_j$ は最小元 x_j を持つ. x_j が実は E の最小元であることを示す. そこで任意の $x \in E$ を取り, $x_j \leqslant x$ が成り立つことを示す. もし $x \in C_j$ ならば $x \in E \cap C_j$ より自明だから, $x \notin C_j$ であるとする. $x \in C$ であるからある $i \in J$ に対し $x \in C_i \backslash C_j$ である. $C_i \backslash C_j$ の最小元を x_i とおけば $x_i \leqslant x$ であり, 主張 1 より,

$$C_i \cap \mathrm{minr}\{x_i\} = C_j$$

が成り立つので $x_j < x_i \leqslant x$ である. ゆえに x_j は E の最小元であるから, C は整列順序集合である.
次に C が (2) を満たすことを示す. 任意の $x \in C$ を取り, $x \in C_j$ なる $j \in J$ を取る.

$$C \cap \mathrm{minr}\{x\} = C_j \cap \mathrm{minr}\{x\} \tag{1.5}$$

が成り立つことを示せばよい. もし $y \in C \cap \mathrm{minr}\{x\}$ で $y \notin C_j$ なるものがあるならば, $y \in C_i \backslash C_j$ なる $i \in J$ を取り, $C_i \backslash C_j$ の最小元を x_i とおけば, $x_i \leqslant y$ であり, 主張 1 より,

$$C_i \cap \mathrm{minr}\{x_i\} = C_j$$

である. よって $x < x_i \leqslant y < x$ となり矛盾する. よって (1.5) が成り立つ. ゆえに C はチェインである.

主張 3:　主張 2 における全てのチェインの合併からなるチェイン C に対し, $\mathrm{maj}(C) = \varnothing$ が成り立つ.

主張 3 の証明.　$\mathrm{maj}(C) \neq \varnothing$ であると仮定すると,

$$\omega := c(\mathrm{maj}(C)) \in X$$

が定義できる. $\widetilde{C} := C \cup \{\omega\}$ とおけば $\widetilde{C}$ は明らかに整列順序集合であり,

$$\begin{aligned} c\left(\mathrm{maj}\left(\widetilde{C} \cap \mathrm{minr}\{x\}\right)\right) &= c\left(\mathrm{maj}\left(C \cap \mathrm{minr}\{x\}\right)\right) = x \quad (\forall x \in C), \\ c\left(\mathrm{maj}\left(\widetilde{C} \cap \mathrm{minr}\{\omega\}\right)\right) &= c\left(\mathrm{maj}(C)\right) = \omega \end{aligned}$$

だから, $\widetilde{C}$ はチェインである. しかし C の最大性より $\omega \in \widetilde{C} = C$ となり矛盾する. ゆえに $\mathrm{maj}(C) = \varnothing$ である.

主張 4:　X は極大元を持つ.

主張 4 の証明.　主張 2 における全てのチェインの合併からなるチェイン C を考える. C は整列順序集合なので全順序集合であり, X は帰納的順序集合であるから C は最大元 ω を持つ. 主張 3 より,

$$\{x \in X : x > \omega\} \subseteq \mathrm{maj}(C) = \varnothing$$

だから ω は X の極大元である.

□

1.2　Bernstein の定理

定義 1.13 (単射, 全射, 全単射)**.** X, Y を空でない集合とする. 写像 $f : X \to Y$ が単射であるとは $x_1, x_2 \in X$ が $x_1 \neq x_2$ である限り $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成り立つことを言う. また写像 $f : X \to Y$ が全射であるとは $f(X) = Y$ であること, すなわち, 任意の $y \in Y$ に対し $f(x) = y$ なる $x \in X$ が存在することを言う.

命題 1.14. X, Y を空でない集合とする．このとき次は互いに同値である．

(1) $X \to Y$ の単射が存在する．
(2) $Y \to X$ の全射が存在する．

証明. (1) ⇒ (2) は自明である．(2) ⇒ (1) を示す．(2) が成り立つとし $g : Y \to X$ を全射とする．また $c : 2^X \backslash \{\varnothing\} \to X$ を X 上の選択関数 (定義 1.11) とする．$g : Y \to X$ が全射であることから任意の $x \in X$ に対し $g^{-1}(\{x\}) \in 2^X \backslash \{\varnothing\}$ である．よって

$$f(x) := c(g^{-1}(\{x\})) \quad (\forall x \in X)$$

として写像 $f : X \to Y$ が定義できる．このとき，

$$g(f(x)) = x \quad (\forall x \in X)$$

であるから，$x_1, x_2 \in X$ が $f(x_1) = f(x_2)$ を満たすならば，

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$$

である．ゆえに $f : X \to Y$ は単射である．□

定義 1.15. X, Y を空でない集合とする．X から Y への単射が存在することを，

$$\mathrm{card}(X) \leqslant \mathrm{card}(Y) \tag{1.6}$$

によって表す．また Y から X への全射が存在することを，

$$\mathrm{card}(Y) \geqslant \mathrm{card}(X) \tag{1.7}$$

によって表す．そして X と Y の間に全単射が存在することを，

$$\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y) \tag{1.8}$$

によって表し，このとき X と Y の集合としての濃度は等しいと言う．命題 1.14 より (1.6) と (1.7) は同値である．そして次の Bernstein の定理 1.16 で見るように，(1.6), (1.7) が両方成り立つことは，(1.8) が成り立つことと同値である．

定理 1.16 (Bernstein の定理)**.** X, Y を空でない集合とする．このとき次は互いに同値である．

(1) $\mathrm{card}(X) \leqslant \mathrm{card}(Y)$ かつ $\mathrm{card}(Y) \leqslant \mathrm{card}(X)$.
(2) $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$.

証明. (2) ⇒ (1) は自明である．(1) ⇒ (2) を示す．(1) が成り立つとして (2) が成り立つことを示す．$f : X \to Y$, $g : Y \to X$ を単射とする．もし $Y = f(X)$ ならば $f : X \to Y$ は全単射なので (2) が成り立つ．よって $Y \backslash f(X) \neq \varnothing$ と仮定して (2) が成り立つことを示せばよい．

$$Y_0 := Y \backslash f(X) \neq \varnothing \tag{1.9}$$

とおく．X の部分集合の列 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ と Y の部分集合の列 $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$[*2] を

$$X_n := g(Y_{n-1}), \quad Y_n := f(X_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{1.10}$$

となるように帰納的に定義する．このとき，

$$X_* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n, \quad Y_* := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} Y_n,$$
$$X^* := X \backslash X_*, \quad Y^* := Y \backslash Y_* \tag{1.11}$$

*2 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$ である．

とおくと, (1.10) より,

$$g(Y_*) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} g(Y_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X_*$$

だから $Y_* \ni y \mapsto g(y) \in X_*$ は全単射である．そこでこの全単射の逆写像を $F_* : X_* \to Y_*$ とおく．また (1.9), (1.10) より,

$$f(X) = Y\backslash Y_0,\quad f(X_*) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(X_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$$

であり, f の単射性より,

$$f(X^*) = f(X\backslash X_*) = f(X)\backslash f(X_*)$$

だから,

$$f(X^*) = f(X)\backslash f(X_*) = (Y\backslash Y_0)\backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n = Y\backslash \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} Y_n = Y\backslash Y_* = Y^*$$

である．よって $F^* : X^* \ni x \mapsto f(x) \in Y^*$ は全単射である．これより $F : X \to Y$ を,

$$F(x) := \begin{cases} F_*(x) & (x \in X_*) \\ F^*(x) & (x \in X^*) \end{cases}$$

として定義すると (1.11) より $F : X \to Y$ は全単射である．よって (2) が成り立つ． □

定義 1.17 (有限集合, 無限集合, 可算集合)**.** X を空でない集合とし, $\mathbb{N}$ を自然数全体とする．X が有限集合であるとは X が有限個の元からなることを言う．X が有限集合でないとき X は無限集合であると言う．X が無限集合であることは,

$$\mathrm{card}(X) \geqslant \mathrm{card}(\mathbb{N})$$

によって表せる．

$$\mathrm{card}(X) \leqslant \mathrm{card}(\mathbb{N})$$

が成り立つとき X は可算集合であると言う．有限集合は可算集合である．X が可算集合でありかつ無限集合である, すなわち,

$$\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(\mathbb{N})$$

である (Bernstein の定理 1.16 を参照) とき, X は可算無限集合であると言う．

定理 1.18 (無限集合と可算集合)**.** X を無限集合, Y を可算集合とする．このとき次が成り立つ．

(1) $\mathrm{card}(X \cup Y) = \mathrm{card}(X)$.

(2) $\mathrm{card}(X \times Y) = \mathrm{card}(X)$.

証明. (1) $X \cap Y = \varnothing$ であると仮定しても一般性は失わないのでそうする．X は無限集合なので可算無限部分集合 $A \subseteq X$ が取れる．$A \cup Y$ も可算無限集合だから,

$$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(A \cup Y)$$

なので全単射 $f : A \to A \cup Y$ が取れる．

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in A) \\ x & (x \in X\backslash A) \end{cases}$$

とおけば $F : X \to Y$ は全単射である．

(2) 任意の可算無限部分集合 $A \subseteq X$ に対し $A \times Y$ も可算無限集合だから,

$$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(A \times Y)$$

なので全単射 $\varphi : A \to A \times Y$ が取れる．よって

$$\Lambda := \{(\varphi, A) : \varphi : A \to A \times Y \text{ は全単射}\}$$

とおくと $\Lambda \neq \varnothing$ である. 今, Λ 上の 2 項関係 $\leqslant$ を,

$$(\varphi_1, A_1) \leqslant (\varphi_2, A_2) \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} A_1 \subseteq A_2,\quad \varphi_2|_{A_1} = \varphi_1$$

($\varphi_2|_{A_1}$ は φ_2 の A_1 上への制限) として定義すると $\leqslant$ は明らかに Λ 上の順序である. そして $(\Lambda, \leqslant)$ は帰納的順序集合 (定義 1.9) である. 実際, $\{(\varphi_j, A_j)\}_{j\in J} \subseteq \Lambda$ を全順序部分集合とすると, 全順序性より,

$$\varphi : \bigcup_{j\in J} A_j \to \bigcup_{j\in J} A_j \times Y$$

で,

$$\varphi|_{A_j} = \varphi_j \quad (\forall j \in J) \tag{1.12}$$

を満たすものが定義できる. そして $\{(\varphi_j, A_j)\}_{j\in J}$ の全順序性より φ は全単射であるので $(\varphi, \bigcup_{j\in J} A_j) \in \Lambda$ であり, (1.12) より $(\varphi, \bigcup_{j\in J} A_j)$ は $\{(\varphi_j, A_j)\}_{j\in J}$ の上界である. ゆえに $(\Lambda, \leqslant)$ は帰納的順序集合である. よって Zorn の補題 1.12 より $(\Lambda, \leqslant)$ の極大元 (φ_m, A_m) が取れる. 今, $X\backslash A_m$ は高々有限集合であることを示す. 実際, $X\backslash A_m$ が無限集合であるとすると, 可算無限集合 $A \subseteq X\backslash A_m$ が取れるので, 全単射 $\varphi : A \to A \times Y$ が取れる. このとき

$$\widetilde{\varphi_m}(x) := \begin{cases} \varphi_m(x) & (x \in A_m) \\ \varphi(x) & (x \in A) \end{cases}$$

として

$$\widetilde{\varphi_m} : A_m \cup A \to (A_m \cup A) \times Y$$

を定義すると, $(\widetilde{\varphi_m}, A_m \cup A) \in \Lambda$ であり, $(\varphi_m, A_m) < (\widetilde{\varphi_m}, A_m \cup A)$ だから (φ_m, A_m) が $(\Lambda, \leqslant)$ の極大元であることに矛盾する. よって $X\backslash A_m$ は高々有限集合である. X は無限集合で $X\backslash A_m$ は高々有限集合だから $A_m = X\backslash(X\backslash A_m)$ は無限集合であり, (1) より

$$\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(A_m \cup (X\backslash A_m)) = \mathrm{card}(A_m)$$

が成り立つ. これより明らかに

$$\mathrm{card}(X \times Y) = \mathrm{card}(A_m \times Y)$$

も成り立つので,

$$\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(A_m) = \mathrm{card}(A_m \times Y) = \mathrm{card}(X \times Y)$$

である.

□

1.3 有向集合とネット

定義 1.19 (有向集合)**.** 前順序集合 (定義 1.1) で, 任意の有限部分集合が上に有界である (定義 1.4) ものを有向集合と言う.

定義 1.20 (ネット)**.** X を空でない集合, Λ を有向集合とする. Λ 上で定義され X に値を取る関数

$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : \Lambda \ni \lambda \mapsto x_\lambda \in X$$

を Λ によって添字付けられた X のネットと言う.

例 1.21 (点列)**.** 自然数全体 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$, 非負整数全体 $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$ は通常の順序によって明らかに有向集合である. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+$ によって添字付けられたネットのことを点列と言う.

定義 1.22 (部分ネット)**.** $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を集合 X のネットとする. 有向集合 M と写像 $\varphi : M \to \Lambda$ が

$$\forall \lambda_0 \in \Lambda, \exists \mu_0 \in M \text{ s.t. } \forall \mu \geqslant \mu_0, \varphi(\mu) \geqslant \lambda_0 \tag{1.13}$$

を満たすとき, X のネット $(x_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M}$ を $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分ネットと言う.

定義 1.23 (部分列)**.** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を集合 X の点列とする. 写像 $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が

$$k(1) < k(2) < \cdots < k(n) < k(n+1) < \cdots$$

を満たすとき, 点列 $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ を $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列と言う.

注意 1.24. 部分列は部分ネットである. しかし, 点列の部分ネットではあるが部分列ではない点列は存在する. 実際,

$$k(2n-1) = k(2n) = 2n-1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

として $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を定義すると, 点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ は部分ネットであるが, $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ は部分列ではない.

定義 1.25. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を集合 X のネットとし, $A \subseteq X$ とする. これに対し次の表現を定義する.

$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ is eventually in } A. \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \exists\lambda_0 \in \Lambda \text{ s.t. } \forall\lambda \geqslant \lambda_0, x_\lambda \in A.$$

$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ is frequently in } A. \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \forall\lambda \in \Lambda, \exists\lambda_0 \geqslant \lambda \text{ s.t. } x_{\lambda_0} \in A.$$

補題 1.26. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を集合 X のネットとし, $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ を集合の逆包含関係 (定義 1.3) により有向集合であるものとする. そして次が成り立つと仮定する.

$$\forall B \in \mathcal{B}, (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ is frequently in } B. \tag{1.14}$$

このとき $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分ネット $(x_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M}$ で,

$$\forall B \in \mathcal{B}, (x_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M} \text{ is eventually in } B. \tag{1.15}$$

を満たすものが存在する.

証明.

$$M := \{(\lambda, B) \in \Lambda \times \mathcal{B} : x_\lambda \in B\}$$

とおき,

$$(\lambda_1, B_1) \leqslant (\lambda_2, B_2) \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \lambda_1 \leqslant \lambda_2, \quad B_2 \subseteq B_1$$

として M 上の前順序 $\leqslant$ を定義する. 任意の $(\lambda_1, B_1), (\lambda_2, B_2) \in M$ に対し, $\mathcal{B}$ が逆包含関係により有向集合であることから $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ を満たす $B_3 \in \mathcal{B}$ が取れて, Λ が有向集合であることと (1.14) より $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ の上界 $\lambda_3 \in \Lambda$ で $x_{\lambda_3} \in B_3$ なるものが取れる. よって $(\lambda_3, B_3) \in M$ は $\{(\lambda_1, B_1), (\lambda_2, B_2)\} \subseteq M$ の上界であるから $(M, \leqslant)$ は有向集合である. 今,

$$\varphi : M \to \Lambda, \quad \varphi(\lambda, B) := \lambda \quad (\forall(\lambda, B) \in M)$$

と定義し, $(x_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M}$ が部分ネットであるための条件 (1.13) を φ が満たすことを示す. 任意の $\lambda_0 \in \Lambda$ を取る. このとき任意に取った $B_0 \in \mathcal{B}$ に対し (1.14) より $\lambda_1 \geqslant \lambda_0$ で $x_{\lambda_1} \in B_0$ を満たすものが取れる. そこで $\mu_0 := (\lambda_1, B_0) \in M$ とおけば任意の $\mu \geqslant \mu_0$ に対し $\varphi(\mu) \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_0$ だから φ は (1.13) を満たす. よって $(x_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M}$ は $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分ネットである. $(x_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M}$ が (1.15) を満たすことを示す. 任意の $B_0 \in \mathcal{B}$ を取る. (1.14) より $x_{\lambda_0} \in B_0$ なる $\lambda_0 \in \Lambda$ が取れる. そこで $\mu_0 := (\lambda_0, B_0) \in M$ とおけば, 任意の $\mu = (\lambda, B) \geqslant \mu_0$ に対し,

$$x_{\varphi(\mu)} = x_\lambda \in B \subseteq B_0$$

だから $(x_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M}$ は (1.15) を満たす. □

定義 1.27 (普遍ネット)**.** 集合 X のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が普遍ネットであるとは, 任意の $A \subseteq X$ に対し, 次のうちのいずれか一方が成り立つことを言う.

- $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ is eventually in A.
- $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ is eventually in $X \backslash A$.

また, ネットの部分ネットで普遍ネットであるものを普遍部分ネットと言う.

定理 1.28 (普遍部分ネットの存在)**.** 任意のネットは普遍部分ネットを持つ.

証明. X を集合, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の任意のネットとする. X の部分集合の族 $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ が次の条件を満たすとき, $\mathcal{F}$ を $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対するフィルターと呼ぶこととする.

(1) $\varnothing \notin \mathcal{F}, \mathcal{F} \neq \varnothing$.
(2) 任意の $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ に対し $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
(3) $F \in \mathcal{F}, G \in 2^X$ が $F \subseteq G \subseteq X$ を満たすならば $G \in \mathcal{F}$.
(4) $\forall F \in \mathcal{F}, (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ is frequently in F.

$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対するフィルターは少なくとも 1 つは存在する. 実際 $\{X\}$ は明らかにそうである. そこで $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対するフィルター全体に集合の包含関係による順序 (定義 1.3) を入れる. このときこの順序集合は帰納的順序集合であることが分かる[*3]. そこで Zorn の補題 1.12 によりこの帰納的順序集合の極大元 $\mathcal{F}$ を取り固定する. $\mathcal{F}$ がフィルターであることから任意の $A \in 2^X$ に対し次のうちのいずれかが成り立つことに注意する.

(i) $\forall F \in \mathcal{F}, (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ is frequently in $F \cap A$.
(ii) $\forall F \in \mathcal{F}, (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ is frequently in $F \backslash A$.

実際, (i), (ii) のいずれも成り立たないとすると, ある $F_{\mathrm{i}}, F_{\mathrm{ii}} \in \mathcal{F}$ と $\lambda_i, \lambda_{ii} \in \Lambda$ が存在し,

$$x_\lambda \notin F_{\mathrm{i}} \cap A \ \ (\forall \lambda \geqslant \lambda_{\mathrm{i}}), \quad x_\lambda \notin F_{\mathrm{ii}} \backslash A \ \ (\forall \lambda \geqslant \lambda_{\mathrm{ii}}) \tag{1.16}$$

となるが, (2) より $F_{\mathrm{i}} \cap F_{\mathrm{ii}} \in \mathcal{F}$ であるから $\{\lambda_{\mathrm{i}}, \lambda_{\mathrm{ii}}\}$ の上界 λ_{iii} に対し, (4) より

$$\exists \lambda \geqslant \lambda_{\mathrm{iii}} \ \text{ s.t. } \ x_\lambda \in F_{\mathrm{i}} \cap F_{\mathrm{ii}}$$

である. これは (1.16) と矛盾する. ゆえに (i), (ii) のうちのいずれかが成り立つ. (i) が成り立つとき

$$\mathcal{F}_{\mathrm{i}} := \{E \in 2^X : \exists F \in \mathcal{F} \text{ s.t. } E \supseteq F \cap A\}$$

とおけば $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{\mathrm{i}}, A \in \mathcal{F}_{\mathrm{i}}$ であり, $\mathcal{F}_{\mathrm{i}}$ は $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対するフィルターの条件 (1) ~ (4) を満たすことが分かる. よって $\mathcal{F}$ の極大性より $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathrm{i}}$ であるから, $A \in \mathcal{F}$ である. また同様に (ii) が成り立つとき

$$\mathcal{F}_{\mathrm{ii}} := \{E \in 2^X : \exists F \in \mathcal{F} \text{ s.t. } E \supseteq F \backslash A\}$$

とおけば $\mathcal{F}_{\mathrm{ii}}$ は $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対するフィルターであるから, $\mathcal{F}$ の極大性より $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathrm{ii}}$ であり, $X \backslash F \in \mathcal{F}_{\mathrm{ii}} = \mathcal{F}$ である. こうして次が成り立つ.

$$\forall A \in 2^X, A \in \mathcal{F} \text{ or } X \backslash A \in \mathcal{F}. \tag{1.17}$$

ここで (2) より $\mathcal{F}$ は集合の逆包含関係により有向集合であるから (4) と補題 1.26 より $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分ネット $(x_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M}$ で,

$$\forall F \in \mathcal{F}, (x_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M} \text{ is eventually in } F. \tag{1.18}$$

なるものが取れる. (1.17) と (1.18) より $(x_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M}$ は普遍ネットである. よって求める結果を得た. □

1.4 位相空間の一般論

定義 1.29 (位相空間)**.** X を空でない集合とする. X の部分集合の族 $\mathcal{O}_X \subseteq 2^X$ が X の位相であるとは次が成り立つことを言う.

(1) $X, \varnothing \in \mathcal{O}_X$.
(2) 任意の $U, V \in \mathcal{O}_X$ に対し $U \cap V \in \mathcal{O}_X$.

[*3] 実際 $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in J}$ を $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対するフィルター全体における全順序部分集合とすると, その全順序性より $\bigcup_{j\in J} \mathcal{F}_j$ は $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対するフィルターである.

(3) 任意の部分族 $\{U_j\}_{j\in J} \subseteq \mathcal{O}_X$ に対し $\bigcup_{j\in J} U_j \in \mathcal{O}_X$.

位相 $\mathcal{O}_X$ が備わった集合 X のことを位相空間と言う. そして $\mathcal{O}_X$ の要素を位相空間 X の開集合と言い, $F \subseteq X$ で $X \backslash F$ が開集合であるものを位相空間 X の閉集合と言う.

定義 1.30 (閉包, 内部)**.** X を位相空間とする. 任意の $E \subseteq X$ に対し E を含む X の閉集合全ての交叉を $\overline{E}$ と表す. $\overline{E}$ は E を含む閉集合のうち (包含関係による順序 (定義 1.3) に関して) 最小のものである. $\overline{E}$ を E の閉包と言う. また E に含まれる X の開集合全ての合併を E° と表す. E° は E に含まれる開集合のうち (包含関係による順序に関して) 最大のものである. E° を E の内部と言う.

定義 1.31 (近傍, 近傍系)**.** X を位相空間とし, $x \in X, V \subseteq X$ とする. $x \in V^\circ$ であるとき V を x の近傍と言う. x の近傍全体を $\mathcal{V}(x)$ と表し, これを x の近傍系と言う. $V \in \mathcal{V}(x)$ が開集合であるとき V を x の開近傍と言う.

命題 1.32 (閉包の点の特徴付け)**.** X を位相空間, $E \subseteq X, x \in X$ とする. このとき次は互いに同値である.

(1) $x \in \overline{E}$.
(2) $\forall V \in \mathcal{V}(x), E \cap V \neq \varnothing$.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. もし (2) が成り立たないならば $V \in \mathcal{V}(x)$ で $E \cap V = \varnothing$ なるものが取れる. このとき $E \subseteq X \backslash V$ で $X \backslash V$ は閉集合だから $\overline{E} \subseteq X \backslash V$ である. しかし $x \in \overline{E}, x \in V$ であるから矛盾する. よって (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとする. もし $x \notin \overline{E}$ ならば $X \backslash \overline{E} \in \mathcal{V}(x)$ であるから (2) より $E \cap (X \backslash \overline{E}) \neq \varnothing$ となるが,

$$E \cap (X \backslash \overline{E}) \subseteq \overline{E} \cap (X \backslash \overline{E}) = \varnothing$$

なので矛盾する. □

定義 1.33 (ネットの収束と収束点)**.** X を位相空間, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X のネット (定義 1.20), $x \in X$ とする. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が x に収束する (x が $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の収束点である) とは次が成り立つことを言う.

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ is eventually in } V.$$

[*4] そしてこのことを,

$$x_\lambda \to x$$

と表す.

命題 1.34 (閉包の点のネットによる特徴付け)**.** X を位相空間, $E \subseteq X, x \in X$ とする. このとき次は互いに同値である.

(1) $x \in \overline{E}$.
(2) x に収束する E のネットが存在する.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. x の近傍系 $\mathcal{V}(x)$ は集合の逆包含関係による順序 (定義 1.3) によって有向集合である. 命題 1.32 より,

$$x_V \in E \cap V \quad (\forall V \in \mathcal{V}(x))$$

として E のネット $(x_V)_{V\in\mathcal{V}(x)}$ が定義でき, これは明らかに x に収束する. よって (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つならば, 任意の $V \in \mathcal{V}(x)$ に対し $E \cap V \neq \varnothing$ だから命題 1.32 より $x \in \overline{E}$ である. □

定義 1.35 (Hausdorff の分離公理)**.** 位相空間 X が Hausdorff の分離公理を満たすとは,

$$\forall x, y \in X (x \neq y), \exists U \in \mathcal{V}(x), \exists V \in \mathcal{V}(y) \text{ s.t. } U \cap V = \varnothing.$$

が成り立つことを言う. Hausdorff の分離公理を満たす位相空間を Hausdorff 空間と言う.

[*4] "eventually in" の意味については定義 1.25 を参照.

命題 1.36 (Hausdorff 性とネットの収束点の一意性)**.** X を位相空間とする．このとき次は互いに同値である．

(1) X は Hausdorff の分離公理を満たす．

(2) X の任意の収束するネットに対し, その収束点は唯一つである．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は自明である．(2) $\Rightarrow$ (1) を示す．待遇を示す．(1) が成り立たないとする．このとき互いに異なる $x, y \in X$ が取れて,

$$U \cap V \neq \varnothing \quad (\forall U \in \mathcal{V}(x), \forall V \in \mathcal{V}(x)) \tag{1.19}$$

が成り立つ．

$$\Lambda := \{U \cap V : U \in \mathcal{V}(x), V \in \mathcal{V}(y)\}$$

は集合の逆包含関係による順序 (定義 1.3) により明らかに有向集合 (定義 1.19) である．そして (1.19) より,

$$x_\lambda \in \lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

としてネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が定義できる．このとき明らかに $x_\lambda \to x$ かつ $x_\lambda \to y$ であり $x \neq y$ であるから (2) は成り立たない．よって (2) $\Rightarrow$ (1) が成り立つ． □

定義 1.37. X を Hausdorff 空間, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の収束するネットとする．命題 1.36 より $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の収束点は一意的に定まる．そこでその収束点を,

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$$

と表す．また X の収束する点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束点は,

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

と表す．

定義 1.38 (堆積点)**.** X を位相空間, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X のネット, $x \in X$ とする．x が $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の堆積点であるとは次が成り立つことを言う[*5]．

$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ is frequently in } V.$$

命題 1.39 (ネットの堆積点の特徴付け)**.** X を位相空間, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X のネット, $x \in X$ とする．このとき次は互いに同値である．

(1) x は $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の堆積点である．

(2) $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ のある部分ネット (定義 1.22) が x に収束する．

証明. (2) $\Rightarrow$ (1) は自明である．(1) $\Rightarrow$ (2) は $\mathcal{V}(x)$ が集合の逆包含関係による順序 (定義 1.3) によって有向集合であることと補題 1.26 による． □

定義 1.40 (開被覆)**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $E \subseteq X$ とする．開集合の族 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_X$ が E の開被覆であるとは,

$$E \subseteq \bigcup_{U\in\mathcal{O}} U$$

が成り立つことを言う．E の開被覆 $\mathcal{O}$ に対し, 部分族 $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ が再び E の開被覆であるとき, $\mathcal{O}'$ を開被覆 $\mathcal{O}$ の部分開被覆と言う．

定義 1.41 (コンパクト)**.** X を位相空間とする．$K \subseteq X$ がコンパクト集合であるとは K の任意の開被覆 $\mathcal{O}$ に対し有限部分開被覆が取れることを言う．X 自体がコンパクトであるとき, 位相空間 X をコンパクト空間と言う．

命題 1.42 (コンパクト集合に含まれる閉集合はコンパクト)**.** X を位相空間, $K \subseteq X$ をコンパクト集合, $F \subseteq X$ を閉集合とし, $F \subseteq K$ とする．このとき F はコンパクト集合である．

[*5] "frequently in" の意味については定義 1.25 を参照．

証明. F の任意の開被覆 $\{U_j\}_{j\in J}$ に対し,

$$K \subseteq (X\backslash F) \cup F \subseteq (X\backslash F) \cup \bigcup_{j\in J} U_j$$

であるから $\{X\backslash F\} \cup \{U_j\}_{j\in J}$ は K の開被覆である. K はコンパクトであるので, 有限個の $j_1, \cdots, j_n \in J$ が取れて,

$$F \subseteq K \subseteq (X\backslash F) \cup U_{j_1} \cup \cdots \cup U_{j_n}$$

となる. よって

$$F \subseteq U_{j_1} \cup \cdots \cup U_{j_n}$$

だから F はコンパクトである. □

命題 1.43. X を Hausdorff 空間, $K \subseteq X$ をコンパクト集合, $x \in X\backslash K$ とする. このとき X の開集合 U, V で,

$$x \in U, \quad K \subseteq V, \quad U \cap V = \varnothing$$

を満たすものが存在する.

証明. 任意の $y \in K$ に対し $x \neq y$ だから X が Hausdorff 空間であることにより X の開集合 U_y, V_y で,

$$x \in U_y, \quad y \in V_y, \quad U_y \cap V_y = \varnothing$$

となるものが取れる. $K \subseteq \bigcup_{y\in K} V_y$ であり K はコンパクトなので, 有限個の $y_1, \cdots, y_n \in K$ が取れて $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j}$ となる. そこで,

$$U := \bigcap_{j=1}^{n} U_{y_j}, \quad V := \bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j}$$

とおけば U, V は X の開集合で $x \in U, \quad K \subseteq V$ であり,

$$U \cap V \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (U_{y_j} \cap V_{y_j}) = \varnothing$$

である. よって求める結果を得た. □

命題 1.44 (Hausdorff 空間のコンパクト集合は閉集合)**.** X を Hausdorff 空間, $K \subseteq X$ をコンパクト集合とする. このとき K は X の閉集合である.

証明. 任意の $x \in X\backslash K$ に対し命題 1.43 より X の開集合 U_x で,

$$x \in U_x \subseteq X\backslash K$$

なるものが取れる. よって

$$X\backslash K = \bigcup_{x\in X\backslash K} U_x$$

だから $X\backslash K$ は X の開集合である. ゆえに K は X の閉集合である. □

定義 1.45 (相対位相)**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし, E を X の空でない部分集合とする.

$$\mathcal{O}_E := \{U \cap E : U \in \mathcal{O}_X\} \subseteq 2^E$$

は E の位相である. これを $\mathcal{O}_X$ の E 上の相対位相と言う. 以後, 位相空間の空でない部分集合を断りなくそれ自身位相空間とみなすことがしばしばあるが, それはこの相対位相による位相空間である.

命題 1.46. X を位相空間, $K \subseteq X$ を空でない部分集合とする. このとき次は互いに同値である.

(1) K は X のコンパクト集合である.
(2) K は相対位相によりコンパクト空間である.

証明. コンパクトの定義 1.41 と相対位相の定義 1.45 より自明である. □

定理 1.47 (コンパクト性のネットによる特徴付け)**.** X を位相空間とする. このとき次は互いに同値である.

(1) X はコンパクトである.
(2) X の任意のネットは堆積点を持つ.
(3) X の任意のネットは収束する部分ネットを持つ.
(4) X の任意の普遍ネット (定義 1.27) は収束する.

証明. (1) ⇒ (2) を示す. (1) が成り立つとし, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の任意のネットとする.

$$F_\lambda := \{x_\mu : \mu \geqslant \lambda\} \ \ (\forall \lambda \in \Lambda)$$

とおくと, 有向集合の定義 1.19 より任意の有限部分集合 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subseteq \Lambda$ に対し,

$$F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_n} \neq \varnothing$$

である. よって X がコンパクトであることから,

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{F_\lambda} \neq \varnothing$$

である. そこで任意の $x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{F_\lambda}$ を取ると, 命題 1.32 より,

$$V \cap F_\lambda \neq \varnothing \ \ (\forall V \in \mathcal{V}(x), \forall \lambda \in \Lambda)$$

である. これは x が $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の堆積点であることを意味する.
(2) ⇔ (3) は命題 1.39 による.
(2) ⇒ (4) は普遍ネットの堆積点は収束点であることによる.
(4) ⇒ (3) は任意のネットは普遍部分ネットを持つこと (定理 1.28) による.
(2) ⇒ (1) を示す. (2) が成り立つとし, X がコンパクトではないと仮定して矛盾を導く. このとき X の開被覆 $\{U_j\}_{j\in J}$ で, 任意の有限部分集合 $F \subseteq J$ に対して,

$$X \neq \bigcup_{j\in F} U_j \tag{1.20}$$

となるものが取れる. $\mathcal{F}_J$ を J の有限部分集合全体に集合の包含関係による順序 (定義 1.3) を入れた有向集合とすると, (1.20) より,

$$x_F \in X \backslash \bigcup_{j\in F} U_j \ \ (\forall F \in \mathcal{F}_J) \tag{1.21}$$

なるネット $(x_F)_{F\in\mathcal{F}_J}$ が定義できる. (2) が成り立つことから $(x_F)_{F\in\mathcal{F}_J}$ は堆積点 $x \in X$ を持つ. $x \in U_{j_0}$ なる $j_0 \in J$ を取ると $\{j_0\} \in \mathcal{F}_J$ であり, U_{j_0} は x の近傍であるから, 堆積点の定義 1.38 より, $F \supseteq \{j_0\}$ なる $F \in \mathcal{F}_J$ で $x_F \in U_{j_0}$ を満たすものが取れる. このとき,

$$x_F \in U_{j_0} \subseteq \bigcup_{j\in F} U_j$$

であるが, これは (1.21) と矛盾する. よって X はコンパクトであるので (2) ⇒ (1) が成り立つ. □

定義 1.48 (写像の連続性)**.** $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 写像 $f: X \to Y$ が連続であるとは, 任意の $V \in \mathcal{O}_Y$ に対し $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ が成り立つことを言う. また写像 $f: X \to Y$ が $x \in X$ において連続であるとは, $f(x) \in Y$ の任意の近傍 V に対し, $f^{-1}(V)$ が $x \in X$ の近傍であることを言う.

命題 1.49. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 写像 $f: X \to Y$ に対し次は互いに同値である.

(1) $f: X \to Y$ は連続である.
(2) 任意の $x \in X$ に対し, f は x において連続である.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. 任意の $x \in X$ を取る. $f(x)$ の任意の近傍 V に対し, $f(x) \in V^\circ$ だから $x \in f^{-1}(V^\circ)$ であり, $V^\circ \in \mathcal{O}_Y$ だから $f^{-1}(V^\circ) \in \mathcal{O}_X$ である. よって $f^{-1}(V)$ は x の近傍である. ゆえに (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとする. 任意の $V \in \mathcal{O}_Y$ を取る. 任意の $x \in f^{-1}(V)$ に対し V は $f(x)$ の近傍であるから $f^{-1}(V)$ は x の近傍である. よって $x \in U_x \subseteq f^{-1}(V)$ なる $U_x \in \mathcal{O}_X$ が取れる. ゆえに

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x \in \mathcal{O}_X$$

であるから (1) が成り立つ. □

命題 1.50 (連続性のネットによる特徴付け)**.** $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 写像 $f : X \to Y$ と $x \in X$ に対し次は互いに同値である.

(1) $f : X \to Y$ は x において連続である.
(2) x に収束する X の任意のネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し, Y のネット $(f(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ は $f(x)$ に収束する.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は自明である. (2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとする. もし f が x において連続でないならば, $f(x)$ の近傍 V が存在し, x の任意の近傍 U に対し $U \backslash f^{-1}(V) \neq \varnothing$ が成り立つ. そして x の近傍系 $\mathcal{V}(x)$ は集合の逆包含関係による順序 (定義 1.3) によって有向集合であるから,

$$x_U \in U \backslash f^{-1}(V) \quad (\forall U \in \mathcal{V}(x)) \tag{1.22}$$

なる X のネット $(x_U)_{U \in \mathcal{V}(x)}$ が定義できる. $(x_U)_{U \in \mathcal{V}(x)}$ は明らかに x に収束するので, (2) が成り立つことから $(f(x_U))_{U \in \mathcal{V}(x)}$ は $f(x)$ に収束する. よってある $U \in \mathcal{V}(x)$ に対して $f(x_U) \in V$ となるが, (1.22) より $x_U \notin f^{-1}(V)$ なので矛盾する. ゆえに (1) が成り立つ. □

命題 1.51 (コンパクト集合の連続写像による像はコンパクト)**.** X, Y を位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像, $K \subseteq X$ をコンパクト集合とする. このとき $f(K) \subseteq Y$ はコンパクトである.

証明. $f(K)$ の任意の開被覆 $\{V_j\}_{j \in J}$ を取る. f の連続性より $\{f^{-1}(V_j)\}_{j \in J}$ は K の開被覆であるから, K のコンパクト性より有限個の $j_1, \cdots, j_n \in J$ が取れて,

$$K \subseteq f^{-1}(V_{j_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{j_n})$$

となる. よって

$$f(K) \subseteq V_{j_1} \cup \cdots \cup V_{j_n}$$

であるので, $f(K)$ はコンパクトである. □

定義 1.52 (連結性)**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とする. $D \subseteq X$ が非連結であるとは, $U, V \in \mathcal{O}_X$ で,

$$D = (D \cap U) \cup (D \cap V), \ \ D \cap U \neq \varnothing, \ \ D \cap V \neq \varnothing, \ \ (D \cap U) \cap (D \cap V) = \varnothing$$

を満たすものが存在することを言う. 非連結ではない $C \subseteq X$ を X の連結集合と言う. X 自体が連結であるとき, 位相空間 X を連結空間と言う.

命題 1.53. X を位相空間とする. 空でない $C \subseteq X$ に対し次は互いに同値である.

(1) C は X の連結集合である.
(2) C は相対位相による位相空間として連結空間である.

証明. 連結性の定義 1.52 と相対位相の定義 1.45 より自明である. □

命題 1.54 (連結集合の連続写像による像は連結集合)**.** X, Y を位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像, $C \subseteq X$ を連結集合とする. このとき $f(C) \subseteq Y$ は連結集合である.

証明. 命題 1.53 より, X は連結空間, $f : X \to Y$ は全射連続写像であるとして $Y = f(X)$ が連結であることを示せばよい. もし Y が非連結ならば, Y の空でない開集合 V_1, V_2 で,

$$Y = V_1 \cup V_2,\ \ V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

なるものが取れる. $f : X \to Y$ は全射連続写像であるので $f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2)$ はそれぞれ X の空でない開集合であり,

$$X = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2),\ \ f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = \varnothing$$

である. これは X が連結空間であることに矛盾するので, Y は連結である. □

定義 1.55 (基本近傍系)**.** X を位相空間とする. x の近傍系 $\mathcal{V}(x)$ (定義 1.31) の部分族 $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ で次を満たすものを x の基本近傍系と言う.

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B}(x) \text{ s.t. } B \subseteq V.$$

定義 1.56 (第一可算公理)**.** X を位相空間とする. 任意の $x \in X$ に対し x の基本近傍系として可算なものが取れるとき X は第一可算公理を満たす, もしくは第一可算であると言う.

命題 1.57. X を第一可算な位相空間とする. このとき任意の $x \in X$ に対し x の可算基本近傍系 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ として,

$$V_{n+1} \subseteq V_n\ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

なるものが取れる.

証明. $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を x の可算基本近傍系とする.

$$V_n := B_1 \cap \cdots \cap B_n\ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおけば $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が求める可算基本近傍系となる. □

命題 1.58 (第一可算位相空間における閉包の点の点列による特徴付け)**.** X を第一可算な位相空間, $E \subseteq X$, $x \in X$ とする. このとき次は互いに同値である.

(1) $x \in \overline{E}$.
(2) E の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $x_n \to x$ なるものが存在する.

証明. (1) が成り立つとする. 命題 1.57 より x の可算基本近傍系 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$V_{n+1} \subseteq V_n\ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{1.23}$$

を満たすものが取れる. 命題 1.32 より,

$$x_n \in E \cap V_n\ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

なる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が定義でき, (1.23) より $x_n \to x$ である. よって (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つならば x の任意の近傍 V に対し $E \cap V \neq \varnothing$ であるから命題 1.32 より $x \in \overline{E}$ である. □

命題 1.59 (第一可算な位相空間における点列の堆積点の特徴付け)**.** X を第一可算公理を満たす位相空間, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の点列, $x \in X$ とする. このとき次は互いに同値である.

(1) x は $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の堆積点である.
(2) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列で x に収束するものが存在する.

証明. 命題 1.57 より x の可算基本近傍系 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$V_{n+1} \subseteq V_n\ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{1.24}$$

を満たすものが取れる. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとすると, 堆積点の定義 1.38 より, $\mathbb{N}$ の列 $(k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$k(n) < k(n+1),\ \ x_{k(n)} \in V_n\ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

なるものが帰納的に定義できる．このとき $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ は $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列で, (1.24) より $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ は x に収束する．よって (2) が成り立つ．

(2) $\Rightarrow$ (1) は堆積点の定義 1.38 と部分列の定義 1.23 より明らかである． □

命題 1.60 (連続性の点列による特徴付け)**.** X を第一可算位相空間, Y を位相空間, $f : X \to Y$ を写像, $x \in X$ とする．このとき次は互いに同値である．

(1) f は x において連続である．

(2) x に収束する X の任意の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し Y の点列 $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は $f(x)$ に収束する．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は自明である．(2) $\Rightarrow$ (1) を示す．(2) が成り立つとする．Xh イ第一可算であるから命題 1.57 より x の可算基本近傍系 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$U_{n+1} \subseteq U_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{1.25}$$

を満たすものが取れる．もし (1) が成り立たないならば, $f(x)$ のある近傍 V に対して $f^{-1}(V)$ は x の近傍ではないので,

$$x_n \in U_n \backslash f^{-1}(V) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{1.26}$$

なる X の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が定義できる．このとき (1.25) より $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は x に収束するので (2) が成り立つことから $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $f(x)$ に収束する．よってある $n \in \mathbb{N}$ に対し $f(x_n) \in V$ となるが, これは (1.26) と矛盾する．よって (1) が成り立つ． □

定義 1.61 (点列コンパクト)**.** 位相空間 X が点列コンパクトであるとは, X の任意の点列が収束する部分列を持つことを言う．

命題 1.62 (第一可算なコンパクト空間は点列コンパクト)**.** X を第一可算なコンパクト空間とする．このとき X は点列コンパクトである．

証明. X の任意の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は定理 1.47 より堆積点を持つ．よって命題 1.59 より $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列を持つ． □

定義 1.63 (Lindelöf 性)**.** X を位相空間とする．$E \subseteq X$ が Lindelöf であるとは, E の任意の開被覆に対しその部分開被覆として可算なものが取れることを言う．X 自体が Lindelöf であるとき X を Lindelöf 空間と言う．

命題 1.64 (点列コンパクトな Lindelöf 空間はコンパクト)**.** X を点列コンパクトな Lindelöf 空間とする．このとき X はコンパクトである．

証明. X の任意の開被覆 $\mathcal{O}$ に対し, Lindelöf 性よりその部分可算開被覆 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}$ が取れる．

$$X \neq \bigcup_{j=1}^{n} U_j \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であると仮定する．このとき

$$x_n \in X \backslash \bigcup_{j=1}^{n} U_j \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{1.27}$$

なる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が取れる．X は点列コンパクトであるから $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列 $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ を持つ．x を $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ の収束点とし, $x \in U_{n_0}$ なる $n_0 \in \mathbb{N}$ を取る．U_{n_0} は x の近傍であるので $x_{k(n)} \to x$ より $n \geqslant n_0$ なる $n \in \mathbb{N}$ で $x_{k(n)} \in U_{n_0}$ を満たすものが取れる．$k(n) \geqslant n \geqslant n_0$ だから,

$$x_{k(n)} \in U_{n_0} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k(n)} U_j$$

となる．しかしこれは (1.27) に矛盾する．よってある $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} U_j$$

が成り立つので X はコンパクトである. □

定義 1.65 (開集合の基)**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とする. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}_X$ が位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ の開集合の基であるとは, 任意の空でない $U \in \mathcal{O}_X$ と任意の $x \in U$ に対し, $x \in B \subseteq U$ なる $B \in \mathcal{B}$ が存在することを言う.

定義 1.66 (第二可算公理)**.** 位相空間 X が第二可算公理を満たす, もしくは第二可算であるとは, X の開集合の基として可算なものが取れることを言う.

定義 1.67 (可分)**.** 位相空間 X が可分であるとは, 可算部分集合 $D \subseteq X$ で $\overline{D} = X$ なるものが取れることを言う.

命題 1.68 (第二可算ならば第一可算, Lindelöf, 可分)**.** 位相空間 X が第二可算公理を満たすならば次が成り立つ.

(1) X は第一可算公理を満たす.
(2) X は Lindelöf である.
(3) X は可分である.

証明. (1) $\mathcal{B}$ を X の開集合の可算基とする. 任意の $x \in X$ に対し,

$$\mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$$

は x の可算な基本近傍系であるから X は第一可算公理を満たす.

(2) $\mathcal{B}$ を X の開集合の可算基とする. X の任意の開被覆 $\{U_j\}_{j \in J}$ を取る.

$$\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} := \{B \in \mathcal{B} : \exists j \in J \text{ s.t. } B \subseteq U_j\}$$

とおけば, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ であるから, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $B_n \subseteq U_{j_n}$ なる $j_n \in J$ を取れば $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{j_n}$ となる. よって X は Lindelöf である.

(3) $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を開集合の基とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $x_n \in B_n$ を取り, 可算集合 $D := \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ を定義する. 任意の $x \in X$ と x の任意の近傍 V に対し, $x \in B_n \subseteq V$ なる $n \in \mathbb{N}$ が取れるから $x_n \in D \cap V$ である. よって $D \cap V \neq \varnothing$ であるから命題 1.32 より $x \in \overline{D}$ である. ゆえに $X = \overline{D}$ だから X は可分である.

□

定理 1.69 (第二可算な位相空間におけるコンパクトと点列コンパクトの同値性)**.** X を第二可算公理を満たす位相空間とする. このとき次は互いに同値である.

(1) X はコンパクトである.
(2) X は点列コンパクトである.

証明. 命題 1.68 より X は第一可算公理を満たすから命題 1.62 より (1) $\Rightarrow$ (2) が成り立つ. また命題 1.68 より X は Lindelöf であるから命題 1.64 より (2) $\Rightarrow$ (1) が成り立つ. □

定義 1.70 (位相の強弱)**.** $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を集合 X の位相とする. $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$ が成り立つとき $\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より弱いと言い, $\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ より強いと言う.

定義 1.71 (始位相)**.** X, J を空でない集合とし, 各 $j \in J$ について位相空間 $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ と写像 $f_j : X \to X_j$ が与えられているとする. このとき,

$$\mathcal{B} := \{f_{j_1}^{-1}(V_{j_1}) \cap \cdots \cap f_{j_n}^{-1}(V_{j_n}) : n \in \mathbb{N},\ j_1, \cdots, j_n \in J,\ V_{j_1} \in \mathcal{O}_{X_{j_1}}, \cdots, V_{j_n} \in \mathcal{O}_{X_{j_n}}\}$$

とおき, $\mathcal{B}$ の元の合併で表されるような X の部分集合全体を $\mathcal{O}_X$ とおく. このとき $\mathcal{O}_X$ は明らかに X の位相の定義 1.29 を満たす. そして連続写像の定義 1.48 より各 $j \in J$ に対し $f_j : X \to X_j$ は位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ から位相空間 $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ への連続写像であり, さらに $\mathcal{O}_X$ は全ての $j \in J$ に対して $f_j : X \to X_j$ が連続写像となるような X の位相で最弱 (定義 1.70) のものである. $\mathcal{O}_X$ を $(f_j : X \to X_j)_{j \in J}$ から誘導される X の始位相と言う.

命題 1.72 (始位相に関するネットの収束の特徴付け)**.** X, J を空でない集合とし, 各 $j \in J$ について位相空間 $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ と写像 $f_j : X \to X_j$ が与えられているとする. そして $(f_j : X \to X_j)_{j \in J}$ から誘導される X の始位相を $\mathcal{O}_X$ とおく. このとき X のネット $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と $x \in X$ に対し, 次は互いに同値である.

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$ において $x_\lambda \to x$.

(2) 任意の $j \in J$ に対し $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ において $f_j(x_\lambda) \to f_j(x)$.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. 始位相の定義 1.71 より各 $j \in J$ について $f_j : X \to X_j$ は連続であるので命題 1.50 より $f_j(x_\lambda) \to f_j(x)$ が成り立つ. よって (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとする. x の任意の近傍 V を取る. 始位相の定義 1.71 より有限個の $j_1, \cdots, j_n \in J$ と $V_{j_1} \in \mathcal{O}_{X_{j_1}}, \cdots, V_{j_n} \in \mathcal{O}_{X_{j_n}}$ が取れて,

$$x \in f_{j_1}^{-1}(V_{j_1}) \cap \cdots \cap f_{j_n}^{-1}(V_{j_n}) \subseteq V \tag{1.28}$$

となる. (2) が成り立つことから $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ が取れて,

$$f_{j_1}(x_\lambda) \in V_{j_1}\ (\forall \lambda \geqslant \lambda_1),\quad \cdots,\quad f_{j_n}(x_\lambda) \in V_{j_n}\ (\forall \lambda \geqslant \lambda_n)$$

が成り立つ. よって $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subseteq \Lambda$ の上界 $\lambda_0 \in \Lambda$ を取れば,

$$f_{j_k}(x_\lambda) \in V_{j_k}\quad (\forall \lambda \geqslant \lambda_0, \forall k \in \{1, \cdots, n\})$$

であるから,

$$x_\lambda \in f_{j_1}^{-1}(V_{j_1}) \cap \cdots \cap f_{j_n}^{-1}(V_{j_n})\quad (\forall \lambda \geqslant \lambda_0)$$

である. ゆえに (1.28) より

$$x_\lambda \in V\quad (\forall \lambda \geqslant \lambda_0)$$

であるから $x_\lambda \to x$ である. よって (2) $\Rightarrow$ (1) が成り立つ. □

命題 1.73 (始位相が Hausdorff であるための十分条件)**.** J を空でない集合とし, 各 $j \in J$ に対し Hausdorff 空間 $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ と写像 $f_j : X \to X_j$ が与えられているとする. そして

$$f_j(x) = f_j(y)\quad (\forall j \in J) \quad \Leftrightarrow \quad x = y \tag{1.29}$$

が成り立つとする. このとき X は $(f_j : X \to X_j)_{j \in J}$ から誘導される始位相 $\mathcal{O}_X$ によって Hausdorff 空間である.

証明. $x \neq y$ なる任意の $x, y \in X$ を取る. このとき (1.29) より $f_j(x) \neq f_j(y)$ なる $j \in J$ が取れる. $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ は Hausdorff 空間であるから, $U, V \in \mathcal{O}_X$ で,

$$f_j(x) \in U,\quad f_j(x) \in V,\quad U \cap V = \varnothing$$

なるものが取れる. 始位相の定義 1.71 より $f_j^{-1}(U), f_j^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ であり,

$$x \in f_j^{-1}(U),\quad y \in f_j^{-1}(V),\quad f_j^{-1}(U) \cap f_j^{-1}(V) = f_j^{-1}(U \cap V) = \varnothing$$

である. よって $(X, \mathcal{O}_X)$ は Hausdorff 空間である. □

定義 1.74 (直積集合の自然な射影)**.** J を空でない集合とし, 各 $j \in J$ に対し空でない集合 X_j が与えられているとする. 直積集合

$$\prod_{j \in J} X_j = \{(x_j)_{j \in J} : \forall j \in J, x_j \in X_j\}$$

を考える. 各 $j_0 \in J$ に対し,

$$\pi_{j_0} : \prod_{j \in J} X_j \ni (x_j)_{j \in J} \mapsto x_{j_0} \in X_{j_0}$$

なる写像を $\prod_{j \in J} X_j$ から X_{j_0} への自然な射影と言う.

定義 1.75 (直積位相空間)**.** J を空でない集合とし, 各 $j \in J$ に対し位相空間 $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ が与えられているとする. 直積集合を

$$X := \prod_{j \in J} X_j$$

とおき, 自然な射影を,

$$\pi_j : X \to X_j \ \ (\forall j \in J)$$

とおく．そして $(\pi_j : X \to X_j)_{j\in J}$ から誘導される X の始位相を $\mathcal{O}_X$ とおく．このとき位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間の族 $((X_j, \mathcal{O}_{X_j}))_{j\in J}$ の直積位相空間と言う．

命題 1.76 (直積位相に関するネットの収束の特徴付け)**.** J を空でない集合とし, 各 $j \in J$ に対し位相空間 $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ が与えられているとする．そして $((X_j, \mathcal{O}_{X_j}))_{j\in J}$ の直積位相空間を $(X, \mathcal{O}_X)$ とおき, $\pi_j : X \to X_j$ $(\forall j \in J)$ を自然な射影とする．このとき X のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $x \in X$ に対し次は互いに同値である．

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$ において $x_\lambda \to x$.
(2) 任意の $j \in J$ に対し $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ において $\pi_j(x_\lambda) \to \pi_j(x)$.

証明. 直積位相空間の定義 1.75 と命題 1.72 による． □

命題 1.77 (Hausdorff 空間の直積は Hausdorff 空間)**.** J を空でない集合とし, 各 $j \in J$ に対し Hausdorff 空間 $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ が与えられているとする．このとき $((X_j, \mathcal{O}_{X_j}))_{j\in J}$ の直積位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ は Hausdorff 空間である．

証明. 自然な射影 $\pi_j : X \to X_j$ $(\forall j \in J)$ に対し,

$$\pi_j(x) = \pi_j(y) \ \ (\forall j \in J) \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

であるから命題 1.73 より $(X, \mathcal{O}_X)$ は Hausdorff 空間である． □

定理 1.78 (Tychonoff の定理)**.** J を空でない集合とし, 各 $j \in J$ に対しコンパクト空間 $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ が与えられているとする．このとき $((X_j, \mathcal{O}_{X_j}))_{j\in J}$ の直積位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ はコンパクト空間である．

証明. 定理 1.47 より X の任意の普遍ネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ (定義 1.27) を取りこれが収束することを示せばよい．任意の $j \in J$ に対し自然な射影を $\pi_j : X \to X_j$ とおくと, $(\pi_j(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ は X_j の普遍ネットであるので, $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ がコンパクト空間であることと定理 1.47 より $(\pi_j(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ はある $y_j \in X_j$ に収束する．そこで $x := (y_j)_{j\in J} \in X$ とおけば $y_j = \pi_j(x)$ $(\forall j \in J)$ であるから,

$$\pi_j(x_\lambda) \to \pi_j(x) \ \ (\forall j \in J)$$

である．よって命題 1.76 より $x_\lambda \to x$ であるので求める結果を得た． □

定義 1.79 (局所コンパクト Hausdorff 空間)**.** Hausdorff 空間が局所コンパクト Hausdorff 空間であるとは, その任意の点がコンパクトな近傍 (定義 1.31) を持つことを言う．

注意 1.80. Hausdorff 空間のコンパクト集合は閉集合 (命題 1.44) であり, コンパクト集合に含まれる閉集合はコンパクト (命題 1.42) であるから, 局所コンパクト Hausdorff 空間の任意の点は閉包がコンパクトな開近傍を持つ．

定理 1.81 (局所コンパクト Hausdorff 空間の基本性質)**.** X を局所コンパクト Hausdorff 空間, $K \subseteq X$ をコンパクト集合, $V \subseteq X$ を開集合とし, $K \subseteq V$ とする．このとき閉包がコンパクトな開集合 U で,

$$K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$$

なるものが存在する．

証明. $K = \varnothing$ ならば $U = K$ とすればよいので $K \neq \varnothing$ とする．任意の $x \in K$ に対し閉包がコンパクトな x の開近傍 G_x を取る (注意 1.80). $K \subseteq \bigcup_{x\in K} G_x$ であり K はコンパクトなので有限個の $x_1, \cdots, x_n \in K$ が取れて

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} G_{x_j}$$

となる．

$$G := \bigcup_{j=1}^{n} G_{x_j}$$

とおくと G は開集合であり,

$$K \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \overline{G_{x_j}}$$

で右辺はコンパクトだから命題 1.42 より $\overline{G}$ はコンパクトである．よってもし $\overline{G} \subseteq V$ ならば $U = G$ とおけばよい．そこで $\overline{G} \backslash V \neq \varnothing$ であるとする．任意の $y \in \overline{G} \backslash V$ に対し $y \notin K$ だから, 命題 1.43 より開集合 W_y で,

$$K \subseteq W_y, \quad y \notin \overline{W_y}$$

を満たすものが取れる．よって

$$\overline{G} \backslash V \cap \bigcap_{y \in \overline{G} \backslash V} \overline{W_y} = \varnothing$$

である．$\overline{G} \backslash V$ はコンパクト集合なので有限個の $y_1, \cdots, y_m \in \overline{G} \backslash V$ が取れて

$$\overline{G} \backslash V \cap \bigcap_{k=1}^{m} \overline{W_{y_k}} = \varnothing \tag{1.30}$$

となる．よって

$$U := G \cap \bigcap_{k=1}^{m} W_{y_k}$$

とおくと, U は開集合で $K \subseteq U$ であり,

$$\overline{U} \subseteq \overline{G} \cap \bigcap_{k=1}^{m} \overline{W_{y_k}} \tag{1.31}$$

で右辺はコンパクトだから $\overline{U}$ はコンパクトである．そして (1.30), (1.31) より,

$$\overline{U} \backslash V \subseteq \overline{G} \backslash V \cap \bigcap_{k=1}^{m} \overline{W_{y_k}} = \varnothing$$

だから $\overline{U} \subseteq V$ である．よって U は求める開集合である． □

定理 1.82 (一点コンパクト化)**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ を局所コンパクト Hausdorff 空間とし, $\omega \notin X$ に対し,

$$\widetilde{X} := X \cup \{\omega\}$$

とおく．そして,

$$\mathcal{T} := \left\{ \widetilde{X} \backslash K : K \text{ は } (X, \mathcal{O}_X) \text{ のコンパクト集合} \right\},$$

$$\mathcal{O}_{\widetilde{X}} := \mathcal{O}_X \cup \mathcal{T}$$

とおく．このとき $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ は $\widetilde{X}$ の位相であり, $(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}})$ はコンパクト Hausdorff 空間である．さらに $\mathcal{O}_X$ は $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ の X 上の相対位相 (定義 1.45) である．

証明.

$$\mathcal{O}_X = \{ X \backslash F : F \text{ は } (X, \mathcal{O}_X) \text{ の閉集合} \}$$

であること, Hausdorff 空間のコンパクト集合は閉集合であること (命題 1.44), コンパクト集合に含まれる閉集合はコンパクトであること (命題 1.42) から次が成り立つが分かる．

- 任意の $U, V \in \mathcal{T}$ に対し $U \cap V \in \mathcal{T}$.
- 任意の $\{U_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{T}$ に対し $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{T}$.
- 任意の $U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{O}_X$ に対し $U \cap V \in \mathcal{O}_X$.
- 任意の $U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{O}_X$ に対し $U \cup V \in \mathcal{T}$.

そしてこれより $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ が $\widetilde{X}$ の位相の定義 1.29 を満たし,

$$\mathcal{O}_X = \{U \cap X : U \in \mathcal{O}_{\widetilde{X}}\}$$

である (すなわち $\mathcal{O}_X$ が位相 $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ の X 上の相対位相である) ことが分かる. 位相空間 $(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}})$ がコンパクト空間であることを示す. $\{U_j\}_{j\in J} \subseteq \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ を $\widetilde{X}$ の開被覆とする. $\omega \in U_{j_0}$ なる $j_0 \in J$ を取ると $U_{j_0} \in \mathcal{T}$ であるから, $\mathcal{T}$ の定義よりあるコンパクト集合 $K \subseteq X$ に対し $U_{j_0} = \widetilde{X} \backslash K$ と表せる. $\mathcal{O}_X$ は $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ の X 上の相対位相なので K は $(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}})$ のコンパクト集合でもある (命題 1.46) から, 有限個の $j_1, \cdots, j_n \in J$ が取れて,

$$K \subseteq U_{j_1} \cup \cdots \cup U_{j_n}$$

となる. よって,

$$\widetilde{X} = U_{j_0} \cup U_{j_1} \cup \cdots \cup U_{j_n}$$

であるから $(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}})$ はコンパクト空間である. 次に $(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}})$ が Hausdorff 空間であることを示す. $x, y \in \widetilde{X}$ が $x \neq y$ であるとする. もし $x, y \in X$ ならば $(X, \mathcal{O}_X)$ が Hausdorff 空間であることから $U, V \in \mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ で $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \varnothing$ なるものが取れる. また $y = \omega$ の場合, $(X, \mathcal{O}_X)$ が局所コンパクトであることから $x \in U \subseteq K$ なる $U \in \mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ とコンパクト集合 $K \subseteq X$ が取れる. $V := \widetilde{X} \backslash K \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ とおけば,

$$x \in U, \quad \omega \in V, \quad U \cap V = \varnothing$$

である. よって $(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}})$ は Hausdorff 空間である. □

1.5 実数と距離空間

定義 1.83 (半群)**.** 空でない集合 G に 2 項演算

$$G \times G \ni (x, y) \mapsto xy \in G \tag{1.32}$$

で,

$$(xy)z = x(yz) \quad (\forall x, y, z \in G) \tag{1.33}$$

を満たすものが備わっているとき, G を半群と言う. また 2 項演算 (1.32) に対する条件 (1.33) を結合法則と言う. $x_n \in G$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ に対し,

$$x_1x_2x_3 := (x_1x_2)x_3, \quad x_1x_2x_3x_4 := (x_1x_2x_3)x_4, \quad \cdots \quad , x_1 \cdots x_n := (x_1 \cdots x_{n-1})x_n \quad (\forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant 2)$$

と表す. また任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $x \in G$ に対し, $x^n := \overbrace{x \cdots x}^{n \text{ 個}}$ と表す.

$$xy = yx \quad (\forall x, y \in G)$$

が成り立つとき G は可換であると言う. また可換でないことを非可換と言う.

定義 1.84 (モノイド)**.** G を半群とする. $e \in G$ で,

$$xe = x = ex \quad (\forall x \in G) \tag{1.34}$$

を満たすものが存在するとき, G をモノイドと言う. (1.34) を満たす $e \in G$ は明らかに唯一つであり[*6], これを G の単位元と言う. $x \in G$ に対し,

$$xy = e = yx \tag{1.35}$$

を満たす $y \in G$ が存在するとき, x は可逆であると言い, y を x の逆元と言う. $y_1, y_2 \in G$ が x の逆元であるならば,

$$y_1 = y_1e = y_1(xy_2) = (y_1x)y_2 = ey_2 = y_2$$

[*6] 実際, $e, e' \in G$ が共に単位元であるならば $e = ee' = e'$ である.

であるから, 可逆な元 $x \in G$ に対し, その逆元は一意的に定まる. そこでそれを x^{-1} と表す. また任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$x^{-n} := \overbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}^{n \text{ 個}}$$

と表す.

定義 1.85 (群)**.** G をモノイドとする. G の全ての元が逆元を持つとき G を群と言う.

定義 1.86 (加法群)**.** 群 G に対しては, その 2 項演算として,

$$G \times G \ni (x, y) \mapsto xy \in G$$

という表記の他に,

$$G \times G \ni (x, y) \mapsto x + y \in G$$

という表記も用いられる. 群 G の 2 項演算が後者で表されるとき G を加法群と言う. それに対し群 G の 2 項演算が前者で表されるとき G を乗法群と言う. 加法群 G における単位元は零元と言い, $x \in G$ の逆元は $-x$ と表す. また加法群 G の任意の元 x, y に対し $x + (-y)$ を $x - y$ と表し, 任意の $x \in G$, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$nx := \overbrace{x + x + \cdots + x}^{n \text{ 個}}, \quad -nx := \overbrace{-x - x - \cdots - x}^{n \text{ 個}}$$

と表す.

定義 1.87 (環)**.** 空でない集合 R に 2 種類の 2 項演算

(加法) $R \times R \ni (x, y) \mapsto x + y \in R$
(乗法) $R \times R \ni (x, y) \mapsto xy \in R$

が備わっており, 加法に関して可換群, 乗法に関して半群をなしており, さらに分配法則と呼ばれる規則

(分配法則) $(x + y)z = xz + yz, \ \ x(y + z) = xy + xz \ \ (\forall x, y, z \in R).$

が成り立つとする. このとき R を環と言う. 加法に関する零元を 0_R もしくは単に 0 と表す. 環 R が乗法に関して (非) 可換であるとき, R は (非) 可換であると言う. また環 R が乗法に関してモノイドであるとき, R は単位的であると言い, その単位元を 1_R もしくは単に 1 と表す. 単位的な環 R に対し,

$$2_R := 1_R + 1_R, \ \ 3_R := 2_R + 1_R, \ \ 4_R := 3_R + 1_R, \cdots\cdots$$

とおき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $n_R \in R$ を定義する. また任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $(-n)_R := -n_R$ と定義する.

命題 1.88. R を環とする. このとき任意の $x \in R$ に対し,

$$0_R = 0_R x = x 0_R, \ \ -x = (-1_R)x = x(-1_R)$$

が成り立つ.

証明.

$$x = 1_R x = (1_R + 0_R)x = x + 0_R x,$$
$$x = x 1_R = x(1_R + 0_R) = x + x 0_R$$

だから $0_R x = x 0_R = 0_R$ である. また,

$$0_R = 0_R x = (1_R - 1_R)x = x + (-1_R)x,$$
$$0_R = x 0_R = x(1_R - 1_R) = x + x(-1_R)$$

だから $(-1_R)x = x(-1_R) = -x$ である. □

定義 1.89 (体)**.** 単位的な可換環で, 零元以外の全ての元が乗法に関して可逆であるものを体と言う. F を体とする. $x, y \in F$, $y \neq 0_F$ に対し,

$$\frac{x}{y} := xy^{-1} = y^{-1}x$$

と表す.

命題 1.90. F を体とし, $x, y \in F$ が $xy = 0_F$ を満たすとする. このとき $x = 0_R$ か $y = 0_R$ である.

証明. $x \neq 0_F$ ならば, 体の定義より x は乗法逆元 x^{-1} を持つので, 命題 1.88 より,

$$0_F = x^{-1}0_F = x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = 1_F y = y$$

である. □

定義 1.91 (順序体)**.** 体 F が全順序集合 (定義 1.1) であり, 次を満たすとき, F を順序体と言う.

(1) $1_F \neq 0_F$.
(2) $x, y \in F$ が $x \leqslant y$ を満たすならば, 任意の $z \in F$ に対し $x + z \leqslant y + z$.
(3) $x, y \in F$ が $x \leqslant y$ を満たすならば, $z \geqslant 0_F$ なる任意の $z \in F$ に対し $xz \leqslant yz$.

順序体の F の元 x が $x > 0_F$ を満たすとき x は正であると言い, $x < 0_F$ を満たすとき x は負であると言う.

命題 1.92. 順序体 F に対し, 次が成り立つ.

(1) 任意の $x \in F$ に対し $x^2 \geqslant 0_F$.
(2) $x, y \in F$ が $x < y$ を満たすならば, 任意の $z \in F$ に対し $x + z < y + z$.
(3) $x, y \in F$ が $x < y$ を満たすならば, 任意の正の元 $z \in F$ に対し $xz < yz$.
(4) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し定義 1.87 における $n_R \in F$ を考えると,

$$\cdots - 3_R < -2_R < -1_R < 0_R < 1_R < 2_R < 3_R < \cdots$$

が成り立つ.

証明. (1) $x \geqslant 0_R$ ならば定義 1.91 の (3) より $x^2 \geqslant 0_F$ である. $x < 0_R$ ならば定義 1.91 の (2) より $0_R < -x_R$ であり, 命題 1.88 より

$$-x_R = (-1_R)x = x(-1_R), \quad (-1_R)^2 = 1_R$$

だから $x^2 = (-1_R)^2 x^2 = (-x)^2 \geqslant 0_R$ である.

(2) 定義 1.91 の (2) より $x + z \leqslant y + z$ である. もし $x + z = y + z$ ならば $x = (x + z) - z = (y + z) - z = y$ となるので, $x + z < y + z$ である.

(3) 定義 1.91 の (3) より $xz \leqslant yz$ である. もし $xz = yz$ ならば $z \neq 0_R$ より $x = xzz^{-1} = yzz^{-1} = y$ となるので, $xz < yz$ である.

(4) (1) と定義 1.91 の (1) より $1_R = 1_R^2 > 0_R$ である. よって (2) より,

$$\cdots - 3_R < -2_R < -1_R < -0_R < 1_R < 2_R < 3_R < \cdots$$

である.

□

定義 1.93 (実数体)**.** $\mathbb{R}$ を順序体とする. もし任意の上に有界 (定義 1.4) な部分集合が上限 (定義 1.6) を持つならば, $\mathbb{R}$ を実数体と言い, $\mathbb{R}$ の元を実数と言う. 命題 1.92 より整数全体 $\mathbb{Z}$ に対し,

$$\mathbb{Z} \ni n \mapsto n_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$$

は順序を保存する単射である. そこで任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し n と $n_{\mathbb{R}}$ を同一視して $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ とみなす. そして

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, \ m \neq 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

を有理数体[*7]と言い, $\mathbb{Q}$ の元を有理数と言う.

注意 1.94. 実数体の定義 1.93 における "任意の上に有界な部分集合が上限を持つ" というところは "任意の下に有界な部分集合が下限を持つ" と置き換えてもよい. 実際, 順序集合においてこれらは同値である (次の命題).

命題 1.95. X を順序集合とする. このとき次は互いに同値である.

(1) X の任意の上に有界な部分集合は上限を持つ.
(2) X の任意の下に有界な部分集合は下限を持つ.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. 下に有界な任意の部分集合 $E \subseteq X$ を取り, F を E の下界全体とする. このとき E の元は F の上界であるので F は上に有界である. よって上限 $\sup(F)$ が存在する. 任意の $x \in E$ に対し x は F の上界だから上限の定義 1.6 より $\sup(F) \leqslant x$ である. よって $\sup(F)$ は E の下界であるので $\sup(F) \in F$, 従って $\sup(F) = \max(F)$ である. 下限の定義 1.6 より $\max(F) = \inf(E)$ である. よって (2) が成り立つ. (2) $\Rightarrow$ (1) も全く対称的な議論によって示せる. □

命題 1.96 (Archimedes の原理)**.** $\mathbb{R}$ を実数体とする. このとき

(1) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ は上に有界ではない.
(2) $a < b$ なる任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し, $a < q < b$ なる $q \in \mathbb{Q}$ が存在する.

証明. (1) $\mathbb{N}$ が上に有界であるならば, 実数体の定義 1.93 より $\mathbb{N}$ は上限 $\sup(\mathbb{N}) \in \mathbb{R}$ を持つ. $\sup(\mathbb{N}) - 1 < \sup(\mathbb{N})$ であるから $\sup(\mathbb{N}) - 1$ は $\mathbb{N}$ の上界ではないので, $\sup(\mathbb{N}) - 1 < n$ なる $n \in \mathbb{N}$ が存在する. しかしこのとき $\sup(\mathbb{N}) < n + 1$ となり $n + 1 \in \mathbb{N}$ より $\sup(\mathbb{N}) < n + 1 \leqslant \sup(\mathbb{N})$ となるので矛盾する. よって $\mathbb{N}$ は上に有界ではない.

(2) (1) より $\frac{1}{b-a} < n$ なる $n \in \mathbb{N}$ が取れる. よって,
$$na + 1 < nb \tag{1.36}$$
である. また (1) より,
$$m - 1 \leqslant na < m \tag{1.37}$$
なる $m \in \mathbb{Z}$ が取れる. よって (1.36), (1.37) より,
$$na < m \leqslant na + 1 < nb$$
だから,
$$a < \frac{m}{n} < b$$
である. よって求める結果を得た.

□

定義 1.97 (拡張された実数系)**.** $\mathbb{R}$ を実数体とする. $\mathbb{R}$ に属さず, 互いに異なる $\infty, -\infty$ を考え,
$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$$
とおく. そして $\overline{\mathbb{R}}$ における 2 項関係 $\leqslant'$ を次のように定義する.

- 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し $x \leqslant' y \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} x \leqslant y$.
- $\infty \leqslant' \infty$, $-\infty \leqslant' -\infty$.
- $-\infty \leqslant' \infty$ であり, $\infty \leqslant' -\infty$ ではない.
- 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $x \leqslant' \infty$ であり, $\infty \leqslant' x$ ではない.
- 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $-\infty \leqslant' x$ であり, $x \leqslant' -\infty$ ではない.

[*7] $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の演算を受け継いで体をなしている.

このとき $\leqslant'$ は $\overline{\mathbb{R}}$ 上の全順序であり, $\mathbb{R}$ の順序を拡張したものである. この全順序集合 $(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant')$ を拡張された実数系と言う. 以後, 拡張された実数系の全順序 $\leqslant'$ は $\mathbb{R}$ の全順序と同じ記号 $\leqslant$ で表す.

命題 1.98. 拡張された実数系 $\overline{\mathbb{R}}$ の任意の空でない部分集合 $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ は上限 $\sup(E) \in \overline{\mathbb{R}}$ と下限 $\inf(E) \in \overline{\mathbb{R}}$ を持つ.

証明. E が上限を持つことを示す. もし $\infty \in E$ ならば E の上界は ∞ のみなので $\sup(E) = \infty$ である. $\infty \notin E$ とする. $E = \{-\infty\}$ ならば $\sup(E) = -\infty$ である. $E \backslash \{-\infty\} \neq \emptyset$ とする. $E \backslash \{-\infty\} \subseteq \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ において上に有界ならばその上限を s とすれば $\sup(E) = s$ である. $E \backslash \{-\infty\} \subseteq \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ において上に有界ではないならば E の上界は ∞ のみだから $\sup(E) = \infty$ である. よって E は上限を持つ. E が下限を持つことも全く対称的な議論によって示せる. □

定義 1.99 (区間)**.** $\overline{\mathbb{R}}$ を拡張された実数系, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \leqslant b$ とする. これに対し $\overline{\mathbb{R}}$ の部分集合

(1) $[a, b] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leqslant x \leqslant b\}$
(2) $(a, b] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x \leqslant b\}$
(3) $[a, b) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leqslant x < b\}$
(4) $(a, b) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < b\}$

を定義する. (1) を閉区間, (2) を左半開区間, (3) を右半開区間, (4) を開区間と言う. $-\infty < a \leqslant b < \infty$ であるときこれらの区間は有界であると言う.

定義 1.100 (拡張された実数系における演算)**.** 実数体 $\mathbb{R}$ 上の演算を拡張された実数系 $\overline{\mathbb{R}}$ 上の演算に次のように拡張する.

- 任意の $x \in (-\infty, \infty]$ に対し, $x + \infty := \infty$, $\infty + x := \infty$.
- 任意の $x \in [-\infty, \infty)$ に対し, $x - \infty := x + (-\infty) := -\infty$, $-\infty + x := -\infty$.
- 任意の $x \in (0, \infty]$ に対し, $x\infty := \infty$, $\infty x := \infty$, $x(-\infty) := -\infty$, $(-\infty)x := -\infty$.
- 任意の $x \in [-\infty, 0)$ に対し, $x\infty := -\infty$, $\infty x := -\infty$, $x(-\infty) := \infty$, $(-\infty)x := \infty$.
- $0\infty := 0$, $\infty 0 := 0$, $0(-\infty) := 0$, $(-\infty)0 := 0$.
- 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, $\frac{x}{\infty} := 0$, $\frac{x}{-\infty} := 0$.
- $-(-\infty) := \infty$.

定義 1.101 (絶対値)**.** 任意の $x \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し, $|x| := \max\{x, -x\} \in \overline{\mathbb{R}}$ を x の絶対値と言う.

命題 1.102. 絶対値に関して次が成り立つ.

(1) 任意の $x \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し, $|x| \geqslant 0$.
(2) 任意の $x \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し, $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
(3) 任意の $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
(4) 任意の $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し, $|xy| = |x||y|$.

証明. 明らかである. □

定義 1.103 (距離空間)**.** X を空でない集合とする. $d : X \times X \to [0, \infty)$ が次の条件を満たすとき, d を X 上の距離関数と言う.

(1) 任意の $x, y \in X$ に対し, $d(x, y) = d(y, x)$.
(2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
(3) 任意の $x, y, z \in X$ に対し, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

(3) の不等式を三角不等式と言う. 距離関数が備わった集合を距離空間と言う. (X, d) を距離空間とする. 任意の $x \in X$ と任意の正実数 $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し,

$$B(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}, \quad CB(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(y, x) \leqslant \varepsilon\}$$

とおく. $B(x, \varepsilon)$ を x を中心とする半径 ε の開球と言う. また $CB(x, \varepsilon)$ を x を中心とする半径 ε の閉球と言う.

$$\mathcal{O}_{(X,d)} := \{U \subseteq X : \forall x \in U, \exists \varepsilon \in (0, \infty) \text{ s.t. } B(x, \varepsilon) \subseteq U\}$$

とおくと, $\mathcal{O}_{(X,d)}$ は X の位相の定義 1.29 を満たす．これを距離関数 d から誘導される X の距離位相と言う．距離空間 (X,d) は, 通常断りなく, この距離位相 $\mathcal{O}_{(X,d)}$ による位相空間と考える．

命題 1.104 (開球は開集合, 閉球は閉集合)**.** 距離空間 (X,d) の開球 $B(x,\varepsilon)$ は開集合であり, 閉球 $CB(x,\varepsilon)$ は閉集合である．

証明. 任意の $y \in B(x,\varepsilon)$ を取り,

$$r := \varepsilon - d(y,x) \in (0,\infty)$$

とおく．このとき任意の $z \in B(y,r)$ に対し 三角不等式より,

$$d(z,x) \leqslant d(z,y) + d(y,x) < \varepsilon - d(y,x) + d(y,x) = \varepsilon$$

であるから $B(y,r) \subseteq B(x,\varepsilon)$ である．よって $B(x,\varepsilon)$ は開集合である．
任意の $y \in X \backslash CB(x,\varepsilon)$ を取り,

$$r := d(y,x) - \varepsilon \in (0,\infty)$$

とおく．このとき任意の $z \in B(y,r)$ に対し三角不等式より,

$$d(z,x) \geqslant d(y,x) - d(y,z) > d(y,x) - (d(y,x) - \varepsilon) = \varepsilon$$

であるから $B(y,r) \subseteq X \backslash CB(x,\varepsilon)$ である．よって $X \backslash CB(x,\varepsilon)$ は開集合なので $CB(x,\varepsilon)$ は閉集合である．　□

命題 1.105 (距離関数の制限と相対位相)**.** (X,d) を距離空間, $E \subseteq X$, $E \neq \varnothing$ とする．このとき,

$$d_E : E \times E \ni (x,y) \mapsto d(x,y) \in [0,\infty)$$

とおけば d_E は E 上の距離関数であり, (E,d_E) の距離位相は (X,d) の距離位相の相対位相である．

証明. d_E が E 上の距離関数であることは自明である．距離位相の定義より距離空間の空でない任意の開集合は開球の合併で表される．任意の $x \in E$ と $\varepsilon \in (0,\infty)$ を取る．(X,d) における中心 x, 半径 ε の開球を $B(x,\varepsilon)$ とおくと, (E,d_E) における中心 x, 半径 ε の開球は,

$$B_E(x,\varepsilon) = \{y \in E : d_E(y,x) < \varepsilon\} = E \cap \{y \in X : d(y,x) < \varepsilon\} = E \cap B(x,\varepsilon)$$

である．これより (E,d_E) の任意の開集合は (X,d) のある開集合 U に対し $E \cap U$ と表されるので, (E,d_E) の距離位相は (X,d) の距離位相の相対位相である．　□

命題 1.106 (距離空間の Hausdorff 性)**.** 距離空間は Hausdorff 空間である．

証明. (X,d) を距離空間とし, $x \neq y$ なる任意の $x,y \in X$ を取る．このとき $d(x,y) > 0$ である．

$$\varepsilon := \frac{1}{2}d(x,y) \in (0,\infty)$$

とおくと, 命題 1.104 より $B(x,\varepsilon), B(y,\varepsilon)$ はそれぞれ x,y の開近傍である．もし $z \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon)$ が存在するならば三角不等式より,

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + \varepsilon = d(x,y)$$

となり矛盾するので, $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \varnothing$ である．よって (X,d) は Hausdorff 空間である．　□

命題 1.107 (距離空間の第一可算性)**.** 距離空間は第一可算公理 (定義 1.56) を満たす．

証明. (X,d) を距離空間とする．Archimedes の原理 1.96 と命題 1.104 より, 任意の $x \in X$ に対し,

$$\mathcal{B}(x) = \left\{B\left(x,\ \frac{1}{n}\right) : \forall n \in \mathbb{N}\right\}$$

は x の基本近傍系でありこれは可算である．よって (X,d) は第一可算公理を満たす．　□

命題 1.108 (距離空間において可分と第二可算は同値)**.** 距離空間においては可分であることと第二可算であることは同値である.

証明. 命題 1.68 より第二可算な位相空間は可分なので, 可分な距離空間が第二可算であることを示せばよい. (X,d) を可分な距離空間とし, $A \subseteq X$ を稠密な可算集合とする.

$$\mathcal{B} := \left\{ B\left(a,\ \frac{1}{n}\right) : a \in A, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathcal{O}_{(X,d)}$$

とおくと, $\mathcal{B}$ は可算集合である. $\mathcal{B}$ が開集合の基であることを示す. 任意の $U \in \mathcal{O}_{(X,d)}$ と任意の $x \in U$ を取る. 距離位相の定義よりある正実数 ε に対し,

$$B(x,\varepsilon) \subseteq U$$

となる. Archimedes の原理 1.96 より

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

なる $n \in \mathbb{N}$ が取れて, $\overline{A} = X$ より $A \cap B(x,\ \frac{1}{n}) \neq \varnothing$ である (命題 1.32) から,

$$a \in A \cap B\left(x,\ \frac{1}{n}\right)$$

が取れる. このとき任意の $y \in B\left(a,\ \frac{1}{n}\right)$ に対し, 三角不等式より,

$$d(y,x) \leqslant d(y,a) + d(a,x) < \frac{2}{n} < \varepsilon$$

であるから,

$$x \in B\left(a,\ \frac{1}{n}\right) \subseteq B(x,\varepsilon) \subseteq U$$

である. よって $\mathcal{B}$ は (X,d) の開集合の基であるから (X,d) は第二可算公理を満たす. □

定義 1.109 (全有界)**.** 距離空間 (X,d) が全有界であるとは, 任意の正実数 ε に対し有限個の $x_1,\cdots,x_n \in X$ が取れて,

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j,\varepsilon)$$

が成り立つことを言う.

命題 1.110 (点列コンパクトな距離空間は全有界)**.** 点列コンパクト (定義 1.61) な距離空間は全有界である.

証明. (X,d) を点列コンパクトな距離空間とする. もし (X,d) が全有界ではないならば, ある正実数 ε に対し, X は半径 ε の有限個の開球では被覆することができない. よって任意の $x_1 \in X$ に対し,

$$x_2 \in X \backslash B(x_1,\varepsilon)$$

が取れ,

$$x_3 \in X \backslash \bigcup_{j=1}^{2} B(x_j,\varepsilon)$$

が取れる. 同様の操作を続けていき, X の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$x_{n+1} \in X \backslash \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j,\varepsilon) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

なるものが帰納的に構成できる. このとき $n < m$ なる任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対し,

$$x_m \in X \backslash \bigcup_{j=1}^{m-1} B(x_j,\varepsilon) \subseteq X \backslash B(x_n,\varepsilon)$$

であるから $d(x_m,x_n) \geqslant \varepsilon$ である. これは $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束する部分列を持つことに矛盾する. よって (X,d) は全有界である. □

命題 1.111 (全有界な距離空間は可分)**.** 全有界な距離空間は可分である.

証明. (X,d) を全有界な距離空間とすると, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し有限個の $x_{n,1},\cdots,x_{n,m_n}\in X$ が取れて,

$$X=\bigcup_{j=1}^{m_n}B\left(x_{n,j},\ \frac{1}{n}\right) \tag{1.38}$$

となる. そこで,

$$D:=\{x_{n,j}:n\in\mathbb{N},\ j\in\{1,\cdots,m_n\}\}$$

とおくと, D は可算集合であるから, (X,d) が可分であることを示すには D が X で稠密であることを示せばよい. 任意の $x\in X$, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し, (1.38) よりある $j\in\{1,\cdots,m_n\}$ が取れて $d(x,x_{n,j})<\frac{1}{n}$ となるので,

$$B\left(x,\ \frac{1}{n}\right)\cap D\neq\varnothing\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

が成り立つ. よって Archimedes の原理 1.96 と命題 1.32 より $x\in\overline{D}$ だから $X=\overline{D}$ である. □

定理 1.112 (距離空間においては点列コンパクトとコンパクトは同値)**.** 距離空間においては点列コンパクトとコンパクトは同値である.

証明. 距離空間は第一可算である (命題 1.107) から, 命題 1.62 よりコンパクトな距離空間は点列コンパクトである. 距離空間 (X,d) が点列コンパクトであるとする. このとき命題 1.110 より (X,d) は全有界だから, 命題 1.111 より, (X,d) は可分である. よって命題 1.108 より (X,d) は第二可算であるから, 定理 1.69 より (X,d) はコンパクトである. □

定義 1.113 (Cauchy 列)**.** (X,d) を距離空間とする. X の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であるとは,

$$\forall\varepsilon\in(0,\infty),\exists n_0\in\mathbb{N}\text{ s.t. }\forall n,m\geqslant n_0,d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

が成り立つことを言う.

注意 1.114 (距離空間の収束する点列は Cauchy 列)**.** 距離空間 (X,d) の収束する点列は Cauchy 列である. 実際, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を収束する点列とし, $x:=\lim_{n\to\infty}x_n\in X$ とすると, 任意の正実数 ε に対し, $n_0\in\mathbb{N}$ が存在し,

$$d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\forall n\geqslant n_0)$$

となる. よって三角不等式より,

$$d(x_n,x_m)\leqslant d(x_n,x)+d(x,x_m)<\varepsilon\quad(\forall n,m\geqslant n_0)$$

なので $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列である.

定義 1.115 (距離空間の完備性)**.** 距離空間が完備であるとは, その任意の Cauchy 列が収束することを言う.

補題 1.116 (収束する部分列を持つ Cauchy 列は収束する)**.** (X,d) を距離空間とし, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を収束する部分列を持つ Cauchy 列とする. このとき $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する.

証明. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束する部分列を $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ とし, その収束点を $x\in X$ とする. 任意の正実数 ε を取る. このとき $\lim_{n\to\infty}x_{k(n)}=x$ よりある $n_0\in\mathbb{N}$ に対し,

$$d(x_{k(n)},x)<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\forall n\geqslant n_0)$$

となり, また $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列なのである $n_1\in\mathbb{N}$ に対し,

$$d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\forall n\geqslant n_1)$$

となる. $n_2:=\max(n_0,n_1)\in\mathbb{N}$ とおくと, 任意の $n\geqslant n_2$ に対し $k(n)\geqslant n\geqslant n_2$ なので, 三角不等式より,

$$d(x_n,x)\leqslant d(x_n,x_{k(n)})+d(x_{k(n)},x)<\varepsilon$$

である. よって $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ である. □

定義 1.117 (距離空間の部分集合の直径)**.** (X, d) を距離空間, $E \subseteq X$ とする.

$$\mathrm{diam}(E) := \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}$$

を E の直径と言う.

定理 1.118. (X, d) を距離空間とする. このとき次は互いに同値である.

(1) (X, d) はコンパクトである.
(2) (X, d) は点列コンパクトである.
(3) (X, d) は全有界かつ完備である.

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2) は定理 1.112 である. (2) $\Rightarrow$ (3) は命題 1.110 と補題 1.116 による. (3) $\Rightarrow$ (1) を示す. (3) が成り立つとする. もし (X, d) がコンパクトではないならば, X のある開被覆 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{(x,d)}$ に対しては, $\mathcal{O}$ のいかなる有限部分族も X の開被覆にはならない. X は全有界であるから X は直径が 1 以下の有限個の閉集合の合併で表せる. その閉集合のうち $\mathcal{O}$ のいかなる有限部分族によっても被覆できないものが少なくとも 1 つは存在するので, そのようなものを 1 つ取り X_1 とおく. X_1 は全有界であるから X_1 は直径が $\frac{1}{2}$ 以下の有限個の閉集合の合併で表せる. その閉集合のうち $\mathcal{O}$ のいかなる有限部分族によっても被覆できないものが少なくとも 1 つは存在するので, そのようなものを 1 つ取り X_2 とおく. この操作を続けていき, X の部分集合の列 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で次の条件を満たすものを構成する.

(a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, X_n は X の閉集合.
(b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $X_{n+1} \subseteq X_n$
(c) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, X_n の直径は $\frac{1}{n}$ 以下.
(d) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, X_n は $\mathcal{O}$ のいかなる有限部分族によっても被覆できない.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $x_n \in X$ を取り, X の点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を定義する. (b), (c) より,

$$d(x_n, x_m) \leqslant \frac{1}{m} \quad (\forall n \geqslant m)$$

であるから, Archimedes の原理 1.96 より $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である. よって (X, d) が完備であることから $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ はある $x \in X$ に収束する. 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の正実数 ε を取る. $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ であることから,

$$m \geqslant n, \quad d(x_m, x) < \varepsilon$$

を満たす $m \in \mathbb{N}$ が取れる. (b) より $x_m \in X_m \subseteq X_n$ だから, $x_m \in B(x, \varepsilon) \cap X_n$ である. よって

$$B(x, \varepsilon) \cap X_n \neq \varnothing \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon \in (0, \infty))$$

であるから, 命題 1.32 と (a) より,

$$x \in \overline{X_n} = X_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

である. ゆえに,

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \tag{1.39}$$

である. $x \in U$ なる $U \in \mathcal{O}$ を取る. Archimedes の原理 1.96 より,

$$CB\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq U$$

なる $n \in \mathbb{N}$ が取れる. このとき (1.39) と (c) より

$$X_n \subseteq CB\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq U$$

となる. しかしこれは (d) に矛盾する. ゆえに (X, d) はコンパクトであるから (1) が成り立つ. $\square$

定義 1.119 (距離空間の部分集合の有界性)**.** 距離空間 (X,d) の空でない部分集合 E が有界であるとは, ある $x \in X$ と $r \in (0,\infty)$ に対し

$$E \subseteq B(x,r) = \{y \in X : d(y,x) < r\}$$

が成り立つことを言う.

命題 1.120 (有界閉集合がコンパクトならば完備)**.** 任意の有界閉集合がコンパクトであるような距離空間は完備である.

証明. X を任意の有界閉集合がコンパクトである距離空間とし, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の任意の Cauchy 列とする. このとき明らかに $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界であるから, ある有界閉集合 B に対して $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ が成り立つ. B はコンパクトであるから点列コンパクトなので $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列を持つ. よって補題 1.116 より $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する. ゆえに (X,d) は完備である. □

定義 1.121 (一様連続)**.** $(X,d_X),(Y,d_Y)$ をそれぞれ距離空間とする. 写像 $f : X \to Y$ が一様連続であるとは,

$$\forall\varepsilon \in (0,\infty), \exists\delta \in (0,\infty) \text{ s.t. } \forall x_1,x_2 \in X(d_X(x_1,x_2) < \delta), d_Y(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

注意 1.122. $(X,d_X),(Y,d_Y)$ をそれぞれ距離空間とする. 写像 $f : X \to Y$ が $x_0 \in X$ において連続であることは,

$$\forall\varepsilon \in (0,\infty), \exists\delta \in (0,\infty) \text{ s.t. } \forall x \in X(d_X(x,x_0) < \delta), d_Y(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$$

と同値であるから, 一様連続性は一般に連続性より強い. しかし次の定理で見るように定義域の距離空間がコンパクトであれば一様連続性と連続性は同値である.

定理 1.123 (コンパクト距離空間上の連続写像の一様連続性)**.** (X,d_X) をコンパクトな距離空間, (Y,d_Y) を距離空間とし, $f : X \to Y$ を連続写像とする. このとき $f : X \to Y$ は一様連続である.

証明. 任意の正実数 ε を取り固定する. 任意の $x \in X$ に対し, f は x において連続であるので, 正実数 δ_x が存在し,

$$f\left(B\left(x,\delta_x\right)\right) \subseteq B\left(f(x),\ \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{1.40}$$

となる. X はコンパクトであるから有限個の $x_1,\cdots,x_n \in X$ が取れて,

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} B\left(x_k,\ \frac{\delta_{x_k}}{2}\right) \tag{1.41}$$

となる. そこで

$$\delta := \min\left\{\frac{\delta_{x_1}}{2},\cdots,\frac{\delta_{x_n}}{2}\right\} \tag{1.42}$$

とおき, $d_X(x',x) < \delta$ なる任意の $x,x' \in X$ を取る. (1.41) より $x \in B\left(x_k,\ \frac{\delta_{x_k}}{2}\right)$ なる $k \in \{1,\cdots,n\}$ が取れる. 三角不等式と (1.42) より,

$$d_X(x',x_k) \leqslant d_X(x',x) + d_X(x,x_k) < \delta + \frac{\delta_{x_k}}{2} < \delta_{x_k}$$

だから, $x,x' \in B(x_k,\delta_{x_k})$ である. よって (1.40) と三角不等式より,

$$d_Y(f(x'),f(x)) \leqslant d_Y(f(x'),f(x_k)) + d_Y(f(x_k),f(x)) < \varepsilon$$

である. ゆえに $f : X \to Y$ は一様連続である. □

定義 1.124 (一様収束)**.** X を空でない集合, (Y,d) を距離空間とする. $X \to Y$ の写像からなるネット $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $f : X \to Y$ に一様収束するとは,

$$\forall\varepsilon \in (0,\infty), \exists\lambda_0 \in \Lambda \text{ s.t. } \forall\lambda \geqslant \lambda_0, \forall x \in X, d(f_\lambda(x),f(x)) < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

定理 1.125 (連続写像の一様収束極限は連続写像)**.** X を位相空間, (Y,d) を距離空間とし, $X \to Y$ の連続写像からなるネット $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $f: X \to Y$ に一様収束するとする. このとき f は連続である.

証明. 任意の $x_0 \in X$ と任意の正実数 ε を取り固定する. $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は f に一様収束するので, ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在し,

$$d(f_{\lambda_0}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つ. $f_{\lambda_0}: X \to Y$ は連続なので x_0 のある近傍 U が存在し,

$$d(f_{\lambda_0}(x), f_{\lambda_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall x \in U)$$

が成り立つ. よって任意の $x \in U$ に対し,

$$d(f(x), f(x_0)) \leqslant d(f(x), f_{\lambda_0}(x)) + d(f_{\lambda_0}(x), f_{\lambda_0}(x_0)) + d(f_{\lambda_0}(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$$

であるから, $f: X \to Y$ は連続である. □

定義 1.126 (一様 Cauchy 条件)**.** X を空でない集合, (Y,d) を距離空間とし, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $X \to Y$ の写像の列とする.

$$\forall \varepsilon \in (0,\infty), \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n, m \geqslant n_0, \forall x \in X, d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$$

が成り立つとき $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様 Cauchy 条件を満たすと言う.

定理 1.127 (一様 Cauchy 条件と一様収束)**.** X を空でない集合, (Y,d) を完備距離空間とし, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を一様 Cauchy 条件を満たす $X \to Y$ の写像の列とする. このとき $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はある $f: X \to Y$ に一様収束する.

証明. 任意の正実数 ε を取る. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様 Cauchy 条件を満たすので $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$d(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n, m \geqslant n_0, \forall x \in X) \tag{1.43}$$

が成り立つ. 任意の $x \in X$ に対し $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ は完備距離空間 (Y,d) の Cauchy 列であるからある $f(x) \in Y$ に収束する[*8]. こうして $f: X \ni x \mapsto f(x) \in Y$ が定義できる. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ より, $n_x \in \mathbb{N}$ で,

$$n_x \geqslant n_0, \quad d(f_n(x), f_{n_x}(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.44}$$

なるものが取れる. よって (1.43) と (1.44) より, 任意の $n \geqslant n_0$ と任意の $x \in X$ に対し,

$$d(f(x), f_n(x)) \leqslant d(f(x), f_{n_x}(x)) + d(f_{n_x}(x), f_n(x)) < \varepsilon$$

であるので, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に一様収束する. □

定義 1.128 ($\mathbb{R}$ の位相)**.** $\mathbb{R}$ を実数体とする. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x,y) \mapsto |x-y| \in [0,\infty)$ は明らかに $\mathbb{R}$ 上の距離関数である. そこでこの距離関数による距離位相を $\mathbb{R}$ に導入する. 以後, 特に断らない限り, $\mathbb{R}$ には常にこの位相が入っているものとする.

命題 1.129 (有理数の稠密性)**.** $\mathbb{R}$ において有理数体 $\mathbb{Q}$ は稠密である.

証明. 任意の $x \in \mathbb{R}$ と任意の正実数 ε に対し, Archimedes の原理 1.96 より,

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$$

である. よって命題 1.32 より $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$ である. □

命題 1.130. $\mathbb{R}$ は第二可算公理を満たす.

証明. 有理数全体 $\mathbb{Q}$ は可算なので命題 1.129 より $\mathbb{R}$ は可分である. $\mathbb{R}$ の位相は距離位相なので命題 1.108 より $\mathbb{R}$ は第二可算である. □

---

*8 距離空間は Hausdorff 空間 (命題 1.106) であるから命題 1.36 より収束する点列の収束点は一意的であることに注意.

定理 1.131 (中間値の定理)**.** 空でない $C \subseteq \mathbb{R}$ に対し次は互いに同値である.

(1) C は連結 (定義 1.52) である.
(2) $x \leqslant y$ を満たす任意の $x, y \in C$ に対し $[x, y] \subseteq C$.
(3) C は区間である.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. C が連結であるとする. もし (2) が成り立たないならば, $x, y \in C$ で $(x, y) \backslash C \neq \varnothing$ なるものが取れる. そこで $z \in (x, y) \backslash C$ を取ると,

$$x \in C \cap (-\infty, z), \quad y \in C \cap (z, \infty), \quad C = (C \cap (-\infty, z)) \cup (C \cap (z, \infty))$$

となる. これは C が連結であることに矛盾する. よって (1) $\Rightarrow$ (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (3) を示す. (2) が成り立つとする.

$$a := \inf(C), \quad b := \sup(C)$$

とおけば, 任意の $z \in (a, b)$ に対し, 上限と下限の定義より $x < z < y$ なる $x, y \in C$ が存在する. よって $z \in (x, y) \subseteq C$ である. これより $(a, b) \subseteq C$ である. ゆえに C は

$$(a, b), \quad [a, b), \quad (a, b], \quad [a, b]$$

のうちのいずれかであるから区間である. よって (2) $\Rightarrow$ (3) が成り立つ.
(3) $\Rightarrow$ (2) は自明である.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとする. C が非連結であると仮定して矛盾を導く. このとき $\mathbb{R}$ の開集合 U, V で,

$$C \cap U \neq \varnothing, \quad C \cap V \neq \varnothing, \quad C = (C \cap U) \cup (C \cap V), \quad (C \cap U) \cap (C \cap V) = \varnothing$$

なるものが取れる. そこで任意の $x \in C \cap U, y \in C \cap V$ を取る. $x < y$ であるとして一般性を失わない. (2) が成り立つことから $[x, y] \subseteq C$ であるので,

$$[x, y] \cap U = [x, y] \backslash V$$

である. 今,

$$s := \sup\left([x, y] \cap U\right) = \sup\left([x, y] \backslash V\right)$$

とおく. $[x, y] \backslash V$ は $\mathbb{R}$ の閉集合であり, 上限の定義より s に収束する $[x, y] \backslash V$ の点列が取れるので, 命題 1.58 より

$$s \in \overline{[x, y] \backslash V} = [x, y] \backslash V = [x, y] \cap U$$

である. $y \in [x, y] \cap V$ より $s < y$ だから,

$$s \in [x, y) \cap U$$

であり, U は $\mathbb{R}$ の開集合なので十分小さい正実数 ε を取れば,

$$s + \varepsilon \in [x, y] \cap U$$

となる. しかしこれは s の定義に矛盾する. よって C は連結である. □

命題 1.132 (非負実数の冪乗根の存在)**.** 任意の $x \in [0, \infty)$ と任意の $n \in \mathbb{N} : n \geqslant 2$ に対し, $y^n = x$ を満たす $y \in [0, \infty)$ が唯一つ存在する.

証明. n に関する帰納法により,

$$0 \leqslant y_1 < y_2 < \infty \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant y_1^n < y_2^n < \infty$$

であることが分かる. これより一意性が従う. 存在を示す. $f : \mathbb{R} \ni t \mapsto t^n \in \mathbb{R}$ なる関数を考えると, n に関する帰納法により f は連続関数であることが分かる. 定理 1.131 より $[0, 1 + x]$ は連結であるから命題 1.54 より $f([0, 1 + x])$ も連結である.

$$f(0) = 0 \leqslant x < 1 + x \leqslant (1 + x)^n = f(1 + x)$$

だから, 定理 1.131 より,

$$x \in [f(0), f(1 + x)] \subseteq f([0, 1 + x])$$

である. よって $x = f(y) = y^n$ なる $y \in [0, 1 + x]$ が存在する. □

定義 1.133 (非負実数の冪乗根)**.** 任意の非負実数 $x \in [0, \infty)$ と任意の $n \in \mathbb{N}(n \geqslant 2)$ に対し, 命題 1.132 より $y^n = x$ を満たす非負実数 $y \in [0, \infty)$ が唯一つ存在する. この y を x の n 乗根と言い, $\sqrt[n]{x}$ か $x^{\frac{1}{n}}$ によって表す. $\sqrt[2]{x}$ は単に $\sqrt{x}$ と表す.

定理 1.134 (有界閉区間のコンパクト性)**.** 任意の有界閉区間 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ はコンパクトである.

証明. $a = b$ の場合は $[a, b]$ は一点集合だから明らかにコンパクトである. $a < b$ とする. $[a, b]$ の任意の開被覆 $\mathcal{O}$ を取り,

$$s := \sup\{t \in [a, b] : [a, t] \text{ は } \mathcal{O} \text{ の有限部分族によって被覆できる }\}$$

とおく. $[a, b]$ は閉集合なので $s \in [a, b]$ である. $a \in U$ なる $U \in \mathcal{O}$ に対し, 十分小さい正実数 ε を取れば $[a, a + \varepsilon] \subseteq U$ となるので $a < s$ である. 今, $s \in U_0$ なる $U_0 \in \mathcal{O}$ を取り, $[s - \varepsilon, s] \subseteq U_0 \cap [a, b]$ なる正実数 ε を取る. 上限の定義より $s - \varepsilon < t \leqslant s$ なる t と有限個の $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{O}$ が取れて,

$$[a, t] \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$$

となる. よって

$$[a, s] \subseteq [a, t] \cup [s - \varepsilon, s] \subseteq U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n$$

であるから, $[a, s]$ は $\mathcal{O}$ の有限部分族 $\{U_0, U_1, \cdots, U_n\}$ によって被覆できる. もし $s < b$ ならば十分小さい正実数 δ を取れば $[s - \varepsilon, s + \delta] \subseteq U_0 \cap [a, b]$ となるので,

$$[a, s + \delta] \subseteq [a, t] \cup [s - \varepsilon, s + \delta] \subseteq U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n$$

となり, $[a, s + \delta]$ も $\mathcal{O}$ の有限部分族で被覆できることになる. しかしこれは s の定義に矛盾する. よって $s = b$ であり, $[a, b]$ は $\mathcal{O}$ の有限部分族によって被覆できる. ゆえに $[a, b]$ はコンパクトである. □

定義 1.135 (単調増加 (単調減少) ネット)**.** X を前順序集合 (定義 1.1) とし, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X のネットとする. $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が単調増加であるとは,

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad x_{\lambda_1} \leqslant x_{\lambda_2}$$

が成り立つことを言う. また $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が単調減少であるとは,

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad x_{\lambda_2} \leqslant x_{\lambda_1}$$

が成り立つことを言う.

命題 1.136 ($\mathbb{R}$ の単調増加ネット収束条件)**.** $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathbb{R}$ の単調増加ネットとする. このとき次は互いに同値である.

(1) $\{x_\lambda\}_\lambda \subseteq \mathbb{R}$ は上に有界である.
(2) $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は収束する.

また (1), (2) が成り立つとき,

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = \lim_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$$

である.

証明. (1) ⇒ (2) を示す. (1) が成り立つとし, $x := \sup_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \in \mathbb{R}$ とおく. 上限の定義より任意の正実数 ε に対し $x - \varepsilon < x_{\lambda_0}$ を満たす $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在し, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が単調増加ネットであることから,

$$x - \varepsilon < x_{\lambda_0} \leqslant x_\lambda \leqslant x \ \ (\forall \lambda \geqslant \lambda_0)$$

である. よって

$$0 \leqslant x - x_\lambda < \varepsilon \ \ (\forall \lambda \geqslant \lambda_0)$$

であるから $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は x に収束する.
(2) ⇒ (1) を示す. (2) が成り立つとし, $x := \lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \in \mathbb{R}$ とおく. x が $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の上界であることを示せばよい. もし x が $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の上界ではないならば, $x < x_{\lambda_0}$ なる $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在する. このとき $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が単調増加であることから,

$$0 < x_{\lambda_0} - x \leqslant x_\lambda - x \ \ (\forall\lambda \geqslant \lambda_0)$$

である. これは $\lim_\lambda x_\lambda = x$ に矛盾する. よって x は $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の上界である. □

命題 1.137 (単調減少ネットの収束条件)**.** $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{R}$ の単調減少ネットとする. このとき次は互いに同値である.

(1) $\{x_\lambda\}_\lambda \subseteq \mathbb{R}$ は下に有界である.
(2) $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は収束する.

また (1), (2) が成り立つとき,

$$\inf_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = \lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$$

である.

証明. (1) ⇒ (2) を示す. (1) が成り立つとし, $x := \inf_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \in \mathbb{R}$ とおく. 下限の定義より任意の正実数 ε に対し $x_{\lambda_0} < x + \varepsilon$ を満たす $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在し, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が単調減少ネットであることから,

$$x \leqslant x_\lambda \leqslant x_{\lambda_0} < x + \varepsilon \ \ (\forall\lambda \geqslant \lambda_0)$$

である. よって

$$0 \leqslant x_\lambda - x < \varepsilon \ \ (\forall\lambda \geqslant \lambda_0)$$

であるから $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は x に収束する.
(2) ⇒ (1) を示す. (2) が成り立つとし, $x := \lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \in \mathbb{R}$ とおく. x が $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の下界であることを示せばよい. もし x が $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の下界ではないならば, $x_{\lambda_0} < x$ なる $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在する. このとき $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が単調減少であることから,

$$0 < x - x_{\lambda_0} \leqslant x - x_\lambda \ \ (\forall\lambda \geqslant \lambda_0)$$

である. これは $\lim_\lambda x_\lambda = x$ に矛盾する. よって x は $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の下界である. □

命題 1.138. 任意の $x \in [0,1)$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

が成り立つ. また,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1}{1-x}$$

が成り立つ.

証明. $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少列であり下に有界であるから命題 1.137 より $\ell := \lim_{n\to\infty} x^n$ が存在し, $\ell = \inf_{n\in\mathbb{N}} x^n$ である.

$$\ell = \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \lim_{n\to\infty} (x^n)^2 = \ell^2$$

であるから $\ell = 0$ か $\ell = 1$ であるが, $\ell \leqslant x < 1$ なので $\ell = 0$ である. よって $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ である.

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^N}{1-x} \ \ (\forall N \in \mathbb{N})$$

であるから, 前段の結果より,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1-x^N}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

である. □

命題 1.139. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{R}$ の収束するネットとし,

$$x_\lambda \leqslant y_\lambda \quad (\forall\lambda\in\Lambda)$$

が成り立つと仮定する. このとき,

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \leqslant \lim_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda$$

が成り立つ.

証明. $(y_\lambda - x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $[0,\infty)$ のネットであり, $\lim_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda - \lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ に収束する. $[0,\infty)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合であるから命題 1.34 より,

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda - \lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \in [0,\infty)$$

である. よって求める結果を得る. □

命題 1.140. 任意の $p\in\mathbb{N}(p\geqslant 2)$ と任意の $x\in(0,\infty)$ に対し,

$$p^m \leqslant x < p^{m+1} \tag{1.45}$$

を満たす $m\in\mathbb{Z}$ が存在する. さらに

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_{m-k}p^{m-k}, \quad x_m \neq 0$$

を満たす $\{0,1,\cdots,p-1\}$ の列 $(x_{m-k})_{k\in\mathbb{Z}_+}$ が存在する.

証明. (1.45) が存在することは命題 1.138 による. (1.45) より,

$$p^m x_m \leqslant x < p^m(x_m+1) \tag{1.46}$$

なる $x_m \in \{1,\cdots,p-1\}$ が存在する. そして (1.46) より,

$$0 \leqslant x - p^m x_m < p^m$$

だから,

$$p^{m-1}x_{m-1} \leqslant x - p^m x_m < p^{m-1}(x_{m-1}+1) \tag{1.47}$$

を満たす $x_{m-1}\in\{0,1,\cdots,p-1\}$ が存在する. (1.47) より,

$$0 \leqslant x - (p^m x_m + p^{m-1}x_{m-1}) < p^{m-1}$$

だから,

$$p^{m-2}x_{m-2} \leqslant x - (p^m x_m + p^{m-1}x_{m-1}) < p^{m-2}(x_{m-2}+1) \tag{1.48}$$

を満たす $x_{m-2}\in\{0,1,\cdots,p-1\}$ が存在する. (1.48) より,

$$0 \leqslant x - \left(p^m x_m + p^{m-1}x_{m-1} + p^{m-2}x_{m-2}\right) < p^{m-2}$$

である. 同様の操作を繰り返し $\{0,1,\cdots,p-1\}$ の元の列 $(x_{m-k})_{k\in\mathbb{N}}$ で,

$$0 \leqslant x - \sum_{k=0}^{N} p^{m-k}x_{m-k} < p^{m-N} \quad (\forall N\in\mathbb{N})$$

を満たすものができる. 命題 1.138 より,

$$\lim_{N\to\infty} p^{m-N} = 0$$

だから,

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_{m-k}p^{m-k}$$

である. □

命題 1.141. $p \in \mathbb{N}(p \geqslant 2)$ とし, $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を $\{0, 1, \cdots, p-1\}$ の元からなる列とする. そして,

$$x_0 < y_0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n p^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} y_n p^{-n}$$

が成り立つとする. このとき,

$$y_0 = x_0 + 1, \quad y_n = 0, \quad x_n = p - 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{1.49}$$

が成り立つ.

証明. 命題 1.138 と命題 1.139 より,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} x_n p^{-n} &= x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n p^{-n} \leqslant x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p-1)p^{-n} = x_0 + 1 \leqslant y_0 \\ &\leqslant y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n p^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} y_n p^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n p^{-n}\end{aligned}$$

だから,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n p^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (p-1)p^{-n}, \quad x_0 + 1 = y_0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n p^{-n} = 0$$

である. よって (1.49) が成り立つ. □

定理 1.142 ($\mathbb{R}$ の非可算性)**.** $\mathbb{R}$ は非可算集合である.

証明. $[0, 1)$ が非可算であることを示せば十分である. $[0, 1)$ が可算であると仮定して矛盾を導く. このとき $[0, 1) = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ と表せる. 任意の $p \in \mathbb{N}(p \geqslant 4)$ を取る. 命題 1.140 より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$x_n = \sum_{m=0}^{\infty} x_{n,m} p^{-m}$$

なる $\{0, 1, \cdots, p-1\}$ の列 $(x_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ が取れる. 今, 各 $m \in \mathbb{Z}_+$ について

$$a_m \in \{1, 2 \cdots, p-2\} \backslash \{x_{m,m}\} \tag{1.50}$$

を取り,

$$a := \sum_{m=0}^{\infty} a_m p^{-m}$$

とおく. このとき $a \in (0, 1)$ であるので $a = x_n$ なる $n \in \mathbb{N}$ が取れる. (1.50) より $a_n \neq x_{n,n}$ であるので, 命題 1.141 より $(a_{n+k})_{k\in\mathbb{N}}$ は全ての項が 0 か全ての項が $p-1$ でなくてはならない. しかしこれは (1.50) に矛盾する. ゆえに $(0, 1)$ は非可算である. □

定義 1.143 (Euclid 空間)**.** N 個の $\mathbb{R}$ の直積 $\mathbb{R}^N$ を考える. 任意の $x = (x_1, \cdots, x_N), y = (y_1, \cdots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$x + y := (x_1 + y_1, \cdots, x_N + y_N) \in \mathbb{R}^N$$

として $\mathbb{R}^N$ 上の 2 項演算

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}^N$$

を定義する. これにより $\mathbb{R}^N$ は可換な加法群となる. また任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と任意の $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$\alpha x := (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_N) \in \mathbb{R}^N$$

として演算

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha x \in \mathbb{R}^N$$

を定義する．これを $\mathbb{R}^N$ におけるスカラー倍と言う．さらに任意の $x=(x_1,\cdots,x_N), y=(y_1,\cdots,y_N)\in\mathbb{R}^N$ に対し，

$$(x \mid y) := \sum_{j=1}^{N} x_j y_j \in \mathbb{R}$$

として演算

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ni (x,y) \mapsto (x \mid y) \in \mathbb{R}$$

を定義する．これを $\mathbb{R}^N$ の標準内積と言う．任意の $x\in\mathbb{R}^N$ に対し，

$$(x \mid x) = \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \geqslant 0$$

であるから，$(x \mid x)$ は 2 乗根 (命題 1.132, 定義 1.133)

$$|x| := \sqrt{(x \mid x)} \in [0,\infty)$$

を持つ．$|x|$ を $\mathbb{R}^N$ の標準内積から定まるノルムと言う．次の命題 1.144 より，

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ni (x,y) \mapsto |x-y| \in [0,\infty)$$

は $\mathbb{R}^N$ 上の距離関数である．$\mathbb{R}^N$ に上で述べた加法, スカラー倍, 標準内積, 標準内積から定まるノルム, 距離関数, 距離位相が備わったものを N 次元 Euclid 空間と言う．

命題 1.144 (Euclid 空間における Schwarz の不等式)**.** 任意の $x,y\in\mathbb{R}^N$ に対し，

$$|(x \mid y)| \leqslant |x||y|, \tag{1.51}$$

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| \tag{1.52}$$

が成り立つ．

証明. $|y|=0$ ならば $\sum_{j=1}^{N}|y_j|^2=0$ だから $y=0$ である．よって $|y|=0$ の場合は (1.51), (1.52) は成り立つ．$|y|>0$ であるとする．任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ に対し，

$$0 \leqslant (x-\alpha y \mid x-\alpha y) = (x \mid x) - 2\alpha(x \mid y) + \alpha^2(y \mid y) = |x|^2 - 2\alpha(x \mid y) + \alpha^2|y|^2$$

だから，

$$\alpha := \frac{(x \mid y)}{|y|^2}$$

とおけば，

$$0 \leqslant |x|^2 - 2\frac{|(x \mid y)|^2}{|y|^2} + \frac{|(x \mid y)|^2}{|y|^2} = |x|^2 - \frac{|(x \mid y)|^2}{|y|^2}$$

を得る．よって (1.51) が成り立つ．また (1.51) を用いて，

$$\begin{aligned}|x+y|^2 &= (x+y \mid x+y) = (x \mid x) + 2(x \mid y) + (y \mid y) \leqslant |x|^2 + 2|(x \mid y)| + |y|^2 \\ &\leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2\end{aligned}$$

を得る．よって (1.51) が成り立つ． □

定理 1.145 (Euclid 空間の位相の基本的性質)**.** $\mathbb{R}^N$ を Euclid 空間とする．このとき次が成り立つ．

(1) $\mathbb{R}^N$ の位相は $\mathbb{R}$ の位相の直積位相 (定義 1.75) である．
(2) $\mathbb{R}^N$ は第二可算である．
(3) $\mathbb{R}^N$ の任意の有界閉集合はコンパクトである．
(4) $\mathbb{R}^N$ は完備距離空間である．

証明. (1) 任意の $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$|x_1|, \cdots, |x_N| \leqslant |x| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |x_j| \tag{1.53}$$

であることと命題 1.76 による.

(2) 命題 1.129 より $\mathbb{R}$ において有理数体 $\mathbb{Q}$ は稠密であるから (1) より $\mathbb{R}^N$ において $\mathbb{Q}^N$ は稠密である. そして $\mathbb{Q}$ は可算集合だから $\mathbb{Q}^N$ も可算集合なので $\mathbb{R}^N$ は可分である. 距離空間においては可分であることと第二可算であることは同値 (命題 1.108) なので $\mathbb{R}^N$ は第二可算である.

(3) 定理 1.134 より $\mathbb{R}$ の有界閉区間はコンパクトなので, $\mathbb{R}$ の有界閉区間 N 個の直積で表される集合はコンパクト[*9]である. そして $\mathbb{R}^N$ の任意の有界閉集合は (1.53) より $\mathbb{R}$ の有界閉区間 N 個の直積で表される集合に含まれる. よって $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合はコンパクトである[*10].

(4) (3) と命題 1.120 による.

□

定義 1.146 (複素数体)**.** $\mathbb{R}^2$ は,

(加法) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni ((x_1, y_1),\ (x_2, y_2)) \mapsto (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$
(乗法) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni ((x_1, y_1),\ (x_2, y_2)) \mapsto (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + y_1 x_2) \in \mathbb{R}^2$

によって体 (定義 1.89) をなす. 単位元は $(1, 0)$ であり, 零元は $(0, 0)$ である. この体を複素数体と言い $\mathbb{C}$ で表す.

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}$$

は体の演算を保存する単射である. そこで任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, x と $(x, 0) \in \mathbb{C}$ を同一視して $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ とみなす. また,

$$i := (0, 1) \in \mathbb{C}$$

と表し, i を虚数単位と言う. 虚数単位 i により $\mathbb{C}$ の任意の元 z はある $x, y \in \mathbb{R}$ に対し $z = x + iy$ と一意的に表される. このとき x を z の実部, y を z の虚部と言い, $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$ と表す. 任意の $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\overline{z} := \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{C}$$

を z の複素共役と言う. 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し z の絶対値を,

$$|z| := \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

として定義する. 命題 1.144 より,

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \quad (\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})$$

であり, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ である. よって,

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni (z_1, z_2) \mapsto |z_1 - z_2| \in [0, \infty)$$

は $\mathbb{C}$ 上の距離関数である. 以後特に断らない限り, $\mathbb{C}$ にはこの距離関数による距離位相が常に備わっているものとする.

定義 1.147 (同相写像)**.** X, Y を位相空間とする. $f : X \to Y$ が同相写像であるとは全単射連続写像であり, $f^{-1} : Y \to X$ も連続であることを言う.

命題 1.148. 2 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^2$ と複素数体 $\mathbb{C}$ に対し,

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + iy \in \mathbb{C}$$

は距離を保存する同相写像である.

[*9] Tychonoff の定理 1.78 を用いるか, 距離空間においてはコンパクトであることと点列コンパクトであることが同値であること (定理 1.112) を用いれば分かる.
[*10] 命題 1.42 による

証明. 定義 1.146 より自明である. □

定義 1.149 (ユニタリ空間)**.** N 個の $\mathbb{C}$ の直積 $\mathbb{C}^N$ を考える. 任意の $z=(z_1,\cdots,z_N), w=(w_1,\cdots,w_N)\in\mathbb{C}^N$ に対し,

$$z+w := (z_1+w_1,\cdots,z_N+w_N)\in\mathbb{C}^N$$

とおいて $\mathbb{C}^N$ 上の 2 項演算

$$\mathbb{C}^N\times\mathbb{C}^N\ni(z,w)\mapsto z+w\in\mathbb{C}^N$$

を定義する. これにより $\mathbb{C}^N$ は可換な加法群をなす. また任意の $\alpha\in\mathbb{C}, z=(z_1,\cdots,z_N)\in\mathbb{C}^N$ に対し,

$$\alpha z := (\alpha z_1,\cdots,\alpha z_N)\in\mathbb{C}^N$$

として, 演算

$$\mathbb{C}\times\mathbb{C}^N\ni(\alpha,z)\mapsto\alpha z\in\mathbb{C}^N$$

を定義する. これを $\mathbb{C}^N$ におけるスカラー倍と言う. 任意の $z=(z_1,\cdots,z_N), w=(w_1,\cdots,w_N)\in\mathbb{C}^N$ に対し,

$$(z\mid w) := \sum_{j=1}^N z_j\overline{w_j}\in\mathbb{C}$$

とおいて演算

$$\mathbb{C}^N\times\mathbb{C}^N\ni(z,w)\mapsto(z\mid w)\in\mathbb{C}$$

を定義する. これを $\mathbb{C}^N$ における標準内積と言う. 任意の $z\in\mathbb{C}^N$ に対し,

$$(z\mid z)=\sum_{j=1}^N z_j\overline{z_j}=\sum_{j=1}^N|z_j|^2\geqslant 0$$

であるから $(z\mid z)$ は 2 乗根 (命題 1.132, 定義 1.133)

$$|z| := \sqrt{(z\mid z)}\in[0,\infty)$$

を持つ. $|z|$ を標準内積から定まる z のノルムと言う. 次の命題 1.150 より,

$$\mathbb{C}^N\times\mathbb{C}^N\ni(z,w)\mapsto|z-w|\in[0,\infty)$$

は $\mathbb{C}^N$ における距離関数である. $\mathbb{C}^N$ に上で述べた加法, スカラー倍, 標準内積, ノルム, 距離関数, 距離位相が備わったものを N 次元ユニタリ空間と言う.

命題 1.150 (ユニタリ空間における Schwarz の不等式)**.** 任意の $z,w\in\mathbb{C}^N$ に対し,

$$|(z\mid w)|\leqslant|z||w| \tag{1.54}$$

$$|z+w|\leqslant|z|+|w| \tag{1.55}$$

が成り立つ.

証明. $|w|=0\Leftrightarrow w=0$ だから $|w|=0$ の場合は成り立つ. $|w|>0$ であるとする. 任意の $\alpha\in\mathbb{C}$ に対し,

$$0\leqslant(z-\alpha w\mid z-\alpha w)=|z|^2-\alpha(w\mid z)-\overline{\alpha}(z\mid w)+|\alpha|^2|w|^2$$

だから,

$$\alpha := \frac{(z\mid w)}{|w|^2}\in\mathbb{C}$$

とおけば,

$$0\leqslant|z|^2-2\frac{|(z\mid w)|^2}{|w|^2}+\frac{|(z\mid w)|^2}{|w|^2}=|z|^2-\frac{|(z\mid w)|^2}{|w|^2}$$

を得る．よって (1.54) が成り立つ．また (1.54) を用いて，

$$
\begin{aligned}
|z+w|^2 = (z+w \mid z+w) = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z \mid w) + |w|^2 &\leqslant |z|^2 + 2|(z \mid w)| + |w|^2 \\
&\leqslant |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2
\end{aligned}
$$

となるから (1.55) が成り立つ． □

定理 1.151 (ユニタリ空間の位相の基本性質)**.** $\mathbb{C}^N$ をユニタリ空間とする．このとき次が成り立つ．

(1) $\mathbb{C}^N$ の位相は $\mathbb{C}$ の位相の直積位相 (定義 1.75) である．
(2) $\mathbb{C}^N$ は第二可算である．
(3) $\mathbb{C}^N$ の任意の有界閉集合はコンパクトである．
(4) $\mathbb{C}^N$ は完備距離空間である．

証明. (1) 任意の $z = (z_1, \cdots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ に対し，

$$
|z_1|, \cdots, |z_N| \leqslant |z| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |z_j| \tag{1.56}
$$

であることと命題 1.76 による．

(2) 命題 1.129 より $\mathbb{C}$ おいて $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}} = \{q_1 + iq_2 : q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\}$ は稠密であるから (1) より $\mathbb{C}^N$ において $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}^N$ は稠密である．$\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$ は可算集合なので $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}^N$ も可算集合だから $\mathbb{C}^N$ は可分である．距離空間においては可分であることと第二可算であることとは同値である (命題 1.108) から $\mathbb{C}^N$ は第二可算である．
(3) 定理 1.145 と命題 1.148 より $\mathbb{C}$ の有界閉集合はコンパクトである．よって $\mathbb{C}$ の有界閉集合の N 個の直積で表される集合もコンパクト*11である．そして $\mathbb{C}^N$ の任意の有界閉集合は (1.56) より，$\mathbb{C}$ の有界閉集合の直積で表される集合に含まれる．よって $\mathbb{C}^N$ の有界閉集合はコンパクトである*12．
(4) (3) と命題 1.120 による．

□

*11 Tychonoff の定理 1.78 を用いるか，距離空間においてはコンパクトであることと点列コンパクトであることが同値であること (定理 1.112) を用いれば分かる．

*12 命題 1.42 による

2 線型代数

この節では $\mathbb{K}$ は実数体 $\mathbb{R}$ か複素数体 $\mathbb{C}$ を表すものとする.

2.1 線型空間, 多元環, $*$-環, 線型写像

定義 2.1 (線型空間)**.** 空でない集合 V に対し, 2 つの演算

(加法) $V \times V \ni (u, v) \mapsto u + v \in V$
(スカラー倍) $\mathbb{K} \times V \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha v \in V$

が定義されており, V は加法に関して可換な加法群をなし, スカラー倍に関して,

- 任意の $v \in V$ に対し, $1v = v$.
- 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ と任意の $v \in V$ に対し, $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.
- 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ と任意の $v \in V$ に対し, $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.
- 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ と任意の $u, v \in V$ に対し, $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

が成り立つとする. このとき V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, もしくは $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間と言う. 線型空間の元のことをベクトルと呼ぶことがある.

例 2.2. Euclid 空間 (定義 1.143) は $\mathbb{R}$ 上の線型空間であり, ユニタリ空間 (定義 1.149) は $\mathbb{C}$ 上の線型空間である.

定義 2.3 (多元環)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする. V に加法とスカラー倍に加えてさらに,

(乗法) $V \times V \ni (u, v) \mapsto uv \in V$

が定義されており,

- 任意の $u, v, w \in V$ に対し, $u(v + w) = uv + uw$, $(u + v)w = uw + vw$.
- 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$, $u, v \in V$ に対し, $(\alpha u)v = u(\alpha v) = \alpha(uv)$.

が成り立つとする. このとき V を $\mathbb{K}$ 上の多元環と言う (多元環は加法と乗法に関して環 (定義 1.87) をなしていることに注意).

定義 2.4 ($*$-環)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の多元環とする. V に加法, スカラー倍, 乗法に加えてさらに,

($*$-演算) $V \ni v \mapsto v^* \in V$

が定義されており,

- 任意の $u, v \in V$ に対し, $(u + v)^* = u^* + v^*$.
- 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in V$ に対し, $(\alpha v) = \overline{\alpha} v^*$
- 任意の $u, v \in V$ に対し, $(uv)^* = v^* u^*$.
- 任意の $v \in V$ に対し, $v^{**} = v$

が成り立つとする. このとき V を $\mathbb{K}$ 上の $*$-環と言う.

注意 2.5 (各点 (各成分) ごとの演算)**.** X を空でない集合, V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間か多元環か $*$-環とする. X 上で定義され V に値を取る写像全体を $\mathrm{Map}(X, V)$ とおくと, $\mathrm{Map}(X, V)$ は各点ごとの演算によってそれぞれ $\mathbb{K}$ 上の線型空間, 多元環, $*$-環となる. ここで X の各点ごとの演算とは, $f, g \in \mathrm{Map}(X, V)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$ に対し,

(加法) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ $(\forall x \in X)$
(スカラー倍) $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ $(\forall x \in X)$
(乗法) $(fg)(x) = f(x)g(x)$ $(\forall x \in X)$

(∗-演算) $(f^*)(x) = f(x)^*$ $(\forall x \in X)$

なるものである.

定義 2.6 (行列). $N, M \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{K}$ の元を成分とする $N \times M$ 行列全体を $M_{N\times M}(\mathbb{K})$ と表すと, 各成分ごとの演算 (定義 2.5) によって $M_{N\times M}(\mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 上の線型空間である. そして $N \times N$ 行列全体 $M_{N\times N}(\mathbb{K})$ の場合は, i 行 j 列成分が $a_{i,j}$ の行列を $(a_{i,j})_{i,j}$ と表すこととして,

(乗法) $M_{N\times N}(\mathbb{K}) \times ((a_{i,j})_{i,j}, (b_{i,j})_{i,j}) \mapsto \left(\sum_{k=1}^N a_{i,k}b_{k,j}\right)_{i,j} \in M_{N\times N}(\mathbb{K})$

(∗-演算) $M_{N\times N}(\mathbb{K}) \ni (a_{i,j})_{i,j} \mapsto (\overline{a_{j,i}})_{i,j} \in M_{N\times N}(\mathbb{K})$

により ∗-環となる. この ∗-環 $M_{N\times N}(\mathbb{K})$ を $\mathbb{K}$ 上の N 次の行列環と言う.

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (\forall i, j \in \{1, \cdots, N\})$$

に対し, $(\delta_{i,j})_{i,j} \in M_{N\times N}(\mathbb{K})$ は $M_{N\times N}(\mathbb{K})$ の単位元である.

定義 2.7 (行列化). V を $\mathbb{K}$ 上の多元環とする. V の元を成分とする $N \times N$ 行列全体を $M_{N\times N}(V)$ と表し, i 行 j 列成分が $v_{i,j} \in V$ の行列を $(v_{i,j})_{i,j} \in M_{N\times N}(V)$ と表す. $M_{N\times N}(V)$ は各点ごとの演算 (定義 2.5) によって $\mathbb{K}$ 上の線型空間であり, さらに

(乗法) $M_{N\times N}(V) \times ((u_{i,j})_{i,j}, (v_{i,j})_{i,j}) \mapsto \left(\sum_{k=1}^N u_{i,k}v_{k,j}\right)_{i,j} \in M_{N\times N}(V)$

によって多元環である. また V が ∗-環である場合はさらに,

(∗-演算) $M_{N\times N}(V) \ni (v_{i,j})_{i,j} \mapsto (v_{j,i}^*)_{i,j} \in M_{N\times N}(V)$

によって多元環である.

定義 2.8 (線型部分空間). V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする. 空でない部分集合 $M \subseteq V$ が,

- 任意の $u, v \in M$ に対し, $u + v \in M$.
- 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$, 任意の $v \in M$ に対し, $\alpha v \in M$.

を満たすとき M を V の線型部分空間と言う. M が V の線型部分空間であるとき, M は V の加法とスカラー倍をそのまま受け継いで $\mathbb{K}$ 上の線型空間である.

定義 2.9 (部分多元環). V を $\mathbb{K}$ 上の多元環とする. 空でない部分集合 $M \subseteq V$ が,

- 任意の $u, v \in M$ に対し, $u + v \in M$.
- 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$, 任意の $v \in M$ に対し, $\alpha v \in M$.
- 任意の $u, v \in M$ に対し, $uv \in M$.

を満たすとき M を V の部分多元環と言う. M が V の部分多元環であるとき, M は V の加法, スカラー倍, 乗法をそのまま受け継いで $\mathbb{K}$ 上の多元環である.

定義 2.10 (部分 ∗-環). V を $\mathbb{K}$ 上の ∗-環とする. 空でない部分集合 $M \subseteq V$ が,

- 任意の $u, v \in M$ に対し, $u + v \in M$.
- 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$, 任意の $v \in M$ に対し, $\alpha v \in M$.
- 任意の $u, v \in M$ に対し, $uv \in M$.
- 任意の $v \in M$ に対し, $v^* \in M$

を満たすとき M を V の部分 ∗-環と言う. M が V の部分 ∗-環であるとき, M は V の加法, スカラー倍, 乗法, ∗-演算をそのまま受け継いで $\mathbb{K}$ 上の ∗-環である.

例 2.11 (線型写像)**.** V, W を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする. $f : V \to W$ が線型写像であるとは,

- 任意の $u, v \in V$ に対し, $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
- 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$, 任意の $v \in V$ に対し, $f(\alpha v) = \alpha f(v)$.

を満たすことを言う.

注意 2.12. 線型写像は線型作用素とも言う.

定義 2.13 (線型写像の像と核)**.** V, W を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $f : V \to W$ を線型写像とする. このとき,

$$\mathrm{Ker}(f) := \{v \in V : f(v) = 0\}$$

とおき, これを f の核と言う. また f の像 $f(V) \subseteq W$ を $\mathrm{Ran}(f)$ や $\mathrm{Im}(f)$ と表すこともある. また,

命題 2.14 (単射性と核)**.** V, W を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $f : V \to W$ を線型写像とする. このとき次は互いに同値である.

(1) f は単射.
(2) $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は $f(0) = 0$ であることによる. (2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとする. このとき $f(u) = f(v)$ ならば $f(u-v) = f(u) - f(v) = 0$ より $u - v \in \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ である. よって $u = v$ だから f は単射である. $\square$

定義 2.15 (準同型写像)**.** 同種の代数構造を持つ集合[*13]V, W の間の写像 $f : V \to W$ がその代数構造を保存するとき f を準同型写像と言う. また $f : V \to W$ が全単射準同型写像であるとき, f を同型写像と言う.

例 2.16. 線型写像は線型空間の準同型写像である.

例 2.17 (多元環準同型写像, $*$-環準同型写像)**.** V, W を $\mathbb{K}$ 上の多元環, $f : V \to W$ とする. f が多元環準同型写像であるとは次の性質を持つことである.

(加法の保存性) 任意の $u, v \in V$ に対し, $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
(スカラー倍の保存性) 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$, 任意の $v \in V$ に対し, $f(\alpha v) = \alpha f(v)$.
(乗法の保存性) 任意の $u, v \in V$ に対し, $f(uv) = f(u)f(v)$.

また V, W が $\mathbb{K}$ 上の $*$-環であるとき, $f : V \to W$ が $*$-環準同型写像であるとは, 上記の性質に加えてさらに次の性質を持つことである.

($*$-演算の保存性) 任意の $v \in V$ に対し, $f(v^*) = f(v)^*$.

定義 2.18 (線型写像全体のなす線型空間)**.** V, W を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする. $V \to W$ の写像全体 $\mathrm{Map}(V, W)$ は各点ごとの演算 (定義 2.5) によって $\mathbb{K}$ 上の線型空間である. $V \to W$ の線型写像全体を $L(V, W) \subseteq \mathrm{Map}(V, W)$ とおく. このとき任意の $S, T \in L(V, W)$ に対し,

$$\begin{aligned}
(S+T)(u+v) &= S(u+v) + T(u+v) = Su + Sv + Tu + Tv = (S+T)u + (S+T)v, \\
(S+T)(\alpha v) &= S(\alpha v) + T(\alpha v) = \alpha Sv + \alpha Tv = \alpha(S+T)v \quad (\forall u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K})
\end{aligned}$$

であるから $S + T \in L(V, W)$ であり, また明らかに任意の $T \in L(V, W)$, 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し $\alpha T \in L(V, W)$ である. ゆえに $L(V, W)$ は $\mathbb{K}$ 上の線型空間 $\mathrm{Map}(V, W)$ の線型部分空間である. 以後, $L(V, W)$ は断ることなくこの各点ごとの演算により線型空間とみなす.

定義 2.19 (線型写像全体のなす多元環)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする. 線型空間 $L(V, V)$ を $L(V)$ と表す. 任意の $S, T \in L(V)$ に対し, $ST := S \circ T$ (写像の合成) とおくと, 明らかに $ST \in L(V)$ であり, $L(V)$ は

$$L(V) \times L(V) \ni (S, T) \mapsto ST \in L(V)$$

[*13] 例えば群, 環, 体, 線型空間, 多元環, $*$-環などのこと.

を乗法として $\mathbb{K}$ 上の多元環をなす. 以後, 断ることなく $L(V)$ はこの乗法による多元環とみなす.

定義 2.20 (線型空間の部分空間の和, 直和)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $M_1, \cdots, M_n \subseteq V$ をそれぞれ線型部分空間とする. このとき

$$M_1 + \cdots + M_n := \{v_1 + \cdots + v_n : v_1 \in M_1, \cdots, v_n \in M_n\}$$

は V の線型部分空間である. これを $M_1, \cdots, M_n$ の和と言う. 直積 $M_1 \times \cdots \times M_n$ を成分ごとの演算 (定義 2.5) により線型空間とみなす. もし,

$$M_1 \times \cdots \times M_n \ni (v_1, \cdots, v_n) \mapsto v_1 + \cdots + v_n \in M_1 + \cdots + M_n$$

が線型同型写像ならば, $M_1 + \cdots + M_n$ を,

$$M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$$

と表し, これを $M_1, \cdots, M_n$ の直和と言う.

2.2 商線型空間, 商多元環, 商 $*$-環

定義 2.21 (同値関係, 同値類)**.** X を空でない集合とする. X 上の 2 項関係 $\sim$ が次を満たすとき, $\sim$ を X 上の同値関係と言う.

(反射律) 任意の $x \in X$ に対し, $x \sim x$.
(対称律) $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$.
(推移律) $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば, $x \sim z$.

集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとする. 任意の $x \in X$ に対し,

$$[x] := \{y \in X : y \sim x\}$$

を x の同値類と言う.

命題 2.22 (同値類の基本性質)**.** 集合 X 上に同値関係 $\sim$ が与えられているとし, 任意の $x \in X$ に対し $\sim$ に関する同値類を $[x]$ とする. このとき任意の $x, y \in X$ に対し次は互いに同値である.

(1) $x \sim y$.
(2) $[x] = [y]$.
(3) $[x] \cap [y] \neq \varnothing$

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つならば任意の $z \in [x]$ に対し $z \sim x \sim y$ なので $z \sim y$ である. よって $z \in [y]$ だから $[x] \subseteq [y]$ である. 全く同様に $[y] \subseteq [x]$ も示せる. ゆえに (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (3) は自明である.
(3) $\Rightarrow$ (1) を示す. (3) が成り立つとする. 任意の $z \in [x] \cap [y]$ に対し, $x \sim z \sim y$ だから $x \sim y$ である. □

定義 2.23 (同値類の代表元)**.** 集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとする. $\sim$ に関する同値類 $[x]$ に対し $x \in X$ を $[x]$ の代表元と言う. 命題 2.22 より $y \in X$ が $[x]$ の代表元であることは $y \sim x$ であることと同値である.

定義 2.24 (同値関係による商集合, 商写像)**.** 集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとする. $\sim$ による同値類からなる集合

$$X/\sim := \{[x] : x \in X\}$$

を X の $\sim$ による商集合と言う. また X から $X/\sim$ への全射

$$X \ni x \mapsto [x] \in X/\sim$$

を商写像と言う.

命題 2.25. V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $M \subseteq V$ を V の線型部分空間とする. V 上の 2 項関係 $\underset{M}{\sim}$ を,

$$x \underset{M}{\sim} y \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} x - y \in M$$

と定義する. このとき $\underset{M}{\sim}$ は V 上の同値関係である. そして $\underset{M}{\sim}$ による商集合を $V/M := V/\underset{M}{\sim}$ とおき, 商写像を,

$$V \ni v \mapsto [v] \in V/M \tag{2.1}$$

とおくと, 写像

$$V/M \times V/M \ni ([u],[v]) \mapsto [u+v] \in V/M, \tag{2.2}$$

$$\mathbb{K} \times V/M \ni (\alpha,[v]) \mapsto [\alpha v] \in V/M \tag{2.3}$$

はそれぞれ well-defined であり, V/M は (2.2) を加法, (2.3) をスカラー倍として線型空間をなす. さらに商写像 (2.1) は線型写像である.

証明. $[u_1] = [u_2], [v_1] = [v_2]$ ならば,

$$(u_1 + u_2) - (v_1 + v_2) = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) \in M,$$

だから $[u_1 + u_2] = [v_1 + v_2]$ であり, 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し,

$$\alpha v_1 - \alpha v_2 = \alpha(v_1 - v_2) \in M$$

だから $[\alpha v_1] = [\alpha v_2]$ である. よって (2.2), (2.3) は well-defined である. V/M が (2.2) を加法, (2.3) をスカラー倍として線型空間をなすこと, (2.1) が線型写像であることは自明である. □

定義 2.26 (商線型空間)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $M \subseteq V$ を V の線型部分空間とする. 命題 2.25 における線型空間 V/M を V の M による商線型空間と言う.

定義 2.27 (多元環のイデアル)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の多元環とする. 空でない $I \subseteq V$ が,

- 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$, 任意の $v \in I$ に対し, $\alpha v \in I$.
- 任意の $u \in I, v \in V$ に対し, $uv, vu \in I$.

を満たすとき I を V のイデアルと言う. V のイデアルは特に V の部分多元環である.

定義 2.28 ($*$-環の $*$-イデアル)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の $*$-環とする. 空でない $I \subseteq V$ が,

- 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$, 任意の $v \in I$ に対し, $\alpha v \in I$.
- 任意の $u \in I, v \in V$ に対し, $uv, vu \in I$.
- 任意の $v \in I$ に対し, $v^* \in I$.

を満たすとき I を V の $*$-イデアルと言う. V の $*$-イデアルは特に V の部分 $*$-環である.

命題 2.29. V を $\mathbb{K}$ 上の多元環, $I \subseteq V$ を V のイデアル, V/I を商線型空間とし,

$$V \ni v \mapsto [v] \in V/I \tag{2.4}$$

を商写像とする. このとき写像

$$V/I \times V/I \ni ([u],[v]) \mapsto [uv] \in V/I \tag{2.5}$$

は well-defined であり, V/I は (2.5) を乗法として多元環をなす. そして商写像 (2.4) は多元環準同型写像である. また V が $*$-環で I が V の $*$-イデアルの場合, 写像

$$V/I \ni [v] \mapsto [v^*] \in V/I \tag{2.6}$$

は well-defined であり, 多元環 V/I は (2.6) を $*$-演算として $*$-環である. そして商写像 (2.4) は $*$-環準同型写像である.

証明. $[u_1] = [u_2], [v_1] = [v_2]$ ならば,

$$u_1v_1 - u_2v_2 = u_1(v_1 - v_2) + (u_1 - u_2)v_2 \in I$$

であるから $[u_1u_2] = [v_1v_2]$ である. よって (2.5) は well-defined である. V/I が (2.5) を乗法として多元環をなすこと, (2.4) が多元環準同型写像であることは自明である. また V が $*$-環で I が $*$-イデアルのとき $[u_1] = [u_2]$ ならば,

$$u_1^* - u_2^* = (u_1 - u_2)^* \in I$$

であるから $[u_1^*] = [u_2^*]$ である. よって (2.6) は well-defined である. V/I は (2.6) を $*$-演算として $*$-環をなすこと, (2.4) が $*$-環準同型写像であることは自明である. □

定義 2.30 (商多元環, 商 $*$-環)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の多元環, $I \subseteq V$ を V のイデアルとする. 命題 2.29 における多元環 V/I を V の I による商多元環と言う. また V が $\mathbb{K}$ 上の $*$-環で $I \subseteq V$ が V の $*$-イデアルのとき, 命題 2.29 における $*$-環 V/I を V の I による商 $*$-環と言う.

2.3 線型独立性, 線型空間の基底と次元

定義 2.31 (線型空間の部分集合によって生成される線型部分空間)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする. 空でない $D \subseteq V$ に対し,

$$\mathrm{span}(D) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j : n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K},\ v_1, \cdots, v_n \in D \right\}$$

とおくと, これは D を含む V の線型部分空間のうち (集合の包含関係による順序に関して) 最小のものである. これを D が生成する線型部分空間と言う.

定義 2.32 (線型結合)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする. 有限個の $v_1, \cdots, v_n \in V$ に対し,

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j : \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K} \right\}$$

の元を $v_1, \cdots, v_n$ の線型結合と言う.

定義 2.33 (線型独立性)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする.

(1) 有限個の V の元 $v_1, \cdots, v_n$ が線型独立であるとは,

$$\left\{ (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0 \right\} = \{(0, \cdots, 0)\}$$

であることを言う.

(2) V の空でない部分集合 D が線型独立であるとは, 任意の互いに異なる有限個の D の元が (1) の意味で線型独立であることを言う.

(3) J を空でない集合とする.

$$(v_j)_{j \in J} : J \ni j \mapsto v_j \in V \tag{2.7}$$

が線型独立であるとは (2.7) が単射であって V の部分集合 $\{v_j\}_{j \in J}$ が (2) の意味で線型独立であることを言う.

命題 2.34. V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $D \subseteq V$ を 0 以外の元を含む部分集合とする. このとき線型独立な部分集合[*14] $D_0 \subseteq D$ で,

$$\mathrm{span}(D_0) = \mathrm{span}(D)$$

を満たすものが存在する.

[*14] 定義 2.33 における (2) の意味.

証明. (1) D が有限集合の場合. $D = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ とおいて $v_k \neq 0$ なる最小の $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ を $k(1)$ とおく. $k \in \{k(1), k(1)+1, \cdots, n\}$ で $v_{k(1)}, v_k$ が線型独立[*15]となる (つまり $v_k \notin \mathrm{span}\{v_{k(1)}\}$ となる) もののうち最小のものを $k(2)$ とおく. $k \in \{k(2), k(2)+1, \cdots, n\}$ で $v_{k(1)}, v_{k(2)}, v_k$ が線型独立となる (つまり $v_k \notin \mathrm{span}\{v_{k(1)}, v_{k(2)}\}$ となる) もののうち最小のものを $k(3)$ とおく. 同様の操作を可能な限り続けた結果, 最終的に得られる $v_1, v_2, \cdots, v_n$ の部分列を $v_{k(1)}, v_{k(2)}, \cdots, v_{k(m)}$ とおく. このとき定義の仕方から $D_0 := \{v_{k(1)}, v_{k(2)} \cdots, v_{k(m)}\}$ は線型独立であり, $D \subseteq \mathrm{span}(D_0)$ であるから, $\mathrm{span}(D) = \mathrm{span}(D_0)$ である.

(2) D が無限集合の場合. D の線型独立な部分集合全体に集合の包含関係による順序 (定義 1.3) を入れたものを考えるとそれは明らかに帰納的順序集合である[*16]から, Zorn の補題 1.12 より極大元 D_0 が取れる. もし $v \in D \backslash \mathrm{span}(D_0)$ が存在するならば, $v \notin D_0$ であり $D_0 \cup \{v\}$ は線型独立であるから D_0 の極大性に矛盾する. よって $D \subseteq \mathrm{span}(D_0)$ だから $\mathrm{span}(D) = \mathrm{span}(D_0)$ である.

□

命題 2.35. V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $B, C \subseteq V$ を線型独立な部分集合[*17]とし,

$$\mathrm{span}(B) = \mathrm{span}(C)$$

が成り立つとする. このとき,

$$\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(C)$$

が成り立つ[*18].

証明. (1) B か C のうちのいずれか一方は有限集合であると仮定して $\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(C)$ が成り立つことを示す. B が有限集合であり $\mathrm{card}(B) \leqslant \mathrm{card}(C)$ であると仮定して示せば十分である. $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ とおく. 任意の $c_1 \in C$ に対し $c_1 \in \mathrm{span}(B) = \mathrm{span}\{b_1, \cdots, b_n\}$ であるから $k(1) \in \{1, \cdots, n\}$ で,

$$\mathrm{span}\{b_1, \cdots, b_n\} = \mathrm{span}\{b_1, \cdots, \overset{k(1)\text{ 番目}}{c_1}, \cdots, b_n\}$$

なるものが取れる. $c_2 \in C \backslash \{c_1\}$ に対し,

$$c_2 \in \mathrm{span}\{b_1, \cdots, \overset{k(1)\text{ 番目}}{c_1}, \cdots, b_n\}$$

であり c_1, c_2 は線型独立であるから, $k(2) \in \{1, \cdots, n\} \backslash \{k(1)\}$ で,

$$\mathrm{span}\{b_1, \cdots, b_n\} = \mathrm{span}\{b_1, \cdots, \overset{k(1)\text{ 番目}}{c_1}, \cdots, \overset{k(2)\text{ 番目}}{c_2}, \cdots, b_n\}$$

なるものが取れる. 同様の操作を続けていけば互いに異なる $c_1, \cdots, c_n \in C$ が取れて,

$$\mathrm{span}\{b_1, \cdots, b_n\} = \mathrm{span}\{c_1, \cdots, c_n\}$$

が成り立つ. もし $c_{n+1} \in C \backslash \{c_1, \cdots, c_n\}$ が存在するならば,

$$c_{n+1} \in \mathrm{span}(C) = \mathrm{span}(B) = \mathrm{span}\{c_1, \cdots, c_n\}$$

となる. しかしこれは $c_1, \cdots, c_n, c_{n+1}$ が線型独立であることに矛盾する. よって $C = \{c_1, \cdots, c_n\}$ だから $\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(C)$ である.

(2) B, C が無限集合である場合に $\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(C)$ が成り立つことを示す. 任意の $c \in C$ に対し $c \in \mathrm{span}(C) = \mathrm{span}(B)$ だから有限集合 $B_c \subseteq B$ で $c \in \mathrm{span}(B_c)$ なるものが取れる. また任意の $b \in B$ に対し $b \in \mathrm{span}(B) = \mathrm{span}(C)$ だから有限個の $c_1, \cdots, c_n \in C$ で,

$$b \in \mathrm{span}\{c_1, \cdots, c_n\} \subseteq \mathrm{span} \bigcup_{j=1}^{n} B_{c_j}$$

[*15] 定義 2.33 の (1) の意味.
[*16] 実際, $\{D_j\}_{j \in J}$ を全順序部分集合とすると, 全順序性より $\bigcup_{j \in J} D_j$ は D の線型独立な部分集合であり $\{D_j\}_{j \in J}$ の上界である.
[*17] 定義 2.33 の (2) の意味.
[*18] 定義 1.15 を参照.

なるものが取れる. B は線型独立であるからある $j \in \{1, \cdots, n\}$ に対し $b \in B_{c_j}$ となる. よって

$$B = \bigcup_{c \in C} B_c \tag{2.8}$$

が成り立つ. 各 B_c は可算集合であることと (2.8) より $C \times \mathbb{N}$ から B への全射が存在するので,

$$\mathrm{card}(C \times \mathbb{N}) \leqslant \mathrm{card}(B)$$

である. また C は無限集合なので定理 1.18 の (2) より

$$\mathrm{card}(C) = \mathrm{card}(C \times \mathbb{N})$$

である. よって $\mathrm{card}(C) \leqslant \mathrm{card}(B)$ が成り立つ. 全く対称的議論により $\mathrm{card}(B) \leqslant \mathrm{card}(C)$ が成り立つことも分かる. よって Bernstein の定理 1.16 より $\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(C)$ が成り立つ.

□

定義 2.36 (線型空間の基底と次元)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする. $V = \mathrm{span}(B)$ を満たす線型独立な部分集合 $B \subseteq V$ を V の基底と言う. 命題 2.34 より $V \neq \{0\}$ である限り V は基底を持つ. また命題 2.35 より B, C がいずれも V の基底ならば $\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(C)$ が成り立つ. そこで $\dim(V) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ を次のように定義する.

(1) $V = \{0\}$ の場合, $\dim(V) = 0$.
(2) V の基底が有限集合の場合, $\dim(V) =$ “V の基底の元の個数”
(3) V の基底が無限集合の場合, $\dim(V) = \infty$.

$\dim(V)$ を V の次元と言う.

命題 2.37 (線型独立な部分集合の基底への拡大)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし, $B_0 \subseteq V$ を V の線型独立な部分集合とする. このとき V の基底で B_0 を含むものが存在する.

証明. B_0 を含む線型独立な部分集合全体を集合の包含関係 (定義 1.3) による順序集合とみなすと帰納的順序集合である[*19]. よって Zorn の補題 1.12 より極大元 B が取れる. もし $v \in V \backslash \mathrm{span}(B)$ が取れるならば $B \cup \{v\}$ は線型独立であるから B の極大性に矛盾するので $V = \mathrm{span}(B)$ である. よって B が求める基底である. □

命題 2.38. V, W を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする. もし V から W への単射線型写像が存在するならば $\dim(V) \leqslant \dim(W)$ が成り立つ. またもし V から W への線型同型写像が存在するならば $\dim(V) = \dim(W)$ が成り立つ.

証明. $f : V \to W$ を単射線型写像とする. f の単射性より V の任意の線型独立な部分集合 B に対し $f(B)$ は W の線型独立な部分集合である. B を V の基底とすると $f(B)$ は W の線型独立な部分集合だから命題 2.37 より $f(B)$ を含む W の基底 C が存在する. よって

$$\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(f(B)) \leqslant \mathrm{card}(C)$$

なので $\dim(V) \leqslant \dim(W)$ である. もし $f : V \to W$ が線型同型写像ならば $f^{-1} : W \to V$ も単射線型写像なので $\dim(W) \leqslant \dim(V)$ も成り立つ. よって $\dim(V) = \dim(W)$ が成り立つ. □

定理 2.39 (次元定理 1)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし, $M \subseteq V$ を線型部分空間とする. そして V/M を V の M による商線型空間 (定義 2.26) とする. このとき,

$$\dim(V) = \dim(M) + \dim(V/M) \tag{2.9}$$

が成り立つ.

証明. 商写像を

$$V \ni v \mapsto [v] \in V/M \tag{2.10}$$

*19 実際, $\{B_j\}_{j \in J}$ を全順序部分集合とすると全順序性より $\bigcup_{j \in J} B_j$ は線型独立な部分集合であり, これが $\{B_j\}_{j \in J}$ の上界である.

とおく. もし $\dim(M) = 0$ ならば (2.10) は線型同型写像であるから命題 2.38 より (2.9) が成り立つ. $\dim(M) > 0$ とし B_0 を M の基底とする. 命題 2.37 より V の基底 B で $B \supseteq B_0$ なるものが取れる. このとき

$$\mathrm{span}(B \backslash B_0) \ni v \mapsto [v] \in V/M$$

は線型同型写像であるから命題 2.38 より (2.9) が成り立つ. □

定理 2.40 (次元定理 2)**.** V, W を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし, $f : V \to W$ を線型写像とする. このとき,

$$\dim(V) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Ran}(f)$$

が成り立つ.

証明. V の線型部分空間 $\mathrm{Ker}(f)$ に対し商線型空間 $V/\mathrm{Ker}(f)$ を考え, 商写像を

$$V \ni v \mapsto [v] \in V/\mathrm{Ker}(f)$$

とおく. このとき,

$$V/\mathrm{Ker}(f) \ni [v] \mapsto f(v) \in \mathrm{Ran}(f)$$

は well-defined であり線型同型写像である. よって命題 2.38 より

$$\dim(V/\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{Ran}(f)$$

であるから, 定理 2.39 より,

$$\dim(V) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim(V/\mathrm{Ker}(f)) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Ran}(f)$$

である. □

2.4 行列式, 行列表現

定義 2.41 (置換群)**.** X を空でない集合とする. X から X への全単射を X 上の置換と言う. X 上の置換全体を $\mathfrak{S}(X)$ とおくと $\mathfrak{S}(X)$ は写像の合成を乗法として乗法群をなす. これを X 上の置換群と言う.
特に $N \in \mathbb{N}$ に対し $\{1, 2, \cdots, N\}$ 上の置換群を $\mathfrak{S}_N$ と表し, これを N 次の置換群と言う.

定義 2.42 (置換の符号)**.** N を 2 以上の自然数とする. N 次の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対し,

$$\{(i, j) \in \{1, 2, \cdots, N\} \times \{1, 2, \cdots, N\} : i < j,\ \sigma(j) < \sigma(i)\}$$

を σ の反転数と言う. σ の反転数 k に対し,

$$\mathrm{sgn}(\sigma) := (-1)^k$$

を σ の符号と言う.

命題 2.43 (置換の符号の基本性質)**.** N を 2 以上の自然数とする. 任意の $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_N$ に対し,

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$$

が成り立つ.

証明.

$$\Delta := \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N} (j - i)$$

とおき,

$$\sigma(\Delta) := \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N} (\sigma(j) - \sigma(i)) \quad (\forall \sigma \in \mathfrak{S}_N)$$

とおく. このとき置換の符号の定義より明らかに

$$\sigma(\Delta) = \mathrm{sgn}(\sigma)\Delta \quad (\forall \sigma \in \mathfrak{S}_N)$$

が成り立つ. また任意の $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_N$ に対し,

$$(\sigma\tau)(\Delta) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N} (\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))) = \mathrm{sgn}(\tau) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N} (\sigma(j) - \sigma(i)) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)\Delta$$

だから,

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau)\Delta = (\sigma\tau)(\Delta) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)\Delta$$

である. よって任意の $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_N$ に対し $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$ が成り立つ. □

定義 2.44 (転置行列)**.** $\mathbb{K}$ の元を成分とする $M \times N$ 行列 $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{M \times N}(\mathbb{K})$ (i 行 j 列成分が $a_{i,j} \in \mathbb{K}$) に対し, $N \times M$ 行列

$$A^t := (a_{j,i})_{i,j} \in M_{N \times M}(\mathbb{K})$$

(i 行 j 列成分が $a_{j,i} \in \mathbb{K}$) を A の転置行列と言う.

定義 2.45 (行列式)**.** 任意の $N \in \mathbb{N}$, 任意の $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{N \times N}(\mathbb{K})$ に対し,

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{N,\sigma(N)}$$

を A の行列式と言う.

命題 2.46 (行列式の基本性質)**.** 行列式に関して次が成り立つ.

(1) 任意の $A \in M_{N \times N}(\mathbb{K})$ に対し, $\det(A^t) = \det(A)$.

(2) 任意の $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{N \times N}(\mathbb{K})$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対し,

$$\sigma_{\mathrm{r}}(A) := (A_{i,\sigma(j)})_{i,j} \in M_{N \times N}(\mathbb{K}), \quad \sigma_{\mathrm{l}}(A) := (A_{\sigma(i),j})_{i,j} \in M_{N \times N}(\mathbb{K})$$

とおくと,

$$\det(\sigma_{\mathrm{r}}(A)) = \mathrm{sgn}(\sigma)(A), \quad \det(\sigma_{\mathrm{l}}(A)) = \mathrm{sgn}(\sigma)(A).$$

である. 特に A が互いに等しい行を持つか互いに等しい列を持つ場合 $\det(A) = 0$ である.

(3) 任意の $A, B \in M_{N \times N}(\mathbb{K})$ に対し,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

証明. (1) 命題 2.43 より任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対し $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ であるから, 任意の $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{N \times N}(\mathbb{K})$ に対し,

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{N,\sigma(N)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots a_{\sigma^{-1}(N),N} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots a_{\sigma^{-1}(N),N} = \det(A^t)\end{aligned}$$

である.

(2) 命題 2.43 より任意の $\tau \in \mathfrak{S}_N$ に対し $\mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma\tau)$ であるから,

$$\begin{aligned}\det(\sigma_{\mathrm{r}}(A)) &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1,\sigma(\tau(1))} \cdots a_{N,\sigma(\tau(N))} \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma\tau) a_{1,\sigma(\tau(1))} \cdots a_{N,\sigma(\tau(N))} \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma)\det(A)\end{aligned}$$

である. また任意の $\tau \in \mathfrak{S}_N$ に対し $\mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma\tau^{-1})$ であるから,

$$\begin{aligned}\det(\sigma_1(A)) &= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\tau) a_{\tau(1),\sigma(1)} \cdots a_{\tau(N),\sigma(N)} \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma\tau^{-1}) a_{1,\sigma(\tau^{-1}(1))} \cdots a_{N,\sigma(\tau^{-1}(N))} \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma)\det(A)\end{aligned}$$

である.

(3) $A = (a_{i,j})_{i,j}, B = (b_{i,j}) \in M_{N\times N}(\mathbb{K})$ に対し, $AB = \left(\sum_{k=1}^N a_{i,k}b_{k,j}\right)_{i,j} \in M_{N\times N}(\mathbb{K})$ だから,

$$\det(AB) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{k_1,\cdots,k_N=1}^{N} a_{1,k_1} \cdots a_{N,k_N} b_{k_1,\sigma(1)} \cdots b_{k_N,\sigma(N)}$$

となる. ここで $k_1, \cdots, k_N \in \{1, \cdots, N\}$ のうちのいずれかが等しい場合 (2) より,

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{k_1,\sigma(1)} \cdots b_{k_N,\sigma(N)} = 0$$

であるから,

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{k_1,\cdots,k_N=1}^{N} a_{1,k_1} \cdots a_{N,k_N} b_{k_1,\sigma(1)} \cdots b_{k_N,\sigma(N)} \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_N} a_{1,\tau(1)} \cdots a_{N,\tau(N)} b_{\tau(1),\sigma(1)} \cdots b_{\tau(N),\sigma(N)} \\ &= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_N} a_{1,\tau(1)} \cdots a_{N,\tau(N)} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{\tau(1),\sigma(1)} \cdots b_{\tau(N),\sigma(N)} \\ &= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{N,\tau(N)} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\tau\sigma^{-1}) b_{\tau(\sigma^{-1}(1)),1} \cdots b_{\tau(\sigma^{-1}(N)),N} \\ &= \det(A)\det(B)\end{aligned}$$

である.

□

定義 2.47 (多重線型写像). $V_1, \cdots, V_N, W$ をそれぞれ $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする.

$$\Phi : V_1 \times \cdots \times V_N \ni (v_1, \cdots, v_N) \mapsto \Phi(v_1, \cdots, v_N) \in W$$

が多重線型写像であるとは, 任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ と $v_k \in V_k$ $(k \in \{1, \cdots, N\}, k \neq j)$ に対し,

$$V_j \ni v \mapsto \Phi(v_1, \cdots, \overset{j\text{ 番目}}{v}, \cdots, v_N) \in W$$

が線型写像であることを言う.

定義 2.48 (多重線型写像の対称性と反対称性). V, W を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし,

$$\Phi : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{N\text{ 個}} \ni (v_1, \cdots, v_N) \mapsto \Phi(v_1, \cdots, v_N) \in W$$

を多重線型写像とする.

$$\Phi(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(N)}) = \Phi(v_1, \cdots, v_N) \quad (\forall v_1, \cdots, v_N \in V,\ \forall\sigma \in \mathfrak{S}_N)$$

が成り立つとき Φ は対称であると言い,

$$\Phi(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(N)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\Phi(v_1, \cdots, v_N) \quad (\forall v_1, \cdots, v_N \in V,\ \forall\sigma \in \mathfrak{S}_N)$$

が成り立つとき Φ は反対称であると言う.

定義 2.49 (行列の縦ベクトル表記, 横ベクトル表記)**.** 縦ベクトル

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{N,1} \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{N,2} \end{pmatrix}, \cdots, a_M = \begin{pmatrix} a_{1,M} \\ a_{2,M} \\ \vdots \\ a_{N,M} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^N$$

に対し,

$$(a_1, a_2 \cdots, a_M) := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,M} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,M} \end{pmatrix} \in M_{N\times M}(\mathbb{K})$$

と表す. これを行列の縦ベクトル表記と言う. また, 横ベクトル

$$a_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{1,M}),\ a_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{2,M}), \cdots, a_N = (a_{N,1}, a_{N,2}, \cdots, a_{N,M}) \in \mathbb{K}^M$$

に対し,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,M} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,M} \end{pmatrix} \in M_{N\times M}(\mathbb{K})$$

と表す. これを行列の横ベクトル表記と言う.

命題 2.50 (行列式の反対称性)**.** 行列式に関して次が成り立つ.

(1) 行列の縦ベクトル表記に関して,

$$\overbrace{\mathbb{K}^N \times \cdots \times \mathbb{K}^N}^{N\ 個} \ni (a_1, \cdots, a_N) \mapsto \det(a_1, \cdots, a_N) \in \mathbb{K}$$

は反対称多重線型写像である.

(2) 行列の横ベクトル表記に関して,

$$\overbrace{\mathbb{K}^N \times \cdots \times \mathbb{K}^N}^{N\ 個} \ni (a_1, \cdots, a_N) \mapsto \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$$

は反対称多重線型写像である.

証明. 行列式の定義と命題 2.46 より明らかである. □

定義 2.51 (行列の正則性)**.** $M_{N\times N}(\mathbb{K})$ は定義 2.6 より $\mathbb{K}$ 上の単位的 $*$-環である. $A \in M_{N\times N}(\mathbb{K})$ が乗法逆元 $A^{-1} \in M_{N\times N}(\mathbb{K})$ を持つとき A は正則であると言う.

定義 2.52 (余因子行列)**.** N を 2 以上の自然数とする. $A \in M_{N\times N}(\mathbb{K})$ の i 行と j 列を除いてできる $(N-1)\times(N-1)$ 行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものを $\Delta_{i,j}(A) \in \mathbb{K}$ とおく. そして,

$$\mathrm{cof}(A) := ((-1)^{i+j}\Delta_{j,i}(A))_{i,j} \in M_{N\times N}(\mathbb{K})$$

を A の余因子行列と言う.

定理 2.53 (正則性と行列式)**.** $A \in M_{N\times N}(\mathbb{K})$ に対し次は互いに同値である.

(1) A は正則行列である.
(2) $\det(A) \neq 0$ である.

そして (1), (2) が成り立つとき,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{cof}(A)$$

が成り立つ.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとすると,

$$1 = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$$

であるから $\det(A) \neq 0$ である.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. A の縦ベクトル表示と横ベクトル表示を

$$A = (a^i_j)_{i,j} = (a_1, \cdots, a_N) = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^N \end{pmatrix}$$

とおく. 余因子行列の定義 2.52 における $\Delta_{i,j}(A) \in \mathbb{K}$ $(\forall i, j \in \{1, \cdots, N\})$ に対し, $A\mathrm{cof}(A)$ の i 行 j 列成分は

$$(A\ \mathrm{cof}(A))^i_j = \sum_{k=1}^{N} a^i_k (-1)^{k+j}\Delta_{j,k}(A) = \det \begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^N \end{pmatrix} = \delta_{i,j}\det(A)$$

である. また $\mathrm{cof}(A)A$ の i 行 j 列成分は,

$$(\mathrm{cof}(A)A)^i_j = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+i}\Delta_{k,i}(A) a^k_j = \det(a_1, \cdots, \overset{\text{第 } i \text{ 列}}{a_j}, \cdots, \overset{\text{第 } j \text{ 列}}{a_j}, \cdots, a_N) = \delta_{i,j}\det(A)$$

である. よって

$$A\ \mathrm{cof}(A) = \mathrm{cof}(A)A = \det(A)$$

だから, (2) が成り立つならば $\frac{1}{\det(A)}\mathrm{cof}(A) \in M_{N\times N}(\mathbb{K})$ は $A \in M_{N\times N}(\mathbb{K})$ の乗法逆元であるので (1) が成り立つ. □

定義 2.54 (線型空間の添字付けられた基底)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする. $(e_j)_{j\in J}$ が J によって添字付けられた V の基底であるとは,

$$(e_j)_{j\in J} : J \ni j \mapsto e_j \in V$$

が定義 2.33 の (3) の意味で線型独立であり, $\{e_j\}_{j\in J} \subseteq V$ が V の基底であることを言う. 特にある $N \in \mathbb{N}$ に対し $J = \{1, \cdots, N\}$ であったり, $J = \mathbb{N}$ や $J = \mathbb{Z}_+$ である場合, J によって添字付けられた基底を順序付けられた基底と言う.

定義 2.55 (Euclid 空間, ユニタリ空間の標準基底)**.** $\mathbb{K}^N$ の元

$$e_j := (0, \cdots, 0, \overset{j \text{ 番目}}{1}, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{K}^N \quad (j = 1, \cdots, N)$$

を考える. このとき $\{e_1, \cdots, e_N\}$ は明らかに $\mathbb{K}^N$ の基底である. 順序付けられた基底 $(e_1, \cdots, e_N)$ を $\mathbb{K}^N$ の標準基底と言う.

定義 2.56 (線型写像の行列表現)**.** V, W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とし, $(v_1, \cdots, v_N)$, $(w_1, \cdots, w_M)$ をそれぞれ V, W の順序付けられた基底とする. このとき線型写像 $f : V \to W$ に対し,

$$fv_j = \sum_{i=1}^{M} f_{i,j} w_i \quad (j = 1, \cdots, N)$$

を満たす行列 $(f_{i,j})_{i,j} \in M_{M\times N}(\mathbb{K})$ が定まる. これを順序付けられた基底 $(v_1, \cdots, v_N)$, $(w_1, \cdots, w_M)$ に関する線型写像 $f : V \to W$ の行列表現と言う.

注意 2.57 (行列と線型写像の同一視)**.** 任意の $(a_{i,j}) \in M_{M\times N}(\mathbb{K})$ に対し, 線型写像

$$A : \mathbb{K}^N \ni (x_i)_{i=1,\cdots,N} \mapsto \left(\sum_{k=1}^{N} a_{i,k} x_k\right)_{i=1,\cdots,M} \in \mathbb{K}^M$$

が定まる. $\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^M$ の標準基底 $(e_1, \cdots, e_N)$, $(e_1, \cdots, e_M)$ に関する A の行列表現は $(a_{i,j})_{i,j} \in M_{M\times N}(\mathbb{K})$ である. 線型写像 $A : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^M$ と行列 $(a_{i,j})_{i,j} \in M_{M\times N}(\mathbb{K})$ は通常暗黙に同一視される.

命題 2.58. U, V, W をそれぞれ $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とし, $(u_1, \cdots, u_L)$, $(v_1, \cdots, v_M)$, $(w_1, \cdots, w_M)$ をそれぞれ U, V, W の順序付けられた基底,

$$f : U \to V, \quad g : V \to W$$

を線型写像とする. そして $(u_1, \cdots, u_L)$, $(v_1, \cdots, v_M)$ に関する f の行列表現を $\widehat{f} \in M_{M\times L}(\mathbb{K})$, $(v_1, \cdots, v_M)$, $(w_1, \cdots, w_N)$ に関する g の行列表現を $\widehat{g} \in M_{N\times M}(\mathbb{K})$ とおく. このとき $(u_1, \cdots, u_L)$, $(w_1, \cdots, w_N)$ に関する線型写像 $gf : U \to W$ の行列表現 $\widehat{gf} \in M_{N\times L}(\mathbb{K})$ は,

$$\widehat{gf} = \widehat{g}\widehat{f}$$

である.

証明. $\widehat{f} = (f_{i,j})_{i,j} \in M_{M\times L}(\mathbb{K})$, $\widehat{g} = (g_{i,j})_{i,j} \in M_{N\times M}(\mathbb{K})$ とおくと,

$$fu_j = \sum_{l=1}^{M} f_{l,j} v_l \quad (\forall j \in \{1, \cdots, L\}), \quad gv_l = \sum_{k=1}^{N} g_{k,l} w_k \quad (\forall l \in \{1, \cdots, M\})$$

だから,

$$(gf)u_j = \sum_{l=1}^{M} f_{l,j}(gv_l) = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{l=1}^{M} g_{k,l} f_{l,j}\right) w_k$$

である. よって線型写像 $gf : U \to W$ の $(u_1, \cdots, u_L)$, $(w_1, \cdots, w_N)$ に関する行列表現は,

$$\widehat{gf} = \left(\sum_{l=1}^{M} g_{i,l} f_{l,j}\right)_{i,j} = \widehat{g}\widehat{f}$$

である. □

2.5 線型空間のテンソル積

定義 2.59 (線型汎関数, 線型空間の双対空間)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする. V から $\mathbb{K}$ への線型写像を V 上の線型汎関数と言う. V 上の線型汎関数全体は定義 2.18 で述べたように各点ごとの演算によって $\mathbb{K}$ 上の線型空間である. この線型空間を線型空間 V の双対空間と言い V^* と表す. 線型空間 V^* の双対空間 V^{**} を V の第二双対空間と言う.

命題 2.60. V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし, $(e_j)_{j\in J} : J \ni j \mapsto e_j \in V$ を線型独立[*20]とする. このとき線型独立な $(\varphi_j)_{j\in J} : J \ni j \mapsto \varphi_j \in V^*$ で, 任意の $i, j \in J$ に対し,

$$\varphi_j(e_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{2.11}$$

[*20] 定義 2.33 の (3) の意味.

を満たすものが存在する.

証明. 任意の $j \in J$ に対し, 命題 2.37 より $\{e_j\}$ を含む V の基底 B_j が取れて,

$$\varphi_j : V = \mathrm{span}(B_j \backslash \{e_j\}) \oplus \mathbb{K}e_j \ni v + \alpha e_j \mapsto \alpha \in \mathbb{K}$$

なる線型汎関数が定義でき, $\varphi_j \in V^*$ は任意の $i \in J$ に対し (2.11) を満たす. 互いに異なる任意の有限個の $j_1, \cdots, j_n \in J$ を取る. $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ に対し,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_{j_k} = 0$$

が成り立つならば,

$$0 = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_{j,k} \right) (e_{j_l}) = \alpha_l \quad (l = 1, \cdots, n)$$

だから $(\varphi_j)_{j \in J}$ は線型独立である. □

命題 2.61. V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とすると,

$$\dim(V) = \dim(V^*)$$

が成り立つ. そして V の順序付けられた基底 $(e_1, \cdots, e_N)$ に対し, V^* の順序付けられた基底 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_N)$ で, 任意の $i, j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し,

$$\varphi_j(e_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{2.12}$$

を満たすものが唯一つ存在する.

証明. V の順序付けられた基底 $(e_1, \cdots, e_N)$ を取る. 任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し,

$$\varphi_j : V \ni \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \mapsto \alpha_j \in \mathbb{K}$$

とおくと $\varphi_j \in V^*$ であり, φ_j は任意の $i \in \{1, \cdots, N\}$ に対し (2.12) を満たす. $\alpha_1, \cdots, \alpha_N \in \mathbb{K}$ に対し,

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j = 0$$

が成り立つならば,

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j \right) (e_k) = \alpha_k \quad (k = 1, \cdots, N)$$

であるから $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ は線型独立である. そして任意の $\varphi \in V^*$, 任意の $v = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j \in V$ に対し,

$$\varphi(v) = \varphi \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j \right) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{N} \varphi(e_j) \varphi_j(v)$$

だから,

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} \varphi(e_j) \varphi_j \in \mathrm{span}\{\varphi_1, \cdots, \varphi_N\}$$

である. よって $V^* = \mathrm{span}\{\varphi_1, \cdots, \varphi_N\}$ だから $(\varphi_1, \cdots, \varphi_N)$ は V^* の順序付けられた基底である. □

定義 2.62 (有限次元線型空間の順序付けられた基底に対する双対基底)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間, $(e_1, \cdots, e_N)$ を V の順序付けられた基底とする. このとき命題 2.61 より V の双対空間 V^* の順序付けられた基底 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_N)$ で, 任意の $i, j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し,

$$\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすものが定まる. $(\varphi_1, \cdots, \varphi_N)$ を $(e_1, \cdots, e_N)$ に対する双対基底と言う.

命題 2.63. V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする．このとき任意の $v \in V$ に対し

$$\iota(v) : V^* \ni \varphi \mapsto \varphi(v) \in \mathbb{K}$$

とおくと $\iota(v) \in V^{**}$ である．そして，

$$\iota : V \ni v \mapsto \iota(v) \in V^{**}$$

は単射線型写像である．

証明. 任意の $v \in V$ に対し $\iota(v) \in V^{**}$ であること，$\iota : V \ni v \mapsto \iota(v) \in V^{**}$ が線型写像であることは自明である．$\iota : V \to V^{**}$ が単射であることを示す．$\mathrm{Ker}(\iota) = \{0\}$ を示せばよい．任意の $v \in \mathrm{Ker}(\iota)$ を取る．もし $v \neq 0$ ならば命題 2.60 より $\varphi \in V^*$ で $\varphi(v) = 1$ なるものが存在することになるが，$\varphi(v) = \iota(v)(\varphi) = 0$ なので矛盾する．よって $\mathrm{Ker}(\iota) = \{0\}$ だから ι は単射である． □

定義 2.64 (線型空間の第二双対空間への自然な埋め込み)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする．

$$\iota(v)(\varphi) = \varphi(v) \ \ (\forall v \in V, \forall \varphi \in V^*)$$

として定義される単射線型写像 (命題 2.63)

$$\iota : V \ni v \mapsto \iota(v) \in V^{**}$$

を V の V^{**} への自然な埋め込みと言う．以後，しばしば $v \in V$ と $\iota(v) \in V^{**}$ を同一視し，$V = \iota(V) \subseteq V^{**}$ とみなす．V が有限次元の場合は命題 2.61 より

$$\dim(V) = \dim(V^*) = \dim(V^{**})$$

であるから $V = \iota(V) = V^{**}$ である．

定義 2.65 (線型空間のテンソル積)**.** $V_1, \cdots, V_N$ をそれぞれ $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする．任意の $v_1 \in V_1, \cdots, v_N \in V_N$ に対し，

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_N : V_1^* \times \cdots \times V_N^* \ni (\varphi_1, \cdots, \varphi_N) \mapsto \varphi_1(v_1) \cdots \varphi_N(v_N) \in \mathbb{K}$$

とおくと，$v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ は多重線型写像 (定義 2.47) である．$V_1^* \times \cdots \times V_N^*$ から $\mathbb{K}$ への多重線型写像全体は各点ごとの加法とスカラー倍により $\mathbb{K}$ 上の線型空間をなす．そこでその線型空間の部分空間

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_N := \mathrm{span}\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_N : v_1 \in V_1, \cdots, v_N \in V_N\}$$

を $V_1, \cdots, V_N$ のテンソル積線型空間と言う．なお $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ は $\bigotimes_{j=1}^N V_j$ とも表し，$v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ は $\otimes_{j=1}^N v_j$ とも表す．テンソル積線型空間の元をテンソルと言う．

命題 2.66 (有限次元線型空間のテンソル積)**.** $V_1, \cdots, V_N$ をそれぞれ $\mathbb{K}$ 上の “有限次元” 線型空間とする．このときテンソル積線型空間 $\bigotimes_{j=1}^N V_j$ は $V_1^* \times \cdots \times V_N^*$ から $\mathbb{K}$ への多重線型写像全体と一致する．

証明. 各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し V_j の順序付けられた基底 $(e_{j,1}, \cdots, e_{j,n_j})$ を取り，その双対基底 (定義 2.62) を $(\varphi_{j,1}, \cdots, \varphi_{j,n_j})$ とおく．任意の多重線型写像 $T : V_1^* \times \cdots \times V_N^* \to \mathbb{K}$ を取り，$T \in \bigotimes_{j=1}^N V_j$ が成り立つことを示せばよい．任意の $\psi_j \in V_j^*$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対し，

$$\psi_j = \sum_{k=1}^{n_j} \psi_j(e_{j,k}) \varphi_{j,k} \in V_j^* \ \ (j = 1, \cdots, N)$$

と表せるから T の多重線型性より，

$$\begin{aligned} T(\psi_1, \cdots, \psi_N) &= \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_N=1}^{n_N} \psi_1(e_{1,k_1}) \cdots \psi_N(e_{N,k_N}) T(\varphi_{1,k_1}, \cdots, \varphi_{N,k_N}) \\ &= \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_N=1}^{n_N} T(\varphi_{1,k_1}, \cdots, \varphi_{N,k_N})(e_{1,k_1} \otimes \cdots \otimes e_{N,k_N})(\psi_1, \cdots, \psi_N) \end{aligned}$$

となる．よって，

$$T=\sum_{k_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{k_N=1}^{n_N}T(\varphi_{1,k_1},\cdots,\varphi_{N,k_N})(e_{1,k_1}\otimes\cdots\otimes e_{N,k_N})\in V_1\otimes\cdots\otimes V_N$$

である． □

命題 2.67 (線型空間のテンソル積の基本性質)**.** $V_1,\cdots,V_N$ をそれぞれ $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする．このとき次が成り立つ．

(1) $V_1\times\cdots\times V_N\ni(v_1,\cdots,v_N)\mapsto v_1\otimes\cdots\otimes v_N\in V_1\otimes\cdots\otimes V_N$ は多重線型写像である．
(2) 各 $j\in\{1,\cdots,N\}$ について線型独立な $e_{j,1},\cdots,e_{j,n_j}\in V_j$ を取ると，

$$\{1,\cdots,n_1\}\times\cdots\times\{1,\cdots,n_N\}\ni(k_1,\cdots,k_N)\mapsto e_{1,k_1}\otimes\cdots\otimes e_{N,k_N}\in V_1\otimes\cdots\otimes V_N \tag{2.13}$$

は線型独立である．

証明. (1) は定義 2.65 より自明である．
(2) を示す．命題 2.60 より各 $j\in\{1,\cdots,N\}$ に対し線型独立な $\varphi_{j,1},\cdots,\varphi_{j,n_j}\in V_j^*$ で，

$$\varphi_{j,k}(e_{j,k'})=\delta_{k,k'}\quad(\forall k,k'\in\{1,\cdots,n_j\})$$

なるものが取れる．任意の $(k_1,\cdots,k_N),(k'_1,\cdots,k'_N)\in\{1,\cdots,n_1\}\times\cdots\times\{1,\cdots,n_N\}$ に対し，

$$(e_{1,k_1}\otimes\cdots\otimes e_{N,k_N})(\varphi_{1,k'_1},\cdots,\varphi_{N,k'_N})=\varphi_{1,k'_1}(e_{1,k_1})\cdots\varphi_{N,k'_N}(e_{N,k_N})=\delta_{k_1,k'_1}\cdots\delta_{k_N,k'_N}$$

である．よって $\alpha_{k_1,\cdots,k_N}\in\mathbb{K}$ $((k_1,\cdots,k_N)\in\{1,\cdots,n_1\}\times\cdots\times\{1,\cdots,n_N\})$ に対し，

$$\sum_{k_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{k_N=1}^{n_N}\alpha_{k_1,\cdots,k_N}e_{1,k_1}\otimes\cdots\otimes e_{N,k_N}=0$$

ならば両辺を $(\varphi_{1,k_1},\cdots,\varphi_{N,k_N})$ に作用させて，

$$\alpha_{k_1,\cdots,k_N}=0\quad(\forall(k_1,\cdots,k_N)\in\{1,\cdots,n_1\}\times\cdots\times\{1,\cdots,n_N\})$$

を得る．よって (2.13) は線型独立である． □

定理 2.68 (テンソル積の普遍性)**.** $V_1,\cdots,V_N,W$ をそれぞれ $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする．任意の多重線型写像

$$\Phi:V_1\times\cdots\times V_N\to W$$

に対し，線型写像

$$\Psi:V_1\otimes\cdots\otimes V_N\to W$$

で，

$$\Psi(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)=\Phi(v_1,\cdots,v_N)\quad(\forall v_1\in V_1,\cdots,\forall v_N\in V_N) \tag{2.14}$$

を満たすものが唯一つ存在する．

証明. 一意性は自明である．存在を示す．

$$\sum_{k=1}^{n}v_{k,1}\otimes\cdots\otimes v_{k,N}\mapsto\sum_{k=1}^{n}\Phi(v_{k,1},\cdots,v_{k,N})\in\mathbb{K} \tag{2.15}$$

が well-defined であるならばこれが求める線型写像であるので，(2.15) が well-defined であることを示せばよい．そしてそのためには，

$$\sum_{k=1}^{n}v_{k,1}\otimes\cdots\otimes v_{k,N}=\sum_{l=1}^{m}w_{l,1}\otimes\cdots\otimes w_{l,N} \tag{2.16}$$

として,

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi(v_{k,1}, \cdots, v_{k,N}) = \sum_{l=1}^{m} \Phi(w_{l,1}, \cdots, w_{l,N}) \tag{2.17}$$

が成り立つことを示せばよい. 各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し V_j の有限次元部分空間

$$M_j := \mathrm{span}\{v_{1,j}, \cdots, v_{n,j}, w_{1,j}, \cdots, w_{m,j}\} \subseteq V_j$$

を考える. もし $M_j = \{0\}$ なる $j \in \{1, \cdots, N\}$ があるならば (2.17) は, 両辺が 0 であるので成り立つ. そこで各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し $M_j \neq \{0\}$ であると仮定し, M_j の順序付けられた基底 $(e_1^j, \cdots, e_{r_j}^j)$ を取る. そして

$$v_{k,j} = \sum_{a=1}^{r_j} v_{k,j}^a e_a^j \quad (\forall k \in \{1, \cdots, n\}), \quad w_{l,j} = \sum_{a=1}^{r_j} w_{l,j}^a e_a^j \quad (\forall l \in \{1, \cdots, m\}) \tag{2.18}$$

とおく. このとき (2.16) より,

$$\sum_{a_1, \cdots, a_n} \left(\sum_{k=1}^{n} v_{k,1}^{a_1} \cdots v_{k,n}^{a_n} \right) e_{a_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{a_N}^N = \sum_{a_1, \cdots, a_n} \left(\sum_{l=1}^{m} w_{l,1}^{a_1} \cdots w_{l,1}^{a_n} \right) e_{a_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{a_N}^N$$

であるので, 命題 2.67 の (2) より,

$$\sum_{a_1, \cdots, a_n} \left(\sum_{k=1}^{n} v_{k,1}^{a_1} \cdots v_{k,n}^{a_n} \right) = \sum_{a_1, \cdots, a_n} \left(\sum_{l=1}^{m} w_{l,1}^{a_1} \cdots w_{l,1}^{a_n} \right) \tag{2.19}$$

が成り立つ. また (2.18) より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \Phi(v_{k,1}, \cdots, v_{k,N}) &= \sum_{a_1, \cdots, a_n} \left(\sum_{k=1}^{n} v_{k,1}^{a_1} \cdots v_{k,n}^{a_n} \right) \Phi(e_{a_1}^1, \cdots, e_{a_N}^N), \\ \sum_{l=1}^{m} \Phi(w_{l,1}, \cdots, w_{l,N}) &= \sum_{a_1, \cdots, a_n} \left(\sum_{l=1}^{m} w_{l,1}^{a_1} \cdots w_{l,1}^{a_n} \right) \Phi(e_{a_1}^1, \cdots, e_{a_N}^N) \end{aligned}$$

であるので (2.19) より (2.17) が成り立つ. □

定義 2.69 (テンソル積線型空間のテンソル積線型空間)**.** 各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し, 有限個の $\mathbb{K}$ 上の線型空間 $V_{j,1}, \cdots, V_{j,M_j}$ が与えられているとする. このとき定理 2.68 より,

$$\bigotimes_{j=1}^{N} \left(\bigotimes_{k=1}^{M_j} V_{j,k} \right) \ni \otimes_{j=1}^{N} \left(\otimes_{k=1}^{M_j} v_{j,k} \right) \mapsto \otimes_{j,k} v_{j,k} \in \bigotimes_{j,k} V_{j,k}$$

なる線型写像が定義できる. そして命題 2.67 の (2) よりこの線型写像は線型同型写像である. そこで以後, $\otimes_{j=1}^{N} \left(\otimes_{k=1}^{M_j} v_{j,k} \right)$ と $\otimes_{j,k} v_{j,k}$ を同一視し,

$$\bigotimes_{j=1}^{N} \left(\bigotimes_{k=1}^{M_j} V_{j,k} \right) = \bigotimes_{j,k} V_{j,k}$$

とみなす.

定義 2.70 (置換作用素, 反対称化作用素)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $N \in \mathbb{N}$ とし, N 個の V のテンソル積線型空間を $\bigotimes^N V$ とおく. 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対し,

$$\overbrace{V \times \cdots \times V}^{N \text{ 個}} \ni (v_1, \cdots, v_N) \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(N)} \in \bigotimes^{N} V$$

は多重線型写像であるから, 定理 2.68 より線型写像

$$P_\sigma : \bigotimes^{N} V \ni v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(N)} \in \bigotimes^{N} V$$

が定まる．これを $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ による置換作用素と言う．

$$A_N := \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)P_\sigma$$

とおく．これを $\bigotimes^N V$ 上の反対称化作用素と言う．

命題 2.71 (置換作用素, 反対称化作用素の基本性質)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし, $\bigotimes^N V$ 上の置換作用素 P_σ $(\forall\sigma \in \mathfrak{S}_N)$ と反対称化作用素 A_N を考える．このとき,

(1) 任意の $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_N$ に対し $P_\sigma P_\tau = P_{\tau\sigma}$ が成り立つ．
(2) 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対し $P_\sigma A_N = A_N P_\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma)A_N$ が成り立つ．
(3) $A_N^2 = A_N$ が成り立つ．

証明. (1) 任意の $v_1, \cdots, v_N \in V$ に対し,

$$\begin{aligned} P_\sigma P_\tau(v_1\otimes\cdots\otimes v_N) &= P_\sigma(v_{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\tau(N)}) = v_{\tau(\sigma(1))}\otimes\cdots\otimes v_{\tau(\sigma(N))} \\ &= P_{\tau\sigma}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N) \end{aligned}$$

であるから $P_\sigma P_\tau = P_{\tau\sigma}$ が成り立つ．

(2) 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対し (1) より,

$$\begin{aligned} P_\sigma A_N &= \frac{1}{N!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\tau)P_\sigma P_\tau = \frac{1}{N!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau\sigma)P_{\tau\sigma} = \mathrm{sgn}(\sigma)A_N, \\ A_N P_\sigma &= \frac{1}{N!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\tau)P_\tau P_\sigma = \frac{1}{N!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma\tau)P_{\sigma\tau} = \mathrm{sgn}(\sigma)A_N \end{aligned}$$

である．

(3) (2) より,

$$A_N^2 = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)A_N P_\sigma = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)^2 A_N = A_N$$

である．

□

定義 2.72 (反対称テンソル)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $N \in \mathbb{N}$ とし, A_N を $\bigotimes^N V$ 上の反対称化作用素とする．このとき $\bigotimes^N V$ の線型部分空間

$$\bigwedge^N V := \mathrm{Ran}(A_N) \subseteq \bigotimes^N V$$

の元を V 上の N 階反対称テンソルと言う．

命題 2.73 (テンソルが反対称テンソルであるための条件)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $N \in \mathbb{N}$, $T \in \bigotimes^N V$ とする．このとき次は互いに同値である．

(1) $T \in \bigwedge^N V$.
(2) 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対し $P_\sigma T = \mathrm{sgn}(\sigma)T$.
(3) 多重線型写像

$$T : \overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{N\text{ 個}} \ni (\varphi_1, \cdots, \varphi_N) \mapsto T(\varphi_1, \cdots, \varphi_N) \in \mathbb{K}$$

は反対称 (定義 2.48) である．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は命題 2.71 の (2) による．
任意の $v_1, \cdots, v_N \in V, \varphi_1, \cdots, \varphi_N \in V^*, \sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対し,

$$\begin{aligned} (v_1\otimes\cdots\otimes v_N)(\varphi_{\sigma(1)}, \cdots, \varphi_{\sigma(N)}) &= \varphi_{\sigma(1)}(v_1)\cdots\varphi_{\sigma(N)}(v_N) = \varphi_1(v_{\sigma^{-1}(1)})\cdots\varphi_N(v_{\sigma^{-1}(N)}) \\ &= P_{\sigma^{-1}}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)(\varphi_1, \cdots, \varphi_N) \end{aligned}$$

である．よって，

$$T(\varphi_{\sigma(1)},\cdots,\varphi_{\sigma(N)}) = P_{\sigma^{-1}}T(\varphi_1,\cdots,\varphi_N)$$

なので (2) ⇔ (3) が成り立つ．
(2) ⇒ (1) を示す．(2) が成り立つとすると，

$$A_N T = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)P_\sigma T = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)^2 T = T$$

である．よって $T = A_N T \in \mathrm{Ran}(A_N) = \bigwedge^N V$ であるから (1) が成り立つ．□

定義 2.74 (反対称テンソルの外積)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $N, M \in \mathbb{N}$ とし, $S \in \bigwedge^N V, T \in \bigwedge^M V$ とする．このとき,

$$S \wedge T := \frac{(N+M)!}{N!M!}A_{N+M}(S\otimes T) \in \bigwedge^{N+M} V$$

を S, T の外積と言う．

補題 2.75. V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $N, M \in \mathbb{N}$ とし, $S \in \bigotimes^N V, T \in \bigotimes^M V$ とする．このとき,

$$A_{N+M}(A_N(S)\otimes T) = A_{N+M}(S\otimes T) = A_{N+M}(S\otimes A_M(T))$$

が成り立つ．

証明. 命題 2.71 の (2) より，

$$\begin{aligned}A_{N+M}(A_N(S)\otimes T) &= \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)A_{N+M}(P_\sigma(S)\otimes T)\\ &= \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma)A_{N+M}(S\otimes T)\\ &= A_{N+M}(S\otimes T)\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}A_{N+M}(S\otimes A_M(T)) &= \frac{1}{M!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_M}\mathrm{sgn}(\sigma)A_{N+M}(S\otimes P_\sigma(T))\\ &= \frac{1}{M!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_M}\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma)A_{N+M}(S\otimes T)\\ &= A_{N+M}(S\otimes T)\end{aligned}$$

である．□

命題 2.76 (反対称テンソルの外積の結合法則)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ とし, $T_1 \in \bigwedge^{N_1} V, T_2 \in \bigwedge^{N_2} V, T_3 \in \bigwedge^{N_3} V$ とする．このとき,

$$(T_1\wedge T_2)\wedge T_3 = T_1\wedge(T_2\wedge T_3) = \frac{(N_1+N_2+N_3)!}{N_1!N_2!N_3!}A_{N_1+N_2+N_3}(T_1\otimes T_2\otimes T_3)$$

が成り立つ．

証明. 補題 2.75 より，

$$\begin{aligned}(T_1\wedge T_2)\wedge T_3 &= \frac{(N_1+N_2+N_3)!}{(N_1+N_2)!N_3!}A_{N_1+N_2+N_3}((T_1\wedge T_2)\otimes T_3)\\ &= \frac{(N_1+N_2+N_3)!}{(N_1+N_2)!N_3!}\frac{(N_1+N_2)!}{N_1!N_2!}A_{N_1+N_2+N_3}(A_{N_1+N_2}(T_1\otimes T_2)\otimes T_3)\\ &= \frac{(N_1+N_2+N_3)!}{N_1!N_2!N_3!}A_{N_1+N_2+N_3}(T_1\otimes T_2\otimes T_3)\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} T_1 \wedge (T_2 \wedge T_3) &= \frac{(N_1+N_2+N_3)!}{N_1!(N_2+N_3)!} A_{N_1+N_2+N_3}((T_1 \otimes (T_2 \wedge T_3)) \\ &= \frac{(N_1+N_2+N_3)!}{N_1!(N_2+N_3)!} \frac{(N_2+N_3)!}{N_2!N_3!} A_{N_1+N_2+N_3}(T_1 \otimes A_{N_2+N_3}(T_2 \otimes T_3)) \\ &= \frac{(N_1+N_2+N_3)!}{N_1!N_2!N_3!} A_{N_1+N_2+N_3}(T_1 \otimes T_2 \otimes T_3) \end{aligned}$$

である. よって成り立つ. □

定義 2.77. 反対称テンソルの外積に関して命題 2.76 より結合法則が成り立つ. そこで 2 個以上の反対称テンソルの外積を,

$$T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_N := (T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_{N-1}) \wedge T_N$$

として帰納的に定義する.

命題 2.78. V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $N_1, \cdots, N_n \in \mathbb{N}$ とし, $T_1 \in \bigwedge^{N_1} V, \cdots, T_n \in \bigwedge^{N_n} V$ とする. このとき,

$$T_1 \wedge \cdots \wedge T_n = \frac{(N_1 + \cdots + N_n)!}{N_1! \cdots N_n!} A_{N_1+\cdots+N_n}(T_1 \otimes \cdots \otimes T_n)$$

が成り立つ.

証明. 命題 2.76 と同様にして帰納法により示せる. □

命題 2.79. V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $N \in \mathbb{N}$ とする. このとき任意の $v_1, \cdots, v_N \in V$, 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対し,

$$v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(N)} = \mathrm{sgn}(\sigma) v_1 \wedge \cdots \wedge v_N$$

が成り立つ.

証明. 命題 2.78 と命題 2.71 の (2) より,

$$\begin{aligned} v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(N)} &= N! A_N(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(N)}) = N! A_N(P_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N)) \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma) N! A_N(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) = \mathrm{sgn}(\sigma) v_1 \wedge \cdots \wedge v_N \end{aligned}$$

である. □

命題 2.80 (外積と線型独立性)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $N \in \mathbb{N}$ とする. $v_1, \cdots, v_N \in V$ に対し次は互いに同値である.

(1) $v_1 \wedge \cdots \wedge v_N \neq 0$.
(2) $v_1, \cdots, v_N$ は線型独立.

証明. (2) ⇒ (1) を示す. (2) が成り立つとすると, 命題 2.60 より線型独立な $\varphi_1, \cdots, \varphi_N \in V^*$ で,

$$\varphi_j(v_i) = \delta_{i,j} \quad (\forall i, j \in \{1, \cdots, N\})$$

なるものが取れる.

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_N = N! A_N(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(N)}$$

であるから,

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_N)(\varphi_1, \cdots, \varphi_N) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \varphi_1(v_{\sigma(1)}) \cdots \varphi_N(v_{\sigma(N)}) = \det(\varphi_j(v_i))_{i,j} = 1$$

である. よって (1) が成り立つ.
(1) ⇒ (2) を示す. (2) が成り立たないとするとある $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し v_j は $v_1, \cdots, v_{j-1}, v_{j+1}, \cdots, v_N$ の線型結合で表せる. よって命題 2.79 より $v_1 \wedge \cdots \wedge v_N = 0$ である. □

3 位相線型空間論

この節では $\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ を表すものとする.

3.1 ノルム, Banach 空間, 有界線型作用素

定義 3.1 (ノルム空間, Banach 空間)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする. X 上の非負値関数

$$\|\cdot\| : X \ni x \mapsto \|x\| \in [0, \infty) \tag{3.1}$$

が次を満たすとする.

(1) 任意の $x \in X$, 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.
(2) 任意の $x, y \in X$ に対し $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
(3) $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

このとき (3.1) を X 上のノルムと言う. そしてノルム $\|\cdot\|$ が備わった $\mathbb{K}$ 上の線型空間 X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間と言う. ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ に対し,

$$X \times X \ni (x, y) \mapsto \|x - y\| \in [0, \infty)$$

は X 上の距離関数である. ノルム空間は特に断らない限りこの距離関数により距離空間 (定義 1.103) とみなす. ノルム空間が完備な距離空間 (定義 1.115) であるときそれを Banach 空間と言う.

例 3.2. Euclid 空間とユニタリ空間はそれぞれ定義 1.143 と定義 1.149 におけるノルムによって Banach 空間 (定理 1.145, 定理 1.151 を参照) である.

定義 3.3 (ノルム空間の部分空間)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とし, $M \subseteq X$ をその線型部分空間とする. このとき X のノルムの M 上への制限は M 上のノルムであり, この M 上のノルムによる距離位相は X の距離位相の相対位相である[*21]. 以後, 特に断らない限りノルム空間 X の部分空間 M はこのノルムによりノルム空間とみなす.

命題 3.4 (Banach 空間の閉部分空間は Banach 空間)**.** Banach 空間の閉部分空間は Banach 空間である.

証明. X を $\mathbb{K}$ 上の Banach 空間, $M \subseteq X$ を閉部分空間とする. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を M の Cauchy 列とすると, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は X の Cauchy 列でもあるから $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ はある $x \in X$ に収束する. 命題 1.58 より $x \in \overline{M} = M$ だから M は Banach 空間である. □

定義 3.5 (ノルム環, Banach 環)**.** $\mathbb{K}$ 上のノルム空間 X が $\mathbb{K}$ 上の多元環 (定義 2.3) であるとする. もし X のノルムが,

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\| \quad (\forall x, y \in X) \tag{3.2}$$

を満たすならば X をノルム環と言う. また $\mathbb{K}$ 上の Banach 空間 X が (3.2) を満たすとき X を Banach 環と言う.

定義 3.6 (ノルム $*$-環, Banach $*$-環)**.** $\mathbb{K}$ 上のノルム環 X が $\mathbb{K}$ 上の $*$-環 (定義 2.4) であるとする. もし X のノルムが,

$$\|x^*\| = \|x\| \quad (\forall x \in X) \tag{3.3}$$

を満たすならば X をノルム $*$-環と言う. また $\mathbb{K}$ 上の Banach 環が (3.3) を満たすとき X を Banach $*$-環と言う.

定義 3.7 (C^*-環)**.** $\mathbb{K}$ 上の Banach 環 X が $\mathbb{K}$ 上の $*$-環であるとする. もし X のノルムが,

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \quad (\forall x \in X) \tag{3.4}$$

を満たすならば X を C^*-環と言う. (3.4) を C^*-ノルム条件と言う. この条件は (3.3) よりも強い条件である[*22]から, C^*-環は Banach $*$-環である.

[*21] 命題 1.105 を参照

[*22] 実際, Banach 環 X が (3.4) を満たすならば任意の $x \in X$ に対し $\|x\|^2 = \|x^*x\| \leqslant \|x^*\|\|x\|$ だから $\|x\| \leqslant \|x^*\|$ である. ゆえに $\|x^*\| \leqslant \|x^{**}\| = \|x\|$ でもあるので (3.3) が成り立つ.

命題 3.8. X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間, $M \subseteq X$ を閉部分空間, X/M を商線型空間 (定義 2.26) とし, $X \ni x \mapsto [x] \in X/M$ を商写像とする. このとき,

$$X/M \ni [x] \mapsto \|[x]\| := \inf\{\|x-y\| : y \in M\} \in [0,\infty) \tag{3.5}$$

は well-defined であり (3.5) は商線型空間 X/M のノルムである. さらに X が Banach 空間であるならば X/M はノルム (3.5) によって Banach 空間である.

証明. $[x_1]=[x_2]$ ならば $x_1-x_2 \in M$ だから,

$$\{\|x_1-y\| : y \in M\} = \{\|x_1-(y+(x_1-x_2))\| : y \in M\} = \{\|x_2-y\| : y \in M\}$$

である. よって (3.5) は well-defined である. 任意の $[x] \in X/M$, 任意の $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ に対し,

$$\begin{aligned}\|\alpha[x]\| &= \inf\{\|\alpha x-y\| : y \in M\} = \inf\{\|\alpha x-\alpha y\| : y \in M\}\\ &= |\alpha|\inf\{\|x-y\| : y \in M\} = |\alpha|\|[x]\|\end{aligned}$$

だから $\|\alpha[x]\| = |\alpha|\|[x]\|$ であり,

$$\|0[x]\| = \|[0]\| = \inf\{\|y\| : y \in M\} = 0 = 0\|[x]\|$$

だから,

$$\|\alpha[x]\| = |\alpha|\|[x]\| \quad (\forall [x] \in X/M, \forall \alpha \in \mathbb{K})$$

である. また任意の $[x_1],[x_2] \in X/M$ に対し,

$$\begin{aligned}\|[x_1]+[x_2]\| &= \inf\{\|x_1+x_2-y\| : y \in M\} = \inf\{\|(x_1+x_2)-(y_1+y_2)\| : y_1,y_2 \in M\}\\ &\leqslant \inf\{\|x_1-y_1\| : y_1 \in M\} + \inf\{\|x_2-y_2\| : y_2 \in M\}\\ &= \|[x_1]\|+\|[x_2]\|\end{aligned}$$

である. そして $\|[x]\|=0$ ならば任意の正実数 ε に対し $\|x-y\|<\varepsilon$ を満たす $y \in M$ が存在するので, 命題 1.32 より $x \in \overline{M} = M$, 従って $[x]=0$ である. 以上より (3.5) は X/M のノルムである.

X が Banach 空間であるとして, X/M がノルム (3.5) により Banach 空間であることを示す. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X/M の Cauchy 列とする. このとき $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $(z_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\|z_{k(n+1)}-z_{k(n)}\| < \frac{1}{2^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{3.6}$$

を満たすものが取れる. $z_{k(1)}=[x_1]$ なる任意の $x_1 \in X$ を取る. (3.6) の $n=1$ の場合より,

$$\|x_2-x_1\| < \frac{1}{2}, \quad z_{k(2)} = [x_2]$$

なる $x_2 \in X$ が取れる. さらに (3.6) の $n=2$ の場合より,

$$\|x_3-x_2\| < \frac{1}{2^2}, \quad z_{k(3)} = [x_3]$$

なる $x_3 \in X$ が取れる. 同様の操作を続けていくことで X の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\|x_{n+1}-x_n\| < \frac{1}{2^n}, \quad z_{k(n)} = [x_n] \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

なるものが取れる. このとき $n<m$ なる任意の $n,m \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\|x_m-x_n\| \leqslant \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

であるから $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は X の Cauchy 列であるので, X が Banach 空間であることにより $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はある $x \in X$ に収束する. $z := [x] \in X/M$ とおけば,

$$\|z-z_{k(n)}\| \leqslant \|x-x_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから $(z_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ は z に収束する. よって $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列を持つ Cauchy 列であるから, 補題 1.116 より $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する. ゆえに X/M は Banach 空間である. □

定義 3.9 (商ノルム空間, 商 Banach 空間)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間, $M \subseteq X$ を閉部分空間, X/M を商線型空間とする. このとき命題 3.8 における (3.5) は X/M 上のノルムである. (3.5) を商ノルムと言い, 商ノルムが入ったノルム空間 X/M を商ノルム空間と言う. X が Banach 空間である場合, 命題 3.8 より商ノルム空間 X/M は Banach 空間である. そこで X が Banach 空間である場合は商ノルム空間 X/M は商 Banach 空間と言う.

命題 3.10 (商ノルム環, 商 Banach 環)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のノルム環 (resp. Banach 環) とし, $I \subseteq X$ を X の閉イデアル (定義 2.27) とする. このとき商多元環 X/I (定義 2.30) は商ノルムによりノルム環 (resp. Banach 環) である.

証明. $X \ni x \mapsto [x] \in X/I$ を商写像とする. 任意の $[x_1], [x_2] \in X/I$ に対し,

$$\begin{aligned}\|[x_1x_2]\| &= \inf\{\|x_1x_2 - y\| : y \in I\} \leqslant \inf\{\|(x_1-y_1)(x_2-y_2)\| : y_1, y_2 \in I\} \\ &\leqslant \inf\{\|x_1 - y_1\| : y_1 \in I\}\inf\{\|x_2-y_2\| : y_2 \in I\} = \|[x_1]\|\|[x_2]\|\end{aligned}$$

であるから X/I はノルム環 (resp. Banach 環) である. □

命題 3.11 (商ノルム $*$-環, 商 Banach $*$-環)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のノルム $*$-環 (resp. Banach $*$-環) とし, $I \subseteq X$ を X の閉 $*$-イデアル (定義 2.28) とする. このとき商 $*$-環 X/I (定義 2.30) は商ノルムによりノルム $*$-環 (resp. Banach $*$-環) である.

証明. 命題 3.10 よりノルム環 (resp. Banach 環) である. 任意の $[x] \in X/I$ に対し,

$$\|[x^*]\| = \inf\{\|x^* - y\| : y \in I\} = \inf\{\|(x-y)^*\| : y \in I\} = \inf\{\|x-y\| : y \in I\} = \|[x]\|$$

であるから X/I はノルム $*$-環 (resp. Banach $*$-環) である. □

以後, 線型写像のことを線型作用素と言う.

定義 3.12 (有界線型作用素)**.** X, Y を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする. 線型作用素 $T : X \to Y$ が,

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\} < \infty$$

を満たすとき T を $X \to Y$ の有界線型作用素であると言う. また有界線型作用素 $T : X \to Y$ に対し $\|T\|$ を T の作用素ノルム (次の命題 3.13 を参照) と言う. $X \to Y$ の有界線型作用素全体を $B(X, Y) \subseteq L(X, Y)$ と表す.

命題 3.13. X, Y を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする. このとき $X \to Y$ の有界線型作用素全体 $B(X, Y)$ は $X \to Y$ の線型作用素全体のなす $\mathbb{K}$ 上の線型空間 $L(X, Y)$ (定義 2.18) の線型部分空間であり, 作用素ノルム

$$B(X, Y) \ni T \mapsto \|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\} \in [0, \infty)$$

は $B(X, Y)$ 上のノルムである.

証明. 任意の $S, T \in B(X, Y)$, 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し,

$$\begin{aligned}\|S+T\| &= \sup\{\|(S+T)x\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\} \leqslant \sup\{\|Sx\| + \|Tx\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\} \\ &\leqslant \sup\{\|Sx\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\} + \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\} = \|S\| + \|T\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\alpha T\| &= \sup\{\|(\alpha T)x\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\} = \sup\{|\alpha|\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\} \\ &= |\alpha| \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\} = |\alpha|\|T\|\end{aligned}$$

である. また明らかに,

$$\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\| \quad (\forall x \in X)$$

であるから $\|T\| = 0$ ならば $T = 0$ である. ゆえに $B(X, Y)$ は線型空間であり, 作用素ノルムは $B(X, Y)$ 上のノルムである. □

定義 3.14. X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする. $X \to X$ の有界線型作用素全体 $B(X, X)$ を $B(X)$ と表す.

命題 3.15. X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする. このとき $B(X)$ は $X \to X$ の線型作用素全体のなす $\mathbb{K}$ 上の多元環 $L(X)$ (定義 2.19) の部分多元環である. そして $B(X)$ は作用素ノルムにより $\mathbb{K}$ 上のノルム環である.

証明. 任意の $S, T \in B(X)$ に対し,

$$\|ST\| = \sup\{\|STx\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\} \leqslant \|S\| \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\} = \|S\|\|T\|$$

である. よって $B(X)$ は $L(X)$ の部分多元環であり, $B(X)$ は作用素ノルムでノルム環である. □

命題 3.16 (有界線型作用素であるための条件)**.** X, Y を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とし, $T : X \to Y$ を線型作用素とする. このとき次は互いに同値である.

(1) T は有界線型作用素である.
(2) T は一様連続 (定義 1.121) である.
(3) T は $0 \in X$ において連続である.

証明. (1) が成り立つならば,

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leqslant \|T\|\|x_1 - x_2\| \quad (\forall x_1, x_2 \in X)$$

であるから (2) が成り立つ. よって (1) ⇒ (2) が成り立つ.
(2) ⇒ (3) は自明である.
(3) ⇒ (1) を示す. (3) が成り立つとするとある正実数 δ が存在し,

$$\|Tx\| \leqslant 1 \quad (\forall x \in X : \|x\| \leqslant \delta)$$

が成り立つ. よって線型性より,

$$\|Tx\| \leqslant \frac{1}{\delta} < \infty \quad (\forall x \in X : \|x\| \leqslant 1)$$

であるから T は有界線型作用素である. □

命題 3.17 (有界線型作用素全体が Banach 空間であるための十分条件)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間, Y を $\mathbb{K}$ 上の Banach 空間とする. このとき有界線型作用素全体 $B(X, Y)$ は (作用素ノルムにより) Banach 空間である.

証明. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $B(X, Y)$ の Cauchy 列とする. 任意の $x \in X$ に対し,

$$\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n - T_m\|\|x\| \quad (\forall n, m \in \mathbb{N})$$

であるから $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ は Y の Cauchy 列である. Y は Banach 空間であるので $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する. そこで,

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x \in Y \quad (\forall x \in X)$$

とおいて $T : X \ni x \mapsto Tx \in Y$ が定義できる. このとき $T : X \to Y$ は明らかに線型作用素である. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるから任意の正実数 ε に対し $n_0 \in \mathbb{N}$ で,

$$\|T_n - T_m\| \leqslant \varepsilon \quad (\forall n, m \geqslant n_0)$$

を満たすものが取れる. $m \geqslant n_0$ なる任意の $m \in \mathbb{N}$ を取る.

$$\begin{aligned}\|Tx - T_m x\| &= \lim_{n\to\infty}\|T_n x - T_m x\| = \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}\|T_k x - T_m x\| \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}\|T_k - T_m\|\|x\| \\ &\leqslant \sup_{k\geqslant n_0}\|T_k - T_m\|\|x\| \leqslant \varepsilon\|x\| \quad (\forall x \in X)\end{aligned}$$

であるから $T - T_m \in B(X, Y)$, 従って $T = (T - T_m) + T_m \in B(X, Y)$ であり,

$$\|T - T_m\| \leqslant \varepsilon \quad (\forall m \geqslant n_0)$$

である. ゆえに $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $T \in B(X, Y)$ に収束するので $B(X, Y)$ は Banach 空間である. □

系 3.18. X を $\mathbb{K}$ 上の Banach 空間とすると, $B(X)$ は (作用素ノルムで) $\mathbb{K}$ 上の Banach 環である.

証明. 命題 3.15 と命題 3.17 による. □

命題 3.19. X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間, Y を $\mathbb{K}$ 上の Banach 空間とする. そして $M \subseteq X$ を X の部分空間とし, $T : M \to Y$ を有界線型作用素とする. このとき有界線型作用素 $\widetilde{T} : \overline{M} \to Y$ で $\overline{T}|_M = T$ を満たすものが唯一つ存在し, $\|\overline{T}\| = \|T\|$ である.

証明. 任意の $x \in \overline{M}$ に対し命題 1.58 より x に収束する M の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が取れる.

$$\|Tx_n - Tx_m\| \leqslant \|T\|\|x_n - x_m\| \leqslant \|T\|(\|x_n - x\| + \|x - x_m\|) \quad (\forall n, m \in \mathbb{N})$$

であるから $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Y の Cauchy 列である. Y は Banach 空間であるので $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する. ここで $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も x に収束する M の点列であるとすると,

$$\|Tx_n - Tx'_n\| \leqslant \|T\|(\|x_n - x\| + \|x - x'_n\|) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $(Tx'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束点は一致する. よって $\widetilde{T} : \overline{M} \to Y$ を任意の $x \in \overline{M}$ に対し x に収束する M の任意の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取って,

$$\widetilde{T}x = \lim_{n\to\infty} Tx_n$$

として定義できる. このとき $\widetilde{T} : X \to Y$ は明らかに線型作用素であり $\widetilde{T}|_M = T$ を満たす. そして,

$$\|\widetilde{T}x\| = \lim_{n\to\infty}\|Tx_n\| \leqslant \|T\| \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|T\|\|x\| \quad (\forall x \in \overline{M})$$

であるから $\widetilde{T} \in B(\overline{M}, Y)$ であり, $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$ である.
一意性を示す. $\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2 \in B(\overline{M}, Y)$ が $\widetilde{T}_1|_M = T, \widetilde{T}_2|_M = T$ を満たすとする. 任意の $x \in \overline{M}$ に対し x に収束する M の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取れば $\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2$ の連続性より,

$$\widetilde{T}_1 x = \lim_{n\to\infty} \widetilde{T}_1 x_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} \widetilde{T}_2 x_n = \widetilde{T}_2 x$$

である. よって $\widetilde{T}_1 = \widetilde{T}_2$ である. □

定義 3.20 (ノルム空間の双対空間)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする. 有界線型汎関数全体のなす Banach 空間*[23]

$$X^* := B(X, \mathbb{K})$$

をノルム空間 X の双対空間と言う.

定義 3.21 (弧状連結)**.** 位相空間 X の空でない部分集合 $C \subseteq X$ が弧状連結であるとは任意の $x, y \in C$ に対し連続写像 $f : [0,1] \to C$ で $x = f(0), y = f(1)$ なるものが存在することを言う.

命題 3.22 (弧状連結ならば連結)**.** X を位相空間とし, $C \subseteq X$ を弧状連結とする. このとき C は連結である.

証明. C が連結ではないならば X の開集合 U, V で,

$$C = (C \cap U) \cup (C \cap V), \;\; C \cap U \neq \varnothing, \;\; C \cap V \neq \varnothing, \;\; (C \cap U) \cap (C \cap V) = \varnothing$$

なるものが取れる. 任意の $x \in C \cap U, y \in C \cap V$ を取る. C は弧状連結なので連続写像 $f : [0,1] \to C$ で $f(0) = x$, $f(1) = y$ なるものが取れる.

$$s := \sup\{t \in [0,1] : f(t) \in C \cap U\} = \sup\{t \in [0,1] : f(t) \in C\backslash V\}$$

とおくと上限の定義より,

$$\{t \in [0,1] : f(t) \in C \cap U\} = \{t \in [0,1] : f(t) \in C\backslash V\}$$

の点列 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で s に収束するものが取れる. f は連続なので命題 1.60 より $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は $f(s)$ に収束し, $X\backslash V$ は閉集合であることから,

$$f(s) = \lim_{n\to\infty} f(t_n) \in C\backslash V = C \cap U$$

*[23] $\mathbb{K}$ は $\mathbb{K}$ 上の Banach 空間 (命題 1.145, 命題 1.151) であるから, 命題 3.17 より $B(X, \mathbb{K})$ は作用素ノルムで Banach 空間である.

である．これより $s<1$ であり，f の連続性と U が開集合であることから十分小さい正実数 ε を取れば，

$$s+\varepsilon<1,\quad f(s+\varepsilon)\in C\cap U$$

となる．これは s の定義に矛盾する．ゆえに C は連結である． □

定義 3.23 (凸集合)**.** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする．空でない部分集合 $C\subseteq V$ が V の凸集合であるとは，

$$(1-t)u+tv\in C\quad(\forall u,v\in C,\forall t\in[0,1])$$

が成り立つことを言う．

命題 3.24. ノルム空間の凸集合は弧状連結である．

証明. X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間，$C\subseteq X$ を凸集合とする．任意の $x,y\in C$ に対し，

$$f:[0,1]\ni t\mapsto(1-t)x+ty\in C$$

とおけば f は明らかに連続であり $f(0)=x$, $f(1)=y$ である．よって C は弧状連結である． □

定理 3.25 (有限次元ノルム空間)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ノルム空間とする．このとき次が成り立つ．

(1) X は Banach 空間である．
(2) 任意のノルム空間 Y と任意の線型作用素 $T:X\to Y$ に対し T は有界線型作用素である．

証明.　(1) $\dim(X)=N$ とする．X の順序付けられた基底 $(e_1,\cdots,e_N)$ を取り，線型同型写像

$$\Phi:\mathbb{K}^N\ni(t_1,\cdots,t_N)\mapsto\sum_{j=1}^N t_je_j\in X$$

を定義する．Φ は明らかに連続である．

$$S:=\{t\in\mathbb{K}^N:|t|=1\},\quad B:=\{t\in\mathbb{K}^N:|t|<1\},\quad C:=\{t\in\mathbb{K}^N:|t|>1\}$$

とおく．S は有界閉集合であるからコンパクトである[*24]．よって Φ の連続性より $\Phi(S)$ は X のコンパクト集合である (命題 1.51) ので X の閉集合である (命題 1.44)．そして Φ は線型同型写像なので $0\in X\backslash\Phi(S)$ であるから $X\backslash\Phi(S)$ は $0\in X$ の開近傍である．よってある正実数 δ が存在し，

$$CB(0,\delta)=\{x\in X:\|x\|\leqslant\delta\}\subseteq X\backslash\Phi(S)$$

が成り立つ．これより，

$$\Phi^{-1}(CB(0,\delta))\subseteq\mathbb{K}^N\backslash S=B\cup C\tag{3.7}$$

である．$\Phi^{-1}(CB(0,\delta))$ は $\mathbb{K}^N$ の凸集合なので弧状連結 (命題 3.24)，従って連結である (命題 3.22)．よって (3.7) は，

$$\Phi^{-1}(CB(0,\delta))\subseteq B$$

を意味する．ゆえに，

$$|\Phi^{-1}(x)|\leqslant\frac{1}{\delta}\quad(\forall x\in X:\|x\|\leqslant1)$$

が成り立つので $\Phi^{-1}:X\to\mathbb{K}^N$ は有界線型作用素である．今，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の任意の Cauchy 列とする．$\Phi^{-1}:X\to\mathbb{K}^N$ が有界線型作用素であることから $(\Phi^{-1}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は Banach 空間 $\mathbb{K}^N$ の Cauchy 列であるので収束する．よって $\Phi:\mathbb{K}^N\to X$ の連続性より $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=(\Phi(\Phi^{-1}(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する．ゆえに X は Banach 空間である．

[*24] 定理 1.145 と定理 1.151 を参照

(2) (1) における $\Phi:\mathbb{K}^N \to X$ を考える.

$$T\Phi:\mathbb{K}^N \ni (t_1,\cdots,t_N) \mapsto \sum_{j=1}^{N} t_j T e_j \in Y$$

は連続線型作用素だから有界線型作用素である (命題 3.16). (1) の証明より $\Phi^{-1}:X \to \mathbb{K}^N$ は有界線型作用素であるので,

$$T = (T\Phi)\Phi^{-1} : X \to Y$$

は有界線型作用素である.

□

3.2 Banach 空間における無限和

定義 3.26 (ノルム空間における無限和)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とし, 無限集合 J と $J \ni j \mapsto x_j \in X$ が与えられているとする. J の有限部分集合全体を $\mathcal{F}_J$ とおくと $\mathcal{F}_J$ は集合の包含関係による順序 (定義 1.3) により有向集合である. よって X のネット $(\sum_{j\in F} x_j)_{F\in\mathcal{F}_J}$ ができる. そこでこのネット $(\sum_{j\in F} x_j)_{F\in\mathcal{F}_J}$ が収束することを $\sum_{j\in J} x_j$ は収束すると言い, その収束点を,

$$\sum_{j\in J} x_j := \lim_{F\in\mathcal{F}_J} \sum_{j\in F} x_j \in X$$

と表す. またこの収束点を,

$$\sum_{j\in J} x_j = \lim_{F\to J} \sum_{j\in F} x_j$$

と表すこともある.

命題 3.27. X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とし, 無限集合 J と $J \ni j \mapsto x_j \in X$ が与えられているとし, $\sum_{j\in J} x_j$ が収束するとする. このとき

$$J_0 := \{j \in J : x_j \neq 0\}$$

は可算集合である.

証明. 任意の正実数 ε に対し,

$$J_\varepsilon := \{j \in J : \|x_j\| \geqslant \varepsilon\}$$

が有限集合であることを示す. $\mathcal{F}_J$ を J の有限部分集合全体とすると, ある $F_\varepsilon \in \mathcal{F}_J$ に対し,

$$\left\| \sum_{j\in J} x_j - \sum_{j\in F} x_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall F \in \mathcal{F}_J : F \supseteq F_\varepsilon)$$

となる. よって任意の $j_0 \in J \backslash F_\varepsilon$ に対し,

$$\|x_{j_0}\| = \left\| \sum_{j\in F_\varepsilon\cup\{j_0\}} x_j - \sum_{j\in F_\varepsilon} x_j \right\| \leqslant \left\| \sum_{j\in F_\varepsilon\cup\{j_0\}} x_j - \sum_{j\in J} x_j \right\| + \left\| \sum_{j\in J} x_j - \sum_{j\in F_\varepsilon} x_j \right\| < \varepsilon$$

であるから, $J\backslash F_\varepsilon \subseteq J\backslash J_\varepsilon$, 従って $J_\varepsilon \subseteq F_\varepsilon$ である. ゆえに J_ε は有限集合である. Archimedes の原理 1.96 より,

$$J_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_{\frac{1}{n}}$$

であり, 上で示したことから各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $J_{\frac{1}{n}}$ は有限集合だから J_0 は可算集合である. □

定義 3.28. 無限集合 J と $J \ni j \mapsto x_j \in [0,\infty]$ が与えられているとし, $\mathcal{F}_J$ を J の有限部分集合全体とする. このとき,

$$\sum_{j\in J} x_j := \sup_{F\in\mathcal{F}_J} \sum_{j\in F} x_j \in [0,\infty]$$

と定義する. 命題 1.136 よりこの定義は非負実数の収束する無限和の定義 3.26 と矛盾しない.

定義 3.29 (絶対収束)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の "Banach 空間" とし, 無限集合 J と $J \ni j \mapsto x_j \in X$ が与えられているとする.

$$\sum_{j \in J} \|x_j\| < \infty$$

であることを $\sum_{j \in J} x_j$ は絶対収束すると言う.

命題 3.30 (Banch 空間において絶対収束する無限和は収束する)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の "Banach 空間" とし, 無限集合 J と $J \ni j \mapsto x_j \in X$ が与えられているとする. そして $\sum_{j \in J} x_j$ は絶対収束するとする. このとき $\sum_{j \in J} x_j$ は収束する.

証明.

$$J_0 := \{j \in J : \|x_j\| > 0\}$$

とおけば命題 3.27 より J_0 は可算集合である. もし J_0 が有限集合であるならば明らかに $\sum_{j \in J} x_j = \sum_{j \in J_0} x_j$ である. そこで J_0 は可算無限集合であるとし, $\mathbb{N} \ni n \mapsto j_n \in J_0$ を全単射とする. このとき

$$\sum_{j \in J} \|x_j\| = \sum_{j \in J_0} \|x_j\| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_{j_n}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_{j_n}\|$$

であり, $N > M$ なる任意の $N, M \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} x_j - \sum_{n=1}^{M} x_j \right\| = \left\| \sum_{n=M+1}^{N} x_j \right\| \leqslant \sum_{n=M+1}^{N} \|x_j\| = \sum_{n=1}^{N} \|x_j\| - \sum_{n=1}^{M} \|x_j\|$$

であるから $(\sum_{n=1}^{N} x_j)_{N \in \mathbb{N}}$ は Banach 空間 X の Cauchy 列であるので収束する. そこで

$$x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} x_n \in X$$

とおく. このとき任意の正実数 ε に対し, $N_0 \in \mathbb{N}$ が取れて,

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|x_{j_n}\| - \sum_{n=1}^{N} \|x_j\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall N \geqslant N_0)$$

が成り立つ. よって $F \supseteq \{j_1, \cdots, j_{N_0}\}$ を満たす任意の有限集合 $F \subseteq J$ に対し,

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{j \in F} x_j \right\| &\leqslant \left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_{j_n} \right\| + \left\| \sum_{j \in F \setminus \{j_1, \cdots, j_{N_0}\}} x_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j \in F \setminus \{j_1, \cdots, j_{N_0}\}} \|x_j\| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j \in F} \|x_j\| - \sum_{n=1}^{N_0} \|x_{j_n}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \|x_{j_n}\| - \sum_{n=1}^{N_0} \|x_{j_n}\| < \varepsilon
\end{aligned}$$

となるので $x = \sum_{j \in J} x_j$ である. □

3.3 内積, Hilbert 空間, Hilbert 空間上の有界線型作用素の共役作用素

定義 3.31 (内積空間, Hilbert 空間)**.** $\mathcal{H}$ を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする.

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (u, v) \mapsto (u \mid v) \in \mathbb{K} \tag{3.8}$$

が次の条件を満たすとする.

(1) 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し $\overline{(u \mid v)} = (v \mid u)$.
(2) 任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し $\mathcal{H} \ni u \mapsto (u \mid v) \in \mathbb{K}$ は線型汎関数.
(3) 任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し $(v \mid v) \in [0, \infty)$.
(4) $(v \mid v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

このとき (3.8) を $\mathcal{H}$ 上の内積と言う．そして内積の備わった $\mathbb{K}$ 上の線型空間 $\mathcal{H}$ を内積空間と言う．内積空間 $(\mathcal{H}, (\cdot \mid \cdot))$ に対し次の命題 3.32 より，

$$\|v\| := \sqrt{(v \mid v)} \in [0, \infty) \quad (\forall v \in \mathcal{H})$$

とおくと，$\mathcal{H} \ni v \mapsto \|v\| \in [0, \infty)$ は $\mathcal{H}$ 上のノルムとなる．このノルムを内積 $(\cdot \mid \cdot)$ が定めるノルムと言う．内積空間は常にこのノルムによりノルム空間とみなす．内積空間 $\mathcal{H}$ が Banach 空間であるとき $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間と言う．

命題 3.32 (Schwarz の不等式)**.** $(\mathcal{H}, (\cdot \mid \cdot))$ を内積空間とする．このとき，

(1) 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し $|(u \mid v)| \leqslant \|u\|\|v\|$ が成り立つ．
(2) 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ が成り立つ．

証明. (1) $\|v\| = 0$ であるならば自明であるので $\|v\| > 0$ とする．任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し，

$$0 \leqslant (u - \alpha v \mid u - \alpha v) = \|u\|^2 - \alpha(v \mid u) - \overline{\alpha}(v \mid u) + |\alpha|^2\|v\|^2$$

であるから，$\alpha := \frac{(u|v)}{\|v\|^2}$ とおけば

$$0 \leqslant \|u\|^2 - \frac{|(u \mid v)|^2}{\|v\|^2}$$

を得る．これより求める結果を得る．

(2) (1) より，

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 = (u + v \mid u + v) = \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}(u \mid v) + \|v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2|(u \mid v)| + \|v\|^2 \\ \leqslant \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2\end{aligned}$$

である．これより求める結果を得る．

□

例 3.33. Euclid 空間とユニタリ空間は，それぞれ定義 1.143 と定義 1.149 における内積により Hilbert 空間である．

定義 3.34 (直交，直交補空間)**.** $\mathcal{H}$ を内積空間とする．$u, v \in \mathcal{H}$ が $(u \mid v) = 0$ を満たすとき u, v は直交すると言う．そして u, v が直交することを $u \perp v$ と表す．また $\mathcal{H}$ の任意の空でない部分集合 E に対し，

$$E^{\perp} := \{v \in \mathcal{H} : \forall u \in E, v \perp u\}$$

を E の直交補空間と言う．

命題 3.35 (内積の連続性)**.** $\mathcal{H}$ を内積空間とする．このとき内積

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (u, v) \mapsto (u \mid v) \in \mathbb{K}$$

は (直積位相に関して) 連続である．また $\mathcal{H}$ の任意の空でない部分集合 E に対し E の直交補空間 $E^{\perp}$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間である．

証明. 任意の $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ に対し Schwarz の不等式 3.32 より

$$|(u_1 \mid v_1) - (u_2 \mid v_2)| \leqslant |(u_1 \mid v_1 - v_2)| + |(u_1 - u_2 \mid v_2)| \leqslant \|u_1\|\|v_1 - v_2\| + \|u_1 - u_2\|\|v_2\|$$

である．これより内積が連続であることが分かる．$E^{\perp}$ が $\mathcal{H}$ の線型部分空間であることは自明である．任意の $v \in \overline{E^{\perp}}$ に対し命題 1.58 より $E^{\perp}$ の点列 $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ なるものが取れる．よって内積の連続性より，

$$(v \mid u) = \lim_{n\to\infty} (v_n \mid u) = 0 \quad (\forall u \in E)$$

であるから $v \in E^{\perp}$ である．ゆえに $E^{\perp} = \overline{E^{\perp}}$ なので $E^{\perp}$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間である．□

命題 3.36 (内積空間における中線定理)**.** $\mathcal{H}$ を内積空間とする．このとき任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し，

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \tag{3.9}$$

が成り立つ．

証明.

$$\|u+v\|^2 = (u+v \mid u+v) = \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}(u \mid v) + \|v\|^2,$$
$$\|u-v\|^2 = (u-v \mid u-v) = \|u\|^2 - 2\mathrm{Re}(u \mid v) + \|v\|^2$$

であるから両辺を加えて (3.9) を得る． □

命題 3.37 (Hilbert 空間における点と閉凸集合の距離)**.** $\mathcal{H}$ を $\mathbb{K}$ 上の Hilbert 空間, $C \subseteq \mathcal{H}$ を閉凸集合 (定義 3.23), $u \in \mathcal{H}$ とする．このとき $v_0 \in C$ で,

$$\|u - v_0\| = \min\{\|u - v\| : v \in C\} \tag{3.10}$$

を満たすものが唯一つ存在する．

証明. $d := \inf\{\|u - v\| : v \in C\}$ とおく．下限の定義より C の点列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$d = \lim_{n\to\infty} \|u - v_n\| \tag{3.11}$$

を満たすものが取れる．中線定理 3.36 より任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\|v_n - v_m\|^2 + \|2u - (v_n + v_m)\|^2 = 2(\|u - v_n\|^2 + \|u - v_m\|^2)$$

であるから,

$$\|v_n - v_m\|^2 + 4\left\|u - \frac{1}{2}(v_n + v_m)\right\|^2 = 2(\|u - v_n\|^2 + \|u - v_m\|^2)$$

である．C の凸性より $\frac{1}{2}(v_n + v_m) \in C$ であるから,

$$d^2 \leqslant \left\|u - \frac{1}{2}(v_n + v_m)\right\|^2$$

なので,

$$\|v_n - v_m\|^2 \leqslant 2\left((\|u - v_n\|^2 - d^2) + (\|u - v_m\|^2 - d^2)\right)$$

である．よって (3.11) より $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の Cauchy 列であるので収束する．その収束点を $v_0 = \lim_{n\to\infty} v_n$ とおくと, C が閉であることから $v_0 \in C$ であり,

$$\|u - v_0\| = \lim_{n\to\infty} \|u - v_n\| = d$$

である．よって存在が示せた．一意性を示す．もし $v_0' \in C$ も $\|u - v_0'\| = d$ を満たすとすると中線定理 3.36 より,

$$\|v_0 - v_0'\|^2 + 4\left\|u - \frac{1}{2}(v_0 + v_0')\right\|^2 = 2(\|u - v_0\|^2 + \|u - v_0'\|^2)$$

であり, 右辺は $4d^2$ で左辺の第二項は $4d^2$ 以下であるので $\|v_0 - v_0'\|^2 = 0$ を得る．よって一意性が示せた． □

定理 3.38 (Hilbert 空間の直交分解)**.** $\mathcal{H}$ を $\mathbb{K}$ 上の Hilbert 空間, $M \subseteq \mathcal{H}$ を閉部分空間とする．このとき,

$$\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp} \tag{3.12}$$

が成り立つ．

証明. M は $\mathcal{H}$ の閉凸集合であるので命題 3.10 より任意の $u \in \mathcal{H}$ に対し $v_1 \in M$ で,

$$\|u - v_1\| = \min\{\|u - v\| : v \in M\} \tag{3.13}$$

を満たすものが取れる.

$$v_2 := u - v_1 \in \mathcal{H}$$

とおく. M の線型性と (3.13) より任意の $v \in M$ と任意の正実数 ε に対し,

$$\|v_2 - \varepsilon v\| = \|u - (v_1 + \varepsilon v)\| \geqslant \|u - v_1\| = \|v_2\|$$

であるから, 両辺の 2 乗を取れば,

$$\|v_2\|^2 - 2\varepsilon \mathrm{Re}(v_2 \mid v) + \varepsilon^2 \|v\|^2 \geqslant \|v_2\|^2$$

となる. ゆえに,

$$2\mathrm{Re}(v_2 \mid v) \leqslant \varepsilon \|v\|^2 \quad (\forall v \in M, \forall \varepsilon \in (0, \infty))$$

が成り立つ. よって $\varepsilon \in (0, \infty)$ の任意性より,

$$\mathrm{Re}(v_2 \mid v) \leqslant 0 \quad (\forall v \in M)$$

を得て, M の線型性より,

$$(v_2 \mid v) = 0 \quad (\forall v \in M)$$

を得る. ゆえに $u - v_1 = v_2 \in M^\perp$ だから $u = v_1 + v_2 \in M \oplus M^\perp$ である. よって (3.12) が成り立つ. □

命題 3.39 (Hilbert 空間の閉部分空間の第二直交補空間)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $M \subseteq \mathcal{H}$ を閉部分空間とする. このとき,

$$M = M^{\perp\perp}$$

が成り立つ.

証明. $M \subseteq M^{\perp\perp}$ は自明である. 任意の $v \in M^{\perp\perp}$ を取る. 定理 3.38 より $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ であるから $v_1 \in M$ と $v_2 \in M^\perp$ で $v = v_1 + v_2$ なるものが取れる. $M \subseteq M^{\perp\perp}$ より $v - v_1 \in M^{\perp\perp}$ だから,

$$v - v_1 = v_2 \in M^{\perp\perp} \cap M^\perp = \{0\}$$

である. ゆえに $v = v_1 \in M$ だから $M = M^{\perp\perp}$ である. □

定義 3.40 (反線型性)**.** X, Y をそれぞれ $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする. $T : X \to Y$ が反線型写像であるとは,

$$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2 \quad (\forall x_1, x_2 \in X), \quad T(\alpha x) = \overline{\alpha} Tx \quad (\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in X)$$

が成り立つことを言う. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合は反線型であることと線型であることは同じである.

定義 3.41 (ノルム減少性, ノルム保存性)**.** X, Y をそれぞれ $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする. 写像 $T : X \to Y$ がノルム減少であるとは,

$$\|Tx\| \leqslant \|x\| \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つことを言う. また写像 $T : X \to Y$ がノルム保存であるとは,

$$\|Tx\| = \|x\| \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つことを言う.

定義 3.42 (等距離性)**.** $(X, d_X), (Y, d_Y)$ をそれぞれ距離空間とする. 写像 $T : X \to Y$ が等距離であるとは,

$$d_Y(Tx_1, Tx_2) = d_X(x_1, x_2) \quad (\forall x_1, x_2 \in X)$$

が成り立つことを言う.

命題 3.43 (ノルム保存な (反) 線型作用素の等距離性)**.** X, Y をそれぞれ $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし, $T : X \to Y$ をノルム保存な (反) 線型作用素とする. このとき T は等距離である.

証明. T の (反) 線型性より任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し,

$$\|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| = \|x_1 - x_2\|$$

である. □

定理 3.44 (Riesz の表現定理)**.** $\mathcal{H}$ を $\mathbb{K}$ 上の Hilbert 空間, $\mathcal{H}^*$ を Banach 空間 $\mathcal{H}$ の双対空間 (定義 3.20) とする. このとき任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(\cdot \mid v) : \mathcal{H} \ni u \mapsto (u \mid v) \in \mathbb{K} \tag{3.14}$$

とおくと $(\cdot \mid v) \in \mathcal{H}^*$ であり,

$$\mathcal{H} \ni v \mapsto (\cdot \mid v) \in \mathcal{H}^* \tag{3.15}$$

はノルム保存全射反線型作用素である.

証明. 内積の定義 3.31 と Schwarz の不等式 3.32 より (3.14) はノルム減少な有界線型汎関数であり, (3.15) は反線型作用素である. そして

$$\|v\|^2 = (v \mid v) \leqslant \|v\|\|(\cdot \mid v)\| \ \ (\forall v \in \mathcal{H})$$

であるから (3.15) はノルム保存である. 後は (3.15) が全射であることを示せばよい. 任意の $\varphi \in \mathcal{H}^*$ を取る. $\varphi = (\cdot \mid v)$ を満たす $v \in \mathcal{H}$ が存在することを示す. もし $\varphi = 0$ ならば $v = 0$ とすればよいから $\varphi \neq 0$ とする. このとき $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \mathcal{H}$ であり, φ の連続性より $\mathrm{Ker}(\varphi)$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間であるから直交分解 $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus (\mathrm{Ker}(\varphi))^{\perp}$ より $(\mathrm{Ker}(\varphi))^{\perp} \neq \{0\}$ である. よって $v_0 \in (\mathrm{Ker}(\varphi))^{\perp}$ で $\varphi(v_0) = 1$ なるものが取れる. 任意の $u \in \mathcal{H}$ に対し $u - \varphi(u)v_0 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ であるから,

$$0 = (u - \varphi(u)v_0 \mid v_0) = (u \mid v_0) - \varphi(u)\|v_0\|^2$$

である. よって $v := \frac{v_0}{\|v_0\|^2}$ とおけば,

$$\varphi(u) = (u \mid v) \ \ (\forall u \in \mathcal{H})$$

であるので (3.15) は全射である. □

定義 3.45 (準双線型性)**.** X, Y, Z をそれぞれ $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする.

$$\Phi : X \times Y \to Z$$

が準双線型写像であるとは, 任意の $y \in U$ に対し,

$$X \ni x \mapsto \Phi(x, y) \in Z$$

が線型写像であり, 任意の $x \in X$ に対し,

$$Y \ni y \mapsto \Phi(x, y) \in Z$$

が反線型写像であることを言う. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合は準双線型写像は双線型写像と同じである.

定義 3.46. X, Y, Z をそれぞれ $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする. (準) 双線型写像

$$\Phi : X \times Y \to Z$$

が有界 (準) 双線型写像であるとは,

$$\|\Phi\| := \sup\{\|\Phi(x, y)\| : \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1\} < \infty$$

が成り立つことを言う. そして $\|\Phi\|$ を有界準双線型写像 Φ のノルムと言う.

例 3.47. $\mathcal{H},\mathcal{K}$ を $\mathbb{K}$ 上の内積空間とし, $T \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ とする. このとき,

$$\mathcal{H} \times \mathcal{K} \ni (u,v) \mapsto (Tu \mid v) \in \mathbb{K}$$

は有界準双線型汎関数である.

例 3.48. $\mathbb{K}$ 上のノルム $*$-環 X (定義 3.6) に対し,

$$X \times X \ni (x,y) \mapsto y^*x \in X$$

は有界準双線型写像である.

定理 3.49 (Hilbert 空間上の有界準双線型汎関数と有界線型作用素)**.** $\mathcal{H},\mathcal{K}$ を $\mathbb{K}$ 上の Hilbert 空間とし,

$$\Phi : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathbb{K}$$

を有界準双線型汎関数とする. このとき有界線型作用素 $T \in B(\mathcal{K},\mathcal{H})$ で,

$$\Phi(u,v) = (u \mid Tv) \ \ (\forall u \in \mathcal{H}, \forall v \in \mathcal{K})$$

を満たすものが唯一つ存在する. そして $\|T\| = \|\Phi\|$ が成り立つ.

証明. 一意性は自明である. 存在を示す. 任意の $v \in \mathcal{K}$ に対し,

$$\mathcal{H} \ni u \mapsto \Phi(u,v) \in \mathbb{K}$$

はノルムが $\|\Phi\|\|v\|$ 以下の有界線型汎関数であるから Riesz の表現定理 3.44 より $w \in \mathcal{H}$ で,

$$\Phi(u,v) = (u \mid w) \ \ (\forall u \in \mathcal{H}), \ \ \|w\| \leqslant \|\Phi\|\|v\| \tag{3.16}$$

を満たすものが存在する. (3.16) の左の式より w は v に対して一意的に定まるので w を Tv と表して写像 $T : \mathcal{K} \ni v \mapsto Tv \in \mathcal{H}$ が定義できる. このとき (3.16) の右の式より,

$$\|Tv\| \leqslant \|\Phi\|\|v\| \ \ (\forall v \in \mathcal{K}) \tag{3.17}$$

である. 任意の $v_1, v_2 \in \mathcal{K}$ に対し,

$$\begin{aligned}(u \mid T(v_1+v_2)) &= \Phi(u,v_1+v_2) = \Phi(u,v_1) + \Phi(u,v_2) = (u \mid Tv_1) + (u \mid Tv_2)\\ &= (u \mid Tv_1 + Tv_2) \ \ (\forall u \in \mathcal{H})\end{aligned}$$

であるから $T(v_1+v_2) = Tv_1 + Tv_2$ であり, 任意の $v \in \mathcal{K}$, 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し,

$$\begin{aligned}(u \mid T(\alpha v)) &= \Phi(u,\alpha v) = \overline{\alpha}\Phi(u,v) = \overline{\alpha}(u \mid Tv)\\ &= (u \mid \alpha Tv) \ \ (\forall u \in \mathcal{H})\end{aligned}$$

であるから $T(\alpha v) = \alpha Tv$ である. よって $T : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ は線型作用素であり, (3.17) より T は作用素ノルムが $\|\Phi\|$ 以下の有界線型作用素である. 任意の $u \in \mathcal{H}, v \in \mathcal{K}$ に対し,

$$|\Phi(u,v)| = |(u \mid Tv)| \leqslant \|u\|\|Tv\| \leqslant \|T\|\|u\|\|v\|$$

であるから $\|T\| = \|\Phi\|$ が成り立つ. □

系 3.50. $\mathcal{H},\mathcal{K}$ を $\mathbb{K}$ 上の Hilbert 空間とする. このとき任意の $T \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ に対し,

$$(Tu \mid v) = (u \mid T^*v) \ \ (\forall u \in \mathcal{H}, \forall v \in \mathcal{K}) \tag{3.18}$$

を満たす $T^* \in B(\mathcal{K},\mathcal{H})$ が唯一つ存在する.

証明. $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ に対し,

$$\mathcal{H} \times \mathcal{K} \ni (u, v) \mapsto (Tu \mid v) \in \mathbb{K}$$

は有界準双線型汎関数であるから定理 3.49 より (3.18) を満たす $T^* \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ が唯一つ存在する. □

定義 3.51 (Hilbert 空間上の有界線型作用素の共役作用素)**.** $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ を $\mathbb{K}$ 上の Hilbert 空間とする. 任意の $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ に対し系 3.50 より $T^* \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ で,

$$(Tu \mid v) = (u \mid T^* v) \quad (\forall u \in \mathcal{H}, \forall v \in \mathcal{K})$$

を満たすものが唯一つ存在する. これを T の共役作用素と言う.

命題 3.52 (共役作用素の基本性質)**.** $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{L}$ を $\mathbb{K}$ 上の Hilbert 空間とする. このとき次が成り立つ.

(1) 任意の $S, T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ に対し $(S + T)^* = S^* + T^*$.
(2) 任意の $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ と任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.
(3) 任意の $S \in B(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ と任意の $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ に対し $(ST)^* = T^* S^*$.
(4) 任意の $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ に対し $T^{**} = T$.
(5) 任意の $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ に対し $\|T\|^2 = \|T^*\|^2 = \|T^* T\|$.
(6) 任意の $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ に対し $(\mathrm{Ran}(T))^\perp = \mathrm{Ker}(T^*)$.

証明. (1) ～ (4) は共役作用素の定義より自明である. (5) を示す.

$$\|Tv\|^2 = (Tv \mid Tv) = (v \mid T^* T v) \leqslant \|T^* T\| \|v\|^2 \quad (\forall v \in \mathcal{H})$$

であるから,

$$\|T\|^2 \leqslant \|T^* T\| \leqslant \|T^*\| \|T\| \tag{3.19}$$

を得る. よって $\|T\| \leqslant \|T^*\|$ であり, (4) より $\|T^*\| \leqslant \|T^{**}\| = \|T\|$ でもある. ゆえに $\|T\| = \|T^*\|$ であるから (3.19) より $\|T\|^2 = \|T^* T\| = \|T^*\|^2$ が成り立つ.
(6) を示す. $\mathrm{Ker}(T^*) \subseteq (\mathrm{Ran}(T))^\perp$ は共役作用素の定義より自明である. 任意の $v \in (\mathrm{Ran}(T))^\perp$ に対し,

$$0 = (Tu \mid v) = (u \mid T^* v) \quad (\forall u \in \mathcal{H})$$

であるから $T^* v = 0$ である. ゆえに $v \in \mathrm{Ker}(T^*)$ だから $\mathrm{Ker}(T^*) = (\mathrm{Ran}(T))^\perp$ が成り立つ. □

系 3.53. $\mathcal{H}$ を $\mathbb{K}$ 上の Hilbert 空間とする. このとき Banach 環[*25] $B(\mathcal{H})$ は共役作用素を取る演算 $B(\mathcal{H}) \ni T \mapsto T^* \in B(\mathcal{H})$ を $*$-演算として C^*-環をなす.

証明. 命題 3.52 の (1) ～ (5) より明らかである. □

3.4 セミノルム空間, 汎弱位相

定義 3.54 (位相線型空間)**.** Hausdorff 位相が備わった $\mathbb{K}$ 上の線型空間 X が $\mathbb{K}$ 上の位相線型空間であるとは, 加法

$$X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$$

とスカラー倍

$$\mathbb{K} \times X \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha x \in X$$

が連続であることを言う. ただし $X \times X$ と $\mathbb{K} \times X$ の位相は直積位相 (定義 1.75) である.

定義 3.55 (セミノルム)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする. $p : X \to [0, \infty)$ が X 上のセミノルムであるとは,

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \quad (\forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{K})$$

を満たすことを言う.

[*25] 系 3.18 を参照.

定義 3.56 (セミノルムの分離族 (separating family of seminorms))**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする．X 上のセミノルムからなる集合 $\mathcal{P}$ が X を分離するとは，

$$p(x) = 0 \ \ (\forall p \in \mathcal{P}) \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

が成り立つことを言う．X を分離する X 上のセミノルムの集合のことを X 上のセミノルムの分離族とも言う．

定義 3.57 (セミノルム位相, セミノルム空間)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $\mathcal{P}$ を X 上のセミノルムの分離族とし，

$$p_a : X \ni x \mapsto p(x-a) \in [0,\infty) \ \ (\forall (p,a) \in \mathcal{P} \times X)$$

とおく．$(p_a : X \to [0,\infty))_{(p,a)\in\mathcal{P}\times X}$ が誘導する X 上の始位相 (定義 1.71) を $\mathcal{P}$ が誘導する X 上のセミノルム位相と言う．そしてセミノルム位相が入った線型空間をセミノルム空間と言う (命題 3.59 で見るようにセミノルム空間は位相線型空間 (定義 3.54) である)．

定義 3.58 (絶対凸 (absolutely convex) 集合)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする．凸集合 $C \subseteq X$ が絶対凸であるとは $|\alpha| \leqslant 1$ を満たす任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ と任意の $x \in C$ に対し $\alpha x \in C$ が成り立つことを言う．

命題 3.59 (セミノルム位相の基本性質)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $\mathcal{P}$ を X 上のセミノルムの分離族とし, X に $\mathcal{P}$ から誘導されるセミノルム位相を入れる．このとき次が成り立つ．

(1) X のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $x \in X$ に対し $x_\lambda \to x \ \Leftrightarrow \ p(x_\lambda - x) \to 0 \ \ (\forall p \in \mathcal{P})$.

(2) X は位相線型空間 (定義 3.54) である．

(3) 任意の正実数 ε と $p \in \mathcal{P}$ に対し $(p < \varepsilon) := p^{-1}([0,\varepsilon))$ は $0 \in X$ の絶対凸開近傍であり，

$$\left\{ \bigcap_{j=1}^{n} (p_j < \varepsilon) : \varepsilon \in (0,\infty),\ n \in \mathbb{N},\ p_1, \cdots, p_n \in \mathcal{P} \right\} \tag{3.20}$$

は $0 \in X$ の絶対凸開近傍からなる基本近傍系 (定義 1.55) である．

証明. (1) X の位相は $(p_a : X \to [0,\infty))_{(p,a)\in\mathcal{P}\times X}$ から誘導される始位相であるから命題 1.72 より，

$$x_\lambda \to x \quad \Leftrightarrow \quad p_a(x_\lambda) \to p_a(x) \ \ (\forall (p,a) \in \mathcal{P} \times X)$$

であり，

$$|p_a(x_\lambda) - p_a(x)| \leqslant p(x_\lambda - x) = p_x(x_\lambda) - p_x(x) \ \ (\forall (p,a) \in \mathcal{P} \times X)$$

であるから，

$$p_a(x_\lambda) \to p_a(x) \ \ (\forall (p,a) \in \mathcal{P} \times X) \quad \Leftrightarrow \quad p(x_\lambda - x) \to 0 \ \ (\forall p \in \mathcal{P})$$

である．よって求める結果を得る．

(2) $\mathcal{P}$ がセミノルムの分離族であることから $x, y \in X$ に対し，

$$p_a(x) = p_a(y) \ \ (\forall (p,a) \in \mathcal{P} \times X) \quad \Rightarrow \quad p(x-y) = 0 \ \ (\forall p \in \mathcal{P}) \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

であり, $[0,\infty)$ は Hausdorff 空間であるから, 命題 1.73 より X は Hausdorff 空間である．$X \times X$ のネット $((x_\lambda, y_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ が $(x,y) \in X \times X$ に収束するとすると, 命題 1.76 より $x_\lambda \to x$ かつ $y_\lambda \to y$ なので，

$$p(x_\lambda + y_\lambda - (x+y)) \leqslant p(x_\lambda - x) + p(y_\lambda - y) \to 0 \ \ (\forall p \in \mathcal{P})$$

である．よって (1) より $x_\lambda + y_\lambda \to x + y$ であるから, 命題 1.50 より加法 $X \times X \ni (x,y) \mapsto x + y \in X$ は連続である．また $\mathbb{K} \times X$ のネット $((\alpha_\lambda, x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ が $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times X$ に収束するとすると, 命題 1.76 より $\alpha_\lambda \to \alpha$ かつ $x_\lambda \to x$ なので，

$$p(\alpha_\lambda x_\lambda - \alpha x) \leqslant |\alpha_\lambda| p(x_\lambda - x) + |\alpha_\lambda - \alpha| p(x) \to 0 \ \ (\forall p \in \mathcal{P})$$

である．よって命題 1.50 よりスカラー倍 $\mathbb{K} \times X \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha x \in X$ は連続である．以上より X は位相線型空間である．

(3) 任意の $p \in \mathcal{P}$ を取る. X のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $x \in X$ に収束するならば (1) より

$$|p(x_\lambda) - p(x)| \leqslant p(x_\lambda - x) \to 0$$

であるから命題 1.50 より $p : X \to [0,\infty)$ は連続である. ゆえに任意の正実数 ε に対し $(p < \varepsilon) = p^{-1}([0,\varepsilon))$ は X の開集合である. 任意の $x, y \in (p < \varepsilon)$, 任意の $t \in [0,1]$, $|\alpha| \leqslant 1$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し,

$$p((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)p(x) + tp(y) < \varepsilon,\ \ p(\alpha x) = |\alpha| p(x) < \varepsilon$$

であるから $(p < \varepsilon)$ は $0 \in X$ の絶対凸開近傍である. 有限個の絶対凸開集合の交叉は絶対凸開集合であるので (3.20) の要素は全て $0 \in X$ の絶対凸開近傍である. (3.20) が $0 \in X$ の基本近傍系であることを示す. X の位相は $(p_a : X \to [0,\infty))_{(p,a)\in\mathcal{P}\times X}$ から誘導される始位相であるから $0 \in X$ の任意の近傍 $V \subseteq X$ に対し, 有限個の $(p_1, a_1), \cdots, (p_n, a_n)$ と正実数 ε が存在し,

$$\bigcap_{j=1}^{n} \{x \in X : |p_{j,a_j}(x) - p_{j,a_j}(0)| < \varepsilon\} \subseteq V$$

となる. ここで任意の $x \in X$ に対し,

$$|p_{j,a_j}(x) - p_{j,a_j}(0)| \leqslant p_j(x)\ \ (j = 1, \cdots, n)$$

であるから,

$$(p_j < \varepsilon) \subseteq \{x \in X : |p_{j,a_j}(x) - p_{j,a_j}(0)| < \varepsilon\}\ \ (j = 1, \cdots, n)$$

である. ゆえに,

$$\bigcap_{j=1}^{n} (p_j < \varepsilon) \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} \{x \in X : |p_{j,a_j}(x) - p_{j,a_j}(0)| < \varepsilon\} \subseteq V$$

であるから (3.20) は $0 \in X$ の基本近傍系である.

□

例 3.60 (ノルム空間はセミノルム空間)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし, $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ を X 上のノルムとする. このとき $\|\cdot\|$ は X 上のセミノルムであり, $\{\|\cdot\|\}$ は X 上のセミノルムの分離族である. そしてセミノルムの分離族 $\{\|\cdot\|\}$ から誘導されるセミノルム位相はノルム $\|\cdot\|$ による通常の距離位相である.

定義 3.61 (線型汎関数の分離族 (separating family of functionals))**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし, $\mathcal{F}$ を X 上の線型汎関数の集合とする. $\mathcal{F}$ が X を分離するとは, $x, y \in X$ に対し,

$$\varphi(x) = \varphi(y)\ \ (\forall \varphi \in \mathcal{F})\ \ \Leftrightarrow\ \ x = y$$

が成り立つことを言う. X を分離する X 上の線型汎関数の集合を X 上の線型汎関数の分離族と言う.

定義 3.62 (線型汎関数の分離族が誘導する汎弱位相)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし, $\mathcal{F}$ を X 上の線型汎関数の分離族とする. このとき任意の $\varphi \in \mathcal{F}$ に対し,

$$|\varphi| : X \ni x \mapsto |\varphi(x)| \in [0,\infty)$$

は X 上のセミノルムであり, $\{|\varphi| : \varphi \in \mathcal{F}\}$ は X 上のセミノルムの分離族である. そこでこのセミノルムの分離族 $\{|\varphi| : \varphi \in \mathcal{F}\}$ が誘導する X 上のセミノルム位相 (定義 3.57) を $\mathcal{F}$ が誘導する X 上の汎弱位相と言う.

命題 3.63 (汎弱位相の基本性質)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $\mathcal{F}$ を X 上の線型汎関数の分離族とし, X に $\mathcal{F}$ から誘導される汎弱位相を入れる. このとき次が成り立つ.

(1) X のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $x \in X$ に対し $x_\lambda \to x\ \Leftrightarrow\ \varphi(x_\lambda) \to \varphi(x)\ \ (\forall \varphi \in \mathcal{F})$.
(2) X はセミノルム空間 (従って位相線型空間) である.

(3) 任意の正実数 ε と $\varphi \in \mathcal{F}$ に対し $(|\varphi| < \varepsilon) := \{x \in X : |\varphi(x)| < \varepsilon\}$ は $0 \in X$ の絶対凸開近傍であり,

$$\left\{ \bigcap_{j=1}^{n} : (|\varphi_j| < \varepsilon) : \varepsilon \in (0,\infty),\ n \in \mathbb{N},\ \varphi_1, \cdots, \varphi_n \in \mathcal{F} \right\}$$

は $0 \in X$ の絶対凸開近傍からなる基本近傍系である.

証明. 汎弱位相の定義 3.62 と命題 3.59 より明らかである. □

補題 3.64. X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし, $\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_n : X \to \mathbb{K}$ をそれぞれ X 上の線型汎関数とする. もし,

$$\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_j) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi) \tag{3.21}$$

が成り立つならば, φ は $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ の線型結合で表される.

証明.

$$\Phi : X \ni x \mapsto (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)) \in \mathbb{K}^n$$

とおくと Φ は線型作用素である. そして (3.21) より,

$$\mathrm{Ker}(\Phi) = \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_j) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$$

であるから,

$$\Phi(X) \ni \Phi(x) = (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)) \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{K} \tag{3.22}$$

は well-defined な線型汎関数である. $\Phi(X)$ の基底を含む $\mathbb{K}^n$ の基底が取れること[*26]に注意すれば, $\mathbb{K}^n$ 上の線型汎関数で $\Phi(X)$ 上で (3.22) と一致するものが取れることが分かる. よって $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ で,

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j(x) \quad (\forall x \in X)$$

を満たすものが取れる[*27]. これより $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j$ だから求める結果を得た. □

定理 3.65 (汎弱位相に関して連続な線型汎関数)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $\mathcal{F}$ を X 上の線型汎関数の分離族 (定義 3.61) とし, X に $\mathcal{F}$ から誘導される汎弱位相を入れる. このとき線型汎関数 $\varphi : X \to \mathbb{K}$ に対し次は互いに同値である.

(1) φ は連続である.
(2) $\varphi \in \mathrm{span}(\mathcal{F})$ である.

証明. (2) $\Rightarrow$ (1) は命題 3.63 の (1) と命題 1.50 による. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. $\varphi : X \to \mathbb{K}$ が連続な線型汎関数とする. このとき $(|\varphi| < 1) = \{x \in X : |\varphi(x)| < 1\}$ は $0 \in X$ の開近傍であるので命題 3.63 の (3) より正実数 ε と有限個の $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in \mathcal{F}$ が取れて,

$$\bigcap_{j=1}^{n} (|\varphi_j| < \varepsilon) \subseteq (|\varphi| < 1)$$

となる. 任意の $x \in X$ と任意 $\delta \in (0,\infty)$ に対し,

$$\frac{\varepsilon x}{\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\varphi_j(x)| + \delta} \in \bigcap_{j=1}^{n} (|\varphi_j| < \varepsilon) \subseteq (|\varphi| < 1)$$

であるから,

$$|\varphi(x)| \leqslant \varepsilon^{-1} \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\varphi_j(x)| + \delta \right) \quad (\forall x \in X, \forall \delta \in (0,\infty))$$

[*26] 命題 2.37 を参照.
[*27] 有限次元線型空間 $\mathbb{K}^n$ の標準基底に対する双対空間の双対基底 2.61 を考えれば分かる.

が成り立つ．よって $\delta \in (0,\infty)$ の任意性より，

$$|\varphi(x)| \leqslant \varepsilon^{-1} \max_{1\leqslant j\leqslant n} |\varphi_j(x)| \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つ．これより，

$$\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_j) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$$

であるから，補題 3.64 より φ は $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in \mathcal{F}$ の線型結合で表されるので $\varphi \in \mathrm{span}(\mathcal{F})$ である． □

定義 3.66 (ノルム空間の双対空間の弱 $*$-位相)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間，X^* をその双対空間 (定義 3.20) とし，任意の $x \in X$ に対し X^* 上の線型汎関数

$$\iota(x) : X^* \ni \varphi \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{K}$$

を定義する．このとき $\iota(X) = \{\iota(x) : x \in X\}$ は明らかに X^* 上の線型汎関数の分離族 (定義 3.61) である．そこで $\iota(X)$ から誘導される X^* 上の汎弱位相を X^* の弱 $*$-位相と言う．$\iota(X)$ は X^{**} の線型部分空間であるから定理 3.65 より弱 $*$-位相に関して連続な線型汎関数全体は $\iota(X)$ である．

定理 3.67 (Banach-Alaoglu の定理)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間，X^* をその双対空間とし，$(X^*)_1 = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| \leqslant 1\}$ とおく．このとき $(X^*)_1$ は弱 $*$-位相でコンパクトである．

証明. 定理 1.47 より $(X^*)_1$ の任意の普遍ネット (定義 1.27) $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が弱 $*$-位相で $(X^*)_1$ の元に収束することを示せばよい．任意の $x \in X$ に対し $\mathbb{K}$ における半径 $\|x\|$ の閉球を $(\mathbb{K})_{\|x\|}$ とおくと，$(\varphi_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$ は明らかに $(\mathbb{K})_{\|x\|}$ の普遍ネットであり，$(\mathbb{K})_{\|x\|}$ はコンパクトであるから定理 1.47 より $(\varphi_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$ は $(\mathbb{K})_{\|x\|}$ の元に収束する．そこで，

$$\varphi(x) := \lim_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(x) \in (\mathbb{K})_{\|x\|} \quad (\forall x \in X) \tag{3.23}$$

とおいて $\varphi : X \ni x \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{K}$ を定義する．すると φ は明らかに線型汎関数であり，(3.23) より $\varphi \in (X^*)_1$ である．そして (3.23) と命題 3.63 の (1) より $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は φ に弱 $*$-位相で収束する．よって $(X^*)_1$ は弱 $*$-位相でコンパクトである． □

3.5 Hahn-Banach の拡張定理, Hahn-Banach の分離定理, Krein-Milman の端点定理

定義 3.68 (Minkowski 汎関数)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする．$m : X \to [0,\infty)$ が Minkowski 汎関数であるとは，

$$m(x+y) \leqslant m(x) + m(y), \quad m(\alpha x) = \alpha m(x) \quad (\forall x, y \in X, \forall \alpha \in [0,\infty))$$

が成り立つことを言う．

定理 3.69 (Hahn-Banach の拡張定理 1)**.** X を $\mathbb{R}$ 上の線型空間，$m : X \to [0,\infty)$ を Minkoswki 汎関数，$M \subseteq X$ を部分空間，$\varphi : M \to \mathbb{R}$ を線型汎関数とし，$\varphi(x) \leqslant m(x)$ $(\forall x \in M)$ が成り立つとする．このとき線型汎関数 $\widetilde{\varphi} : X \to \mathbb{R}$ で $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ $(\forall x \in M)$ かつ $\widetilde{\varphi}(x) \leqslant m(x)$ $(\forall x \in X)$ を満たすものが存在する．

証明.

$$\Lambda := \{(N,\psi) : N \text{ は } M \text{ を含む } X \text{ の部分空間}, \psi \text{ は } N \text{ 上の線型汎関数で } \psi|_M = \varphi, \psi(x) \leqslant m(x)\ (\forall x \in N)\}$$

[*28]とおき，Λ における 2 項関係 $\leqslant$ を，

$$(N_1,\psi_1) \leqslant (N_2,\psi_2) \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} N_1 \subseteq N_2, \quad \psi_2|_{N_1} = \psi_1$$

[*28] $\psi|_M$ は ψ の M 上への制限である．

と定義する．すると $\leqslant$ は明らかに Λ の順序であり，順序集合 $(\Lambda, \leqslant)$ は帰納的順序集合である[*29]．よって Zorn の補題 1.12 より $(\Lambda, \leqslant)$ は極大元を持つ．それを (N, ψ) と表す．$N = X$ が成り立つことを示せばよい．そこで $N \neq X$ であると仮定して矛盾を導く．任意の $x_0 \in X \backslash N$ を取り固定し，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\psi_s : N \oplus \mathbb{R}x_0 \ni x + \alpha x_0 \mapsto \psi(x) + \alpha s \in \mathbb{R}$$

なる線型汎関数を定義する．このとき ψ_s は ψ の拡張である．

$$(m(y + x_0) - \psi(y)) - (\psi(x) - m(x - x_0)) \geqslant m(x + y) - \psi(x + y) \geqslant 0 \quad (\forall x, y \in N)$$

より，

$$\psi(x) - m(x - x_0) \leqslant m(y + x_0) - \psi(y) \quad (\forall x, y \in N)$$

だから，

$$\sup_{x \in N}(\psi(x) - m(x - x_0)) \leqslant s_0 \leqslant \inf_{y \in N}(m(y + x_0) - \psi(y))$$

なる $s_0 \in \mathbb{R}$ が取れる．

$$\psi(x) \pm s_0 \leqslant m(x \pm x_0) \quad (\forall x \in N)$$

であるから，任意の正実数 α と任意の $x \in N$ に対し，

$$\psi_{s_0}(x \pm \alpha x_0) = \alpha\left(\psi(\alpha^{-1}x) \pm s_0\right) \leqslant \alpha m(\alpha^{-1}x \pm x_0) = m(x \pm \alpha x_0)$$

である．これより，

$$\psi_{s_0}(x) \leqslant m(x) \quad (\forall x \in N \oplus \mathbb{R}x_0) \tag{3.24}$$

が成り立つ．ψ_{s_0} が ψ の拡張であることと (3.24) より，

$$(N \oplus \mathbb{R}x_0, \psi_{s_0}) \in \Lambda, \quad (N \oplus \mathbb{R}x_0, \psi_{s_0}) > (N, \psi)$$

である．しかしこれは (N, ψ) の極大性に矛盾する．ゆえに $N = X$ が成り立つので ψ が求める線型汎関数である． $\square$

定理 3.70 (Hahn-Banach の拡張定理 2)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間，$p : X \to [0, \infty)$ をセミノルム，$M \subseteq X$ を部分空間，$\varphi : M \to \mathbb{K}$ を線型汎関数とし，$|\varphi(x)| \leqslant p(x)$ $(\forall x \in M)$ が成り立つとする．このとき線型汎関数 $\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{K}$ で $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ $(\forall x \in M)$ かつ $|\tilde{\varphi}(x)| \leqslant p(x)$ $(\forall x \in X)$ を満たすものが存在する．

証明. (1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合．p は Minkowski 汎関数であり $\varphi(x) \leqslant |\varphi(x)| \leqslant p(x)$ $(\forall x \in M)$ であるから定理 3.69 より線型汎関数 $\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{R}$ で $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ $(\forall x \in M)$ かつ $\tilde{\varphi}(x) \leqslant p(x)$ $(\forall x \in X)$ を満たすものが取れる．

$$-\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(-x) \leqslant p(-x) = p(x) \quad (\forall x \in X)$$

であるから $|\tilde{\varphi}(x)| \leqslant p(x)$ $(\forall x \in X)$ である．よって $\tilde{\varphi}$ は求める線型汎関数である．

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合．X, M を自然に $\mathbb{R}$ 上の線型空間とみなしたのものを $X_{\mathbb{R}}, M_{\mathbb{R}}$ と表す．このとき $X_{\mathbb{R}} \ni x \mapsto p(x) \in [0, \infty)$ はセミノルムであり，

$$\mathrm{Re}(\varphi) : M_{\mathbb{R}} \ni x \mapsto \mathrm{Re}(\varphi(x)) \in \mathbb{R}$$

は実線型汎関数であるから，(1) より実線型汎関数 $\psi : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ で，

$$\psi(x) = \mathrm{Re}(\varphi(x)) \quad (\forall x \in M_{\mathbb{R}}), \quad |\psi(x)| \leqslant p(x) \quad (\forall x \in X_{\mathbb{R}})$$

を満たすものが取れる．

$$\tilde{\varphi} : X \ni x \mapsto \psi(x) - i\psi(ix) \in \mathbb{C}$$

とおくと，$\psi : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ の実線型性と

$$\tilde{\varphi}(ix) = \psi(ix) + i\psi(x) = i\tilde{\varphi}(x) \quad (\forall x \in X)$$

[*29] 実際，$\{(N_j, \psi_j)\}_{j \in J} \subseteq \Lambda$ を全順序部分集合とすると，その全順序性より $N := \bigcup_{j \in J} N_j$ は M を含む X の部分空間であり，線型汎関数 $\psi : N \to \mathbb{R}$ で $\psi|_{N_j} = \psi_j$ $(\forall j \in J)$ を満たすものが定義できる．このとき $(N, \psi) \in \Lambda$ であり (N, ψ) は $\{(N_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ の上界である．

より, $\widetilde{\varphi} : X \to \mathbb{C}$ は複素線型汎関数である. そして,

$$\widetilde{\varphi}(x) = \mathrm{Re}(\varphi(x)) - i\mathrm{Re}(\varphi(ix)) = \mathrm{Re}(\varphi(x)) + i\mathrm{Im}(\varphi(x)) = \varphi(x) \quad (\forall x \in M)$$

であり, 任意の $x \in X$ に対し, $|\widetilde{\varphi}(x)| = \alpha\widetilde{\varphi}(x)$, $|\alpha| = 1$ を満たす $\alpha \in \mathbb{C}$ を取れば,

$$|\widetilde{\varphi}(x)| = \alpha\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(\alpha x) = \mathrm{Re}(\widetilde{\varphi}(\alpha x)) = \psi(\alpha x) \leqslant p(\alpha x) = p(x)$$

となるので, $\widetilde{\varphi}$ は求める線型汎関数である.

□

定理 3.71 (Hahn-Banach の拡張定理 3)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間, $M \subseteq X$ を部分空間, $\varphi \in M^*$ とする. このとき $\widetilde{\varphi} \in X^*$ で $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ $(\forall x \in M)$ かつ $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$ を満たすものが存在する.

証明. $p : X \ni x \mapsto \|\varphi\|\|x\| \in [0, \infty)$ はセミノルムであり,

$$|\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|\|x\| = p(x) \quad (\forall x \in M)$$

であるから, 定理 3.70 より線型汎関数 $\widetilde{\varphi} : X \to \mathbb{K}$ で,

$$\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x) \quad (\forall x \in M) \tag{3.25}$$

$$|\widetilde{\varphi}(x)| \leqslant p(x) = \|\varphi\|\|x\| \quad (\forall x \in X) \tag{3.26}$$

を満たすものが存在する. (3.26) より $\widetilde{\varphi} \in X^*$ であり $\|\widetilde{\varphi}\| \leqslant \|\varphi\|$ が成り立つ. また (3.25) より,

$$|\varphi(x)| = |\widetilde{\varphi}(x)| \leqslant \|\widetilde{\varphi}\|\|x\| \quad (\forall x \in M)$$

であるので $\|\varphi\| \leqslant \|\widetilde{\varphi}\|$ が成り立つ. よって $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$ が成り立つので, $\widetilde{\varphi}$ は求める線型汎関数である. □

定理 3.72 (Hahn-Banach の拡張定理 4)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間, $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$ とする. このとき $\varphi \in X^*$ で,

$$\varphi(x_0) = \|x_0\|, \quad \|\varphi\| = 1$$

を満たすものが存在する.

証明.

$$\varphi_0 : \mathbb{K}x_0 \ni \alpha x_0 \mapsto \alpha\|x_0\| \in \mathbb{K}$$

は X の部分空間 $\mathbb{K}x_0$ 上の有界線型汎関数であり $\|\varphi_0\| = 1$ である. よって定理 3.71 より $\varphi \in X^*$ で,

$$\|\varphi\| = \|\varphi_0\| = 1, \quad \varphi(x_0) = \varphi_0(x_0) = \|x_0\| \quad (\forall \alpha \in \mathbb{K})$$

を満たすものが取れる. □

定理 3.73 (ノルム空間の第二双対空間への自然な埋め込みのノルム保存性)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とし, 任意の $x \in X$ に対し $\iota(x) \in X^{**}$ を,

$$\iota(x) : X^* \ni \varphi \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{K}$$

と定義する. このとき線型作用素

$$\iota : X \ni x \mapsto \iota(x) \in X^{**}$$

はノルムを保存 (定義 3.41) する.

証明. $\iota : X \to X^{**}$ がノルム減少 (定義 3.41) であることは自明である. 任意の $x \in X$ に対し, 定理 3.72 より $\varphi \in X^*$ で,

$$\|\varphi\| \leqslant 1, \quad |\varphi(x)| = \|x\|$$

を満たすものが取れる. よって,

$$\|x\| = |\varphi(x)| = |\iota(x)(\varphi)| \leqslant \|\iota(x)\| \leqslant \|x\|$$

であるので $\|\iota(x)\| = \|x\|$ である. □

定義 3.74 (ノルム空間の弱位相)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする. 定理 3.73 より X^* は X 上の線型汎関数の分離族 (定義 3.61) である. X 上の線型汎関数の分離族 X^* から誘導される X 上の汎弱位相 (定義 3.62) を X の弱位相と言う.

命題 3.75. X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間, $\varphi : X \to \mathbb{K}$ を線型汎関数とする. このとき次は互いに同値である.

(1) φ はノルム位相に関して連続である.
(2) φ は弱位相に関して連続である.

証明. 命題 3.16 より X^* はノルム位相に関して連続な線型汎関数全体である. 一方, 弱位相の定義 3.74 と定理 3.65 より X^* は弱位相に関して連続な線型汎関数全体でもある. よって成り立つ. □

補題 3.76 (位相線型空間の 0 の凸開近傍と Minkowski 汎関数)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の位相線型空間, $C \subseteq X$ を $0 \in X$ の凸開近傍とし,

$$m(x) := \inf\left\{\lambda \in (0,\infty) : \frac{1}{\lambda}x \in C\right\} \quad (\forall x \in X)$$

とおく. このとき $m : X \ni x \mapsto m(x) \in [0,\infty)$ は Minkowski 汎関数であり,

$$C = \{x \in X : m(x) < 1\} \tag{3.27}$$

が成り立つ.

証明. 任意の $x \in X$ と任意の $\alpha \in (0,\infty)$ に対し,

$$m(\alpha x) = \inf\left\{\lambda \in (0,\infty) : \frac{1}{\lambda}\alpha x \in C\right\} = \inf\left\{\alpha\lambda \in (0,\infty) : \frac{1}{\lambda}x \in C\right\} = \alpha m(x)$$

であり, $m(0x) = m(0) = 0 = 0m(x)$ だから,

$$m(\alpha x) = \alpha m(x) \quad (\forall x \in X, \forall \alpha \in [0,\infty))$$

が成り立つ. 任意の $x, y \in X$ と, $\frac{1}{\lambda}x \in C$, $\frac{1}{\mu}y \in C$ なる任意の $\lambda, \mu \in (0,\infty)$ に対し, C の凸性より,

$$\frac{1}{\lambda+\mu}(x+y) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{\lambda}x + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{\mu}y \in C$$

であるから, $m(x+y) \leqslant \lambda + \mu$ である. よって x, y と λ, μ の任意性より,

$$m(x+y) \leqslant m(x) + m(y) \quad (\forall x, y \in X)$$

が成り立つ. ゆえに m は Minkowski 汎関数である. (3.27) が成り立つことを示す. 任意の $x \in C$ を取る. C は x の開近傍であり $\lim_{\lambda \nearrow 1} \frac{1}{\lambda}x = x$ であるから, $\frac{1}{\lambda}x \in C$ なる $\lambda \in (0,1)$ が存在する. よって $m(x) \leqslant \lambda < 1$ である. また $x \in X$ が $m(x) < 1$ を満たすならば下限の定義より $\frac{1}{\lambda}x \in C$ なる $\lambda \in (0,1)$ が取れるので, $0 \in C$ であることと C の凸性より,

$$x = \lambda\frac{1}{\lambda}x + (1-\lambda)0 \in C$$

である. よって (3.27) が成り立つ. □

定理 3.77 (Hahn-Banach の分離定理)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の位相線型空間, $A \subseteq X$ を凸開集合, $B \subseteq X$ を凸集合とし, $A \cap B = \varnothing$ が成り立つとする. このとき連続線型汎関数 $\varphi : X \to \mathbb{K}$ と $t \in \mathbb{R}$ で,

$$\mathrm{Re}(\varphi(a)) < t \leqslant \mathrm{Re}(\varphi(b)) \quad (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

を満たすものが存在する.

証明. (1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合. 任意の $a_0 \in A$ と $b_0 \in B$ を取り, $c_0 := b_0 - a_0$ とおく.

$$C := A - B + c_0 = \{a - b + c_0 : a \in A, b \in B\}$$

とおくと C は 0 を含む凸集合であり,

$$C = \bigcup_{b \in B} (A - b + c_0)$$

で A は開集合であるから C は開集合である. よって C は 0 の凸開近傍なので補題 3.76 より Minkowski 汎関数 $m : X \to [0, \infty)$ で,

$$C = \{x \in X : m(x) < 1\} \tag{3.28}$$

を満たすものが取れる. $A \cap B = \varnothing$ より $c_0 \notin C$ であるから (3.28) より $1 \leqslant m(c_0)$ なので,

$$\varphi_0 : \mathbb{R}c_0 \ni \alpha c_0 \mapsto \alpha \in \mathbb{R}$$

なる線型汎関数を考えると,

$$\varphi_0(\alpha c_0) = \alpha \leqslant m(\alpha c_0) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$$

となる. よって Hahn-Banach の拡張定理 3.69 より線型汎関数 $\varphi : X \to \mathbb{R}$ で,

$$\varphi(\alpha c_0) = \alpha \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}), \quad \varphi(x) \leqslant m(x) \quad (\forall x \in X) \tag{3.29}$$

を満たすものが取れる. φ が連続であることを示す. 任意の正実数 ε に対し,

$$U_\varepsilon := (\varepsilon C) \cap (-\varepsilon C)$$

とおくと U_ε は $0 \in X$ の開近傍であり, 任意の $x \in U_\varepsilon$ に対し $\frac{1}{\pm\varepsilon}x \in C$ であるから (3.28) と (3.29) より,

$$\frac{1}{\pm\varepsilon}\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{\pm\varepsilon}x\right) \leqslant m\left(\frac{1}{\pm\varepsilon}x\right) < 1$$

である. よって,

$$-\varepsilon < \varphi(x) < \varepsilon \quad (\forall x \in U_\varepsilon)$$

であるから線型汎関数 $\varphi : X \to \mathbb{R}$ は $0 \in X$ において連続であるので φ は連続線型汎関数である. 任意の $a \in A$, $b \in B$ に対し $a - b + c_0 \in C$ なので (3.28) と (3.29) より,

$$\varphi(a) - \varphi(b) + 1 = \varphi(a - b + c_0) \leqslant m(a - b + c_0) < 1 \quad (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

である. よって,

$$\varphi(a) < \varphi(b) \quad (\forall a \in A, \forall b \in B) \tag{3.30}$$

が成り立つ. 今, $t := \sup(\varphi(A))$ とおくと (3.30) より,

$$\varphi(a) \leqslant t \leqslant \varphi(b) \quad (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

が成り立つ. 後は $\varphi(a) < t$ $(\forall a \in A)$ が成り立つことを示せばよい. そこで $t = \varphi(a)$ なる $a \in A$ が存在すると仮定して矛盾を導く. (3.30) より $\varphi(x) > 0$ なる $x \in X$ が取れる. A は a の開近傍であるので十分小さい正実数 δ を取れば, $a + \delta x \in A$ となる. よって,

$$t < t + \delta\varphi(x) = \varphi(a + \delta x) \in \varphi(A)$$

となるが, これは $t = \sup(\varphi(A))$ に矛盾する. よって求める結果を得た.

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合. X を自然に $\mathbb{R}$ 上の位相線型空間とみなしたものを $X_{\mathbb{R}}$ とおくと, (1) より連続実線型汎関数 $\psi : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ と $t \in \mathbb{R}$ で,

$$\psi(a) < t \leqslant \psi(b) \quad (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

を満たすものが取れる. ここで $\varphi : X \to \mathbb{C}$ を,

$$\varphi(x) := \psi(x) - i\psi(ix) \quad (\forall x \in X)$$

とおくと, $\psi : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ の実線型性と

$$\varphi(ix) = \psi(ix) + i\psi(x) = i\varphi(x) \quad (\forall x \in X)$$

より $\varphi : X \to \mathbb{C}$ は複素線型汎関数であり, ψ の連続性より φ は連続である. そして $\mathrm{Re}(\varphi(x)) = \psi(x)$ $(\forall x \in X)$ であるから,

$$\mathrm{Re}(\varphi(a)) < t \leqslant \mathrm{Re}(\varphi(b)) \quad (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

である.

□

系 3.78 (Hahn-Banach の分離定理の系 1)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のセミノルム空間, $\varphi : X \to \mathbb{K}$ を線型汎関数とする. このとき次は互いに同値である.

(1) φ は連続である.
(2) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ は X の閉部分空間である.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. 任意の $x \in \overline{\mathrm{Ker}(\varphi)}$ に対し命題 1.34 より $\mathrm{Ker}(\varphi)$ のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で $x_\lambda \to x$ なるものが取れる. よって φ の連続性と命題 1.50 より $\varphi(x) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \varphi(x_\lambda) = 0$ だから $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ である. ゆえに $\mathrm{Ker}(\varphi)$ は閉であるので (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとする. もし $\mathrm{Ker}(\varphi) = X$ ならば $\varphi = 0$ だから φ は連続である. $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq X$ であるとする. このとき $\varphi(x_0) = 1$ なる $x_0 \in X$ が取れる. $X \backslash \mathrm{Ker}(\varphi)$ は x_0 の開近傍であるから, 命題 3.59 の (3) より x_0 の凸開近傍 V で $V \subseteq X \backslash \mathrm{Ker}(\varphi)$ を満たすものが取れる. このとき $V \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = \varnothing$ であり, V は凸開集合で $\mathrm{Ker}(\varphi)$ は凸集合なので Hahn-Banach の分離定理 3.77 より連続線型汎関数 $\psi : X \to \mathbb{K}$ と $t \in \mathbb{R}$ で,

$$\mathrm{Re}(\psi(x_0)) < t \leqslant \mathrm{Re}(\psi(x)) \quad (\forall x \in \mathrm{Ker}(\varphi)) \tag{3.31}$$

を満たすものが取れる. (3.31) と $\mathrm{Ker}(\varphi)$ が線型部分空間であることから,

$$\psi(x_0) \neq 0, \quad \psi(x) = 0 \quad (\forall x \in \mathrm{Ker}(\varphi)) \tag{3.32}$$

が成り立つことが分かる. $\varphi(x_0) = 1$ より $x - \varphi(x)x_0 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ $(\forall x \in X)$ だから, (3.32) より

$$\varphi(x) = \frac{1}{\psi(x_0)}\psi(x) \quad (\forall x \in X)$$

を得る. よって ψ の連続性より φ は連続であるので (1) が成り立つ. □

系 3.79 (Hahn-Banach の分離定理の系 2)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ をそれぞれ X のセミノルム位相とし, 任意の線型汎関数 $\varphi : X \to \mathbb{K}$ に対し,

$$\varphi \text{ は } \mathcal{O}_1 \text{ に関して連続.} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ は } \mathcal{O}_2 \text{ に関して連続.}$$

が成り立つと仮定する. このとき凸集合 $C \subseteq X$ に対し,

$$C \text{ は } \mathcal{O}_1 \text{ に関して閉.} \quad \Leftrightarrow \quad C \text{ は } \mathcal{O}_2 \text{ に関して閉.}$$

が成り立つ.

証明. C が $\mathcal{O}_1$ に関して閉であるとして $\mathcal{O}_2$ に関しても閉であることを示せばよい. そのためには任意の $x_0 \in X \backslash C$ を取り, $X \backslash C$ が $\mathcal{O}_2$ に関して x_0 の近傍であることを示せばよい. $X \backslash C \in \mathcal{O}_1$ だから命題 3.59 の (3) より $\mathcal{O}_1$ に関する x_0 の凸開近傍 V で $V \subseteq X \backslash C$ なるものが取れる. よって Hahn-Banach の分離定理 3.77 より $\mathcal{O}_1$ に関して連続な線型汎関数 $\varphi : X \to \mathbb{K}$ と $t \in \mathbb{R}$ で,

$$\mathrm{Re}(\varphi(x_0)) < t \leqslant \mathrm{Re}(\varphi(x)) \quad (\forall x \in C)$$

を満たすものが取れる. これより,

$$F := \{x \in X : t \leqslant \mathrm{Re}(\varphi(x))\}$$

とおけば,

$$x_0 \in X\backslash F \subseteq X\backslash C$$

であるので $X\backslash F \in \mathcal{O}_2$ を示せばよいが, 仮定より φ は $\mathcal{O}_2$ に関しても連続であるので F は $\mathcal{O}_2$ に関して閉集合である. よって $X\backslash F \in \mathcal{O}_2$ である. □

定義 3.80 (凸集合のフェイス)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし, $C \subseteq X$ を凸集合とする. C の空でない部分集合 F が次の条件を満たすとき F を C のフェイスと言う.

(1) F は凸集合である.
(2) $x, y \in C$ がある $t \in (0,1)$ に対し $(1-t)x + ty \in F$ を満たすならば $x, y \in F$.

定義 3.81 (凸集合の端点)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし, $C \subseteq X$ を凸集合とする. $x \in C$ が C の端点であるとは一点集合 $\{x\}$ が C のフェイスであることを言う.

補題 3.82. X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, $C \subseteq X$ を凸集合, F を C のフェイス, F' を F のフェイスとする. このとき F' は C のフェイスである.

証明. $x, y \in C$ がある $t \in (0,1)$ に対し $(1-t)x + ty \in F'$ を満たすとする. $F' \subseteq F$ より $(1-t)x + ty \in F$ であり F は C のフェイスだから $x, y \in F$ である. よって $x, y \in F$, $(1-t)x + ty \in F'$ であり F' は F のフェイスだから $x, y \in F'$ である. ゆえに F' は C のフェイスである. □

定義 3.83 (凸包)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間, E を X の空でない部分集合とする.

$$\mathrm{conv}(E) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j x_j : n \in \mathbb{N},\ x_1, \cdots, x_n \in E,\ t_1, \cdots, t_n \in [0,1],\ \sum_{j=1}^{n} t_j = 1 \right\}$$

とおくと $\mathrm{conv}(E)$ は E を含む最小の凸集合である. これを E の凸包と言う.

定理 3.84 (Krein-Milman の端点定理)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のセミノルム空間とし, $C \subseteq X$ をコンパクトな凸集合とする. このとき C の端点全体 $\mathrm{ext}(C)$ は空ではない. そして

$$\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(C))} = C$$

が成り立つ.

証明. (1) まず $\mathrm{ext}(C) \neq \varnothing$ を示す. C のコンパクトなフェイス全体に集合の逆包含関係による順序 (定義 1.3) を入れたものは帰納的順序集合である. 実際, $\{F_j\}_{j \in J}$ を全順序部分集合とするとその全順序性と各 F_j がコンパクトかつ閉である (命題 1.44) ことにより $\bigcap_{j \in J} F_j \neq \varnothing$ である. そして明らかに $\bigcap_{j \in J} F_j$ は C のフェイスでありコンパクトである. ゆえに $\bigcap_{j \in J} F_j$ は全順序部分集合 $\{F_j\}_{j \in J}$ の上界である. よって Zorn の補題 1.12 よりこの順序集合は極大元 F を持つ. F が一点集合であることを示せばよい. そこで F が異なる二点 x_1, x_2 を持つと仮定して矛盾を導く. このとき命題 3.59 の (3) より x_1 を含み, x_2 を含まない凸開集合が取れるので, Hahn-Banach の分離定理 3.77 より連続線型汎関数 $\varphi : X \to \mathbb{K}$ と $t \in \mathbb{R}$ で,

$$\mathrm{Re}(\varphi(x_1)) < t \leqslant \mathrm{Re}(\varphi(x_2)) \tag{3.33}$$

を満たすものが取れる. $X \ni x \mapsto \mathrm{Re}(\varphi(x)) \in \mathbb{R}$ の連続性と F のコンパクト性より,

$$s := \min\{\mathrm{Re}(\varphi(x)) : x \in F\}$$

が存在し,

$$F_0 := \{x \in F : \mathrm{Re}(\varphi(x)) = s\}$$

とおけば F_0 は F のコンパクト[*30]なフェイスである. よって補題 3.82 より F_0 は C のコンパクトなフェイスなので F の極大性より $F_0 = F$ である. これより,

$$\mathrm{Re}(\varphi(x_1)) = s, \quad \mathrm{Re}(\varphi(x_2)) = s$$

[*30] コンパクト集合に含まれる閉集合はコンパクトであること (命題 1.42) に注意.

となり, (3.33) に矛盾する. ゆえに F は一点集合なので $\mathrm{ext}(C) \neq \varnothing$ である.

(2) C は凸かつ閉 (命題 1.44) なので,

$$\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(C))} \subseteq C \tag{3.34}$$

である. この逆の包含関係を示す. $x_0 \in C \backslash \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(C))}$ が存在すると仮定して矛盾を導けばよい. 命題 3.59 の (3) より x_0 の凸開近傍で凸集合 $\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(C))}$ と交わらないものが存在するので Hahn-Banach の分離定理 3.77 より連続線型汎関数 $\varphi : X \to \mathbb{K}$ と $t \in \mathbb{R}$ で,

$$\mathrm{Re}(\varphi(x_0)) < t \leqslant \mathrm{Re}(\varphi(x)) \ \ (\forall x \in \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(C))}) \tag{3.35}$$

を満たすものが取れる. $X \ni x \mapsto \mathrm{Re}(\varphi(x)) \in \mathbb{R}$ は連続であり C はコンパクトであるから,

$$s := \min\{\mathrm{Re}(\varphi(x)) : x \in C\} \tag{3.36}$$

が存在し,

$$F := \{x \in C : \mathrm{Re}(\varphi(x)) = s\}$$

とおけば F は C のコンパクトなフェイスである. 特にコンパクトな凸集合なので (1) より $\mathrm{ext}(F) \neq \varnothing$ である. 補題 3.82 より $\mathrm{ext}(F) \subseteq \mathrm{ext}(C)$ だから任意の $x \in \mathrm{ext}(F)$ に対して (3.35) より,

$$\mathrm{Re}(\varphi(x_0)) < t \leqslant \mathrm{Re}(\varphi(x)) = s$$

となる. しかし $x_0 \in C$ であるから (3.36) より $s \leqslant \mathrm{Re}(\varphi(x_0))$ である. よって矛盾する. ゆえに (3.34) の逆の包含関係が成り立つ.

□

3.6 Fréchet 空間における 一様有界性定理, 開写像定理, 閉グラフ定理

定義 3.85 (位相線型空間の Cauchy 列)**.** 位相線型空間 (定義 3.54) X の点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が Cauchy 列であるとは, $0 \in X$ の任意の近傍 U に対し, $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$x_n - x_m \in U \ \ (\forall n, m \geqslant n_0)$$

が成り立つことを言う.

定義 3.86 (Fréchet 空間)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のセミノルム空間 (定義 3.57) とする. X が Fréchet 空間であるとは次が成り立つことを言う.

(1) X のセミノルム位相を誘導するセミノルムの分離族 (定義 3.56) として可算なものが取れる.
(2) X の任意の Cauchy 列 (定義 3.85) が収束する.

例 3.87 (Banach 空間は Fréchet 空間)**.** $(X, \|\cdot\|)$ を Banach 空間とする. X は例 3.60 で述べたようにセミノルムの分離族 $\{\|\cdot\|\}$ が誘導するセミノルム位相によるセミノルム空間である. $\{\|\cdot\|\}$ は可算集合であり, X の任意の Cauchy 列は収束するので X は Fréchet 空間である.

定理 3.88 (Fréchet 空間に適合する距離)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の Fréchet 空間とし, $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を X のセミノルム位相を定めるセミノルムの分離族とする. そして $d : X \times X \to [0, \infty)$ を,

$$d(x, y) := \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)} \ \ (\forall x, y \in X)$$

として定義する. このとき,

(1) $d : X \times X \to [0, \infty)$ は X 上の距離関数であり, 平行移動不変性

$$d(x-z, y-z) = d(x, y) \ \ (\forall x, y, z \in X)$$

を持つ.

(2) 距離関数 d に関する $0 \in X$ 中心, 半径 $r \in (0,\infty)$ の開球

$$B(0,r) = \{x \in X : d(x,0) < r\}$$

は X の絶対凸 (定義 3.58) な開集合である.

(3) $\{B(0,r)\}_{r\in(0,\infty)}$ は $0 \in X$ の基本近傍系 (定義 1.55) である.

(4) Fréchet 空間 X の位相は d による距離位相に一致する.

(5) Fréchet 空間 X は距離 d に関して完備な距離空間である.

証明. (1) 任意の $x,y,z \in X$ に対し $d(x,y) = d(y,x), d(x-z,y-z) = d(x,y)$ であることは自明である. $d(x,y) = 0$ ならば任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $p_n(x-y) = 0$ であるので $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がセミノルムの分離族 (定義 3.56) であることから $x = y$ である. 後は任意の $x,y,z \in X$ に対し $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ が成り立つことを示せばよい.

$$[0,\infty) \ni t \mapsto \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t} \in [0,1) \tag{3.37}$$

は狭義単調増加であるから, 任意の $x,y,z \in X$, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\frac{p_n(x-z)}{1+p_n(x-z)} \leqslant \frac{p_n(x-y)+p_n(y-z)}{1+p_n(x-y)+p_n(y-z)} \leqslant \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} + \frac{p_n(y-z)}{1+p_n(y-z)}$$

である. よって任意の $x,y,z \in X$ に対し,

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \max_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\frac{p_n(x-z)}{1+p_n(x-z)} \leqslant \max_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} + \max_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\frac{p_n(y-z)}{1+p_n(y-z)} \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

である.

(2) 任意の正実数 r に対し,

$$\begin{aligned} B(0,r) &= \left\{x \in X : \max_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} < r\right\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in X : \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} < nr\right\} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : (1-nr)p_n(x) < nr\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}, nr<1} \left\{x \in X : p_n(x) < \frac{nr}{1-nr}\right\} \end{aligned}$$

であり, $nr < 1$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ は有限個でそのような各 n に対し $\{x \in X : p_n(x) < \frac{nr}{1-nr}\}$ は絶対凸開集合であるので, $B(0,r)$ は絶対凸開集合である.

(3) $0 \in X$ の任意の近傍 U に対し, 命題 3.59 の (3) より正実数 ε と $N \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$\bigcap_{n=1}^{N} \{x \in X : p_n(x) < \varepsilon\} \subseteq U$$

となる.

$$r := \frac{1}{N}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \in (0,\infty)$$

とおけば, (3.37) が狭義単調増加であることから,

$$\begin{aligned} x \in B(0,r) \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{n}\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} < r \quad (\forall n \in \{1,\cdots,N\}) \quad \Rightarrow \quad p_n(x) < \varepsilon \quad (\forall n \in \{1,\cdots,N\}) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{n=1}^{N} \{x \in X : p_n(x) < \varepsilon\} \end{aligned}$$

となるので,

$$B(0,r) \subseteq \bigcap_{n=1}^{N} \{x \in X : p_n(x) < \varepsilon\} \subseteq U$$

である. ゆえに $\{B(0,r)\}_{r\in(0,\infty)}$ は $0 \in X$ の基本近傍系である.

(4) Fréchet 空間 X の位相を $\mathcal{O}_X$, 距離関数 d による距離位相を $\mathcal{O}_d$ とおく．$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_d$ を示すには恒等写像 $\mathrm{id} : (X, \mathcal{O}_X) \ni x \mapsto x \in (X, \mathcal{O}_d)$ が同相写像 (定義 1.147) であることを示せばよいので, 命題 1.50 より X のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $x \in X$ に対し,

$$x_\lambda \to x \ \ (\text{in } \mathcal{O}_X) \quad \Leftrightarrow \quad x_\lambda \to x \ \ (\text{in } \mathcal{O}_d) \tag{3.38}$$

が成り立つことを示せばよいが, 位相線型空間の加法の連続性と d の平行移動不変性より,

$$\begin{aligned} x_\lambda \to x \ \ (\text{in } \mathcal{O}_X) \quad &\Leftrightarrow \quad x_\lambda - x \to 0 \ \ (\text{in } \mathcal{O}_X), \\ x_\lambda \to x \ \ (\text{in } \mathcal{O}_d) \quad &\Leftrightarrow \quad x_\lambda - x \to 0 \ \ (\text{in } \mathcal{O}_d) \end{aligned}$$

であり (3) より,

$$x_\lambda - x \to 0 \ \ (\text{in } \mathcal{O}_X) \quad \Leftrightarrow \quad x_\lambda - x \to 0 \ \ (\text{in } \mathcal{O}_d)$$

だから, (3.38) は成り立つ.

(5) (3) より距離空間 (X, d) の Cauchy 列は Fréchet 空間 X の Cauchy 列であるから Fréchet 空間の定義 3.86 より収束する．よって距離空間 (X, d) は完備である.

□

定理 3.89 (Baire のカテゴリ定理)**.** (X, d) を完備な距離空間とし, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の稠密な開集合の列とする．このとき X の部分集合 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ は稠密である.

証明. 命題 1.32 より任意の $x_0 \in X$ と任意の正実数 r_0 を取り,

$$B(x_0, r_0) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \neq \varnothing \tag{3.39}$$

が成り立つことを示せばよい. $x_0 \in X = \overline{V_1}$ であるから命題 1.32 より $B(x_0, r_0) \cap V_1$ は空でない開集合なので,

$$CB(x_1, r_1) \subseteq B(x_0, r_0) \cap V_1, \quad r_1 \leqslant \frac{r_0}{2}$$

[*31]を満たす $x_1 \in X$ と正実数 r_1 が取れる．$x_1 \in X = \overline{V_2}$ であるから命題 1.32 より $B(x_1, r_r) \cap V_1$ は空でない開集合なので,

$$CB(x_2, r_2) \subseteq B(x_1, r_1) \cap V_2, \quad r_2 \leqslant \frac{r_0}{2^2}$$

を満たす $x_2 \in X$ と正実数 r_2 が取れる．同様の操作を続けていけば X の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と正実数の列 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$CB(x_n, r_n) \subseteq B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap V_n, \quad r_n \leqslant \frac{r_0}{2^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{3.40}$$

を満たすものができる. (3.40) より,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} CB(x_n, r_n) \subseteq B(x_0, r_0) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$$

であるから (3.39) を示すには,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} CB(x_n, r_n) \neq \varnothing \tag{3.41}$$

を示せばよい. (3.40) より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $x_{n+1} \in B(x_n, r_n)$ であるから, $n > m$ なる任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対し,

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_{m+1}, x_m) + d(x_{m+2}, x_{m+1}) + \cdots + d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^m}$$

である．よって $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるので (X, d) の完備性より $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in X$ が存在する．任意の $n \in \mathbb{N}$, 任意の正実数 ε に対し, $x_m \in B(x, \varepsilon)$ なる $m \geqslant n$ が取れて, (3.40) より

$$x_m \in B(x, \varepsilon) \cap CB(x_n, r_n)$$

[*31] $CB(x_1, r_1)$ は x_1 中心, 半径 r_1 の閉球.

であるから,

$$B(x,\varepsilon)\cap CB(x_n,r_n)\neq\varnothing\quad(\forall n\in\mathbb{N},\forall\varepsilon\in(0,\infty))$$

である. よって命題 1.32 より,

$$x\in\overline{CB(x_n,r_n)}=CB(x_n,r_n)\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

であるから (3.41) が成り立つ. □

系 3.90 (Baire のカテゴリ定理の系)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の Fréchet 空間, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の閉集合の列とし, $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$ が成り立つとする. このとき $F_n^\circ\neq\varnothing$ なる $n\in\mathbb{N}$ が存在する.

証明. 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $F_n^\circ=\varnothing$ であると仮定すると, $(X\backslash F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は X の稠密な開集合の列である. 定理 3.88 より X は完備距離空間であるから, Baire のカテゴリ定理 3.89 より $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X\backslash F_n)$ は X の稠密な部分集合である. しかし,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X\backslash F_n)=X\backslash\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n=\varnothing$$

であるから矛盾する. □

命題 3.91. X を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし, $C\subseteq X$ を絶対凸 (定義 3.58) な集合とし, $0<r_1\leqslant r_2<\infty$ とする. このとき,

$$r_1C\subseteq r_2C$$

が成り立つ.

証明. 任意の $x\in r_1C$ に対し $\frac{1}{r_1}x\in C$ であり, $\frac{r_1}{r_2}\in(0,1]$ であるから,

$$\frac{1}{r_2}x=\frac{r_1}{r_2}\frac{1}{r_1}x\in C$$

である. ゆえに $x\in r_2C$ である. □

定義 3.92 (セミノルム空間の部分集合の有界性)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のセミノルム空間とする. X の空でない部分集合 B が有界であるとは, 任意の絶対凸 (定義 3.58) な開集合 V に対し, $B\subseteq rV$ なる正実数 r が存在することを言う.

命題 3.93 (セミノルム空間の部分集合の有界性の特徴付け)**.** X を $\mathbb{K}$ 上のセミノルム空間とし, $\mathcal{P}$ を X のセミノルム位相を誘導するセミノルムの分離族 (定義 3.57) とする. このとき空でない部分集合 $B\subseteq X$ に対し次は互いに同値である.

(1) B は有界 (定義 3.92) である.
(2) 任意の $p\in\mathcal{P}$ に対しある正実数 r が存在し $B\subseteq(p<r)$ が成り立つ (ただし $(p<r)=\{x\in X: p(x)<r\}$).

証明. (1) ⇒ (2) を示す. (1) が成り立つとする. 任意の $p\in\mathcal{P}$ に対し命題 3.59 の (3) より $(p<1)$ は絶対凸な開集合であるから, 有界性の定義 3.92 よりある正実数 r が存在し,

$$B\subseteq r(p<1)=(p<r)$$

となる. よって (2) が成り立つ.
(2) ⇒ (1) を示す. (2) が成り立つとする. $V\subseteq X$ を任意の絶対凸開集合とする. 絶対凸性より $0\in V$ であるから, 命題 3.59 の (3) より有限個の $p_1,\cdots,p_n\in\mathcal{P}$ と正実数 ε が存在し,

$$\bigcap_{j=1}^n(p_j<\varepsilon)\subseteq V$$

となる. (2) が成り立つことから, 十分大きい正実数 r を取れば,

$$B\subseteq(p_j<r\varepsilon)=r(p_j<\varepsilon)\quad(\forall j\in\{1,\cdots,n\})$$

となる. ゆえに,

$$B\subseteq\bigcap_{j=1}^n r(p_j<\varepsilon)\subseteq rV$$

であるから (1) が成り立つ. □

注意 3.94. $(X, \|\cdot\|)$ を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする. X はセミノルムの分離族 $\{\|\cdot\|\}$ により誘導されるセミノルム位相によるセミノルム空間とみなせる (例 3.60 を参照). X の部分集合 B に対し, B がセミノルム空間 X の有界集合である (定義 3.92) ことは, 命題 3.93 より, ある正実数 r に対し,

$$B \subseteq \{x \in X : \|x\| < r\}$$

となることと同値であるので, B がノルム $\|\cdot\|$ による距離に関して有界集合 (定義 1.119) であることと同値である.

補題 3.95. X を $\mathbb{K}$ 上のセミノルム空間とする. このとき $0 \in X$ の任意の近傍 V に対し, $0 \in X$ の絶対凸開近傍 W で, $\overline{W} \subseteq V$ を満たすものが存在する.

証明. 加法 $X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$ の $(0,0)$ における連続性と命題 3.59 の (3) より, $0 \in X$ の絶対凸開近傍 W で,

$$W + W \subseteq V$$

を満たすものが取れる.

$$W \cap (X \backslash V - W) = \varnothing$$

であり, W が開集合であることから,

$$X \backslash V - W = \bigcup_{x \in X \backslash V} (x - W)$$

は開集合なので,

$$\overline{W} \cap (X \backslash V - W) = \varnothing$$

である. ゆえに $\overline{W} \cap X \backslash V = \varnothing$ なので $\overline{W} \subseteq V$ である. □

定理 3.96 (一様有界性定理)**.** X, Y をそれぞれ $\mathbb{K}$ 上の Fréchet 空間とし, $\{T_j\}_{j \in J}$ を $X \to Y$ の連続な線型作用素の族とする. そして任意の $x \in X$ に対し $\{T_j x\}_{j \in J}$ が Y の有界集合 (定義 3.92) であるとする. このとき $0 \in Y$ の任意の近傍 V に対し, x の近傍 U が存在し,

$$T_j(U) \subseteq V \quad (\forall j \in J)$$

が成り立つ.

証明. $0 \in Y$ の任意の近傍 V に対し補題 3.95 より $0 \in Y$ の絶対凸開近傍 W で

$$\overline{W} \subseteq V \tag{3.42}$$

を満たすものが取れる.

$$E := \bigcap_{j \in J} T_j^{-1}(\overline{W}) \tag{3.43}$$

とおく. 任意の $x \in X$ に対し $\{T_j x\}_{j \in J}$ は有界集合 (定義 3.92) であり W は絶対凸開集合なので, 十分大きい $n \in \mathbb{N}$ を取れば,

$$\{T_j x\}_{j \in J} \subseteq nW$$

となる. (3.43) よりこれは $\frac{1}{n}x \in E$ を意味するので,

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nE \tag{3.44}$$

が成り立つ. $\overline{W}$ は絶対凸閉集合であり, 各 $T_j : X \to Y$ は連続線型作用素であるから $T_j^{-1}(\overline{W})$ は絶対凸閉集合である. よって (3.43) より E は絶対凸閉集合である. (3.44) と Baire のカテゴリ定理の系 3.90 よりある $n \in \mathbb{N}$ に対し $(nE)^\circ \neq \varnothing$ である. $(nE)^\circ = nE^\circ$ であるから $E^\circ \neq \varnothing$ である. 任意の $x \in E^\circ$ を取る. E が絶対凸であることから,

$$0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x \in \frac{1}{2}E^\circ - \frac{1}{2}x \subseteq E$$

であり, $\frac{1}{2}E^\circ - \frac{1}{2}x$ は開集合なので $0 \in E^\circ$ である. ゆえに $0 \in X$ の近傍 U で $U \subseteq E$ なるものが存在する. (3.43) より,

$$T_j(U) \subseteq \overline{W} \quad (\forall j \in J)$$

であるから (3.42) より,

$$T_j(U) \subseteq V \quad (\forall j \in J)$$

である. □

定理 3.97 (一様有界性定理の特別な場合)**.** X を $\mathbb{K}$ 上の Fréchet 空間, Y を $\mathbb{K}$ 上の Banach 空間とし, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $X \to Y$ の連続線型写像の列とする. そして各 $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x \in Y$$

が存在するとする. このとき $T : X \ni x \mapsto Tx \in Y$ は連続線型写像である.

証明. $T : X \ni x \mapsto Tx \in Y$ が線型作用素であることは明らかである. T の連続性を示す. 任意の $x \in X$ に対し $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ は Banach 空間 Y の収束列なので, $\{T_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Y のノルムによる距離に関して有界集合である. よって注意 3.94 で述べたように $\{T_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ はセミノルム空間としての Y の有界集合である. $0 \in Y$ の任意の近傍 V を取り, $\overline{W} \subseteq V$ を満たす $0 \in Y$ の近傍 W を取る. Banach 空間は Fréchet 空間であるから一様有界性定理 3.96 より $0 \in X$ の近傍 U が存在し,

$$T_n(U) \subseteq W \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ. よって任意の $x \in U$ に対し $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x \in \overline{W}$ であるから,

$$T(U) \subseteq \overline{W} \subseteq V$$

が成り立つ. これより T は $0 \in X$ において連続であるので, T の線型性より T は各点で連続である. ゆえに $T : X \to Y$ は連続線型写像である. □

定義 3.98 (開写像)**.** X, Y を位相空間とする. $f : X \to Y$ が開写像であるとは, X の任意の開集合 U に対し $f(U)$ が Y の開集合であることを言う.

定理 3.99 (開写像定理)**.** X, Y を $\mathbb{K}$ 上の Fréchet 空間とし, $T : X \to Y$ を全射連続線型写像とする. このとき T は開写像である.

証明. (1) $0 \in X$ の任意の近傍 U に対し $T(U)$ が $0 \in Y$ の近傍であることを示す. 定理 3.88 における距離関数 $d : X \times X \to [0, \infty)$ を考え,

$$CB(0, r) = \{x \in X : d(x, 0) \leqslant r\} \subseteq U \tag{3.45}$$

を満たす正実数 r を取り,

$$B_n := B\left(0, \frac{r}{2^n}\right) = \left\{x \in X : d(x, 0) < \frac{r}{2^n}\right\} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおく. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し B_n は $0 \in X$ の開近傍であるから, 任意の $x \in X$ に対し $\frac{1}{k}x \in B_n$ を満たす $k \in \mathbb{N}$ が存在するので,

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} kB_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ. $T : X \to Y$ は全射であるから,

$$Y = T(X) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} kT(B_n) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} k\overline{T(B_n)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

である. よって Baire のカテゴリ定理の系 3.90 より,

$$\overline{T(B_n)}^\circ \neq \varnothing \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ. 定理 3.88 の (2) より各 B_n は絶対凸 (定義 3.58) であるから $\overline{T(B_n)}$ も絶対凸である. よって任意の $y \in \overline{T(B_n)}^\circ$ に対し,

$$0 = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y \in \frac{1}{2}\overline{T(B_n)}^\circ - \frac{1}{2}y \subseteq \overline{T(B_n)}$$

であり, $\frac{1}{2}\overline{T(B_n)}^\circ - \frac{1}{2}y$ は開集合であるから,

$$0 \in \overline{T(B_n)}^\circ \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{3.46}$$

が成り立つ. これより $T(U)$ が $0 \in Y$ の近傍であることを示すには,

$$\overline{T(B_1)} \subseteq T(U) \tag{3.47}$$

が成り立つことを示せばよい. そこで任意の $y_1 \in \overline{T(B_1)}$ を取り $y_1 \in T(U)$ が成り立つことを示す. (3.46) より $y_1 - \overline{T(B_2)}$ は $y_1 \in \overline{T(B_1)}$ の近傍であるので, 命題 1.32 より,

$$\left(y_1 - \overline{T(B_2)}\right) \cap T(B_1) \neq \varnothing$$

である. よって $y_2 \in \overline{T(B_2)}$ と $x_1 \in B_1$ で,

$$y_1 - y_2 = Tx_1$$

を満たすものが取れる. (3.46) より $y_2 - \overline{T(B_3)}$ は $y_2 \in \overline{T(B_2)}$ の近傍であるので, 命題 1.32 より,

$$\left(y_2 - \overline{T(B_3)}\right) \cap T(B_2) \neq \varnothing$$

である. よって $y_3 \in \overline{T(B_3)}$ と $x_2 \in B_2$ で,

$$y_2 - y_3 = Tx_2$$

を満たすものが取れる. 同様の操作を続けていけば, Y の点列 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と X の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$y_n - y_{n+1} = Tx_n, \quad y_n \in \overline{T(B_n)}, \quad x_n \in B_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{3.48}$$

を満たすものができる. 定理 3.88 より $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $0 \in X$ の基本近傍系 (定義 1.55) であり $T : X \to Y$ は連続であるから $y_n \in \overline{T(B_n)}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ は,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

を意味し[*32], (3.48) より,

$$y_1 - y_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} Tx_k \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから,

$$y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n \tag{3.49}$$

が成り立つ. 定理 3.88 より d は平行移動不変であるから, $N > M$ を満たす任意の $N, M \in \mathbb{N}$ に対し,

$$d\left(\sum_{n=1}^{N} x_n,\ \sum_{n=1}^{M} x_n\right) \leqslant d\left(\sum_{n=M+1}^{N} x_n,\ 0\right) \leqslant \sum_{n=M+1}^{N} d(x_n, 0)$$

が成り立つ. (3.48) より $x_n \in B_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ なので

$$d(x_n, 0) < \frac{r}{2^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{3.50}$$

*32 補題 3.95 より $0 \in Y$ の基本近傍系として閉集合からなるものが取れることに注意.

だから, $N > M$ を満たす任意の $N, M \in \mathbb{N}$ に対し,

$$d\left(\sum_{n=1}^{N} x_n,\ \sum_{n=1}^{M} x_n\right) \leqslant \sum_{n=M+1}^{N} d(x_n, 0) \leqslant \sum_{n=M+1}^{N} \frac{r}{2^n} \leqslant \frac{r}{2^M}$$

となる. よって $(\sum_{n=1}^{N} x_n)_{N\in\mathbb{N}}$ は X の Cauchy 列なので収束する. そこで,

$$x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X \tag{3.51}$$

とおく.

$$\left| d(x,0) - d\left(\sum_{n=1}^{N} x_n,\ 0\right)\right| \leqslant d\left(x,\ \sum_{n=1}^{N} x_n\right) \to 0 \ \ (N \to \infty)$$

であるから,

$$d(x,0) = \lim_{N\to\infty} d\left(\sum_{n=1}^{N} x_n,\ 0\right) \tag{3.52}$$

である. ここで d の平行移動不変性と (3.50) より,

$$d\left(\sum_{n=1}^{N} x_n,\ 0\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} d(x_n, 0) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{r}{2^n} = r \ \ (\forall N \in \mathbb{N})$$

であるから (3.52) より $d(x,0) \leqslant r$ である. よって (3.45) より $x \in CB(0,r) \subseteq U$ であり, (3.49), (3.51) と $T : X \to Y$ の連続性より,

$$y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = Tx \in T(U)$$

である. これより (3.47) が成り立つので $T(U)$ は $0 \in Y$ の近傍である.

(2) X の任意の開集合 U に対し $T(U)$ が Y の開集合であることを示す. 任意の $x \in X$ を取り, $x + U_0 \subseteq U$ を満たす $0 \in X$ の近傍 U_0 を取る.

$$Tx + T(U_0) = T(x + U_0) \subseteq T(U)$$

であり, (1) より $T(U_0)$ は $0 \in Y$ の近傍であるから $T(U)$ は Tx の近傍である. $x \in U$ は任意なので $T(U)$ は開集合である.

□

系 3.100. X, Y を $\mathbb{K}$ 上の Fréchet 空間とし, $T : X \to Y$ を連続な線型同型写像とする. このとき逆写像 $T^{-1} : Y \to X$ も連続である.

証明. 開写像定理 3.99 より X の任意の開集合 U に対し $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ は Y の開集合なので $T^{-1} : Y \to X$ は連続である. □

命題 3.101. X, Y をそれぞれ $\mathbb{K}$ 上の Fréchet 空間とする. 次が成り立つ.

(1) X の任意の閉部分空間 M は X の相対位相により Fréchet 空間である.
(2) 直積線型空間 $X \times Y$ は直積位相により Fréchet 空間である.

証明. X, Y のセミノルム位相を誘導する可算なセミノルムの分離族をそれぞれ $\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y$ とおく.

(1) 任意の $p \in \mathcal{P}_X$ に対し p の M 上への制限

$$p|_M : M \ni x \mapsto p(x) \in [0, \infty)$$

は M 上のセミノルムであり,

$$\mathcal{P}_M := \{p|_M : p \in \mathcal{P}_X\}$$

は M を分離するセミノルムの可算集合である．そして命題 3.59 より $\mathcal{P}_M$ が誘導する M 上のセミノルム位相は明らかに X の相対位相である．$\mathcal{P}_M$ によるセミノルム空間 M の Cauchy 列は X の Cauchy 列でもあるので X において収束し，M は閉であるからその収束点は M に属する．ゆえに M は X の相対位相で Fréchet 空間である．

(2) 任意の $p_X \in \mathcal{P}_X, p_Y \in \mathcal{P}_Y$ に対し，

$$p_X + p_Y : X \times Y \ni (x, y) \mapsto p_X(x) + p_Y(y) \in [0, \infty)$$

とおくと $p_X + p_Y$ は $X \times Y$ 上のセミノルムであり，

$$\mathcal{P}_{X\times Y} := \{p_X + p_Y : p_X \in \mathcal{P}_X, p_Y \in \mathcal{P}_Y\}$$

は $X \times Y$ を分離するセミノルムの可算集合である．そして命題 3.59 と命題 1.76 より $\mathcal{P}_{X\times Y}$ が誘導する $X \times Y$ 上のセミノルム位相は直積位相に一致する．$\mathcal{P}_{X\times Y}$ によるセミノルム空間 $X \times Y$ の Cauchy 列 $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，明らかに $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はそれぞれ X, Y の Cauchy 列であるから $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in X, y = \lim_{n\to\infty} y_n \in Y$ が存在する．よって $(x, y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)$ だから $X \times Y$ は直積位相で Fréchet 空間である．

□

定理 3.102 (閉グラフ定理)**.** X, Y をそれぞれ $\mathbb{K}$ 上の Fréchet 空間とし，$T : X \to Y$ を線型写像とする．そして T のグラフを

$$G(T) := \{(x, Tx) : x \in X\} \subseteq X \times Y$$

とおく．このとき次は互いに同値である．

(1) $T : X \to Y$ は連続である．
(2) $G(T)$ は $X \times Y$ の閉部分空間である．

証明. (1) ⇒ (2) を示す．(1) が成り立つとする．命題 1.58 より任意の $(x, y) \in \overline{G(T)}$ に対し $G(T)$ の点列 $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $(x, y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, Tx_n)$ を満たすものが取れる．このとき $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ であるから T の連続性より $Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = y$ である．よって $(x, y) = (x, Tx) \in G(T)$ だから $G(T)$ は閉部分空間である．
(2) ⇒ (1) を示す．(2) が成り立つとする．

$$\pi_1 : G(T) \ni (x, Tx) \mapsto x \in X, \quad \pi_2 : G(T) \ni (x, Tx) \mapsto Tx \in Y$$

とおくと，π_1 は連続な線型同型写像であり，π_2 は連続線型写像である．命題 3.101 より $G(T)$ は Fréchet 空間であるから開写像定理の系 3.100 より $\pi_1^{-1} : X \ni x \mapsto (x, Tx) \in G(T)$ は連続線型写像である．よって，

$$T = \pi_2\pi_1^{-1} : X \ni x \mapsto Tx \in Y$$

は連続線型写像である． □

4 Euclid 空間上の関数の微分と偏微分, 複素数体上の関数の複素微分, 冪級数, 初等関数

4.1 微分の定義, チェインルール

定義 4.1 (微分の定義)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$ を開集合とする. 関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ が $a \in \Omega$ において微分可能であるとは, ある $A \in M_{N\times M}(\mathbb{R})$ に対し,

$$\Omega \ni x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{|x-a|} & (x \neq a) \\ 0 & (x = a) \end{cases} \in \mathbb{R}^N \text{ が } x = a \text{ において連続.} \tag{4.1}$$

が成り立つことを言う. このとき $A \in M_{N\times M}(\mathbb{R})$ は一意的に定まる (次の命題 4.2 を参照). そこでこの A を $f'(a) \in M_{N\times M}(\mathbb{R})$ と表し, f の a における微分と言う. $M = 1$ の場合は Ω として半開区間や閉区間も考える. この場合, 端の点における微分は片側微分と言う.

命題 4.2. (4.1) を満たす $A \in M_{N\times M}(\mathbb{R})$ は存在するならば唯一つである.

証明. $A, A' \in M_{N\times M}(\mathbb{R})$ が共に (4.1) を満たすとすると, 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し $\delta \in (0,\infty)$ が存在し,

$$\frac{|f(a+h)-f(a)-Ah|}{|h|} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{|f(a+h)-f(a)-A'h|}{|h|} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall h \in \mathbb{R}^M : 0 < |h| < \delta)$$

が成り立つ. よって三角不等式より,

$$\frac{|(A-A')h|}{|h|} < \varepsilon \quad (\forall h \in \mathbb{R}^M : 0 < |h| < \delta)$$

が成り立つので, $(e_1, \cdots, e_M)$ を $\mathbb{R}^M$ の標準基底 (定義 2.55) とすると,

$$|(A-A')e_j| < \varepsilon \quad (j = 1, \cdots, M)$$

が成り立つ. これが任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対して成り立つので,

$$(A-A')e_j = 0 \quad (j = 1, \cdots, M)$$

である. ゆえに $A = A'$ である. □

命題 4.3 (微分の横ベクトル表記)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$ を開集合, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ を,

$$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_N(x)) \quad (\forall x \in \Omega)$$

と表す. $a \in \Omega$ とする. このとき次は互いに同値である.

(1) f は a において微分可能である.
(2) $f_1, \cdots, f_N : \Omega \to \mathbb{R}$ はそれぞれ a において微分可能である.

そして (1), (2) が成り立つとき, f の a における微分 $f'(a) \in M_{N\times M}(\mathbb{R})$ は $f_1, \cdots, f_N$ の a における微分 $f_1'(a), \cdots, f_N'(a) \in \mathbb{R}^M$ に対して, 横ベクトル表記 (定義 2.49) で,

$$f'(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_N'(a) \end{pmatrix}$$

と表される.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとし, $f'(a) \in M_{N\times M}(\mathbb{R})$ の横ベクトル表記を考え,

$$f'(a) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$$

なる $v_1, \cdots, v_N \in \mathbb{R}^M$ を取る. $x \in \Omega, x \neq a$ に対し,

$$\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{|x-a|} = \left(\frac{f_j(x) - f_j(a) - v_j(x-a)}{|x-a|} \right)_{j=1,\cdots,N}$$

であるから,

$$\frac{|f_j(x) - f_j(a) - v_j(x-a)|}{|x-a|} \leqslant \frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)|}{|x-a|} \to 0 \ \ (j = 1, \cdots, N)$$

である. これより任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$ は $a \in \Omega$ において微分可能であり, その微分は $f_j'(a) = v_j$ である.

(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとし, 横ベクトル表記で,

$$A := \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_N'(a) \end{pmatrix} \in M_{N\times M}(\mathbb{R})$$

とおく. このとき $x \in \Omega, x \neq a$ に対し,

$$\frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = \left(\frac{f_j(x) - f_j(a) - f_j'(a)(x-a)}{|x-a|} \right)_{j=1,\cdots,N}$$

であるから, 三角不等式より,

$$\frac{|f(x) - f(a) - A(x-a)|}{|x-a|} \leqslant \sum_{j=1}^{N} \frac{|f_j(x) - f_j(a) - f_j'(a)(x-a)|}{|x-a|}$$

である. よって $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ は $a \in \Omega$ において微分可能であり, $f'(a) = A$ である. □

命題 4.4 (微分可能な点における連続性)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$ を開集合とし, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ が $a \in \Omega$ において微分可能であるとする. このとき f は a において連続である.

証明. $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ の $a \in \Omega$ における微分可能性より, 十分小さい正実数 δ を取れば,

$$\frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)|}{|x-a|} \leqslant 1 \ \ (\forall x \in \mathbb{R}^M : 0 < |x-a| < \delta)$$

が成り立つ. よって,

$$|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)| \leqslant |x-a| \ \ (\forall x \in \mathbb{R}^M : |x-a| < \delta)$$

なので,

$$|f(x) - f(a)| \leqslant (\|f'(a)\| + 1)|x-a| \ \ (\forall x \in \mathbb{R}^M : |x-a| < \delta)$$

である. これより f は a において連続である. □

定義 4.5 (偏微分)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$ を開集合, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ とする. f が $a = (a_1, \cdots, a_M) \in \Omega$ において第 j 座標に関して偏微分可能であるとは, $k \neq j$ なる $k \in \{1, \cdots, M\}$ に対し a_k を固定し,

$$t \mapsto f(a_1, \cdots, \overset{j\text{ 番目}}{t}, \cdots, a_M)$$

なる関数を考えたとき, これが $t = a_j$ において微分可能であることを言う. そしてその微分を,

$$\partial_j f(a), \ \ \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

などと表し, これを f の a における第 j 座標に関する偏微分と言う.

命題 4.6 (微分の縦ベクトル表記)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$ を開集合, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ とし, f は $a \in \Omega$ において微分可能であるとする. このとき任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し f は a において第 j 座標に関して偏微分可能であり, 縦ベクトル表記 (定義 2.49) で,

$$f'(a) = (\partial_1 f(a), \cdots, \partial_M f(a)) \in M_{N\times M}(\mathbb{R})$$

と表される.

証明. $(e_1, \cdots, e_M)$ を $\mathbb{R}^M$ の標準基底とする. 任意の $j \in \{1, \cdots, M\}$ を取る. f が a において微分可能であることから任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し $\delta \in (0, \infty)$ が存在し,

$$\frac{|f(a+h) - f(a) - f'(a)h|}{|h|} < \varepsilon \quad (\forall h \in \mathbb{R}^M : 0 < |h| < \delta)$$

となる. よって

$$\left|\frac{f(a+he_j) - f(a) - hf'(a)e_j}{h}\right| = \frac{|f(a+he_j) - f(a) - hf'(a)e_j|}{|he_j|} < \varepsilon \quad (\forall h \in \mathbb{R} : 0 < h < \delta)$$

となるので f は a において第 j 座標に関して偏微分可能であり, $\partial_j f(a) = f'(a)e_j$ である. これが各 $j \in \{1, \cdots, M\}$ について成り立つので,

$$f'(a) = (f'(a)e_1, \cdots, f'(a)e_M) = (\partial_1 f(a), \cdots, \partial_N f(a))$$

である. □

定理 4.7 (チェインルール)**.** $L, M, N \in \mathbb{N}$ とし, $U \subseteq \mathbb{R}^L$, $V \subseteq \mathbb{R}^M$ をそれぞれ開集合とする. そして $f : U \to V$ が $a \in U$ において微分可能であり, $g : V \to \mathbb{R}^N$ が $f(a) \in V$ において微分可能であるとする. このとき合成関数 $g \circ f : U \to \mathbb{R}^N$ は $a \in U$ において微分可能であり,

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

が成り立つ.

証明. $F : U \to \mathbb{R}^M, G : V \to \mathbb{R}^N$ を,

$$F(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{|x-a|} & (x \neq a) \\ 0 & (x = a) \end{cases},$$

$$G(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(a))-g'(f(a))(y-f(a))}{|y-f(a)|} & (y \neq f(a)) \\ 0 & (y = f(a)) \end{cases}$$

と定義すると, F は a において連続であり, G は $f(a)$ において連続である. 任意の $x \in U \backslash \{a\}$ に対し,

$$\begin{aligned} &\frac{|(g\circ f)(x) - (g\circ f)(a) - g'(f(a))f'(a)(x-a)|}{|x-a|} \\ &\leqslant \frac{|g(f(x)) - g(f(a)) - g'(f(a))(f(x)-f(a))|}{|x-a|} + \|g'(f(a))\|\frac{|f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)|}{|x-a|} \\ &= \frac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|}|G(f(x))| + \|g'(f(a))\||F(x)| \\ &\leqslant \left(|F(x)| + \|f'(a)\|\right)|G(f(x))| + \|g'(f(a))\||F(x)| \end{aligned} \tag{4.2}$$

であり, 命題 4.4 より f は a において連続であるから (4.2) の右辺について,

$$\left(|F(x)| + \|f'(a)\|\right)|G(f(x))| + \|g'(f(a))\||F(x)| \to 0 \quad (|x-a| \to +0)$$

が成り立つ. よって (4.2) より,

$$\frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(a) - g'(f(a))f'(a)(x-a)}{|x-a|} \to 0 \quad (|x-a| \to +0)$$

が成り立つので $g \circ f : U \to \mathbb{R}^N$ は a において微分可能であり,

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

である. □

4.2 平均値の定理, Taylor の定理, C^2 級関数の偏微分の可換性, C^1 級関数の微分可能性

定理 4.8 (平均値の定理)**.** 有界閉区間 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ 上で連続で, 開区間 (a,b) の各点で微分可能な実数値関数 $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対し, $c \in (a,b)$ が存在し,

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

が成り立つ.

証明. $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ を,

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)) \ \ (\forall x \in [a,b])$$

と定義すると, h は $[a,b]$ 上で連続であり, (a,b) の各点で微分可能である. そして,

$$h(a) = h(b), \ \ h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)) \ \ (\forall x \in (a,b))$$

である. よって $h'(c) = 0$ を満たす $c \in (a,b)$ が存在することを示せばよい. $[a,b]$ はコンパクト (定理 1.134) であり, $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続であるので, $h([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$ はコンパクト (定理 1.51), 従って有界閉集合 (定理 1.145) である. ゆえに $h([a,b])$ は最小値と最大値を持つ. $h(a) = h(b)$ であるから $h([a,b])$ の最小値か最大値のうち, いずれか一方はある $c \in (a,b)$ に対して $h(c)$ で表される. この c に対し $h'(c) = 0$ が成り立つことを示す. h の $c \in (a,b)$ における微分可能性より任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し, 十分小さい $\delta \in (0,\infty)$ を取れば,

$$\left| \frac{h(c \pm \delta) - h(c)}{\pm\delta} - h'(c) \right| < \varepsilon \tag{4.3}$$

が成り立つ. もし $h(c)$ が $h([a,b])$ の最大値ならば, $h(c \pm \delta) - h(c) \leqslant 0$ であるので (4.3) より,

$$-\varepsilon \leqslant \frac{h(c - \delta) - h(c)}{-\delta} - \varepsilon < h'(c) < \frac{h(c + \delta) - h(c)}{\delta} + \varepsilon \leqslant \varepsilon$$

が成り立つ. また, もし $h(c)$ が $h([a,b])$ の最小値ならば, $h(c \pm \delta) - h(c) \geqslant 0$ であるので (4.3) より,

$$-\varepsilon \leqslant \frac{h(c + \delta) - h(c)}{\delta} - \varepsilon < h'(c) < \frac{h(c - \delta) - h(c)}{-\delta} + \varepsilon \leqslant \varepsilon$$

が成り立つ. よっていずれにしても $|h'(c)| < \varepsilon$ が成り立つ. $\varepsilon \in (0,\infty)$ は任意なので $h'(c) = 0$ を得る. □

系 4.9 (平均値の定理)**.** 有界閉区間 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ 上で連続で, 開区間 (a,b) の各点で微分可能な実数値関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対し, $c \in (a,b)$ が存在し,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

が成り立つ.

証明. 定理 4.8 で $g(x) = x$ $(\forall x \in [a,b])$ の場合を考えればよい. □

定義 4.10 (偏導関数, C^k 級)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$ を開集合, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $j \in \{1, \cdots, M\}$ とし, 任意の $x \in \Omega$ に対し第 j 座標に関する偏微分 $\partial_j f(x) \in \mathbb{R}^N$ が存在するとする. このとき,

$$\partial_j f : \Omega \ni x \mapsto \partial_j f(x) \in \mathbb{R}^N$$

を第 j 座標に関する偏導関数と言う. さらに $\partial_j f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ が $i \in \{1, \cdots, M\}$ に対し第 i 座標に関する偏導関数を持つときそれを

$$\partial_i \partial_j f : \Omega \to \mathbb{R}^N$$

と表す. このタイプの偏導関数を f の 2 階の偏導関数と言う. 同様にして偏導関数 $\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_n}f:\Omega\to\mathbb{R}^N$ が存在するとき, このタイプの偏導関数を f の n 階の偏導関数と言う.
$k\in\mathbb{N}$ とする. f が連続であり, 任意の $n\in\{1,\cdots,k\}$, 任意の $(j_1,\cdots,j_n)\in\{1,\cdots,M\}^n$ に対し n 階導関数

$$\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_n}f:\Omega\to\mathbb{R}^N$$

が存在し, これらが全て連続ならば f は C^k 級であると言う. f が任意の $k\in\mathbb{N}$ に対し C^k 級であるとき f は C^∞ 級であると言う. また便宜上, f が C^0 級であるとは f が連続であることを意味するものとする.

定理 4.11 (C^2 級関数の偏微分の可換性)**.** $\Omega\subseteq\mathbb{R}^M$ を開集合, $f:\Omega\to\mathbb{R}^N$ を C^2 級関数とする. このとき任意の $i,j\in\{1,\cdots,M\}$ に対し,

$$\partial_i\partial_j f(x)=\partial_j\partial_i f(x)\ \ (\forall x\in\Omega)$$

が成り立つ.

証明. $M=2$ として示せば十分である. また命題 4.3 より $N=1$ として示せば十分である. 任意の $x=(x_1,x_2)\in\Omega$, 任意の $\varepsilon\in(0,\infty)$ を取り固定する. f は C^2 級なので, $\delta\in(0,\infty)$ が存在し,

$$|\partial_1\partial_2 f(x+h)-\partial_1\partial_2 f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ \ |\partial_2\partial_1 f(x+h)-\partial_2\partial_1 f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\ \ (\forall h\in(-\delta,\delta)^2) \tag{4.4}$$

が成り立つ. 任意の $h=(h_1,h_2)\in\{(-\delta,\delta)\backslash\{0\}\}^2$ を取り固定し,

$$\begin{aligned}\Delta(h):&=\{f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1+h_1,x_2)\}-\{f(x_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)\}\\&=\{f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2+h_2)\}-\{f(x_1+h_1,x_2)-f(x_1,x_2)\}\end{aligned}$$

とおく. 平均値の定理 4.9 より $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$ が存在し,

$$\begin{aligned}\Delta(h)&=\{f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1+h_1,x_2)\}-\{f(x_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)\}\\&=h_1(\partial_1 f(x_1+\theta_1h_1,x_2+h_2)-\partial_1 f(x_1+\theta_1h_1,x_2))\\&=h_1h_2\partial_2\partial_1 f(x_1+\theta_1h_1,x_2+\theta_2h_2)\end{aligned} \tag{4.5}$$

となる. また平均値の定理 4.9 より $\omega_2,\omega_1\in(0,1)$ が存在し,

$$\begin{aligned}\Delta(h)&=\{f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2+h_2)\}-\{f(x_1+h_1,x_2)-f(x_1,x_2)\}\\&=h_2\left(\partial_2 f(x_1+h_1,x_2+\omega_2h_2)-\partial_2 f(x_1,x_2+\omega_2h_2)\right)\\&=h_1h_2\partial_1\partial_2 f(x_1+\omega_1h_1,x_2+\omega_2h_2)\end{aligned} \tag{4.6}$$

となる. よって (4.5), (4.6) より,

$$\partial_2\partial_1 f(x_1+\theta_1h_1,x_2+\theta_2h_2)=\frac{\Delta(h)}{h_1h_2}=\partial_1\partial_2 f(x_1+\omega_1h_1,x_2+\omega_2h_2)$$

であり,

$$(\theta_1h_1,\theta_2h_2),\ (\omega_1h_1,\omega_2h_2)\in(-\delta,\delta)^2$$

であるから (4.4) より,

$$\left|\partial_2\partial_1 f(x)-\frac{\Delta(h)}{h_1h_2}\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \ \left|\partial_1\partial_2 f(x)-\frac{\Delta(h)}{h_1h_2}\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

が成り立つ. これより,

$$|\partial_1\partial_2 f(x)-\partial_2\partial_1 f(x)|\leqslant\left|\partial_1\partial_2 f(x)-\frac{\Delta(h)}{h_1h_2}\right|+\left|\partial_2\partial_1 f(x)-\frac{\Delta(h)}{h_1h_2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

である. $\varepsilon\in(0,\infty)$ は任意なので, $\partial_1\partial_2 f(x)=\partial_2\partial_1 f(x)$ を得る. □

定理 4.12 (C^1 級関数の微分可能性)**.** $\Omega\subseteq\mathbb{R}^M$ を開集合, $f:\Omega\to\mathbb{R}^N$ を C^1 級関数とする. このとき任意の $x\in\Omega$ に対し f は x において微分可能である.

証明. 命題 4.3 より $N=1$ として示せば十分である. 任意の $x\in\Omega$ と任意の $\varepsilon\in(0,\infty)$ を取り固定する. f が C^1 級であることから $\delta\in(0,\infty)$ が存在し,

$$|(\partial_j f(x+h))_{j=1,\cdots,M}-(\partial_j f(x))_{j=1,\cdots,M}|<\varepsilon \quad (\forall h\in\mathbb{R}^M:|h|<\delta) \tag{4.7}$$

が成り立つ. $0<|h|<\delta$ なる任意の $h=(h_1,\cdots,h_M)\in\mathbb{R}^M$ を取り固定する.

$$h^{(0)}=0\in\mathbb{R}^M,\quad h^{(j)}:=(h_1,\cdots,h_j,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^M \quad (j=1,\cdots,M)$$

とおくと,

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{j=1}^{M}(f(x+h^{(j)})-f(x+h^{(j-1)}))$$

であるから, 平均値の定理 4.9 より $\theta_1,\cdots,\theta_M\in(0,1)$ が存在し,

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{j=1}^{M}h_j\partial_j f(x+h^{(j-1)}+\theta_j h_j e_j) \tag{4.8}$$

が成り立つ. ただし $(e_1,\cdots,e_M)$ は $\mathbb{R}^M$ の標準基底である. そこで,

$$\begin{aligned}v(h)&:=\Big(\partial_j f(x+h^{(j-1)}+\theta_j h_j e_j)\Big)_{j=1,\cdots,M}\in\mathbb{R}^M,\\ v&:=(\partial_j f(x))_{j=1,\cdots,M}\in\mathbb{R}^M\end{aligned}$$

とおくと, (4.8) より,

$$\frac{|f(x+h)-f(x)-vh|}{|h|}=\frac{|v(h)h-vh|}{|h|}=\frac{1}{|h|}|(v(h)-v)h| \tag{4.9}$$

となる. Schwarz の不等式 1.144 と

$$|h^{(j-1)}+\theta h_j e_j|\leqslant|h|<\delta \quad (j=1,\cdots,M)$$

であることと (4.7) より,

$$\frac{1}{|h|}|(v(h)-v)h|\leqslant|v(h)-v|<\varepsilon$$

であるから, (4.9) より,

$$\frac{|f(x+h)-f(x)-vh|}{|h|}<\varepsilon$$

が成り立つ. これが $0<|h|<\delta$ を満たす任意の $h\in\mathbb{R}^M$ に対して成り立つので, $\varepsilon\in(0,\infty)$ の任意性より f は $x\in\Omega$ で微分可能である. $x\in\Omega$ は任意なので求める結果を得た. □

定義 4.13 (一変数関数の導関数)**.** $I\subseteq\mathbb{R}$ を区間, $f:I\to\mathbb{R}^N$ とする. 任意の $x\in I$ に対して微分 $f'(x)\in\mathbb{R}^N$ が存在するとする. このとき,

$$f':I\ni x\mapsto f'(x)\in\mathbb{R}^N$$

を f の導関数と言う. そして f の導関数 $f':I\to\mathbb{R}^N$ が導関数

$$f'':I\ni x\mapsto f''(x)\in\mathbb{R}^N$$

を持つとき, f'' を f の 2 階の導関数と言う. f' は f の 1 階の導関数とも言い, f' は $f^{(1)}$, f'' は $f^{(2)}$ とも表す. また f は $f^{(0)}$ とも表す. ある $n\in\mathbb{N}$ に対し, f の n 階の導関数 $f^{(n)}:I\to\mathbb{R}^N$ が導関数を持つとする. このときそれを $f^{(n+1)}:I\to\mathbb{R}^N$ と表し, $f^{(n+1)}$ を f の $n+1$ 階の導関数と言う.

定理 4.14 (Taylor の定理)**.** $I\subseteq\mathbb{R}$ を区間, $n\in\mathbb{N}$ とし, $f:I\to\mathbb{R}$ を n 階までの導関数を持つ関数とする. このとき任意の $a,b\in I$ に対し a,b の間の c で,

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

を満たすものが存在する.

証明. 任意の $a \in I$ を取り固定する.

$$F(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (\forall x \in I)$$

として $F : I \ni x \mapsto F(x) \in \mathbb{R}$ を定義すると, F は n 階までの導関数を持ち,

$$F^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - \sum_{k=m}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-m)!}(x-a)^{k-m} \quad (\forall m \in \{0,1,\cdots,n\}, \forall x \in I) \tag{4.10}$$

である. また $G : I \to \mathbb{R}$ を,

$$G(x) := (x-a)^n \quad (\forall x \in I)$$

と定義すると,

$$G^{(m)}(x) = \frac{n!}{(n-m)!}(x-a)^{n-m} \quad (\forall m \in \{0,1,\cdots,n\}, \forall x \in I) \tag{4.11}$$

である. (4.10), (4.11) より,

$$F^{(m)}(a) = G^{(m)}(a) = 0, \quad G^{(m)}(b) \neq 0 \quad (\forall m \in \{0,1,\cdots,n-1\}, \forall b \in I (b \neq a)) \tag{4.12}$$

である. 今, $b \neq a$ なる任意の $b \in I$ を取る. 平均値の定理 4.8 と (4.12) より, a, b の間の b_1 が存在し,

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F^{(1)}(b_1)}{G^{(1)}(b_1)}$$

が成り立つ. また $n \geqslant 2$ ならば, 平均値の定理 4.8 と (4.12) より, a, b_1 の間の b_2 が存在し,

$$\frac{F^{(1)}(b_1)}{G^{(1)}(b_1)} = \frac{F^{(1)}(b_1) - F^{(1)}(a)}{G^{(1)}(b_1) - G^{(1)}(a)} = \frac{F^{(2)}(b_2)}{G^{(2)}(b_2)}$$

が成り立つ. 同様の操作を続けていけば, a, b の間の $b_1, b_2, \cdots, b_n$ で,

$$\begin{aligned}\frac{F(b)}{G(b)} &= \frac{F^{(1)}(b_1) - F^{(1)}(a)}{G^{(1)}(b_1) - G^{(1)}(a)} = \frac{F^{(2)}(b_2) - F^{(2)}(a)}{G^{(2)}(b_2) - G^{(2)}(a)} = \cdots \\ &= \frac{F^{(n-1)}(b_{n-1}) - F^{(n-1)}(a)}{G^{(n-1)}(b_{n-1}) - G^{(n-1)}(a)} = \frac{F^{(n)}(b_n)}{G^{(n)}(b_n)}\end{aligned} \tag{4.13}$$

なるものが取れることが分かる. ここで (4.10), (4.11) より $F^{(n)}(b_n) = f^{(n)}(b_n)$, $G^{(n)}(b_n) = n!$ であるから, (4.13) より,

$$F(b) = \frac{f^{(n)}(b_n)}{n!}(b-a)^n$$

である. よって $c = b_n$ とおけば求める結果を得る. □

定義 4.15 (関数の凸性)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ を区間とする. 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が下に凸であるとは,

$$f((1-t)a + tb) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b) \quad (\forall a, b \in I, \forall t \in [0,1])$$

が成り立つことを言う. また関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が上に凸であるとは,

$$f((1-t)a + tb) \geqslant (1-t)f(a) + tf(b) \quad (\forall a, b \in I, \forall t \in [0,1])$$

が成り立つことを言う.

命題 4.16 (2 階の導関数と凸性)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ を区間, $f : I \to \mathbb{R}$ を 2 階までの導関数を持つ関数とする. もし $f''(x) \geqslant 0$ $(\forall x \in I)$ が成り立つならば, f は下に凸である. またもし $f''(x) \leqslant 0$ $(\forall x \in I)$ が成り立つならば, f は上に凸である.

証明. 任意の $a_1, a_2 \in I$ と $t_1 + t_2 = 1$ なる任意の $t_1, t_2 \in [0,1]$ を取る.

$$a := t_1 a_1 + t_2 a_2 \in I$$

とおく. もし $f''(x) \geqslant 0$ $(\forall x \in I)$ ならば, Taylor の定理 4.14 より,

$$f(a_j) \geqslant f(a) + f'(a)(a_j - a) \quad (j = 1, 2)$$

であるから,

$$\sum_{j=1}^{2} t_j f(a_j) \geqslant \sum_{j=1}^{2} t_j f(a) + \sum_{j=1}^{2} (t_j a_j - t_j a) f'(a) = f(a)$$

である. よって f は下に凸である. またもし $f''(x) \leqslant 0$ $(\forall x \in I)$ ならば, Taylor の定理 4.14 より,

$$f(a_j) \leqslant f(a) + f'(a)(a_j - a) \quad (j = 1, 2)$$

であるから,

$$\sum_{j=1}^{2} t_j f(a_j) \leqslant \sum_{j=1}^{2} t_j f(a) + \sum_{j=1}^{2} (t_j a_j - t_j a) f'(a) = f(a)$$

である. よって f は上に凸である. □

4.3 逆関数定理

定理 4.17 (逆関数定理)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ を C^k 級関数[*33]とし, ある $a \in \Omega$ に対し,

$$\det f'(a) \neq 0 \tag{4.14}$$

が成り立つとする. このとき $a \in \Omega$ の開近傍 $U \subseteq \Omega$ で次の条件を満たすものが存在する.

- $f(U)$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合である.
- $U \ni x \mapsto f(x) \in f(U)$ は全単射であり, この逆関数は C^k 級である.

そして $U \ni x \mapsto f(x) \in f(U)$ の逆関数を $g : f(U) \to U$ とおくと,

$$g'(y) = f'(g(y))^{-1} \quad (\forall y \in f(U))$$

が成り立つ.

証明. (4.14) より $f'(a) \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ は逆行列 $f'(a)^{-1} \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ を持つ (定理 2.53). そこで必要ならば $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ の代わりに $\Omega \ni x \mapsto f'(a)^{-1} f(x) \in \mathbb{R}^N$ を考え, 最初から $f'(a) = 1$ であると仮定してよいのでそうする. f の a における微分可能性より a を中心とする十分小さい有界閉方体 (有界閉区間 N 個の直積) $K \subseteq \Omega$ を取れば,

$$\frac{|f(x) - f(a) - (x - a)|}{|x - a|} < 1$$

となる. よって,

$$f(x) \neq f(a) \quad (\forall x \in K \backslash \{a\}) \tag{4.15}$$

である. また f は C^1 級であるから, a を中心とする有界閉方体 K を十分に小さく取っておけば,

$$\det f'(x) \neq 0 \quad (\forall x \in K) \tag{4.16}$$

$$|\partial_j f_i(x) - \delta_{i,j}| < \frac{1}{2N^2} \quad (\forall x \in K, \forall i, j \in \{1, \cdots, N\}) \tag{4.17}$$

[*33] 従って定理 4.12 より f は各点で微分可能である.

となる.

$$F(x) := f(x) - x \ \ (\forall x \in \Omega) \tag{4.18}$$

とおくと, (4.17) より,

$$|\partial_j \partial_i F(x)| = |\partial_j \partial_i f(x) - \delta_{i,j}| < \frac{1}{2N^2} \ \ (\forall x \in K, \forall i, j \in \{1, \cdots, N\})$$

であるので, 平均値の定理 4.9 より,

$$|F(x) - F(x')| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |F_i(x) - F_i(x')| \leqslant \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{2N^2} |x_j - x'_j| \leqslant \frac{1}{2}|x - x'| \ \ (\forall x, x' \in K)$$

となる. よって (4.18) より,

$$\frac{1}{2}|x - x'| \leqslant |f(x) - f(x')| \ \ (\forall x, x' \in K) \tag{4.19}$$

が成り立つ. K の境界 $\partial K := K \backslash K^\circ$ はコンパクトだから, f の連続性より $f(\partial K) \subseteq \mathbb{R}^N$ は閉集合である*34. そして $a \in K^\circ$ だから (4.15) より,

$$f(a) \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial K)$$

なので, 十分小さい正実数 δ を取れば,

$$B(f(a), \delta) \cap f(\partial K) = \varnothing \tag{4.20}$$

が成り立つ. 今, 開球

$$V := B\left(f(a), \ \frac{\delta}{2}\right)$$

を定義し, 任意の $y \in V$ を取り固定する. このとき $y = f(x_0)$ なる $x_0 \in K^\circ$ が存在することを示す.

$$h(x) := |y - f(x)|^2 = \sum_{i=1}^{N} |y_i - f_i(x)|^2 \ \ (\forall x \in K)$$

とおいて連続関数 $h : K \to \mathbb{R}$ を定義する. K はコンパクトであるから $h(K) \subseteq \mathbb{R}$ は最小値を持つ. そこでその最小値を与える K の点を $x_0 \in K$ とおく. もし $x_0 \in \partial K$ ならば (4.20) より,

$$|f(x_0) - f(a)| \geqslant \delta$$

なので,

$$|y - f(x_0)| \geqslant |f(a) - f(x_0)| - |y - f(a)| \geqslant \delta - |y - f(a)| > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} > |y - f(a)|$$

となる. これは $h(x_0) > h(a)$ を意味するので $h(x_0)$ が $h(K)$ の最小値であることに矛盾する. よって $x_0 \in K \backslash \partial K = K^\circ$ である. ここでチェインルール 4.7 より h は K° 上で C^1 級であり,

$$\partial_j h(x) = \sum_{i,j=1}^{N} 2(f_i(x) - y_i)\partial_j f_i(x) \ \ (\forall x \in K^\circ, \forall j \in \{1, \cdots, N\}) \tag{4.21}$$

である. $h(x_0)$ は $h(K^\circ)$ の最小値なので平均値の定理 4.8 の証明と同じ議論により $\partial_j h(x_0) = 0$ $(j = 1, \cdots, N)$ であることが分かる. よって (4.21) より,

$$\sum_{i,j=1}^{N} (f_i(x_0) - y_i)\partial_j f_i(x_0) = 0$$

なので,

$$(f_1(x_0) - y_1, \cdots, f_N(x_0) - y_N) \, f'(x_0) = 0 \tag{4.22}$$

*34 Euclid 空間の部分集合がコンパクトであることと有界閉集合であることは同値 (定理 1.145) である. また連続写像によるコンパクト集合の像はコンパクト (命題 1.51) である.

が成り立つ. (4.16) より $\det(f'(x_0)) \neq 0$ なので $f'(x_0) \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ は逆行列 $f'(x_0)^{-1} \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ を持つ (定理 2.53). よって (4.22) より $y = f(x_0)$ を得る. ゆえに任意の $y \in V$ に対し $y = f(x_0)$ なる $x_0 \in K^\circ$ が存在する. これより $a \in \Omega$ の開近傍

$$U := K^\circ \cap f^{-1}(V)$$

を定義すれば,

$$f(U) = V$$

が成り立つので $f(U)$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合である. そして (4.19) より $U \ni x \mapsto f(x) \in f(U)$ は全単射であり, この逆関数を $g : f(U) \to U$ とおくと,

$$|g(y) - g(y')| \leqslant 2|y - y'| \quad (\forall y, y' \in f(U)) \tag{4.23}$$

が成り立つ. ゆえに g は連続である. $y \neq y'$ なる任意の $y, y' \in f(U)$ に対し, $x = g(y), x' = g(y')$ とおく. $x \in U \subseteq K$ なので (4.16) より $f'(x)$ は逆行列 $f'(x)^{-1}$ を持ち, (4.23) と f の x における微分可能性より,

$$\begin{aligned}\frac{|g(y') - g(y) - f'(x)^{-1}(y' - y)|}{|y' - y|} &= \frac{|g(y') - g(y)|}{|y' - y|}\frac{|x' - x - f'(x)^{-1}(f(x') - f(x))|}{|x' - x|} \\ &\leqslant 2\|f'(x)^{-1}\|\frac{|f(x') - f(x) - f'(x)(x' - x)|}{|x' - x|} \\ &\to 0 \quad (|y - y'| \to +0)\end{aligned}$$

となる. よって g は任意の $y \in f(U)$ に対して y において微分可能であり,

$$g'(y) = f'(x)^{-1} = f'(g(y))^{-1} \quad (\forall y \in f(U))$$

が成り立つ. 定理 2.53 より,

$$g'(y) = \frac{1}{\det f'(g(y))}\operatorname{cof}(f'(g(y))) \quad (\forall y \in f(U))$$

と表されることと, チェインルール 4.7 より, ある $n \in \mathbb{N}$ に対し f が C^n 級で g が C^{n-1} 級であると仮定すると, g は C^n 級であることが導かれる. よって帰納法より g は C^k 級である. □

定義 4.18 (C^k 級同相写像)**.** $U, V \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $f : U \to V$ を全単射とする. f と $f^{-1} : V \to U$ が共に C^k 級 ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) であるとき, $f : U \to V$ を C^k 級同相写像と言う.

系 4.19 (逆関数定理の系)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ を C^k 級関数 ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) とし, 次が成り立つとする.

(1) $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ は単射.
(2) $\det f'(x) \neq 0 \quad (\forall x \in \Omega)$.

このとき $f(\Omega)$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合であり, $\Omega \ni x \mapsto f(x) \in f(\Omega)$ は C^k 級同相写像である.

証明. 逆関数定理 4.17 より任意の $a \in \Omega$ に対し, a の開近傍 $U_a \subseteq \Omega$ で, $f(U_a)$ が $\mathbb{R}^N$ の開集合, $f|_{U_a} : U_a \to f(U_a)$ が C^k 級同相写像であるようなものが取れる.

$$f(\Omega) = \bigcup_{a\in\Omega} f(U_a)$$

だから $f(\Omega)$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合である. 全単射 $\Omega \ni x \mapsto f(x) \in f(\Omega)$ の逆関数を $g : f(\Omega) \to \Omega$ とおくと, 任意の $a \in \Omega$ に対し,

$$g(f(x)) = x = (f|_{U_a})^{-1}(f(x)) \quad (\forall x \in U_a)$$

であるから g は開集合 $f(U_a)$ 上で C^k 級である. よって g は $f(\Omega)$ 上で C^k 級である. □

4.4 複素微分, 正則関数

定義 4.20 (複素 Banach 空間値関数の複素微分, 複素導関数)**.** X を $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を開集合とする. $f : \Omega \to X$ が $z_0 \in \Omega$ において複素微分可能であるとは, ある $a \in X$ が存在し,

$$\Omega \ni z \mapsto \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{f(z) - f(z)}{z - z_0} & (z \neq z_0) \\ a & (z = z_0) \end{array} \right\} \in X \text{ は } z_0 \text{ において連続.} \tag{4.24}$$

が成り立つことを言う. このとき $a \in X$ は一意的に定まる (次の命題 4.21 を参照) ので, この a を $f'(z_0)$ や $\frac{df}{dz}(z_0)$ と表し, f の z_0 における複素微分と言う. 任意の $z \in \Omega$ に対し $f'(z) \in X$ が存在するとき,

$$f' : \Omega \ni z \mapsto f'(z) \in X$$

を f の複素導関数と言う. そして f の複素導関数 $f' : \Omega \to X$ が複素導関数

$$f'' : \Omega \ni z \mapsto f''(z) \in X$$

を持つとき, f'' を f の 2 階の複素導関数と言う. f' は f の 1 階の複素導関数とも言い, f' は $f^{(1)}$, f'' は $f^{(2)}$ とも表す. また f は $f^{(0)}$ とも表す. ある $n \in \mathbb{N}$ に対し f の n 階の複素導関数 $f^{(n)} : \Omega \to X$ が複素導関数を持つとする. このときそれを $f^{(n+1)} : \Omega \to X$ と表し, これを f の $n+1$ 階の複素導関数と言う.

命題 4.21. (4.24) を満たす $a \in X$ は存在するならば唯一つである.

証明. $a, a' \in X$ が共に (4.24) を満たすとすると, 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し $\delta \in (0, \infty)$ が存在し,

$$\left\| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - a \right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left\| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - a' \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall h \in \mathbb{C} : 0 < |h| < \delta)$$

が成り立つ. よって三角不等式より $\|a - a'\| < \varepsilon$ であり, $\varepsilon \in (0, \infty)$ は任意だから $\|a - a'\| = 0$ である. □

命題 4.22 (複素微分可能な点における連続性)**.** X を $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を開集合とする. $f : \Omega \to X$ が $z_0 \in \Omega$ において複素微分可能ならば, f は z_0 において連続である.

証明. f の z_0 における複素微分可能性より, 十分小さい $\delta \in (0, \infty)$ を取れば,

$$\left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right\| < 1 \quad (\forall z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta)$$

が成り立つ. よって,

$$\|f(z) - f(z_0)\| \leqslant (1 + \|f'(z_0)\|)|z - z_0| \quad (\forall z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta)$$

である. これより f は z_0 において連続である. □

定義 4.23 (複素 Banach 空間値正則関数)**.** X を $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を開集合とする. $f : \Omega \to X$ が複素導関数 $f' : \Omega \to X$ を持ち, さらに f' がノルムに関して連続であるとする. このとき f を X 値正則関数と言う. $X = \mathbb{C}$ である場合は単に正則関数と言う.

定理 4.24 (Cauchy-Riemann の関係式)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を開集合, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ とする. 同一視

$$x_1 + ix_2 = (x_1, x_2), \quad \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

(複素数体の定義 1.146 を参照) のもと, 次は互いに同値である.

(1) $f : \Omega \to \mathbb{C}$ は正則関数 (定義 4.23) である.

(2) $f : \Omega \ni (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^2$ は C^1 級 (定義 4.10) であり, 任意の $(x_1, x_2) \in \Omega$ に対し,

$$\partial_1 f_1(x_1, x_2) = \partial_2 f_2(x_1, x_2), \quad \partial_1 f_2(x_1, x_2) = -\partial_2 f_1(x_1, x_2) \tag{4.25}$$

が成り立つ.

そして (1), (2) が成り立つとき, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ の複素導関数を $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ とおくと, 任意の $x_1 + ix_2 = (x_1, x_2) \in \Omega$ に対し,

$$\mathrm{Re}(f'(x_1 + ix_2)) = \partial_1 f_1(x_1, x_2) = \partial_2 f_2(x_1, x_2), \tag{4.26}$$

$$\mathrm{Im}(f'(x_1 + ix_2)) = \partial_1 f_2(x_1, x_2) = -\partial_2 f_1(x_1, x_2) \tag{4.27}$$

が成り立つ.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ の複素導関数を $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ とすると, 任意の $z = x_1 + ix_2 = (x_1, x_2) \in \Omega$ に対し,

$$f'(z) = \lim_{h \in \mathbb{R}, h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \partial_1 f_1(x_1, x_2) + i\partial_1 f_2(x_1, x_2),$$

$$f'(z) = \lim_{h \in \mathbb{R}, h \to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = \partial_2 f_2(x_1, x_2) - i\partial_2 f_1(x_1, x_2)$$

であるから (4.26) が成り立つ. そして正則関数の定義 4.23 より複素導関数 $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ は連続であるので, 各 $i, j \in \{1, 2\}$ に対し $\partial_i f_j : \Omega \to \mathbb{R}$ は連続である. よって f は C^1 級なので (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとする.

$$\Omega \ni (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^2 \tag{4.28}$$

は C^1 級であるので, 定理 4.12 より (4.28) は各点で微分可能である. そして任意の $(x_1, x_2) \in \Omega$ に対し, (x_1, x_2) における (4.28) の微分を $m(x_1, x_2) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ とおくと, 命題 4.3 と命題 4.6 より,

$$m(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_1, x_2) & \partial_2 f_1(x_1, x_2) \\ \partial_1 f_2(x_1, x_2) & \partial_2 f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

と表される. 任意の $z = x_1 + ix_2 = (x_1, x_2) \in \Omega$ を取り固定する.

$$a := \partial_1 f_1(x_1, x_2) = \partial_2 f_2(x_1, x_2), \quad b := \partial_1 f_2(x_1, x_2) = -\partial_2 f_1(x_1, x_2) \tag{4.30}$$

とおくと, (4.29), (4.30) より,

$$m(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

であるから, $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$ に対し,

$$m(x_1, x_2)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{pmatrix} = (a+ib)(h_1 + ih_2) = (a+ib)h$$

である. よって,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - (a+ib) \right| = \left| \frac{f(z+h) - f(z) - (a+ib)h}{h} \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \begin{pmatrix} f_1(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} - m(x_1, x_2) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right| \\ &\to 0 \quad (|h| \to +0) \end{aligned}$$

であるから, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ は $z = x_1 + ix_2 \in \Omega$ において複素微分可能であり, その複素微分は $f'(z) = a + ib$ である. (4.30) より,

$$f'(z) = \partial_1 f_1(x_1, x_2) + i\partial_1 f_2(x_1, x_2)$$

であり, これが任意の $z = x_1 + ix_2 = (x_1, x_2) \in \Omega$ に対して成り立つ. $\partial_1 f_1, \partial_1 f_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ は連続であるから f は連続な複素導関数を持つ. ゆえに f は正則関数なので (1) が成り立つ. □

(4.25) を Cauchy-Riemann の関係式と言う.

定理 4.25 (正則関数に関する逆関数定理)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を開集合, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ を正則関数とし, ある $a \in \Omega$ に対し $f'(a) \neq 0$ が成り立つとする. このとき $a \in \Omega$ の開近傍 $U \subseteq \Omega$ で次を満たすものが存在する.

- $f(U)$ は $\mathbb{C}$ の開集合.
- $U \ni z \mapsto f(z) \in f(U)$ は全単射であり, この逆関数は正則関数である.

そして $U \ni z \mapsto f(z) \in f(U)$ の逆関数を $g : f(U) \to \mathbb{C}$ とおくと,

$$g'(w) = f'(g(w))^{-1} \quad (\forall w \in f(U))$$

が成り立つ.

証明. 定理 4.24 より同一視

$$x_1 + ix_2 = (x_1, x_2), \quad \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

によって,

$$\Omega \ni (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^2 \tag{4.31}$$

は C^1 級であり, 任意の $x_1 + ix_2 = (x_1, x_2) \in \Omega$ における (4.31) の微分を $m_f(x_1, x_2) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ とおくと,

$$m_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(f'(x_1 + ix_2)) & -\mathrm{Im}(f'(x_1 + ix_2)) \\ \mathrm{Im}(f'(x_1 + ix_2)) & \mathrm{Re}(f'(x_1 + ix_2)) \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

が成り立つ. よって $a = a_1 + ia_2 = (a_1, a_2)$ と表すと,

$$0 < |f'(a)|^2 = \mathrm{Re}(f'(a))^2 + \mathrm{Im}(f'(a))^2 = \det m_f(a_1, a_2)$$

が成り立つので, 逆関数定理 4.17 より $a \in \Omega$ の開近傍 $U \subseteq \Omega$ で, $f(U)$ が $\mathbb{C}$ の開集合,

$$U \ni (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \in f(U) \tag{4.33}$$

が全単射, (4.33) の逆関数

$$g : f(U) \to U \tag{4.34}$$

が C^1 級関数であるようなものが取れる. そして任意の $(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \in f(U)$ における (4.34) の微分を $m_g(y_1, y_2) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ とおくと, (4.32) より,

$$\begin{aligned} m_g(y_1, y_2) = m_f(x_1, x_2)^{-1} &= \frac{1}{\det(m_f(x_1, x_2))}\mathrm{cof}(m_f(x_1, x_2)) \\ &= \frac{1}{|f'(x_1 + ix_2)|^2}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(f'(x_1 + ix_2)) & \mathrm{Im}(f'(x_1 + ix_2)) \\ -\mathrm{Im}(f'(x_1 + ix_2)) & \mathrm{Re}(f'(x_1 + ix_2)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. よって任意の $(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \in f(U)$ に対し,

$$\begin{aligned} \partial_1 g_1(y_1, y_2) = \partial_2 g_2(y_1, y_2) &= \frac{1}{|f'(x_1 + ix_2)|^2}\mathrm{Re}(f'(x_1 + ix_2)), \\ \partial_1 g_2(y_1, y_2) = -\partial_2 g_1(y_1, y_2) &= -\frac{1}{|f'(x_1 + ix_2)|^2}\mathrm{Im}(f'(x_1 + ix_2)) \end{aligned}$$

であるから, 定理 4.24 より $g : f(U) \ni f(z) \mapsto z \in \mathbb{C}$ は正則関数であり, 任意の $w = f(z) \in f(U)$ における g の複素微分は,

$$g'(w) = \frac{1}{|f'(z)|^2}(\mathrm{Re}(f'(z)) - i\mathrm{Im}(f'(z))) = \frac{1}{|f'(z)|^2}\overline{f(z)} = f'(z)^{-1} = f'(g(w))^{-1}$$

である. □

4.5 冪級数の収束半径, 冪級数関数の複素微分

定義 4.26 (冪級数の収束半径)**.** X を $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間とする．X の列 $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ に対し，

$$R := \frac{1}{\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{\|c_k\|}} \in [0,\infty]$$

とおく (ただし $\frac{1}{\infty}=0$, $\frac{1}{0}=\infty$). R を $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を係数とする冪級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} c_n z^n$ ($z\in\mathbb{C}$) の収束半径と言う．この名称の妥当性は次の命題 4.27 による．

命題 4.27. X を $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間, $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を X の列とし, $R\in[0,\infty]$ を $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を係数とする冪級数の収束半径 (定義 4.26) とする．このとき次が成り立つ．

(1) $|z|<R$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ に対し, $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} c_n z^n$ は絶対収束 (定義 3.29) する．従って特に $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} c_n z^n$ はノルムで収束する (命題 3.30).

(2) $R<|z|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ に対し, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ はノルムで収束しない.

証明. (1)

$$|z|<R=\frac{1}{\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{\|c_k\|}} \quad\Leftrightarrow\quad \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{\|c_k\|} < \frac{1}{|z|}$$

より, $|z|<R$ ならばある $\beta\in(0,1)$ に対し,

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{\|c_k\|} < \frac{\beta}{|z|}$$

が成り立つ．よって下限の定義より,

$$\sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{\|c_k\|} < \frac{\beta}{|z|}$$

を満たす $n\in\mathbb{N}$ が存在する．これより,

$$\|c_k z^k\| < \beta^k \quad (\forall k\geqslant n)$$

であり, $\beta\in(0,1)$ より,

$$\sum_{k\geqslant n} \|c_k z^k\| \leqslant \sum_{k\geqslant n} \beta^k < \infty$$

である．ゆえに $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} c_n z^n$ は絶対収束する．

(2)

$$|z|>R=\frac{1}{\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n}[k]\|c_k\|} \quad\Leftrightarrow\quad \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{\|c_k\|} > \frac{1}{|z|}$$

より, $|z|>R$ ならば,

$$\sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{\|c_k\|} > \frac{1}{|z|} \quad (\forall n\in\mathbb{N})$$

であるから, 上限の定義より任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し, $k\geqslant n$ なる $k\in\mathbb{N}$ で,

$$\sqrt[k]{\|c_k\|} > \frac{1}{|z|},$$

すなわち,

$$\|c_k z^k\| > 1$$

となるものが取れる．よって $\lim_{n\to\infty}\|c_n z^n\|=0$ は成り立たないので, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ はノルムで収束しない.

□

命題 4.28 (ratio テスト)**.** $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を正実数の列とし,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\in[0,1)$$

が成り立つとする. このとき $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}a_n$ は収束する.

証明. $\ell:=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\in[0,1)$ とおく. そして $\ell+\varepsilon<1$ となるような正実数 ε を取り, $\beta:=\ell+\varepsilon\in(0,1)$ とおく. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell$ より, $n_0\in\mathbb{N}$ が存在し,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}-\ell\leqslant\varepsilon\quad(\forall n\geqslant n_0)$$

が成り立つから,

$$a_{n+1}\leqslant\beta a_n\quad(\forall n\geqslant n_0)$$

が成り立つ. ゆえに,

$$a_n\leqslant\beta^{n-n_0}a_{n_0}\quad(\forall n\geqslant n_0)$$

であり, $\beta\in(0,1)$ より,

$$\sum_{n\geqslant n_0}a_n\leqslant a_{n_0}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\beta^n=\frac{a_{n_0}}{1-\beta}<\infty$$

である. よって $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}a_n$ は収束する. □

命題 4.29. X を $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間, $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を X の列とし,

$$d_n:=(n+1)c_{n+1}\in X\quad(\forall n\in\mathbb{Z}_+)$$

とおく. このとき $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を係数とする冪級数の収束半径 R と $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を係数とする冪級数の収束半径 R' は一致する.

証明.

$$\|c_{n+1}z^{n+1}\|\leqslant\|(n+1)c_{n+1}z^{n+1}\|=|z|\|d_nz^n\|\quad(\forall z\in\mathbb{C},\forall n\in\mathbb{Z}_+)$$

であるから, $|z|<R'$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ に対し, 命題 4.27 の (1) より,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\|c_nz^n\|\leqslant|z|\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\|d_nz^n\|<\infty$$

が成り立つ. よって $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}c_nz^n$ は (絶対) 収束するので, 命題 4.27 の (2) より $|z|\leqslant R$ である. ゆえに $|z|<R'$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ に対し $|z|\leqslant R$ が成り立つので,

$$R'\leqslant R$$

が成り立つ. この逆の不等式が成り立つことを示す. $|z|<R$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ を取り, $|z|<r<R$ を満たす正実数 r を取る. このとき命題 4.27 の (1) より $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\|c_n\|r^n$ は収束するので, 特に $(\|c_n\|r^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ は収束する. よって $\{c_nr^n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\subseteq X$ は有界であるから, ある正実数 M に対し,

$$\|c_n\|r^n\leqslant M\quad(\forall n\in\mathbb{Z}_+)$$

が成り立つ. これより,

$$\|d_nz^n\|=(n+1)\|c_{n+1}\||z|^n\leqslant(n+1)\frac{M}{r}\left(\frac{|z|}{r}\right)^n\quad(\forall n\in\mathbb{Z}_+)$$

が成り立つ. $\frac{|z|}{r}\in[0,1)$ であるから, ratio テスト 4.28 より,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\|d_nz^n\|\leqslant\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(n+1)\frac{M}{r}\left(\frac{|z|}{r}\right)^n<\infty$$

が成り立つ. よって $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}d_nz^n$ は (絶対) 収束するので, 命題 4.27 の (2) より $|z|\leqslant R'$ である. ゆえに $|z|<R$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ に対し $|z|\leqslant R'$ が成り立つので,

$$R\leqslant R'$$

が成り立つ. よって $R=R'$ が成り立つ. □

定理 4.30 (冪級数関数の複素微分)**.** X を $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間, $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を X の列とし, $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を係数とする冪級数の収束半径を R とする. そして開円盤 $B(0,R)=\{z\in\mathbb{C}:|z|<R\}$ 上で定義された冪級数関数

$$f:B(0,R)\ni z\mapsto\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}c_nz^n\in X$$

を考える. このとき f は $B(0,R)$ の各点で複素微分可能であり,

$$f'(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(n+1)c_{n+1}z^n\quad(\forall z\in B(0,R))$$

が成り立つ. さらに任意の $k\in\mathbb{N}$ に対し f は k 階の複素導関数 $f^{(k)}:B(0,R)\to X$ を持ち,

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(n+k)!}{n!}c_{n+k}z^n\quad(\forall z\in B(0,R)),\quad c_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)\quad(\forall k\in\mathbb{Z}_+)$$

が成り立つ.

証明. 任意の $z_0\in B(0,R)$ を取り固定する. 命題 4.29 より $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(n+1)c_{n+1}z_0^n$ は絶対収束する. 今, $f:B(0,R)\to X$ が z_0 において複素微分可能であり, その複素微分が,

$$f'(z_0)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(n+1)c_{n+1}z_0^n \tag{4.35}$$

であることを示す. $|z_0|<r<R$ なる正実数 r を取り固定する.

$$F(z):=\begin{cases}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & (0<|z-z_0|<r-|z_0|)\\ \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(n+1)c_{n+1}z_0^n & (z=z_0)\end{cases}$$

として $F:B(z_0,\ r-|z_0|)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<r-|z_0|\}\to X$ を定義し, F が連続であることを示せばよい. $0<|z-z_0|<r-|z_0|$ のとき,

$$F(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{1}{z-z_0}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}c_{n+1}(z^{n+1}-z_0^{n+1})=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}c_{n+1}\sum_{k=0}^{n}z^kz_0^{n-k}$$

であり, 右辺は $z=z_0$ のとき $F(z_0)$ に一致するので,

$$F(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}c_{n+1}\sum_{k=0}^{n}z^kz_0^{n-k}\quad(\forall z\in B(0,r-|z_0|))$$

である. よって $F:B(z_0,r-|z_0|)\to X$ は,

$$F_N:B(0,\ r-|z_0|)\ni z\mapsto\sum_{n=0}^{N}c_{n+1}\sum_{k=0}^{n}z^kz_0^{n-k}\in X\quad(\forall N\in\mathbb{N})$$

なる連続関数の列 $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ に対し,

$$F(z)=\lim_{N\to\infty}F_N(z)\quad(\forall z\in B(z_0,r-|z_0|))$$

と表される. $N>M$ なる任意の $N,M\in\mathbb{N}$ と任意の $z\in B(z_0,r-|z_0|)$ に対し,

$$\|F_N(z)-F_M(z)\|\leqslant\sum_{n=M+1}^{N}\left\|c_{n+1}\sum_{k=0}^{n}z^kz_0^{n-k}\right\|\leqslant\sum_{n=M+1}^{N}(n+1)\|c_{n+1}\|r^n \tag{4.36}$$

($|z|\leqslant|z-z_0|+|z_0|<r$ であることに注意) であり, $r<R$ であるから命題 4.29 より $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(n+1)\|c_{n+1}\|r^n$ は収束する. よって (4.36) より $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ は一様 Cauchy 条件 (定義 1.126) を満たすので, 定理 1.127 より $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ は F に一様収束する. $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ は連続関数の列なので, 定理 1.125 より F は連続関数である. ゆえに f は $z_0\in B(0,R)$ において

複素微分可能であり, (4.35) が成り立つ. $z_0 \in B(0,R)$ は任意なので, $f : B(0,R) \to X$ は複素導関数 $f' : B(0,R) \to X$ を持ち, それは冪級数関数

$$f' : B(0,R) \ni z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (n+1) c_{n+1} z^n \in X$$

である. そこで $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ を $((n+1)c_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}_+}$, f を f' に置き換えて上の議論を行えば, $f' : B(0,R) \to X$ は複素導関数 $f'' : B(0,R) \to X$ を持ち, それは冪級数関数

$$f'' : B(0,R) \ni z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (n+2)(n+1) c_{n+2} z^n \in X$$

であることが分かる. 以下同様にして任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し f は k 階の複素導関数 $f^{(k)}$ を持ち, それは冪級数関数

$$f^{(k)} : B(0,R) \ni z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (n+k)(n+k-1) \cdots (n+1) c_{n+k} z^n \in X$$

であることが分かる. よって,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{(n+k)!}{n!} c_{n+k} z^n \quad (\forall z \in B(0,R)), \quad c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) \quad (\forall k \in \mathbb{Z}_+)$$

が成り立つ. □

4.6 指数関数, 三角関数, 対数関数

定義 4.31 (指数関数)**.** $(\frac{1}{n!})_{n \in \mathbb{Z}_+}$ を係数とする冪級数 $\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{z^n}{n!}$ は ratio テスト 4.28 より任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して絶対収束する*[35]. そこで,

$$\exp : \mathbb{C} \ni z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{C} \tag{4.37}$$

なる関数を定義する. これを指数関数と言う. 定理 4.30 より指数関数 (4.37) は複素微分可能であり,

$$\exp'(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (n+1) \frac{1}{(n+1)!} z^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{z^n}{n!} = \exp(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

である.

定義 4.32 (二項係数)**.** $k \leqslant n$ なる任意の $n, k \in \mathbb{Z}_+$ に対し,

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

とおく. これを二項係数と言う. この名称は,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (\forall x, y \in \mathbb{C})$$

に由来する.

定理 4.33 (指数関数の加法定理)**.** 任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\exp(z+w) = \exp(z) \exp(w)$$

が成り立つ.

*[35] 従って $(\frac{1}{n!})_{n \in \mathbb{Z}_+}$ を係数とする冪級数の収束半径は ∞ である.

証明. 任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}\exp(z+w) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{n!}(z+w)^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k w^{n-k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{p+q=n}\frac{z^p}{p!}\frac{w^q}{q!} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{2N}\sum_{p+q=n}\frac{z^p}{p!}\frac{w^q}{q!},\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\exp(z)\exp(w) = \sum_{p\in\mathbb{Z}_+}\frac{z^p}{p!}\sum_{q\in\mathbb{Z}_+}\frac{w^q}{q!} = \lim_{N\to\infty}\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N}\frac{z^p}{p!}\frac{w^q}{q!} \tag{4.39}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\exp(z+w) - \exp(z)\exp(w) &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{2N}\sum_{p+q=n}\frac{z^p}{p!}\frac{w^q}{q!} - \sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N}\frac{z^p}{p!}\frac{w^q}{q!}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{p=N+1}^{2N}\frac{z^p}{p!}\sum_{q=0}^{2N-p}\frac{w^q}{q!} + \sum_{q=N+1}^{2N}\frac{w^q}{q!}\sum_{p=0}^{2N-q}\frac{z^p}{p!}\right)\end{aligned} \tag{4.40}$$

である. ここで,

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{p=N+1}^{2N}\frac{z^p}{p!}\sum_{q=0}^{2N-p}\frac{w^q}{q!} + \sum_{q=N+1}^{2N}\frac{w^q}{q!}\sum_{p=0}^{2N-q}\frac{z^p}{p!}\right| \leqslant \sum_{p=N+1}^{2N}\frac{|z|^p}{p!}\sum_{q=0}^{2N-p}\frac{|w|^q}{q!} + \sum_{q=N+1}^{2N}\frac{|w|^q}{q!}\sum_{p=0}^{2N-q}\frac{|z|^p}{p!}\\ &\leqslant \sum_{p=N+1}^{\infty}\frac{|z|^p}{p!}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{|w|^q}{q!} + \sum_{q=N+1}^{\infty}\frac{|w|^q}{q!}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{|z|^p}{p!}\\ &= \left(\exp(|z|) - \sum_{p=0}^{N}\frac{|z|^p}{p!}\right)\exp(|w|) + \left(\exp(|w|) - \sum_{q=0}^{N}\frac{|w|^q}{q!}\right)\exp(|z|)\\ &\to 0 \quad (N\to\infty)\end{aligned}$$

であるから, (4.40) の右辺は 0 である. ゆえに $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ である. □

系 4.34. 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し $\exp(z) \neq 0$ であり, $\exp(-z) = (\exp(z))^{-1}$ である.

証明. $\exp(0) = 1$ であることと, 加法定理 4.33 による. □

命題 4.35. $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ であり, $\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(x) \in (0, \infty)$ は狭義単調増加である.

証明.

$$\exp(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{x^n}{n!} = \sup_{N\in\mathbb{N}}\sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!} \geqslant 1 + x > 1 \quad (\forall x \in (0,\infty)) \tag{4.41}$$

であるから, 系 4.34 より,

$$\exp(x) = \exp(-(-x)) = (\exp(-x))^{-1} \in (0,1) \quad (\forall x \in (-\infty, 0))$$

である. よって,

$$\exp(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty) \tag{4.42}$$

である. $x < y$ なる任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し, 加法定理 4.33 と (4.41), (4.42) より,

$$\exp(y) = \exp(x + (y-x)) = \exp(x)\exp(y-x) > \exp(x)$$

であるから, $\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(x) \in (0, \infty)$ は狭義単調増加である. $\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(x) \in (0, \infty)$ は連続であり, $\mathbb{R}$ は連結であるので命題 1.54 より $\exp(\mathbb{R})$ は連結集合である. よって中間値の定理 1.131 より $\exp(\mathbb{R})$ は区間である. そして (4.41) と系 4.34 より,

$$\lim_{x\to\infty}\exp(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty}\exp(x) = \lim_{x\to\infty}\exp(-x) = \lim_{x\to\infty}(\exp(x))^{-1} = 0$$

であるから, 任意の $y \in (0, \infty)$ に対し

$$\exp(x_1) < y < \exp(x_2)$$

なる $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ が存在するので, $y \in (\exp(x_1), \exp(x_2)) \subseteq \exp(\mathbb{R})$ である. よって $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ である. □

定義 4.36 (対数関数)**.** 定理 4.35 より,

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(x) \in (0, \infty) \tag{4.43}$$

は全単射である. そこで (4.43) の逆関数を

$$\log : (0, \infty) \ni x \mapsto \log(x) \in \mathbb{R}$$

とおき, これを対数関数と言う.

命題 4.37. 対数関数 $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ は狭義単調増加で C^∞ 級の全単射であり,

$$\log'(x) = \frac{1}{x} \quad (\forall x \in (0, \infty))$$

が成り立つ. また,

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y) \quad (\forall x, y \in (0, \infty))$$

が成り立つ.

証明. 全単射であることは定義 4.37 による. 定理 4.35 より (4.43) は狭義単調増加であるから $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ も狭義単調増加である. また定義 4.31 で述べたように (4.43) の導関数は (4.43) 自身であるので (4.43) は C^∞ 級であり,

$$\exp'(x) = \exp(x) > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

であるから逆関数定理 4.17 より $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級であり,

$$\log'(x) = \exp(\log(x))^{-1} = \frac{1}{x} \quad (\forall x \in (0, \infty))$$

である. 任意の $x, y \in (0, \infty)$ に対し, $a := \log(x)$, $b := \log(y)$ とおくと, 指数関数の加法定理 4.33 より

$$\log(xy) = \log(\exp(a)\exp(b)) = \log(\exp(a + b)) = a + b = \log(x) + \log(y)$$

である. □

定義 4.38 (正実数の指数の複素数への拡張)**.** 任意の $x \in (0, \infty)$, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し, 加法定理 4.33 より,

$$x^n = (\exp(\log(x)))^n = \exp(n \log(x))$$

である. そこで任意の $x \in (0, \infty)$, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$x^z := \exp(z \log(x))$$

と定義する.

定義 4.39 (自然対数の底)**.**

$$e := \exp(1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!} \in (0, \infty)$$

を自然対数の底と言う. このとき $\log(e) = 1$ であるから, 定義 4.38 より,

$$e^\alpha = \exp(\alpha \log(e)) = \exp(\alpha) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{C})$$

である.

命題 4.40. 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し,

$$(0,\infty) \ni x \mapsto x^\alpha \in \mathbb{C}$$

は C^∞ 級であり,

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\forall x \in (0,\infty))$$

が成り立つ.

証明. チェインルールと指数関数の微分 (定義 4.31), 対数関数の微分 (命題 4.37), 指数関数の加法定理 4.33 より, 任意の $x \in (0,\infty)$ に対し,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^\alpha &= \frac{d}{dx}\exp(\alpha\log(x)) = \exp'(\alpha\log(x))\alpha\log'(x) = \alpha\exp(\alpha\log(x))\frac{1}{x}\\ &= \alpha\exp(\alpha\log(x))\exp(-\log(x)) = \alpha\exp((\alpha-1)x) = \alpha x^{\alpha-1}\end{aligned}$$

である. □

定義 4.41 (三角関数)**.** 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\cos(z) := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

とおく. $\mathbb{C} \ni z \mapsto \cos(z) \in \mathbb{C}$ を余弦関数, $\mathbb{C} \ni z \mapsto \sin(z) \in \mathbb{C}$ を正弦関数と言い, これらの関数を三角関数と言う.

命題 4.42 (三角関数の基本性質)**.** 三角関数と指数関数に関して,

(1) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z).$$

が成り立つ.

(2) 余弦関数と正弦関数の複素微分は,

$$\cos'(z) = -\sin(z), \quad \sin'(z) = \cos(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

である.

(3) 任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w), \quad \sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$

が成り立つ.

(4) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\cos(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}, \quad \sin(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}.$$

である.

(5) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}), \quad \sin(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$$

であり,

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = |e^{i\theta}|^2 = 1.$$

である.

証明. (1) 三角関数の定義 4.41 による.

(2) 指数関数の定義 4.31 より,

$$\exp'(\pm iz) = \pm i\exp(\pm iz) \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

であるから, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\cos'(z) = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin(z),$$
$$\sin'(z) = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z)$$

である.

(3) 指数関数の加法定理 4.33 より, 任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} - \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \\ &= \frac{(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw})}{4} \\ &= \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \cos(z+w),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \\ &= \frac{(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) + (e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw})}{4i} \\ &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \sin(z+w)\end{aligned}$$

である.

(4) ratio テスト 4.28 より任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ はそれぞれ絶対収束する. よって指数関数の定義 4.31 より, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}\exp(iz) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + i\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + i\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}\end{aligned}$$

である. これより任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$e^{iz} = \exp(iz) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + i\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$
$$e^{-iz} = \exp(-iz) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} - i\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

であるので,

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$
$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

である.

(5) (4) より任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\cos(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} \in \mathbb{R}, \quad \sin(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \in \mathbb{R}$$

であるから (1) より,

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}), \quad \sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$$

である. そして指数関数の定義 4.31 より,

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(i\theta)^n}{n!}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-i\theta)^n}{n!} = e^{-i\theta}$$

であるから指数関数の加法定理 4.33 より,

$$|e^{i\theta}|^2 = e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}} = e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i\theta-i\theta} = e^0 = 1$$

である. よって,

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = \mathrm{Re}(e^{i\theta})^2 + \mathrm{Im}(e^{i\theta})^2 = |e^{i\theta}|^2 = 1$$

である.

□

命題 4.43. $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto \cos(\theta) \in \mathbb{R}$ は $[0,2]$ において狭義単調減少であり, $\cos(\theta_0) = 0$ を満たす $\theta_0 \in (0,2)$ が唯一つ存在する.

証明.

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} = 1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\theta^{2n} \\
&= 1 - \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{(-1)^{2n}}{(4n+2)!}\theta^{4n+2} - \frac{(-1)^{2n+1}}{(4n+4)!}\theta^{4n+4} \right) \\
&= 1 - \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{\theta^{4n+2}}{(4n+2)!} \left(1 - \frac{\theta^2}{(4n+4)(4n+3)} \right)
\end{aligned}$$

であり,

$$1 - \frac{2^2}{(4n+4)(4n+3)} \geqslant 1 - \frac{4}{12} = \frac{2}{3} > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+)$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\cos(2) &= 1 - \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{2^{4n+2}}{(4n+2)!} \left(1 - \frac{2^2}{(4n+4)(4n+3)} \right) \\
&< 1 - \frac{2^2}{2!} \left(1 - \frac{2^2}{12} \right) = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} < 0
\end{aligned}$$

である. また $\cos(0) = 1$ なので $0 \in (\cos(2), \cos(0))$ である. ここで $\cos([0,2])$ は連結集合の連続関数による像なので連結 (命題 1.54) だから, 定理 1.131 より,

$$0 \in [\cos(2), \cos(0)] \subseteq \cos([0,2])$$

である. ゆえに $\cos(\theta_0) = 0$ を満たす $\theta_0 \in (0,2)$ が存在する.

$$\begin{aligned}
\sin(\theta) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{(-1)^{2n}}{(4n+1)!}\theta^{4n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(4n+3)!}\theta^{4n+3} \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{\theta^{4n+1}}{(4n+1)!} \left(1 - \frac{\theta^2}{(4n+3)(4n+2)} \right)
\end{aligned}$$

であり,

$$1 - \frac{\theta^2}{(4n+3)(4n+2)} \geqslant 1 - \frac{\theta^2}{6} > 0 \quad (\forall\theta \in [0,2], \forall n \in \mathbb{Z}_+)$$

であるから,

$$\sin(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{\theta^{4n+1}}{(4n+1)!}\left(1 - \frac{\theta^2}{(4n+3)(4n+2)}\right) \geqslant \theta\left(1 - \frac{\theta^2}{6}\right) > 0 \quad (\forall \theta \in (0,2])$$

である. 命題 4.42 の (2) より,

$$\cos'(\theta) = -\sin(\theta) < 0 \quad (\forall \theta \in (0,2])$$

であるから, 平均値の定理 4.9 より $[0,2] \ni \theta \mapsto \cos(\theta) \in \mathbb{R}$ は狭義単調減少である. ゆえに $\cos(\theta_0) = 0$ を満たす $\theta_0 \in (0,2)$ は唯一つである. □

定義 4.44 (円周率の定義)**.** 命題 4.43 より $\cos(\theta) = 0$ を満たす正実数 θ のうち最小のもの θ_0 が存在する. これに対し円周率 π を,

$$\pi := 2\theta_0$$

と定義する.

命題 4.45 (円周率と指数関数, 三角関数の周期)**.** 円周率 π に対し,

(1)
$$e^{z+in\frac{\pi}{2}} = i^n e^z \quad (\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z})$$
が成り立つ.

(2)
$$\cos\left(z \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin(z), \quad \sin\left(z \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$
が成り立つ.

(3)
$$\cos(z + n\pi) = (-1)^n\cos(z), \quad \sin(z + n\pi) = (-1)^n\sin(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z})$$
が成り立つ.

(4) 任意の $\theta \in (0,\pi)$ に対し $\sin(\theta) > 0$ である.

証明. (1) 円周率の定義 4.44 より $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ である. 命題 4.42 の (5) より $\sin(\frac{\pi}{2})^2 = \cos(\frac{\pi}{2})^2 + \cos(\frac{\pi}{2})^2 = 1$ であり, 命題 4.43 の証明より $\sin(\frac{\pi}{2}) > 0$ であるから $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ である. よって命題 4.42 の (1) より $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ であるから, 指数関数の加法定理 4.33 より,

$$e^{z+in\frac{\pi}{2}} = e^{in\frac{\pi}{2}}e^z = i^n e^z \quad (\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z})$$

である.

(2) (1) と三角関数の定義 4.41 より, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}
\cos\left(z \pm \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{e^{i(z\pm\frac{\pi}{2})} + e^{-i(z\pm\frac{\pi}{2})}}{2} = \pm i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \mp\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \mp\sin(z),\\
\sin\left(z \pm \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{e^{i(z\pm\frac{\pi}{2})} - e^{-i(z\pm\frac{\pi}{2})}}{2i} = \pm i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = \pm\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \pm\cos(z)
\end{aligned}$$

である.

(3) (2) より, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}
\cos(z \pm \pi) &= \cos\left(\left(z \pm \frac{\pi}{2}\right) \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\left(z \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(z),\\
\sin(z \pm \pi) &= \sin\left(\left(z \pm \frac{\pi}{2}\right) \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\left(z \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(z)
\end{aligned}$$

である. よって $n \in \mathbb{N}$ に関する帰納法により,

$$\cos(z \pm n\pi) = (-1)^n\cos(z), \quad \sin(z \pm n\pi) = (-1)^n\sin(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つことが分かる.

(4) 命題 4.43 の証明より $\cos(\theta), \sin(\theta) > 0\ (\forall\theta \in (0, \frac{\pi}{2}))$ であるから, (2) より $\sin(\theta) > 0\ (\forall\theta \in (0, \pi))$ である.

□

命題 4.46. $|z| = 1$ なる任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し, $z = e^{i\theta_0}$ を満たす $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ が唯一つ存在する.

証明. (1) $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$ の場合. $\mathrm{Re}(z) \in [-1, 1] = [\cos(\pi), \cos(0)] \subseteq \cos([0, \pi])$[*36]より $\mathrm{Re}(z) = \cos(\theta_0)$ なる $\theta_0 \in [0, \pi]$ が存在する. 命題 4.45 の (4) と命題 4.42 の (5) より $\sin(\theta_0) = \sqrt{1 - \cos(\theta_0)^2} = \mathrm{Im}(z)$ であるから, 命題 4.42 の (5) より $z = \cos(\theta_0) + i\sin(\theta_0) = e^{i\theta_0}$ である. 命題 4.42 の (2) と命題 4.45 の (4) より $\cos'(\theta) = -\sin(\theta) < 0\ (\forall\theta \in (0, \pi))$ であるから, 平均値の定理 4.9 より $[0, \pi] \ni \theta \mapsto \cos(\theta) \in \mathbb{R}$ は狭義単調減少である. ゆえに $z = e^{i\theta_0}$ なる $\theta_0 \in [0, \pi]$ は唯一つである. また $\theta \in (\pi, 2\pi)$ のとき命題 4.45 の (3), (4) より $\mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \sin(\theta) < 0$ であるから $z \neq e^{i\theta}$ である. よって $z = e^{i\theta_0}$ なる $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ が唯一つ存在する.

(2) $\mathrm{Im}(z) < 0$ の場合. $\mathrm{Re}(z) \in (-1, 1) \subseteq [\cos(\pi), \cos(2\pi)] \subseteq \cos([\pi, 2\pi])$ なので, $\mathrm{Re}(z) = \cos(\theta_0)$ なる $\theta_0 \in (\pi, 2\pi)$ が存在する. 命題 4.45 の (3), (4) と命題 4.42 の (5) より $\sin(\theta_0) = -\sqrt{1 - \cos(\theta_0)^2} = \mathrm{Im}(z)$ であるから, 命題 4.42 の (5) より $z = \cos(\theta_0) + i\sin(\theta_0) = e^{i\theta_0}$ である. 命題 4.42 の (2) と命題 4.45 の (3), (4) より $\cos'(\theta) = -\sin(\theta) > 0\ (\forall\theta \in (\pi, 2\pi))$ であるから, 平均値の定理 4.9 より $(\pi, 2\pi) \ni \theta \mapsto \cos(\theta) \in \mathbb{R}$ は狭義単調増加である. ゆえに $z = e^{i\theta_0}$ なる $\theta_0 \in (\pi, 2\pi)$ は唯一つである. また $\theta \in [0, \pi]$ のとき命題 4.45 の (4) より $\mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \sin(\theta) \geqslant 0$ であるから $z \neq e^{i\theta}$ である. よって $z = e^{i\theta_0}$ なる $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ が唯一つ存在する.

□

定義 4.47 (偏角)**.** $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ に対し, 命題 4.46 より,

$$z = |z|e^{i\theta}$$

を満たす $\theta \in (-\pi, \pi]$ が唯一つ存在する. これを z の偏角と言い, $\mathrm{Arg}(z)$ と表す.

命題 4.48. $\mathbb{C}$ の開集合 $\mathbb{R} + i(-\pi, \pi) = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$ と $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] = \{z \in \mathbb{C} : z \notin (-\infty, 0]\}$ に対し,

$$\mathbb{R} + i(-\pi, \pi) \ni x + i\theta \mapsto \exp(x + i\theta) = e^x e^{i\theta} \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \tag{4.44}$$

は全単射正則関数であり, この逆関数

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \ni z \mapsto \log(|z|) + i\mathrm{Arg}(z) \in \mathbb{R} + i(-\pi, \pi)$$

も正則関数である. そして Log の各点における複素微分は,

$$\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{z} \quad (\forall z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0])$$

である.

証明. (4.44) が全単射であることは,

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, \infty), \quad (-\pi, \pi) \ni \theta \mapsto e^{i\theta} \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, z \neq -1\}$$

がそれぞれ全単射であること (命題 4.35, 命題 4.46) による. 系 4.34 より $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0\ (\forall z \in \mathbb{R} + i(-\pi, \pi))$ であるから, 正則関数に関する逆関数定理 4.25 より $\mathrm{Log} : \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \to \mathbb{R} + i(-\pi, \pi)$ は正則関数であり,

$$\mathrm{Log}'(z) = \exp'(\mathrm{Log}(z))^{-1} = \frac{1}{z} \quad (\forall z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0])$$

である. □

定義 4.49 (対数の主値関数)**.** 命題 4.48 における全単射正則関数

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \ni z \mapsto \log(|z|) + i\mathrm{Arg}(z) \in \mathbb{R} + i(-\pi, \pi)$$

を対数の主値関数と言う.

[*36] $\cos([0, \pi])$ は連結である (命題 1.54) ことと, 定理 1.131 による.

5 測度と積分

5.1 可測空間, 可測写像

定義 5.1 (σ-加法族, 可測空間)**.** X を空でない集合とする. X の部分集合族 $\mathfrak{M} \subseteq 2^X$ が X 上の σ-加法族であるとは,

(1) $X \in \mathfrak{M}$.
(2) 任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し $X \backslash E \in \mathfrak{M}$.
(3) 任意の可算部分族 $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}$ に対し $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathfrak{M}$.

が成り立つことを言う. σ-加法族 $\mathfrak{M}$ が備わった集合 X のことを可測空間と言う. そして可測空間 $(X, \mathfrak{M})$ に対し $\mathfrak{M}$ に属する X の部分集合のことを可測空間 $(X, \mathfrak{M})$ の可測集合と言う.

命題 5.2. $\mathfrak{M}$ を X 上の σ-加法族とすると, 次が成り立つ.

(1) $\varnothing \in \mathfrak{M}$.
(2) 任意の可算部分族 $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}$ に対し $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathfrak{M}$.
(3) 任意の $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ に対し $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}$.
(4) 任意の $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ に対し $E_1 \cap E_2 \in \mathfrak{M}$

証明. (1) 定義 5.1 の (1), (2) より $\varnothing = X \backslash X \in \mathfrak{M}$ である.

(2) $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}$ ならば, 定義 5.1 の (2) より $\{X \backslash E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}$ なので定義 5.1 の (3) より,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \backslash E_n) \in \mathfrak{M}$$

である. よって定義 5.1 の (2) より,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = X \backslash \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \backslash E_n) \in \mathfrak{M}$$

である.

(3) $E_n = \varnothing \in \mathfrak{M}$ $(\forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant 3)$ とおけば, 定義 5.1 の (3) より,

$$E_1 \cup E_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathfrak{M}.$$

(4) $E_n = X \in \mathfrak{M}$ $(\forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant 3)$ とおけば, (2) より,

$$E_1 \cap E_2 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathfrak{M}.$$

□

定義 5.3 (相対 σ-加法族)**.** $(X, \mathfrak{M}_X)$ を可測空間とする. 空でない $A \subseteq X$ に対し, A の部分集合族

$$\mathfrak{M}_A := \{E \cap A : E \in \mathfrak{M}_X\} \subseteq 2^A$$

を定義する. このとき $\mathfrak{M}_A$ は明らかに A 上の σ-加法族である. $\mathfrak{M}_A$ を $\mathfrak{M}_X$ の A 上の相対 σ-加法族と言う. 以後, 可測空間の空でない部分集合を断りなく可測空間とみなすことがあるが, それはこの相対 σ-加法族による可測空間である.

定義 5.4 (部分集合族から生成される σ-加法族)**.** X を空でない集合とし, $\mathcal{I} \subseteq 2^X, \mathcal{I} \neq \varnothing$ とする. このとき $\mathcal{I}$ を含む X 上の σ-加法族[*37]全体の交叉は $\mathcal{I}$ を含む最小の σ-加法族である. これを $\sigma(\mathcal{I})$ と表し, $\mathcal{I}$ から生成される X 上の σ-加法族と言う.

[*37] 少なくとも 2^X は $\mathcal{I}$ を含む X 上の σ-加法族である.

命題 5.5 (部分集合族から生成される σ-加法族の相対 σ-加法族)**.** X を空でない集合とし, $\mathcal{I} \subseteq 2^X, \mathcal{I} \neq \varnothing$ とする. また $A \subseteq X, A \neq \varnothing$ とする. このとき $\mathcal{I}$ から生成される X 上の σ-加法族 $\sigma(\mathcal{I})$ の A 上の相対 σ-加法族

$$\sigma(\mathcal{I})_A = \{E \cap A : E \in \sigma(\mathcal{I})\} \subseteq 2^A$$

は, A の部分集合族

$$\mathcal{I}_A := \{I \cap A : I \in \mathcal{I}\} \subseteq 2^A$$

から生成される A 上の σ-加法族 $\sigma(\mathcal{I}_A) \subseteq 2^A$ と一致する.

証明.

$$\mathcal{I}_A \subseteq \sigma(\mathcal{I})_A$$

であるから, 定義 5.4 より,

$$\sigma(\mathcal{I}_A) \subseteq \sigma(\mathcal{I})_A$$

が成り立つ. 逆の包含関係を示す.

$$\{E \in 2^X : E \cap A \in \sigma(\mathcal{I}_A)\}$$

は $\mathcal{I}$ を含む σ-加法族であることが容易に確かめれらる. よって定義 5.4 より,

$$\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \{E \in 2^X : E \cap A \in \sigma(\mathcal{I}_A)\}$$

である. これは,

$$\sigma(\mathcal{I})_A \subseteq \sigma(\mathcal{I}_A)$$

を意味するので求める結果を得た. □

定義 5.6 (位相空間上の Borel 集合族)**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とする. 位相 $\mathcal{O}_X \subseteq 2^X$ から生成される X 上の σ-加法族

$$\mathcal{B}_X := \sigma(\mathcal{O}_X)$$

を X 上の Borel 集合族と言い, $\mathcal{B}_X$ に属する X の部分集合を位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ の Borel 集合と言う.

注意 5.7 (相対位相空間上の Borel 集合族)**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $A \subseteq X, A \neq \varnothing$ とし, $\mathcal{O}_X$ の A 上の相対位相を,

$$\mathcal{O}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{O}_X\} \subseteq 2^A$$

とおく. このとき相対位相空間 $(A, \mathcal{O}_A)$ 上の Borel 集合族 $\mathcal{B}_A$ は命題 5.5 より,

$$\mathcal{B}_A := \sigma(\mathcal{O}_A) = \sigma(\{U \cap A : U \in \mathcal{O}_X\}) = \{E \cap A : E \in \sigma(\mathcal{O}_X)\} = \{E \cap A : E \in \mathcal{B}_X\}$$

であるので $(X, \mathcal{O}_X)$ 上の Borel 集合族 $\mathcal{B}_X$ の相対 σ-加法族に一致する.

定義 5.8 (可測写像)**.** 可測空間 $(X, \mathfrak{M}_X)$ から可測空間 $(Y, \mathfrak{M}_Y)$ への写像 $f : X \to Y$ が可測写像であるとは,

$$f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}_X \quad (\forall E \in \mathfrak{M}_Y)$$

が成り立つことを言う.

命題 5.9. $(X, \mathfrak{M}_X), (Y, \mathfrak{M}_Y)$ を可測空間とし, ある $\mathcal{I}_Y \subseteq 2^Y$ に対し $\mathfrak{M}_Y = \sigma(\mathcal{I}_Y)$ が成り立つとする. このとき写像 $f : X \to Y$ に対し次は互いに同値である.

(1) f は可測写像である.
(2) 任意の $I \in \mathcal{I}_Y$ に対し $f^{-1}(I) \in \mathfrak{M}_X$ が成り立つ.

証明. (1) ⇒ (2) は $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathfrak{M}_Y$ による. (2) が成り立つとすると,

$$\mathcal{I}_Y \subseteq \{E \in 2^Y : f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}_X\}$$

であり, 右辺は Y 上の σ-加法族であるから,

$$\mathfrak{M}_Y = \sigma(\mathcal{I}_Y) \subseteq \{E \in 2^Y : f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}_X\}$$

である. よって f は可測写像である. □

定義 5.10 (Borel 写像)**.** $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ をそれぞれ位相空間とし, それぞれの Borel 集合族を $\mathcal{B}_X = \sigma(\mathcal{O}_X)$, $\mathcal{B}_Y = \sigma(\mathcal{O}_Y)$ とおく. 写像 $f : X \to Y$ が可測空間 $(X, \mathcal{B}_X)$ から可測空間 $(Y, \mathcal{B}_Y)$ への可測写像である, すなわち $f^{-1}(E) \in \mathfrak{B}_X$ $(\forall E \in \mathcal{B}_Y)$ が成り立つとき, 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ から位相空間 $(Y, \mathcal{B}_Y)$ への Borel 写像と言う.

系 5.11 (連続写像は Borel 写像)**.** $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, $f : X \to Y$ を連続写像とする. このとき f は Borel 写像である.

証明. Borel 集合族を $\mathcal{B}_X = \sigma(\mathcal{O}_X), \mathcal{B}_Y = \sigma(\mathcal{O}_Y)$ とおくと, $f : X \to Y$ が連続写像であることから,

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{B}_X \quad (\forall U \in \mathcal{O}_Y)$$

である. よって命題 5.9 より,

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_X \quad (\forall E \in \mathcal{B}_Y)$$

であるから f は Borel 写像である. □

定義 5.12 (直積 σ-加法族, 直積可測空間)**.** J を空でない集合とし, 各 $j \in J$ に対し可測空間 $(X_j, \mathfrak{M}_j)$ が与えられているとする. 直積

$$X := \prod_{j \in J} X_j$$

から各 X_j への自然な射影を $\pi_j : X \to X_j$ とおく. このとき X の部分集合族

$$\{\pi_j^{-1}(E_j) : j \in J, E_j \in \mathfrak{M}_j\}$$

から生成される X 上の σ-加法族

$$\bigotimes_{j \in J} \mathfrak{M}_j := \sigma\left(\{\pi_j^{-1}(E_j) : j \in J, E_j \in \mathfrak{M}_j\}\right)$$

に対し, 可測空間 $(X, \bigotimes_{j \in J} \mathfrak{M}_j)$ を $(X_j, \mathfrak{M}_j)_{j \in J}$ の直積可測空間と言う. また $\bigotimes_{j \in J} \mathfrak{M}_j$ を直積 σ-加法族と言う.

注意 5.13. 定義 5.12 において直積空間 $X = \prod_{j \in J} X_j$ 上の直積 σ-加法族 $\bigotimes_{j \in J} \mathfrak{M}_j$ は, 全ての $j \in J$ について $\pi_j : X \to (X_j, \mathfrak{M}_j)$ が可測写像となるような X 上の σ-加法族の中で最小のものとして特徴付けられる.

命題 5.14 (直積可測空間に値を取る関数の可測性)**.** $(X, \mathfrak{M}_X)$ を可測空間, $((Y_j, \mathfrak{M}_{Y_j}))_{j \in J}$ を可測空間の族, $(Y, \mathfrak{M}_Y) := \left(\prod_{j \in J} Y_j, \bigotimes_{j \in J} \mathfrak{M}_{Y_j}\right)$ を直積可測空間とする. そして $\pi_j : Y \to Y_j$ $(\forall j \in J)$ を自然な射影とする. このとき写像 $f : X \to Y$ に対し次は互いに同値である.

(1) $f : (X, \mathfrak{M}_X) \to (Y, \mathfrak{M}_Y)$ は可測写像である.
(2) 任意の $j \in J$ に対し $\pi_j \circ f : (X, \mathfrak{M}_X) \to (Y_j, \mathfrak{M}_{Y_j})$ は可測写像である.

証明. (1) ⇒ (2) を示す. (1) が成り立つとする. 直積 σ-加法族の定義 5.12 より任意の $j \in J$, 任意の $E_j \in \mathfrak{M}_{Y_j}$ に対し $\pi_j^{-1}(E_j) \in \mathfrak{M}_Y$ であるから,

$$(\pi_j \circ f)^{-1}(E_j) = f^{-1}(\pi_j^{-1}(E_j)) \in \mathfrak{M}_X$$

である. ゆえに (2) が成り立つ.
(2) ⇒ (1) を示す. (2) が成り立つとすると任意の $j \in J$, 任意の $E_j \in \mathfrak{M}_{Y_j}$ に対し,

$$f^{-1}(\pi_j^{-1}(E_j)) = (\pi_j \circ f)^{-1}(E_j) \in \mathfrak{M}_X$$

である．

$$\mathfrak{M}_Y = \bigotimes_{j\in J} \mathfrak{M}_{Y_j} = \sigma\left(\{\pi_j^{-1}(E_j) : j \in J, E_j \in \mathfrak{M}_{Y_j}\}\right)$$

であるから，命題 5.9 より，

$$f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}_X \quad (\forall E \in \mathfrak{M}_Y)$$

である．よって (1) が成り立つ． □

補題 5.15 (可算個の第二可算な位相空間の直積位相空間は第二可算)**.** J を可算集合とし，各 $j \in J$ に対して第二可算な位相空間 $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ が与えられているとする．このとき直積位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ は第二可算である．

証明. $\pi_j : X \to X_j$ $(\forall j \in J)$ を自然な射影とする．J は可算集合なので $J = \{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と表せる．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $(X_{j_n}, \mathcal{O}_{X_n})$ の開集合の可算基を $\{U_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ とおく．このとき直積位相の定義 1.75 より，

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\pi_{j_1}^{-1}(U_{1,m_1}) \cap \cdots \cap \pi_{j_n}^{-1}(U_{n,m_n}) : m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{N}\} \tag{5.1}$$

は直積位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ の開集合の基であり，これは可算である．よって $(X, \mathcal{O}_X)$ は第二可算である． □

命題 5.16 (直積位相空間上の Borel 集合族)**.** J を空でない集合とし，各 $j \in J$ に対し位相空間 $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ が与えられているとする．そして $((X_j, \mathcal{O}_{X_j}))_{j\in J}$ の直積位相空間を $(X, \mathcal{O}_X)$ とおく．また各 $j \in J$ に対し $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ 上の Borel 集合族を $\mathcal{B}_{X_j}$，直積位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ の Borel 集合族を $\mathcal{B}_X$ とおき，$(\mathcal{B}_{X_j})_{j\in J}$ の直積 σ-加法族 (定義 5.12) を $\bigotimes_{j\in J} \mathcal{B}_{X_j}$ とおく．このとき，

$$\bigotimes_{j\in J} \mathcal{B}_{X_j} \subseteq \mathcal{B}_X$$

が成り立つ．また，もし J が可算集合であり，各 $j \in J$ に対し $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ が第二可算ならば，

$$\bigotimes_{j\in J} \mathcal{B}_{X_j} = \mathcal{B}_X$$

が成り立つ．

証明. 各 $j \in J$ に対し $\pi_j : X \to X_j$ を自然な射影とすると，直積位相の定義 1.75 より $\pi_j : (X, \mathcal{O}_X) \to (X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ は連続写像であるので Borel 写像である (系 5.11)．よって，

$$\{\pi_j^{-1}(E_j) : j \in J, E_j \in \mathcal{B}_{X_j}\} \subseteq \mathcal{B}_X$$

であるから，

$$\bigotimes_{j\in J} \mathcal{B}_{X_j} = \sigma\left(\{\pi_j^{-1}(E_j) : j \in J, E_j \in \mathcal{B}_{X_j}\}\right) \subseteq \mathcal{B}_X$$

である．

もし J が可算集合であり，各 $j \in J$ に対し $(X_j, \mathcal{O}_{X_j})$ が第二可算であるならば補題 5.15 より，直積位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ も第二可算であり，(5.1) は $(X, \mathcal{O}_X)$ の開集合の基である．第二可算な位相空間は Lindelöf である (定理 1.68) ので $(X, \mathcal{O}_X)$ の任意の開集合は (5.1) の “可算個” の要素の合併で表せる．(5.1) の任意の要素は明らかに $\bigotimes_{j\in J} \mathcal{B}_{X_j}$ に属するので，

$$\mathcal{O}_X \subseteq \bigotimes_{j\in J} \mathcal{B}_{X_j}$$

が成り立つ．ゆえに，

$$\mathcal{B}_X = \sigma(\mathcal{O}_X) \subseteq \bigotimes_{j\in J} \mathcal{B}_{X_j}$$

であるから上段の結果と合わせて $\mathcal{B}_X = \bigotimes_{j\in J} \mathcal{B}_{X_j}$ を得る． □

系 5.17. Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の Borel 集合族 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} = \sigma(\mathcal{O}_{\mathbb{R}^N})$ は $\mathbb{R}$ の Borel 集合族 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathbb{R})$ の直積 σ-加法族 $\bigotimes^N \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ と一致する．

証明. $\mathbb{R}^N$ の位相は $\mathbb{R}$ の位相の直積位相であること, $\mathbb{R}$ の位相は第二可算であること (定理 1.145 を参照) と命題 5.16 による. □

定義 5.18 (拡張された実数系 $\overline{\mathbb{R}}$ 上の Borel 集合族)**.** 拡張された実数系 $\overline{\mathbb{R}}$ (定義 1.97) の区間 (定義 1.99) 全体からなる集合を $\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{R}}} \subseteq 2^{\overline{\mathbb{R}}}$ とおく. $\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{R}}}$ から生成される $\overline{\mathbb{R}}$ 上の σ-加法族

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \sigma(\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{R}}})$$

を $\overline{\mathbb{R}}$ 上の Borel 集合族と言う.

命題 5.19. $\mathbb{R}$ 上の Borel 集合族 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{O}_{\mathbb{R}})$ は $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ の $\mathbb{R}$ 上の相対 σ-加法族 (定義 5.3)

$$(\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})_{\mathbb{R}} = \{E \cap \mathbb{R} : E \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}\}$$

と一致する.

証明. $\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{R}}}$ を $\overline{\mathbb{R}}$ 上の区間全体とする. 定義 5.18 より $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \sigma(\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{R}}})$ だから, 命題 5.5 より,

$$(\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})_{\mathbb{R}} = \{E \cap \mathbb{R} : E \in \sigma(\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{R}}})\} = \sigma\left(\{I \cap \mathbb{R} : I \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{R}}}\}\right) = \sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{R}})$$

である. ただし $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}$ の区間全体である. $\mathbb{R}$ は第二可算, 従って Lindelöf (命題 1.68) であるから $\mathbb{R}$ の任意の開集合は可算個の開区開区間の合併で表せる. よって

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}} \subseteq \sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{R}})$$

だから,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{O}_{\mathbb{R}}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{R}})$$

である. また $\mathbb{R}$ の任意の区間は Borel 集合であるから,

$$\sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

である. ゆえに,

$$(\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

である. □

定義 5.20 ($\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^N, \mathbb{C}$ に値を取る関数の可測性)**.** $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間とする. 関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ が可測であるとは可測空間 $(X, \mathfrak{M})$ から可測空間 $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ (定義 5.18) への関数として可測であることを言う. また $f : X \to \mathbb{R}^N$ (resp. $f : X \to \mathbb{C}$) が可測であるとは可測空間 $(X, \mathfrak{M})$ から可測空間 $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N})$ (resp. $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$) への関数として可測であることを言う.

定義 5.21. X を集合, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ とする. このとき任意の $a \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し,

$$\begin{aligned} (a < f) &:= \{x \in X : a < f(x)\}, \quad (a \leqslant f) := \{x \in X : a \leqslant f(x)\}, \\ (f < a) &:= \{x \in X : f(x) < a\}, \quad (f \leqslant a) := \{x \in X : f(x) \leqslant a\} \end{aligned}$$

と表す. また $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し,

$$\begin{aligned} (a < f < b) &:= (a < f) \cap (f \leqslant b), \quad (a < f \leqslant b) := (a < f) \cap (f \leqslant b), \\ (a \leqslant f < b) &:= (a \leqslant f) \cap (f < b), \quad (a \leqslant f \leqslant b) := (a \leqslant f) \cap (f \leqslant b) \end{aligned}$$

などと表す.

命題 5.22. $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ とする. このとき次は互いに同値である.

(1) f は可測関数.
(2) $\overline{\mathbb{R}}$ の任意の区間 I に対し $f^{-1}(I) \in \mathfrak{M}$.
(3) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し $(a < f) \in \mathfrak{M}$.
(4) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し $(a \leqslant f) \in \mathfrak{M}$.

(5) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し $(f < a) \in \mathfrak{M}$.
(6) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し $(f \leqslant a) \in \mathfrak{M}$.

証明. (2) $\Rightarrow$ (3) は自明である.
(3) $\Rightarrow$ (4) を示す. (3) が成り立つとすると, Archimedes の原理 1.96 より任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(a \leqslant f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n} < f \right) \in \mathfrak{M}$$

である. よって (4) が成り立つ.
(4) $\Leftrightarrow$ (5) は任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し,

$$X \backslash (a \leqslant f) = (f < a)$$

であることによる.
(5) $\Rightarrow$ (6) を示す. (5) が成り立つとすると, Archimedes の原理より任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(f \leqslant a) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(f < a + \frac{1}{n} \right) \in \mathfrak{M}$$

である. よって (6) が成り立つ.
(6) $\Leftrightarrow$ (3) は任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し,

$$X \backslash (f \leqslant a) = (a < f)$$

であることによる.
以上より (3), (4), (5), (6) は互いに同値であり, 明らかに (3), (4), (5), (6) $\Leftrightarrow$ (2) である. 命題 5.9 より (1) $\Leftrightarrow$ (2) であるから (1) $\sim$ (6) は互いに同値である. □

定義 5.23. 集合 X 上の有限個の $\overline{\mathbb{R}}$ 値関数 $f_1, \cdots, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対し,

$$\max(f_1, \cdots, f_n) : X \ni x \mapsto \max(f_1(x), \cdots, f_n(x)) \in \overline{\mathbb{R}},$$
$$\min(f_1, \cdots, f_n) : X \ni x \mapsto \min(f_1(x), \cdots, f_n(x)) \in \overline{\mathbb{R}}$$

と定義する. また関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対し,

$$f_{\pm} := \max(\pm f, 0) : X \ni x \mapsto \max(\pm f(x), 0) \in [0, \infty],$$
$$|f| : X \ni x \mapsto |f(x)| \in [0, \infty]$$

と定義する. そして集合 X 上の $\overline{\mathbb{R}}$ 値関数の列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し, 関数

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n : X \ni x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n : X \ni x \mapsto \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

を定義する.

定義 5.24 (部分集合の指示関数)**.** X を集合, $E \subseteq X$ とする. このとき $\chi_E : X \to [0, 1]$ を,

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & (x \in E) \\ 0 & (x \notin E) \end{cases}$$

として定義する. χ_E を E の指示関数と言う.

定義 5.25. 任意の $p \in (0, \infty)$ に対し,

$$0^p := 0, \quad \infty^p := \infty$$

と定義する.

命題 5.26. $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間とする. このとき次が成り立つ.

(1) 任意の有限個の可測関数 $f_1, \cdots, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対し,

$$\max(f_1, \cdots, f_n) : X \to \overline{\mathbb{R}},$$
$$\min(f_1, \cdots, f_n) : X \to \overline{\mathbb{R}}$$

は可測関数である.

(2) $X \to \overline{\mathbb{R}}$ の任意の可測関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$$

は可測関数である.

(3) 任意の可測関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ と任意の $p \in (0, \infty)$ に対し,

$$f_\pm : X \to [0, \infty], \quad |f| : X \to [0, \infty],$$
$$|f|^p : X \ni x \mapsto |f(x)|^p \in [0, \infty]$$

は可測関数である.

(4) 任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し $\chi_E : X \to [0, 1]$ は可測関数である.

(5) $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ を可測関数とし, 任意の $x \in X$ に対し $f(x) + g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ が定義できる[*38]とすると,

$$f + g : X \ni x \mapsto f(x) + g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

は可測関数である.

(6) $X \to [0, \infty]$ の任意の可測関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n : X \ni x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \in [0, \infty]$$

は可測関数である[*39].

(7) $f, g : X \to \mathbb{R}$ を可測関数とすると,

$$fg : X \ni x \mapsto f(x)g(x) \in \mathbb{R}$$

は可測関数である.

(8) $X \to \mathbb{C}$ の可測関数全体は各点ごとの演算 (定義 2.5) により $\mathbb{C}$ 上の可換な $*$-環 (定義 2.4) をなす (ただし $*$-演算は各点ごとの複素共役).

証明. (1) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(a < \max(f_1, \cdots, f_n)) = \bigcup_{k=1}^{n} (a < f_k) \in \mathfrak{M},$$
$$(\min(f_1, \cdots, f_n) < a) = \bigcup_{k=1}^{n} (f_k < a) \in \mathfrak{M}$$

であるから命題 5.22 より $\max(f_1, \cdots, f_n), \min(f_1, \cdots, f_n)$ は可測関数である.

(2) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, 上限と下限の定義より,

$$(a < \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a < f_n) \in \mathfrak{M}, \quad (\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n < a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (f_n < a) \in \mathfrak{M}$$

であるから命題 5.22 より $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ は可測関数である.

(3) $f_\pm = \max(\pm f, 0), |f| = \max(f, -f)$ だから (1) より $f_\pm, |f|$ は可測関数である. また任意の $a \in [0, \infty)$ に対し,

$$(a < |f|^p) = (a^{\frac{1}{p}} < |f|) \in \mathfrak{M}$$

であるから命題 5.22 より $|f|^p$ も可測関数である.

[*38] つまり “$f(x) = \infty$ かつ $g(x) = -\infty$” や “$f(x) = -\infty$ かつ $g(x) = \infty$” となる $x \in X$ は存在しないと言うこと.
[*39] $[0, \infty]$ の元の無限和については定義 3.28 を参照.

(4) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(a < \chi_E) = \begin{cases} X \in \mathfrak{M} & (a < 0) \\ E \in \mathfrak{M} & (0 \leqslant a < 1) \\ \varnothing \in \mathfrak{M} & (1 \leqslant a) \end{cases}$$

であるから命題 5.22 より χ_E は可測関数である.

(5) 有理数体 $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{R}$ における稠密性 (命題 1.129) と可算性より, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}(a < f+g) = (a-g < f) &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{(a-g < r) \cap (r < f)\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{(a-r < g) \cap (r < f)\} \in \mathfrak{M}\end{aligned}$$

である. よって命題 5.22 より $f+g$ は可測関数である.

(6) (5) より任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\sum_{n=1}^{N} f_n : X \ni x \mapsto \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \in [0, \infty]$$

は可測関数である. よって (2) より,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} f_n : X \to [0, \infty]$$

は可測関数である.

(7)

$$fg = \frac{1}{4}|f+g|^2 - \frac{1}{4}|f-g|^2$$

だから (3), (5) より fg は可測関数である.

(8) $f, g : X \to \mathbb{C}$ を可測関数とすると, 命題 5.14 より,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(f) : X \ni x \mapsto \mathrm{Re}(f(x)) \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Im}(f) : X \ni x \mapsto \mathrm{Im}(f(x)) \in \mathbb{R}, \\ &\mathrm{Re}(g) : X \ni x \mapsto \mathrm{Re}(g(x)) \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Im}(g) : X \ni x \mapsto \mathrm{Im}(g(x)) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

はそれぞれ可測関数であり,

$$\begin{aligned}&\overline{f} = \mathrm{Re}(f) - i\mathrm{Im}(f), \\ &f+g = (\mathrm{Re}(f) + \mathrm{Re}(g)) + i(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)), \\ &fg = (\mathrm{Re}(f)\mathrm{Re}(g) - \mathrm{Im}(f)\mathrm{Im}(g)) + i(\mathrm{Re}(f)\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Im}(f)\mathrm{Re}(g))\end{aligned}$$

であるので, (5), (7) と命題 5.14 より $\overline{f}, f+g, fg : X \to \mathbb{C}$ はそれぞれ可測関数である.

□

定義 5.27 (可測単関数)**.** $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間とする. 可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ が可測単関数であるとは, f の値が有限個であることを言う.

命題 5.28. $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間とし, $f : X \to \mathbb{C}$ を可測単関数とする. このとき互いに交わらない有限個の可測集合 $E_1, \cdots, E_n \in \mathfrak{M}$ と $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ で,

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} E_k, \quad f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k} \tag{5.2}$$

を満たすものが存在する.

証明. f は可測単関数なので, ある有限個の $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ に対し $f(X) = \{a_1, \cdots, a_n\}$ となり, f の可測性より,

$$(f = a_k) \in \mathfrak{M} \ \ (k = 1, \cdots, n)$$

である. よって $E_k := (f = a_k)$ $(k = 1, \cdots, n)$ とおけば (5.2) が成り立つ. □

命題 5.29 (非負値可測関数の非負値可測単関数の単調増加列による近似)**.** $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $f : X \to [0, \infty]$ を非負値可測関数とし, 非負値可測単関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を,

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{2^n n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{\left(\frac{k-1}{2^n} \leqslant f < \frac{k}{2^n}\right)}(x) + n\chi_{(n\leqslant f)}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X)$$

として定義する. このとき次が成り立つ.

(1) 任意の $x \in X$ に対し $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加列.
(2) 任意の $x \in X$ に対し $f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.

証明. (1) 任意の $x \in X$, 任意の $n \in \mathbb{N}$ を取り固定する. もし $n + 1 \leqslant f(x)$ ならば,

$$f_n(x) = n < n + 1 = f_{n+1}(x)$$

である. もし $n \leqslant f(x) < n + 1$ ならば $k - 1 \leqslant 2^{n+1} f(x) < k$ を満たす

$$k \in \{2^{n+1}n + 1, 2^{n+1}n + 2, \cdots, 2^{n+1}(n + 1)\}$$

が取れて,

$$f_n(x) = n \leqslant \frac{k-1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$$

である. そしてもし $f(x) < n$ ならば $k - 1 \leqslant 2^n f(x) < k$ を満たす

$$k \in \{2^n n + 1, 2^n n + 2, \cdots, 2^n n\}$$

が取れて, $2k - 2 \leqslant 2^{n+1} f(x) < 2k$ であるから,

$$f_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leqslant f_{n+1}(x)$$

である. よって任意の $x \in X$ に対し $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加列である.

(2) 任意の $x \in X$ を取る. もし $f(x) = \infty$ ならば $f_n(x) = n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であるから

$$f(x) = \infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} n = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

である. $f(x) < \infty$ であるとする. 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し,

$$f(x) < n_0, \quad \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$$

を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が取れる. $n \geqslant n_0$ なる任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $2^n f(x) < 2^n n$ だから $k - 1 \leqslant 2^n f(x) < k$ を満たす $k \in \{1, \cdots, 2^n n\}$ が取れて,

$$f_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^n} = f_n(x)$$

である. よって,

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) < \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$$

であるので $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が成り立つ. (1) より $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加列なので,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

が成り立つ.

□

5.2 測度と積分の定義, 収束定理

定義 5.30. X を集合, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の部分集合の列とする.

(1) $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が非交叉であるとは, $n \neq m$ なる任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対し $E_n \cap E_m = \varnothing$ が成り立つことを言う.
(2) $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $E_n \subseteq E_{n+1}$ が成り立つことを言う.
(3) $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が単調減少であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $E_n \supseteq E_{n+1}$ が成り立つことを言う.

定義 5.31 (測度)**.** $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間とする. $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ が次の条件を満たすとき, μ を可測空間 $(X, \mathfrak{M})$ 上の測度と言う.

(1) $\mu(\varnothing) = 0$.
(2) $\mathfrak{M}$ の任意の非交叉列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し, $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$*40.

(2) の性質を測度の σ-加法性と言う. 可測空間 $(X, \mathfrak{M})$ に測度 $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ が備わったもの $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間と言う.

命題 5.32 (測度の基本性質)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とする. このとき次が成り立つ.

(1) 互いに交わらない有限個の $E_1, \cdots, E_n \in \mathfrak{M}$ に対し $\mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k)$.
(2) $F \subseteq E$ を満たす任意の $E, F \in \mathfrak{M}$ に対し $\mu(F) \leqslant \mu(E)$.
(3) $\mathfrak{M}$ の任意の列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$.
(4) $\mathfrak{M}$ の任意の単調増加列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$.
(5) $\mu(E_1) < \infty$ を満たす $\mathfrak{M}$ の任意の単調減少列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$.

証明. (1) $E_k = \varnothing$ $(\forall k \in \mathbb{N} : k \geqslant n+1)$ とおけば $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は $\mathfrak{M}$ の非交叉列であり $\bigcup_{k=1}^n E_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ だから, 測度の定義より,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_k) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k)$$

である.

(2) $E = F \cup (E \backslash F)$ であり, $F, E \backslash F \in \mathfrak{M}$ は互いに交わらないから, (1) より,

$$\mu(F) \leqslant \mu(F) + \mu(E \backslash F) = \mu(E)$$

である.

(3)

$$F_1 := E_1, \quad F_n := E_n \backslash (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1}) \quad (\forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant 2)$$

とおけば $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathfrak{M}$ の非交叉列であり,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n, \quad F_n \subseteq E_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

である. よって (2) より,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$$

である.

(4) $\mu(E_n) = \infty$ なる $n \in \mathbb{N}$ が存在する場合は (2) より,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$$

*40 $[0, \infty]$ の元の無限和については定義 3.28 を参照.

である．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mu(E_n) < \infty$ であると仮定する．$E_0 := \varnothing$ とおき，

$$F_n := E_n \backslash E_{n-1} \in \mathfrak{M} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおくと，$(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加列であることから $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は非交叉列であり $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ である．そして (1) と $\mu(E_n) < \infty$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であることから，

$$\mu(F_n) = \mu(E_n) - \mu(E_{n-1}) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるので，

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n) = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} \mu(F_n) \\ &= \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} (\mu(E_n) - \mu(E_{n-1})) = \sup_{N\in\mathbb{N}} \mu(E_N)\end{aligned}$$

である．

(5) (1), (2) より，

$$\mu(E_1 \backslash E_n) = \mu(E_1) - \mu(E_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$
$$\mu\left(E_1 \backslash \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)$$

であり，$(E_1 \backslash E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathfrak{M}$ の単調増加列であるので，(4) より，

$$\begin{aligned}\mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= \mu\left(E_1 \backslash \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_1 \backslash E_n)\right) \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_1 \backslash E_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (\mu(E_1) - \mu(E_n)) \\ &= \mu(E_1) - \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)\end{aligned}$$

である．よって $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$ が成り立つ．

□

定義 5.33. 命題 5.32 における測度の性質 (1) を有限加法性，(2) を単調性，(3) を劣 σ-加法性，(4), (5) を単調収束性と言う．

定義 5.34 (測度の制限)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間，$A \in \mathfrak{M}$, $A \neq \varnothing$ とし，$\mathfrak{M}$ の A 上の相対 σ-加法族 (定義 5.3) を $\mathfrak{M}_A$ とおく．このとき $A \in \mathfrak{M}$ より $\mathfrak{M}_A \subseteq \mathfrak{M}$ であるから，$\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ を $\mathfrak{M}_A$ 上に制限することで可測空間 $(A, \mathfrak{M}_A)$ 上の測度

$$\mu_A : \mathfrak{M}_A \ni E \mapsto \mu(E) \in [0, \infty]$$

が定義できる．以後，文脈から意味が明らかな場合は μ_A はそのまま μ と表す．

定義 5.35 (非負値可測単関数の積分)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とする．可測空間 $(X, \mathfrak{M})$ 上の任意の非負値可測単関数 $f : X \to [0, \infty)$ に対し，命題 5.28 より互いに交わらない有限個の $E_1, \cdots, E_n \in \mathfrak{M}$ と $a_1, \cdots, a_n \in [0, \infty)$ で，

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \tag{5.3}$$

を満たすものが取れる．そこで非負値可測単関数 f の μ による積分を，

$$\int_X f(x) d\mu(x) := \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) \in [0, \infty]$$

と定義する．次の命題 5.36 よりこの定義は well-defined である．つまりこの非負値可測単関数 f の μ による積分の定義は (5.3) を満たす互いに交わらない有限個の $E_1, \cdots, E_n \in \mathfrak{M}$ と $a_1, \cdots, a_n \in [0, \infty)$ の取り方によらない．

命題 5.36. $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を測度空間とし, $f: X \to [0,\infty)$ を非負値可測単関数とする. $E_1,\cdots,E_n \in \mathfrak{M}$, $F_1,\cdots,F_m \in \mathfrak{M}$ をそれぞれ非交叉列とし, $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m \in [0,\infty)$ に対し,

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} = \sum_{k=1}^{m} b_m \chi_{F_k}$$

が成り立つと仮定する. このとき,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k)$$

が成り立つ.

証明. 測度の有限加法性 (命題 5.32 の (1)) より,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k),$$
$$\sum_{k=1}^{m} b_m \mu(F_k) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_m \mu(E_j \cap F_k)$$

である. $\mu(E_j \cap F_k) > 0$ なる任意の j,k に対し $E_j \cap F_k \neq \varnothing$ なので任意の $x \in E_j \cap F_k$ を取れば $a_j = f(x) = b_k$ を得る. よって,

$$a_j \mu(E_j \cap F_k) = b_k \mu(E_j \cap F_k) \quad (\forall j \in \{1,\cdots,n\}, \forall k \in \{1,\cdots,m\})$$

であるので,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_k \mu(E_j \cap F_k) = \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k).$$

□

命題 5.37 (非負値可測単関数の積分の基本性質). $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を測度空間とする. 次が成り立つ.

(1) 任意の非負値可測単関数 $f: X \to [0,\infty)$ と任意の $\alpha \in [0,\infty)$ に対し,

$$\int_X \alpha f(x) d\mu(x) = \alpha \int_X f(x) d\mu(x).$$

(2) 任意の非負値可測単関数 $f, g: X \to [0,\infty)$ に対し,

$$\int_X f(x) + g(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X g(x) d\mu(x).$$

(3) 非負値可測単関数 $f, g: X \to [0,\infty)$ が $f(x) \leqslant g(x)$ $(\forall x \in X)$ を満たすならば,

$$\int_X f(x) d\mu(x) \leqslant \int_X g(x) d\mu(x).$$

(4) 非負値可測単関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と非負値可測単関数 g が,

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X), \quad g(x) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \quad (\forall x \in X)$$

を満たすならば,

$$\int_X g(x) d\mu(x) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x) d\mu(x).$$

証明. (1) 定義 5.35 より自明である.

(2) $E_1, \cdots, E_n \in \mathfrak{M}$, $F_1, \cdots, F_m \in \mathfrak{M}$ をそれぞれ非交叉列, $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m \in [0, \infty)$ とし,

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}, \quad g = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}$$

とする. このとき,

$$f + g = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \chi_{E_j \cap F_k}$$

であるから, 定義 5.35 と測度の有限加法性 (命題 5.32 の (1)) より,

$$\begin{aligned}
\int_X f(x) + g(x) d\mu(x) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k) \\
&= \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X g(x) d\mu(x).
\end{aligned}$$

(3) $E_1, \cdots, E_n \in \mathfrak{M}$, $F_1, \cdots, F_m \in \mathfrak{M}$ をそれぞれ非交叉列, $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m \in [0, \infty)$ とし,

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}, \quad g = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}$$

とする. $\mu(E_j \cap F_k) > 0$ を満たす任意の j, k に対し $E_j \cap F_k \neq \emptyset$ だから任意の $x \in E_j \cap F_k$ を取れば $a_j = f(x) \leqslant g(x) = b_k$ となる. よって,

$$a_j \mu(E_j \cap F_k) \leqslant b_k \mu(E_j \cap F_k) \quad (\forall j \in \{1, \cdots, n\}, \forall k \in \{1, \cdots, m\})$$

が成り立つので, 定義 5.35 と測度の有限加法性より,

$$\begin{aligned}
\int_X f(x) d\mu(x) &= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k) = \int_X g(x) d\mu(x).
\end{aligned}$$

(4) $A := (g > 0) \in \mathfrak{M}$ とおく. $A = \emptyset$ ならば $g = 0$ より自明に成り立つので $A \neq \emptyset$ とする. そして,

$$\alpha := \min(g(A)) \in (0, \infty), \quad \beta := \max(g(A)) \in (0, \infty)$$

とおく.

$$A_{k,n} := A \cap \left(g - \frac{1}{k} < f_n \right) \quad (\forall k, n \in \mathbb{N})$$

とおくと, 仮定より任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $(A_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathfrak{M}$ の単調増加列であり,

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{k,n} \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

である. よって測度の単調収束性 (命題 5.32 の (4)) より,

$$\mu(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_{k,n}) \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \tag{5.4}$$

である. $\alpha - \frac{1}{k} > 0$ なる $k \in \mathbb{N}$ を取れば, (3) より,

$$\begin{aligned}\left(\alpha - \frac{1}{k}\right)\mu(A_{k,n}) &= \int_X \left(\alpha - \frac{1}{k}\right)\chi_{A_{k,n}}(x)d\mu(x) \leqslant \int_X \left(g(x) - \frac{1}{k}\right)\chi_{A_{k,n}}(x)d\mu(x) \\ &\leqslant \int_X f_n(x)\chi_{A_{k,n}}(x)d\mu(x) \leqslant \int_X f_n(x)d\mu(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

となるから, (5.4) より,

$$\left(\alpha - \frac{1}{k}\right)\mu(A) = \left(\alpha - \frac{1}{k}\right)\sup_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_{k,n}) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_X f_n(x)d\mu(x).$$

よってもし $\mu(A) = \infty$ ならば,

$$\left(\alpha - \frac{1}{k}\right)\mu(A) = \infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_X f_n(x)d\mu(x)$$

だから,

$$\int_X g(x)d\mu(x) \leqslant \infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_X f_n(x)d\mu(x)$$

である. $\mu(A) < \infty$ の場合,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A\backslash A_{n,k}) = A\backslash\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_{k,n} = \varnothing \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

であることと測度の単調収束性 (命題 5.32 の (5)) より,

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\mu(A\backslash A_{n,k}) = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \tag{5.5}$$

が成り立つ. (2), (3) より,

$$\begin{aligned}\int_X g(x)d\mu(x) &= \int_X g(x)\chi_A(x)d\mu(x) = \int_X g(x)\chi_{A_{k,n}}(x)d\mu(x) + \int_X g(x)\chi_{A\backslash A_{k,n}}(x)d\mu(x) \\ &\leqslant \int_X \left(f_n(x) + \frac{1}{k}\right)\chi_{A_{k,n}}(x)d\mu(x) + \beta\mu(A\backslash A_{k,n}) \\ &\leqslant \int_X f_n(x)d\mu(x) + \frac{1}{k}\mu(A) + \beta\mu(A\backslash A_{k,n}) \quad (\forall k, n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

であるから,

$$s := \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_X f_n(x)d\mu(x) \in [0, \infty]$$

とおくと,

$$\int_X g(x)d\mu(x) \leqslant s + \frac{1}{k}\mu(A) + \beta\mu(A\backslash A_{k,n}) \quad (\forall k, n \in \mathbb{N}) \tag{5.6}$$

となる. 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ を取る. $\frac{1}{k}\mu(A) < \frac{\varepsilon}{2}$ なる $k \in \mathbb{N}$ を取れば, (5.6) より,

$$\int_X g(x)d\mu(x) \leqslant s + \frac{\varepsilon}{2} + \beta\mu(A\backslash A_{k,n}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{5.7}$$

となる. そしてこの $k \in \mathbb{N}$ に対し (5.5) より $\beta\mu(A\backslash A_{k,n}) < \frac{\varepsilon}{2}$ なる $n \in \mathbb{N}$ が取れるので, (5.7) より,

$$\int_X g(x)d\mu(x) \leqslant s + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = s + \varepsilon$$

となる. $\varepsilon \in (0, \infty)$ は任意なので,

$$\int_X g(x)d\mu(x) \leqslant s = \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_X f_n(x)d\mu(x)$$

が成り立つ.

□

定義 5.38 (非負値可測関数の積分)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, $f : X \to [0, \infty]$ を非負値可測関数とする．このとき f の μ による積分を,

$$\int_X f(x)d\mu(x) := \sup\left\{\int_X s(x)d\mu(x) \in [0,\infty] : s \text{ は } s(x) \leqslant f(x)\ (\forall x \in X) \text{ を満たす非負値可測単関数}\right\}$$

と定義する．命題 5.37 の (3) より, この定義は非負値可測単関数の積分の定義 5.35 と矛盾しない.

命題 5.39 (非負値可測関数の積分の基本性質)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とする．次が成り立つ.

(1) 非負値可測関数 $f, g : X \to [0, \infty]$ が $f(x) \leqslant g(x)$ $(\forall x \in X)$ を満たすならば,

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leqslant \int_X g(x)d\mu(x).$$

(2) 非負値可測単関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と非負値可測関数 $f : X \to [0, \infty]$ が,

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X), \quad f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \quad (\forall x \in X)$$

を満たすならば,

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x)d\mu(x).$$

(3) 任意の非負値可測単関数 $f : X \to [0, \infty]$ と任意の $\alpha \in [0, \infty)$ に対し,

$$\int_X \alpha f(x)d\mu(x) = \alpha \int_X f(x)d\mu(x).$$

(4) 任意の非負値可測単関数 $f, g : X \to [0, \infty]$ に対し,

$$\int_X f(x) + g(x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X g(x)d\mu(x).$$

証明. (1) 定義 5.38 より自明である.

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n(x) \leqslant f(x)$ $(\forall x \in X)$ であるから, 定義 5.38 より,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x)d\mu(x) \leqslant \int_X f(x)d\mu(x)$$

である．$s(x) \leqslant f(x)$ を満たす任意の非負値可測単関数 s に対し $s(x) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ $(\forall x \in X)$ であるから, 命題 5.37 の (4) より,

$$\int_X s(x)d\mu(x) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x)d\mu(x)$$

である．よって定義 5.38 より,

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x)d\mu(x)$$

である．ゆえに,

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)d\mu(x)$$

である.

(3) 命題 5.29 より非負値可測単関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \quad (\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}), \quad f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \quad (\forall x \in X)$$

を満たすものが取れる．よって (2) より,

$$\begin{aligned}\int_X \alpha f(x)d\mu(x) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X \alpha f_n(x)d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha \int_X f_n(x)d\mu(x) \\ &= \alpha \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x)d\mu(x) = \alpha \int_X f(x)d\mu(x)\end{aligned}$$

である.

(4) 命題 5.29 より非負値可測単関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X), \quad f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x),$$
$$g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X), \quad g(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$$

なるものが取れる. このとき $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は非負値可測単関数の列であり,

$$f_n(x) + g_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) + g_{n+1}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X),$$
$$f(x) + g(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(f_n(x) + g_n(x)) \quad (\forall x \in X)$$

であるから, (2) と命題 5.37 の (2), (3) より,

$$\begin{aligned}
\int_X f(x) + g(x) d\mu(x) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_X f_n(x) + g_n(x) d\mu(x) \right) \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_X f_n(x) d\mu(x) + \int_X g_n(x) d\mu(x) \right) \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x) d\mu(x) + \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X g_n(x) d\mu(x) \\
&= \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X g(x) d\mu(x).
\end{aligned}$$

□

定理 5.40 (単調収束定理)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(X, \mathfrak{M})$ 上の非負値可測関数の列で,

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X)$$

を満たすものとする. このとき,

$$\int_X \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x) d\mu(x)$$

が成り立つ[*41].

証明. $f(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ $(\forall x \in X)$ とおく. 非負値可測関数の積分の単調性 (命題 5.39 の (1)) より,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x) d\mu(x) \leqslant \int_X f(x) d\mu(x). \tag{5.8}$$

が成り立つ. この逆の不等式が成り立つことを示す. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し命題 5.29 より非負値可測単関数の列 $(f_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ で,

$$f_{n,m}(x) \leqslant f_{n,m+1}(x) \quad (\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in X), \quad f_n(x) = \sup_{m\in\mathbb{N}} f_{n,m}(x) \quad (\forall x \in X)$$

を満たすものが取れる. これに対し非負値可測単関数の列 $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ を,

$$g_m := \max(f_{1,m}, f_{2,m}, \cdots, f_{m,m}) \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$

として定義すると[*42],

$$g_m(x) \leqslant g_{m+1}(x) \quad (\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in X), \tag{5.9}$$
$$g_m(x) \leqslant f_m(x) \quad (\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in X) \tag{5.10}$$

となる. (5.10) より,

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} g_m(x) \leqslant \sup_{m\in\mathbb{N}} f_m(x) = f(x) \quad (\forall x \in X)$$

[*41] $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n : X \ni x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \in [0, \infty]$ の可測性については命題 5.26 を参照.
[*42] g_m の可測性については命題 5.26 の (1) を参照.

であり,

$$f_n(x) = \sup_{m\in\mathbb{N}} f_{n,m}(x) = \sup_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\geqslant n}} f_{n,m}(x) \leqslant \sup_{m\in\mathbb{N}} g_m(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X)$$

より,

$$f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \leqslant \sup_{m\in\mathbb{N}} g_m(x) \quad (\forall x \in X).$$

であるから,

$$f(x) = \sup_{m\in\mathbb{N}} g_m(x) \quad (\forall x \in X) \tag{5.11}$$

が成り立つ. $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ は非負値可測単関数の列であるので (5.9), (5.11) と命題 5.39 の (2) より,

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \int_X g_m(x)d\mu(x)$$

が成り立つ. ここで (5.10) より,

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \int_X g_m(x)d\mu(x) \leqslant \sup_{m\in\mathbb{N}} \int_X f_m(x)d\mu(x)$$

だから, (5.8) の逆の不等式を得る. □

命題 5.41 (Fatou の補題). $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(X, \mathfrak{M})$ 上の非負値可測関数の列とする. このとき,

$$\int_X \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} f_k(x)d\mu(x) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \int_X f_k(x)d\mu(x)$$

が成り立つ[*43].

証明. 非負値可測関数の列 $(\inf_{k\geqslant n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ は,

$$\inf_{k\geqslant n} f_k(x) \leqslant \inf_{k\geqslant n+1} f_k(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X)$$

を満たすから単調収束定理 5.40 より,

$$\int_X \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} f_k(x)d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X \inf_{k\geqslant n} f_k(x)d\mu(x)$$

であり, 非負値可測関数の積分の単調性 (命題 5.39 の (1)) より,

$$\int_X \inf_{k\geqslant n} f_k(x)d\mu(x) \leqslant \inf_{k\geqslant n} \int_X f_k(x)d\mu(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから求める結果を得る. □

命題 5.42. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, $f : X \to [0, \infty]$ を可測関数とする. このとき,

$$\int_X \infty\, f(x)d\mu(x) = \infty \int_X f(x)d\mu(x)$$

が成り立つ[*44].

証明.

$$\infty\, f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} nf(x) \quad (\forall x \in X)$$

であるから単調収束定理 5.40 と命題 5.39 の (3) より,

$$\int_X \infty\, f(x)d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X nf(x)d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} n \int_X f(x)d\mu(x) = \infty \int_X f(x)d\mu(x)$$

である. □

---

*43 $\inf_{k\geqslant n} f_k : X \ni x \mapsto \inf_{k\geqslant n} f_k(x) \in [0, \infty]$ の可測性と $\sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} f_k : X \ni x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} f_k(x) \in [0, \infty]$ の可測性については命題 5.26 を参照.

*44 拡張された実数系における演算の定義 1.100 を参照

定義 5.43 (零集合)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とする. $N \in \mathfrak{M}$ が $\mu(N) = 0$ を満たすとき, N を μ-零集合と言う.

命題 5.44. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とする. 任意の μ-零集合 $N \in \mathfrak{M}$ と任意の非負値可測関数 $f : X \to [0, \infty]$ に対し,

$$\int_X f(x)\chi_N(x)d\mu(x) = 0$$

が成り立つ.

証明. 命題 5.29 より非負値可測単関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X)$$

なるものを取ると, 命題 5.39 の (2) (もしくは単調収束定理 5.40) より,

$$\int_X f(x)\chi_N(x)d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x)\chi_N(x)d\mu(x)$$

となる. ここで任意の非負値可測単関数

$$s = \sum_{j=1}^{m} a_j\chi_{E_j}$$

に対し,

$$\int_X s(x)\chi_N(x)d\mu(x) = \int_X \sum_{j=1}^{m} a_j\chi_{E_j\cap N}(x)d\mu(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j\mu(E_j \cap N) = 0$$

だから求める結果を得る. □

定義 5.45 (測度に関してほとんど全ての点で成り立つ命題)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とする. μ-零集合 $N \in \mathfrak{M}$ が存在し, 任意の $x \in X\backslash N$ に対して命題 $P(x)$ が成り立つとき, μ に関してほとんど全ての点 $x \in X$ で命題 $P(x)$ が成り立つと言う. さらにこれを略して μ-a.e. $x \in X$ で $P(x)$ が成り立つと言う.

命題 5.46 (非負値可測関数の積分と零集合)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, $f : X \to [0, \infty]$ を可測関数とする. このとき,

(1) $\int_X f(x)d\mu(x) = 0$ ならば μ-a.e. $x \in X$ で $f(x) = 0$ である.
(2) $\int_X f(x)d\mu(x) < \infty$ ならば μ-a.e. $x \in X$ で $f(x) < \infty$ である.

証明. (1) $\int_X f(x)d\mu(x) = 0$ が成り立つとする.

$$(f > 0) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(f > \frac{1}{n}\right)$$

であるから, 測度の劣 σ-加法性 (命題 5.32 の (3)) より,

$$\mu((f > 0)) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(\left(f > \frac{1}{n}\right)\right) \tag{5.12}$$

である. そして非負値可測関数の積分の単調性 (命題 5.39 の (1)) より,

$$\frac{1}{n}\mu\left(\left(f > \frac{1}{n}\right)\right) = \int_X \frac{1}{n}\chi_{(f>\frac{1}{n})}(x)d\mu(x) \leqslant \int_X f(x)d\mu(x) = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから (5.12) の右辺は 0 なので $\mu((f > 0)) = 0$ である. ゆえに μ-a.e. $x \in X$ で $f(x) = 0$ である.

(2) $\int_X f(x)d\mu(x) < \infty$ が成り立つとする.

$$(f = \infty) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (n < f)$$

であり, 非負値可測関数の積分の単調性より,

$$n\mu((n < f)) = \int_X n\chi_{(n<f)}(x)d\mu(x) \leqslant \int_X f(x)d\mu(x) < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

である．そして $\mathfrak{M}$ の列 $((n < f))_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少列であるから，測度の単調収束性 (命題 5.32 の (5)) より，

$$\mu((f=\infty)) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu((n<f)) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\int_X f(x)d\mu(x) = 0$$

である．よって μ-a.e. $x \in X$ で $f(x) < \infty$ である．

□

定義 5.47 ($\overline{\mathbb{R}}$ 値可測関数の可積分性と積分の定義)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間，$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ を可測関数とする．f は非負値可測関数*45

$$f_\pm = \max(\pm f, 0) : X \ni x \mapsto \max(\pm f(x), 0) \in [0, \infty]$$

に対し，

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \ \ (\forall x \in X)$$

と表される．そこで，

$$f \text{ は } \mu \text{ に関して可積分} \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \int_X f_\pm(x)d\mu(x) < \infty$$

と定義し，f が μ に関して可積分のとき，f の μ に関する積分を，

$$\int_X f(x)d\mu(x) := \int_X f_+(x)d\mu(x) - \int_X f_-(x)d\mu(x) \in \mathbb{R}$$

と定義する．もし f が非負値可測関数であるならば $f_+ = f, f_- = 0$ であるから，この定義は非負値可測関数の積分の定義 5.38 と矛盾しない．

注意 5.48. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間，$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ を可測関数とする．

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x) \ \ (\forall x \in X)$$

であるから，命題 5.39 の (4) より，

$$\int_X |f(x)|d\mu(x) = \int_X f_+(x)d\mu(x) + \int_X f_-(x)d\mu(x)$$

である．よって，

$$f \text{ は } \mu \text{ に関して可積分} \ \Leftrightarrow\ \int_X f_\pm(x)d\mu(x) < \infty \ \Leftrightarrow\ \int_X |f(x)|d\mu(x) < \infty$$

である．

命題 5.49 (可積分関数は a.e. で実数値)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間，$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ を μ に関して可積分な関数とする．このとき μ-a.e. $x \in X$ で $f(x) \in \mathbb{R}$ が成り立つ．

証明. $\int_X |f(x)|d\mu(x) < \infty$ であるから，命題 5.46 の (2) より μ-a.e. $x \in X$ で $|f(x)| < \infty$，すなわち，$f(x) \in \mathbb{R}$. □

命題 5.50 ($\overline{\mathbb{R}}$ 値関数の積分の基本性質)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とする．このとき，

(1) μ に関して可積分な関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ と任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$\alpha f : X \ni x \mapsto \alpha f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ は μ に関して可積分であり，

$$\int_X \alpha f(x)d\mu(x) = \alpha\int_X f(x)d\mu(x)$$

が成り立つ．

(2) μ に関して可積分な関数 $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対し $f + g : X \ni x \mapsto f(x) + g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ が定義できるとすると，$f + g$ は μ に関して可積分であり，

$$\int_X f(x) + g(x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X g(x)d\mu(x)$$

が成り立つ．

*45 可測性に関しては命題 5.26 を参照.

証明. (1) 命題 5.39 の (3) より,

$$\int_X |\alpha f(x)| d\mu(x) = \int_X |\alpha||f(x)| d\mu(x) = |\alpha| \int_X |f(x)| d\mu(x) < \infty$$

であるから αf は μ に関して可積分である. $\alpha \geqslant 0$ の場合,

$$(\alpha f)_\pm(x) = \max(\pm\alpha f(x), 0) = \alpha \max(\pm f(x), 0) = \alpha f_\pm(x) \quad (\forall x \in X)$$

であるから, 命題 5.39 の (3) より,

$$\begin{aligned}
\int_X \alpha f(x) d\mu(x) &= \int_X (\alpha f)_+(x) d\mu(x) - \int_X (\alpha f)_-(x) d\mu(x) \\
&= \int_X \alpha f_+(x) d\mu(x) - \int_X \alpha f_-(x) d\mu(x) \\
&= \alpha \left(\int_X f_+(x) d\mu(x) - \int_X f_-(x) d\mu(x) \right) \\
&= \alpha \int_X f(x) d\mu(x)
\end{aligned}$$

であり, $\alpha < 0$ の場合,

$$(\alpha f)_\pm(x) = \max(\pm\alpha f(x), 0) = (-\alpha)\max(\mp f(x), 0) = (-\alpha) f_\mp(x) \quad (\forall x \in X)$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\int_X \alpha f(x) d\mu(x) &= \int_X (\alpha f)_+(x) d\mu(x) - \int_X (\alpha f)_-(x) d\mu(x) \\
&= \int_X (-\alpha) f_-(x) d\mu(x) - \int_X (-\alpha) f_+(x) d\mu(x) \\
&= -\alpha \left(\int_X f_-(x) d\mu(x) - \int_X f_+(x) d\mu(x) \right) \\
&= \alpha \int_X f(x) d\mu(x)
\end{aligned}$$

である.

(2) 命題 5.39 の (1), (4) より,

$$\int_X |f(x) + g(x)| d\mu(x) \leqslant \int_X |f(x)| + |g(x)| d\mu(x) = \int_X |f(x)| d\mu(x) + \int_X |g(x)| d\mu(x) < \infty$$

であるから $f + g$ は μ に関して可積分である.

$$(f+g)_+(x) - (f+g)_-(x) = f(x) + g(x) = (f_+(x) - f_-(x)) + (f_+(x) - g_-(x)) \quad (\forall x \in X)$$

より,

$$(f+g)_+(x) + f_-(x) + g_-(x) = (f+g)_-(x) + f_+(x) + g_+(x) \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つ. よって命題 5.39 の (4) より,

$$\begin{aligned}
&\int_X (f+g)_+(x) d\mu(x) + \int_X f_-(x) d\mu(x) + \int_X g_-(x) d\mu(x) \\
&= \int_X (f+g)_-(x) d\mu(x) + \int_X f_+(x) d\mu(x) + \int_X g_+(x) d\mu(x)
\end{aligned}$$

であるから, 整理すれば,

$$\begin{aligned}
&\int_X (f+g)_+(x) d\mu(x) - \int_X (f+g)_-(x) d\mu(x) \\
&= \int_X f_+(x) d\mu(x) - \int_X f_-(x) d\mu(x) + \int_X g_+(x) d\mu(x) - \int_X g_-(x) d\mu(x)
\end{aligned}$$

となる．ゆえに，

$$\int_X f(x)+g(x)d\mu(x)=\int_X f(x)d\mu(x)+\int_X g(x)d\mu(x)$$

が成り立つ．

□

定義 5.51 (複素数値可測関数の可積分性と積分の定義)**.** $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を測度空間とする．複素数値可測関数 $f:X\to\mathbb{C}$ に対し，

$$f \text{ は } \mu \text{ に関して可積分} \quad\Leftrightarrow\quad \int_X |f(x)|d\mu(x)<\infty$$

と定義する．このとき非負値可測関数の積分の単調性より，

$$\int_X |\mathrm{Re}(f(x))|d\mu(x)\leqslant\int_X |f(x)|d\mu(x)<\infty,$$
$$\int_X |\mathrm{Im}(f(x))|d\mu(x)\leqslant\int_X |f(x)|d\mu(x)<\infty$$

であるから，$\mathrm{Re}(f):X\ni x\mapsto\mathrm{Re}(f(x))\in\mathbb{R}$ と $\mathrm{Im}(f):X\ni x\mapsto\mathrm{Im}(f(x))\in\mathbb{R}$ は共に μ に関して可積分である．そこで f の μ に関する積分を，

$$\int_X f(x)d\mu(x):=\int_X \mathrm{Re}(f(x))d\mu(x)+i\int_X \mathrm{Im}(f(x))d\mu(x)\in\mathbb{C}$$

として定義する．

注意 5.52. 定義 5.51 は定義 5.47 と矛盾しない．

注意 5.53. $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を測度空間とする．複素数値可測関数 $f:X\to\mathbb{C}$ に対し，

$$|f(x)|\leqslant|\mathrm{Re}(f(x))|+|\mathrm{Im}(f(x))|\quad(\forall x\in X)$$

であるから，

$$f \text{ は } \mu \text{ に関して可積分} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f) \text{ は } \mu \text{ に関して可積分}$$

である．

定義 5.54 (可測関数全体と可積分関数全体)**.** $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を測度空間とする．

$$\mathcal{L}(X,\mathfrak{M}):=\{f:X\to\mathbb{C}: f \text{ は可測関数}\},$$
$$\mathcal{L}^1(X,\mathfrak{M},\mu):=\{f\in\mathcal{L}(X,\mathfrak{M}): f \text{ は } \mu \text{ に関して可積分}\},$$
$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,\mathfrak{M},\mu):=\{f\in\mathcal{L}^1(X,\mathfrak{M},\mu): f \text{ は実数値}\}$$

とおく．

注意 5.55. 命題 5.26 より $\mathcal{L}(X,\mathfrak{M})$ は各点ごとの演算 (定義 2.5) により $\mathbb{C}$ 上の可換な $*$-環 (定義 2.4) である (ただし $*$-演算は各点ごとの複素共役)．

命題 5.56 (線型汎関数としての積分)**.** $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を測度空間とする．このとき $\mathcal{L}^1(X,\mathfrak{M},\mu)$ は各点ごとの演算により $\mathbb{C}$ 上の線型空間である．そして積分

$$\mathcal{L}^1(X,\mathfrak{M},\mu)\ni f\mapsto\int_X f(x)d\mu(x)\in\mathbb{C} \tag{5.13}$$

は線型汎関数であり，

$$\left|\int_X f(x)d\mu(x)\right|\leqslant\int_X |f(x)|d\mu(x)\quad(\forall f\in\mathcal{L}^1(X,\mathfrak{M},\mu)) \tag{5.14}$$

が成り立つ．

証明. 任意の $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ と任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し, 命題 5.39 より,

$$\begin{aligned}
&\int_X |f(x)+g(x)|d\mu(x) \leqslant \int_X |f(x)|+|g(x)|d\mu(x) \leqslant \int_X |f(x)|d\mu(x) + \int_X |g(x)|d\mu(x) < \infty,\\
&\int_X |\alpha f(x)|d\mu(x) = \int_X |\alpha||f(x)|d\mu(x) = |\alpha| \int_X |f(x)|d\mu(x) < \infty
\end{aligned}$$

であるから $f+g, \alpha f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ である. よって $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ は $\mathbb{C}$ 上の線型空間 $\mathcal{L}(X, \mathfrak{M})$ の線型部分空間である.
また任意の $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ と任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し, 命題 5.50 より,

$$\begin{aligned}
&\int_X f(x)+g(x)d\mu(x) = \int_X \mathrm{Re}(f(x)) + \mathrm{Re}(g(x))d\mu(x) + i\int_X \mathrm{Im}(f(x)) + \mathrm{Im}(g(x))d\mu(x)\\
&= \left(\int_X \mathrm{Re}(f(x))d\mu(x) + i\int_X \mathrm{Im}(f(x))d\mu(x)\right) + \left(\int_X \mathrm{Re}(g(x))d\mu(x) + i\int_X \mathrm{Im}(g(x))d\mu(x)\right)\\
&= \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X g(x)d\mu(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_X \alpha f(x)d\mu(x) &= \int_X \mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(f(x)) - \mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}(f(x))d\mu(x)\\
&\quad + i\int_X \mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Im}(f(x)) + \mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Re}(f(x))d\mu(x)\\
&= \mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}\left(\int_X f(x)d\mu(x)\right) - \mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}\left(\int_X f(x)d\mu(x)\right)\\
&\quad + i\left(\mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Im}\left(\int_X f(x)d\mu(x)\right) + \mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Re}\left(\int_X f(x)d\mu(x)\right)\right)\\
&= \alpha\int_X f(x)d\mu(x)
\end{aligned}$$

であるから (5.13) は線型汎関数である. 任意の $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に対し, $\alpha \in \mathbb{C}$ で,

$$|\alpha| = 1, \quad \alpha\int_X f(x)d\mu(x) = \left|\int_X f(x)d\mu(x)\right|$$

を満たすものを取れば, $\mathrm{Re}(\alpha f(x)) \leqslant |\alpha f(x)| = |f(x)|$ $(\forall x \in X)$ であることから,

$$\left|\int_X f(x)d\mu(x)\right| = \alpha\int_X f(x)d\mu(x) = \int_X \alpha f(x)d\mu(x) = \int_X \mathrm{Re}(\alpha f(x))d\mu(x) \leqslant \int_X |f(x)|d\mu(x)$$

を得る. よって (5.14) が成り立つ. □

命題 5.57 (可測関数が a.e. で 0 であるための条件)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{M})$ とする. このとき次は互いに同値である.

(1) μ-a.e. $x \in X$ で $f(x) = 0$.
(2) 任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し $f\chi_E \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ であり,

$$\int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x) = 0.$$

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つならば $(|f| > 0)$ は μ-零集合に含まれる (定義 5.45 を参照) ので $\mu((|f| > 0)) = 0$ である. よって命題 5.44 より,

$$\int_X |f(x)\chi_E(x)|d\mu(x) = \int_X |f(x)|\chi_{E\cap(|f|>0)}(x)d\mu(x) = 0 \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

である. これより (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとして (1) が成り立つことを示す.

$$\int_X \mathrm{Re}(f(x))\chi_E(x)d\mu(x) = 0, \quad \int_X \mathrm{Im}(f(x))\chi_E(x)d\mu(x) = 0 \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

であるから, 最初から f が実数値関数であると仮定して示せば十分である.

$$f_+ = f\chi_{(f\geqslant 0)},\quad f_- = -f\chi_{(f<0)}$$

であるから,

$$\int_X f_+(x)d\mu(x) = \int_X f(x)\chi_{(f\geqslant 0)}(x)d\mu(x) = 0,$$
$$\int_X f_-(x)d\mu(x) = -\int_X f(x)\chi_{f<0}(x)d\mu(x) = 0$$

が成り立つ. よって,

$$\int_X |f(x)|d\mu(x) = \int_X f_+(x)d\mu(x) + \int_X f_-(x)d\mu(x) = 0$$

であるので, 命題 5.46 より μ-a.e. $x \in X$ で $|f(x)| = 0$ である. ゆえに (1) が成り立つ. □

定理 5.58 (Lebesgue 優収束定理の実数値版)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(X, \mathfrak{M})$ 上の実数値可測関数の列, $f : X \to \mathbb{R}$ とし, 次が成り立つとする.

(1) 任意の $x \in X$ に対し $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
(2) μ に関して可積分な非負値可測関数 g で $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X)$ を満たすものが存在する.

このとき $f, f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathfrak{M}, \mu)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であり,

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x)$$

が成り立つ.

証明.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} f_k(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} f_k(x) \quad (\forall x \in X) \tag{5.15}$$

であるから命題 5.26 の (2) より f は可測関数である. そして,

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leqslant g(x) \quad (\forall x \in X)$$

であるから,

$$\int_X |f(x)|d\mu(x),\quad \int_X |f_n(x)|d\mu(x) \leqslant \int_X g(x)d\mu(x) < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

である. よって $f, f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ である. $(g \pm f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は非負値可測関数の列であるから, Fatou の補題 5.41 より,

$$\int_X \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} (g(x) \pm f_k(x))d\mu(x) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \int_X g(x) \pm f_k(x)d\mu(x) \tag{5.16}$$

が成り立つ. (5.15) より,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} (g(x) \pm f_k(x)) = g(x) \pm f(x) \quad (\forall x \in X)$$

であるから,

$$(5.16)\text{ の左辺} = \int_X g(x)d\mu(x) \pm \int_X f(x)d\mu(x)$$

であり,

$$\int_X g(x) \pm f_k(x)d\mu(x) = \int_X g(x)d\mu(x) \pm \int_X f_k(x)d\mu(x) \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

より (5.16) の右辺は,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \int_X g(x) + f_k(x)d\mu(x) = \int_X g(x)d\mu(x) + \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \int_X f_k(x)d\mu(x),$$
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \int_X g(x) - f_k(x)d\mu(x) = \int_X g(x)d\mu(x) - \inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \int_X f_k(x)d\mu(x)$$

である．よって，

$$\int_X g(x)d\mu(x) + \int_X f(x)d\mu(x) \leqslant \int_X g(x)d\mu(x) + \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \int_X f_k(x)d\mu(x),$$
$$\int_X g(x)d\mu(x) - \int_X f(x)d\mu(x) \leqslant \int_X g(x)d\mu(x) - \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} \int_X f_k(x)d\mu(x)$$

が成り立つので，

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} \int_X f_k(x)d\mu(x) \leqslant \int_X f(x)d\mu(x) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \int_X f_k(x)d\mu(x)$$

が成り立つ．ここで，

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \int_X f_k(x)d\mu(x) \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} \int_X f_k(x)d\mu(x)$$

であるから，

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \int_X f_k(x)d\mu(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} \int_X f_k(x)d\mu(x)$$

が成り立つ．これは，

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x)$$

を意味する． □

定理 5.59 (Lebegue 優収束定理)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(X, \mathfrak{M})$ 上の複素数値可測関数の列, $f : X \to \mathbb{C}$ とし, 次が成り立つとする．

(1) 任意の $x \in X$ に対し $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
(2) μ に関して可積分な非負値可測関数 g で $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X)$ を満たすものが存在する．

このとき $f, f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であり，

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x)$$

が成り立つ．

証明. 実数値可測関数の列 $(\mathrm{Re}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ と $\mathrm{Re}(f) : X \to \mathbb{R}$ は，

$$\mathrm{Re}(f(x)) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(f_n(x)) \quad (\forall x \in X),$$
$$|\mathrm{Re}(f_n(x))| \leqslant g(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X)$$

を満たすので, 定理 5.58 より $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Re}(f_n) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathfrak{M}, \mu)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であり，

$$\int_X \mathrm{Re}(f(x))d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X \mathrm{Re}(f_n(x))d\mu(x)$$

が成り立つ．全く同様に $\mathrm{Im}(f), \mathrm{Im}(f_n) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathfrak{M}, \mu)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であり，

$$\int_X \mathrm{Im}(f(x))d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X \mathrm{Im}(f_n(x))d\mu(x)$$

が成り立つ．よって注意 5.53 より $f, f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であり，

$$\begin{aligned}\int_X f(x)d\mu(x) &= \int_X \mathrm{Re}(f(x))d\mu(x) + i\int_X \mathrm{Im}(f(x))d\mu(x)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_X \mathrm{Re}(f_n(x))d\mu(x) + i\int_X \mathrm{Im}(f_n(x))d\mu(x)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu(x)\end{aligned}$$

が成り立つ． □

5.3 単調族定理, Hopf の拡張定理

定義 5.60 (半集合代数)**.** X を空でない集合とする. X の部分集合族 $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ が半集合代数であるとは,

(1) $X, \varnothing \in \mathcal{C}$.
(2) 任意の $C, D \in \mathcal{C}$ に対し $C \cap D \in \mathcal{C}$.
(3) 任意の $C \in \mathcal{C}$ に対し $X \backslash C$ は $\mathcal{C}$ の有限非交叉列の合併.

が成り立つことを言う.

例 5.61. $(X_1, \mathfrak{M}_1), \cdots, (X_N, \mathfrak{M}_N)$ をそれぞれ可測空間とする. 直積空間 $X_1 \times \cdots \times X_N$ の部分集合族

$$\mathfrak{M}_1 \times \cdots \times \mathfrak{M}_N := \{E_1 \times \cdots \times E_N : E_1 \in \mathfrak{M}_1, \cdots, E_N \in \mathfrak{M}_N\}$$

は $X_1 \times \cdots \times X_N$ 上の半集合代数である.

定義 5.62 (有限加法族)**.** X を空でない集合とする. X の部分集合族 $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ が X 上の有限加法族であるとは,

(1) $X \in \mathcal{A}$.
(2) 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $X \backslash A \in \mathcal{A}$.
(3) 任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し $A \cup B \in \mathcal{A}$.

が成り立つことを言う.

注意 5.63. 集合 X 上の σ-加法族は X 上の有限加法族である. また集合 X 上の有限加法族は X 上の半集合代数である.

定義 5.64 (部分集合族から生成される有限加法族)**.** X を空でない集合とし, $\mathcal{I} \subseteq 2^X, \mathcal{I} \neq \varnothing$ とする. このとき $\mathcal{I}$ を含む X 上の有限加法族[*46]全体の交叉は $\mathcal{I}$ を含む最小の有限加法族である. これを $\mathcal{I}$ から生成される有限加法族と言い $\mathcal{A}(\mathcal{I})$ と表す.

命題 5.65 (半集合代数から生成される有限加法族)**.** X を空でない集合, $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ を X 上の半集合代数 (定義 5.60) とする. このとき $\mathcal{C}$ から生成される有限加法族 $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ (定義 5.64) は,

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \{\mathcal{C} \text{ の有限非交叉列の合併}\} \tag{5.17}$$

である.

証明. (5.17) の右辺を $\mathcal{A}$ とおき, $\mathcal{A}$ が X 上の有限加法族であることを示せばよい. 半集合代数の定義 5.60 の (2) より,

$$A \cap B \in \mathcal{A} \ \ (\forall A, B \in \mathcal{A})$$

であり, 半集合代数の定義 5.60 の (3) より,

$$X \backslash C \in \mathcal{A} \ \ (\forall C \in \mathcal{C})$$

である. よって,

$$X \backslash A \in \mathcal{A} \ \ (\forall A \in \mathcal{A})$$

が成り立ち,

$$A \backslash B = A \cap (X \backslash B) \in \mathcal{A} \ \ (\forall A, B \in \mathcal{A})$$

が成り立つ. ゆえに,

$$A \cup B = (A \backslash B) \cup B \in \mathcal{A} \ \ (\forall A, B \in \mathcal{A})$$

が成り立つので $\mathcal{A}$ は有限加法族である. □

[*46] 少なくとも 2^X は $\mathcal{I}$ を含む X 上の有限加法族である.

命題 5.66. X を空でない集合, $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ を X 上の半集合代数とし, $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ から生成される X 上の有限加法族とする. このとき $\mathcal{C}$ から生成される X 上の σ-加法族 $\sigma(\mathcal{C})$ と $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ から生成される X 上の σ-加法族 $\sigma(\mathcal{A}(\mathcal{C}))$ について,

$$\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{A}(\mathcal{C}))$$

が成り立つ.

証明. 命題 5.65 より明らかである. □

定義 5.67 (単調族)**.** X を空でない集合とする. X の部分集合族 $\mathcal{M} \subseteq 2^X$ が X 上の単調族であるとは,

(1) $\mathcal{M}$ の任意の単調増加列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$.
(2) $\mathcal{M}$ の任意の単調減少列 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{M}$.

が成り立つことを言う.

注意 5.68. 集合 X 上の σ-加法族は X 上の単調族である (命題 5.2 を参照).

定義 5.69 (部分集合族から生成される単調族)**.** X を空でない集合とし, $\mathcal{I} \subseteq 2^X, \mathcal{I} \neq \varnothing$ とする. このとき $\mathcal{I}$ を含む X 上の単調族[*47]全体の交叉は $\mathcal{I}$ を含む最小の単調族である. これを $\mathcal{I}$ から生成される単調族と言い $\mathcal{M}(\mathcal{I})$ と表す.

定理 5.70 (単調族定理)**.** X を空でない集合, $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ を X 上の有限加法族 (定義 5.62) とする. このとき $\mathcal{A}$ から生成される X 上の単調族 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ (定義 5.64) と $\mathcal{A}$ から生成される X 上の σ-加法族 $\sigma(\mathcal{A})$ (定義 5.4) について,

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$$

が成り立つ.

証明. 注意 5.68 より $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ である. この逆の包含関係が成り立つことを示すには $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ が σ-加法族であることを示せばよい. 任意の $A \in 2^X$ に対し,

$$\mathcal{M}_A := \{E \in 2^X : E \cup A,\ E \backslash A,\ A \backslash E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} \tag{5.18}$$

とおくと $\mathcal{M}_A$ は明らかに X 上の単調族であり, $A, B \in 2^X$ に対し,

$$B \in \mathcal{M}_A \quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathcal{M}_B \tag{5.19}$$

が成り立つ. (5.18) より,

$$B \in \mathcal{M}_A \ \ (\forall A, B \in \mathcal{A})$$

であるから,

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_A \ \ (\forall A \in \mathcal{A})$$

であり, 右辺は単調族なので,

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}_A \ \ (\forall A \in \mathcal{A}) \tag{5.20}$$

が成り立つ. よって (5.19) より,

$$A \in \mathcal{M}_B \ \ (\forall A \in \mathcal{A},\ \forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}))$$

であるから,

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_B \ \ (\forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}))$$

であり, 右辺は単調族なので,

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}_B \ \ (\forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}))$$

[*47] 少なくとも 2^X は $\mathcal{I}$ を含む X 上の単調族である.

が成り立つ. これより $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ は有限加法族である. 今, 任意の可算部分族 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ を取る. $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ は有限加法族なので,

$$A_n := \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ. よって $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は単調族 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ の単調増加列なので,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

が成り立つ. ゆえに $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ は σ-加法族であるから求める結果を得た. □

定義 5.71 (半集合代数上の有限加法的測度)**.** X を空でない集合, $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ を X 上の半集合代数とする. $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ が $\mathcal{C}$ 上の有限加法的測度であるとは次が成り立つことを言う.

(1) $\mu(\varnothing) = 0$.
(2) $\mathcal{C}$ の有限非交叉列 $C_1, \cdots, C_n$ で $\bigcup_{k=1}^{n} C_k \in \mathcal{C}$ を満たすものに対し,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} C_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(C_k).$$

(2) の性質を μ の有限加法性と言う.

定義 5.72 (半集合代数上の σ-加法的測度)**.** X を空でない集合, $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ を X 上の半集合代数とする. $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ が $\mathcal{C}$ 上の σ-加法的測度であるとは次が成り立つことを言う.

(1) $\mu(\varnothing) = 0$.
(2) $\mathcal{C}$ の非交叉列 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathcal{C}$ を満たすものに対し,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(C_n).$$

(2) の性質を μ の σ-加法性と言う.

半集合代数上の σ-加法的測度は有限加法的測度である.

命題 5.73 (有限加法族上の測度の基本性質)**.** X を空でない集合, $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ を X 上の有限加法族, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ を $\mathcal{A}$ 上の有限加法的測度とする. このとき次が成り立つ.

(1) μ は単調, すなわち, $A \subseteq B$ を満たす任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.
(2) μ は劣有限加法的, すなわち, 任意の有限個の $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ に対し,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

(3) もし $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ が σ-加法的測度ならば μ は σ-劣加法的, すなわち, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ で $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ を満たすものに対し,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

証明. (1) $A \subseteq B$ を満たす任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し,

$$B = A \cup (B \backslash A)$$

であるから μ の有限加法性より,

$$\mu(A) \leqslant \mu(A) + \mu(B \backslash A) = \mu(B)$$

である. よって μ は単調である.

(2) 任意の有限個の $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ に対し，

$$B_1 := A_1, \quad B_k := A_k \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}) \ \ (k = 2, \cdots, n)$$

とおけば $B_1, \cdots, B_n$ は $\mathcal{A}$ の有限非交叉列であり $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n B_k$ である．よって μ の有限加法性と単調性より，

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(B_k) \leqslant \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

である．ゆえに μ は有限劣加法的である．

(3) $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ が σ-加法的であるとする．$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ を満たす任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ に対し，

$$B_1 := A_1, \quad B_n := A_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \ \ (\forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant 2)$$

とおけば $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{A}$ の非交叉列であり $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ である．よって μ の σ-加法性と単調性より，

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

である．ゆえに μ は劣 σ-加法的である．

□

命題 5.74 (半集合代数 $\mathcal{C}$ 上の有限加法的測度の $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 上の有限加法的測度への一意拡張)**.** X を空でない集合, $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ を X 上の半集合代数, $\mu_0 : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ を $\mathcal{C}$ 上の有限加法的測度とする．このとき μ_0 は $\mathcal{C}$ から生成される有限加法族 $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 上の有限加法的測度に一意拡張できる．

証明. 一意性は命題 5.65 と有限加法性より自明である．存在を示す．そのためには命題 5.65 より $\mathcal{C}$ の 2 つの有限非交叉列 $C_1, \cdots, C_n$ と $D_1, \cdots, D_m$ が,

$$\bigcup_{k=1}^n C_k = \bigcup_{l=1}^m D_l$$

を満たすとして,

$$\sum_{k=1}^n \mu_0(C_k) = \sum_{l=1}^m \mu_0(D_l) \tag{5.21}$$

が成り立つことを示せばよいが, μ_0 の有限加法性より，

$$\mu_0(C_k) = \sum_{l=1}^m \mu_0(C_k \cap D_l) \ \ (\forall k \in \{1, \cdots, n\}),$$
$$\mu_0(D_l) = \sum_{k=1}^n \mu_0(C_k \cap D_l) \ \ (\forall l \in \{1, \cdots, m\})$$

であるので,

$$\sum_{k=1}^n \mu_0(C_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \mu_0(C_k \cap D_l) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n \mu_0(C_k \cap D_l) = \sum_{l=1}^m \mu_0(D_l).$$

よって (5.21) が成り立つ． □

命題 5.75 (半集合代数 $\mathcal{C}$ 上の σ-加法的測度の $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 上の σ-加法的測度への一意拡張)**.** X を空でない集合, $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ を X 上の半集合代数, $\mu_0 : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ を $\mathcal{C}$ 上の σ-加法的測度とする．このとき μ_0 は $\mathcal{C}$ から生成される有限加法族 $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 上の σ-加法的測度に一意拡張できる．

証明. 一意性は命題 5.65 と有限加法性より自明である．存在を示す．命題 5.74 より有限加法的測度 $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{C}) \to [0, \infty]$ で μ_0 の拡張であるものが取れる．μ が $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 上の σ-加法的測度であることを示せばよい．2 つのステップに分けて示す．

(1) $\mathcal{C}$ の非交叉列 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ を満たすものに対し,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(C_n) \tag{5.22}$$

が成り立つことを示す. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ であるから命題 5.65 より $\mathcal{C}$ の有限非交叉列 $D_1, \cdots, D_m$ で,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcup_{k=1}^{m} D_k$$

を満たすものが取れる. $\mu_0 : \mathcal{C} \to [0,\infty]$ の σ-加法性より,

$$\mu_0(D_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(C_n \cap D_k) \ \ (\forall k \in \{1,\cdots,m\}),$$
$$\mu_0(C_n) = \sum_{k=1}^{m} \mu_0(C_n \cap D_k) \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから, $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{C}) \to [0,\infty]$ の有限加法性より,

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} D_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu_0(D_k) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(C_n \cap D_k) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{m} \mu_0(C_n \cap D_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(C_n)\end{aligned}$$

となる. よって (5.22) が成り立つ.

(2) $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ の非交叉列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ を満たすものに対し,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \tag{5.23}$$

が成り立つことを示す. 命題 5.65 より各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{C}$ の有限非交叉列 $C_{n,1}, \cdots, C_{n,m(n)}$ で $A_n = \bigcup_{k=1}^{m(n)} C_{n,k}$ を満たすものが取れる.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k=1}^{m(n)} C_{n,m(n)} \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$$

であり,

$$C_{1,1}, \cdots, C_{1,m(1)}, C_{2,1}, \cdots, C_{2,m(2)}, C_{3,1}, \cdots C_{3,m(n)} \cdots$$

は $\mathcal{C}$ の非交叉列なので (1) より,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k=1}^{m(n)} C_{n,m(n)}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{m(n)} \mu_0(C_{n,k}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

となる. よって (5.23) が成り立つ.

(2) より $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{C}) \to [0,\infty]$ は σ-加法的測度である. よって求める結果を得た. □

補題 5.76 (Hopf の拡張定理の補題)**.** X を空でない集合, $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ を X 上の有限加法族, $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ を σ-加法的測度 (定義 5.72) とする. そして $\mu^* : 2^X \to [0,\infty]$ を,

$$\mu^*(E) := \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) : \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A},\ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\} \ \ (\forall E \in 2^X) \tag{5.24}$$

と定義し,

$$\mathfrak{M} := \{A \in 2^X : \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \backslash A) = \mu^*(E)\ (\forall E \in 2^X)\}$$

とおく. このとき次が成り立つ.

(1) $\mu^*: 2^X \to [0,\infty]$ は単調, すなわち, $E \subseteq F$ なる任意の $E, F \in 2^X$ に対し $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$.
(2) 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $\mu^*(A) = \mu(A)$.
(3) $\mu^*: 2^X \to [0,\infty]$ は劣 σ-加法的, すなわち, 任意の可算族 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^X$ に対し,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n). \tag{5.25}$$

(4) $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{M}$.
(5) $\mathfrak{M}$ は X 上の有限加法族.
(6) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{M}$ の非交叉列とすると, 任意の $E \in 2^X$, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\mu^*(E) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E \backslash \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right). \tag{5.26}$$

(7) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{M}$ の非交叉列とすると, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$.
(8) $\mathfrak{M}$ は X 上の σ-加法族である.
(9) μ^* の $\mathfrak{M}$ 上への制限 $\mathfrak{M} \ni A \mapsto \mu^*(A) \in [0,\infty]$ は測度である.

証明. (1) $\mu^*: 2^X \to [0,\infty]$ の定義 (5.24) より自明である.

(2) $\mu^*(A) \leqslant \mu(A)$ $(\forall A \in \mathcal{A})$ は $\mu(\varnothing) = 0$ による. 逆の不等式を示す. 任意の $A \in \mathcal{A}$ を取る. $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を満たす任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ に対し, μ の σ-劣加法性と単調性 (命題 5.73) より,

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap A_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

となる. よって (5.24) より $\mu(A) \leqslant \mu^*(A)$ である.

(3) 任意の可算族 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^X$ を取り (5.25) が成り立つことを示す. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) = \infty$ ならば自明に成り立つので $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) < \infty$ と仮定する. このとき $\mu^*(E_n) < \infty$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ である. 任意の正実数 ε を取る. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mu^*(E_n) < \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ であるから (5.24) より $\{A_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ で,

$$E_n \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{n,m}, \quad \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,m}) < \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

を満たすものが取れる. このとき可算族 $\{A_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ は,

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} A_{n,m}, \\
&\sum_{n,m\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,m}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,m}) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) + \varepsilon
\end{aligned}$$

を満たすので, (5.24) より,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leqslant \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,m}) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) + \varepsilon$$

が成り立つ. これが任意の正実数 ε に対して成り立つので (5.25) は成り立つ.

(4) 任意の $A \in \mathcal{A}$ を取り $A \in \mathfrak{M}$ を示す. μ^* の σ-劣加法性と $\mu^*(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$ より μ^* は劣加法的であるから任意の $E \in 2^X$ に対し,

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \backslash A) \leqslant \mu^*(E) \tag{5.27}$$

が成り立つことを示せば十分である. $\mu^*(E) = \infty$ ならば自明なので $\mu^*(E) < \infty$ と仮定する. 任意の正実数 ε を取る. $\mu^*(E) < \mu^*(E) + \varepsilon$ であるから (5.24) より可算族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ で,

$$E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \mu^*(E) + \varepsilon$$

を満たすものが取れる．$\{A_n \cap A\}_{n\in\mathbb{N}}, \{A_n \backslash A\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ であり，

$$E \cap A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap A,\ \ E\backslash A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \backslash A$$

であるから，(5.24) より，

$$\mu^*(E \cap A) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap A),\ \ \mu^*(E\backslash A) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n\backslash A)$$

である．よって，

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E\backslash A) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu(A_n \cap A) + \mu(A_n\backslash A)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \mu^*(E) + \varepsilon$$

であるから，ε の任意性より (5.27) が成り立つ．

(5) $A \in \mathfrak{M}$ ならば $X\backslash A \in \mathfrak{M}$ であることと $X \in \mathfrak{M}$ であることは自明である．任意の $A, B \in \mathfrak{M}$ を取り $A \cup B \in \mathfrak{M}$ が成り立つことを示せばよい．任意の $E \in 2^X$ に対し μ^* の劣加法性より

$$\mu^*\left(E \cap (A \cup B)\right) \leqslant \mu^*\left((E \cap A) \cap B\right) + \mu^*((E \cap A)\backslash B) + \mu^*((E\backslash A) \cap B)$$

であるから，$A, B \in \mathfrak{M}$ より，

$$\begin{aligned}
&\mu^*\left(E \cap (A \cup B)\right) + \mu^*(E\backslash(A \cup B)) \\
&= \mu^*\left((E \cap A) \cap B\right) + \mu^*((E \cap A)\backslash B) + \mu^*((E\backslash A) \cap B) + \mu^*((E\backslash A)\backslash B) \\
&= \mu^*\left(E \cap A\right) + \mu^*(E\backslash A) = \mu^*(E)
\end{aligned}$$

となる．よって，

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E\backslash(A \cup B)) \leqslant \mu^*(E)\ \ (\forall E \in 2^X)$$

が成り立つ．μ^* の劣加法性より逆の不等式も成り立つので $A \cup B \in \mathfrak{M}$ である．よって $\mathfrak{M}$ は X 上の有限加法族である．

(6) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{M}$ の任意の非交叉列とし，任意の $E \in 2^X$ を取る．(5.26) が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つことを n に関する帰納法で示す．$n = 1$ の場合に成り立つことは単に $A_1 \in \mathfrak{M}$ であることによる．ある $n \in \mathbb{N}$ に対して (5.26) が成り立つと仮定する．非交叉性より，

$$E \cap A_{n+1} = \left(E\backslash \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}$$

である．また，

$$E\backslash \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k = \left(E\backslash \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \backslash A_{n+1}$$

であるから，$A_{n+1} \in \mathfrak{M}$ であることにより，

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(E\backslash \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= \mu^*\left(\left(E\backslash \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}\right) + \mu^*\left(\left(E\backslash \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \backslash A_{n+1}\right) \\
&= \mu^*\left(E \cap A_{n+1}\right) + \mu^*\left(E\backslash \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right)
\end{aligned}$$

となる．よって帰納法の仮定より，

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E\backslash \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E \cap A_{n+1}\right) + \mu^*\left(E\backslash \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E\backslash \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right)
\end{aligned}$$

である．ゆえに (5.26) は $n + 1$ の場合も成り立つので帰納法より (5.26) は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．

(7) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{M}$ の非交叉列とすると (6) と μ^* の単調性より, 任意の $E \in 2^X$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\mu^*(E) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E \backslash \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E \backslash \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$$

となる. よって任意の $E \in 2^X$ に対し,

$$\mu^*(E) \geqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*\left(E \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

であるから, μ^* の劣 σ-加法性より,

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*\left(E \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) + \mu^*\left(E \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

を得る. μ^* の劣加法性よりこの逆の不等式も成り立つので $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$ である.

(8) (5) より $\mathfrak{M}$ は X 上の有限加法族であるから, $\mathfrak{M}$ が σ-加法族であることを示すには任意の可算族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}$ を取り $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$ が成り立つことを示せばよい. $\mathfrak{M}$ が有限加法族であることから,

$$B_1 := A_1, \quad B_n := A_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \quad (\forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant 2)$$

とおけば $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathfrak{M}$ の非交叉列である. そして $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ であるので (7) より $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$ である. ゆえに $\mathfrak{M}$ は X 上の σ-加法族である.

(9) $\mathfrak{M}$ の任意の非交叉列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取り, $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$ とおいて (6) を適用すれば,

$$\mu^*(E) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E \backslash \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を得る. よって,

$$\mu^*(E) \geqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

であるから μ^* の劣 σ-加法性と合わせて,

$$\mu^*(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

を得る. よって μ^* の $\mathfrak{M}$ 上への制限は σ-加法的なので $\mathfrak{M}$ 上の測度である.

□

定義 5.77 (σ-有限性)**.** X を空でない集合, $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ を X 上の半集合代数, $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ を σ-加法的測度 (定義 5.72) とする. μ が σ-有限であるとは $\mathcal{C}$ の列 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n, \quad \mu(C_n) < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たすものが存在することを言う.

命題 5.78. X を空でない集合, $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ を X 上の有限加法族, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ を σ-加法的測度とし, μ は σ-有限であるとする. このとき,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \quad \mu(A_n) < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{5.28}$$

を満たす $\mathcal{A}$ の列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ として,

(1) 単調増加列であるものが取れる.

(2) 非交叉列であるものが取れる.

証明.　(1) (5.28) を満たす $\mathcal{A}$ の任意の列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取る.

$$B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおけば $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{A}$ の単調増加列であり, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ である. そして μ の劣有限加法性 (命題 5.73) より,

$$\mu(B_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから求める結果を得た.

(2) (5.28) を満たす $\mathcal{A}$ の任意の列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取る.

$$B_1 := A_1, \quad B_n := A_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \quad (\forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant 2)$$

とおけば $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{A}$ の非交叉列であり, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ である. そして μ の単調性 (命題 5.73) より,

$$\mu(B_n) \leqslant \mu(A_n) < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから求める結果を得た.

□

定理 5.79 (Hopf の拡張定理)**.** X を空でない集合, $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ を X 上の半集合代数, $\mu_0 : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ を σ-有限な σ-加法的測度 (定義 5.72) とする. このとき μ_0 は $\mathcal{C}$ から生成される σ-加法族 $\sigma(\mathcal{C})$ 上の測度に一意拡張できる.

証明. 命題 5.75 より μ_0 は $\mathcal{C}$ から生成される有限加法族 $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 上の σ-加法的測度 $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{C}) \to [0, \infty]$ に拡張できる. そして補題 5.76 より $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{C}) \to [0, \infty]$ は $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ から生成される σ-加法族 $\sigma(\mathcal{A}(\mathcal{C})) = \sigma(\mathcal{C})$ (命題 5.66) 上の測度に拡張できる. よって存在が示せた.
一意性を示す. 測度 $\mu_1^*, \mu_2^* : \sigma(\mathcal{C}) \to [0, \infty]$ を μ_0 の拡張とし,

$$\mu_1^*(E) = \mu_2^*(E) \quad (\forall E \in \sigma(\mathcal{C})) \tag{5.29}$$

が成り立つことを示す. $\mu_1^*(C) = \mu_0(C) = \mu_2^*(C)$ $(\forall C \in \mathcal{C})$ であり命題 5.65 より $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ の任意の元は $\mathcal{C}$ の有限非交叉列の合併で表せるので,

$$\mu_1^*(A) = \mu(A) = \mu_2^*(A) \quad (\forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{C})) \tag{5.30}$$

が成り立つ. μ_0 の σ-有限性より μ も σ-有限なので命題 5.78 より $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ の列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \quad \mu(A_n) < \infty, \quad A_n \subseteq A_{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{5.31}$$

を満たすものが取れる. そこで,

$$\mathcal{M}_n := \{E \in \sigma(\mathcal{C}) : \mu_1^*(E \cap A_n) = \mu_2^*(E \cap A_n)\} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおく. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ の列であることと (5.30) より,

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{5.32}$$

が成り立つ. そして,

$$\mu_1^*(E \cap A_n),\ \mu_2^*(E \cap A_n) \leqslant \mu(A_n) < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall E \in \sigma(\mathcal{C}))$$

であることと σ-加法族上の測度 $\mu_1^*, \mu_2^* : \sigma(\mathcal{C}) \to [0, \infty]$ の単調収束性 (命題 5.32 の (4), (5)) より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{M}_n$ は単調族である. よって (5.32) と単調族定理 5.70 より,

$$\sigma(\mathcal{A}(\mathcal{C})) = \mathcal{M}(\mathcal{A}(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{M}_n \subseteq \sigma(\mathcal{C}) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つので,

$$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{M}_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

すなわち,

$$\mu_1^*(E \cap A_n) = \mu_2(E \cap A_n) \quad (\forall E \in \sigma(\mathcal{C}), \forall n \in \mathbb{N}) \tag{5.33}$$

が成り立つ. 任意の $E \in \sigma(\mathcal{C})$ に対し (5.31) より $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E \cap A_n$ であり, $(E \cap A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\sigma(\mathcal{C})$ の単調増加列であるので σ-加法族上の測度の単調収束性 (命題 5.32 の (4)) と (5.33) より,

$$\mu_1^*(E) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_1^*(E \cap A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_2^*(E \cap A_n) = \mu_2^*(E)$$

が成り立つ. よって (5.29) が成り立つので一意性が示せた. □

5.4 直積測度, Tonelli の定理, Fubini の定理

補題 5.80. $(X_1, \mathfrak{M}_1, \mu_1), \cdots, (X_N, \mathfrak{M}_N, \mu_N)$ をそれぞれ測度空間とする. そして $X_1 \times \cdots \times X_N$ 上の半集合代数

$$\mathfrak{M}_1 \times \cdots \times \mathfrak{M}_N := \{E_1 \times \cdots \times E_N : E_1 \in \mathfrak{M}_1, \cdots, E_N \in \mathfrak{M}_N\}$$

に対し,

$$\mu_0 : \mathfrak{M}_1 \times \cdots \times \mathfrak{M}_N \ni E_1 \times \cdots \times E_N \mapsto \mu_1(E_1) \cdots \mu_N(E_N) \in [0, \infty]$$

を定義する. このとき次が成り立つ.

(1) μ_0 は半集合代数 $\mathfrak{M}_1 \times \cdots \times \mathfrak{M}_N$ 上の σ-加法的測度 (定義 5.72) である.

(2) もし $\mu_1, \cdots, \mu_N$ がそれぞれ σ-有限ならば μ_0 も σ-有限 (定義 5.77) である.

証明. (1) $\mu_0(\varnothing) = 0$ は自明である. μ_0 の σ-加法性を示す. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathfrak{M}_1 \times \cdots \times \mathfrak{M}_N$ を満たす $\mathfrak{M}_1 \times \cdots \times \mathfrak{M}_N$ の非交叉列 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取り,

$$\mu_0\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(C_n) \tag{5.34}$$

が成り立つことを示せばよい. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$C_n = E_{n,1} \times \cdots \times E_{n,N} \quad (E_{n,1} \in \mathfrak{M}_1, \cdots, E_{n,N} \in \mathfrak{M}_N) \tag{5.35}$$

とおき,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = E_1 \times \cdots \times E_N \quad (E_1 \in \mathfrak{M}_1, \cdots, E_N \in \mathfrak{M}_N) \tag{5.36}$$

とおく. $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が非交叉列であることから,

$$\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n}(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{C_n}(x_1, \cdots, x_N) \quad (\forall (x_1, \cdots, x_N) \in X_1 \times \cdots \times X_N)$$

が成り立つ. よって (5.35), (5.36) より,

$$\chi_{E_1}(x_1) \cdots \chi_{E_N}(x_N) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_{n,1}}(x_1) \cdots \chi_{E_{n,N}}(x_N) \quad (\forall x_1 \in X_1, \cdots, \forall x_N \in X_N) \tag{5.37}$$

が成り立つ. 任意の $x_2 \in X_2, \cdots, x_N \in X_N$ を取り固定して (5.37) を $(X_1, \mathfrak{M}_1)$ 上の非負値可測関数の等式とみなし単調収束定理 5.40 を用いると,

$$\mu_1(E_1)\chi_{E_2}(x_2) \cdots \chi_{E_N}(x_N) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(E_{n,1})\chi_{E_{n,2}}(x_2) \cdots \chi_{E_{n,N}}(x_N) \tag{5.38}$$

を得る. さらに任意の $x_3 \in X_3, \cdots, x_N \in X_N$ を取り固定して (5.38) を $(X_2, \mathfrak{M}_2)$ 上の非負値可測関数の等式とみなし単調収束定理を用いると,

$$\mu_1(E_1)\mu_2(E_2)\chi_{E_3}(x_3) \cdots \chi_{E_N}(x_N) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(E_{n,1})\mu_2(E_{n,2})\chi_{E_{n,3}}(x_3) \cdots \chi_{E_{n,N}}(x_N)$$

を得る. 同様の操作を続ければ,

$$\mu_1(E_1)\cdots\mu_N(E_N) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(E_{n,1})\cdots\mu_N(E_{n,N})$$

を得る. ゆえに (5.39) が成り立つので μ_0 は半集合代数 $\mathfrak{M}_1 \times \cdots \times \mathfrak{M}_N$ 上の σ-加法的測度である.

(2) 各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ について $\mu_j : \mathfrak{M}_j \to [0,\infty]$ が σ-有限測度であるならば命題 5.78 の (1) より $\mathfrak{M}_j$ の単調増加列 $(A_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$X_j = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{j,n}, \quad \mu_j(A_{j,n}) < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たすものが取れる. 各 $(A_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加列であることから,

$$X_1 \times \cdots \times X_N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{1,n} \times \cdots \times A_{N,n}$$

が成り立ち,

$$\mu_0(A_{1,n} \times \cdots \times A_{N,n}) = \mu_1(A_{1,n})\cdots\mu_N(A_{N,n}) < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから μ_0 は σ-有限である.

□

定理 5.81. $(X_1, \mathfrak{M}_1, \mu_1), \cdots, (X_N, \mathfrak{M}_N, \mu_N)$ をそれぞれ σ-有限な測度空間[*48]とする. このとき直積可測空間 (定義 5.12) $(X_1 \times \cdots \times X_N, \mathfrak{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{M}_N)$ 上の測度 $\mu : \mathfrak{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{M}_N \to [0,\infty]$ で,

$$\mu(E_1 \times \cdots \times E_N) = \mu_1(E_1)\cdots\mu_N(E_N) \quad (\forall E_1 \in \mathfrak{M}_1, \cdots, \forall E_N \in \mathfrak{M}_N)$$

を満たすものが唯一つ存在する.

証明.

$$\mathfrak{M}_1 \times \cdots \times \mathfrak{M}_N := \{E_1 \times \cdots \times E_N : E_1 \in \mathfrak{M}_1, \cdots, E_N \in \mathfrak{M}_N\}$$

に対し, 直積 σ-加法族の定義 5.12 より,

$$\mathfrak{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{M}_N = \sigma\left(\mathfrak{M}_1 \times \cdots \otimes \mathfrak{M}_N\right) \tag{5.39}$$

である. 補題 5.80 より,

$$\mu_0 : \mathfrak{M}_1 \times \cdots \times \mathfrak{M}_N \ni E_1 \times \cdots \times E_N \mapsto \mu_1(E_1)\cdots\mu_N(E_N) \in [0,\infty]$$

は半集合代数 $\mathfrak{M}_1 \times \cdots \times \mathfrak{M}_N$ 上の σ-加法的測度であり, σ-有限である. よって Hopf の拡張定理 5.79 より μ_0 は直積 σ-加法族 (5.39) 上の測度に一意拡張できる. よって求める測度の存在と一意性が示せた. □

定義 5.82 (σ-有限な測度の直積測度)**.** $(X_1, \mathfrak{M}_1, \mu_1), \cdots, (X_N, \mathfrak{M}_N, \mu_N)$ をそれぞれ σ-有限な測度空間とする. このとき定理 5.81 より直積可測空間 $(X_1 \times \cdots \times X_N, \mathfrak{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{M}_N)$ 上の測度

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N : \mathfrak{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{M}_N \to [0,\infty]$$

で,

$$(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N)(E_1 \times \cdots \times E_N) = \mu_1(E_1)\cdots\mu_N(E_N) \quad (\forall E_1 \in \mathfrak{M}_1, \cdots, \forall E_N \in \mathfrak{M}_N)$$

を満たすものが唯一つ存在する. これを $\mu_1, \cdots, \mu_N$ の直積測度と言い, 測度空間

$$(X_1 \times \cdots \times X_N, \mathfrak{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{M}_N, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N)$$

を測度空間 $(X_1, \mathfrak{M}_1, \mu_1), \cdots, (X_N, \mathfrak{M}_N, \mu_N)$ の直積測度空間と言う.

[*48] つまり各 $\mu_j : \mathfrak{M}_j \to [0,\infty]$ が σ-有限な測度であるということ.

補題 5.83. $(X_1,\mathfrak{M}_1,\mu_1),\cdots,(X_N,\mathfrak{M}_N,\mu_N)$ をそれぞれ σ-有限な測度空間とし, $(X_1,\mathfrak{M}_1),\cdots,(X_N,\mathfrak{M}_N)$ の直積可測空間を,

$$(X,\mathfrak{M})=\left(\prod_{j=1}^{N}X_j,\ \bigotimes_{j=1}^{N}\mathfrak{M}_j\right)=(X_1\times\cdots\times X_N,\mathfrak{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{M}_N)$$

とおく. また各 $k\in\{1,\cdots,N\}$ に対し $(X_1,\mathfrak{M}_1),\cdots,(X_{k-1},\mathfrak{M}_{k-1}),(X_{k+1},\mathfrak{M}_{k+1}),\cdots,(X_N,\mathfrak{M}_N)$ の直積可測空間を $(X^{(k)},\mathfrak{M}^{(k)})$ とおく. すなわち,

$$X^{(k)}:=\prod_{j\neq k}X_j=X_1\times\cdots\times X_{k-1}\times X_{k+1}\times\cdots\times X_N,$$
$$\mathfrak{M}^{(k)}=\bigotimes_{j\neq k}\mathfrak{M}_j=\mathfrak{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{M}_{k-1}\otimes\mathfrak{M}_{k+1}\otimes\cdots\otimes\mathfrak{M}_N.$$

このとき,

(1) $(X,\mathfrak{M})$ 上の任意の非負値可測関数 $f:X\to[0,\infty]$ と任意の $k\in\{1,\cdots,N\}$, 任意の $(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_N)\in X^{(k)}$ に対し,

$$X_k\ni x_k\mapsto f(x_1,\cdots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\cdots,x_N)\in[0,\infty] \tag{5.40}$$

は $(X_k,\mathfrak{M}_k)$ 上の非負値可測関数である.

(2) $(X,\mathfrak{M})$ 上の任意の非負値可測関数 $f:X\to[0,\infty]$ と任意の $k\in\{1,\cdots,N\}$ に対し,

$$\begin{aligned}\omega_k(f):X^{(k)}&\ni(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_N)\\&\mapsto\int_{X_k}\chi_E(x_1,\cdots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\cdots,x_N)d\mu_k(x_k)\in[0,\infty]\end{aligned} \tag{5.41}$$

は $(X^{(k)},\mathfrak{M}^{(k)})$ 上の非負値可測関数である.

証明. (1) 任意の $E_1\in\mathfrak{M}_1,\cdots,E_N\in\mathfrak{M}_N$ に対し, 写像

$$X_k\ni x_k\mapsto(x_1,\cdots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\cdots,x_N)\in X \tag{5.42}$$

による $E_1\times\cdots\times E_N$ の逆像は E_k であるか $\varnothing$ であるから命題 5.9 より (5.42) は $(X_k,\mathfrak{M}_k)$ から $(X,\mathfrak{M})$ への可測写像である. (5.40) は可測写像 (5.42) と可測関数 $f:X\to[0,\infty]$ の合成なので可測関数である*49.

(2) $k\in\{1,\cdots,N\}$ は固定する. $(X,\mathfrak{M})$ 上の任意の非負値可測関数 $f:X\to[0,\infty]$ に対し, 命題 5.29 より $(X,\mathfrak{M})$ 上の非負値可測単関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)\quad(\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in X),\quad f(x)=\sup_{n\in\mathbb{N}}f_n(x)\quad(\forall x\in X)$$

を満たすものが取れ, 単調収束定理 5.40 より任意の $(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_N)\in X^{(k)}$ に対し,

$$\omega_k(f)(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_N)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\omega_k(f_n)(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_N)$$

が成り立つ. よって任意の $E\in\mathfrak{M}$ に対し $\omega_k(\chi_E)$ が $(X^{(k)},\mathfrak{M}^{(k)})$ 上の可測関数であることを示せば十分である. 各 $j\in\{1,\cdots,N\}$ に対し $\mu_j:\mathfrak{M}_j\to[0,\infty]$ は σ-有限であるので $\mathfrak{M}_j$ の単調増加列 $(A_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$X_j=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_{j,n},\quad\mu_j(A_{j,n})<\infty\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

を満たすものが取れる.

$$A_n:=A_{1,n}\times\cdots\times A_{N,n}\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

とおけば $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathfrak{M}$ の単調増加列であり $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ である. よって単調収束定理より任意の $E\in\mathfrak{M}$, 任意の $(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_N)\in X^{(k)}$ に対し,

$$\omega_k(\chi_E)(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_N)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\omega_k(\chi_{E\cap A_n})(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_N)$$

*49 可測写像の合成が可測写像であることは可測写像の定義 5.8 より直ちに分かる

が成り立つ．よって任意の $n\in\mathbb{N}$ を取り固定し，任意の $E\in\mathfrak{M}$ に対し $\omega_k(\chi_{E\cap A_n})$ が $(X^{(k)},\mathfrak{M}^{(k)})$ 上の可測関数であることを示せば十分である．任意の $(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_N)$ に対し，

$$\mathfrak{M}\ni E\mapsto\omega_k(\chi_{E\cap A_n})(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_N)\in[0,\infty] \tag{5.43}$$

は単調収束定理より $\mathfrak{M}$ 上の測度であり，

$$\omega_k(\chi_{E\cap A_n})(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_N)\leqslant\mu_k(A_{k,n})\prod_{j\neq k}\chi_{A_{j,n}}(x_j)<\infty\quad(\forall E\in\mathfrak{M})$$

であるから測度 (5.43) は有限値である．よって測度の単調収束性 (命題 5.32 の (4), (5)) より，

$$\mathfrak{N}:=\{E\in\mathfrak{M}:\omega_k(\chi_{E\cap A_n})\text{ は }(X^{(k)},\mathfrak{M}^{(k)})\text{ 上の可測関数}\}$$

は単調族であることが分かる．ここで明らかに，

$$\mathfrak{M}_1\times\cdots\times\mathfrak{M}_N\subseteq\mathfrak{N}$$

[*50]であるから単調族定理 5.70 より，

$$\mathfrak{M}=\sigma(\mathfrak{M}_1\times\cdots\times\mathfrak{M}_N)=\sigma(\mathcal{A}(\mathfrak{M}_1\times\cdots\times\mathfrak{M}_N))=\mathcal{M}(\mathcal{A}(\mathfrak{M}_1\times\cdots\times\mathfrak{M}_N))\subseteq\mathfrak{N}$$

が成り立つ．よって任意の $E\in\mathfrak{M}$ に対し $\omega_k(\chi_{E\cap A_n})$ は $(X^{(k)},\mathfrak{M}^{(k)})$ 上の可測関数であるので求める結果を得た．

□

定理 5.84 (Tonelli の定理)**.** $(X_1,\mathfrak{M}_1,\mu_1),\cdots,(X_N,\mathfrak{M}_N,\mu_N)$ をそれぞれ σ-有限な測度空間とし，直積測度空間 (定義 5.82) を，

$$(X,\mathfrak{M},\mu)=(X_1\times\cdots\times X_N,\mathfrak{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{M}_N,\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_N)$$

とおく．このとき $(X,\mathfrak{M})$ 上の任意の非負値可測関数 $f:X\to[0,\infty]$ と N 次の任意の置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_N$ に対し，

$$\int_X f(x)d\mu(x)=\int_{X_{\sigma(N)}}\left(\cdots\left(\int_{X_{\sigma(1)}}f(x_1,\cdots,x_N)d\mu_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)})\right)\cdots\right)d\mu_{\sigma(N)}(x_{\sigma(N)}) \tag{5.44}$$

が成り立つ．

証明. (5.44) の右辺が定義できることは補題 5.83 の (2) による．$\sigma\in\mathfrak{S}_N$ を固定し，

$$\nu(E):=\int_{X_{\sigma(N)}}\left(\cdots\left(\int_{X_{\sigma(1)}}\chi_E(x_1,\cdots,x_N)d\mu_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)})\right)\cdots\right)d\mu_{\sigma(N)}(x_{\sigma(N)})\quad(\forall E\in\mathfrak{M})$$

とおいて $\nu:\mathfrak{M}\to[0,\infty]$ を定義する．$\mathfrak{M}$ の任意の非交叉列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，

$$\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n}(x_1,\cdots,x_N)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\chi_{E_n}(x_1,\cdots,x_N)\quad(\forall(x_1,\cdots,x_N)\in X)$$

であるから補題 5.83 の (2) と単調収束定理 5.40 より，

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\right)&=\int_{X_{\sigma(N)}}\left(\cdots\left(\int_{X_{\sigma(1)}}\sum_{n\in\mathbb{N}}\chi_{E_n}(x_1,\cdots,x_N)d\mu_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)})\right)\cdots\right)d\mu_{\sigma(N)}(x_{\sigma(N)})\\&=\int_{X_{\sigma(N)}}\left(\cdots\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{X_{\sigma(1)}}\chi_{E_n}(x_1,\cdots,x_N)d\mu_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)})\right)\cdots\right)d\mu_{\sigma(N)}(x_{\sigma(N)})\\&=\cdots\\&=\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{X_{\sigma(N)}}\left(\cdots\left(\int_{X_{\sigma(1)}}\chi_{E_n}(x_1,\cdots,x_N)d\mu_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)})\right)\cdots\right)d\mu_{\sigma(N)}(x_{\sigma(N)})\\&=\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu(E_n)\end{aligned}$$

[*50] $\mathfrak{M}_1\times\cdots\times\mathfrak{M}_N=\{E_1\in\mathfrak{M}_1,\cdots,E_N\in\mathfrak{M}_N\}$.

となる．よって ν は $(X, \mathfrak{M})$ 上の測度である．明らかに

$$\nu(E_1 \times \cdots \times E_N) = \mu_1(E_1) \cdots \mu_N(E_N) \quad (\forall E_1 \in \mathfrak{M}_1, \cdots, \forall E_N \in \mathfrak{M}_N)$$

であるから直積測度の一意性 (定理 5.81) より $\nu = \mu$ である．$(X, \mathfrak{M})$ 上の任意の非負値可測関数 $f : X \to [0, \infty]$ に対し命題 5.29 より非負値可測単関数の列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で，

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X), \quad f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \quad (\forall x \in X)$$

なるものが取れるので補題 5.83 の (2) と単調収束定理より，

$$\begin{aligned}
\int_X f(x) d\mu(x) &= \int_X f(x) d\nu(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n(x) d\nu(x) \\
&= \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{X_{\sigma(N)}} \left(\cdots \left(\int_{X_{\sigma(1)}} f_n(x_1, \cdots, x_N) d\mu_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) \right) \cdots \right) d\mu_{\sigma(N)}(x_{\sigma(N)}) \\
&= \int_{X_{\sigma(N)}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\cdots \left(\int_{X_{\sigma(1)}} f_n(x_1, \cdots, x_N) d\mu_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) \right) \cdots \right) d\mu_{\sigma(N)}(x_{\sigma(N)}) \\
&= \cdots \\
&= \int_{X_{\sigma(N)}} \left(\cdots \left(\int_{X_{\sigma(1)}} \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x_1, \cdots, x_N) d\mu_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) \right) \cdots \right) d\mu_{\sigma(N)}(x_{\sigma(N)}) \\
&= \int_{X_{\sigma(N)}} \left(\cdots \left(\int_{X_{\sigma(1)}} f(x_1, \cdots, x_N) d\mu_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) \right) \cdots \right) d\mu_{\sigma(N)}(x_{\sigma(N)})
\end{aligned}$$

となる．よって $(X, \mathfrak{M})$ 上の任意の非負値可測関数 $f : X \to [0, \infty]$ と N 次の任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対し (5.44) が成り立つ． □

定理 5.85 (Fubini の定理)**.** $(X_1, \mathfrak{M}_1, \mu_1), (X_2, \mathfrak{M}_2, \mu_2)$ をそれぞれ σ-有限な測度空間とし，

$$f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2, \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$$

とする．このとき $j, k \in \{1, 2\} (j \neq k)$ に対し，

$$N_j := \left\{ x_j \in X_j : \int_{X_k} |f(x_1, x_2)| d\mu_k(x_k) = \infty \right\}$$

は μ_j-零集合 (定義 5.43) であり，$F_j : X_j \to \mathbb{C}$ を，

$$F_j(x_j) := \begin{cases} \int_{X_k} f(x_1, x_2) d\mu_k(x_k) & (x_j \in X_j \backslash N_j) \\ 0 & (x_j \in N_j) \end{cases}$$

として定義すると $F_j \in \mathcal{L}^1(X_j, \mathfrak{M}_j, \mu_j)$ である．そして，

$$\int_{X_j} F_j(x_j) d\mu_j(x_j) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2)$$

が成り立つ．

証明． Tonelli の定理 5.84 より，

$$\int_{X_j} \int_{X_k} |f(x_1, x_2)| d\mu_k(x_k) d\mu_j(x_j) = \int_{X_1 \times X_2} |f(x_1, x_2)| d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) < \infty$$

であるから $(X_j, \mathfrak{M}_j)$ 上の非負値可測関数[*51]

$$X_j \ni x_j \mapsto \int_{X_k} |f(x_1, x_2)| d\mu_k(x_k) \in [0, \infty] \tag{5.45}$$

[*51] 可測性については補題 5.83 の (2) を参照.

は μ_j に関して可積分であるので命題 5.49 より N_j は μ_j-零集合である. 任意の $x_j \in X_j$ に対し,

$$\operatorname{Re}(F_j)(x_j) = \chi_{X_j \setminus N_j}(x_j) \int_{X_k} \operatorname{Re}(f)_+(x_1, x_2) d\mu_k(x_k) - \chi_{X_j \setminus N_j}(x_j) \int_{X_k} \operatorname{Re}(f)_-(x_1, x_2) d\mu_k(x_k),$$
$$\operatorname{Im}(F_j)(x_j) = \chi_{X_j \setminus N_j}(x_j) \int_{X_k} \operatorname{Im}(f)_+(x_1, x_2) d\mu_k(x_k) - \chi_{X_j \setminus N_j}(x_j) \int_{X_k} \operatorname{Im}(f)_-(x_1, x_2) d\mu_k(x_k)$$

であり, 補題 5.83 の (2) より,

$$X_j \ni x_j \mapsto \chi_{X_j \setminus N_j}(x_j) \int_{X_k} \operatorname{Re}(f)_\pm(x_1, x_2) d\mu_k(x_k) \in [0, \infty],$$
$$X_j \ni x_j \mapsto \chi_{X_j \setminus N_j}(x_j) \int_{X_k} \operatorname{Im}(f)_\pm(x_1, x_2) d\mu_k(x_k) \in [0, \infty]$$

はそれぞれ $(X_j, \mathfrak{M}_j)$ 上の可測関数であるので, $F_j : X_j \to \mathbb{C}$ は $(X_j, \mathfrak{M}_j)$ 上の可測関数である. そして,

$$|F_j(x_j)| \leqslant \int_{X_k} |f(x_1, x_2)| d\mu_k(x_k) \quad (\forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2)$$

より,

$$\int_{X_j} |F_j(x_j)| d\mu_j(x_j) \leqslant \int_{X_j} \int_{X_k} |f(x_1, x_2)| d\mu_k(x_k) d\mu_j(x_j) = \int_{X_1 \times X_2} |f(x_1, x_2)| d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) < \infty$$

であるから $F_j \in \mathcal{L}^1(X_j, \mathfrak{M}_j, \mu_j)$ である. Tonelli の定理 5.84 より,

$$\begin{aligned}
&\int_{X_j} \operatorname{Re}(F_j)(x_j) d\mu_j(x_j) = \int_{X_j \setminus N_j} \int_{X_k} \operatorname{Re}(f)(x_1, x_2) d\mu_k(x_k) d\mu_j(x_j) \\
&= \int_{X_j \setminus N_j} \int_{X_k} \operatorname{Re}(f)_+(x_1, x_2) d\mu_k(x_k) d\mu_j(x_j) - \int_{X_j \setminus N_j} \int_{X_k} \operatorname{Re}(f)_-(x_1, x_2) d\mu_k(x_k) d\mu_j(x_j) \\
&= \int_{X_j} \int_{X_k} \operatorname{Re}(f)_+(x_1, x_2) d\mu_k(x_k) d\mu_j(x_j) - \int_{X_j} \int_{X_k} \operatorname{Re}(f)_-(x_1, x_2) d\mu_k(x_k) d\mu_j(x_j) \\
&= \int_{X_1 \times X_2} \operatorname{Re}(f)_+(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) - \int_{X_1 \times X_2} \operatorname{Re}(f)_-(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) \\
&= \int_{X_1 \times X_2} \operatorname{Re}(f)(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

であり, 同様にして,

$$\int_{X_j} \operatorname{Im}(F_j)(x_j) d\mu_j(x_j) = \int_{X_1 \times X_2} \operatorname{Im}(f)(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2)$$

であるので,

$$\begin{aligned}
&\int_{X_j} F(x_j) d\mu_j(x_j) = \int_{X_j} \operatorname{Re}(F)(x_j) d\mu_j(x_j) + i \int_{X_j} \operatorname{Im}(F)(x_j) d\mu_j(x_j) \\
&= \int_{X_1 \times X_2} \operatorname{Re}(f)(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) + i \int_{X_1 \times X_2} \operatorname{Im}(f)(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) \\
&= \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

である. □

5.5 実数値, 複素数値測度, Radon-Nikodym の定理

定義 5.86 (複素数値測度, 実数値測度, 有限測度)**.** $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間とする. $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ が σ-加法的, すなわち, $\mathfrak{M}$ の任意の非交叉列 $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し,

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(E_n)$$

(無限和の定義 3.26 を参照) を満たすとき, ν を $(X,\mathfrak{M})$ 上の複素数値測度と言う. 特に $\nu(E)\in\mathbb{R}$ $(\forall E\in\mathfrak{M})$ のとき ν を $(X,\mathfrak{M})$ 上の実数値測度と言い, $\nu(E)\in[0,\infty)$ $(\forall E\in\mathfrak{M})$ のとき ν を $(X,\mathfrak{M})$ 上の有限測度と言う.

命題 5.87 (複素数値測度の基本性質)**.** $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間, $\nu:\mathfrak{M}\to\mathbb{C}$ を $(X,\mathfrak{M})$ 上の複素数値測度とする. このとき次が成り立つ.

(1) $\mathrm{Re}(\nu):\mathfrak{M}\ni E\mapsto\mathrm{Re}(\nu(E))\in\mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(\nu):\mathfrak{M}\ni E\mapsto\mathrm{Im}(\nu(E))\in\mathbb{R}$ はそれぞれ $(X,\mathfrak{M})$ 上の実数値測度である.

(2) $\nu(\varnothing)=0$.

(3) $\nu:\mathfrak{M}\to\mathbb{C}$ は有限加法的, すなわち, $\mathfrak{M}$ の任意の有限非交叉列 $E_1,\cdots,E_n$ に対し,

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\nu(E_k).$$

(4) $\mathfrak{M}$ の任意の単調増加列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し,

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}\nu(E_n).$$

(5) $\mathfrak{M}$ の任意の単調減少列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し,

$$\nu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}\nu(E_n).$$

証明. (1) $\mathfrak{M}$ の任意の非交叉列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\right)\right)&=\mathrm{Re}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu(E_n)\right)=\lim_{F\to\mathbb{N}}\mathrm{Re}\left(\sum_{n\in F}\nu(E_n)\right)\\&=\lim_{F\to\mathbb{N}}\sum_{n\in F}\mathrm{Re}(\nu(E_n))=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Re}(\nu(E_n))\end{aligned}$$

である. ただし $\lim_{F\to\mathbb{N}}$ の F は $\mathbb{N}$ の任意の有限部分集合を表す (無限和の定義 3.26 を参照). よって $\mathrm{Re}(\nu):\mathfrak{M}\ni E\mapsto\mathrm{Re}(\nu(E))\in\mathbb{R}$ は $(X,\mathfrak{M})$ 上の実数値測度である. 全く同様にして $\mathrm{Im}(\nu):\mathfrak{M}\ni E\mapsto\mathrm{Im}(\nu(E))\in\mathbb{R}$ が $(X,\mathfrak{M})$ 上の実数値測度であることも分かる.

(2) $\mathfrak{M}$ の非交叉列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $E_n:=\varnothing$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ として定義すると,

$$\nu(\varnothing)=\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu(E_n)=\lim_{N\to\infty}N\nu(\varnothing)\in\mathbb{C}$$

であるので $\nu(\varnothing)=0$ である.

(3) ν の σ-加法性と (2) より明らかである.

(4) $E_0:=\varnothing\in\mathfrak{M}$ とおき,

$$F_n:=E_n\backslash E_{n-1}\in\mathfrak{M}\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

とおくと, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加列であることから $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は非交叉列であり, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$ である. そして ν の有限加法性より,

$$\nu(F_n)=\nu(E_n)-\nu(E_{n-1})\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

であるから,

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\right)&=\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu(F_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}(\nu(E_n)-\nu(E_{n-1}))\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\nu(E_k)-\nu(E_{k-1}))=\lim_{n\to\infty}\nu(E_n)\end{aligned}$$

である.

(5) $(X\backslash E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathfrak{M}$ の単調増加列であり,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X\backslash E_n = X\backslash \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

であるから (4) より,

$$\nu\left(X\backslash \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X\backslash E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(X\backslash E_n)$$

である. ν の有限加法性より,

$$\nu\left(X\backslash \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \nu(X) - \nu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right), \quad \nu(X\backslash E_n) = \nu(X) - \nu(E_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから,

$$\nu(X) - \nu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} (\nu(X) - \nu(E_n)),$$

従って,

$$\nu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n)$$

である.

□

命題 5.88. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とする. このとき,

(1) $(X, \mathfrak{M})$ 上の任意の非負値可測関数 $f : X \to [0, \infty]$ に対し,

$$\mu_f : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x) \in [0, \infty]$$

は $(X, \mathfrak{M})$ 上の測度である.

(2) 任意の $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に対し,

$$\mu_f : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x) \in \mathbb{R}$$

は $(X, \mathfrak{M})$ 上の実数値測度である.

(3) 任意の $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に対し,

$$\mu_f : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x) \in \mathbb{C}$$

は $(X, \mathfrak{M})$ 上の複素数値測度である.

証明. (1) $\mathfrak{M}$ の任意の非交叉列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し,

$$f(x)\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(x)\chi_{E_n}(x) \quad (\forall x \in X)$$

であるから単調収束定理 5.40 より,

$$\begin{aligned}\mu_f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= \int_X f(x)\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}(x)d\mu(x) = \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f(x)\chi_{E_n}(x)d\mu(x) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f(x)\chi_{E_n}(x)d\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_f(E_n).\end{aligned}$$

よって μ_f は $(X, \mathfrak{M})$ 上の測度である.

(2) (1) と可積分性の定義 5.47 より,

$$\mu_{f_\pm} : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_X f_\pm(x)\chi_E(x)d\mu(x) \in [0,\infty)$$

は有限測度であり,

$$\begin{aligned}\mu_f(E) &= \int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x) = \int_X (f_+(x) - f_-(x))\chi_E(x)d\mu(x)\\ &= \mu_{f_+}(E) - \mu_{f_-}(E) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})\end{aligned}$$

であるから μ_f は実数値測度である.

(3) $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,\mathfrak{M},\mu)$ であるから (2) より

$$\begin{aligned}\mu_{\mathrm{Re}(f)} &: \mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_X \mathrm{Re}(f(x))\chi_E(x)d\mu(x) \in \mathbb{R},\\ \mu_{\mathrm{Im}(f)} &: \mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_X \mathrm{Im}(f(x))\chi_E(x)d\mu(x) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

はそれぞれ実数値測度である. そして,

$$\begin{aligned}\mu_f(E) &= \int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x) = \int_X \mathrm{Re}(f(x))\chi_E(x)d\mu(x) + i\int_X \mathrm{Im}(f(x))\chi_E(x)d\mu(x)\\ &= \mu_{\mathrm{Re}(f)}(E) + i\mu_{\mathrm{Im}(f)}(E) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})\end{aligned}$$

であるから μ_f は複素数値測度である.

□

定義 5.89 (実数値測度に関して非負, 非正な可測集合)**.** $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間, $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ を実数値測度とする. $P \in \mathfrak{M}$ が ν に関して非負であるとは $E \subseteq P$ を満たす任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し $\nu(E) \geqslant 0$ が成り立つことを言う. また $N \in \mathfrak{M}$ が ν に関して非正であるとは $E \subseteq N$ を満たす任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し $\nu(E) \leqslant 0$ が成り立つことを言う.

例 5.90. $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を測度空間, $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathfrak{M},\mu)$ とし, 実数値測度

$$\mu_f : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x) \in \mathbb{R}$$

(命題 5.88 を参照) を考える. このとき $(f \geqslant 0) \in \mathfrak{M}$ は μ_f に関して非負であり, $(f \leqslant 0) \in \mathfrak{M}$ は μ_f に関して非正である.

補題 5.91. $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間, $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ を実数値測度とする. このとき,

(1) 任意の $A \in \mathfrak{M}$ と任意の正実数 ε に対し $\nu(A) \leqslant \nu(B)$ を満たす $B \in \mathfrak{M}_A$ で $\nu(E) \geqslant -\varepsilon$ $(\forall E \in \mathfrak{M}_B)$ を満たすものが存在する[*52].

(2) 任意の $A \in \mathfrak{M}$ に対し ν に関して非負な $P \in \mathfrak{M}_A$ が存在する.

証明. (1) 背理法で示す. “ある $A \in \mathfrak{M}$ とある正実数 ε に対しては, $\nu(A) \leqslant \nu(B)$ を満たすいかなる $B \in \mathfrak{M}_A$ を取っても $\nu(E) < -\varepsilon$ を満たす $E \in \mathfrak{M}_B$ が存在する” と仮定し, 矛盾を導く. このときまず $\nu(A) \leqslant \nu(B)$ を満たす $B \in \mathfrak{M}_A$ として A 自身を考えれば $\nu(A_1) < -\varepsilon$ を満たす $A_1 \in \mathfrak{M}_A$ が取れる.

$$\nu(A \backslash A_1) = \nu(A) - \nu(A_1) > \nu(A) + \varepsilon > \nu(A)$$

であるから $\nu(A) \leqslant \nu(B)$ を満たす $B \in \mathfrak{M}_A$ として $A\backslash A_1$ を考えれば $\nu(A_2) < -\varepsilon$ を満たす $A_2 \in \mathfrak{M}_{A\backslash A_1}$ が取れる.

$$\nu(A\backslash(A_1 \cup A_2)) = \nu(A) - (\nu(A_1) + \nu(A_2)) > \nu(A) - 2\varepsilon > \nu(A)$$

[*52] $\mathfrak{M}_A, \mathfrak{M}_B$ は $\mathfrak{M}$ の A, B 上の相対 σ-加法族 (定義 5.3) である. すなわち $\mathfrak{M}_A = \{E \in \mathfrak{M} : E \subseteq A\}$, $\mathfrak{M}_B = \{E \in \mathfrak{M} : E \subseteq B\}$.

であるから $\nu(A) \leqslant \nu(B)$ を満たす $B \in \mathfrak{M}_A$ として $A \backslash (A_1 \cup A_2)$ を考えれば $\nu(A_2) < -\varepsilon$ を満たす $A_3 \in \mathfrak{M}_{A \backslash (A_1 \cup A_2)}$ が取れる．同様の操作を続けていけば $\mathfrak{M}$ の列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$A_{n+1} \subseteq A \backslash \bigcup_{k=1}^{n} A_k \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{5.46}$$

$$\nu(A_n) < -\varepsilon \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{5.47}$$

を満たすものが取れる．このとき (5.46) より $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は非交叉列であるから,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathbb{R}$$

でなくてはならないが (5.47) より,

$$\sum_{n=1}^{N} \nu(A_n) < -N\varepsilon \ \ (\forall N \in \mathbb{N})$$

なので $\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$ は収束しない．よって矛盾が導けたので題意は成り立つ．

(2) (1) より $\mathfrak{M}$ の列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$A \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \cdots \tag{5.48}$$

$$\nu(A) \leqslant \nu(A_1) \leqslant \nu(A_2) \leqslant \cdots \leqslant \nu(A_n) \leqslant \nu(A_{n+1}) \leqslant \cdots \tag{5.49}$$

$$\nu(E) \geqslant -\frac{1}{n} \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall E \in \mathfrak{M}_{A_n}) \tag{5.50}$$

を満たすものが構成できる．

$$P := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}_A \tag{5.51}$$

とおくと (5.48) と命題 5.87 の (5) より,

$$\nu(P) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$$

であり (5.49) より,

$$\nu(P) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) \geqslant \nu(A)$$

である．$E \subseteq P$ なる任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し (5.51) と (5.50) より,

$$\nu(E) \geqslant -\frac{1}{n} \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから,

$$\nu(E) \geqslant \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$$

である．よって P は ν に関して非負である．

□

補題 5.92. $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ を実数値測度とし, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を ν に関して非負な集合の列とする．このとき $P := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ も ν に関して非負である．

証明. $E \subseteq P$ なる任意の $E \in \mathfrak{M}$ を取る．

$$E_1 = E \cap P_1, \ \ E_n := (E \cap P_n) \backslash (P_1 \cup \cdots \cup P_{n-1}) \ \ (\forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant 2)$$

とおくと $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathfrak{M}$ の非交叉列であり,

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E \cap P_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

であるから,

$$\nu(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n)$$

である. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し P_n は ν に関して非負であり $E_n \subseteq P_n$ だから $\nu(E_n) \geqslant 0$ である. よって

$$\nu(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n) \geqslant 0$$

である. ゆえに P は ν に関して非負である. □

補題 5.93. $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ を実数値測度とする. このとき

$$\sup\{\nu(A) : A \in \mathfrak{M}\} < \infty$$

である.

証明. もし $\sup\{\nu(A) : A \in \mathfrak{M}\} = \infty$ ならば任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $n < \nu(A_n)$ を満たす $A_n \in \mathfrak{M}$ が取れて, 補題 5.47 より ν に関して非負な $P_n \in \mathfrak{M}$ で $P_n \subseteq A_n, \nu(A_n) \leqslant \nu(P_n)$ を満たすものが取れる. $P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ とおくと補題 5.92 より P は ν に関して非負であるので,

$$\nu(P) = \nu(P_n) + \nu(P \backslash P_n) \geqslant \nu(P_n) \geqslant \nu(A_n) > n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

となる. これは $\nu(P) \in \mathbb{R}$ であることに矛盾する. よって $\sup\{\nu(A) : A \in \mathfrak{M}\} < \infty$ である. □

定理 5.94. $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ を実数値測度とする. このとき ν に関して非負な $P \in \mathfrak{M}$ と ν に関して非正な $N \in \mathfrak{M}$ で,

$$X = P \cup N, \quad P \cap N = \varnothing$$

を満たすものが存在する.

証明.

$$s := \sup\{\nu(A) : A \in \mathfrak{M}\}$$

とおく. 補題 5.93 より $s < \infty$ である. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $s - \frac{1}{n} < s$ であるから $s - \frac{1}{n} < \nu(A_n)$ を満たす $A_n \in \mathfrak{M}$ が取れて補題 5.47 より ν に関して非負な $P_n \in \mathfrak{M}$ で $P_n \subseteq A_n, \nu(A_n) \leqslant \nu(P_n)$ を満たすものが取れる. $P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ とおくと補題 5.92 より P は ν に関して非負であるので,

$$s \geqslant \nu(P) = \nu(P_n) + \nu(P \backslash P_n) \geqslant \nu(P_n) \geqslant \nu(A_n) > s - \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

となる. よって $\nu(P) = s$ である. $N := X \backslash P \in \mathfrak{M}$ とおく. $E \subseteq N$ を満たす任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し $E \cap P = \varnothing$ だから,

$$s \geqslant \nu(E \cup P) = \nu(E) + \nu(P) = \nu(E) + s.$$

よって $\nu(E) \leqslant 0$ である. ゆえに N は ν に関して非正である. □

定義 5.95 (実数値測度に対する Hahn 分解)**.** $(X, \mathfrak{M})$ を測度空間, $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ を実数値測度とする. 定理 5.94 における P, N を ν に対する Hahn 分解と言う.

定義 5.96 (互いに特異)**.** $(X, \mathfrak{M})$ を測度空間, ν_1, ν_2 をそれぞれ $(X, \mathfrak{M})$ 上の測度か複素数値測度とする. ν_1, ν_2 が互いに特異であるとは $C_1, C_2 \in \mathfrak{M}$ で,

$$\nu_j(E) = \nu_j(E \cap C_j) \quad (\forall E \in \mathfrak{M},\ j = 1, 2), \quad X = C_1 \cup C_2, \quad C_1 \cap C_2 = \varnothing$$

を満たすものが存在することを言う. そして ν_1, ν_2 が互いに特異であることを,

$$\nu_1 \perp \nu_2$$

と表す.

定理 5.97. $(X, \mathfrak{M})$ を測度空間, $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ を実数値測度とする．このとき有限測度の組 $\nu_+, \nu_- : \mathfrak{M} \to [0, \infty)$ で,

$$\nu_+ \perp \nu_-, \ \ \nu(E) = \nu_+(E) - \nu_-(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

を満たすものが唯一つ存在する．

証明. ν に対する Hahn 分解 (定義 5.95) を P, N とおき, 有限測度

$$\begin{aligned} \nu_+ &: \mathfrak{M} \ni E \mapsto \nu(E \cap P) \in [0, \infty), \\ \nu_- &: \mathfrak{M} \ni E \mapsto -\nu(E \cap N) \in [0, \infty) \end{aligned}$$

を定義する．このとき,

$$\nu_+(E \cap P) = \nu(E \cap P) = \nu_+(E), \ \ \nu_-(E \cap N) = -\nu(E \cap N) = \nu_-(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

であるから $\nu_+ \perp \nu_-$ であり,

$$\nu(E) = \nu(E \cap P) + \nu(E \cap N) = \nu_+(E) - \nu_-(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

である．よって存在が示せた．一意性を示す．有限測度の組 $\mu_+, \mu_- : \mathfrak{M} \to [0, \infty)$ が,

$$\mu_+ \perp \mu_-, \ \ \nu(E) = \mu_+(E) - \mu_-(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

を満たすとする．$\mu_+ \perp \mu_-$ より $C_+, C_- \in \mathfrak{M}$ で,

$$\mu_\pm(E) = \mu_\pm(E \cap C_\pm) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M}), \ \ X = C_+ \cup C_-, \ \ C_+ \cap C_- = \varnothing$$

を満たすものが取れる．

$$\mu_\pm(E \cap C_\mp) = \nu(E \cap C_\mp \cap C_\pm) = 0 \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

であるから,

$$\nu(E \cap C_\pm) = \pm\mu_\pm(E \cap C_\pm) = \pm\mu_\pm(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M}) \tag{5.52}$$

である．これより C_+ は ν に関して非負であり, C_- は ν に関して非正である．よって

$$\nu(E \cap P \cap C_-) = \nu(E \cap N \cap C_+) = 0 \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

であるから, 任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し (5.52) より,

$$\begin{aligned} \mu_+(E) &= \nu(E \cap C_+) = \nu(E \cap C_+ \cap P) + \nu(E \cap C_+ \cap N) = \nu(E \cap C_+ \cap P), \\ \nu_+(E) &= \nu(E \cap P) = \nu(E \cap C_+ \cap P) + \nu(E \cap C_- \cap P) = \nu(E \cap C_+ \cap P), \\ \mu_-(E) &= \mu(E \cap C_-) = \nu(E \cap C_- \cap P) + \mu(E \cap C_- \cap N) = \mu(E \cap C_- \cap N), \\ \nu_-(E) &= \nu(E \cap N) = \nu(E \cap C_+ \cap N) + \nu(E \cap C_- \cap N) = \nu(E \cap C_- \cap N) \end{aligned}$$

となる．ゆえに任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し,

$$\mu_+(E) = \nu(E \cap C_+ \cap P) = \nu_+(E), \ \ \mu_-(E) = \nu(E \cap C_- \cap N) = \nu_-(E)$$

である．これで一意性が示せた． □

定義 5.98 (実数値測度の Jordan 分解, 全変動)**.** $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ を実数値測度とする．定理 5.97 より有限測度の組 $\nu_+, \nu_- : \mathfrak{M} \to [0, \infty)$ で,

$$\nu_+ \perp \nu_-, \ \ \nu(E) = \nu_+(E) - \nu_-(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

を満たすものが唯一つ存在する．ν_+ を ν の非負部分, ν_- を ν の非正部分と言う．そして ν の非負部分 ν_+ と非正部分 ν_- の差への分解 $\nu = \nu_+ - \nu_-$ を Jordan 分解と言う．また,

$$|\nu| := \nu_+ + \nu_- : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \nu_+(E) + \nu_-(E) \in [0, \infty)$$

なる有限測度を ν の全変動と言う．

例 5.99. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathfrak{M}, \mu)$ とし, 実数値測度

$$\mu_f : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x) \in \mathbb{R}$$

(命題 5.88) を考える. このとき f の非負部分と非正部分

$$f_+ = \max(f, 0) : X \ni x \mapsto \max(f(x), 0) \in [0, \infty),$$
$$f_- = \max(-f, 0) \ni X \mapsto \max(-f(x), 0) \in [0, \infty)$$

に対し, 有限測度

$$\mu_{f_+} : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_X f_+(x)\chi_E(x)d\mu(x) \in [0, \infty),$$
$$\mu_{f_-} : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_X f_-(x)\chi_E(x)d\mu(x) \in [0, \infty)$$

はそれぞれ μ_f の非負部分と非正部分であり, μ_f の全変動は,

$$\mu_{f_+}(E) + \mu_{f_-}(E) = \int_X (f_+(x) + f_-(x))\chi_E(x)d\mu(x) = \int_X |f(x)|\chi_E(x)d\mu(x)$$
$$= \mu_{|f|}(E) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

である.

定義 5.100 (絶対連続)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, ν を $(X, \mathfrak{M})$ 上の測度か複素数値測度とする. ν が μ に対して絶対連続であるとは $\mu(E) = 0$ を満たす任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し $\nu(E) = 0$ が成り立つことを言う. ν が μ に対して絶対連続であることを,

$$\nu \ll \mu$$

と表す.

例 5.101. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, f を $(X, \mathfrak{M})$ 上の非負値可測関数か $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ の元とする. このとき命題 5.88 における μ_f は μ に対して絶対連続である (命題 5.44).

補題 5.102. $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $\mu, \nu : \mathfrak{M} \to [0, \infty)$ をそれぞれ有限測度とする. このとき有限測度 $\lambda : \mathfrak{M} \to [0, \infty)$ と μ に関して可積分な非負値可測関数 $f : X \to [0, \infty]$ で,

$$\lambda \perp \mu, \quad \nu(E) = \lambda(E) + \mu_f(E) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

を満たすものが存在する. ただし,

$$\mu_f(E) = \int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

である.

証明.

$$\mathcal{F} := \{f : X \to [0, \infty] : f \text{ は可測関数で } \mu_f(E) \leqslant \nu(E)\ (\forall E \in \mathfrak{M})\}$$

とおく. 任意の $g_1, g_2 \in \mathcal{F}$ に対し可測関数

$$\max(g_1, g_2) : X \ni x \mapsto \max(g_1(x), g_2(x)) \in [0, \infty]$$

[*53]を考えると,

$$\max(g_1(x), g_2(x)) = g_1(x)\chi_{(g_1 \geqslant g_2)}(x) + g_2(x)\chi_{(g_1 < g_2)}(x) \quad (\forall x \in X)$$

[*53] 可測性については命題 5.26 を参照.

であるから,

$$\begin{aligned}\mu_{\max(g_1,g_2)}(E) &= \mu_{g_1}(E \cap (g_1 \geqslant g_2)) + \mu_{g_2}(E \cap (g_1 < g_2)) \\ &\leqslant \nu(E \cap (g_1 \geqslant g_2)) + \nu(E \cap (g_1 < g_2)) \\ &= \nu(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})\end{aligned}$$

である. よって $\max(g_1, g_2) \in \mathcal{F}$ である. これと帰納法より任意の有限個の $g_1, \cdots, g_n \in \mathcal{F}$ に対し $\max(g_1, \cdots, g_n) \in \mathcal{F}$ であることが分かる. 今,

$$s := \sup\left\{\int_X f(x)d\mu(x) : f \in \mathcal{F}\right\} \leqslant \nu(X) < \infty \tag{5.53}$$

とおくと, $\mathcal{F}$ の列 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$s - \frac{1}{n} < \int_X g_n(x)d\mu(x) \ \ (n \in \mathbb{N}) \tag{5.54}$$

を満たすものが取れる.

$$f_n := \max(g_1, \cdots, g_n) \in \mathcal{F} \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおく. このとき任意の $x \in X$ に対し $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加列であるので,

$$f(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \ \ (\forall x \in X)$$

とおけば単調収束定理より,

$$\int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x)\chi_E(x)d\mu(x) \leqslant \nu(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

となる. よって $f \in \mathcal{F}$ であり, $g_n(x) \leqslant f_n(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X)$ と (5.54) より,

$$s - \frac{1}{n} < \int_X g_n(x)d\mu(x) \leqslant \int_X f_n(x)d\mu(x) \leqslant \int_X f(x)d\mu(x) \leqslant s \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから,

$$\int_X f(x)d\mu(x) = s \tag{5.55}$$

である. 今, 有限測度

$$\lambda : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \nu(E) - \mu_f(E) \in [0, \infty)$$

を定義する ($f \in \mathcal{F}$ に注意). $\lambda \perp \mu$ を示せばよい. そこで任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し実数値測度

$$\lambda - \frac{1}{n}\mu : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \lambda(E) - \frac{1}{n}\mu(E) \in \mathbb{R}$$

の Hahn 分解 (定義 5.95) を $P_n, N_n \in \mathfrak{M}$ とおき,

$$P := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n, \ \ N := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_n = X \backslash P$$

とおく.

$$\lambda(N) - \frac{1}{n}\mu(N) \leqslant 0 \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

より,

$$0 \leqslant \lambda(N) \leqslant \frac{1}{n}\mu(N) \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

である. ゆえに $\lambda(N) = 0$ である. これより $\lambda \perp \mu$ を示すには $\mu(P) = 0$ を示せばよい. 測度の劣 σ-加法性 (命題 5.32 の (3)) より,

$$\mu(P) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(P_n)$$

であるから任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mu(P_n) = 0$ が成り立つことを示せばよい．任意の $n \in \mathbb{N}$ を取り固定する．P_n は $\lambda - \frac{1}{n}\mu$ に関して非負であるので，

$$\frac{1}{n}\mu(E \cap P_n) \leqslant \lambda(E \cap P_n) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

である．よって，

$$h := f + \frac{1}{n}\chi_{P_n} : X \to [0, \infty]$$

とおけば，

$$\mu_h(E) = \mu_f(E) + \frac{1}{n}\mu(E \cap P_n) \leqslant \mu_f(E) + \lambda(E) = \nu(E) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

であるから，$h \in \mathcal{F}$ である．よって (5.53), (5.55) より，

$$s \geqslant \int_X h(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x) + \frac{1}{n}\mu(P_n) = s + \frac{1}{n}\mu(P_n)$$

であるから $\mu(P_n) = 0$ である．これより $\mu(P) = 0$ であるから $\lambda \perp \mu$ が成り立つ． □

定理 5.103 (Radon-Nikodym の定理 1)**.** $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間，$\mu, \nu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ をそれぞれ σ-有限な測度 (定義 5.77) とする．このとき σ-有限な測度 $\lambda : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ と非負値可測関数 $f : X \to [0, \infty]$ で，

$$\lambda \perp \mu, \quad \nu(E) = \lambda(E) + \mu_f(E) \quad (\forall E \in \mathfrak{M}) \tag{5.56}$$

を満たすものが存在する．ただし，

$$\mu_f(E) = \int_X f(x)\chi_E(x) d\mu(x) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

である．

証明. μ, ν は σ-有限なので命題 5.78 より $\mathfrak{M}$ の非交叉列 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で，

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad \mu(A_n) < \infty, \quad \nu(A_n) < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たすものが取れる．そこで各 $n \in \mathbb{N}$ について有限測度 $\mu_n, \nu_n : \mathfrak{M} \to [0, \infty)$ を，

$$\mu_n(E) := \mu(E \cap A_n), \quad \nu_n(E) := \nu(E \cap A_n) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

として定義する．補題 5.102 より各 $n \in \mathbb{N}$ について有限測度 $\lambda_n : \mathfrak{M} \to [0, \infty)$ と μ_n に関して可積分な非負値可測関数 $f_n : X \to [0, \infty]$ で，

$$\lambda_n \perp \mu_n, \quad \nu_n(E) = \lambda_n(E) + \int_X f_n(x)\chi_E(x) d\mu_n(x) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

を満たすものが取れる．今，

$$\lambda : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n(E) \in [0, \infty]$$

とおくと $\mathfrak{M}$ の任意の非交叉列 $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し，

$$\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \lambda_m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_m(E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \lambda_m(E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(E_n)$$

であるから $\lambda : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ は測度である．そして，

$$\begin{aligned} \lambda_m(A_n) &= \nu_m(A_n) - \int_X f_m(x)\chi_{A_n}(x) d\mu_m(x) \\ &= \nu(A_n \cap A_m) - \int_X f_m(x)\chi_{A_n \cap A_m}(x) d\mu(x) \\ &= 0 \quad (\forall n, m \in \mathbb{N} : n \neq m) \end{aligned} \tag{5.57}$$

より，

$$\lambda(A_n) = \lambda_n(A_n) < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるので λ は σ-有限な測度である．また非負値可測関数 $f : X \to [0, \infty]$ を，

$$f(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)\chi_{A_n}(x) \quad (\forall x \in X)$$

と定義すると単調収束定理より，

$$\begin{aligned}
\mu_f(E) &= \int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x) = \int_X \sum_{n \in \mathbb{N}} f(x)\chi_{E \cap A_n}(x)d\mu(x) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n(x)\chi_{E \cap A_n}(x)d\mu(x) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n(x)\chi_E(x)d\mu_n(x) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\lambda(E) + \mu_f(E) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\lambda_n(E) + \int_X f_n(x)\chi_E(x)d\mu_n(x)\right) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_n(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(E \cap A_n) = \nu(E) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})
\end{aligned}$$

である．後は $\lambda \perp \mu$ を示せばよい．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\lambda_n \perp \mu_n$ であるから $B_n, C_n \in \mathfrak{M}$ で，

$$C_n = X \backslash B_n, \quad \lambda_n(C_n) = 0, \quad \mu_n(B_n) = 0$$

を満たすものが取れる．

$$B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B_n), \quad C := X \backslash B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} ((X \backslash A_n) \cup C_n)$$

とおくと，

$$\mu(B) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n \cap B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(B_n) = 0$$

であり，(5.57) より，

$$\lambda(C) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n(C) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n((X \backslash A_n) \cup C_n) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n(A_n \cap ((X \backslash A_n) \cup C_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n(C_n) = 0$$

である．よって $\lambda \perp \mu$ が成り立つ． □

系 5.104 (Radon-Nikodym の定理の系)**.** $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間，$\mu, \nu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ をそれぞれ σ-有限な測度 (定義 5.77) とし，$\nu \ll \mu$ (定義 5.100) が成り立つとする．このとき非負値可測関数 $f : X \to [0, \infty]$ で，

$$\nu(E) = \int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x)$$

を満たすものが存在する．

証明. 定理 5.103 より σ-有限な測度 $\lambda : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ と非負値可測関数 $f : X \to [0, \infty]$ で (5.56) を満たすものが存在する．$\mu_f \ll \mu$ であるから，もし $\nu \ll \mu$ が成り立つならば $\lambda \ll \mu$ が成り立つ．よって λ は $\lambda \perp \mu$ かつ $\lambda \ll \mu$ を満たすので恒等的に 0 である．よって求める結果を得る． □

定理 5.105 (Radon-Nikodym の定理 2)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を σ-有限な測度空間とする．任意の複素数値測度 $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ に対し，複素数値測度 $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ と $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ で，

$$\lambda \perp \mu, \quad \nu(E) = \lambda(E) + \mu_f(E) \quad (\forall E \in \mathfrak{M}) \tag{5.58}$$

を満たすものが存在する．

証明. (1) ν が実数値測度の場合. ν の Jordan 分解 (定義 5.98) を $\nu = \nu_+ - \nu_-$ とする. $\nu_\pm$ は有限測度だから定理 5.103 より $(X, \mathfrak{M})$ 上の測度 $\lambda_\pm$ と非負値可測関数 $f^\pm$ で,

$$\lambda_\pm \perp \mu, \quad \nu_\pm(E) = \lambda_\pm(E) + \mu_{f^\pm}(E) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

なるものが取れる. $\nu_\pm$ は有限測度なので右の式より $\lambda_\pm$ は有限測度であり, $f^\pm$ は μ に関して可積分である. 命題 5.46 より $f^\pm$ は非負実数値であるとしてよい.

$$\begin{aligned}
&\lambda := \lambda_+ - \lambda_- : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \lambda_+(E) - \lambda_-(E) \in \mathbb{R}, \\
&f := f^+ - f^- : X \ni x \mapsto f^+(x) - f^-(x) \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

とおくと λ は実数値測度, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathfrak{M}, \mu)$ であり,

$$\begin{aligned}
\nu(E) = \nu_+(E) - \nu_-(E) &= \left(\lambda_+(E) - \int_X f^+(x)\chi_E(x)d\mu(x)\right) - \left(\lambda_-(E) - \int_X f^-(x)\chi_E(x)d\mu(x)\right) \\
&= (\lambda_+(E) - \lambda_-(E)) + \int_X (f^+(x) - f^-(x))\chi_E(x)d\mu(x) \\
&= \lambda(E) + \mu_f(E) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})
\end{aligned}$$

となる. 後は $\lambda \perp \mu$ を示せばよい. $\lambda_\pm \perp \mu$ であるから $B_\pm, C_\pm \in \mathfrak{M}$ で,

$$C_\pm = X \backslash B_\pm, \quad \mu(B_\pm) = 0, \quad \lambda_\pm(C_\pm) = 0$$

を満たすものが取れる.

$$B := B_+ \cup B_-, \quad C := X \backslash B = C_+ \cap C_-$$

とおくと $\mu(B) = 0$ であり,

$$\lambda_\pm(E \cap C) \leqslant \lambda_\pm(E \cap C_\pm) = 0 \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

であるから,

$$\lambda(E \cap C) = \lambda_+(E \cap C) - \lambda_-(E \cap C) = 0 \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

である. よって $\lambda \perp \mu$ である.

(2) ν が複素数値測度の場合. 実数値測度

$$\nu_1 : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \mathrm{Re}(\nu(E)) \in \mathbb{R}, \quad \nu_2 : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \mathrm{Im}(\nu(E)) \in \mathbb{R}$$

に対し (1) より実数値測度 $\lambda_1, \lambda_2 : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ と $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathfrak{M}, \mu)$ で,

$$\lambda_j \perp \mu, \quad \nu_j(E) = \lambda_j(E) + \mu_{f_j}(E) \quad (\forall E \in \mathfrak{M}, j = 1, 2)$$

を満たすものが取れる. そこで複素数値測度

$$\lambda := \lambda_1 + i\lambda_2 : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \lambda_1(E) + i\lambda_2(E) \in \mathbb{C}$$

と $f := f_1 + if_2 \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を考えれば,

$$\nu(E) = \nu_1(E) + i\nu_2(E) = \lambda(E) + \mu_f(E) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

となる. 後は $\lambda \perp \mu$ を示せばよい. $j \in \{1, 2\}$ に対し $\lambda_j \perp \mu$ だから $B_j, C_j \in \mathfrak{M}$ で,

$$C_j = X \backslash C_j, \quad \mu(B_j) = 0, \quad \lambda_j(E \cap C_j) = 0 \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

なるものが取れる.

$$B := B_1 \cup B_2, \quad C := X \backslash B = C_1 \cap C_2$$

とおけば $\mu(B) \leqslant \mu(B_1) + \mu(B_2) = 0$ であり,

$$\lambda(E \cap C) = \lambda_1(E \cap C \cap C_1) + i\lambda_2(E \cap C \cap C_2) = 0 \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

である. よって $\lambda \perp \mu$ である.

□

系 5.106 (Radon-Nikodym の定理 2 の系)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を σ-有限な測度空間とする. μ に関して絶対連続 (定義 5.100) な複素数値測度 $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ に対し $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ で,

$$\nu(E) = \int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

を満たすものが存在する.

証明. $\nu \ll \mu$ のとき Radon-Nikodym の定理 5.105 の (5.58) における λ は $\lambda \ll \mu$ を満たす. よって $\lambda \perp \mu$ かつ $\lambda \ll \mu$ より λ は恒等的に 0 である. □

定義 5.107 (Radon-Nikodym 微分)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を σ-有限測度空間とする.

(1) μ に関して絶対連続な σ-有限測度 $\nu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ に対し Radon-Nikodym の定理 1 の系 5.104 より,

$$\nu(E) = \mu_f(E) = \int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

を満たす非負値可測関数 $f : X \to [0, \infty]$ が存在する. f を ν の μ に関する Radon-Nikodym 微分と言う.

(2) μ に関して絶対連続な複素数値測度 $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ に対し Radon-Nikodym の定理 2 の系 5.106 より,

$$\nu(E) = \mu_f(E) = \int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

を満たす $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ が存在する. f を ν の μ に関する Radon-Nikodym 微分と言う.

注意 5.108. 定義 5.107 における ν の μ に関する Radon-Nikodym 微分 f として f_1, f_2 が得られたとする. このとき命題 5.57 より μ-a.e. $x \in X$ で $f_1(x) = f_2(x)$ である.

命題 5.109. $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ を実数値測度とし, $|\nu| : \mathfrak{M} \to [0, \infty)$ を ν の全変動 (定義 5.98) とする. このとき任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し,

$$|\nu|(E) = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)| : E_1, \cdots, E_n \text{ は } \mathfrak{M} \text{ の有限非交叉列で } E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \right\} \tag{5.59}$$

が成り立つ.

証明. 任意の $E \in \mathfrak{M}$ を取り固定し (5.59) の右辺を s とおく. $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ を満たす $\mathfrak{M}$ の任意の有限非交叉列 $E_1, \cdots, E_n$ に対し全変動の定義 5.98 より,

$$|\nu(E_k)| = |\nu_+(E_k) - \nu_-(E_k)| \leqslant \nu_+(E_k) + \nu_-(E_k) = |\nu|(E_k) \quad (k = 1, \cdots, n)$$

であるから,

$$\sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\nu|(E_k) = |\nu|(E)$$

である. よって $s \leqslant |\nu|(E)$ である. ν の Jordan 分解 (定義 5.98) を $\nu = \nu_+ - \nu_-$ とおき, ν に対する Hahn 分解 (定義 5.95) を P, N とおく. このとき定理 5.97 より,

$$\nu_+(E) = \nu(E \cap P) = |\nu(E \cap P)|, \quad \nu_-(E) = -\nu(E \cap N) = |\nu(E \cap N)|$$

であるから,

$$|\nu|(E) = \nu_+(E) + \nu_-(E) = |\nu(E \cap P)| + |\nu(E \cap N)| \leqslant s$$

である. よって (5.59) は成り立つ. □

定義 5.110 (複素数値測度の全変動)**.** $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ を複素数値測度とする. 任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し,

$$|\nu|(E) := \sup\left\{ \sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)| : E_1, \cdots, E_n \text{ は } \mathfrak{M} \text{ の有限非交叉列で } E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \right\} \tag{5.60}$$

とおき, $|\nu| : \mathfrak{M} \ni E \mapsto |\nu|(E) \in [0,\infty)$ (有限値であることについては次の注意 5.111 を参照) を定義する. これを ν の全変動と言う. 命題 5.109 よりこの定義は実数値測度の全変動の定義 5.98 と矛盾しない. さらに後の命題 5.113 で見るように複素数値測度の全変動は実数値測度の全変動と同様に有限測度である.

注意 5.111. $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間, $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ を複素数値測度とする. 実数値測度

$$\mathrm{Re}(\nu) : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \mathrm{Re}(\nu(E)) \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{Im}(\nu) : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \mathrm{Im}(\nu(E)) \in \mathbb{R}$$

の全変動を $|\mathrm{Re}(\nu)|, |\mathrm{Im}(\nu)| : \mathfrak{M} \to [0,\infty)$ とおくと,

$$|\nu(E)| \leqslant |\mathrm{Re}(\nu)(E)| + |\mathrm{Im}(\nu)(E)| \leqslant |\mathrm{Re}(\nu)|(E) + |\mathrm{Im}(\nu)|(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

であるから, 任意の $E \in \mathfrak{M}$ と $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$ なる $\mathfrak{M}$ の任意の有限非交叉列 $E_1, \cdots, E_n$ に対し,

$$\sum_{k=1}^n |\nu(E_k)| \leqslant \sum_{k=1}^n (|\mathrm{Re}(\nu)|(E_k) + |\mathrm{Im}(\nu)|(E_k)) = |\mathrm{Re}(\nu)|(E) + |\mathrm{Im}(\nu)|(E)$$

となる. よって (5.60) より,

$$|\nu|(E) \leqslant |\mathrm{Re}(\nu)|(E) + |\mathrm{Im}(\nu)|(E) < \infty \ \ (\forall E \in \mathfrak{M}) \tag{5.61}$$

であるから特に ν の全変動 $|\nu|$ は有限値である.

命題 5.112. $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を測度空間, $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathfrak{M},\mu)$ とする. このとき複素数値測度

$$\mu_f : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x) \in \mathbb{C}$$

(命題 5.88 を参照) の全変動 $|\mu_f| : \mathfrak{M} \to [0,\infty)$ (定義 5.110) は,

$$|\mu_f|(E) = \mu_{|f|}(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

である. すなわち,

$$\begin{aligned} &\sup\left\{\sum_{k=1}^n \left|\int_X f(x)\chi_{E_k}(x)d\mu(x)\right| : E_1,\cdots,E_n \text{ は } \mathfrak{M} \text{ の有限非交叉列で } E = \bigcup_{k=1}^n E_k\right\} \\ &= \int_X |f(x)|\chi_E(x)d\mu(x) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M}) \end{aligned} \tag{5.62}$$

が成り立つ.

証明. 任意の $E \in \mathfrak{M}$ と $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$ を満たす $\mathfrak{M}$ の任意の有限非交叉列 $E_1, \cdots, E_n$ に対し,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\mu_f(E_k)| &= \sum_{k=1}^n \left|\int_X f(x)\chi_{E_k}(x)d\mu(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^n \int_X |f(x)|\chi_{E_k}(x)d\mu(x) \\ &= \int_X |f(x)| \sum_{k=1}^n \chi_{E_k}(x)d\mu(x) = \int_X |f(x)|\chi_E(x)d\mu(x) \end{aligned}$$

であるから,

$$|\mu_f|(E) \leqslant \mu_{|f|}(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M}) \tag{5.63}$$

が成り立つ. この逆の不等式を示す.

$$\omega(x) := \begin{cases} \frac{|f(x)|}{f(x)} & (x \in (|f| > 0)) \\ 1 & (x \in (|f| = 0)) \end{cases}$$

として複素数値可測関数 $\omega : X \to \mathbb{C}$ を定義すると,

$$|\omega(x)| = 1,\ \ f(x)\omega(x) = |f(x)| \ \ (\forall x \in X) \tag{5.64}$$

である. 実数値可測関数

$$\omega_1 : X \ni x \mapsto \mathrm{Re}(\omega(x)) \in \mathbb{R}, \quad \omega_2 : X \ni x \mapsto \mathrm{Im}(\omega(x)) \in \mathbb{R}$$

を定義し, 各非負値可測関数 $\omega_{j,\pm} = \max(\pm\omega_j, 0)$ に対し命題 5.29 により非負値可測単関数の列 $(s_{j,\pm,n})_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$s_{j,\pm,n}(x) \leqslant s_{j,\pm,n+1}(x) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X), \quad \omega_{j,\pm}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_{j,\pm,n}(x) \ \ (\forall x \in X) \tag{5.65}$$

を満たすものを取る. 各 $j \in \{1, 2\}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し実数値可測単関数

$$s_{j,n} := s_{j,+,n} - s_{j,-,n} : X \to \mathbb{R}$$

を定義すると (5.65) より,

$$|s_{j,n}(x)| \leqslant \omega_{j,+}(x) + \omega_{j,-}(x) = |\omega_j(x)| \ \ (\forall j \in \{1, 2\}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X)$$

であるから, 複素数値可測単関数の列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を,

$$s_n(x) = s_{1,n}(x) + is_{2,n}(x) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X)$$

と定義すると, (5.64) より,

$$|s_n(x)|^2 = |s_{1,n}(x)|^2 + |s_{2,n}(x)|^2 \leqslant |\omega_1(x)|^2 + |\omega_2(x)|^2 = |\omega(x)|^2 = 1 \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X) \tag{5.66}$$

となる. また (5.65) より,

$$\lim_{n\to\infty} s_{j,n}(x) = \omega_{j,+}(x) - \omega_{j,-}(x) = \omega_j(x) \ \ (\forall j \in \{1, 2\}, \forall x \in X)$$

であるから,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \omega_1(x) + i\omega_2(x) = \omega(x) \ \ (\forall x \in X)$$

である. よって (5.64) より任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し,

$$|f(x)|\chi_E(x) = f(x)\omega(x)\chi_E(x) = \lim_{n\to\infty} f(x)s_n(x)\chi_E(x) \ \ (\forall x \in X)$$

であり, (5.66) より Lebesgue 優収束定理 5.59 が適用できて,

$$\int_X |f(x)|\chi_E(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X f(x)s_n(x)\chi_E(x)d\mu(x) \tag{5.67}$$

が成り立つ. 各 $n \in \mathbb{N}$ について s_n は可測単関数であり (5.66) より $|s_n(x)| \leqslant 1$ $(\forall x \in X)$ であるから, 任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し, $\mathfrak{M}$ の有限非交叉列 $E_{n,1}, \cdots, E_{n,m(n)}$ と $a_{n,1}, \cdots, a_{n,m(n)} \in \mathbb{C}$ で,

$$s_n\chi_E = \sum_{k=1}^{m(n)} a_{n,k}\chi_{E_{n,k}}, \quad E = \bigcup_{k=1}^{m(n)} E_{n,k}, \quad |a_{n,k}| \leqslant 1 \ \ (k = 1, \cdots, m(n))$$

を満たすものが取れる. よって,

$$\begin{aligned}\left|\int_X f(x)s_n(x)\chi_E(x)d\mu(x)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{m(n)} a_{n,k}\int_X f(x)\chi_{E_{n,k}}(x)d\mu(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m(n)} |a_{n,k}| \left|\int_X f(x)\chi_{E_{n,k}}(x)d\mu(x)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{m(n)} \left|\int_X f(x)\chi_{E_{n,k}}(x)d\mu(x)\right| \leqslant |\mu_f|(E)\end{aligned}$$

となる. これより,

$$\left|\int_X f(x)s_n(x)\chi_E(x)d\mu(x)\right| \leqslant |\mu_f|(E) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall E \in \mathfrak{M})$$

であるから (5.67) より,

$$\int_X |f(x)|\chi_E(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \left|\int_X f(x)s_n(x)\chi_E(x)d\mu(x)\right| \leqslant |\mu_f|(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M}).$$

これで (5.63) の逆の不等式が示された. □

命題 5.113 (複素数値測度の全変動は有限測度)**.** $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ を複素数値測度とする. このとき ν の全変動 $|\nu| : \mathfrak{M} \to [0, \infty)$ (定義 5.110) は有限測度である.

証明. 実数値測度 $\mathrm{Re}(\nu) : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \mathrm{Re}(\nu(E)) \in \mathbb{R}$ と $\mathrm{Im}(\nu) : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \mathrm{Im}(\nu(E)) \in \mathbb{R}$ の全変動 $|\mathrm{Re}(\nu)|, |\mathrm{Im}(\nu)|$ に対し有限測度

$$\mu : \mathfrak{M} \ni E \mapsto |\mathrm{Re}(\nu)|(E) + |\mathrm{Im}(\nu)|(E) \in [0, \infty)$$

を定義すると注意 5.111 で述べたように,

$$|\nu(E)| \leqslant |\nu|(E) \leqslant \mu(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

となる. よって ν は μ に関して絶対連続 (定義 5.100) であるから Radon-Nikodym の定理 5.106 より $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ (ν の μ に関する Radon-Nikodym 微分) が存在し,

$$\nu(E) = \mu_f(E) = \int_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

が成り立つ. 命題 5.112 より,

$$|\nu|(E) = \mu_{|f|}(E) = \int_X |f(x)|\chi_E(x)d\mu(x) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

であるから $|\nu|$ は有限測度である. □

命題 5.114. $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ を複素数値測度とする. このとき ν は全変動 $|\nu| : \mathfrak{M} \to [0, \infty)$ (命題 5.113 より有限測度) に関して絶対連続である. そして ν の $|\nu|$ に関する Radon-Nikodym 微分 (定義 5.107) を $h \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, |\nu|)$ とおくと,

$$|h(x)| = 1 \ \ (|\nu|\text{-a.e. } x \in X)$$

が成り立つ.

証明. 全変動の定義 5.110 より明らかに,

$$|\nu(E)| \leqslant |\nu|(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

であるから ν は $|\nu|$ に関して絶対連続である. ν の $|\nu|$ に関する Radon-Nikodym 微分を $h \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, |\nu|)$ とすると $\nu = |\nu|_h$ だから命題 5.112 より,

$$|\nu|(E) = ||\nu|_h|(E) = |\nu|_{|h|}(E) = \int_X |h(x)|\chi_E(x)d|\nu|(x) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

である. よって,

$$\int_X (1 - |h(x)|)\chi_E(x)d|\nu|(x) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

であるから命題 5.57 より,

$$|h(x)| = 1 \ \ (|\nu|\text{-a.e. } x \in X)$$

が成り立つ. □

定義 5.115 (複素数値測度の符号関数)**.** $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ を複素数値測度, $|\nu| : \mathfrak{M} \to [0, \infty)$ を ν の全変動とする. ν の $|\nu|$ に関する Radon-Nikodym 微分 $h : X \to \mathbb{C}$ を ν の符号関数と呼ぶこととする. 命題 5.114 より ν の符号関数 h は

$$|h(x)| = 1 \ \ (|\nu|\text{-a.e. } x \in X)$$

を満たす. また h_1, h_2 がいずれも ν の符号関数ならば,

$$\int_X h_1(x)\chi_E(x)d|\nu|(x) = \nu(E) = \int_X h_2(x)\chi_E(x)d|\nu|(x) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

であるから命題 5.57 より,

$$h_1(x) = h_2(x) \ \ (|\nu|\text{-a.e. } x \in X)$$

である.

定義 5.116 (複素数値測度による積分の定義)**.** 可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ が ν に関して可積分であるとは f が ν の全変動 $|\nu| : \mathfrak{M} \to [0, \infty)$ に関して可積分であることを言う．そしてこのとき f の ν による積分を ν の符号関数 $h : X \to \mathbb{C}$ (定義 5.115) を用いて,

$$\int_X f(x)d\nu(x) := \int_X f(x)h(x)d|\nu|(x)$$

と定義する．$|\nu|$-a.e. $x \in X$ で $|h(x)| = 1$ であること, h_1, h_2 が共に符号関数ならば $|\nu|$-a.e. $x \in X$ で $h_1(x) = h_2(x)$ であること (定義 5.115 を参照) からこの積分の定義は well-defined である．

$$\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \nu) := \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ は } \nu \text{ に関して可積分 }\} = \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, |\nu|)$$

とおく．

定理 5.117. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とする．このとき,

(1) 非負値可測関数 $\omega : X \to [0, \infty)$ に対する測度

$$\mu_\omega : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_X \omega(x)\chi_E(x)d\mu(x) \in [0, \infty]$$

に対し,

$$f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu_\omega) \quad \Leftrightarrow \quad f\omega \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$$

であり,

$$\int_X f(x)d\mu_\omega(x) = \int_X f(x)\omega(x)d\mu(x) \quad (\forall f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu_\omega))$$

が成り立つ．

(2) $\omega \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に対する複素数値測度

$$\mu_\omega : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_X \omega(x)\chi_E(x)d\mu(x) \in \mathbb{C}$$

に対し,

$$f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu_\omega) \quad \Leftrightarrow \quad f\omega \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$$

であり,

$$\int_X f(x)d\mu_\omega(x) = \int_X f(x)\omega(x)d\mu(x) \quad (\forall f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu_\omega))$$

が成り立つ．

(3) 複素数値測度 $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ と $\omega \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \nu)$ に対する複素数値測度

$$\nu_\omega : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_X \omega(x)\chi_E(x)d\nu(x) \in \mathbb{C}$$

に対し,

$$f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \nu_\omega) \quad \Leftrightarrow \quad f\omega \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \nu)$$

であり,

$$\int_X f(x)d\nu_\omega(x) = \int_X f(x)\omega(x)d\nu(x) \quad (\forall f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \nu_\omega))$$

が成り立つ．

証明. (1) 任意の非負値可測関数 $g : X \to [0, \infty]$ に対し命題 5.29 より非負値可測単関数の列 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X), \quad g(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$$

を満たすものが取れるので単調収束定理 5.40 より,

$$\int_X g(x)\omega(x)d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X g_n(x)\omega(x)d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X g_n(x)d\mu_\omega(x) = \int_X g(x)d\mu_\omega(x)$$

が成り立つ．よって可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し，

$$f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu_\omega) \quad\Leftrightarrow\quad \int_X |f(x)| d\mu_\omega(x) < \infty \quad\Leftrightarrow$$
$$\int_X |f(x)|\omega(x) d\mu(x) < \infty \quad\Leftrightarrow\quad f\omega \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$$

であり，任意の $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu_\omega)$ に対し，

$$f_1 : X \ni x \mapsto \mathrm{Re}(f(x)) \in \mathbb{R}, \quad f_2 : X \ni x \mapsto \mathrm{Im}(f(x)) \in \mathbb{R}$$

とおけば，

$$\begin{aligned}\int_X f_j(x) d\mu_\omega(x) &= \int_X f_{j,+}(x) d\mu_\omega(x) - \int_X f_{j,-}(x) d\mu_\omega(x) \\ &= \int_X f_{j,+}(x)\omega(x) d\mu(x) - \int_X f_{j,-}(x)\omega(x) d\mu(x) \\ &= \int_X f_j(x)\omega(x) d\mu(x) \quad (j = 1, 2)\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}\int_X f(x) d\mu_\omega(x) &= \int_X f_1(x) d\mu_\omega(x) + i \int_X f_2(x) d\mu_\omega(x) \\ &= \int_X f_1(x)\omega(x) d\mu(x) + i \int_X f_2(x)\omega(x) d\mu(\omega) \\ &= \int_X f(x)\omega(x) d\mu(x)\end{aligned}$$

である．

(2) μ_ω の全変動が $|\mu_\omega| = \mu_{|\omega|}$ である (命題 5.117) ことと複素数値測度による積分の定義 5.116 と (1) より，

$$\begin{aligned}f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu_\omega) \quad\Leftrightarrow\quad \int_X |f(x)| d\mu_{|\omega|}(x) < \infty \quad\Leftrightarrow\quad \int_X |f(x)\omega(x)| d\mu(x) < \infty \\ \Leftrightarrow f\omega \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)\end{aligned}$$

である．今，複素数値測度 μ_ω の符号関数 (定義 5.115) を $h \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu_{|\omega|})$ とすると (1) より，

$$\mu_\omega(E) = \int_X h(x)\chi_E(x) d\mu_{|\omega|}(x) = \int_X h(x)|\omega(x)|\chi_E(x) d\mu(x) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

であるから，

$$\int_X (\omega(x) - h(x)|\omega(x)|)\chi_E(x) d\mu(x) = 0 \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

である．よって命題 5.57 より，

$$\omega(x) = h(x)|\omega(x)| \quad (\mu\text{-a.e. } x \in X)$$

であるから任意の $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu_\omega)$ に対し複素数値測度による積分の定義 5.116 と (1) より，

$$\int_X f(x) d\mu_\omega(x) = \int_X f(x)h(x) d\mu_{|\omega|}(x) = \int_X f(x)h(x)|\omega(x)| d\mu(x) = \int_X f(x)\omega(x) d\mu(x)$$

である．

(3) 複素数値測度 ν の符号関数を $h \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, |\nu|)$ とおくと複素数値測度 ν_ω は，

$$\nu_\omega(E) = \int_X \omega(x)\chi_E(x) d\nu(x) = \int_X \omega(x)h(x)\chi_E(x) d|\nu|(x) = |\nu|_{\omega h}(E) \quad (\forall E \in \mathfrak{M})$$

であるから (2) より,

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \nu_\omega) \ &\Leftrightarrow\ f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, |\nu|_{\omega h}) \ \Leftrightarrow\ f\omega h \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, |\nu|) \\ &\Leftrightarrow\ f\omega \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \nu) \end{aligned}$$

であり, 任意の $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \nu_\omega)$ に対し,

$$\int_X f(x) d\nu_\omega(x) = \int_X f(x) d|\nu|_{\omega h}(x) = \int_X f(x)\omega(x)h(x)d|\nu|(x) = \int_X f(x)\omega(x)d\nu(x)$$

である.

□

5.6 Hölder の不等式, Minkowski の不等式, L^p 空間

定義 5.118 (共役指数)**.** $p, q \in [1, \infty]$ が互いに共役指数であるとは,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

が成り立つことを言う. ただし $\frac{1}{\infty} = 0$ である.

補題 5.119. $p, q \in (1, \infty)$ が互いに共役指数であるとすると, 任意の $x, y \in (0, \infty)$ に対し,

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y$$

が成り立つ.

証明. 対数関数 $\log : (0, \infty) \ni x \mapsto \log(x) \in \mathbb{R}$ の 2 階の導関数は命題 4.37 より,

$$\log''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad (\forall x \in (0, \infty))$$

であるから命題 4.16 より log は上に凸である. よって,

$$\frac{1}{p}\log(x) + \frac{1}{q}\log(y) \leqslant \log\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right)$$

である. 指数関数 $\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(x) \in (0, \infty)$ は単調増加である (命題 4.35) から,

$$\exp\left(\frac{1}{p}\log(x) + \frac{1}{q}\log(y)\right) \leqslant \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y$$

であり, 左辺は指数関数の加法定理 4.33 と定義 4.38 より $x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}}$ である. よって求める不等式を得る. □

定理 5.120 (Hölder の不等式)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, $p, q \in (1, \infty)$ を互いに共役指数とする. このとき任意の非負値可測関数 $f, g : X \to [0, \infty]$ に対し,

$$\int_X f(x)g(x)d\mu(x) \leqslant \left(\int_X f(x)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g(x)^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \tag{5.68}$$

が成り立つ[*54].

[*54] 0 の非負実数乗は 0, ∞ の非負実数乗は ∞ である (定義 5.25).

証明. $\int_X f(x)^p d\mu(x) = 0$ ならば命題 5.46 より μ-a.e. $x \in X$ で $f(x) = 0$ であるので (5.68) は両辺共に 0 であるから成り立つ. 同様に $\int_X g(x)^q d\mu(x) = 0$ の場合も (5.68) は両辺共に 0 であるから成り立つ. そこで $\int_X f(x)^p d\mu(x) > 0$ かつ $\int_X g(x)^q d\mu(x) > 0$ とする. このときもし $\int_X f(x)^p d\mu(x) = \infty$ か $\int_X g(x)^q d\mu(x) = \infty$ ならば (5.68) は右辺が ∞ であるので成り立つ. そこでさらに,

$$\int_X f(x)^p d\mu(x) \in (0,\infty), \quad \int_X g(x)^q d\mu(x) \in (0,\infty)$$

とする. そして,

$$A := \left(\int_X f(x)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}, \quad B := \left(\int_X g(x)^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

とおき, 非負値可測関数 $F, G : X \to [0,\infty]$ を,

$$F(x) := \frac{1}{A} f(x), \quad G(x) := \frac{1}{B} g(x) \quad (\forall x \in X)$$

として定義する. このとき,

$$\int_X F(x)^p d\mu(x) = \frac{1}{A^p}\int_X f(x)^p d\mu(x) = 1,$$
$$\int_X G(x)^q d\mu(x) = \frac{1}{B^q}\int_X g(x)^q d\mu(x) = 1$$

であり, 補題 5.119 より,

$$F(x)G(x) = (F(x)^p)^{\frac{1}{p}}(G(x)^q)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p}F(x)^p + \frac{1}{q}G(x)^q \quad (\forall x \in X)$$

であるから,

$$\int_X F(x)G(x) d\mu(x) \leqslant \frac{1}{p}\int_X F(x)^p d\mu(x) + \frac{1}{q}\int_X G(x)^q d\mu(x) = 1$$

である. よって両辺に AB を掛ければ (5.68) を得る. □

補題 5.121. 任意の $p \in (1,\infty)$, 任意の $x, y \in (0,\infty)$ に対し,

$$(x+y)^p \leqslant 2^{p-1}(x+y)$$

が成り立つ.

証明. $f : (0,\infty) \ni x \mapsto x^p \in (0,\infty)$ の 2 階の導関数は,

$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0 \quad (\forall x \in (0,\infty))$$

であるから命題 4.16 より f は下に凸である. よって任意の $x, y \in (0,\infty)$ に対し,

$$\frac{1}{2^p}(x+y)^p = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = \frac{1}{2}(x^p + y^p)$$

だから両辺に 2^p を掛ければ求める不等式を得る. □

定理 5.122 (Minkowski の不等式)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とする. このとき任意の非負値可測関数 $f, g : X \to [0,\infty]$ と任意の $p \in [1,\infty)$ に対し,

$$\left(\int_X (f(x)+g(x))^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_X f(x)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g(x)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.69}$$

が成り立つ.

証明. $p=1$ の場合は自明なので $p\in(1,\infty)$ とする．さらに自明に成り立つ場合を除外するため，

$$\int_X (f(x)+g(x))^p d\mu(x)>0,\quad \int_X f(x)^p d\mu(x)<\infty,\quad \int_X g(x)^p d\mu(x)<\infty \tag{5.70}$$

とする．補題 5.121 より，

$$(f(x)+g(x))^p\leqslant 2^{p-1}(f(x)^p+g(x)^p)\quad(\forall x\in X)$$

が成り立つので (5.70) より，

$$0<\int_X (f(x)+g(x))^p d\mu(x)\leqslant 2^{p-1}\left(\int_X f(x)^p d\mu(x)+\int_X g(x)^p d\mu(x)\right)<\infty \tag{5.71}$$

である．今，

$$(f(x)+g(x))^p=f(x)(f(x)+g(x))^{p-1}+g(x)(f(x)+g(x))^{p-1}\quad(\forall x\in X)$$

より，

$$\int_X (f(x)+g(x))^p d\mu(x)=\int_X f(x)(f(x)+g(x))^{p-1}d\mu(x)+\int_X g(x)(f(x)+g(x))^{p-1}d\mu(x) \tag{5.72}$$

であり，$p\in(1,\infty)$ の共役指数 $q\in(1,\infty)$ に対し $pq-q=p$ であることに注意して Hölder の不等式 5.120 を用いると，

$$\begin{aligned}\int_X f(x)(f(x)+g(x))^{p-1}d\mu(x)&\leqslant\left(\int_X f(x)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X (f(x)+g(x))^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}},\\ \int_X g(x)(f(x)+g(x))^{p-1}d\mu(x)&\leqslant\left(\int_X g(x)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X (f(x)+g(x))^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

となる．よって (5.72) より，

$$\int_X (f(x)+g(x))^p d\mu(x)\leqslant\left(\left(\int_X f(x)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_X g(x)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_X (f(x)+g(x))^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \tag{5.73}$$

が成り立つ．(5.71) より，

$$\left(\int_X (f(x)+g(x))^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}\in(0,\infty) \tag{5.74}$$

であるので (5.73) の両辺を (5.74) で割れば，

$$\left(\int_X (f(x)+g(x))^p d\mu(x)\right)^{1-\frac{1}{q}}\leqslant\left(\int_X f(x)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_X g(x)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

となる．$1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$ であるから (5.69) を得る． □

定義 5.123 (L^p **関数**)**.** $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を測度空間，$\mathcal{L}(X,\mathfrak{M})$ を $(X,\mathfrak{M})$ 上の複素数値可測関数全体とする．$p\in[1,\infty)$ に対し，

$$\mathcal{L}^p(X,\mathfrak{M},\mu):=\left\{f\in\mathcal{L}(X,\mathfrak{M}):\int_X |f(x)|^p d\mu(x)<\infty\right\}$$

の元を $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 上の p 乗可積分関数，もしくは L^p 関数と言い，

$$\|f\|_p:=\left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\in[0,\infty)\quad(\forall f\in\mathcal{L}^p(X,\mathfrak{M},\mu))$$

を L^p 関数の L^p ノルムと言う．また，

$$\mathcal{L}^\infty(X,\mathfrak{M},\mu):=\{f\in\mathcal{L}(X,\mathfrak{M}):\exists m\in[0,\infty)\ \text{s.t.}\ \mu((m<|f|))=0\}$$

の元を $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 上の本質的に有界な関数，もしくは L^∞ 関数と言い，

$$\|f\|_\infty=\inf\{m\in[0,\infty):\mu((m<|f|))=0\}$$

を L^∞ 関数の L^∞ ノルムと言う．

命題 5.124. $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を測度空間とする．このとき任意の $p\in[1,\infty]$ に対し $\mathcal{L}^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ は各点ごとの演算で $\mathbb{C}$ 上の線型空間をなし, L^p ノルム

$$\mathcal{L}^p(X,\mathfrak{M},\mu)\ni f\mapsto \|f\|_p\in[0,\infty)$$

はセミノルムである．また,

$$\mu((\|f\|_\infty<|f|))=0\ \ (\forall f\in\mathcal{L}^\infty(X,\mathfrak{M},\mu))$$

が成り立つ．

証明.　(1) $p\in[1,\infty)$ の場合．任意の $f,g\in\mathcal{L}^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ に対し Minkowski の不等式 5.122 より,

$$\begin{aligned}\left(\int_X|f(x)+g(x)|^pd\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}&\leqslant\left(\int_X(|f(x)|+|g(x)|)^pd\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\int_X|f(x)|^pd\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_X|g(x)|^pd\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\end{aligned}\tag{5.75}$$

であり, 任意の $f\in\mathcal{L}^p(X,\mathfrak{M},\mu)$, 任意の $\alpha\in\mathbb{C}$ に対し,

$$\left(\int_X|\alpha f(x)|^pd\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}=\left(|\alpha|^p\int_X|f(x)|^pd\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}=|\alpha|\left(\int_X|f(x)|^pd\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\tag{5.76}$$

である．よって $\mathcal{L}^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ は各点ごとの演算により $\mathbb{C}$ 上の線型空間であり (5.75), (5.76) より,

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p,\ \ \|\alpha f\|_p=|\alpha|\|f\|_p\ \ (\forall f,g\in\mathcal{L}^p(X,\mathfrak{M},\mu),\forall\alpha\in\mathbb{C})$$

であるので $\mathcal{L}^p(X,\mathfrak{M},\mu)\ni f\mapsto\|f\|_p\in[0,\infty)$ はセミノルムである．

(2) $p=\infty$ の場合．任意の $f\in\mathcal{L}^\infty(X,\mathfrak{M},\mu)$ に対し,

$$(\|f\|_\infty<|f|)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\|f\|_\infty+\frac{1}{n}<|f|\right)$$

であり, $\|f\|_\infty$ の定義より,

$$\mu\left(\left(\|f\|_\infty+\frac{1}{n}<|f|\right)\right)=0\ \ (\forall n\in\mathbb{N})$$

であるから,

$$\mu\left((\|f\|_\infty<|f|)\right)\leqslant\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu\left(\left(\|f\|_\infty+\frac{1}{n}<|f|\right)\right)=0$$

である．任意の $f,g\in\mathcal{L}^\infty(X,\mathfrak{M},\mu)$ に対し,

$$(\|f\|_\infty+\|g\|_\infty<|f+g|)\subseteq(\|f\|_\infty+\|g\|_\infty<|f|+|g|)\subseteq(\|f\|_\infty<|f|)\cup(\|g\|_\infty<|g|)$$

であるから,

$$\mu\left((\|f\|_\infty+\|g\|_\infty<|f+g|)\right)\leqslant\mu\left((\|f\|_\infty<|f|)\right)+\mu\left((\|g\|_\infty<|g|)\right)=0.$$

よって $f+g\in\mathcal{L}^\infty(X,\mathfrak{M},\mu)$ であり,

$$\|f+g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$$

である．また任意の $f\in\mathcal{L}^\infty(X,\mathfrak{M},\mu)$ と任意の $\alpha\in\mathbb{C}$ に対し,

$$(|\alpha|\|f\|_\infty<|\alpha f|)\subseteq(\|f\|_\infty<|f|)$$

だから $\alpha f\in\mathcal{L}^\infty(X,\mathfrak{M},\mu)$ であり,

$$\|\alpha f\|_\infty\leqslant|\alpha|\|f\|_\infty.$$

$\alpha\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ の場合,

$$\|f\|_\infty=\left\|\frac{1}{\alpha}\alpha f\right\|_\infty\leqslant\frac{1}{|\alpha|}\|\alpha f\|_\infty$$

であるから $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty$ であり, $\|0f\|_\infty = 0 = 0\|f\|_\infty$ であるから,

$$\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty \quad (\forall f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu), \forall \alpha \in \mathbb{C})$$

である. よって $\mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ は各点ごとの演算で $\mathbb{C}$ 上の線型空間であり $\mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu) \ni f \mapsto \|f\|_\infty \in [0, \infty)$ はセミノルムである.

□

定義 5.125 (測度に関して a.e. で等しい可測関数類全体)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, $(X, \mathfrak{M})$ 上の複素数値可測関数全体を $\mathcal{L}(X, \mathfrak{M})$,

$$\mathcal{N}(X, \mathfrak{M}, \mu) := \{f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{M}) : f(x) = 0 \ (\mu\text{-a.e. } x \in X)\}$$

とおく. $\mathcal{L}(X, \mathfrak{M})$ は各点ごとの演算で $\mathbb{C}$ 上の可換な $*$-環 (定義 2.4) であり, $\mathcal{N}(X, \mathfrak{M}, \mu)$ は $\mathcal{L}(X, \mathfrak{M})$ の $*$-イデアル (定義 2.28) である. そこで商 $*$-環 (定義 2.30)

$$L(X, \mathfrak{M}, \mu) := \mathcal{L}(X, \mathfrak{M}) / \mathcal{N}(X, \mathfrak{M}, \mu)$$

を定義し, 商写像を,

$$\mathcal{L}(X, \mathfrak{M}) \ni f \mapsto [f] \in L(X, \mathfrak{M}, \mu)$$

と表す. $[f] \in L(X, \mathfrak{M}, \mu)$ は混乱の恐れがない場合, 簡単のため代表元 $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{M})$ によって表すことも多い.

定義 5.126 (L^p 空間)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とする. 任意の $p \in [1, \infty]$ に対し,

$$\mathcal{N}(X, \mathfrak{M}, \mu) = \{f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu) : \|f\|_p = 0\}$$

と表せる. 命題 5.124 より $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ は各点ごとの演算で $\mathbb{C}$ 上の線型空間であるから商線型空間 (定義 2.26)

$$L^p(X, \mathfrak{M}, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu) / \mathcal{N}(X, \mathfrak{M}, \mu) \subseteq L(X, \mathfrak{M}, \mu)$$

が定義でき, $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu) \ni f \mapsto \|f\|_p \in [0, \infty)$ はセミノルムであるから,

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p \quad (\forall [f] \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu))$$

としてノルム

$$L^p(X, \mathfrak{M}, \mu) \ni [f] \mapsto \|[f]\|_p \in [0, \infty) \tag{5.77}$$

が定義できる. このノルム (5.77) を $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上の L^p ノルムと言う. L^p ノルムが備わったノルム空間 $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上の L^p 空間と言う. 次の定理 5.127 より L^p 空間は Banach 空間である.

定理 5.127 (L^p 空間の完備性)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とする. このとき任意の $p \in [1, \infty]$ に対し L^p 空間 $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ (定義 5.126) は Banach 空間である.

証明. (1) $p \in [1, \infty)$ の場合. $([f_n])_{n \in \mathbb{N}}$ を $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ の任意の Cauchy 列とする. 部分列 $([f_{k(n)}])_{n \in \mathbb{N}}$ で,

$$\|f_{k(n+1)} - f_{k(n)}\|_p < \frac{1}{2^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たすものを取り, 各点で単調増加な非負値可測関数の列 $(g_N)_{N \in \mathbb{N}}$ を,

$$g_N := \sum_{n=1}^{N} |f_{k(n+1)} - f_{k(n)}| \quad (\forall N \in \mathbb{N})$$

として定義する. Minkowski の不等式 5.122 より任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\left(\int_X |g_N(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \left(\int_X |f_{k(n+1)}(x) - f_{k(n)}(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \|f_{k(n+1)} - f_{k(n)}\|_p \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \leqslant 1$$

であるから単調収束定理 5.40 より,

$$\int_X \sup_{n\in\mathbb{N}} g_N(x)^p d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X g_N(x)^p d\mu(x) \leqslant 1 < \infty.$$

よって命題 5.46 より μ-a.e. $x \in X$ で $\sup_{N\in\mathbb{N}} g_N(x)^p < \infty$ であるから,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_{k(n+1)}(x) - f_{k(n)}(x)| = \sup_{N\in\mathbb{N}} g_N(x) < \infty \ \ (\mu\text{-a.e. } x \in X).$$

ゆえに μ-a.e. $x \in X$ で,

$$\lim_{n\to\infty} f_{k(n)}(x) = f_{k(1)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{k(n+1)}(x) - f_{k(n)}(x)) \in \mathbb{C}$$

が存在する．そこで可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ で,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_{k(n)}(x) \ \ (\mu\text{-a.e. } x \in X) \tag{5.78}$$

を満たすものを取る．今, 任意の正実数 ε に対し, $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ が $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ の Cauchy 列であることから,

$$\|f_n - f_m\|_p \leqslant \varepsilon \ \ (\forall n, m \geqslant n_0) \tag{5.79}$$

を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が取れる．$m \geqslant n_0$ を満たす任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し (5.78) より,

$$|f(x) - f_m(x)|^p = \lim_{n\to\infty} |f_{k(n)}(x) - f_m(x)|^p = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{j\geqslant n} |f_{k(j)}(x) - f_m(x)|^p \ \ (\mu\text{-a.e. } x \in X)$$

であるから, Fatou の補題 5.41 と (5.79) より,

$$\begin{aligned}
&\int_X |f(x) - f_m(x)|^p d\mu(x) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{j\geqslant n} \int_X |f_{k(j)}(x) - f_m(x)|^p d\mu(x) \\
&\leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{j\geqslant n} \int_X |f_{k(j)}(x) - f_m(x)|^p d\mu(x) \leqslant \sup_{n\geqslant n_0} \int_X |f_{k(n)}(x) - f_m(x)|^p d\mu(x) \\
&= \sup_{n\geqslant n_0} \|f_{k(n)} - f_m\|_p^p \leqslant \varepsilon^p
\end{aligned}$$

となる．よって $f - f_m \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ であるから $f = f - f_m + f_m \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ であり,

$$\|f - f_m\|_p = \left(\int_X |f(x) - f_m(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon \ \ (\forall m \geqslant n_0)$$

が成り立つ．ε は任意の正実数であるから $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ は $[f] \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に収束する．ゆえに $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ は Banach 空間である．

(2) $p = \infty$ の場合. $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ を $L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ の任意の Cauchy 列とする．

$$N := \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} (\|f_n - f_m\|_\infty < |f_n - f_m|)$$

とおけば,

$$\mu(N) \leqslant \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \mu((\|f_n - f_m\|_\infty < |f_n - f_m|)) = 0$$

である．任意の正実数 ε に対し,

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \ \ (\forall n, m \geqslant n_0)$$

を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ を取ると,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \ \ (\forall n, m \geqslant n_0, \forall x \in X \backslash N)$$

であるから $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $X\backslash N$ 上で一様 Cauchy 条件 (定義 1.126) を満たす．よって，

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ \ (\forall x \in X\backslash N)$$

を満たす可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ を取れば，定理 1.127 より $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $X\backslash N$ 上で f に一様収束する．ゆえに任意の正実数 ε に対し，

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \ \ (\forall n \geqslant n_1, \forall x \in X\backslash N)$$

を満たす $n_1 \in \mathbb{N}$ が取れる．$n \geqslant n_1$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$(\varepsilon < |f - f_n|) \subseteq N$$

であるから，

$$\mu((\varepsilon < |f - f_n|)) \leqslant \mu(N) = 0.$$

よって $f - f_n \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ であるから $f = (f - f_n) + f_n \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ であり，

$$\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon \ \ (\forall n \geqslant n_1)$$

が成り立つ．ε は任意の正実数であるから $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ は $[f] \in L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に収束する．ゆえに $L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ は Banach 空間である．

□

定理 5.128 (L^p 関数の可測単関数の列による近似)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間，$p \in [1, \infty]$，$f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ とする．このとき可測単関数の列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，

$$|s_n(x)| \leqslant |f(x)| \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X), \quad \lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|_p = 0$$

を満たすものが存在する．

証明. 実数値可測関数 $f_1 = \mathrm{Re}(f)$，$f_2 = \mathrm{Im}(f)$ を考え，各非負値可測関数 $f_{j,\pm} = \max(\pm f_j, 0)$ に対し非負値可測単関数の列 $(s_{j,\pm,n})_{n\in\mathbb{N}}$ を，

$$s_{j,\pm,n} := \sum_{k=1}^{2^n n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{\left(\frac{k-1}{2^n} \leqslant f_{j,\pm} < \frac{k}{2^n}\right)} + n\chi_{(n \leqslant f_{j,\pm})} \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{5.80}$$

として定義すると命題 5.29 より，

$$\begin{aligned} &s_{j,\pm,n}(x) \leqslant s_{j,\pm,n+1}(x) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X), \\ &f_{j,\pm}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_{j,\pm,n}(x) = \lim_{n\to\infty} s_{j,\pm,n}(x) \ \ (\forall x \in X) \end{aligned} \tag{5.81}$$

が成り立つ．そこで可測単関数の列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，

$$s_n := (s_{1,+,n} - s_{1,-,n}) + i(s_{2,+,n} - s_{2,-,n}) \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

として定義すると (5.81) より，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s_n(x) &= (f_{1,+}(x) - f_{1,-}(x)) + i(f_{2,+}(x) - f_{2,-}(x)) \\ &= f_1(x) + if_2(x) = f(x) \ \ (\forall x \in X) \end{aligned} \tag{5.82}$$

であり，

$$\begin{aligned} |s_{j,+,n}(x) - s_{j,-,n}(x)| &\leqslant s_{j,+,n}(x) + s_{j,-,n}(x) \leqslant f_{j,+}(x) + f_{j,-}(x) \\ &= |f_j(x)| \ \ (j = 1, 2, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X) \end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned} |s_n(x)|^2 &= |s_{1,+,n}(x) - s_{1,-,n}(x)|^2 + |s_{2,+,n}(x) - s_{2,-,n}(x)|^2 \\ &\leqslant |f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2 = |f(x)|^2 \ \ (\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

よって,

$$|s_n(x)| \leqslant |f(x)| \quad (\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}) \tag{5.83}$$

が成り立つ. 後は,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|_p = 0 \tag{5.84}$$

が成り立つことを示せばよい.

(1) $p \in [1,\infty)$ の場合. (5.83) より,

$$|f(x) - s_n(x)|^p \leqslant (2|f(x)|)^p \quad (\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N})$$

であり, (5.82) より,

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - s_n(x)|^p = 0 \quad (\forall x \in X)$$

であるから Lebesgue 優収束定理 5.59 より,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f(x) - s_n(x)|^p d\mu(x) = 0.$$

よって (5.84) は成り立つ.

(2) $p = \infty$ の場合. 任意の正実数 ε に対し,

$$\|f\|_\infty < n_0, \quad \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{4}$$

を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ を取る. 任意の $x \in X \backslash (\|f\|_\infty < |f|)$ に対し,

$$f_{j,\pm}(x) \leqslant |f_j(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty < n_0$$

だから (5.80) より,

$$0 \leqslant f_{j,\pm}(x) - s_{j,\pm,n}(x) \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\forall n \geqslant n_0, j = 1,2).$$

これより,

$$\left(\frac{\varepsilon}{4} < |f_{j,\pm} - s_{j,\pm,n}|\right) \subseteq (\|f\|_\infty < |f|) \quad (\forall n \geqslant n_0, j = 1,2). \tag{5.85}$$

ここで,

$$|f(x) - s_n(x)| \leqslant \sum_{j=1,2} (|f_{j,+}(x) - s_{j,+,n}(x)| + |f_{j,-}(x) - s_{j,-,n}(x)| \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X)$$

より,

$$(\varepsilon < |f - s_n|) \subseteq \bigcup_{j=1,2} \left(\left(\frac{\varepsilon}{4} < |f_{j,+} - s_{j,+,n}|\right) \cup \left(\frac{\varepsilon}{4} < |f_{j,-} - s_{j,-,n}|\right) \right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

なので (5.85) より,

$$(\varepsilon < |f - s_n|) \subseteq (\|f\|_\infty < |f|) \quad (\forall n \geqslant n_0).$$

よって,

$$\mu((\varepsilon < |f - s_n|)) \leqslant \mu((\|f\|_\infty < |f|)) = 0 \quad (\forall n \geqslant n_0)$$

だから,

$$\|f - s_n\|_\infty \leqslant \varepsilon \quad (\forall n \geqslant n_0).$$

ε は任意の正実数なので $p = \infty$ の場合も (5.84) は成り立つ.

□

系 5.129 (有界可測関数の可測単関数列による一様近似)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, $f : X \to \mathbb{C}$ を有界可測関数とする. このとき可測単関数の列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$|s_n(x)| \leqslant |f(x)| \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X), \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f(x) - s_n(x)| = 0$$

を満たすものが存在する.

証明. 定理 5.128 の $p=\infty$ の場合の証明で L^∞ ノルム $\|f\|_\infty$ の代わりに $\sup_{x\in X}|f(x)|$ を考えればよい. □

命題 5.130. $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を測度空間, $p,q\in[1,\infty]$ を共役指数とする. このとき任意の $[f]\in L^p(X,\mathfrak{M},\mu)$, 任意の $[g]\in L^q(X,\mathfrak{M},\mu)$ に対し,

$$[f][g]=[fg]\in L^1(X,\mathfrak{M},\mu),\ \ \|[f][g]\|_1\leqslant\|[f]\|_p\|[g]\|_q$$

が成り立つ.

証明. $p,q\in(1,\infty)$ の場合は Hölder の不等式 5.120 による. $p=1,q=\infty$ の場合, $\mu((\|g\|_\infty<|g|))=0$ より,

$$|f(x)g(x)|\leqslant|f(x)|\|g\|_\infty\ \ (\mu\text{-a.e. } x\in X).$$

よって,

$$\int_X|f(x)g(x)|d\mu(x)\leqslant\|f\|_1\|g\|_\infty$$

であるから成り立つ. □

定義 5.131 (Hilbert 空間としての L^2 空間)**.** $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を測度空間とする. 命題 5.130 より,

$$([f]\mid[g])_2:=\int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)\in\mathbb{C}\ \ (\forall[f],[g]\in L^2(X,\mathfrak{M},\mu))$$

として準双線型汎関数 (定義 3.45)

$$(\cdot\mid\cdot)_2:L^2(X,\mathfrak{M},\mu)\times L^2(X,\mathfrak{M},\mu)\ni([f],[g])\mapsto([f]\mid[g])_2\in\mathbb{C}$$

が定義できる.

$$([f]\mid[f])_2=\|[f]\|_2^2\ \ (\forall[f]\in L^2(X,\mathfrak{M},\mu))$$

より $(\cdot\mid\cdot)_2$ は $L^2(X,\mathfrak{M},\mu)$ 上の内積であり, 定理 5.127 よりこの内積によって $L^2(X,\mathfrak{M},\mu)$ は Hilbert 空間である. 内積 $(\cdot\mid\cdot)_2$ を L^2 内積と言う. 以後, L^2 空間は断ることなく L^2 内積による Hilbert 空間と考える.

定義 5.132 (L^p 空間と L^q 空間の自然なペアリング)**.** $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を測度空間, $p,q\in[1,\infty]$ を共役指数とする. このとき命題 5.130 より,

$${}_p\langle[f],[g]\rangle_q:=\int_X f(x)g(x)d\mu(x)\ \ (\forall[f]\in L^p(X,\mathfrak{M},\mu),\forall[g]\in L^q(X,\mathfrak{M},\mu))$$

として双線型汎関数 (定義 3.45)

$${}_p\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_q:L^p(X,\mathfrak{M},\mu)\times L^q(X,\mathfrak{M},\mu)\ni([f],[g])\mapsto{}_p\langle[f],[g]\rangle_q\in\mathbb{C}$$

が定義できる. Hölder の不等式 5.120 より任意の $[f]\in L^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ と任意の $[g]\in L^q(X,\mathfrak{M},\mu)$ に対し,

$$|{}_p\langle[f],[g]\rangle_q|=\left|\int_X f(x)g(x)d\mu(x)\right|\leqslant\int_X|f(x)g(x)|d\mu(x)\leqslant\|[f]\|_p\|[g]\|_q$$

であるから双線型汎関数 ${}_p\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_q$ は有界でありノルムが 1 以下 (定義 3.46) である. 有界双線型汎関数 ${}_p\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_q$ を $L^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ と $L^q(X,\mathfrak{M},\mu)$ の自然なペアリングと言う.

補題 5.133. $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を σ-有限測度空間, $p,q\in[1,\infty]$ を共役指数とし $p<\infty$ とする. このとき,

$$L^q(X,\mathfrak{M},\mu)\ni[g]\mapsto{}_p\langle\cdot\,,[g]\rangle_q\in L^p(X,\mathfrak{M},\mu)^*$$

はノルム減少 (定義 3.41) な単射線型写像である.

証明. ノルムが 1 以下の有界線型写像であることは定義 5.132 より明らかである．単射であることを示す．$[g] \in L^q(X, \mathfrak{M}, \mu)$ が

$$ {}_p\langle [f], [g] \rangle_q = 0 \ \ (\forall [f] \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)) \tag{5.86} $$

を満たすとして $[g] = 0$ であることを示せばよい．μ は σ-有限な測度であるから $\mathfrak{M}$ の列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，

$$ X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \ \ \mu(A_n) < \infty \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) $$

を満たすものが取れる．

$$ \chi_E \chi_{A_n} = \chi_{E\cap A_n} \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall E \in \mathfrak{M}) $$

であるから (5.86) より，

$$ 0 =_p \langle [\chi_E \chi_{A_n}], [g] \rangle_q = \int_X \chi_E(x) \chi_{A_n}(x) g(x) d\mu(x) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall E \in \mathfrak{M}). $$

よって命題 5.57 より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$ \chi_{A_n}(x) g(x) = 0 \ \ (\mu\text{-a.e. } x \in X) $$

だから μ-零集合の列 $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$ \chi_{A_n}(x) g(x) = 0 \ \ (\forall x \in X \backslash N_n) $$

となるものが取れる．そこで μ-零集合 $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ を考えれば，

$$ X \backslash N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \backslash N \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \backslash N_n $$

であるので任意の $x \in X \backslash N$ に対し $x \in A_n \backslash N_n$ なる $n \in \mathbb{N}$ が取れて，

$$ g(x) = \chi_{A_n}(x) g(x) = 0 $$

となる．よって μ-a.e. $x \in X$ で $g(x) = 0$ だから $[g] = 0$ である． □

補題 5.134. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を有限測度空間*[55], $p, q \in [1, \infty]$ を共役指数とし $p < \infty$ とする．このとき，

$$ L^q(X, \mathfrak{M}, \mu) \ni [g] \mapsto_p \langle \cdot\,, [g] \rangle_q \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)^* \tag{5.87} $$

はノルムを保存する (定義 3.41) 線型同型写像である．

証明. 補題 5.133 より (5.87) が全射かつノルム保存であることを示せばよい．任意の $\Phi \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)^*$ を取り固定する．

$$ \nu : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \Phi([\chi_E]) \in \mathbb{C} $$

とおく．$\mathfrak{M}$ の任意の非交叉列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，

$$ A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n, \ \ A_N := \bigcup_{n=1}^{N} E_n $$

とおけば，

$$ \begin{aligned} \left| \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \right) - \sum_{n=1}^{N} \nu(E_n) \right| &= |\nu(A) - \nu(A_N)| \leqslant \|\Phi\| \|[\chi_{A\backslash A_N}\|_p \\ &= \|\Phi\| \mu(A \backslash A_N)^{\frac{1}{p}} \to 0 \ \ (N \to \infty) \end{aligned} $$

*[55] μ が有限測度であると言うこと．

であるから ν は複素数値測度である．そして $|\nu(E)| \leqslant \|\Phi\|\mu(E)^{\frac{1}{p}}$ $(\forall E \in \mathfrak{M})$ より ν は μ に関して絶対連続なので Radon-Nikodym の定理 5.106 より $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ で，

$$\Phi([\chi_E]) = \nu(E) = \int_X \chi_E(x)g(x)d\mu(x) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M}) \tag{5.88}$$

を満たすものが取れる．これより，

$$\Phi([s]) = \int_X s(x)g(x)d\mu(x) \ \ (s : X \to \mathbb{C} \text{ は可測単関数 }) \tag{5.89}$$

である．任意の $[f] \in L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を取る．定理 5.128 より可測単関数の列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty}\|f - s_n\|_\infty = 0$ を満たすものが取れる．μ は有限測度なので $L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu) \subseteq L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ であり，

$$\|f - s_n\|_p \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{p}}\|f - s_n\|_\infty \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

であるから $([s_n])_{n\in\mathbb{N}}$ は L^∞ ノルムと L^p ノルムの両方で $[f] \in L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu) \subseteq L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に収束する．よって (5.89) より，

$$\Phi([f]) = \lim_{n\to\infty} \Phi([s_n]) = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n(x)g(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} {}_\infty\langle [s_n], [g]\rangle_1 = \int_X f(x)g(x)d\mu(x).$$

これより，

$$\Phi([f]) = \int_X f(x)g(x)d\mu(x) \ \ (\forall [f] \in L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)) \tag{5.90}$$

が成り立つ．今，

$$[g] \in L^q(X, \mathfrak{M}, \mu), \ \ \|[g]\|_q \leqslant \|\Phi\| \tag{5.91}$$

が成り立つことを示す．

(1) $p = 1$ の場合．複素数値測度

$$\mu_g : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_X g(x)\chi_E(x)d\mu(x) \in \mathbb{C}$$

に対し (5.88) より，

$$|\mu_g(E)| = |\Phi([\chi_E])| \leqslant \|\Phi\|\mu(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

であるから μ_g の全変動 (定義 5.110) $|\mu_g| : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ は，

$$|\mu_g|(E) \leqslant \|\Phi\|\mu(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M}) \tag{5.92}$$

を満たす．命題 5.112 より，

$$|\mu_g|(E) = \mu_{|g|}(E) = \int_X |g(x)|\chi_E(x)d\mu(x) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

であるから (5.92) より，

$$\int_X |g(x)|\chi_E(x)d\mu(x) \leqslant \|\Phi\|\mu(E) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M}),$$

すなわち，

$$\int_X (|g(x)| - \|\Phi\|)\chi_E(x)d\mu(x) \leqslant 0 \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

である．よって，

$$\int_X (|g(x)| - \|\Phi\|)\chi_{(\|\Phi\|<|g|)}(x)d\mu(x) = 0$$

が成り立つ．左辺の被積分関数は非負値だから命題 5.46 より，

$$(|g(x)| - \|\Phi\|)\chi_{(\|\Phi\|<|g|)}(x) = 0 \ \ (\mu\text{-a.e. } x \in X)$$

であり，これは，

$$\mu((\|\Phi\| < |g|)) = 0$$

を意味する．よって $[g] \in L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$, $\|[g]\|_\infty \leqslant \|\Phi\|$ であるから $p = 1$ の場合は (5.91) が成り立つ．

(2) $p \in (1,\infty)$ の場合．可測関数 $\omega : X \to \mathbb{C}$ を，

$$\omega(x) := \begin{cases} \frac{|g(x)|}{g(x)} & (x \in (0 < |g|)) \\ 1 & (x \notin (0 < |g|)) \end{cases}$$

と定義すると，

$$|\omega(x)| = 1,\ \ \omega(x)g(x) = |g(x)|\ \ (\forall x \in X). \tag{5.93}$$

これに対し有界可測関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，

$$f_n := \chi_{(|g|\leqslant n)}|g|^{q-1}\omega\ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

と定義する．このとき (5.93) と $pq - p = q$ より，

$$f_n g = \chi_{(|g|\leqslant n)}|g|^q = |f_n|^p\ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから (5.90) より，

$$\begin{aligned}\int_X |g(x)|^q \chi_{(|g|\leqslant n)}(x)d\mu(x) &= \int_X f_n(x)g(x)d\mu(x) = \Phi([f_n]) \leqslant \|\Phi\| \left(\int_X |f_n(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\Phi\| \left(\int_X |g(x)|^q \chi_{(|g|\leqslant n)}(x)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\quad (\forall n \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

よって，

$$\left(\int_X |g(x)|^q \chi_{(|g|\leqslant n)}(x)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|\Phi\|\ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから，単調収束定理 5.40 より，

$$\left(\int_X |g(x)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_X |g(x)|^q \chi_{(|g|\leqslant n)}(x)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|\Phi\|$$

である．これより $p \in (1,\infty)$ の場合も (5.91) は成り立つ．

以上で (5.91) が成り立つことが示せた．任意の $[f] \in L^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ に対し定理 5.128 より可測単関数の列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty}\|f - s_n\|_p = 0$ を満たすものが取れて，

$$\Phi([f]) = \lim_{n\to\infty} \Phi([s_n]) \tag{5.94}$$

であり (5.91) より $[g] \in L^q(X,\mathfrak{M},\mu)$ だから，

$$_p\langle [f],[g]\rangle_q = \lim_{n\to\infty} {}_p\langle [s_n],[g]\rangle_q \tag{5.95}$$

である．(5.90) より，

$$\Phi([s_n]) = \int_X s_n(x)g(x)d\mu(x) = {}_p\langle [s_n],[g]\rangle_q\ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから (5.94), (5.95) より，

$$\Phi([f]) = \lim_{n\to\infty} \Phi([s_n]) = \lim_{n\to\infty} {}_p\langle [s_n],[g]\rangle_q = {}_p\langle [f],[g]\rangle_q\ \ (\forall [f] \in L^p(X,\mathfrak{M},\mu))$$

が成り立つ．よって，

$$\Phi = {}_p\langle \cdot\ ,\ [g]\rangle_q$$

であり (5.91) より，

$$\|\Phi\| = \|{}_p\langle \cdot\ ,\ [g]\rangle_q\| \leqslant \|[g]\|_p \leqslant \|\Phi\|$$

である．これで (5.87) の全射性とノルム保存性が示せた． □

定理 5.135 (L^p-L^q 双対性定理)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を σ-有限な測度空間, $p, q \in [1, \infty]$ を共役指数とし $p < \infty$ とする. このとき,

$$L^q(X, \mathfrak{M}, \mu) \ni [g] \mapsto_p \langle \cdot\,, [g] \rangle_q \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)^* \tag{5.96}$$

はノルムを保存する線型同型写像である.

証明. まず σ-有限性により $\mathfrak{M}$ の列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \quad \mu(A_n) < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

なるものを取り, 正実数値可測関数

$$\omega : X \to (0, 1], \quad \omega(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n(\mu(A_n) + 1)} \chi_{A_n}(x) \quad (\forall x \in X)$$

を定義する. 単調収束定理より,

$$\int_X \omega(x) d\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n(\mu(A_n) + 1)} \mu(A_n) \leqslant 1 < \infty$$

であるから, 有限測度

$$\mu_\omega : \mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_X \omega(x)\chi_E(x) d\mu(x) \in [0, 1]$$

が定義できる. ω が正実数値であることと命題 5.46 より $N \in \mathfrak{M}$ に対し,

$$\mu(N) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_\omega(N) = 0 \tag{5.97}$$

であり, 定理 5.117 より,

$$\int_X f(x) d\mu_\omega(x) = \int_X f(x)\omega(x) d\mu(x) \quad (f \text{ は非負値可測関数 }) \tag{5.98}$$

である. 今, 任意の $\Phi \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)^*$ を取り固定する. そして線型汎関数

$$\Phi_\omega : L^p(X, \mathfrak{M}, \mu_\omega) \ni [F] \mapsto \Phi([F\omega^{\frac{1}{p}}]) \in \mathbb{C}$$

を定義する. 任意の $[F] \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu_\omega)$ に対し (5.98) より

$$\begin{aligned}
|\Phi_\omega([F])| &= |\Phi([F\omega^{\frac{1}{p}}])| \leqslant \|\Phi\| \|F\omega^{\frac{1}{p}}\|_{\mu,p} = \|\Phi\| \left(\int_X |F(x)|^p \omega(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\Phi\| \left(\int_X |F(x)|^p d\mu_\omega(x) \right)^{\frac{1}{p}} = \|\Phi\| \|F\|_{\mu_\omega,p}
\end{aligned}$$

であるから $\Phi_\omega \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu_\omega)^*$, $\|\Phi_\omega\| \leqslant \|\Phi\|$ である. また任意の $[f] \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に対し (5.98) より,

$$\begin{aligned}
|\Phi([f])| &= |\Phi_\omega([f\omega^{-\frac{1}{p}}])| \leqslant \|\Phi_\omega\| \|f\omega^{-\frac{1}{p}}\|_{\mu_\omega,p} = \|\Phi_\omega\| \left(\int_X |f(x)|^p \omega(x)^{-1} d\mu_\omega(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\Phi_\omega\| \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} = \|\Phi_\omega\| \|f\|_{\mu,p}
\end{aligned}$$

であるから $\|\Phi_\omega\| = \|\Phi\|$ である. μ_ω は有限測度なので補題 5.134 より $[G] \in L^q(X, \mathfrak{M}, \mu_\omega)$ で,

$$\begin{aligned}
&\|G\|_{\mu_\omega,q} = \|\Phi_\omega\| = \|\Phi\|, \\
&\Phi_\omega([F]) = \int_X F(x)G(x) d\mu_\omega(x) \quad (\forall [F] \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu_\omega))
\end{aligned}$$

を満たすものが定まる. そこで $g := G\omega^{\frac{1}{q}}$ とおけば (5.97), (5.98) より,

$$[g] = [G\omega^{\frac{1}{q}}] \in L^q(X, \mathfrak{M}, \mu), \quad \|g\|_{\mu,q} = \|G\|_{\mu_\omega,q} = \|\Phi\|$$

であり, 任意の $[f] \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に対し,

$$\begin{aligned}\Phi([f]) = \Phi_\omega([f\omega^{-\frac{1}{p}}]) &= \int_X f(x)\omega(x)^{-\frac{1}{p}} G(x) d\mu(x) \\ &= \int_X f(x)g(x)\omega(x)^{-\frac{1}{p}}\omega(x)^{-\frac{1}{q}} d\mu(x) \\ &= \int_X f(x)g(x) d\mu(x)\end{aligned}$$

である. 以上より任意の $\Phi \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)^*$ に対し $[g] \in L^q(X, \mathfrak{M}, \mu)$ で,

$$\Phi = {}_p\langle \cdot\,, [g] \rangle_q, \quad \|\Phi\| = \|[g]\|_q$$

を満たすものが存在する. このことと補題 5.133 より (5.96) はノルムを保存する線型同型写像である. □

5.7 数え上げ測度, Hilbert 空間の CONS, Banach (Hilbert) 空間の (無限) 直和

定義 5.136 (数え上げ測度)**.** J を空でない集合とする. 任意の $E \in 2^J$ に対し $\mu(E) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ を E の元の個数とする. ただし E が無限集合である場合は $\mu(E) = \infty$ であり $\mu(\varnothing) = 0$ である. このとき $\mu : 2^J \to [0, \infty]$ は明らかに可測空間 $(J, 2^J)$ 上の測度である. この測度を J 上の数え上げ測度と言う.

数え上げ測度に関する零集合は空集合であるから数え上げ測度に関して a.e. で成り立つことは全ての点で成り立つ.

命題 5.137 (数え上げ測度による非負値関数の積分)**.** J を空でない集合, $\mu : 2^J \to [0, \infty]$ を数え上げ測度とする. このとき任意の非負値関数 $f : J \to [0, \infty]$ に対し,

$$\int_J f(j) d\mu(j) = \sum_{j \in J} f(j)$$

が成り立つ.

証明. $\mathcal{F}_J$ を J の有限部分集合全体とする. 定義 3.28 より,

$$\sum_{j \in J} f(j) = \sup_{F \in \mathcal{F}_J} \sum_{j \in F} f(j)$$

であり, 数え上げ測度の定義より,

$$\sum_{j \in F} f(j) = \int_J f(j)\chi_F(j) d\mu(j) \ \ (\forall F \in \mathcal{F}_J)$$

であるから,

$$\int_J f(j) d\mu(j) = \sup_{F \in \mathcal{F}_J} \int_J f(j)\chi_F(j) d\mu(j)$$

が成り立つことを示せばよい. 非負値可測関数の積分の単調性より,

$$\int_J f(j) d\mu(j) \geqslant \sup_{F \in \mathcal{F}_J} \int_J f(j)\chi_F(j) d\mu(j)$$

である. この逆の不等式が成り立つことを示す. そのためには非負値可測関数の積分の定義 5.38 より $s(j) \leqslant f(j)$ $(\forall j \in J)$ を満たす任意の非負値単関数 $s : J \to [0, \infty)$ に対し,

$$\int_J s(j) d\mu(j) \leqslant \sup_{F \in \mathcal{F}_J} \int_J f(j)\chi_F(j) d\mu(j) \tag{5.99}$$

が成り立つことを示せばよい. $s = 0$ ならば自明なので $s \neq 0$ とする. このとき互いに交わらない有限個の空でない $A_1, \cdots, A_n \subseteq J$ と $a_1, \cdots, a_n \in (0, \infty)$ に対し,

$$s = a_1\chi_{A_1} + \cdots + a_n\chi_{A_n}$$

と表せる. もし $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ が有限集合ならば $F_0 := A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}_J$ とおけば,

$$s(j) = s(j)\chi_{F_0}(j) \leqslant f(j)\chi_{F_0}(j) \quad (\forall j \in J)$$

であるから,

$$\int_J s(j)d\mu(j) \leqslant \int_J f(j)\chi_{F_0}(j)d\mu(j) \leqslant \sup_{F \in \mathcal{F}_J} \int_J f(j)\chi_F(j)d\mu(j)$$

である. $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ が無限集合の場合, ある $k \in \{1, \cdots, n\}$ に対し A_k は無限集合である. A_k の任意の有限部分集合 F_1 に対し,

$$a_k\chi_{F_1}(j) \leqslant s(j)\chi_{F_1}(j) \leqslant f(j)\chi_{F_1}(j)$$

だから,

$$a_k\mu(F_1) = \int_J a_k\chi_{F_1}(j)d\mu(j) \leqslant \int_J f(j)\chi_{F_1}(j)d\mu(j) \leqslant \sup_{F \in \mathcal{F}_J} \int_J f(j)\chi_F(j)d\mu(j)$$

である. F_1 は無限集合 A_k の任意の有限部分集合なので,

$$a_kN \leqslant \sup_{F \in \mathcal{F}_J} \int_J f(j)\chi_F(j)d\mu(j) \quad (\forall N \in \mathbb{N})$$

だから,

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_J} \int_J f(j)\chi_F(j)d\mu(j) = \infty$$

である. よって (5.99) が成り立つ. □

定義 5.138 (ℓ^p 空間)**.** J を空でない集合, $\mu : 2^J \to [0, \infty]$ を数え上げ測度, $p \in [1, \infty]$ とする. 測度空間 $(J, 2^J, \mu)$ 上の L^p 空間を,

$$\ell^p(J) := L^p(J, 2^J, \mu)$$

と表す.

命題 5.139. J を空でない集合とする. $(a_j)_{j \in J} : J \ni j \mapsto a_j \in \mathbb{C}$ に対し次は互いに同値である.

(1) $(a_j)_{j \in J} \in \ell^1(J)$.
(2) $\sum_{j \in J} a_j$ は絶対収束 (定義 3.29) する.

そして (1), (2) が成り立つとき,

$$\int_J a_j d\mu(j) = \sum_{j \in J} a_j$$

が成り立つ.

証明. 命題 5.137 より,

$$\int_J |a_j| d\mu(j) = \sum_{j \in J} |a_j|$$

であるから (1) ⇔ (2) は成り立つ. (1), (2) が成り立つとする. 任意の有限部分集合 $F \subseteq J$ に対し,

$$\begin{aligned} \left| \int_J a_j d\mu(j) - \sum_{j \in F} a_j \right| &= \left| \int_J a_j d\mu(j) - \int_J a_j \chi_F(j) d\mu(j) \right| = \left| \int_J a_j \chi_{J \setminus F}(j) d\mu(j) \right| \\ &\leqslant \int_J |a_j| \chi_{J \setminus F}(j) d\mu(j) = \int_J |a_j| d\mu(j) - \int_J |a_j| \chi_F(j) d\mu(j) \\ &= \sum_{j \in J} |a_j| - \sum_{j \in F} |a_j| \end{aligned} \tag{5.100}$$

であり, 無限和の定義 3.26 より,

$$\sum_{j \in J} |a_j| = \lim_{F \to J} \sum_{j \in F} |a_j|$$

であるから (5.100) の右辺は $F \to J$ で 0 に収束する．よって，

$$\int_J a_j d\mu(j) = \lim_{F \to J} \sum_{j \in F} a_j = \sum_{j \in J} a_j$$

である． □

命題 5.140. J を空でない集合とする．このとき，

(1) 任意の $p \in [1, \infty)$ に対し，

$$\ell^p(J) = \left\{ (a_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \mathbb{C} : \sum_{j \in J} |a_j|^p < \infty \right\}$$

であり，

$$\|(a_j)_{j \in J}\|_p = \left(\sum_{j \in J} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\forall (a_j)_{j \in J} \in \ell^p(J))$$

である．

(2)

$$\ell^\infty(J) = \left\{ (a_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \mathbb{C} : \sup_{j \in J} |a_j| < \infty \right\}$$

であり，

$$\|(a_j)_{j \in J}\|_\infty = \sup_{j \in J} |a_j| \quad (\forall (a_j)_{j \in J} \in \ell^\infty(J))$$

である．

証明. 命題 5.137 による． □

定義 5.141. J を空でない集合とする．

$$c_c(J) := \left\{ (a_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \mathbb{C} : a_j \neq 0 \text{ を満たす } j \in J \text{ が有限個} \right\}$$

$$c_0(J) := \left\{ (a_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \mathbb{C} : \text{任意の正実数 } \varepsilon \text{ に対し } |a_j| \geqslant \varepsilon \text{ を満たす } j \in J \text{ が有限個} \right\}$$

とおく．

命題 5.142 ($\ell^p(J)$ における $c_c(J)$ の稠密性)**.** J を空でない集合, $p \in [1, \infty)$ とする．このとき $c_c(J)$ は Banach 空間 $\ell^p(J)$ の稠密部分空間である．

証明. $c_c(J)$ が $\ell^p(J)$ の線型部分空間であることは明らかである．任意の $f \in \ell^p(J)$ を取る．定理 5.128 より J 上の単関数の列 $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で，

$$|s_n(j)| \leqslant |f(j)| \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in J), \quad \lim_{n \to \infty} \|f - s_n\|_p = 0$$

を満たすものが取れる．今，任意の $n \in \mathbb{N}$ を取り固定し，$s_n \in c_c(J)$ が成り立つことを示す．s_n は単関数なので J の互いに交わらない有限個の部分集合 $A_{n,1}, \cdots, A_{n,m(n)}$ と $a_{n,1}, \cdots, a_{n,m(n)} \in \mathbb{C}$ によって，

$$s_n = \sum_{k=1}^{m(n)} a_{n,k} \chi_{A_{n,k}}$$

と表せる．$|s_n(j)| \leqslant |f(j)|$ $(\forall j \in J)$ より任意の $k \in \{1, \cdots, m(n)\}$ に対し，

$$|a_{n,k}|^p \mu(A_{n,k}) = \int_J |s_n(j)|^p \chi_{A_{n,k}}(j) d\mu(j) \leqslant \int_J |f(j)|^p d\mu(j) = \|f\|_p^p < \infty$$

であるから，$a_{n,k} \neq 0$ ならば $\mu(A_{n,k}) < \infty$ である．よって $s_n(j) \neq 0$ を満たす $j \in J$ は有限個であるから $s_n \in c_c(J)$ である．$\lim_{n \to \infty} \|f - s_n\|_p = 0$ なので $c_c(J)$ は $\ell^p(J)$ で稠密である． □

定義 5.143 (ユニタリ作用素)**.** $\mathcal{H},\mathcal{K}$ を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間とする. 線型同型写像 $U:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ で内積を保存する, すなわち,

$$(Uu \mid Uv) = (u \mid v) \quad (\forall u,v\in\mathcal{H})$$

を満たすものを $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ へのユニタリ作用素と言う.

命題 5.144 (ユニタリ作用素の特徴付け)**.** $\mathcal{H},\mathcal{K}$ を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間とする. $U:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ に対し次は互いに同値である.

(1) U はユニタリ作用素である.

(2) U はノルムを保存する線型同型写像である.

(3) $U\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ であり共役作用素 $U^*\in B(\mathcal{K},\mathcal{H})$ (定義 3.51) に対し $U^*U=1\in B(\mathcal{H})$ かつ $UU^*=1\in B(\mathcal{K})$ が成り立つ.

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2) を示す. (1) $\Rightarrow$ (2) は自明である. (2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとすると任意の $u,v\in\mathcal{H}$ に対し,

$$(Uu \mid Uv) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k (U(u+i^k v) \mid U(u+i^k v)) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k (u+i^k v \mid u+i^k v) = (u \mid v)$$

である. よって (1) が成り立つ.
(1) $\Rightarrow$ (3) を示す. (1) が成り立つとする. このとき (2) が成り立つので特に $U\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ であり,

$$(U^*Uu \mid v) = (Uu \mid Uv) = (u \mid v) \quad (\forall u,v\in\mathcal{H})$$

である. よって $U^*U=1\in B(\mathcal{H})$ である. そして U の逆写像 $U^{-1}:\mathcal{K}\to\mathcal{H}$ は,

$$U^{-1} = 1U^{-1} = U^*UU^{-1} = U^*$$

であるから $UU^* = UU^{-1} = 1\in B(\mathcal{K})$ である. よって (3) が成り立つ.
(3) $\Rightarrow$ (1) を示す. (3) が成り立つとする. $U^*U=1\in B(\mathcal{H})$ より U は単射であり $UU^*=1\in B(\mathcal{K})$ より U は全射である. よって $U:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ は線型同型写像である. そして,

$$(Uu \mid Uv) = (U^*Uu \mid v) = (u \mid v) \quad (\forall u,v\in\mathcal{H})$$

であるから (1) が成り立つ. □

定義 5.145 (単位ベクトル)**.** ノルム空間のベクトルが単位ベクトルであるとはそのノルムが 1 であることを言う.

定義 5.146 (Hilbert 空間の ONS)**.** $\mathcal{H}$ を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間とする. $\mathcal{H}$ の部分集合で互いに直交する単位ベクトルからなるものを $\mathcal{H}$ を ONS と言う.

定理 5.147. $\mathcal{H}$ を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間, $\{e_j\}_{j\in J}\subseteq\mathcal{H}$ の ONS とする. ただし $J\ni j\mapsto e_j\in\mathcal{H}$ は単射とする. このとき,

(1) 任意の $v\in\mathcal{H}$ に対し,

$$\sum_{j\in J}|(v \mid e_j)|^2 \leqslant \|v\|^2$$

が成り立つ. 特に任意の $v\in\mathcal{H}$ に対し $((v \mid e_j))_{j\in J}\in\ell^2(J)$ である.

(2)

$$U:\overline{\operatorname{span}\{e_j\}_{j\in J}}\ni v\mapsto ((v \mid e_j))_{j\in J}\in\ell^2(J)$$

はユニタリ作用素 (定義 5.143) であり, 任意の $v\in\mathcal{H}$ に対し,

$$v = \sum_{j\in J}(v \mid e_j)e_j$$

が成り立つ.

証明. $\mathcal{F}_J$ を J の有限部分集合全体とする.

(1) 任意の $v \in \mathcal{H}$ を取る. $\{e_j\}_{j \in J}$ が ONS であることから任意の $F \in \mathcal{F}_J$ に対し,

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \left\| v - \sum_{j \in F} (v \mid e_j) e_j \right\|^2 &= \|v\|^2 - 2\mathrm{Re}\left(v \mid \sum_{j \in F} (v \mid e_j) e_j \right) + \sum_{j \in F} |(v \mid e_j)|^2 \\
&= \|v\|^2 - \sum_{j \in F} |(v \mid e_j)|^2
\end{aligned}
\tag{5.101}
$$

が成り立つ. よって,

$$\sum_{j \in F} |(v \mid e_j)|^2 \leqslant \|v\|^2 \quad (\forall F \in \mathcal{F}_J)$$

であるので,

$$\sum_{j \in J} |(v \mid e_j)|^2 = \sup_{F \in \mathcal{F}_J} \sum_{j \in F} |(v \mid e_j)|^2 \leqslant \|v\|^2$$

が成り立つ.

(2) (1) より U はノルム減少であり, また明らかに線型作用素であるから $U \in B(\overline{\mathrm{span}\{e_j\}_{j \in J}}, \ell^2(J))$ である. 任意の $v \in \mathrm{span}\{e_j\}_{j \in J}$ を取る. このときある $F \in \mathcal{F}_J$ に対し $v = \sum_{j \in F} (v \mid e_j) e_j$ と表せるから,

$$\|v\|^2 = \sum_{j \in F} |(v \mid e_j)|^2 = \sum_{j \in J} |(v \mid e_j)|^2 = \|Uv\|^2$$

である. よって U は $\mathrm{span}\{e_j\}_{j \in J}$ 上でノルム保存である. 任意の $v \in \overline{\mathrm{span}\{e_j\}_{j \in J}}$ に対し $\mathrm{span}\{e_j\}_{j \in J}$ の点列 $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で $\lim_{n \to \infty} v_n = v$ を満たすものを取れば $U \in B(\overline{\mathrm{span}\{e_j\}_{j \in J}}, \ell^2(J))$ より,

$$\|Uv\| = \lim_{n \to \infty} \|Uv_n\| = \lim_{n \to \infty} \|v_n\| = \|v\|$$

である. よって U は $\overline{\mathrm{span}\{e_j\}_{j \in J}}$ 上でノルム保存である. 任意の $f \in \ell^2(J)$ に対し命題 5.142 より $c_c(J)$ の列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で $\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_2 = 0$ を満たすものが取れる. 各 $f_n \in c_c(J)$ に対し $Uv_n = f_n$ を満たす $v_n \in \mathrm{span}\{e_j\}_{j \in J}$ が取れ,

$$\|v_n - v_m\| = \|Uv_n - Uv_m\| = \|f_n - f_m\|_2 \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

よって $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列なので,

$$v = \lim_{n \to \infty} v_n \in \overline{\mathrm{span}\{e_j\}_{j \in J}}$$

が存在する. そして,

$$((v \mid e_j))_{j \in J} = Uv = \lim_{n \to \infty} Uv_n = \lim_{n \to \infty} f_n = f$$

であるから U はノルムを保存する線型同型写像である. よって命題 5.144 より U はユニタリ作用素である. 任意の $v \in \overline{\mathrm{span}\{e_j\}_{j \in J}}$ に対し $\|v\|^2 = \|Uv\|^2 = \sum_{j \in J} |(v \mid e_j)|^2$ であることと (5.101) より,

$$\left\| v - \sum_{j \in F} (v \mid e_j) e_j \right\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{j \in F} |(v \mid e_j)|^2 = \sum_{j \in J} |(v \mid e_j)|^2 - \sum_{j \in F} |(v \mid e_j)|^2 \to 0 \quad (F \to J)$$

である. よって,

$$v = \lim_{F \to J} \sum_{j \in F} (v \mid e_j) e_j = \sum_{j \in J} (v \mid e_j) e_j$$

である.

□

定義 5.148 (Hilbert 空間の CONS)**.** $\mathcal{H}$ を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間とし, $B \subseteq \mathcal{H}$ を $\mathcal{H}$ の ONS とする.

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{span}(B)}$$

が成り立つとき B を $\mathcal{H}$ の CONS と言う.

命題 5.149 (ONS の CONS への拡大可能性)**.** $\mathcal{H}$ を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間, $B_0 \subseteq \mathcal{H}$ を任意の ONS とする. このとき $\mathcal{H}$ の CONS で B_0 を含むものが存在する.

証明. B_0 を含む $\mathcal{H}$ の ONS 全体に集合の包含関係による順序 (定義 1.3) を入れたものは帰納的順序集合である.*56 よって Zorn の補題 1.12 より B_0 を含む $\mathcal{H}$ の ONS で集合の包含関係による順序に関して極大なもの B が取れる. もし,

$$\mathcal{H} \neq \overline{\mathrm{span}(B)}$$

ならば Hilbert 空間の直交分解定理 3.38 より,

$$B^{\perp} = \mathrm{span}(B)^{\perp} = \overline{\mathrm{span}(B)}^{\perp} \neq \varnothing$$

である. よって単位ベクトル $e_0 \in B^{\perp}$ を取れば $B \cup \{e_0\}$ は B を真に含む ONS となり B の極大性に矛盾する. ゆえに $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{span}(B)}$ であるから B は $\mathcal{H}$ の CONS である. □

定理 5.150 (Hilbert 空間の CONS の濃度の一意性)**.** $\mathcal{H}$ を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間, $B, C \subseteq \mathcal{H}$ をそれぞれ $\mathcal{H}$ の CONS とする. このとき,

$$\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(C)$$

(定義 1.15) が成り立つ.

証明. B が有限集合ならば $\mathrm{span}(B)$ は有限次元, 従って閉 (定理 3.25) である. よって $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{span}(B)} = \mathrm{span}(B)$ であるから $\mathcal{H}$ は有限次元であり, $\mathrm{span}(C)$ も有限次元, 従って閉なので,

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{span}(C)} = \mathrm{span}(C)$$

である. ゆえに B, C は線型空間としての $\mathcal{H}$ の基底だから命題 2.35 より $\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(C)$ である.
B が無限集合であるとする. このとき上段の結果より C も無限集合である. 今, I, J をそれぞれ空でない集合とし, $I \ni i \mapsto e_i \in B$, $J \ni j \mapsto f_j \in C$ を全単射とする. $\mathrm{card}(I) = \mathrm{card}(J)$ を示せばよい.

$$I_j := \{i \in I : |(e_i \mid f_j)| > 0\} \quad (\forall j \in J)$$

とおく. 任意の $i \in I$ に対し定理 5.147 より,

$$1 = \|e_i\|^2 = \sum_{j \in J} |(e_i \mid f_j)|^2$$

であるから,

$$I = \bigcup_{j \in J} I_j \tag{5.102}$$

である. ここで,

$$I_{j,n} := \left\{ i \in I : |(e_i \mid f_j)| > \frac{1}{n} \right\} \quad (\forall j \in J, \forall n \in \mathbb{N})$$

とおくと,

$$I_j = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{j,n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{5.103}$$

であり, 任意の $j \in J$ に対し定理 5.147 より,

$$1 = \|f_j\|^2 = \sum_{i \in I} |(e_i \mid f_j)|^2$$

であるから各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $I_{j,n}$ は有限集合である. よって (5.103) より任意の $j \in J$ に対し I_j は可算集合だから (5.102) より $J \times \mathbb{N}$ から I への全射が存在する. すなわち $\mathrm{card}(I) \leqslant \mathrm{card}(J \times \mathbb{N})$ が成り立つ. ここで J は無限集合なので定理 1.18 の (2) より $\mathrm{card}(J \times \mathbb{N}) = \mathrm{card}(J)$ であるから,

$$\mathrm{card}(I) \leqslant \mathrm{card}(J \times \mathbb{N}) = \mathrm{card}(J).$$

*56 B_0 を含む ONS 全体の全順序部分集合 $\{B_j\}_{j \in J}$ に対しその全順序性より $\bigcup_{j \in J} B_j$ は B_0 を含む ONS である. よって $\bigcup_{j \in J} B_j$ は $\{B_j\}_{j \in J}$ の上界である.

よって $\mathrm{card}(I) \leqslant \mathrm{card}(J)$ が成り立つ．$\mathrm{card}(J) \leqslant \mathrm{card}(I)$ が成り立つことも全く対称的議論により示せる．よって Bernstein の定理 1.16 より $\mathrm{card}(I) = \mathrm{card}(J)$ が成り立つ． □

命題 5.151 (Schmidt の直交化)**.** $\mathcal{H}$ を内積空間, $B \subseteq \mathcal{H}$ を線型独立な部分集合とする．このとき任意の違いに異なる有限個の $v_1, \cdots, v_n \in B$ に対し, 互いに直交する単位ベクトル $e_1, \cdots, e_n \in \mathcal{H}$ で,

$$\mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_k\} = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_k\} \ \ (k = 1, \cdots, n)$$

を満たすものが取れる．

証明. n に関する帰納法で示す．$n = 1$ の場合は $e_1 = \frac{1}{\|v_1\|}v_1$ とおけば成り立つ．ある $n-1 \in \mathbb{N}$ に対して成り立つと仮定し, n の場合も成り立つことを示す．n 個の互いに $v_1, \cdots, v_n \in B$ を取る．仮定より互いに直交する単位ベクトル $e_1, \cdots, e_{n-1}$ で,

$$\mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_k\} = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_k\} \ \ (k = 1, \cdots, n-1)$$

を満たすものが取れる．

$$e'_n := v_n - \sum_{k=1}^{n-1} (v_n \mid e_k) e_k$$

とおけば $(e'_n \mid e_k) = 0 \ (k = 1, \cdots, n-1)$ であり線型独立性より,

$$v_n \notin \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_{n-1}\} = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$$

であるから $e'_n \neq 0$ である．よって $e_n := \frac{1}{\|e'_n\|}e'_n$ とおけば $e_1, \cdots, e_n$ は互いに直交する単位ベクトルであり,

$$\begin{aligned} &v_n \in \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\}, \\ &e_n \in \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_{n-1}\} + \mathbb{C}v_n = \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_n\} \end{aligned}$$

であるから,

$$\mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_n\} = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$$

である．よって n の場合も成り立つ． □

命題 5.152 (Hilbert 空間の CONS が可算であるための条件)**.** $\mathcal{H}$ を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間とする．このとき次は互いに同値である．

(1) $\mathcal{H}$ の CONS は可算である．
(2) $\mathcal{H}$ は可分である．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す．(1) が成り立つとし $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ を可算な CONS とする ($\mathbb{N} \ni n \mapsto e_n \in \mathcal{H}$ は単射とは限らない).

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{C}} := \{q + ir : q, r \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$$

は $\mathbb{C}$ で稠密な可算集合であるから,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j : \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{Q}_{\mathbb{C}} \right\} \tag{5.104}$$

は,

$$\mathrm{span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j : \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C} \right\} \tag{5.105}$$

で稠密な可算集合である．CONS の定義より (5.105) は $\mathcal{H}$ で稠密であるので可算集合 (5.104) は $\mathcal{H}$ で稠密である．よって $\mathcal{H}$ は可分である．

(2) $\Rightarrow$ (1) を示す．$\mathcal{H}$ で稠密な可算集合 A を取る．このとき

$$\mathcal{H} = \overline{A} = \overline{\mathrm{span}(A)} \tag{5.106}$$

である．命題 2.34 より線型独立な $B \subseteq A$ で，

$$\mathrm{span}(A) = \mathrm{span}(B) \tag{5.107}$$

を満たすものが取れる．B が有限集合であるならば Schmidt の直交化 (命題 5.151) より B と同じ元の個数 (m とする) の ONS$\{e_1, \cdots, e_m\}$ で $\mathrm{span}(B) = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_m\}$ なるものが取れる．(5.106), (5.107) より，

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{span}(B)} = \overline{\mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_m\}} (= \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_m\})$$

だから $\{e_1, \cdots, e_m\}$ は $\mathcal{H}$ の CONS である．また B が可算無限集合の場合 $B = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ($\mathbb{N} \ni n \mapsto v_n \in B$ は単射) とおけば Schmidt の直交化より ONS$\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で，

$$\mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_n\} = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たすものが取れる．このとき $\mathrm{span}(B) = \mathrm{span}\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ であるから (5.106), (5.107) より，

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{span}(B)} = \overline{\mathrm{span}\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$$

であるので $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathcal{H}$ の CONS である．よって $\mathcal{H}$ の CONS は可算である． □

定義 5.153 (ℓ^p 直和 Banach 空間)**.** J を空でない集合とし，各 $j \in J$ に対し $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間 X_j が与えられているとする．このとき直積線型空間 $\prod_{j \in J} X_j$ と $p \in [1, \infty)$ に対し，

$$\bigoplus_{j \in J}^{(p)} X_j := \left\{ (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j : \sum_{j \in J} \|x_j\|^p < \infty \right\}$$

とおき，任意の $(x_j)_{j \in J} \in \bigoplus_{j \in J}^{(p)} X_j$ に対し，

$$\|(x_j)_{j \in J}\|_p := \left(\sum_{j \in J} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

とおく．また，

$$\bigoplus_{j \in J}^{(\infty)} X_j := \left\{ (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j : \sup_{j \in J} \|x_j\| < \infty \right\}$$

とおき，任意の $(x_j)_{j \in J} \in \bigoplus_{j \in J}^{(\infty)} X_j$ に対し，

$$\|(x_j)_{j \in J}\|_\infty := \sup_{j \in J} \|x_j\|$$

とおく．次の定理 5.154 より任意の $p \in [1, \infty]$ に対し $\bigoplus_{j \in J}^{(p)} X_j$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとして $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間をなす．この Banach 空間

$$\left(\bigoplus_{j \in J}^{(p)} X_j, \|\cdot\|_p \right)$$

を $(X_j)_{j \in J}$ の ℓ^p 直和 Banach 空間と言う．

定理 5.154. J を空でない集合とし，各 $j \in J$ に対し $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間 X_j が与えられているとする．このとき任意の $p \in [1, \infty]$ に対し $\bigoplus_{j \in J}^{(p)} X_j$ は直積線型空間 $\prod_{j \in J} X_j$ の部分空間であり，$\|\cdot\|_p : \bigoplus_{j \in J}^{(p)} X_j \to [0, \infty)$ は線型空間 $\bigoplus_{j \in J}^{(p)} X_j$ 上のノルムである．そして $\bigoplus_{j \in J}^{(p)} X_j$ はノルム $\|\cdot\|_p$ により Banach 空間である．

証明. (1) $p \in [1, \infty)$ の場合．任意の $x = (x_j)_{j \in J}, y = (y_j)_{j \in J} \in \bigoplus_{j \in J}^{(p)} X_j$ と任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し Minkowski の不等式 5.122 (と命題 5.137) より，

$$\left(\sum_{j \in J} \|x_j + y_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{j \in J} (\|x_j\| + \|y_j\|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{j \in J} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j \in J} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{5.108}$$

$$\left(\sum_{j\in J}\|\alpha x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\alpha|^p\sum_{j\in J}\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\left(\sum_{j\in J}\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{5.109}$$

となるから $x+y, \alpha x \in \bigoplus_{j\in J}^{(p)} X_j$ である．よって $\bigoplus_{j\in J}^{(p)} X_j$ は直積線型空間 $\prod_{j\in J} X_j$ の線型部分空間である．そして任意の $x=(x_j)_{j\in J}\in\bigoplus_{j\in J}^{(p)} X_j$ に対し，

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j\in J}\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \|x_{j_0}\| \quad (\forall j_0\in J) \tag{5.110}$$

より，

$$\|x\|_p = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0$$

であるから (5.108), (5.109) より $\|\cdot\|_p$ は線型空間 $\bigoplus_{j\in J}^{(p)} X_j$ 上のノルムである．今，$\bigoplus_{j\in J}^{(p)} X_j$ がノルム $\|\cdot\|_p$ により Banach 空間であることを示す．そこで $(\bigoplus_{j\in J}^{(p)} X_j, \|\cdot\|_p)$ の任意の Cauchy 列 $(x_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ を取る．このとき任意の $j\in J$ に対し (5.110) より，

$$\|x_{(n),j}-x_{(m),j}\| \leqslant \|x_{(n)}-x_{(m)}\|_p \quad (\forall n,m\in\mathbb{N})$$

であるから $(x_{(n),j})_{n\in\mathbb{N}}$ は Banach 空間 X_j の Cauchy 列である．よって，

$$x_j = \lim_{n\to\infty} x_{(n),j} \in X_j$$

が存在する．$x := (x_j)_{j\in J}\in\prod_{j\in J} X_j$ とおく．任意の正実数 ε を取る．$(x_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であることから，

$$\|x_{(n)}-x_{(m)}\|_p \leqslant \varepsilon \quad (\forall n,m\geqslant n_0)$$

を満たす $n_0\in\mathbb{N}$ が存在する．$m\geqslant n_0$ を満たす任意の $m\in\mathbb{N}$ を取る．J の任意の有限部分集合 F に対し，

$$\begin{aligned}\sum_{j\in F}\|x_j-x_{(m),j}\|^p &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in F}\|x_{(n),j}-x_{(m),j}\|^p = \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}\sum_{j\in F}\|x_{(k),j}-x_{(m),j}\|^p \\ &\leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}\sum_{j\in J}\|x_{(k),j}-x_{(m),j}\|^p \leqslant \sup_{k\geqslant n_0}\sum_{j\in J}\|x_{(k),j}-x_{(m),j}\|^p \\ &= \sup_{k\geqslant n_0}\|x_{(k)}-x_{(m)}\|_p^p \leqslant \varepsilon^p\end{aligned}$$

となる．よって，

$$\sum_{j\in J}\|x_j-x_{(m),j}\|^p \leqslant \varepsilon^p$$

が成り立つので $x-x_{(m)}\in\bigoplus_{j\in J}^{(p)} X_j$，従って $x=(x-x_{(m)})+x_{(m)}\in\bigoplus_{j\in J}^{(p)} X_j$ である．そして $m\geqslant n_0$ を満たす任意の $m\in\mathbb{N}$ に対し，

$$\|x-x_{(m)}\|_p = \left(\sum_{j\in J}\|x_j-x_{(m),j}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon$$

が成り立つので $(x_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ はノルム $\|\cdot\|_p$ によって x に収束する．ゆえに $\bigoplus_{j\in J}^{(p)} X_j$ はノルム $\|\cdot\|_p$ により Banach 空間である．

(2) $p=\infty$ の場合．$\bigoplus_{j\in J}^{(\infty)} X_j$ が直積線型空間 $\prod_{j\in J} X_j$ の線型部分空間であること，$\|\cdot\|_\infty$ が $\bigoplus_{j\in J}^{(\infty)} X_j$ のノルムであることは自明である．$(\bigoplus_{j\in J}^{(\infty)} X_j, \|\cdot\|_\infty)$ の任意の Cauchy 列 $(x_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ を取る．任意の $j\in J$ に対し，

$$\|x_{(n),j}-x_{(m),j}\| \leqslant \|x_{(n)}-x_{(m)}\|_\infty \quad (\forall n,m\in\mathbb{N})$$

であるから $(x_{(n),j})_{n\in\mathbb{N}}$ は Banach 空間 X_j の Cauchy 列である．よって，

$$x_j = \lim_{n\to\infty} x_{(n),j} \in X_j$$

が存在する. $x = (x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j$ とおく. 任意の正実数 ε を取る. $(x_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であることから,

$$\|x_{(n)} - x_{(m)}\|_p \leqslant \varepsilon \quad (\forall n, m \geqslant n_0)$$

を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する. $m \geqslant n_0$ を満たす任意の $m \in \mathbb{N}$ を取る. 任意の $j \in J$ に対し,

$$\begin{aligned}\|x_j - x_{(m),j}\| &= \lim_{n\to\infty}\|x_{(n),j} - x_{(m),j}\| = \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}\|x_{(k),j} - x_{(m),j}\| \\ &\leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}\|x_{(k)} - x_{(m)}\|_\infty \leqslant \sup_{k\geqslant n_0}\|x_{(k)} - x_{(m)}\|_\infty \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

となる. よって,

$$\sup_{j\in J}\|x_j - x_{(m),j}\| \leqslant \varepsilon$$

が成り立つので $x - x_{(m)} \in \bigoplus_{j\in J}^{(\infty)} X_j$, 従って $x = (x - x_{(m)}) + x_{(m)} \in \bigoplus_{j\in J}^{(\infty)} X_j$ である. そして $m \geqslant n_0$ を満たす任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\|x - x_{(m)}\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

が成り立つので $(x_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ はノルム $\|\cdot\|_\infty$ によって x に収束する. ゆえに $\bigoplus_{j\in J}^{(\infty)} X_j$ はノルム $\|\cdot\|_\infty$ により Banach 空間である.

□

定義 5.155 (直和 Hilbert 空間)**.** J を空でない集合とし, 各 $j \in J$ に対し $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_j$ が与えられているとする. $(\mathcal{H}_j)_{j\in J}$ の ℓ^2 直和 Banach 空間を,

$$\bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}_j := \bigoplus_{j\in J}^{(2)}\mathcal{H}_j$$

と表す. 任意の $u = (u_j)_{j\in J}, v = (v_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}_j$ に対し Hölder の不等式 5.130 (と命題 5.137) より,

$$\sum_{j\in J}|(u_j \mid v_j)| \leqslant \sum_{j\in J}\|u_j\|\|v_j\| \leqslant \left(\sum_{j\in J}\|u_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j\in J}\|v_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|(u_j)_{j\in J}\|_2\|(v_j)_{j\in J}\|_2 < \infty$$

となるので $\sum_{j\in J}(u_j \mid v_j)$ は絶対収束する. よって,

$$(u \mid v)_2 := \sum_{j\in J}(u_j \mid v_j) \in \mathbb{C}$$

が定義できる. このとき

$$(\cdot \mid \cdot)_2 : \bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}_j \times \bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}_j \ni (u, v) \mapsto (u \mid v)_2 \in \mathbb{C}$$

は $\bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}$ 上の内積であり, この内積が定めるノルムは ℓ^2 直和 Banach 空間のノルムである. よって $\bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}_j$ は内積 $(\cdot \mid \cdot)_2$ によって Hilbert 空間をなす. この Hilbert 空間を $(\mathcal{H}_j)_{j\in J}$ の直和 Hilbert 空間と言う.

5.8 局所コンパクト Hausdorff 空間上の位相正則測度, Riesz-Markov-角谷の表現定理

定義 5.156 (連続関数環 $C(X)$)**.** X を位相空間とする. X 上で定義された複素数値連続関数全体を $C(X)$ と表す. $C(X)$ は各点ごとの演算により $\mathbb{C}$ 上の可換な $*$-環 (定義 2.4) である (ただし $*$-演算は各点ごとの複素共役 $C(X) \ni f \mapsto \overline{f} \in C(X)$ である).

定義 5.157 (有界関数環 $B(X)$ と sup ノルム)**.** X を集合とし, X 上で定義された有界な複素数値関数全体を $B(X)$ と表す. $B(X)$ は各点ごとの演算と, sup ノルムと呼ばれるノルム

$$\|\cdot\| : B(X) \ni f \mapsto \sup_{x\in X}|f(x)| \in [0, \infty)$$

によって可換な C^*-環 (定義 3.7) である (完備性は定理 1.127 による).

定義 5.158 (有界連続関数環 $C_b(X)$)**.** X を位相空間とする.

$$C_b(X) := C(X) \cap B(X) = \{f \in C(X) : f \text{ は有界 }\}$$

と表す. $C_b(X)$ は $C(X), B(X)$ の部分 $*$-環である. そして連続関数列の一様収束極限は連続関数である (定理 1.125) から $C_b(X)$ は sup ノルムによる C^*-環 $B(X)$ の閉部分 $*$-環である. よって $C_b(X)$ 自体 sup ノルムによって可換な C^*-環である.

定義 5.159 (無限遠で消える連続関数環 $C_0(X)$)**.** X を位相空間とする. $f \in C(X)$ が無限遠で消えるとは任意の正実数 ε に対し,

$$(\varepsilon \leqslant |f|) = \{x \in X : \varepsilon \leqslant |f(x)|\}$$

がコンパクトであることを言う. 無限遠で消える連続関数全体を,

$$C_0(X) := \{f \in C(X) : f \text{ は無限遠で消える }\}$$

とおく. 次の命題 5.160 で見るように $C_0(X)$ は sup ノルムによる C^*-環 $C_b(X)$ の閉 $*$-イデアル (定義 2.28) である. よって特に $C_0(X)$ 自体 sup ノルムによって C^*-環である.

命題 5.160. X を位相空間とする. $C_0(X)$ は sup ノルムによる C^*-環 $C_b(X)$ の閉 $*$-イデアルである.

証明. 任意の $f \in C_0(X)$ に対し $(1 \leqslant |f|)$ はコンパクトであるから f の連続性より $f((1 \leqslant |f|)) \subseteq \mathbb{C}$ は有界である. よって,

$$|f(x)| \leqslant M \quad (\forall x \in (1 \leqslant |f|))$$

を満たす $M \in [1, \infty)$ が取れて,

$$|f(x)| \leqslant 1 \leqslant M \quad (\forall x \in (|f| < 1))$$

であるから $|f(x)| \leqslant M$ $(\forall x \in X)$ である. ゆえに f は有界なので $C_0(X) \subseteq C_b(X)$ が成り立つ. 任意の $f, g \in C_0(X)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ を取る. 任意の正実数 ε に対し,

$$(\varepsilon \leqslant |f+g|) \subseteq \left(\frac{\varepsilon}{2} \leqslant |f|\right) \cup \left(\frac{\varepsilon}{2} \leqslant |g|\right), \quad (\varepsilon \leqslant |\alpha f|) \subseteq \left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|+1} \leqslant |f|\right), \quad (\varepsilon \leqslant |\overline{f}|) = (\varepsilon \leqslant |f|)$$

であり, コンパクト集合に含まれる閉集合はコンパクトである (命題 1.42) から $f+g, \alpha f, \overline{f} \in C_0(X)$ である. また任意の $f \in C_0(X)$ と任意の $g \in C_b(X)$ に対し,

$$(\varepsilon \leqslant |fg|) \subseteq \left(\frac{\varepsilon}{\|g\|+1} \leqslant |f|\right)$$

であるから $fg \in C_0(X)$ である. よって $C_0(X)$ は $C_b(X)$ の $*$-イデアルである. 後は sup ノルムによる C^*-環 $C_b(X)$ において $C_0(X)$ が閉であることを示せばよい. 任意の $f \in \overline{C_0(X)} \subseteq C_b(X)$, 任意の正実数 ε を取る. このとき,

$$\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす $g \in C_0(X)$ が取れる.

$$(\varepsilon \leqslant |f|) \subseteq (\varepsilon \leqslant |g| + |f-g|) \subseteq \left(\frac{\varepsilon}{2} \leqslant |g|\right)$$

であるから $(\varepsilon \leqslant |f|)$ はコンパクトなので $f \in C_0(X)$ である. よって $C_b(X)$ において $C_0(X)$ は閉である. □

定義 5.161 (関数の台)**.** 位相空間 X 上の関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\mathrm{supp}(f) := \overline{(f \neq 0)} = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

を f の台と言う.

定義 5.162 (台がコンパクトな連続関数環 $C_c(X)$)**.** X を位相空間とする.

$$C_c(X) := \{f \in C(X) : \mathrm{supp}(f) \text{ はコンパクト }\}$$

とおく. 任意の $f, g \in C(X)$, 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\mathrm{supp}(f+g) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g), \quad \mathrm{supp}(\alpha f) \subseteq \mathrm{supp}(f),\\ &\mathrm{supp}(fg) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(g), \quad \mathrm{supp}(\overline{f}) = \mathrm{supp}(f)\end{aligned}$$

でありコンパクト集合に含まれる閉集合はコンパクトである (命題 1.42) から $C_c(X)$ は $*$-環 $C(X)$ の $*$-イデアル (定義 2.28) である. また, 任意の $f \in C_c(X)$, 任意の正実数 ε に対し,

$$(\varepsilon \leqslant |f|) \subseteq \mathrm{supp}(f)$$

であるから $f \in C_0(X)$ である. よって $C_c(X) \subseteq C_0(X)$ である.

定義 5.163 (実数値, 非負実数値の連続関数空間)**.** X を位相空間とする.

$$C_{\mathbb{R}}(X) := \{f \in C(X) : f \text{ は実数値 }\}, \quad C_+(X) := \{f \in C(X) : f \text{ は非負実数値 }\}$$

とおき,

$$\begin{aligned}&C_{b,\mathbb{R}}(X) := C_b(X) \cap C_{\mathbb{R}}(X), \quad C_{b,+}(X) := C_b(X) \cap C_+(X),\\ &C_{0,\mathbb{R}}(X) := C_0(X) \cap C_{\mathbb{R}}(X), \quad C_{0,+}(X) := C_0(X) \cap C_+(X),\\ &C_{c,\mathbb{R}}(X) := C_c(X) \cap C_{\mathbb{R}}(X), \quad C_{c,+}(X) := C_c(X) \cap C_+(X)\end{aligned}$$

とおく.

定義 5.164. X を局所コンパクト Hausdorff 空間 (定義 1.79) とする. $K \subseteq X$ をコンパクト集合, $V \subseteq X$ を開集合, f を X 上の関数とする.

$$\begin{aligned}&K \preceq f \quad \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \quad f \in C_{c,+}(X), \ \ 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \ (\forall x \in X), \ \ f(x) = 1 \ (\forall x \in K),\\ &f \preceq V \quad \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \quad f \in C_{c,+}(x), \ \ 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \ (\forall x \in X), \ \ \mathrm{supp}(f) \subseteq V,\\ &K \preceq f \preceq V \quad \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \quad K \preceq f, \ \ f \preceq V\end{aligned}$$

と定義する. $K \preceq f$ は $f \succeq K$, $f \preceq V$ は $f \succeq V$ とも表す.

定理 5.165 (Urysohn の補題)**.** X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする. このとき $K \subseteq V$ を満たす X の任意のコンパクト集合 K と開集合 V に対し,

$$K \preceq f \preceq V$$

(定義 5.164) を満たす f が存在する.

証明. 定理 1.81 より閉包がコンパクトな開集合 U_0 で,

$$K \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq V$$

を満たすものが取れる. 再び定理 1.81 より閉包がコンパクトな開集合 U_1 で,

$$K \subseteq U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq U_0$$

を満たすものが取れる. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ は可算無限集合であるから,

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad r_1 := 0, \quad r_2 := 1, \quad r_n \neq r_m \ (n \neq m)$$

とおく. そしてある $n \in \mathbb{N}(n \geqslant 2)$ に対し閉包がコンパクトな開集合の n 項列 $U_{r_1}, \cdots, U_{r_n}$ で,

$$\overline{U_{r_j}} \subseteq U_{r_i} \quad (\forall i, j \in \{1, \cdots, n\} : r_j < r_i) \tag{5.111}$$

を満たすものが取れていると仮定する.

$$r_{i_0} := \max\{r_i : r_i < r_{n+1}\}, \quad r_{j_0} := \min\{r_j : r_{n+1} < r_j\}$$

とおくと $r_{i_0} < r_{n+1} < r_{j_0}$ だから (5.111) より $\overline{U_{r_{j_0}}} \subseteq U_{r_{i_0}}$ であり, 定理 1.81 より閉包がコンパクトな開集合 $U_{r_{n+1}}$ で,

$$\overline{U_{r_{j_0}}} \subseteq U_{r_{n+1}} \subseteq \overline{U_{r_{n+1}}} \subseteq U_{r_{i_0}}$$

を満たすものが取れる. よって r_{i_0}, r_{j_0} の定義と (5.111) より $r_i < r_{n+1} < r_j$ を満たす任意の $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ に対し,

$$\overline{U_{r_j}} \subseteq \overline{U_{r_{j_0}}} \subseteq U_{r_{n+1}} \subseteq \overline{U_{r_{n+1}}} \subseteq U_{r_{i_0}} \subseteq U_{r_i}$$

が成り立つ. これより閉包がコンパクトな開集合の $n+1$ 項列 $U_{r_1}, \cdots, U_{r_n}, U_{r_{n+1}}$ で,

$$\overline{U_{r_j}} \subseteq U_{r_i} \quad (\forall i, j \in \{1, \cdots, n, n+1\} : r_i < r_j)$$

を満たすものが取れたことになる. よって帰納法により閉包がコンパクトな X の開集合の列 $(U_{r_i})_{i \in \mathbb{N}}$ で,

$$\overline{U_{r_j}} \subseteq U_{r_i} \quad (\forall i, j \in \mathbb{N} : r_i < r_j) \tag{5.112}$$

を満たすものが構成できる. 今, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n, g_n : X \to [0,1]$ を,

$$f_n(x) := \begin{cases} r_n & (x \in U_{r_n}) \\ 0 & (x \in X \backslash U_{r_n}) \end{cases}, \quad g_n(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \overline{U_{r_n}}) \\ r_n & (x \in X \backslash \overline{U_{r_n}}) \end{cases}$$

と定義する. このとき任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(a < f_n) = \begin{cases} X & (a < 0) \\ U_{r_n} & (0 \leqslant a < r_n) \\ \varnothing & (r_n < a) \end{cases}, \quad (g_n < a) = \begin{cases} X & (1 < a) \\ X \backslash \overline{U_{r_n}} & (r_n < a \leqslant 1) \\ \varnothing & (a \leqslant r_n) \end{cases}$$

であるから $(a < f_n)$ と $(g_n < a)$ は X の開集合である. そこで $f, g : X \to [0,1]$ を,

$$f(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad g(x) := \inf_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) \quad (\forall x \in X)$$

として定義すると任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(a < f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a < f_n), \quad (g < a) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (g_n < a)$$

であるから $(a < f)$ と $(g < a)$ は開集合である. 今, $f(x) = g(x)$ $(\forall x \in X)$ が成り立つことを示す. もし $f(x) < g(x)$ を満たす $x \in X$ が存在するならば $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ であることと Archimedes の原理 1.96 より $f(x) < r_n < r_m < g(x)$ を満たす $n, m \in \mathbb{N}$ が存在する. $f_n(x) \leqslant f(x) < r_n$ より $x \in X \backslash U_{r_n}$ であり, $r_m < g(x) \leqslant g_m(x)$ より $x \in \overline{U_{r_m}}$ である. また $r_n < r_m$ と (5.112) より $\overline{U_{r_m}} \subseteq U_{r_n}$ である. よって,

$$x \in X \backslash U_{r_n}, \quad x \in \overline{U_{r_m}} \subseteq U_{r_n}$$

となり矛盾を得る. ゆえに $g(x) \leqslant f(x)$ $(\forall x \in X)$ である. もし $g(x) < f(x)$ を満たす $x \in X$ が存在するならば $g_m(x) < f_n(x)$ なる $n, m \in \mathbb{N}$ が取れる. $g_m(x) < 1$ より $x \in X \backslash \overline{U_{r_m}}$ であり $0 < f_n(x)$ より $x \in U_{r_n}$ である. よって $r_m = g_m(x) < f_n(x) = r_n$ であるから (5.112) より $\overline{U_{r_n}} \subseteq U_{r_m}$ である. これより,

$$x \in X \backslash \overline{U_{r_m}} \subseteq X \backslash U_{r_m}, \quad x \in U_{r_n} \subseteq \overline{U_{r_n}} \subseteq U_{r_m}$$

となりこれらは矛盾する. ゆえに $f(x) = g(x)$ $(\forall x \in X)$ である. $\mathbb{R}$ の任意の開集合は有界開区間の合併で表され, $\mathbb{R}$ の任意の有界開区間 (a, b) に対し,

$$f^{-1}((a,b)) = (a < f) \cap (f < b) = (a < f) \cap (g < b)$$

は開集合であるから $f : X \to [0,1]$ は連続である．$K \subseteq U_{r_2}$ であり $r_n \leqslant r_2 = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であるから (5.112) より $K \subseteq \overline{U_{r_n}}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ である．よって任意の $x \in K$ に対し $g_n(x) = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であるから，

$$f(x) = g(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) = 1$$

である．また $f(x) > 0$ なる $x \in X$ に対し $f_n(x) > 0$ なる $n \in \mathbb{N}$ が取れて $x \in U_{r_n}$, $f_n(x) = r_n$ である．$\overline{U_{r_1}} \subseteq V$ であり $r_1 = 0 < r_n$ であるから (5.112) より $U_{r_n} \subseteq \overline{U_{r_1}} \subseteq V$ なので，$x \in \overline{U_{r_1}} \subseteq V$ である．よって $(f > 0) \subseteq \overline{U_{r_1}} \subseteq V$ であるから，

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{(f > 0)} \subseteq \overline{U_{r_1}} \subseteq V$$

である．$\overline{U_{r_1}}$ はコンパクトだから $\mathrm{supp}(f)$ はコンパクトである．よって $K \preceq f \preceq V$ が成り立つ． □

定理 5.166 (1 の分割)**.** X を局所コンパクト Hausdorff 空間, $K \subseteq X$ をコンパクト集合, $V_1, \cdots, V_n \subseteq X$ を開集合とし，

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_k$$

が成り立つとする．このとき $h_1 \preceq V_1, \cdots, h_n \preceq V_n$ なる $h_1, \cdots, h_n \in C_{c,+}(X)$ で，

$$\sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1 \quad (\forall x \in K)$$

を満たすものが存在する．

証明. 定理 1.81 より任意の $x \in K$ に対し閉包がコンパクトな x の開近傍 W_x である $k \in \{1, \cdots, n\}$ に対し $\overline{W_x} \subseteq V_k$ となるものが取れる．K はコンパクトであるから有限個の $x_1, \cdots, x_m \in K$ が取れて，

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} W_{x_j}$$

となる．今, 各 $k \in \{1, \cdots, n\}$ についてコンパクト集合

$$H_k := \bigcup_{\overline{W_{x_j}} \subseteq V_k} \overline{W_{x_j}} \subseteq V_k$$

を定義する．そして Urysohn の補題 5.165 より $H_k \preceq f_k \preceq V_k$ なる $f_k \in C_{c,+}(X)$ を取る．

$$h_1 := f_1, \quad h_k := f_k \prod_{j=1}^{k-1} (1 - f_j) \quad (k = 2, \cdots, n)$$

とおくと $h_k \preceq V_k$ $(k = 1, \cdots, n)$ であり，

$$\begin{aligned} &h_1(x) = 1 - (1 - f_1(x)), \quad h_1(x) + h_2(x) = 1 - (1 - f_1(x))(1 - f_2(x)), \quad \cdots, \\ &\sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - f_k(x)) \quad (\forall x \in X) \end{aligned}$$

である．$H_1, \cdots, H_n$ の定義より任意の $x \in K$ に対し $x \in H_k$ なる $k \in \{1, \cdots, n\}$ が存在し, $H_k \preceq f_k$ より $1 - f_k(x) = 0$ なので $\sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1$ である． □

定義 5.167 (Borel 測度)**.** X を位相空間, $\mathcal{B}_X$ を X の Borel 集合族 (定義 5.6) とする．可測空間 $(X, \mathcal{B}_X)$ 上の測度を Borel 測度と言う．

定義 5.168 (位相正則測度)**.** X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．Borel 測度 $\mu : \mathcal{B}_X \to [0, \infty]$ が位相正則測度であるとは次が成り立つことを言う．

(1) 任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ に対し $\mu(K) < \infty$.

(2) 任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し,

$$\mu(B) = \inf\{\mu(V) : V \text{ は } B \text{ を含む開集合}\}.$$

(3) $B \in \mathcal{B}_X$ が $\mu(B) < \infty$ を満たすか開集合であるとき,

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \text{ は } B \text{ に含まれるコンパクト集合}\}.$$

(2) を μ の外部正則性, (3) を μ の内部正則性と言う.

命題 5.169. X を局所コンパクト Hausdorff 空間, $\mu : \mathcal{B}_X \to [0, \infty]$ を位相正則測度とする. このとき次が成り立つ.

(1) $C_c(X) \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}_X, \mu)$.

(2) 任意の開集合 $V \subseteq X$ に対し,

$$\mu(V) = \sup\left\{\int_X f(x) d\mu(x) : f \preceq V\right\}. \tag{5.113}$$

(3) 任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ に対し,

$$\mu(K) = \inf\left\{\int_X f(x) d\mu(x) : K \preceq f\right\}. \tag{5.114}$$

証明. (1) 任意の $f \in C_c(X)$ に対し f の sup ノルムを $\|f\| = \sup_{x \in X}|f(x)|$ とすると,

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\chi_{\mathrm{supp}(f)}(x) \quad (\forall x \in X)$$

であり, $\mathrm{supp}(f)$ はコンパクトであるから,

$$\int_X |f(x)| d\mu(x) \leqslant \|f\|\mu(\mathrm{supp}(f)) < \infty.$$

よって $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ である.

(2) (5.113) の右辺を α とおく. 任意の $f \preceq V$ に対し $0 \leqslant f(x) \leqslant \chi_V(x)$ であるから,

$$\int_X f(x) d\mu(x) \leqslant \int_X \chi_V(x) d\mu(x) = \mu(V)$$

である. よって $\alpha \leqslant \mu(V)$ である. μ の内部正則性より,

$$\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \text{ は } V \text{ に含まれるコンパクト集合}\}$$

であり, $K \subseteq V$ なる任意のコンパクト集合 K に対し Urysohn の補題 5.165 より $K \preceq f \preceq V$ なる f が取れて $\chi_K(x) \leqslant f(x)$ $(\forall x \in X)$ であるから,

$$\mu(K) \leqslant \int_X f(x) d\mu(x) \leqslant \alpha$$

である. よって $\mu(V) \leqslant \alpha$ である. ゆえに $\mu(V) = \alpha$ である.

(3) (5.114) の右辺を α とおく. $K \preceq f$ なる任意の f に対し $\chi_K(x) \leqslant f(x)$ $(\forall x \in X)$ であるから,

$$\mu(K) \leqslant \int_X f(x) d\mu(x)$$

である. よって $\mu(K) \leqslant \alpha$ である. また μ の外部正則性より,

$$\mu(K) = \inf\{\mu(V) : V \text{ は } K \text{ を含む開集合}\}$$

であり, $K \subseteq V$ なる任意の開集合 V に対し Urysohn の補題 5.165 より $K \preceq f \preceq V$ なる f が取れて $f(x) \leqslant \chi_V(x)$ $(\forall x \in X)$ であるから,

$$\alpha \leqslant \int_X f(x) d\mu(x) \leqslant \mu(V)$$

である. よって $\alpha \leqslant \mu(K)$ である. ゆえに $\mu(K) = \alpha$ である.

□

定義 5.170 (Radon 汎関数)**.** X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする. $\mathbb{R}$ 上の線型空間 $C_{c,\mathbb{R}}(X)$ (定義 5.163) 上の線型汎関数

$$\Lambda : C_{c,\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}$$

で,

$$\Lambda f \geqslant 0 \ \ (\forall f \in C_{c,+}(X))$$

を満たすものを Radon 汎関数と言う.

補題 5.171. $(X, \mathcal{O}_X)$ を局所コンパクト Hausdorff 空間, $\Lambda : C_{c,\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}$ を Radon 汎関数とする. $\mu_0 : \mathcal{O}_X \to [0,\infty]$ を,

$$\mu_0(V) := \sup\{\Lambda f : f \preceq V\} \ \ (\forall V \in \mathcal{O}_X)$$

と定義し, $\mu^* : 2^X \to [0,\infty]$ を,

$$\mu^*(E) := \inf\{\mu_0(V) : V \in \mathcal{O}_X,\ V \supseteq E\}$$

と定義する. そして,

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{f}} := \{E \in 2^X : \mu^*(E) < \infty \text{ かつ } \mu^*(E) = \sup\{\mu^*(K) : K \text{ は } E \text{ に含まれるコンパクト集合 }\}\}$$

とおき,

$$\mathfrak{M} := \{E \in 2^X : \text{任意のコンパクト集合 } K \text{ に対し } E \cap K \in \mathfrak{M}_{\mathrm{f}}\}$$

とおく. このとき,

(1) 任意の $V \in \mathcal{O}_X$ に対し $\mu^*(V) = \mu_0(V)$ であり, μ^* は単調, すなわち, $E_1 \subseteq E_2$ を満たす任意の $E_1, E_2 \in 2^X$ に対し $\mu^*(E_1) \leqslant \mu^*(E_2)$ が成り立つ.

(2) $\mu^* : 2^X \to [0,\infty]$ は劣 σ-加法的, すなわち, 任意の可算族 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^X$ に対し,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n)$$

が成り立つ.

(3) 任意のコンパクト集合 K に対し $K \in \mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ であり,

$$\mu^*(K) = \inf\{\Lambda f : f \succeq K\} = \inf\{\Lambda f : f \in C_{c,+}(X),\ f(x) = 1\ (\forall x \in K)\}$$

が成り立つ.

(4) 任意の $V \in \mathcal{O}_X$ に対し,

$$\mu^*(V) = \sup\{\mu^*(K) : K \text{ は } V \text{ に含まれるコンパクト集合 }\}$$

が成り立つ.

(5) 互いに交わらない有限個のコンパクト集合 $K_1, \cdots, K_n$ に対し,

$$\mu^*(K_1 \cup \cdots \cup K_n) = \mu^*(K_1) + \cdots + \mu^*(K_n)$$

が成り立つ.

(6) $\mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ の任意の非交叉列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n)$$

が成り立つ.

(7) $\mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ の任意の非交叉列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し $\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) < \infty$ が成り立つならば $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ が成り立つ.

(8) 任意の $E \in \mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ と任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し,

$$K \subseteq E \subseteq V, \quad \mu^*(V \backslash K) < \varepsilon$$

を満たすコンパクト集合 K と開集合 V が存在する.

(9) 任意の $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ に対し $E_1 \backslash E_2 \in \mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ が成り立つ.

(10) $\mathfrak{M}$ は Borel 集合族 $\mathcal{B}_X$ を含む σ-加法族である.

(11)

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{f}} = \{E \in \mathfrak{M} : \mu^*(E) < \infty\}$$

が成り立つ.

(12) $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ の $\mathcal{B}_X$ 上への制限 $\mu : \mathcal{B}_X \ni B \mapsto \mu^*(B) \in [0, \infty]$ は位相正則測度である.

(13) 任意の $f \in C_{c,\mathbb{R}}(X)$ に対し,

$$\Lambda f = \int_X f(x) d\mu(x)$$

が成り立つ.

証明. (1) $\mu_0 : \mathcal{O}_X \to [0, \infty]$, $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ が単調であることは定義より自明であり, μ^* が $\mathcal{O}_X$ 上で μ_0 と一致することは μ_0 の単調性より直ちに分かる.

(2) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(E_n) < \infty$ と仮定して示せばよい. 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ を取る. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mu^*(E_n) < \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ であるから,

$$E_n \subseteq V_n, \quad \mu_0(V_n) < \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

を満たす開集合 V_n が取れる. 任意の $f \preceq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ に対しコンパクト性より,

$$\operatorname{supp}(f) \subseteq \bigcup_{k=1}^N V_k$$

なる $N \in \mathbb{N}$ が取れて 1 の分割 (定理 5.166) より $h_1 \preceq V_1, \cdots, h_N \preceq V_N$ で,

$$f = \sum_{k=1}^N f h_k$$

を満たすものが取れる. このとき $fh_1 \preceq V_1, \cdots, fh_N \preceq V_N$ であるから,

$$\Lambda f = \sum_{k=1}^N \Lambda(f h_k) \leqslant \sum_{k=1}^N \mu_0(V_k) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_0(V_n)$$

となる. $f \preceq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ は任意なので,

$$\mu_0\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n\right) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_0(V_n)$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leqslant \mu_0\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n\right) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_0(V_n) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\ = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(E_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. $\varepsilon \in (0, \infty)$ は任意なので,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(E_n)$$

が成り立つ.

(3) $f(x) = 1$ $(\forall x \in K)$ を満たす任意の $f \in C_{c,+}(X)$ を取る．このとき任意の $\alpha \in (0,1)$ に対し $K \subseteq (\alpha < f)$ であり, 任意の $g \preceq (\alpha < f)$ に対し $\alpha g(x) \leqslant f(x)$ $(\forall x \in X)$ であるから $\Lambda(f - \alpha g) \geqslant 0$ より,

$$\alpha \Lambda g \leqslant \Lambda f$$

である．よって $g \preceq (\alpha < f)$ の任意性より,

$$\alpha \mu_0(\alpha < f) \leqslant \Lambda f$$

であるから, $K \subseteq (\alpha < f)$ より,

$$\alpha \mu^*(K) \leqslant \Lambda f$$

である．そして $\alpha \in (0,1)$ の任意性より,

$$\mu^*(K) \leqslant \Lambda f$$

が成り立つので, f の任意性より,

$$\mu^*(K) \leqslant \inf\{\Lambda f : f \in C_{c,+}(X),\ f(x) = 1\ (\forall x \in K)\}$$

が成り立つ．ここで明らかに,

$$\inf\{\Lambda f : f \in C_{c,+}(X),\ f(x) = 1\ (\forall x \in K)\} \leqslant \inf\{\Lambda f : f \succeq K\}$$

であり $K \subseteq V$ を満たす任意の開集合 V に対し Urysohn の補題 5.165 より $K \preceq f \preceq V$ を満たす f が取れるので,

$$\inf\{\Lambda f : f \succeq K\} \leqslant \mu_0(V)$$

である．よって,

$$\mu^*(K) \leqslant \inf\{\Lambda f : f \in C_{c,+}(X),\ f(x) = 1\ (\forall x \in K)\} \leqslant \inf\{\Lambda f : f \succeq K\} \leqslant \mu_0(V)$$

が成り立ち, V の任意性より,

$$\mu^*(K) = \inf\{\Lambda f : f \in C_{c,+}(X),\ f(x) = 1\ (\forall x \in K)\} = \inf\{\Lambda f : f \succeq K\}$$

が成り立つ．特に $\mu^*(K) < \infty$ であり K 自身がコンパクトであることから,

$$\mu^*(K) = \sup\{\mu^*(C) : C \text{ は } K \text{ に含まれるコンパクト集合}\}$$

が成り立つ．よって $K \in \mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ である．

(4) μ^* の単調性より,

$$\sup\{\mu^*(K) : K \text{ は } V \text{ に含まれるコンパクト集合}\} \leqslant \mu^*(V)$$

である．任意の $f \preceq V$ を取る．$\mathrm{supp}(f) \preceq g$ なる任意の g に対し $f(x) \leqslant g(x)$ $(\forall x \in X)$ だから $\Lambda f \leqslant \Lambda g$ である．よって (3) より,

$$\Lambda f \leqslant \inf\{\Lambda g : g \succeq \mathrm{supp}(f)\} = \mu^*(\mathrm{supp}(f))$$

であり, $\mathrm{supp}(f)$ は V に含まれるコンパクト集合だから,

$$\Lambda f \leqslant \sup\{\mu^*(K) : K \text{ は } V \text{ に含まれるコンパクト集合}\}$$

である．よって $f \preceq V$ の任意性より,

$$\mu^*(V) = \mu_0(V) \leqslant \sup\{\mu^*(K) : K \text{ は } V \text{ に含まれるコンパクト集合}\}$$

だから求める等式を得る．

(5) $n=2$ の場合を示せば十分である. K_1, K_2 を互いに交わらないコンパクト集合とする. このとき $K_1 \subseteq X \backslash K_2$ である. 任意の $f \succeq K_1 \cup K_2$ を取り, Urysohn の補題 5.165 より $K_1 \preceq g \preceq X \backslash K_2$ なる g を取る.

$$f_1 := fg \in C_{c,+}(X), \quad f_2 := f(1-g) \in C_{c,+}(X)$$

とおけば $K_1 \preceq f_1, K_2 \preceq f_2$ であり $f = f_1 + f_2$ だから (3) より,

$$\Lambda f = \Lambda f_1 + \Lambda f_2 \geqslant \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2)$$

である. よって $f \succeq K_1 \cup K_2$ の任意性と (3) より,

$$\mu^*(K_1 \cup K_2) \geqslant \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2)$$

が成り立つ. (2) より逆の不等式も成り立つ.

(6) (2) より,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(E_n) \leqslant \mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)$$

を示せばよい. $\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) < \infty$ と仮定して示せば十分である. 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ を取る. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\mu^*(E_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} < \mu^*(E_n) = \sup\{\mu^*(K) : K \text{ は } E_n \text{ に含まれるコンパクト集合}\}$$

であるから E_n に含まれるコンパクト集合 K_n で,

$$\mu^*(E_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} < \mu^*(K_n)$$

を満たすものが取れる. $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ はコンパクト集合の非交叉列なので (5) より任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\mu^*(E_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} \right) < \sum_{n=1}^{N} \mu^*(K_n) = \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{N} K_n \right) \leqslant \mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)$$

が成り立つ. よって,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(E_n) \leqslant \mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) + \varepsilon$$

が成り立つので $\varepsilon \in (0, \infty)$ の任意性より求める不等式を得る.

(7) $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ とおく. $\mu^*(E) < \infty$ だから $E \in \mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ を示すには,

$$\mu^*(E) = \sup\{\mu^*(K) : K \text{ は } E \text{ に含まれるコンパクト集合}\}$$

を示せばよい. (6) より,

$$\mu^*(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(E_n) < \infty$$

であるから任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し,

$$\mu^*(E) - \varepsilon < \sum_{n=1}^{N} \mu^*(E_n)$$

を満たす $N \in \mathbb{N}$ が取れる. また (6) の証明よりコンパクト集合の列 $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で,

$$K_n \subseteq E_n, \quad \mu^*(E_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} < \mu^*(K_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たすものが取れるので, (5) より,

$$\mu^*(E) - \varepsilon < \sum_{n=1}^{N} \mu^*(E_n) < \sum_{n=1}^{N} \left(\mu^*(K_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \leqslant \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{N} K_n \right) + \varepsilon$$

が成り立つ. よって,

$$\mu^*(E) < \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} K_n\right) + 2\varepsilon \leqslant \sup\{\mu^*(K) : K \text{ は } E \text{ に含まれるコンパクト集合 }\} + 2\varepsilon$$

であるから $\varepsilon \in (0,\infty)$ の任意性より,

$$\mu^*(E) \leqslant \sup\{\mu^*(K) : K \text{ は } E \text{ に含まれるコンパクト集合 }\}$$

が成り立つ. μ^* の単調性より逆の不等式も成り立つので求める等式を得る.

(8)

$$\mu^*(E) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu^*(E) = \sup\{\mu^*(K) : K \text{ は } E \text{ に含まれるコンパクト集合 }\},$$
$$\mu^*(E) + \frac{\varepsilon}{2} > \mu^*(E) = \inf\{\mu^*(V) : V \text{ は } E \text{ を含む開集合 }\}$$

であるから,

$$\mu^*(E) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu^*(K),\ \ \mu^*(E) + \frac{\varepsilon}{2} > \mu^*(V),\ \ K \subseteq E \subseteq V$$

なるコンパクト集合 K と開集合 V が取れる. (3) より $K \in \mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ であり, 開集合 $V, V\backslash K$ は $\mu^*(V\backslash K) \leqslant \mu^*(V) < \infty$ を満たすから (4) より $V, V\backslash K \in \mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ である. よって (6) より,

$$\mu^*(V) = \mu^*(V\backslash K) + \mu^*(K)$$

だから,

$$\mu^*(V\backslash K) = \mu^*(V) - \mu^*(K) = (\mu^*(V) - \mu^*(E)) + (\mu^*(E) - \mu^*(K)) < \varepsilon$$

である.

(9) (8) より任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し,

$$\mu^*(V_j\backslash K_j) < \frac{\varepsilon}{2},\ \ K_j \subseteq E_j \subseteq V_j\ \ (j = 1, 2)$$

を満たす開集合 V_1, V_2 とコンパクト集合 K_1, K_2 が取れる.

$$E_1\backslash E_2 \subseteq V_1\backslash K_1 \cup K_1\backslash V_2 \cup V_2\backslash K_2$$

であるから (2) より,

$$\mu^*(E_1\backslash E_2) \leqslant \mu^*(V_1\backslash K_1) + \mu^*(K_1\backslash V_2) + \mu^*(V_2\backslash K_2) < \varepsilon + \mu^*(K_1\backslash V_2)$$

である. $K_1\backslash V_2$ は $E_1\backslash E_2$ に含まれるコンパクト集合だから,

$$\mu^*(E_1\backslash E_2) \leqslant \varepsilon + \sup\{\mu^*(K) : K \text{ は } E_1\backslash E_2 \text{ に含まれるコンパクト集合 }\}$$

が成り立つ. よって $\varepsilon \in (0,\infty)$ の任意性より,

$$\mu^*(E_1\backslash E_2) \leqslant \sup\{\mu^*(K) : K \text{ は } E_1\backslash E_2 \text{ に含まれるコンパクト集合 }\}$$

が成り立つ. μ^* の単調性より逆の不等式も成り立つので $E_1\backslash E_2 \in \mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ である.

(10) (7), (9) より任意の $A, B \in \mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ に対し,

$$A \cup B = (A\backslash B) \cup B \in \mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$$

であるから, 任意の $E, F \in \mathfrak{M}$ と任意のコンパクト集合 K に対し,

$$(E \cup F) \cap K = (E \cap K) \cup (E \cap F) \in \mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$$

である. よって $E \cup F \in \mathfrak{M}$ である. また任意の $E \in \mathfrak{M}$ と任意のコンパクト集合 K に対し (3), (9) より,

$$(X\backslash E) \cap K = K\backslash(E \cap K) \in \mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$$

だから $X\backslash E\in\mathfrak{M}$ である．よって $\mathfrak{M}$ は有限加法族である．$\mathfrak{M}$ の任意の非交叉列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と任意のコンパクト集合 K に対し (7) より，

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\right)\cap K=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E_n\cap K)\in\mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$$

だから $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\in\mathfrak{M}$ である．任意の $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathfrak{M}$ に対し，

$$F_1=E_1,\quad F_n:=E_n\backslash(E_1\cup\cdots\cup E_{n-1})\in\mathfrak{M}\ \ (\forall n\in\mathbb{N}:n\geqslant 2)$$

とおくと $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$ であり $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は非交叉列だから $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n\in\mathfrak{M}$ である．よって $\mathfrak{M}$ は σ-加法族である．(3) より $\mathfrak{M}$ は任意の閉集合を含むので $\mathcal{O}_X$ を含む．ゆえに $\mathcal{B}_X\subseteq\mathfrak{M}$ である．

(11) 任意の $E\in\mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ と任意のコンパクト集合 K に対し (3), (9) より，

$$E\cap K=E\backslash(E\backslash K)\in\mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$$

だから $E\in\mathfrak{M}$ である．よって，

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{f}}\subseteq\{E\in\mathfrak{M}:\mu^*(E)<\infty\}$$

が成り立つ．逆の包含関係を示す．$\mu^*(E)<\infty$ を満たす任意の $E\in\mathfrak{M}$ を取る．μ^* の定義より $\mu^*(V)<\infty$, $E\subseteq V$ を満たす開集合 V が取れる．任意の $\varepsilon\in(0,\infty)$ を取る．(4) より，

$$\mu^*(V)-\frac{\varepsilon}{2}<\mu^*(K_1)$$

を満たすコンパクト集合 $K_1\subseteq V$ が取れて (6) より，

$$\mu^*(V\backslash K_1)=\mu^*(V)-\mu^*(K_1)<\frac{\varepsilon}{2}$$

である．そして $E\in\mathfrak{M}$ より $E\cap K_1\in\mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ だから，

$$\mu^*(E\cap K_1)-\frac{\varepsilon}{2}<\mu^*(K_2)$$

を満たすコンパクト集合 $K_2\subseteq E\cap K_1$ が取れる．

$$E\subseteq(E\cap K_1)\cup(V\backslash K_1)$$

だから (2) より，

$$\mu^*(E)\leqslant\mu^*(E\cap K_1)+\mu^*(V\backslash K_1)<\varepsilon+\mu^*(K_2)$$

が成り立つ．K_2 は E に含まれるコンパクト集合だから，

$$\mu^*(E)\leqslant\varepsilon+\sup\{\mu^*(K):K\text{ は }E\text{ に含まれるコンパクト集合}\}$$

が成り立ち，$\varepsilon\in(0,\infty)$ は任意だから，

$$\mu^*(E)\leqslant\sup\{\mu^*(K):K\text{ は }E\text{ に含まれるコンパクト集合}\}$$

が成り立つ．μ^* の単調性より逆の不等式も成り立つので $E\in\mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ である．よって，

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{f}}=\{E\in\mathfrak{M}:\mu^*(E)<\infty\}$$

が成り立つ．

(12) $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{M}$ の非交叉列とする．$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n)<\infty$ ならば (11) より $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathfrak{M}_{\mathrm{f}}$ の非交叉列なので (6) より，

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu^*(E_n)$$

が成り立つ．また (2) よりこの等式は $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n)=\infty$ の場合も成り立つ．よって σ-加法族 $\mathfrak{M}$ 上への μ^* の制限 $\mathfrak{M}\ni E\mapsto\mu^*(E)\in[0,\infty]$ は測度であるから，その $\mathcal{B}_X\subseteq\mathfrak{M}$ 上への制限 $\mu:\mathcal{B}_X\ni B\mapsto\mu(B)\in[0,\infty]$ も測度

である. (3) より任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ に対し $\mu(K) = \mu^*(K) < \infty$ であり, μ^* の定義より μ は外部正則性を持つ. また $B \in \mathcal{B}_X$ が開集合であるか $\mu(B) < \infty$ を満たす場合, (4), (11) より,

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \text{ は } B \text{ に含まれるコンパクト集合 }\}$$

が成り立つ. よって μ は内部正則性を持つ. ゆえに μ は位相正則測度である.

(13) 任意の $f \in C_{c,\mathbb{R}}(X)$ を取り,

$$\Lambda f \leqslant \int_X f(x) d\mu(x)$$

が成り立つことを示す. $-M < f(x) < M$ $(\forall x \in X)$ を満たす正実数 M と任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ を取り, $\frac{2M}{N} < \varepsilon$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ を取る. そして,

$$y_k := -M + k\frac{2M}{N} \quad (k = 0, 1, \cdots, N)$$

とおき,

$$E_k := (y_{k-1} \leqslant f < y_k) \cap \operatorname{supp}(f) \in \mathcal{B}_X \quad (k = 1, \cdots, N)$$

とおく. 各 $k \in \{1, \cdots, N\}$ に対し $\mu(E_k) \leqslant \mu(\operatorname{supp}(f)) < \infty$ であるから,

$$E_k \subseteq U_k, \quad \mu(U_k) < \mu(E_k) + \frac{\varepsilon}{N}$$

を満たす開集合 U_k が取れる.

$$V_k := (f < y_k + \varepsilon) \cap U_k$$

とおくと V_k も開集合であり,

$$E_k \subseteq V_k, \quad \mu(V_k) \leqslant \mu(U_k) < \mu(E_k) + \frac{\varepsilon}{N}$$

である.

$$\operatorname{supp}(f) = \bigcup_{k=1}^N E_k \subseteq \bigcup_{k=1}^N V_k$$

であるから 1 の分割 (定理 5.166) より $h_1 \preceq V_1, \cdots, h_N \preceq V_N$ で,

$$\sum_{k=1}^N h_k(x) = 1 \quad (\forall x \in \operatorname{supp}(f))$$

を満たすものが取れる. このとき

$$\Lambda h_k \leqslant \mu(V_k) < \mu(E_k) + \frac{\varepsilon}{N} \quad (k = 1, \cdots, N)$$

であり, (3) より,

$$\mu(\operatorname{supp}(f)) \leqslant \sum_{k=1}^N \Lambda h_k$$

が成り立つ. また,

$$f = \sum_{k=1}^N f h_k$$

であり, 各 $k \in \{1, \cdots, N\}$ について $\operatorname{supp}(h_k) \subseteq V_k \subseteq (f < y_k + \varepsilon)$ だから,

$$f(x)h_k(x) \leqslant (y_k + \varepsilon)h_k(x) \quad (\forall x \in X),$$

従って $\Lambda(f h_k) \leqslant (y_k + \varepsilon)\Lambda h_k$ なので,

$$\Lambda f = \sum_{k=1}^N \Lambda(f h_k) \leqslant \sum_{k=1}^N (y_k + \varepsilon)\Lambda h_k$$

が成り立つ．そして各 $k \in \{1, \cdots, N\}$ について $y_k - \varepsilon < y_{k-1} \leqslant f(x)$ $(\forall x \in E_k)$ であるから，

$$\sum_{k=1}^{N}(y_k - \varepsilon)\mu(E_k) \leqslant \sum_{k=1}^{N}\int_X f(x)\chi_{E_k}(x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x)$$

が成り立つ．以上より，

$$\begin{aligned}
\Lambda f &\leqslant \sum_{k=1}^{N}(y_k + \varepsilon)\Lambda h_k \leqslant \sum_{k=1}^{N}(y_k + M + \varepsilon)\Lambda h_k - M\sum_{k=1}^{N}\Lambda h_k \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{N}(y_k + M + \varepsilon)\left(\mu(E_k) + \frac{\varepsilon}{N}\right) - M\mu(\mathrm{supp}(f)) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{N}((y_k - \varepsilon) + 2\varepsilon + M)\left(\mu(E_k) + \frac{\varepsilon}{N}\right) - M\mu(\mathrm{supp}(f)) \\
&= \sum_{k=1}^{N}(y_k - \varepsilon)\mu(E_k) + \frac{\varepsilon}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - \varepsilon) + (2\varepsilon + M)\sum_{k=1}^{N}\left(\mu(E_k) + \frac{\varepsilon}{N}\right) - M\mu(\mathrm{supp}(f)) \\
&\leqslant \int_X f(x)d\mu(x) + M\varepsilon + (2\varepsilon + M)(\mu(\mathrm{supp}(f)) + \varepsilon) - M\mu(\mathrm{supp}(f)) \\
&= \int_X f(x)d\mu(x) + 2(M + \mu(\mathrm{supp}(f)) + \varepsilon)\varepsilon
\end{aligned}$$

となる．よって $\varepsilon \in (0, \infty)$ の任意性より，

$$\Lambda f \leqslant \int_X f(x)d\mu(x)$$

が成り立つ．これが任意の $f \in C_{c,\mathbb{R}}(X)$ に対して成り立つので f を $-f \in C_{c,\mathbb{R}}(X)$ に置き換えて，

$$-\Lambda f = \Lambda(-f) \leqslant \int_X -f(x)d\mu(x) = -\int_X f(x)d\mu(x)$$

も成り立つ．ゆえに，

$$\Lambda f = \int_X f(x)d\mu(x) \quad (\forall f \in C_{c,\mathbb{R}}(X))$$

が成り立つ．

□

定理 5.172 (Riesz-Markov-角谷の表現定理)**.** X を局所コンパクト Hausdorff 空間, $\Lambda : C_{c,\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}$ を Radon 測度とする．このとき位相正則測度 (定義 5.168) $\mu : \mathcal{B}_X \to [0, \infty]$ で，

$$\Lambda f = \int_X f(x)d\mu(x) \quad (\forall f \in C_{c,\mathbb{R}}(X))$$

を満たすものが唯一つ存在する．

証明. 存在することは補題 5.171 による．一意性を示す．位相正則測度 $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{B}_X \to [0, \infty]$ が，

$$\int_X f(x)d\mu_1(x) = \Lambda f = \int_X f(x)d\mu_2(x) \quad (\forall f \in C_{c,\mathbb{R}}(X))$$

を満たすとする．このとき命題 5.169 の (1) より任意の開集合 V に対し，

$$\mu_1(V) = \sup\{\Lambda f : f \preceq V\} = \mu_2(V)$$

が成り立つ．よって外部正則性より任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し，

$$\mu_1(B) = \inf\{\mu_1(V) : V \text{ は } B \text{ を含む開集合}\} = \inf\{\mu_2(V) : V \text{ は } B \text{ を含む開集合}\} = \mu_2(B)$$

が成り立つので $\mu_1 = \mu_2$ である． □

定義 5.173 (σ-コンパクト)**.** 位相空間の部分集合が σ-コンパクトであるとはそれが可算個のコンパクト集合の合併で表されることを言う．

命題 5.174. X を σ-コンパクトな局所コンパクト Hausdorff 空間とし，$\mu : \mathcal{B}_X \to [0,\infty]$ を位相正則測度 (定義 5.168) とする．このとき，

(1) 任意の $B \in \mathcal{B}_X$ と任意の正実数 ε に対し，

$$\mu(V \backslash F) < \varepsilon, \quad F \subseteq B \subseteq V$$

を満たす閉集合 F と開集合 V が存在する．

(2) 任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し，

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \text{ は } B \text{ に含まれるコンパクト集合 }\} \tag{5.115}$$

が成り立つ．

証明. (1) 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ と任意の $B \in \mathcal{B}_X$ を取る．X は σ-コンパクトなので $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ なるコンパクト集合の列 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が取れる．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mu(B \cap K_n) < \infty$ だから外部正則性より，

$$\mu(V_n \backslash (B \cap K_n)) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \quad B \cap K_n \subseteq V_n$$

を満たす開集合 V_n が取れる．そこで開集合 $V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ を定義すると，

$$V \backslash B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \backslash B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \backslash (B \cap K_n)$$

だから，

$$\mu(V \backslash B) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(V_n \backslash (B \cap K_n)) < \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

となる．よって任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ と任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し，

$$\mu(V \backslash B) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad B \subseteq V$$

を満たす開集合 V が存在する．ここで B を $X \backslash B$ で置き換えれば，

$$\mu(U \backslash (X \backslash B)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad X \backslash B \subseteq U$$

なる開集合 U が存在すると言える．閉集合 $F = X \backslash U$ を考えれば，

$$F \subseteq B, \quad \mu(B \backslash F) = \mu(U \backslash (X \backslash B)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

であり，

$$V \backslash F \subseteq V \backslash B \cup B \backslash F$$

だから，

$$\mu(V \backslash F) \leqslant \mu(V \backslash B) + \mu(B \backslash F) < \varepsilon$$

である．

(2) $B \in \mathcal{B}_X$ が $\mu(B) < \infty$ を満たすとき (5.115) が成り立つことは位相正則測度の内部正則性の定義による．$B \in \mathcal{B}_X$ が $\mu(B) = \infty$ を満たすとして (5.115) が成り立つことを示す．X は σ-コンパクトだからコンパクト集合の単調増加列 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ を満たすものが取れる．測度の単調収束性 (命題 5.32 の (4)) より，

$$\mu(B) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(B \cap C_n)$$

であり，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mu(B \cap C_n) < \infty$ であるから内部正則性より，

$$\mu(B \cap C_n) \leqslant \sup\{\mu(K) : K \text{ は } B \text{ に含まれるコンパクト集合 }\}$$

が成り立つ．よって，

$$\infty = \mu(B) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(B \cap C_n) \leqslant \sup\{\mu(K) : K \text{ は } B \text{ に含まれるコンパクト集合 }\}$$

だから，

$$\mu(B) = \infty = \sup\{\mu(K) : K \text{ は } B \text{ に含まれるコンパクト集合 }\}$$

が成り立つ．

□

命題 5.175. 第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間の任意の開集合は σ-コンパクトである．

証明. V を X の任意の空でない開集合とする．定理 1.81 より任意の $x \in V$ に対し閉包がコンパクトな x の開近傍 U_x で $x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq V$ を満たすものが取れる．よって，

$$V = \bigcup_{x\in V} U_x = \bigcup_{x\in V} \overline{U_x}$$

である．V は第二可算であるから命題 1.68 より Lindelöf である．よって可算族 $\{U_{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{U_x\}_{x\in V}$ が取れて，

$$V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{x_n} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_{x_n}} \subseteq V$$

となる．ゆえに V はコンパクト集合の可算族 $\{\overline{U_{x_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ の合併であるから σ-コンパクトである． □

補題 5.176. X を位相空間とする．任意の有限個の $f_1, \cdots, f_n \in C_{c,\mathbb{R}}(X)$ に対し，

$$\max(f_1, \cdots, f_n) : X \ni x \mapsto \max(f_1(x), \cdots, f_n(x)) \in \mathbb{R}$$

は $C_{c,\mathbb{R}}(X)$ に属する．

証明.

$$\max(f_1, \cdots, f_{k-1}, f_k) = \max(\max(f_1, \cdots, f_{k-1}), f_k)$$

であるから $n = 2$ の場合を示せば十分であるが，

$$\max(f_1, f_2) = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) + \frac{1}{2}|f_1 - f_2|$$

であり，$f_1 + f_2 \in C_{c,\mathbb{R}}(X)$, $|f_1 - f_2| \in C_{c,\mathbb{R}}(X)$ だから $\max(f_1, f_2) \in C_{c,\mathbb{R}}(X)$ である． □

定理 5.177 (自動的位相正則性)**.** X を第二可算公理を満たす位相空間, $\mu : \mathcal{B}_X \to [0, \infty]$ を Borel 測度とし，任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ に対し $\mu(K) < \infty$ が成り立つとする．このとき任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し，

$$\mu(B) = \inf\{\mu(V) : V \text{ は } B \text{ を含む開集合 }\},$$
$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \text{ は } B \text{ に含まれるコンパクト集合 }\}$$

が成り立つ．特に μ は位相正則測度 (定義 5.168) である．

証明. 任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ に対し $\mu(K) < \infty$ だから $C_c(X) \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ である．よって Radon 汎関数 (定義 5.170)

$$\Lambda : C_{c,\mathbb{R}}(X) \ni f \mapsto \int_X f(x) d\mu(x) \in \mathbb{R}$$

が定義でき, Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.172 より位相正則測度 $\nu : \mathcal{B}_X \to [0, \infty]$ で，

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \Lambda f = \int_X f(x) d\mu(x) \quad (\forall f \in C_{c,\mathbb{R}}(X))$$

を満たすものが存在する．命題 5.175 より X は σ-コンパクトだから命題 5.174 より，

$$\nu(B) = \inf\{\nu(V) : V \text{ は } B \text{ を含む開集合 }\},$$
$$\nu(B) = \sup\{\nu(K) : K \text{ は } B \text{ に含まれるコンパクト集合 }\}$$

が成り立つので μ と ν が一致することを示せばよい．X の任意の開集合 V を取る．命題 5.175 より V は σ-コンパクトなのでコンパクト集合の列 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ を満たすものが取れる．Urysohn の補題 5.165 により各 $n \in \mathbb{N}$ について $K_n \preceq f_n \preceq V$ なる f_n を取り，

$$g_n := \max(f_1, \cdots, f_n) \in C_{c,+}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

(補題 5.176 を参照) とおけば，

$$g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X), \quad \chi_V(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) \quad (\forall x \in X)$$

であるから単調収束定理 5.40 より，

$$\nu(V) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X g_n(x) d\nu(x) = \int_X g_n(x) d\mu(x) = \mu(V)$$

が成り立つ．よって任意の開集合 $V \subseteq X$ に対し $\nu(V) = \mu(V)$ が成り立つ．
今，任意の $B \in \mathcal{B}_X$ と任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ を取る．命題 5.174 より，

$$\nu(V \backslash F) < \varepsilon, \quad F \subseteq B \subseteq V$$

を満たす開集合 V と閉集合 F が取れる．前段の結果より，

$$\mu(V) = \nu(V), \quad \mu(V \backslash F) = \nu(V \backslash F) < \varepsilon$$

であるから，

$$\mu(B) \leqslant \mu(V) = \nu(V) = \nu(F) + \nu(V \backslash F) \leqslant \nu(B) + \varepsilon,$$
$$\nu(B) \leqslant \nu(V) = \mu(V) = \mu(F) + \mu(V \backslash F) \leqslant \mu(B) + \varepsilon$$

である．よって $\mu(B) = \infty \Leftrightarrow \nu(B) = \infty$ であり，$\mu(B) < \infty, \nu(B) < \infty$ のとき，

$$|\mu(B) - \nu(B)| < \varepsilon$$

である．$\varepsilon \in (0,\infty)$ は任意なので $\mu(B) = \nu(B)$ が成り立つ．よって μ と ν は一致する． □

命題 5.178. X を局所コンパクト Hausdorff 空間，$\mu : \mathcal{B}_X \to [0,\infty]$ を位相正則測度 (定義 5.168) とする．このとき任意の $p \in [1,\infty]$ に対し，

$$C_c(X) \subseteq \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}_X, \mu)$$

が成り立つ．

証明. 任意の $f \in C_c(X)$ に対し f は有界であるから $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ である．$p \in [1,\infty)$ とする．f の sup ノルムを $\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|$ とおくと，

$$|f(x)|^p \leqslant \|f\|^p \chi_{\mathrm{supp}(f)}(x) \quad (\forall x \in X)$$

であるから，

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \leqslant \|f\|^p \int_X \chi_{\mathrm{supp}(f)}(x) d\mu(x) = \|f\|^p \mu(\mathrm{supp}(f)) < \infty$$

である．よって $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ である． □

定理 5.179 (位相正則測度に関する L^p 関数の台がコンパクトな連続関数による近似)**.** X を局所コンパクト Hausdorff 空間, $\mu : \mathcal{B}_X \to [0,\infty]$ を位相正則測度 (定義 5.168), $p \in [1,\infty)$, $f \in \mathcal{L}^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ とする．このとき $C_c(X)$ の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p = 0$$

を満たすものが存在する．

証明. 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し $\|f-g\|_p < \varepsilon$ を満たす $g \in C_c(X)$ が存在することを示せばよい．定理 5.128 より任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し $\mathcal{L}^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ に属する可測単関数 s で $\|f-s\|_p < \varepsilon$ を満たすものが取れるので, 最初から $f \in \mathcal{L}^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ は可測単関数であると仮定してよい．さらにこのとき

$$f \in \mathrm{span}\{\chi_B : B \in \mathcal{B}_X,\ \mu(B) < \infty\}$$

である[*57]から最初から f は $\mu(B) < \infty$ を満たす $B \in \mathcal{B}_X$ に対し $f = \chi_B$ であると仮定してよい．任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し, $\mu(B) < \infty$ であることと μ の外部正則性 (定義 5.168) より,

$$B \subseteq V,\quad \mu(V\backslash B) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

なる開集合 V が取れる．このとき,

$$\|\chi_V - \chi_B\|_p = \left(\int_X |\chi_V(x)-\chi_B(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X \chi_{V\backslash B}(x)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = \mu(V\backslash B)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる．そしてこの開集合 V に対し命題 5.169 の (2) より,

$$g \preceq V,\quad \mu(V) - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p < \int_X g(x)d\mu(x)$$

なる $g \in C_{c,+}(X)$ が取れる．このとき $0 \leqslant \chi_V(x) - g(x) \leqslant 1$ $(\forall x \in X)$ であるから,

$$\int_X |\chi_V(x)-g(x)|^p d\mu(x) \leqslant \int_X \chi_V(x) - g(x)d\mu(x) = \mu(V) - \int_X g(x)d\mu(x) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

よって,

$$\|\chi_V - g\|_p = \left(\int_X |\chi_V(x)-g(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる．ゆえに,

$$\|f-g\|_p = \|\chi_B - g\|_p \leqslant \|\chi_B - \chi_V\|_p + \|\chi_V - g\|_p < \varepsilon$$

となるので求める結果を得た． □

定理 5.180. X を局所コンパクト Hausdorff 空間, $\mu : \mathcal{B}_X \to [0,\infty]$ を位相正則測度 (定義 5.168), $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{B}_X,\mu)$ とする．このとき,

$$\|f\|_1 = \sup\left\{\left|\int_X f(x)\varphi(x)d\mu(x)\right| : \varphi \in C_c(X),\ \|\varphi\| \leqslant 1\right\}$$

(ただし右辺の $\|\varphi\|$ は φ の sup ノルム) が成り立つ．

証明.

$$s := \sup\left\{\left|\int_X f(x)\varphi(x)d\mu(x)\right| : \varphi \in C_c(X),\ \|\varphi\| \leqslant 1\right\}$$

とおく．任意の $\varphi \in C_c(X)$ に対し,

$$\left|\int_X f(x)\varphi(x)d\mu(x)\right| \leqslant \int_X |f(x)|\|\varphi\|d\mu(x) = \|f\|_1\|\varphi\|$$

[*57] 互いに交わらない $B_1,\cdots,B_n \in \mathcal{B}_X$ と $\alpha_1,\cdots,\alpha_n \in \mathbb{C}$ に対して $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k\chi_{B_k}$ と表すと各 k について $|\alpha_k|^p\chi_{B_k}(x) \leqslant |f(x)|^p$ $(\forall x \in X)$ だから $|\alpha_k|^p\mu(B_k) \leqslant \|f\|_p^p < \infty$ である．よって $\alpha_k \neq 0$ ならば $\mu(B_k) < \infty$ である．

であるから $s \leqslant \|f\|_1$ は成り立つ．この逆の不等式を示す．任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ を取る．定理 5.179 より $g \in C_c(X)$ で,

$$\|f-g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.116}$$

を満たすものが取れる．各 $n \in \mathbb{N}$ について Urysohn の補題 5.165 により,

$$\left(\frac{1}{n} \leqslant |g|\right) \preceq \omega_n \preceq (0<|g|)$$

なる ω_n を取り, $\varphi_n : X \to \mathbb{C}$ を,

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \frac{|g(x)|}{g(x)}\omega_n(x) & (x \in (0<|g|)) \\ 0 & (x \notin (0<|g|)) \end{cases}$$

とおく．$\mathrm{supp}(\omega_n) \subseteq (0<|g|)$ より,

$$X = (0<|g|) \cup X\backslash(0<|g|) = (0<|g|) \cup X\backslash \mathrm{supp}(\omega_n)$$

であり, $\varphi_n : X \to \mathbb{C}$ は開集合 $(0<|g|)$ 上で連続で開集合 $X\backslash\mathrm{supp}(\omega_n)$ 上で 0 だから X 上で連続であり, $\mathrm{supp}(\omega_n)$ はコンパクトで $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subseteq \mathrm{supp}(\omega_n)$ だから $\varphi_n \in C_c(X)$ である．そして,

$$\begin{aligned}
&|\varphi_n(x)| \leqslant 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X), \\
&|g(x)| = \lim_{n\to\infty} |g(x)|\omega_n(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)g(x) \quad (\forall x \in X)
\end{aligned}$$

だから Lebesgue 優収束定理 5.59 より,

$$\|g\|_1 = \int_X |g(x)|d\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int_X \varphi_n(x)g(x)d\mu(x)$$

が成り立つ．よって十分大きい $n_0 \in \mathbb{N}$ を取れば,

$$\|g\|_1 - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \left|\int_X \varphi_{n_0}(x)g(x)d\mu(x)\right| \tag{5.117}$$

となる．$\varphi_{n_0} \in C_c(X)$, $\|\varphi_{n_0}\| \leqslant 1$ だから (5.116), (5.117) より,

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 &\leqslant \|f-g\|_1 + \|g\|_1 \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + \left|\int_X \varphi_{n_0}(x)g(x)d\mu(x)\right| \\
&\leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + \left|\int_X \varphi_{n_0}(x)f(x)d\mu(x)\right| + \left|\int_X \varphi_{n_0}(x)(g(x)-f(x))d\mu(x)\right| \\
&\leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + s + \|f-g\|_1 < s + \varepsilon
\end{aligned}$$

となる．$\varepsilon \in (0,\infty)$ は任意なので $\|f\|_1 \leqslant s$ が成り立つ．よって $\|f\|_1 = s$ である． □

定義 5.181 (複素数値位相正則測度)**.** X を局所コンパクト Hausdorff 空間, $\nu : \mathcal{B}_X \to \mathbb{C}$ を複素数値測度 (定義 5.86) とする．ν が位相正則であるとは ν の全変動 (定義 5.110) $|\nu| : \mathcal{B}_X \to [0,\infty)$ が位相正則測度 (定義 5.168) であることを言う．

補題 5.182 (複素数値測度が位相正則であるための条件)**.** X を局所コンパクト Hausdorff 空間, $\nu : \mathcal{B}_X \to \mathbb{C}$ を複素数値測度とする．このとき次は互いに同値である．

(1) ν は位相正則である．
(2) 任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し,

$$|\nu|(B) = \sup\{|\nu|(K) : K \text{ は } B \text{ に含まれるコンパクト集合}\}$$

が成り立つ．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は位相正則測度の内部正則性 (定義 5.168 の (3)) による. (2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つと仮定して (1) が成り立つことを示す. そのためには $|\nu|$ が外部正則性 (定義 5.168 の (2)) を持つことを示せばよいので, 任意の $B \in \mathcal{B}_X$ を取り固定し,

$$|\nu|(B) = \inf\{|\nu|(V) : V \text{ は } B \text{ を含む開集合 }\} \tag{5.118}$$

が成り立つことを示せばよい. (5.118) の右辺を,

$$\alpha := \inf\{|\nu|(V) : V \text{ は } B \text{ を含む開集合 }\}$$

とおく. 有限測度 $|\nu|$ の単調性より $|\nu|(B) \leqslant \alpha$ は成り立つので $\alpha \leqslant |\nu|(B)$ を示せばよい. 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ を取る. (2) が成り立つので,

$$|\nu|(X \backslash B) = \sup\{|\nu|(K) : K \text{ は } X \backslash B \text{ に含まれるコンパクト集合 }\}$$

であるから $X \backslash B$ に含まれるコンパクト集合 K で,

$$|\nu|((X \backslash B) \backslash K) = |\nu|(X \backslash B) - |\nu|(K) < \varepsilon$$

を満たすものが取れる. $V := X \backslash K$ とおけば V は B を含む開集合であり,

$$|\nu|(V) - |\nu|(B) = |\nu|(V \backslash B) = |\nu|((X \backslash B) \backslash K) < \varepsilon$$

である. $\alpha \leqslant |\nu|(V)$ なので,

$$\alpha - |\nu|(B) < \varepsilon$$

である. $\varepsilon \in (0, \infty)$ は任意であるから $\alpha \leqslant |\nu|(B)$ が成り立つ. □

命題 5.183. X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする. このとき次が成り立つ.

(1) $\nu : \mathcal{B}_X \to \mathbb{C}$ が位相正則な複素数値測度ならば任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\alpha\nu : \mathcal{B}_X \ni B \mapsto \alpha\nu(B) \in \mathbb{C}$$

も位相正則な複素数値測度である.

(2) $\nu_1, \nu_2 : \mathcal{B}_X \to \mathbb{C}$ が位相正則な複素数値測度ならば,

$$\nu_1 + \nu_2 : \mathcal{B}_X \ni B \mapsto \nu_1(B) + \nu_2(B) \in \mathbb{C}$$

も位相正則な複素数値測度である.

(3) $\mu : \mathcal{B}_X \to [0, \infty]$ を位相正則測度とし $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ とすると, 複素数値測度

$$\mu_f : \mathcal{B}_X \ni B \mapsto \int_X f(x)\chi_B(x)d\mu(x) \in \mathbb{C}$$

は位相正則である.

(4) $\nu : \mathcal{B}_X \to \mathbb{C}$ を位相正則な複素数値測度, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}_X, |\nu|)$ とすると, 複素数値測度

$$\nu_f : \mathcal{B}_X \ni B \mapsto \int_X f(x)\chi_B(x)d\nu(x) \in \mathbb{C}$$

(複素数値測度による積分の定義 5.116 を参照) は位相正則である.

証明. (1) 全変動の定義 5.110 より,

$$|\alpha\nu|(B) = |\alpha||\nu|(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_X)$$

であるから, 任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し,

$$\begin{aligned}
|\alpha\nu|(B) = |\alpha||\nu|(B) &= |\alpha| \sup\{|\nu|(K) : K \text{ は } B \text{ に含まれるコンパクト集合 }\} \\
&= \sup\{|\alpha||\nu|(K) : K \text{ は } B \text{ に含まれるコンパクト集合 }\} \\
&= \sup\{|\alpha\nu|(K) : K \text{ は } B \text{ に含まれるコンパクト集合 }\}
\end{aligned}$$

である. よって補題 5.182 より $\alpha\nu$ は位相正則である.

(2) 全変動の定義 5.110 より明らかに

$$|\nu_1+\nu_2|(B) \leqslant |\nu_1|(B)+|\nu_2|(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_X) \tag{5.119}$$

が成り立つ．任意の $B \in \mathcal{B}_X$ を取り固定する．$|\nu_1|, |\nu_2|$ の内部正則性 (定義 5.168 の (3)) より各 $n \in \mathbb{N}$ に対しコンパクト集合 $K_n \subseteq B$ で，

$$|\nu_j|(B\backslash K_n)| = |\nu_j|(B) - |\nu_j|(K_n) < \frac{1}{2n} \quad (j=1,2)$$

を満たすものが取れる．(5.119) より，

$$|\nu_1+\nu_2|(B\backslash K_n) \leqslant |\nu_1|(B\backslash K_n) + |\nu_2|(B\backslash K_n) < \frac{1}{n}$$

であるから，

$$|\nu_1+\nu_2|(B) - |\nu_1+\nu_2|(K_n) = |\nu_1+\nu_2|(B\backslash K_n) < \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

である．よって，

$$|\nu_1+\nu_2|(B) \leqslant \sup\{|\nu_1+\nu_2|(K) : K \text{ は } B \text{ に含まれるコンパクト集合 }\}$$

が成り立つ．有限測度 $|\nu_1+\nu_2|$ の単調性より逆の不等式も成り立つので補題 5.182 より $\nu_1+\nu_2$ は位相正則である．

(3) 命題 5.112 より μ_f の全変動は，

$$|\mu_f| = \mu_{|f|} : \mathcal{B}_X \ni B \mapsto \int_X |f(x)|\chi_B(x)d\mu(x) \in [0,\infty)$$

である．任意の $B \in \mathcal{B}_X$ を取り固定する．μ_f が位相正則であることを示すためには補題 5.182 より，

$$\mu_{|f|}(B) = \sup\left\{\mu_{|f|}(K) : K \text{ は } B \text{ に含まれるコンパクト集合}\right\} \tag{5.120}$$

が成り立つことを示せばよい．$\mu(B) < \infty$ の場合を示す．μ の内部正則性 (定義 5.168 の (3)) より B に含まれるコンパクト集合の単調増加列 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，

$$\mu(B\backslash K_n) = \mu(B) - \mu(K_n) < \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

なるものが取れる．このとき，

$$\mu\left(B\backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\right) = \mu(B) - \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(K_n) = 0$$

であるから非負値 Borel 関数の列 $(|f|\chi_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ は，

$$|f(x)|\chi_{K_n}(x) \leqslant |f(x)|\chi_{K_{n+1}}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X),$$
$$|f(x)|\chi_B(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(x)|\chi_{K_n}(x) \quad (\mu\text{-a.e. } x \in X)$$

を満たす．よって単調収束定理 5.40 より，

$$\mu_{|f|}(B) = \int_X |f(x)|\chi_B(x)d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f(x)|\chi_{K_n}(x)d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_{|f|}(K_n)$$

であるから (5.120) が成り立つ．

次に $\mu(B) = \infty$ の場合を示す．定理 5.179 より $C_c(X)$ の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$$

を満たすものが取れる．

$$S := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{supp}(f_n)$$

とおくと,

$$f_n(x)\chi_{X\backslash S}(x)=0\ \ (\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in X)$$

であるから,

$$\|f\chi_{X\backslash S}\|_1=\|(f-f_n)\chi_{X\backslash S}\|_1\leqslant\|f-f_n\|_1\to 0\ \ (n\to\infty).$$

よって,

$$\mu_{|f|}(X\backslash S)=\int_X|f(x)|\chi_{X\backslash S}(x)d\mu(x)=\|f\chi_{X\backslash S}\|_1=0$$

が成り立つので,

$$\mu_{|f|}(B)=\mu_{|f|}(B\cap S)$$

である. 今,

$$S_n:=\bigcup_{k=1}^n\mathrm{supp}(f_k)\ \ (\forall n\in\mathbb{N})$$

とおくと $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はコンパクト集合の単調増加列で $S=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}S_n$ であるから測度の単調収束性 (命題 5.32 の (4)) より

$$\mu_{|f|}(B\cap S)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\mu_{|f|}(B\cap S_n)$$

が成り立つ. ここで各 $n\in\mathbb{N}$ について S_n はコンパクトなので $\mu(B\cap S_n)\leqslant\mu(S_n)<\infty$ である (位相正則測度の定義 5.168 の (1)) から前段で示したことから,

$$\begin{aligned}\mu_{|f|}(B\cap S_n)&=\sup\{\mu_{|f|}(K):K\ \text{は}\ B\cap S_n\ \text{に含まれるコンパクト集合}\}\\&\leqslant\sup\{\mu_{|f|}(K):K\ \text{は}\ B\ \text{に含まれるコンパクト集合}\}\end{aligned}$$

が成り立つ. よって,

$$\mu_{|f|}(B)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\mu_{|f|}(B\cap S_n)\leqslant\sup\{\mu_{|f|}(K):K\ \text{は}\ B\ \text{に含まれるコンパクト集合}\}$$

であるから (5.120) が成り立つ.

(4) 複素数値測度 ν の符号関数 (定義 5.115) を $h\in\mathcal{L}^1(X,\mathcal{B}_X,|\nu|)$ とおくと,

$$\nu_f(B)=\int_X f(x)\chi_B(x)d\nu(x)=\int_X f(x)h(x)\chi_B(x)d|\nu|(x)=|\nu|_{fh}(B)\ \ (\forall B\in\mathcal{B}_X)$$

である. よって $\nu_f=|\nu|_{fh}$ であり $|\nu|:\mathcal{B}_X\to[0,\infty)$ は位相正則測度で $fh\in\mathcal{L}^1(X,\mathcal{B}_X,|\nu|)$ なので (3) より ν_f は位相正則である.

□

命題 5.184. $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間, $\mathcal{L}_b(X,\mathfrak{M})$ を有界可測関数全体に各点ごとの演算と sup ノルムを入れた Banach 空間, $\nu,\nu_1,\nu_2:\mathfrak{M}\to\mathbb{C}$ を複素数値測度とする. このとき,

(1)

$$\mathcal{L}_b(X,\mathfrak{M})\ni f\mapsto\int_X f(x)d\nu(x)\in\mathbb{C}\tag{5.121}$$

(複素数値測度による積分の定義 5.116 を参照) は有界線型汎関数であり作用素ノルムは $|\nu|(X)$ 以下である.

(2) 複素数値測度

$$\alpha\nu:\mathfrak{M}\ni B\mapsto\alpha\nu(B)\in\mathbb{C}$$

と任意の $f\in\mathcal{L}_b(X,\mathfrak{M})$ に対し,

$$\int_X f(x)d(\alpha\nu)(x)=\alpha\int_X f(x)d\nu(x)\tag{5.122}$$

が成り立つ.

(3) 複素数値測度

$$\nu_1 + \nu_2 : \mathfrak{M} \ni B \mapsto \nu_1(B) + \nu_2(B) \in \mathbb{C}$$

と任意の $f \in \mathcal{L}_b(X, \mathfrak{M})$ に対し,

$$\int_X f(x)d(\nu_1 + \nu_2)(x) = \int_X f(x)d\nu_1(x) + \int_X f(x)d\nu_2(x) \tag{5.123}$$

が成り立つ.

証明. (1) (5.121) は明らかに線型である. ν の符号関数 (定義 5.115) を $h \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, |\nu|)$ とおくと $|\nu|$-a.e. $x \in X$ で $|h(x)| = 1$ であり,

$$\int_X f(x)d\nu(x) = \int_X f(x)h(x)d|\nu|(x) \quad (\forall f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, |\nu|))$$

であるから, 任意の $f \in \mathcal{L}_b(X, \mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, |\nu|)$ に対し,

$$\left|\int_X f(x)d\nu(x)\right| \leqslant \int_X |f(x)h(x)|d|\nu|(x) \leqslant \|f\||\nu|(X)$$

($\|f\|$ は f の sup ノルム) である. よって (5.121) は有界線型汎関数でありそのノルムは $|\nu|(X)$ 以下である.

(2) f が可測単関数の場合に (5.122) が成り立つことは明らかである. 系 5.129 より任意の $f \in \mathcal{L}_b(X, \mathfrak{M})$ に対し可測単関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$$

($\|f - f_n\|$ は sup ノルム) なるものが取れるので (1) より,

$$\int_X f(x)d(\alpha\nu)(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d(\alpha\nu)(x) = \lim_{n\to\infty} \alpha \int_X f_n(x)d\nu(x) = \alpha \int_X f(x)d\nu(x)$$

である.

(3) f が可測単関数の場合に (5.123) が成り立つことは明らかである. 系 5.129 より任意の $f \in \mathcal{L}_b(X, \mathfrak{M})$ に対し可測単関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$$

なるものが取れるので (1) より,

$$\begin{aligned}\int_X f(x)d(\nu_1 + \nu_2)(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d(\nu_1 + \nu_2)(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n(x)d\nu_1(x) + \int_X f_n(x)d\nu_2(x)\right) \\ &= \int_X f(x)d\nu_1(x) + \int_X f(x)d\nu_2(x)\end{aligned}$$

である.

□

命題 5.185. X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする. このとき無限遠で消える連続関数の空間 $C_0(X)$ (定義 5.159) において台がコンパクトな連続関数の空間 $C_c(X)$ (定義 5.162) は sup ノルムで稠密である.

証明. 任意の $f \in C_0(X)$, 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ を取る. 定義 5.159 より $(\varepsilon \leqslant |f|)$ はコンパクトだから Urysohn の補題 5.165 より,

$$(\varepsilon \leqslant |f|) \preceq h$$

なる $h \in C_{c,+}(X)$ が取れる. このとき $fh \in C_c(X)$ であり,

$$|f(x) - f(x)h(x)| = |f(x)|(1 - h(x)) \leqslant \varepsilon \quad (\forall x \in X)$$

であるから $\|f - fh\| \leqslant \varepsilon$ である. よって $f \in \overline{C_c(X)}$ である. □

定義 5.186. X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし, X 上の位相正則な複素数値 Borel 測度全体を $M(X)$ と表す. このとき命題 5.183 の (1), (2) より $M(X)$ は $\mathcal{B}_X$ の各元ごとの演算により $\mathbb{C}$ 上の線型空間をなす. そして

$$\|\nu\| := |\nu|(X) \ \ (\forall \nu \in M(X))$$

とおくと, 全変動の定義 5.110 より,

$$\begin{aligned}
&\|\alpha\nu\| = |\alpha\nu|(X) = |\alpha||\nu(X)| = |\alpha|\|\nu\| \ \ (\forall \nu \in M(X), \forall \alpha \in \mathbb{C}),\\
&\|\nu_1 + \nu_2\| = |\nu_1 + \nu_2|(X) \leqslant |\nu_1|(X) + |\nu_2|(X) = \|\nu_1\| + \|\nu_2\| \ \ (\forall \nu_1, \nu_2 \in M(X)),\\
&|\nu(B)| \leqslant |\nu|(B) \leqslant |\nu|(X) = \|\nu\| \ \ (\forall \nu \in M(X), \forall B \in \mathcal{B}_X)
\end{aligned}$$

であるから $\|\cdot\| : M(X) \ni \nu \mapsto \|\nu\| \in [0, \infty)$ はノルムである. このノルムを全変動ノルムと言う.

定理 5.187 (Riesz-Markov-角谷の表現定理 2)**.** X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし, 無限遠で消える連続関数全体に sup ノルムを入れた Banach 空間 $C_0(X)$ (定義 5.159) と位相正則な複素数値 Borel 測度全体に全変動のノルムを入れたノルム空間 $M(X)$ (定義 5.186) を考える. そして任意の $\nu \in M(X)$ に対し $\Phi_\nu \in C_0(X)^*$ を,

$$\Phi_\nu : C_0(X) \ni f \mapsto \int_X f(x) d\nu(x) \in \mathbb{C}$$

とおいて,

$$M(X) \ni \nu \mapsto \Phi_\nu \in C_0(X)^* \tag{5.124}$$

を考える. このとき (5.124) はノルムを保存する線型同型写像である.

証明. 命題 5.184 より (5.124) はノルム減少な線型写像である. まず (5.124) が単射であることを示す. $\nu \in M(X)$ が $\Phi_\nu = 0$ を満たすならば $\nu = 0$ が成り立つことを示せばよい. 任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し $\chi_B \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}_X.|\nu|)$ だから定理 5.179 より $C_c(X)$ の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |\chi_B(x) - f_n(x)| d|\nu|(x) = 0$$

を満たすものが取れる. よって,

$$\begin{aligned}
|\nu(B)| = |\nu(B) - \Phi_\nu(f_n)| &= \left| \int_X \chi_B(x) - f_n(x) d\nu(x) \right|\\
&\leqslant \int_X |\chi_B(x) - f_n(x)| d|\nu|(x) \to 0 \ \ (n \to \infty)
\end{aligned}$$

だから $\nu(B) = 0$ である. よって $\nu = 0$ なので (5.124) は単射である.
次に (5.124) が全射であることとノルム保存であることを示す. 任意の $\Phi \in C_0(X)^*$ を取り固定する. まず,

$$\Lambda_0 : C_{c,+}(X) \to [0, \infty)$$

を,

$$\Lambda_0 f := \sup\{|\Phi(h)| : h \in C_c(X),\ |h(x)| \leqslant f(x)\} \leqslant \|\Phi\|\|f\| \ \ (\forall f \in C_{c,+}(X))$$

と定義する. このとき明らかに,

$$\Lambda_0(\alpha f) = \alpha \Lambda_0 f \ \ (\forall f \in C_{c,+}(X), \forall \alpha \in [0, \infty)) \tag{5.125}$$

が成り立つ. 今, 任意の $f_1, f_2 \in C_{c,+}(X)$ に対し,

$$\Lambda_0(f_1 + f_2) = \Lambda_0 f_1 + \Lambda_0 f_2 \tag{5.126}$$

が成り立つことを示す. 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し,

$$\Lambda_0 f_j - \frac{\varepsilon}{2} < |\Phi(h_j)| \ \ (j = 1, 2)$$

を満たす $h_1, h_2 \in C_c(X)$ を取り, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ で,

$$\alpha_j \Phi(h_j) = |\Phi(h_j)|, \quad |\alpha_j| = 1 \quad (j = 1, 2)$$

を満たすものを取れば, $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 \in C_c(X)$ は,

$$|\alpha_1 h_1(x) + \alpha_2 h_2(x)| \leqslant |h_1(x)| + |h_2(x)| \leqslant f_1(x) + f_2(x) \quad (\forall x \in X)$$

を満たすので,

$$\Lambda_0 f_1 + \Lambda_0 f_2 - \varepsilon < |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| = \alpha_1 \Phi(h_1) + \alpha_2 \Phi(h_2) = \Phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) \leqslant \Lambda_0(f_1 + f_2)$$

となる. よって $\varepsilon \in (0, \infty)$ の任意性より,

$$\Lambda_0 f_1 + \Lambda_0 f_2 \leqslant \Lambda_0(f_1 + f_2)$$

が成り立つ. 逆の不等式を示す. そのためには $|h(x)| \leqslant f_1(x) + f_2(x)$ $(\forall x \in X)$ を満たす任意の $h \in C_c(X)$ を取り,

$$|\Phi(h)| \leqslant \Lambda_0 f_1 + \Lambda_0 f_2 \tag{5.127}$$

が成り立つことを示せばよい.

$$h_j(x) := \begin{cases} \frac{f_j(x)h(x)}{f_1(x)+f_2(x)} & (x \in (0 < f_1 + f_2)) \\ 0 & (x \notin (0 < f_1 + f_2)) \end{cases} \quad (j = 1, 2)$$

とおく. このとき,

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x), \quad |h_j(x)| \leqslant f_j(x), \quad |h_j(x)| \leqslant |h(x)| \quad (\forall x \in X, j = 1, 2)$$

である. h_1, h_2 は開集合 $(0 < f_1 + f_2)$ 上で連続であり, 任意の $x \in X \backslash (0 < f_1 + f_2) \subseteq X \backslash (0 < |h|)$, 任意の $y \in X$ に対し,

$$|h_j(y) - h_j(x)| = |h_j(y)| \leqslant |h(y)| = |h(y) - h(x)| \quad (j = 1, 2)$$

だから h の連続性より h_1, h_2 は $X \backslash (0 < f_1 + f_2)$ の各点において連続である. よって $h_1, h_2 : X \to \mathbb{C}$ は連続関数である. そして $|h_j(x)| \leqslant f_j(x)$ $(\forall x \in X, j = 1, 2)$ より $h_1, h_2 \in C_c(X)$ であるから,

$$|\Phi(h_j)| \leqslant \Lambda_0 f_j \quad (j = 1, 2)$$

が成り立つ. $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$ $(\forall x \in X)$ より,

$$|\Phi(h)| = |\Phi(h_1) + \Phi(h_2)| \leqslant |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| \leqslant \Lambda_0 f_1 + \Lambda_0 f_2$$

であるから (5.127) が成り立ち, 従って $\Lambda_0 f_1 + \Lambda_0 f_2 \leqslant \Lambda_0(f_1 + f_2)$ が成り立つので (5.126) が成り立つ. 今,

$$\Lambda : C_{c,\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}, \quad \Lambda f := \Lambda_0 f_+ - \Lambda_0 f_- \quad (\forall f \in C_{c,\mathbb{R}}(X))$$

とおく*58. このとき (5.125) と (5.126) より Λ は線型汎関数*59であり, $\Lambda f = \Lambda_0 f \geqslant 0$ $(\forall f \in C_{c,+}(X))$ だから Λ は Radon 汎関数である. よって Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.172 より位相正則測度 $\mu : \mathcal{B}_X \to [0, \infty]$ で,

$$\Lambda f = \int_X f(x) d\mu(x) \quad (\forall f \in C_{c,\mathbb{R}}(X))$$

を満たすものが定まる.

$$|\Phi(f)| \leqslant \Lambda_0 |f| = \Lambda |f| = \int_X |f(x)| d\mu(x) = \|f\|_{\mu,1} \quad (\forall f \in C_c(X))$$

*58 ただし $f_\pm = \max(\pm f, 0) = \frac{1}{2}(f \pm |f|) \in C_{c,+}(X)$.

*59 任意の $f, g \in C_{c,\mathbb{R}}(X)$ と任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し $f_+ + g_+ + (f+g)_- = f_- + g_- + (f+g)_+$ であること, $\alpha \geqslant 0$ ならば $(\alpha f)_\pm = \alpha f_\pm$ であり $\alpha < 0$ ならば $(\alpha f)_\pm = (-\alpha) f_\mp$ であることから分かる.

であり,

$$\mathcal{L}^1(X,\mathcal{B}_X,\mu)\ni f\mapsto \|f\|_{\mu,1}=\int_X |f(x)|d\mu(x)\in[0,\infty)$$

は $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{B}_X,\mu)$ 上のセミノルムであるから Hahn-Banach の拡張定理 3.70 より線型汎関数

$$\Psi:\mathcal{L}^1(X,\mathcal{B}_X,\mu)\to\mathbb{C}$$

で,

$$\Psi(f)=\Phi(f)\ \ (\forall f\in C_c(X)),\ \ |\Psi(f)|\leqslant\|f\|_{\mu,1}\ \ (\forall f\in\mathcal{L}^1(X,\mathcal{B}_X,\mu))$$

を満たすものが存在する. ここで $f_1,f_2\in\mathcal{L}^1(X,\mathcal{B}_X,\mu)$ が $[f_1]=[f_2]\in L^1(X,\mathcal{B}_X,\mu)$[*60]を満たすならば,

$$|\Psi(f_1)-\Psi(f_2)|=|\Psi(f_1-f_2)|\leqslant\|f_1-f_2\|_{\mu,1}=0$$

であるから,

$$\widehat{\Psi}:L^1(X,\mathcal{B}_X,\mu)\ni[f]\mapsto\Psi(f)\in\mathbb{C}$$

は well-defined な線型汎関数である. そして

$$|\widehat{\Psi}([f])|=|\Psi(f)|\leqslant\|f\|_{\mu,1}=\|[f]\|_{\mu,1}\ \ (\forall[f]\in L^1(X,\mathcal{B}_X,\mu))$$

であるから $\widehat{\Psi}\in L^1(X,\mathcal{B}_X,\mu)^*$ であり $\|\widehat{\Psi}\|\leqslant 1$ である. よって定理 5.135 より $[g]\in L^\infty(X,\mathcal{B}_X,\mu)$ で,

$$\Psi(f)=\widehat{\Psi}([f])=\int_X f(x)g(x)d\mu(x)\ \ (\forall[f]\in L^1(X,\mathcal{B}_X,\mu)),\ \ \|[g]\|_{\mu,\infty}=\|\Psi\|\leqslant 1 \tag{5.128}$$

を満たすものが存在し,

$$\Phi(f)=\int_X f(x)g(x)d\mu(x)\ \ (\forall f\in C_c(X))$$

である. ここで命題 5.169 の (1) より,

$$\mu(X)=\sup\{\Lambda f:f\preceq X\}=\sup\{\Lambda_0 f:f\preceq X\}\leqslant\|\Phi\|<\infty \tag{5.129}$$

なので μ は有限測度だから $[g]\in L^1(X,\mathcal{B}_X,\mu)$ であり,

$$\mu_g:\mathcal{B}_X\ni B\mapsto\int_X g(x)\chi_B(x)d\mu(x)\in\mathbb{C}$$

なる複素数値測度が定義できる. そして命題 5.183 の (3) より $\mu_g\in M(X)$ である. また定理 5.117 より,

$$\Phi(f)=\int_X f(x)g(x)d\mu(x)=\int_X f(x)d\mu_g(x)=\Phi_{\mu_g}(f)\ \ (\forall f\in C_c(X))$$

であり, Banach 空間 $C_0(X)$ において $C_c(X)$ は稠密 (命題 5.185) で $\Phi,\Phi_{\mu_g}\in C_0(X)^*$ なので $\Phi=\Phi_{\mu_g}$ が成り立つ. 命題 5.112 より $\mu_g\in M(X)$ の全変動ノルムは,

$$\|\mu_g\|=\mu_{|g|}(X)=\int_X|g(x)|d\mu(x)=\|[g]\|_{\mu,1}$$

であり, (5.129) と (5.128) より,

$$\|[g]\|_{\mu,1}\leqslant\|[g]\|_{\mu,\infty}\mu(X)\leqslant\|\Phi\|$$

だから,

$$\begin{aligned}\|\Phi\|=\|\Phi_{\mu_g}\|&=\sup\{\Phi_{\mu_g}(f):f\in C_0(X),\|f\|\leqslant 1\}\\&=\sup\left\{\int_X f(x)g(x)d\mu(x):f\in C_0(X),\|f\|\leqslant 1\right\}\\&\leqslant\int_X|g(x)|d\mu(x)=\mu_{|g|}(X)\leqslant\|\Phi\|\end{aligned}$$

が成り立つ. よって $\|\Phi\|=\|\mu_g\|$ であるから (5.124) は全射かつノルム保存である. □

[*60] $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{B}_X,\mu)$ と $L^1(X,\mathcal{B}_X,\mu)$ の関係については定義 5.126 を参照.

系 5.188. 局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上の位相正則な複素数値 Borel 測度全体に全変動ノルムを入れたノルム空間 $M(X)$ は Banach 空間である.

証明. Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.187 と $C_0(X)$ が Banach 空間であることによる. □

5.9 局所コンパクト Hausdorff 空間における Stone-Weierstrass の定理

定義 5.189 (反対称集合)**.** X をコンパクト Hausdorff 空間とし, sup ノルムによる単位的可換 Banach 環 $C(X)$ の閉部分多元環 $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ を考える. 空でない部分集合 $K \subseteq X$ が $\mathcal{A}$-反対称集合であるとは,

$$f \in \mathcal{A}, f(x) \in \mathbb{R}\ (\forall x \in K) \Rightarrow f(x) = f(y)\ (\forall x, y \in K)$$

が成り立つことを言う. $\mathcal{A}$-反対称集合 $K \subseteq X$ が極大であるとは K を真に含む $\mathcal{A}$-反対称集合が存在しないことを言う.

命題 5.190. X をコンパクト Hausdorff 空間, $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ を閉部分多元環とする. このとき,

(1) 任意の $x \in X$ に対し $\{x\}$ は $\mathcal{A}$-反対称集合である.
(2) 任意の $\mathcal{A}$-反対称集合 $K_0 \subseteq X$ に対し, K_0 を含む $\mathcal{A}$-反対称集合 K で極大なものが存在する.

証明. (1) は自明である. (2) を示す. K_0 を含む $\mathcal{A}$-反対称集合全体を $\{K_j\}_{j \in J}$ とおき $K := \bigcup_{j \in J} K_j$ とおく. K が $\mathcal{A}$-反対称集合であることを示せばよい. $f \in \mathcal{A}$ が K 上で実数値であるとすると任意の $j \in J$ に対し f は K_j 上で実数値であるから f は K_j 上で定数である. そこで $a_j = f(x)\ (\forall x \in K_j)$ とおく. 任意の $x \in K_0$, 任意の $i, j \in J$ に対し $x \in K_i \cap K_j$ であるから $a_i = f(x) = a_j$ である. よって $a = a_j\ (\forall j \in J)$ とおけば $f(x) = a\ (\forall x \in K)$ なので K は $\mathcal{A}$-反対称集合である. □

定理 5.191 (Bishop の定理)**.** X をコンパクト Hausdorff 空間とし, sup ノルムによる単位的可換 Banach 環 $C(X)$ を考える. そして $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ を $C(X)$ の単位元 1 (恒等的に 1 の関数) を含む閉部分多元環とし, 極大な $\mathcal{A}$-反対称集合全体を $\mathcal{K}$ とおく. このとき,

$$\mathcal{A} = \{f \in C(X) : \forall K \in \mathcal{K}, \exists g \in \mathcal{A} \text{ s.t. } f(x) = g(x)\ (\forall x \in K)\}$$

が成り立つ.

証明. $f_0 \in C(X) \backslash \mathcal{A}$ で,

$$\forall K \in \mathcal{K}, \exists g \in \mathcal{A} \text{ s.t. } f_0(x) = g(x)\ (\forall x \in K) \tag{5.130}$$

を満たすものが存在すると仮定して矛盾を導く.

$$\mathcal{A}^{\perp} := \{\varphi \in C(X)^* : \varphi(g) = 0\ (\forall g \in \mathcal{A})\}$$

とおくと $\mathcal{A}^{\perp} \subseteq C(X)^*$ は弱 $*$-位相で閉[*61]の部分空間である. そして Banach-Alaoglu の定理 3.67 より

$$C(X)_1^* = \{\varphi \in C(X)^* : \|\varphi\| \leqslant 1\}$$

は弱 $*$-位相でコンパクトな凸集合であるから,

$$\mathcal{A}_1^{\perp} := \mathcal{A}^{\perp} \cap C(X)_1^*$$

も弱 $*$-位相でコンパクトな凸集合である. よって Krein-Milman の端点定理 3.84 より,

$$\mathcal{A}_1^{\perp} = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}\mathcal{A}_1^{\perp})}^{w^*} \tag{5.131}$$

[*61] φ を $\mathcal{A}^{\perp}$ の弱 $*$-閉包の任意の元とすると命題 1.34 より $\mathcal{A}^{\perp}$ のネット $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ で弱 $*$-位相で $\varphi_\lambda \to \varphi$ となるものが取れる. 弱 $*$-位相の定義 3.66 と命題 3.63 より任意の $g \in \mathcal{A}$ に対し $\varphi(g) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(g) = 0$ であるから $\varphi \in \mathcal{A}^{\perp}$ である. ゆえに $\mathcal{A}^{\perp}$ は弱 $*$-位相で閉である.

が成り立つ.*62 $f_0 \in C(X)\backslash\mathcal{A}$ より f_0 を代表元とする商 Banach 空間の元 $[f_0] \in C(X)/\mathcal{A}$ (定義 3.9) は $[f_0] \neq 0$ を満たす. よって Hahn-Banach の拡張定理 3.72 よりノルムが 1 以下の $\Phi \in (C(X)/\mathcal{A})^*$ で $\Phi([f_0]) \neq 0$ を満たすものが取れる. そこで線型汎関数 $\varphi : C(X) \ni g \mapsto \Phi([g]) \in \mathbb{C}$ を考えれば,

$$|\varphi(g)| = |\Phi([g])| \leqslant \|[g]\| \leqslant \|g\| \ \ (\forall g \in C(X)), \ \ \varphi(g) = 0 \ \ (\forall g \in \mathcal{A})$$

であり $\varphi(f_0) = \Phi([f_0]) \neq 0$ であるから,

$$\varphi \in \mathcal{A}_1^{\perp}, \ \ \varphi(f_0) \neq 0$$

である. よって (5.131) より,

$$\varphi_0 \in \mathrm{ext}\mathcal{A}_1^{\perp}, \ \ \varphi_0(f_0) \neq 0 \tag{5.132}$$

なる φ_0 が取れる. この φ_0 を以後固定する. まず $\|\varphi_0\| = 1$ である. 実際もし $\|\varphi_0\| < 1$ ならば,

$$\varphi_0 = \|\varphi_0\|\frac{1}{\|\varphi_0\|}\varphi_0 + (1 - \|\varphi_0\|)0$$

であり, $\frac{1}{\varphi_0}\varphi_0, 0 \in \mathcal{A}_1^{\perp}$ だから端点の定義 3.81 より $\varphi_0 = \frac{1}{\|\varphi_0\|}\varphi_0 = 0$ となり矛盾する. よって $\|\varphi_0\| = 1$ である. Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.187 より位相正則な複素数値 Borel 測度 $\nu \in M(X)$ で,

$$\varphi_0(g) = \int_X g(x)d\nu(x) \ \ (\forall g \in C(X)), \ \ \|\nu\| = |\nu|(X) = \|\varphi_0\| = 1 \tag{5.133}$$

を満たすものが取れる. 今, $|\nu|(U) = 0$ を満たす X の開集合 U 全体の合併を U_0 とおくと $|\nu|$ の内部正則性 (定義 5.168 の (3)) より $|\nu|(U_0) = 0$ である.*63そこでコンパクト集合 $K := X\backslash U_0$ を定義する. このとき,

$$|\nu|(K) = |\nu|(X\backslash U_0) = |\nu|(X) = 1$$

であり U_0 の定義より次が言える.

$$\text{開集合 } U \subseteq X \text{ が } |\nu|(U) = 0 \text{ を満たすならば } U \subseteq X\backslash K. \tag{5.134}$$

今, K が $\mathcal{A}$-反対称集合であることを示す. $f \in \mathcal{A}$ が K 上で実数値であるとして f が定数関数であることを示す. コンパクト性と f の連続性より f は有界なので必要ならば実数を足したり掛けたりして*64最初から,

$$0 < f(x) < 1 \ \ (\forall x \in K) \tag{5.135}$$

であるとして示せば十分である. 複素数値測度

$$\nu_f : \mathcal{B}_X \ni B \mapsto \int_X f(x)\chi_B(x)d\nu(x) \in \mathbb{C},$$
$$\nu_{1-f} : \mathcal{B}_X \ni B \mapsto \int_X (1 - f(x))\chi_B(x)d\nu(x) \in \mathbb{C}$$

を考えると命題 5.183 の (4) より $\nu_f, \nu_{1-f} \in M(X)$ であり, 全変動ノルムは (5.135) より

$$\|\nu_f\| = |\nu_f|(X) = |\nu|_{|f|}(X) = \int_X f(x)\chi_K(x)d|\nu|(x) > 0,$$
$$\|\nu_{1-f}\| = |\nu_{1-f}|(X) = |\nu|_{|1-f|}(X) = \int_X (1 - f(x))\chi_K(x)d|\nu|(x) > 0,$$
$$\|\nu_f\| + \|\nu_{1-f}\| = \int_X (f(x) + 1 - f(x))\chi_K(x)d|\nu|(x) = |\nu|(K) = 1$$

*62 ただし $\mathrm{ext}(\mathcal{A}_1^{\perp})$ は $\mathcal{A}_1^{\perp}$ の端点全体 (定義 3.81) であり $\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(\mathcal{A}_1^{\perp}))$ はその凸包, $\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}\mathcal{A}_1^{\perp})}^{w^*}$ はさらにその弱 $*$-位相による閉包である.

*63 任意のコンパクト集合 $C \subseteq U_0$ に対し U_0 の定義とコンパクト性より有限個の $|\nu|$-零開集合 $U_1, \cdots, U_n$ が取れて $C \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_j$ となる. よって $|\nu(C)| = 0$ だから内部正則性より $|\nu|(U_0) = 0$ である.

*64 $\|f\| < M$ なる正実数 M に対し $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2M}f(x) < \frac{1}{2}$ $(\forall x \in K)$ だから $0 < \frac{1}{2M}f(x) + \frac{1}{2} < 1$ $(\forall x \in K)$ である.

である．そこで，

$$\lambda := \|\nu_f\| \in (0,1)$$

とおき，

$$\nu_1 := \frac{1}{\lambda}\nu_f \in M(X),\ \ \nu_2 := \frac{1}{1-\lambda}\nu_{1-f} \in M(X)$$

とおけば，

$$\|\nu_1\| = \|\nu_2\| = 1,\ \ \lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2 = \nu_f + \nu_{1-f} = \nu \tag{5.136}$$

である．今, Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.187 により $\varphi_1, \varphi_2 \in C(X)$ で，

$$\varphi_j(g) = \int_X g(x)d\nu_j(x)\ \ (\forall g \in C(X),\ j = 1,2)$$

を満たすものを取れば (5.136) より，

$$\|\varphi_1\| = \|\varphi_2\| = 1,\ \ \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2 = \varphi_0 \tag{5.137}$$

である．そして任意の $g \in \mathcal{A}$ に対し $fg, (1-f)g \in \mathcal{A}$ だから定理 5.117 より，

$$\begin{aligned}
\varphi_1(g) &= \frac{1}{\lambda}\int_X g(x)d\nu_f(x) = \frac{1}{\lambda}\int_X f(x)g(x)d\nu(x) = \frac{1}{\lambda}\varphi_0(fg) = 0,\\
\varphi_2(g) &= \frac{1}{1-\lambda}\int_X g(x)d\nu_{1-f}(x) = \frac{1}{1-\lambda}\int_X (1-f(x))g(x)d\nu(x) = \frac{1}{1-\lambda}\varphi_0((1-f)g) = 0
\end{aligned}$$

が成り立つので $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}^\perp$ である．よって (5.137) と $\varphi_0 \in \mathrm{ext}\mathcal{A}_1^\perp$ より，

$$\varphi_1 = \varphi_0 = \varphi_2,$$

従って Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.187 より，

$$\nu_1 = \nu = \nu_2$$

が成り立つ．これより，

$$\nu = \nu_1 = \frac{1}{\lambda}\nu_f$$

だから，

$$\nu_{\lambda-f}(B) = \int_X (\lambda - f(x))\chi_B(x)d\nu(x) = \lambda\nu(B) - \nu_f(B) = 0\ \ (\forall B \in \mathcal{B}_X)$$

である．よって $\nu_{\lambda-f} = 0$ なので，

$$0 = \|\nu_{\lambda-f}\| = |\nu_{\lambda-f}|(X) = |\nu|_{|\lambda-f|}(X) = \int_X |\lambda - f(x)|d|\nu|(x)$$

である．命題 5.46 より，

$$|\nu|((|\lambda - f| > 0)) = 0$$

であるから (5.134) より $(|\lambda - f| > 0) \subseteq X\backslash K$, すなわち，

$$f(x) = \lambda\ \ (\forall x \in K)$$

である．よって f は K 上で定数関数であるので K は $\mathcal{A}$-反対称集合である．今, 命題 5.190 の (2) より K を含む極大な $\mathcal{A}$-反対称集合 $K_1 \in \mathcal{K}$ が取れる．そして (5.130) より $g \in \mathcal{A}$ で $f_0(x) = g(x)$ $(\forall x \in K_1)$ なるものが取れる．特に $f_0(x) = g(x)$ $(\forall x \in K)$ である．(5.132) より，

$$\begin{aligned}
0 \neq \varphi_0(f_0) &= \int_X f_0(x)d\nu(x) = \int_X f_0(x)\chi_K(x)d\nu(x)\\
&= \int_X g(x)\chi_K(x)d\nu(x) = \int_X g(x)d\nu(x) = \varphi_0(g) = 0
\end{aligned}$$

となる．よって矛盾を得た． □

系 5.192 (Stone-Weierstrass の定理)**.** X をコンパクト Hausdorff 空間とし, sup ノルムによる単位的可換 C^*-環 $C(X)$ とその部分 $*$-環 $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ を考える. このときもし,

(1) $\mathcal{A}$ は $C(X)$ の単位元 1 (恒等的に 1 の関数) を含む.
(2) $x \neq y$ を満たす任意の $x, y \in X$ に対し $f(x) \neq f(y)$ を満たす $f \in \mathcal{A}$ が存在する.

が成り立つならば $\mathcal{A}$ は $C(X)$ で稠密である.

証明. 任意の $\overline{\mathcal{A}}$-反対称集合が一点集合であることを示す. $K \subseteq X$ を任意の $\overline{\mathcal{A}}$-反対称集合とする. 任意の $x, y \in K$ を取る. $\mathcal{A}$ は部分 $*$-環なので任意の $f \in \mathcal{A}$ に対し $\overline{f} \in \mathcal{A}$ であるから,

$$\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \overline{f}) \in \mathcal{A}, \quad \mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2i}(f - \overline{f}) \in \mathcal{A}$$

である. $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{A}$ は K 上でもちろん実数値なので K が $\overline{\mathcal{A}}$-反対称集合であることから,

$$\mathrm{Re}(f(x)) = \mathrm{Re}(f(y)), \quad \mathrm{Im}(f(x)) = \mathrm{Im}(f(y))$$

である. よって,

$$f(x) = f(y) \quad (\forall f \in \mathcal{A})$$

が成り立つので (2) より $x = y$ である. ゆえに K は一点集合である. これより極大な $\overline{\mathcal{A}}$-反対称集合全体 $\mathcal{K}$ は,

$$\mathcal{K} = \{\{x\} : x \in X\}$$

であり, 任意の $f \in C(X)$ と任意の $x \in X$ に対し f と $f(x)1 \in \overline{\mathcal{A}}$ は $\{x\}$ 上で一致するので Bishop の定理 5.191 より $f \in \overline{\mathcal{A}}$ である. よって $\overline{\mathcal{A}} = C(X)$ である. □

命題 5.193 (無限遠で消える連続関数環 $C_0(X)$ と一点コンパクト化)**.** X を局所コンパクト Hausdorff 空間, $\widetilde{X} := X \cup \{\infty\}$ を X の一点コンパクト化 (定理 1.82) とする. そして任意の $f : X \to \mathbb{C}$ に対し $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \mathbb{C}$ を,

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in X) \\ 0 & (x = \infty) \end{cases}$$

と定義する. このとき $f : X \to \mathbb{C}$ に対し,

$$f \in C_0(X) \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{f} \in C(\widetilde{X})$$

が成り立つ.

証明. $f \in C_0(X)$ とする. X の位相は一点コンパクト化 $\widetilde{X}$ の位相の相対位相であるので $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \mathbb{C}$ は $\widetilde{X}$ の開集合 X 上で連続である. また任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し $C_0(X)$ の定義 5.159 より,

$$K := \{x \in X : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

は X のコンパクト集合, 従って $\widetilde{X}$ のコンパクト集合であるから $\widetilde{X}$ の閉集合である. よって $\widetilde{X} \backslash K$ は $\infty \in \widetilde{X}$ の開近傍であり任意の $x \in \widetilde{X} \backslash K$ に対し,

$$|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(\infty)| = |\widetilde{f}(x)| < \varepsilon$$

であるから $\widetilde{f}$ は ∞ において連続である. よって $\widetilde{f} \in C(\widetilde{X})$ である.
逆に $\widetilde{f} \in C(\widetilde{X})$ とすると,

$$\{x \in X : |f(x)| \geqslant \varepsilon\} = \{x \in \widetilde{X} : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

はコンパクトなので $f \in C_0(X)$ である. □

定理 5.194 (Stone-Weierstrass の定理)**.** X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし, sup ノルムによる可換 C^*-環 $C_0(X)$ とその部分 $*$-環 $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ を考える. このときもし,

(1) 任意の $x \in X$ に対し $f(x) \neq 0$ を満たす $f \in \mathcal{A}$ が存在する.

(2) $x \neq y$ を満たす任意の $x, y \in X$ に対し $f(x) \neq f(y)$ を満たす $f \in \mathcal{A}$ が存在する.

が成り立つならば $\mathcal{A}$ は $C_0(X)$ で稠密である.

証明. $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ を一点コンパクト化とし, 任意の $f : X \to \mathbb{C}$ に対し $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \mathbb{C}$ を f の拡張で $\widetilde{f}(\infty) = 0$ を満たすものとする. 命題 5.193 より任意の $f \in C_0(X)$ に対し $\widetilde{f} \in C(\widetilde{X})$ である. $C(\widetilde{X})$ の単位元 $1 \in C(\widetilde{X})$ (恒等的に 1 の関数) に対し,

$$\mathcal{B} := \widetilde{\mathcal{A}} + \mathbb{C}1 = \{\widetilde{f} + \alpha 1 : f \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{C}\} \subseteq C(\widetilde{X})$$

とおけば $\mathcal{B}$ は明らかに $C(\widetilde{X})$ の部分 $*$-環であり $C(\widetilde{X})$ の単位元 1 を含む. そして (2) より $x \neq y$ を満たす任意の $x, y \in X$ に対し $\widetilde{f}(x) = f(x) \neq f(y) = \widetilde{f}(y)$ を満たす $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{B}$ が存在し, (1) より任意の $x \in X$ に対し $\widetilde{f}(x) = f(x) \neq 0 = \widetilde{f}(\infty)$ を満たす $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{B}$ が存在する. よって系 5.192 より $\mathcal{B}$ は $C(\widetilde{X})$ において稠密である. よって任意の $f \in C_0(X)$, 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し $g \in \mathcal{A}$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ で,

$$\|\widetilde{f} - (\widetilde{g} + \alpha 1)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たすものが取れる. このとき,

$$|\alpha| = |\widetilde{f}(\infty) - (\widetilde{g}(\infty) + \alpha)| \leqslant \|\widetilde{f} - (\widetilde{g} + \alpha 1)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

であるから任意の $x \in X$ に対し,

$$|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - (g(x) + \alpha)| + |\alpha| \leqslant \|\widetilde{f} - (\widetilde{g} + \alpha 1)\| + |\alpha| < \varepsilon$$

である. よって $\|f - g\| < \varepsilon$ であるので $\mathcal{A}$ は $C_0(X)$ で稠密である. □

命題 5.195. X を第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間とする. このとき sup ノルムによる C^*-環 $C_0(X)$ は可分である.

証明. 定理 1.79 より X の開集合の可算基 $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ として任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\overline{V_n}$ がコンパクトであるものが取れる. 今, $\overline{V_n} \cap \overline{V_m} = \varnothing$ を満たす任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対し Urysohn の補題 5.165 により

$$\overline{V_n} \preceq f_{n,m} \preceq X \backslash \overline{V_m}$$

なる $f_{n,m} \in C_{c,+}(X)$ を取り, $\overline{V_n} \cap \overline{V_m} = \varnothing$ を満たす任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対し $f_{n,m} = 0$ とおく. こうして可算集合 $\{f_{n,m}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_{c,\mathbb{R}}(X)$ を定義し, さらに可算集合

$$\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} := \{\{f_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}} \text{ の有限個の元の積 }\} \subseteq C_{c,\mathbb{R}}(X)$$

を定義する. このとき,

$$\mathcal{A} := \mathrm{span}\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k : \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C} \right\} \subseteq C_c(X) \subseteq C_0(X)$$

は $C_0(X)$ の部分 $*$-環であり, $\mathbb{C}$ で稠密な可算集合 $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}} := \{q + ir : q, r \in \mathbb{Q}\}$ に対し,

$$\mathcal{A}_0 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k : \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{Q}_{\mathbb{C}} \right\}$$

は $\mathcal{A}$ で稠密な可算集合である. よって $\mathcal{A}$ が $C_0(X)$ で稠密であることを示せば可算集合 $\mathcal{A}_0$ が $C_0(X)$ で稠密であることを示せたことになる. Stone-Weierstrass の定理 5.194 を用いる. 互いに異なる任意の $x, y \in X$ に対し定理 1.79 より

$$x \in V_n, \quad y \in V_m, \quad \overline{V_n} \cap \overline{V_m} = \varnothing$$

を満たすものが取れる. よって $f_{n,m} \in \mathcal{A}$ は $f_{n,m}(x) = 1$, $f_{n,m}(y) = 0$ を満たす. これより $C_0(X)$ の部分 $*$-環 $\mathcal{A}$ は Stone-Weierstrass の定理 5.194 の条件 (1), (2) を満たすので $\mathcal{A}$ は $C_0(X)$ で稠密である. ゆえに可算集合 $\mathcal{A}_0$ は $C_0(X)$ で稠密なので $C_0(X)$ は可分である. □

命題 5.196. X を第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間とし, $\mu : \mathcal{B}_X \to [0,\infty]$ を位相正則測度とする. このとき任意の $p \in [1,\infty)$ に対し Banach 空間 $L^p(X,\mathcal{B}_X,\mu)$ は可分である.

証明. 命題 5.175 より閉包がコンパクトな開集合の列 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n, \quad U_n \subseteq U_{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{5.138}$$

を満たすものが取れる. 各 $n \in \mathbb{N}$ について $\overline{U_n}$ はコンパクトだから命題 5.195 より sup ノルムによる Banach 空間 $C(\overline{U_n})$ は可分である. よって稠密な可算部分集合 $\{g_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq C(\overline{U_n})$ を持つ. 今, 任意の $[f] \in L^p(X,\mathcal{B}_X,\mu)$, 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ を取る. 定理 5.179 より $g \in C_c(X)$ で,

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.139}$$

を満たすものが取れる. $\mathrm{supp}(g)$ はコンパクトだから (5.138) より $\mathrm{supp}(g) \subseteq U_n$ なる $n \in \mathbb{N}$ が取れて, $\overline{U_n}$ のコンパクト性より $\mu(\overline{U_n}) < \infty$ であることと $\{g_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq C(\overline{U_n})$ の稠密性より,

$$\sup_{x\in\overline{U_n}} |g(x) - g_{n,m}(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(\overline{U_n})^{\frac{1}{p}}} \tag{5.140}$$

を満たすものが取れる. $g_{n,m} \in C(\overline{U_n})$ の X 上への 0 拡張 ($X\backslash\overline{U_n}$ 上で 0 として X 上の関数に拡張したもの) を $\widetilde{g_{n,m}}$ と表すと (5.140) より,

$$\|g - \widetilde{g_{n,m}}\|_p = \left(\int_{\overline{U_n}} |g(x) - g_{n,m}(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

となるから (5.139) より,

$$\|f - \widetilde{g_{n,m}}\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - \widetilde{g_{n,m}}\|_p < \varepsilon$$

となる. よって $L^p(X,\mathcal{B}_X,\mu)$ において可算集合 $\{\widetilde{g_{n,m}}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ は稠密であるので $L^p(X,\mathcal{B}_X,\mu)$ は可分である. □

5.10 有界閉方体上の Fréchet 空間値連続関数の Riemann 積分

定義 5.197 (Euclid 空間の有界閉方体の分割)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の有界閉方体 $I = \prod_{j=1}^N [a_j,b_j] \subseteq \mathbb{R}^N$ を考える. I の分割とは I の各辺 $[a_j,b_j]$ に有限個の点を定めるものである. I の分割 Δ が定める点 (分点)

$$a_j = t_{j,0} < t_{j,1} < \cdots < t_{j,n_j-1} < t_{j,n_j} = b_j \quad (j = 1,\cdots,N)$$

に対し,

$$K(\Delta) := \prod_{j=1}^N \{t_{j,k_1},\cdots,t_{j,n_j}\} \subseteq \prod_{j=1}^N [a_j,b_j] = I$$

とおき, 各 $k = (t_{1,k_1},\cdots,t_{N,k_N}) \in K(\Delta)$ に対し,

$$I_k := \prod_{j=1}^N [t_{j,k_j-1}, t_{j,k_j}], \quad v(I_k) := \prod_{j=1}^N (t_{j,k_j} - t_{j,k_j-1})$$

とおく. 各 I_k ($k \in K(\Delta)$) を分割 Δ よって定まる小区間と言い $v(I_k)$ を I_k の体積と言う. そして,

$$d(\Delta) := \max\left\{t_{j,k_j} - t_{j,k_j-1} : j \in \{1,\cdots,N\},\ k_j \in \{1,\cdots,n_j\}\right\}$$

を分割 Δ の幅と言う.

定義 5.198 (Euclid 空間の有界閉方体の分割からなる有向集合)**.** I を Euclid 空間の有界閉方体とする. I の分割 Δ と Δ' に対し, Δ と Δ' が等しいとは, Δ が定める分点と Δ' が定める分点が一致すること, すなわち,

$$K(\Delta) = K(\Delta')$$

が成り立つことを言う (定義 5.197 を参照). また Δ' が Δ の細分であるとは, Δ が定める分点が全て Δ' が定める分点でもあること, すなわち,

$$K(\Delta) \subseteq K(\Delta')$$

が成り立つことを言う. 今, $\mathcal{D}(I)$ を I の分割全体とする. そして $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{D}(I)$ に対し,

$$\Delta_1 \leqslant \Delta_2 \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \Delta_2 \text{ は } \Delta_1 \text{ の細分}$$

として $\mathcal{D}(I)$ の順序 $\leqslant$ を定義する. 任意の $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{D}(I)$ に対し Δ_1, Δ_2 が定める分点全てを分点として持つ分割 $\Delta_3 \in \mathcal{D}(I)$ を考えれば Δ_3 は Δ_1, Δ_2 の細分であるので, $\mathcal{D}(I)$ は順序 $\leqslant$ によって有向集合 (定義 1.19) である.

定義 5.199 (Euclid 空間の有界閉方体の分割の代表点)**.** I を Euclid 空間の有界閉方体とし, $\Delta \in \mathcal{D}(I)$ とする. 各 $k \in K(\Delta)$ に対し小区間 I_k の点 $\xi_k \in I_k$ (定義 5.197 を参照) が与えられているとする. このとき $(\xi_k)_{k\in K(\Delta)}$ を分割 Δ の代表点と言う.

定義 5.200 (Riemann 和)**.** I を Euclid 空間の有界閉方体, V を線型空間とし, 関数 $f : I \to V$ を考える. 分割 $\Delta \in \mathcal{D}(I)$ とその代表点 $(\xi_k)_{k\in K(\Delta)}$ (定義 5.199) に対し,

$$S(f, \Delta, (\xi_k)_{k\in K(\Delta)}) := \sum_{k\in K(\Delta)} f(\xi_k)v(I_k) \in V$$

を, 分割 Δ とその代表点 $(\xi_k)_{k\in K(\Delta)}$ によって定まる f の Riemann 和と言う. 各分割 $\Delta \in \mathcal{D}(I)$ に対しその代表点 $(\xi_k)_{k\in K(\Delta)}$ を定めることにより, Riemann 和からなる V のネット

$$(S(f, \Delta, (\xi_k)_{k\in K(\Delta)}))_{\Delta\in\mathcal{D}(I)}$$

ができる.

補題 5.201. (X, d) をコンパクト距離空間, F をセミノルム空間 (定義 3.57) とし, $f : X \to F$ を連続関数, $p : F \to [0, \infty)$ を連続なセミノルムとする. このとき,

$$\forall\varepsilon \in (0, \infty), \exists\delta \in (0, \infty) \text{ s.t. } \forall x, y \in X(d(x, y) < \delta), p(f(y) - f(x)) < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ を取り固定する. 任意の $x \in X$ に対し f の x における連続性と p の 0 における連続性より $\delta_x \in (0, \infty)$ が存在し,

$$x' \in B(x, \delta_x) \quad\Rightarrow\quad p(f(x') - f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.141}$$

が成り立つ. $X = \bigcup_{x\in X} B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$ であり X はコンパクトなので有限個の $x_1, \cdots, x_n \in X$ が取れて,

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} B\left(x_k, \frac{\delta_{x_k}}{2}\right) \tag{5.142}$$

となる. 今,

$$\delta := \min\left(\frac{\delta_{x_1}}{2}, \cdots, \frac{\delta_{x_n}}{2}\right) \tag{5.143}$$

とおき, $d(x, y) < \delta$ なる任意の $x, y \in X$ を取る. (5.142) より, $x \in B(x_k, \frac{\delta_{x_k}}{2})$ なる $k \in \{1, \cdots, n\}$ が取れて (5.143) より,

$$d(y, x_k) \leqslant d(y, x) + d(x, x_k) < \delta + \frac{\delta_{x_k}}{2} \leqslant \delta_{x_k}$$

だから,

$$x, y \in B(x_k, \delta_{x_k})$$

である. よって (5.141) より,

$$p(f(y) - f(x)) \leqslant p(f(y) - f(x_k)) + p(f(x_k) - f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる. ゆえに任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し $\delta \in (0,\infty)$ が存在し,

$$d(x,y) < \delta \quad\Rightarrow\quad p(f(y)-f(x)) < \varepsilon$$

が成り立つ. □

定理 5.202. I を Euclid 空間の有界閉方体, F を Fréchet 空間 (定義 3.86), $f: I \to F$ を連続関数とし, 各分割 $\Delta \in \mathcal{D}(I)$ に対し代表点 $(\xi_k)_{k\in K(\Delta)}$ を定め, Riemann 和

$$S(f,\Delta,(\xi_k)_{k\in K(\Delta)}) = \sum_{k\in K(\Delta)} f(\xi_k)v(I_k) \in F$$

を考える. このとき分割の幅 $d(\Delta)$ (定義 5.197) に対し,

(1)

$$S := \lim_{d(\Delta)\to+0} S(f,\Delta,(\xi_k)_{k\in K(\Delta)}) \in F$$

が存在する. すなわち $0 \in F$ の任意の近傍 U に対し $\delta \in (0,\infty)$ が存在し,

$$d(\Delta) < \delta \quad\Rightarrow\quad S - S(f,\Delta,(\xi_k)_{k\in K(\Delta)}) \in U$$

が成り立つ.

(2) (1) における Riemann 和の収束点 S は各分割の代表点の取り方によらない. すなわち各分割 $\Delta \in \mathcal{D}(I)$ に対し $(\xi_k)_{k\in K(\Delta)}$ とは別に代表点 $(\eta_k)_{k\in K(\Delta)}$ を定めたとき,

$$\lim_{d(\Delta)\to+0} S(f,\Delta,(\eta_k)_{k\in K(\Delta)}) = \lim_{d(\Delta)\to+0} S(f,\Delta,(\xi_k)_{k\in K(\Delta)})$$

が成り立つ.

証明. (1) $\mathcal{P}$ を F のセミノルム位相を定めるセミノルムの分離族 (定義 3.57) とする. このとき $0 \in F$ の任意の近傍 U に対し命題 3.59 より $\varepsilon \in (0,\infty)$ と有限個の $p_1,\cdots,p_n \in \mathcal{P}$ が存在し,

$$\bigcap_{j=1}^{n} (p_j < \varepsilon) \subseteq U \tag{5.144}$$

が成り立つ. 補題 5.201 より $\delta \in (0,\infty)$ が存在し,

$$|x-y| < \delta \quad\Rightarrow\quad p_j(f(y)-f(x)) < \frac{\varepsilon}{2v(I)} \quad (j=1,\cdots,n) \tag{5.145}$$

となるから $d(\Delta) < \delta$ を満たす任意の $\Delta \in \mathcal{D}(I)$ と Δ の細分 $\Delta' \geqslant \Delta$ に対し,

$$p_j\left(S(f,\Delta,(\xi_k)_{k\in K(\Delta)}) - S(f,\Delta',(\xi_k)_{k\in K(\Delta')})\right) \leqslant \sum_{k\in K(\Delta')} \frac{\varepsilon}{2v(I)} v(I_k) = \frac{\varepsilon}{2} \quad (j=1,\cdots,n)$$

となる. よって $d(\Delta), d(\Delta') < \delta$ を満たす任意の $\Delta, \Delta' \in \mathcal{D}(I)$ に対し, 細分 $\Delta'' \geqslant \Delta, \Delta'$ を取れば,

$$\begin{aligned}
p_j\left(S(f,\Delta,(\xi_k)_{k\in K(\Delta)}) - S(f,\Delta',(\xi_k)_{k\in K(\Delta')})\right) &\leqslant p_j\left(S(f,\Delta,(\xi_k)_{k\in K(\Delta)}) - S(f,\Delta'',(\xi_k)_{k\in K(\Delta'')})\right) \\
&\quad + p_j\left(S(f,\Delta'',(\xi_k)_{k\in K(\Delta'')}) - S(f,\Delta',(\xi_k)_{k\in K(\Delta')})\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (j=1,\cdots,n)
\end{aligned}$$

となるので,

$$S(f,\Delta,(\xi_k)_{k\in K(\Delta)}) - S(f,\Delta',(\xi_k)_{k\in K(\Delta')}) \in \bigcap_{j=1}^{n}(p_j < \varepsilon) \subseteq U \quad (\forall \Delta,\Delta' \in \mathcal{D}(I) : d(\Delta), d(\Delta') < \delta)$$

が成り立つ. これより I の分割の列 $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を,

$$\lim_{n\to\infty} d(\Delta_n) = 0$$

となるように取り,

$$d(\Delta_n) < \delta \quad (\forall n \geqslant n_0)$$

なる $n_0 \in \mathbb{N}$ を取れば,

$$S(f, \Delta_n, (\xi_k)_{k \in K(\Delta_n)}) - S(f, \Delta_m, (\xi_k)_{k \in K(\Delta_m)}) \in U$$

となるから F の列 $\big(S(f, \Delta_n, (\xi_k)_{k \in K(\Delta_n)})\big)_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列 (定義 3.85) である．よって Fréchet 空間の定義 3.86 より,

$$S := \lim_{n \to \infty} S(f, \Delta_n, (\xi_k)_{k \in K(\Delta_n)}) \in F$$

が存在する．

今, 改めて $0 \in F$ の任意の近傍 U を取り, $0 \in F$ の絶対凸近傍 W で,

$$W + W \subseteq U$$

を満たすものを取る．このとき上段の結果より $\delta \in (0, \infty)$ と $n \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$\begin{aligned} &S(f, \Delta, (\xi_k)_{k \in K(\Delta)}) - S(f, \Delta', (\xi_k)_{k \in K(\Delta')}) \in W \quad (\forall \Delta, \Delta' \in \mathcal{D}(I) : d(\Delta), d(\Delta) < \delta), \\ &d(\Delta_n) < \delta, \quad S - S(f, \Delta_n, (\xi_k)_{k \in K(\Delta_n)}) \in W \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} S - S(f, \Delta, (\xi_k)_{k \in K(\Delta)}) &= S - S(f, \Delta_n, (\xi_k)_{k \in K(\Delta_n)}) \\ &\quad + S(f, \Delta_n, (\xi_k)_{k \in K(\Delta_n)}) - S(f, \Delta, (\xi_k)_{k \in K(\Delta)}) \\ &\in W + W \subseteq U \end{aligned}$$

となる．よって,

$$S = \lim_{d(\Delta) \to +0} S(f, \Delta, (\xi_k)_{k \in K(\Delta)})$$

が成り立つ．

(2) 各分割 $\Delta \in \mathcal{D}(I)$ に対し $(\xi_k)_{k \in K(\Delta)}$ とは別に代表点 $(\eta_k)_{k \in K(\Delta)}$ を取る．$0 \in F$ の任意の近傍 U に対し (5.144) を満たす $\varepsilon \in (0, \infty)$ と $p_1, \cdots, p_n \in \mathcal{P}$ を取る．そして (5.145) を満たす $\delta \in (0, \infty)$ を取り, $d(\Delta) < \delta$ を満たす $\Delta \in \mathcal{D}(I)$ を取れば,

$$p_j\left(S(f, \Delta, (\xi_k)_{k \in K(\Delta)}) - S(f, \Delta, (\eta_k)_{k \in K(\Delta)})\right) \leqslant \sum_{k \in K(\Delta)} \frac{\varepsilon}{v(I)} v(I_k) = \varepsilon \quad (j = 1, \cdots, n)$$

となる．よって,

$$S(f, \Delta, (\xi_k)_{k \in K(\Delta)}) - S(f, \Delta, (\eta_k)_{k \in K(\Delta)}) \in \bigcap_{j=1}^{n} (p_j < \varepsilon) \subseteq U$$

であるから,

$$\lim_{d(\Delta) \to +0} \left(S(f, \Delta, (\xi_k)_{k \in K(\Delta)}) - S(f, \Delta, (\eta_k)_{k \in K(\Delta)})\right) = 0$$

が成り立つ．ゆえに,

$$\lim_{d(\Delta) \to +0} S(f, \Delta, (\eta_k)_{k \in K(\Delta)}) = \lim_{d(\Delta) \to +0} S(f, \Delta, (\xi_k)_{k \in K(\Delta)})$$

が成り立つ．

□

定義 5.203 (有界閉方体上で定義された Fréchet 空間値連続関数の Riemann 積分)**.** I を Euclid 空間の有界閉方体, F を Fréchet 空間とし, $f : I \to F$ を連続関数とする．このとき定理 5.202 より Riemann 和のネット $(S(f, \Delta, (\xi_k)_{k \in K(\Delta)}))_{\Delta \in \mathcal{D}(I)}$ は分割の幅 $d(\Delta)$ に対し収束点

$$\int_I f(x)dx := \lim_{d(\Delta) \to +0} S(f, \Delta, (\xi_k)_{k \in K(\Delta)}) \tag{5.146}$$

を持ち, この収束点は各分割 Δ の代表点 $(\xi_k)_{k \in K(\Delta)}$ の取り方に依存しない．(5.146) を $f : I \to F$ の Riemann 積分と言う．

定義 5.204 (1 変数連続関数の Riemann 積分の記法)**.** I を $\mathbb{R}$ の有界閉区間, F を Fréchet 空間とし, $f : I \to F$ を連続関数とする. 任意の $a, b \in I$ に対し,

$$\int_a^b f(x)dx := \begin{cases} \int_{[a,b]} f(x)dx & (a < b) \\ 0 & (a = b) \\ -\int_{[b,a]} f(x)dx & (b < a) \end{cases}$$

と定義する.

命題 5.205. I を $\mathbb{R}$ の有界閉区間, F を Fréchet 空間とし, $f : I \to F$ を連続関数とする. このとき任意の $a, b, c \in I$ に対し,

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

が成り立つ.

証明. $a < b < c$ の場合を示せば十分であるが, これは $[a, b]$ の分割と $[b, c]$ の分割が $[a, c]$ の分割を構成することと Riemann 積分の定義 5.203 より明らかである. □

定理 5.206 (微積分学の基本定理)**.** $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ を有界閉区間, F を Fréchet 空間, $f : I \to F$ を連続関数とし, 任意の $x \in I$ に対し,

$$f'(x) = \lim_{|h| \to +0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in F$$

が存在するとし, さらに $f' : I \ni x \mapsto f'(x) \in F$ が連続であるとする. このとき,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 任意の連続線型汎関数 $\varphi : F \to \mathbb{C}$ を取り $\varphi_1, \varphi_2 : F \to \mathbb{R}$ を,

$$\varphi_1(v) := \mathrm{Re}(\varphi(v)), \quad \varphi_2(v) = \mathrm{Im}(\varphi(v)) \quad (\forall v \in F)$$

と定義する. このとき $\varphi_1, \varphi_2 : F \to \mathbb{R}$ は連続な実線型汎関数であるから,

$$\frac{d}{dx}\varphi_j(f(x)) = \lim_{|h| \to +0} \frac{\varphi_j(f(x+h)) - \varphi_j(f(x))}{h} = \varphi_j(f'(x)) \quad (\forall x \in F,\ j = 1, 2)$$

である. よって平均値の定理 4.9 より, $[a, b]$ の任意の分割

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

に対し Δ の代表点

$$\xi_{j,k} \in (t_{k-1}, t_k) \quad (k = 1, \cdots, n,\ j = 1, 2)$$

が存在し,

$$\begin{aligned} \varphi_j(f(b)) - \varphi_j(f(a)) &= \sum_{k=1}^n (\varphi_j(f(t_k)) - \varphi_j(f(t_{k-1}))) = \sum_{k=1}^n \varphi_j(f'(\xi_{j,k}))(t_k - t_{k-1}) \\ &= \varphi_j\left(\sum_{k=1}^n f'(\xi_{j,k})(t_k - t_{k-1})\right) \quad (j = 1, 2) \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \tag{5.147}$$

が成り立つ. (5.147) の右辺の括弧内は連続関数 $f' : I \to F$ の Δ に関する Riemann 和であるから $\varphi_1, \varphi_2 : F \to \mathbb{R}$ の連続性より $d(\Delta) \to +0$ とすれば,

$$\varphi_j(f(b)) - \varphi_j(f(a)) = \varphi_j\left(\int_a^b f'(x)dx\right) \quad (j = 1, 2)$$

を得る．よって，

$$\varphi(f(b)-f(a))=\varphi\left(\int_a^b f'(x)dx\right)$$

が成り立つ．$\varphi : F \to \mathbb{C}$ は任意の連続線型汎関数であるから Hahn-Banach の分離定理 3.77 より，

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx$$

が成り立つ． □

5.11 Lebesgue 測度の定義とその基本的性質

命題 5.207. Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の任意の空でない開集合 U は互いに交わらない可算個の有界左半開方体 (有界な左半開区間 N 個の直積) の合併である．

証明.

$$\mathcal{Q}_n := \left\{ \prod_{j=1}^N \left(\frac{l_j-1}{2^n}, \frac{l_j}{2^n} \right] : l_1, \cdots, l_N \in \mathbb{Z} \right\} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおく．U に含まれる $\mathcal{Q}_1$ の要素全ての合併を $U_1 \subseteq U$ とおき，$U \backslash U_1$ に含まれる $\mathcal{Q}_2$ の要素全ての合併を $U_2 \subseteq U \backslash U_1$ とおく．そして $U \backslash (U_1 \cup U_2)$ に含まれる $\mathcal{Q}_3$ の要素全ての合併を $U_3 \subseteq U \backslash (U_1 \cup U_2)$ とおく．以下同様にして U の部分集合からなる非交叉列 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，

$$\text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対し } U_n \text{ は } U \backslash \bigcup_{k=0}^{n-1} U_k \text{ に含まれる } \mathcal{Q}_n \text{ の要素全ての合併} \tag{5.148}$$

となるように構成する．ただし $U_0 := \varnothing$ とした．今，

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \tag{5.149}$$

が成り立つことを示す．$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq U$ は $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の定義より自明なので任意の $x = (x_1, \cdots, x_N) \in U$ を取り $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ を示せばよい．U は $\mathbb{R}^N$ の開集合なのである $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ となる．そこで $\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{N}$ を満たすような $n_0 \in \mathbb{N}$ を取り，

$$l_j - 1 < 2^{n_0} x_j \leqslant l_j \quad (j = 1, \cdots, N)$$

を満たす $l_1, \cdots, l_N \in \mathbb{Z}$ を取れば，

$$x = (x_1, \cdots, x_N) \in \prod_{j=1}^N \left(\frac{l_j-1}{2^{n_0}}, \frac{l_j}{2^{n_0}} \right] \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U$$

となる．よってもし，

$$\prod_{j=1}^N \left(\frac{l_j-1}{2^{n_0}}, \frac{l_j}{2^{n_0}} \right] \cap \bigcup_{k=1}^{n_0-1} U_k = \varnothing \tag{5.150}$$

が成り立つならば (5.148) より，

$$x \in \prod_{j=1}^N \left(\frac{l_j-1}{2^{n_0}}, \frac{l_j}{2^{n_0}} \right] \subseteq U_{n_0}$$

となるので $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ は成り立つ．もし (5.150) が成り立たないならば $k \in \{1, \cdots, n_0-1\}$ と $\prod_{j=1}^N \left(\frac{r_j-1}{2^k}, \frac{r_j}{2^k} \right] \in \mathcal{Q}_k$ で，

$$\prod_{j=1}^N \left(\frac{l_j-1}{2^{n_0}}, \frac{l_j}{2^{n_0}} \right] \cap \prod_{j=1}^N \left(\frac{r_j-1}{2^k}, \frac{r_j}{2^k} \right] \neq \varnothing, \quad \prod_{j=1}^N \left(\frac{r_j-1}{2^k}, \frac{r_j}{2^k} \right] \subseteq U_k$$

を満たすものが取れる．このとき，

$$y = (y_1, \cdots, y_N) \in \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{l_j - 1}{2^{n_0}}, \frac{l_j}{2^{n_0}} \right] \cap \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{r_j - 1}{2^k}, \frac{r_j}{2^k} \right]$$

を取ると，

$$l_j - 1 < 2^{n_0} y_j \leqslant l_j, \quad 2^{n_0 - k}(r_j - 1) < 2^{n_0} y_j \leqslant 2^{n_0 - k} r_j \quad (j = 1, \cdots, N)$$

であるから，

$$(l_j - 1, l_j] \subseteq (2^{n_0 - k}(r_j - 1), 2^{n_0 - k} r_j] \quad (j = 1, \cdots, N)$$

である．よって，

$$x \in \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{l_j - 1}{2^{n_0}}, \frac{l_j}{2^{n_0}} \right] \subseteq \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{r_j - 1}{2^k}, \frac{r_j}{2^k} \right] \subseteq U_k$$

となるのでやはり $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ は成り立つ．ゆえに (5.149) は成り立つ．$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は非交叉列であり，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{Q}_n$ の互いに異なる要素は互いに交わらないので U_n は互いに交わらない可算個の有界左半開方体の合併である．ゆえに $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ は互いに交わらない可算個の有界左半開方体の合併である． □

定理 5.208. Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 上の Borel 測度 $m_N : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0, \infty]$ で任意の有界閉方体 $\prod_{j=1}^{N} [a_j, b_j] \subseteq \mathbb{R}^N$ に対し，

$$m_N \left(\prod_{j=1}^{N} [a_j, b_j] \right) = \prod_{j=1}^{N} (b_j - a_j) \tag{5.151}$$

を満たすものが唯一つ存在する．そして m_N は位相正則測度 (定義 5.168) である．

証明. まず (5.154) を満たす $\mathbb{R}^N$ 上の Borel 測度 $m_N : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0, \infty]$ は自動的に位相正則である．実際，任意のコンパクト集合 $K \subseteq \mathbb{R}^N$ に対し K は有界だから K を含む有界閉方体が取れるので $m_N(K) < \infty$ である．そして $\mathbb{R}^N$ は第二可算な局所コンパクト Hausdorff 空間である (命題 1.145) ので定理 5.177 より m_N は位相正則である．

(5.154) を満たす $\mathbb{R}^N$ 上の Borel 測度の一意性を示す．Borel 測度 $m_N, m'_N : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0, \infty]$ が任意の有界閉方体 $\prod_{j=1}^{N} [a_j, b_j] \subseteq \mathbb{R}^N$ に対して (5.154) を満たすとする．このときもし $a_j = b_j$ を満たす $j \in \{1, \cdots, N\}$ があるならば $m_N \left(\prod_{j=1}^{N} [a_j, b_j] \right) = m'_N \left(\prod_{j=1}^{N} [a_j, b_j] \right) = 0$ となるので，任意の有界左半開方体 $\prod_{j=1}^{N} (a_j, b_j] \subseteq \mathbb{R}^N$ に対して，

$$m_N \left(\prod_{j=1}^{N} (a_j, b_j] \right) = \prod_{j=1}^{N} (b_j - a_j) = m'_N \left(\prod_{j=1}^{N} (a_j, b_j] \right)$$

が成り立つことが分かる．よって命題 5.207 より $\mathbb{R}^N$ の任意の開集合 U に対し $m_N(U) = m'_N(U)$ が成り立つ．ここで上段で示したように m_N, m'_N は位相正則測度であるから外部正則性 (定義 5.168 の (2)) より任意の $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ に対し $m_N(B) = m'_N(B)$ が成り立つ．ゆえに m_N と m'_N は一致する．これで一意性が示せた．

存在を示す．まず $N = 1$ の場合を示す．

$$\Lambda : C_{c,\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \Lambda f \in \mathbb{R}$$

を次のように定義する．任意の $f \in C_{c,\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ に対し $\mathrm{supp}(f) \subseteq I$ を満たす有界閉区間 I を取り，

$$\Lambda f := \int_I f(x) dx.$$

ただし右辺は Riemann 積分 (定義 5.203) である．$f \in C_{c,\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ に対し 2 つの有界閉区間 I_1, I_2 が $\mathrm{supp}(f) \subseteq I_1, I_2$ を満たすとき Riemann 積分の定義より，

$$\int_{I_1} f(x) dx = \int_{I_2} f(x) dx$$

であるから $\Lambda : C_{c,\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は well-defined である．そして Riemann 積分の定義より Λ は明らかに Radon 汎関数 (定義 5.170) である．よって Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.172 より位相正則測度 $m : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ で，

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dm(x) = \Lambda f \quad (\forall f \in C_{c,\mathbb{R}}(\mathbb{R}))$$

を満たすものが定まる．任意の有界閉区間 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ を取り，

$$m([a,b]) = b - a \tag{5.152}$$

が成り立つことを示す．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し Urysohn の補題 5.165 より，

$$[a,b] \preceq g_n \preceq \left(a - \frac{1}{2n}, b + \frac{1}{2n}\right) \subseteq \left[a - \frac{1}{2n}, b + \frac{1}{2n}\right] \preceq h_n \preceq \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$$

を満たす $g_n, h_n \in C_{c,+}(\mathbb{R})$ が取れて，Riemann 積分の定義より，

$$\begin{aligned} m([a,b]) &\leqslant \int_{\mathbb{R}} g_n(x)dm(x) = \Lambda g_n = \int_{a-\frac{1}{2n}}^{b+\frac{1}{2n}} g_n(x)dx \leqslant \left(b + \frac{1}{2n}\right) - \left(a - \frac{1}{2n}\right) \\ &\leqslant \int_{a-\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} h_n(x)dx = \Lambda h_n = \int_{\mathbb{R}} h_n(x)dm(x) \leqslant m\left(\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

となる．よって，

$$m([a,b]) \leqslant b - a + \frac{1}{n} \leqslant m\left(\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{5.153}$$

である．ここで，

$$[a,b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} m\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$$

であるので測度の単調収束性 (命題 5.32 の (5)) より，

$$m([a,b]) = \inf_{n \in \mathbb{N}} m\left(\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)\right)$$

が成り立つ．よって (5.153) より，

$$m([a,b]) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(b - a + \frac{1}{n}\right) = b - a$$

が成り立つ．これより任意の有界閉区間 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ に対し (5.152) が成り立つので $N = 1$ の場合の存在が示せた．$N \geqslant 2$ の場合の存在を示す．今，上で定めた $\mathbb{R}$ 上の σ-有限 Borel 測度 $m : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ の N 個の直積測度 (定義 5.82)

$$m_N := \bigotimes^N m : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0,\infty]$$

(系 5.17 より $\bigotimes^N \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ が成り立つことに注意) を考えれば任意の有界閉方体 $\prod_{j=1}^N [a_j,b_j] \subseteq \mathbb{R}^N$ に対し，

$$m_N\left(\prod_{j=1}^N [a_j,b_j]\right) = \prod_{j=1}^N m([a_j,b_j]) = \prod_{j=1}^N (b_j - a_j)$$

となる．よって存在が示せた．□

定義 5.209 (Lebesgue 測度)**.** 定理 5.208 より Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 上の Borel 測度 $m_N : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0,\infty]$ で任意の有界閉方体 $\prod_{j=1}^N [a_j,b_j] \subseteq \mathbb{R}^N$ に対し，

$$m_N\left(\prod_{j=1}^N [a_j,b_j]\right) = \prod_{j=1}^N (b_j - a_j) \tag{5.154}$$

を満たすものが唯一つ存在する．これを $\mathbb{R}^N$ 上の Lebesgue 測度と言う．Lebesgue 測度は位相正則測度であり，$\mathbb{R}^N$ 上の Lebesgue 測度は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度 N 個の直積測度である．

命題 5.210 (Lebesgue 測度の平行移動不変性)**.** $m_N : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0,\infty]$ を Lebesgue 測度，$c = (c_1, \cdots, c_N) \in \mathbb{R}^N$ とする．このとき，

$$m_N(B + c) = m_N(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N})$$

が成り立つ．ただし $B + c = \{b + c : b \in B\}$ である．

証明. 任意の $B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ に対し $B+c$ は同相写像 $\mathbb{R}^N\ni x\mapsto x+c\in\mathbb{R}^N$ による B の像であり, 連続写像は Borel 写像 (系 5.11) であるから,

$$\mu:\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}\ni B\mapsto m_N(B+c)\in[0,\infty]$$

は Borel 測度である. そして任意の有界閉方体 $\prod_{j=1}^N[a_j,b_j]\subseteq\mathbb{R}^N$ に対し,

$$\begin{aligned}\mu\left(\prod_{j=1}^N[a_j,b_j]\right)&=m_N\left(\prod_{j=1}^N[a_j+c_j,b_j+c_j]\right)=\prod_{j=1}^N((b_j+c_j)-(a_j+c_j))\\&=\prod_{j=1}^N(b_j-a_j)=m_N\left(\prod_{j=1}^N[a_j,b_j]\right)\end{aligned}$$

であるから Lebesgue 測度の一意性 (定義 5.209 を参照) より μ は m_N と一致する. ゆえに,

$$m_N(B+c)=\mu(B)=m_N(B)\quad(\forall B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N})$$

が成り立つ. □

命題 5.211 (Lebesgue 測度による積分と Riemann 積分の一致)**.** $m_N:\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}\to[0,\infty]$ を Lebesgue 測度, $I\subseteq\mathbb{R}^N$ を有界閉方体, $f:I\to\mathbb{C}$ を連続関数とする. このとき,

$$\int_I f(x)dm_N(x)=\int_I f(x)dx$$

(右辺は Riemann 積分 (定義 5.203)) が成り立つ.

証明. I の各分割 $\Delta\in\mathcal{D}(I)$ に対し代表点 $(\xi_k)_{k\in K(\Delta)}$ を取る. このときそれに対する Riemann 和 (定義 5.200) は,

$$\begin{aligned}S(f,\Delta,(\xi_k)_{k\in K(\Delta)})&=\sum_{k\in K(\Delta)}f(\xi_k)v(I_k)=\sum_{k\in K(\Delta)}f(\xi_k)m_N(I_k)\\&=\sum_{k\in K(\Delta)}\int_I f(\xi_k)\chi_{I_k}(x)dm_N(x)\end{aligned}$$

($v(I_k)=m_N(I_k)$ に注意) となる. また,

$$\int_I f(x)dm_N(x)=\sum_{k\in K(\Delta)}\int_I f(x)\chi_{I_k}(x)dm_N(x)$$

であるから,

$$\left|\int_I f(x)dm_N(x)-S(f,\Delta,(\xi_k)_{k\in K(\Delta)})\right|\leqslant\sum_{k\in K(\Delta)}\int_I|f(x)-f(\xi_k)|\chi_{I_k}(x)dm_N(x)$$

となる. $f:I\to\mathbb{C}$ は一様連続である (定理 1.123) であるから任意の $\varepsilon\in(0,\infty)$ に対し $\delta\in(0,\infty)$ が存在し,

$$x,y\in I,\ |x-y|<\delta\quad\Rightarrow\quad|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{m_N(I)}$$

となる. よって分割の幅 $d(\Delta)$ (定義 5.197) を $d(\Delta)<\delta$ とすれば,

$$\begin{aligned}\left|\int_I f(x)dm_N(x)-S(f,\Delta,(\xi_k)_{k\in K(\Delta)})\right|&\leqslant\sum_{k\in K(\Delta)}\int_I|f(x)-f(\xi_k)|\chi_{I_k}(x)dm_N(x)\\&\leqslant\sum_{k\in K(\Delta)}\frac{\varepsilon}{m_N(I)}m_N(I_k)=\varepsilon\end{aligned}$$

となるから,

$$\int_I f(x)dm_N(x)=\lim_{d(\Delta)\to+0}S(f,\Delta,(\xi_k)_{k\in K(\Delta)})$$

である. Riemann 積分の定義 5.203 より右辺は $f:I\to\mathbb{C}$ の Riemann 積分に等しいので求める結果を得た. □

定義 5.212 (Lebesgue 測度による積分の表記)**.** 任意の $p \in [1, \infty]$ に対し $\mathbb{R}^N$ 上の Lebesgue 測度 $m_N : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0, \infty]$ に関する L^p 関数の空間 (定義 5.123) を,

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}, m_N),$$

L^p 空間 (定義 5.126) を,

$$L^p(\mathbb{R}^N) := L^p(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}, m_N)$$

と表す. また以後, しばしば Lebesgue 測度 m_N に関する積分を,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dm_N(x)$$

の代わりに,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx$$

と表す.

定義 5.213 (基本行列)**.** 任意の $i, j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し $A(i, j) \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ を単位行列の第 i 行と第 j 行を入れ替えたものとして定義する. また任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ と任意の $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し $B(j, \beta) \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ を単位行列の第 j 行を β 倍したものとして定義する. そして任意の $i, j \in \{1, \cdots, N\}$ と $\gamma \in \mathbb{R}$ に対し $C(i, j, \gamma)$ を単位行列の第 i 行に単位行列の第 j 行の γ 倍を加えたものとして定義する. すなわち $(e_1, \cdots, e_N)$ を $\mathbb{R}^N$ の標準基底とすると, 横ベクトル表記 (定義 2.49) で,

$$A(i,j) = \begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } i \text{ 番目} \\ \\ \text{第 } j \text{ 番目} \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix}, \quad B(j,\beta) = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{j-1} \\ \beta e_j \\ e_{j+1} \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix}, \quad C(i,j,\gamma) = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{i-1} \\ e_i + \gamma e_j \\ e_{i+1} \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix}$$

である. このとき行列式の反対称性 (命題 2.50) より,

$$\det(A(i,j)) = -1, \ \ \det(B(j,\beta)) = \beta, \ \ \det(C(i,j,\gamma)) = 1$$

であるから $A_{i,j}, B(j,\beta), C(i,j,\gamma)$ は正則行列である (定理 2.53). そして明らかに,

$$A(i,j)^{-1} = A(i,j), \ \ B(j,\beta)^{-1} = B(j,\beta^{-1}), \ \ C(i,j,\gamma)^{-1} = C(i,j,-\gamma)$$

である. $A_{i,j}, B(j,\beta), C(i,j,\gamma)$ のタイプの行列を基本行列と言う.

補題 5.214 (基本行列の作用)**.** 基本行列 $A_{i,j}, B(j,\beta), C(i,j,\gamma) \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ と任意の $x \in \mathbb{R}^N$ ($M_{N\times 1}(\mathbb{R})$ の元とも $M_{1\times N}(\mathbb{R})$ の元ともみなす) に対し次が成り立つ.

(1) $A_{i,j}x \in \mathbb{R}^N$, $xA_{i,j} \in \mathbb{R}^N$ はいずれも x の第 i 成分と第 j 成分を取り替えたものである.
(2) $B(j,\beta)x \in \mathbb{R}^N$, $xB(j,\beta) \in \mathbb{R}^N$ は x の第 j 成分を β 倍したものである.
(3) $C(i,j,\gamma)x \in \mathbb{R}^N$ は x の第 i 成分に x の第 j 成分の γ 倍を加えたものであり, $xC(i,j,\gamma) \in \mathbb{R}^N$ は x の第 j 成分に x の第 i 成分の γ 倍を加えたものである.

証明. 基本行列の定義 5.213 より自明である. □

定理 5.215 (正則行列による線型変換に対する Lebesgue 測度の拡大率)**.** $m_N : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0, \infty]$ を Lebesgue 測度, $T \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ を正則行列とする. このとき,

$$m_N(T(B)) = |\det(T)| m_N(B) \ \ (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}) \tag{5.155}$$

が成り立つ.

証明. 補題 5.214 より T の左右に有限個の基本行列を掛けて単位行列ができる. そして基本行列の逆行列は基本行列である (定義 5.213 を参照) から T は有限個の基本行列の積で表せる. よって (5.155) を示すには T が基本行列である場合を示せば十分である. よって T は基本行列であるとする.

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \ni B \mapsto \frac{1}{|\det(T)|} m_N(T(B)) \in [0, \infty]$$

が Lebesgue 測度と一致することを示せばよいので, Lebesgue 測度の一意性 (定義 5.209 を参照) より任意の有界閉方体

$$I := \prod_{j=1}^{N} [a_j, b_j]$$

を取り,

$$m_N(T(I)) = |\det(T)| m_N(I) \tag{5.156}$$

が成り立つことを示せばよい.

(1) $T = A(i, j)$ (定義 5.213) の場合.

$$T(I) = [a_1, b_1] \times \cdots \times \overset{i\ \text{番目}}{[a_j, b_j]} \times \cdots \times \overset{j\ \text{番目}}{[a_i, b_i]} \times \cdots \times [a_N, b_N]$$

であるから,

$$m_N(T(I)) = \prod_{k=1}^{N} [a_k, b_k] = m_N(I) = |\det(T)| m_N(I).$$

(2) $T = B(j, \beta)$ (定義 5.213) の場合. $\beta > 0$ のとき,

$$T(I) = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{j-1}, b_{j-1}] \times [\beta a_j, \beta b_j] \times [a_{j+1}, b_{j+1}] \times \cdots \times [a_N, b_N],$$

$\beta < 0$ のとき,

$$T(I) = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{j-1}, b_{j-1}] \times [\beta b_j, \beta a_j] \times [a_{j+1}, b_{j+1}] \times \cdots \times [a_N, b_N]$$

だから,

$$m_N(T(I)) = |\beta| \prod_{k=1}^{N} [a_k, b_k] = |\det(T)| m_N(I).$$

(3) $T = C(i, j, \gamma)$ (定義 5.213) の場合.

$$T(I) = \left\{ (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N : a_k \leqslant x_k \leqslant y_k\ (k \neq i),\ a_i + \gamma x_j \leqslant x_i \leqslant b_i + \gamma x_j \right\}$$

であるから Tonelli の定理 5.84 より,

$$\begin{aligned} m_N(T(I)) = \prod_{k \neq i,j} (b_k - a_k) \int_{[a_j, b_j]} \left(\int_{[a_i + \gamma x_j, b_i + \gamma x_j]} 1 dx_i \right) dx_j \\ \prod_{k \neq i,j} (b_k - a_k) \int_{[a_j, b_j]} (b_i - a_i) dx_j = \prod_{k=1}^{N} [a_k, b_k] \\ = m_N(I) = |\det(T)| m_N(I). \end{aligned}$$

よって (5.156) が成り立つ. □

5.12 Lebesgue の微分定理, 変数変換公式

命題 5.216 ($\mathbb{R}^N$ の空でない開集合の Lebesgue 測度は正)**.** $m : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0,\infty]$ を Lebesgue 測度とする．このとき任意の空でない開集合 $U \subseteq \mathbb{R}^N$ に対し $m(U) > 0$ が成り立つ．

証明. 任意の $x \in U$ に対し $B(x,\varepsilon) \subseteq U$ なる $\varepsilon \in (0,\infty)$ が取れる．このとき，

$$I := \prod_{j=1}^{N} \left[x_j - \frac{\varepsilon}{2N}, x_j + \frac{\varepsilon}{2N} \right] \subseteq U$$

であり, Lebesgue 測度の定義 5.209 より，

$$m(I) = \prod_{j=1}^{N} \left\{ \left(x_j + \frac{\varepsilon}{2N} \right) - \left(x_j - \frac{\varepsilon}{2N} \right) \right\} = \prod_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon}{N} > 0$$

である．よって測度の単調性より $m(U) \geqslant m(I) > 0$ である． □

定義 5.217 ($\mathbb{R}^N$ 上の複素数値 Borel 測度に対する Hardy-Littlewood の最大関数)**.** $m : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0,\infty]$ を Lebesgue 測度とする．$\mathbb{R}^N$ 上の任意の複素数値 Borel 測度 $\nu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to \mathbb{C}$ に対し，

$$M\nu(x) := \sup_{r \in (0,\infty)} \frac{|\nu|(B(x,r))}{m(B(x,r))} \in [0,\infty] \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

とおく．ただし $|\nu| : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0,\infty)$ は ν の全変動 (定義 5.110) である．

$$M\nu : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto M\nu(x) \in [0,\infty]$$

を ν に対する Hardy-Littlewood の最大関数, もしくは単に最大関数と言う．

定義 5.218 (Lebesgue 測度に関する L^1 関数に対する Hardy-Littlewood の最大関数)**.** 任意の $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$[*65]に対し, 複素数値測度

$$m_f : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \ni B \mapsto \int_B f(x)dx \in \mathbb{C}$$

を考える．このとき m_f に対する Hardy-Littlewood の最大関数

$$Mf := Mm_f : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto \sup_{r \in (0,\infty)} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy \in [0,\infty]$$

[*66]を f に対する Hardy-Littlewood の最大関数と言う．

命題 5.219. $\mathbb{R}^N$ 上の任意の複素数値 Borel 測度 $\nu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to \mathbb{C}$ と任意の $\alpha \in [0,\infty)$ に対し，

$$(\alpha < M\nu) = \{x \in \mathbb{R}^N : \alpha < M\nu(x)\}$$

は $\mathbb{R}^N$ の開集合である．

証明. 任意の $x \in (\alpha < M\nu)$ を取る．

$$\alpha < M\nu(x) = \sup_{r \in (0,\infty)} \frac{|\nu|(B(x,r))}{m(B(x,r))}$$

であるから上限の定義より, ある $r_0 \in (0,\infty)$ に対し，

$$\alpha m(B(x,r_0)) < |\nu|(B(x,r_0)) \tag{5.157}$$

[*65] 定義 5.212 を参照.
[*66] 命題 5.112 より m_f の全変動は $m_{|f|} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \ni B \mapsto \int_B |f(x)|dx \in [0,\infty)$ であることに注意.

となる. ここで Lebesgue 測度の平行移動不変性 (命題 5.210) と定理 5.215 より,

$$m(B(x,r)) = m(B(0,r)) = r^N m(B(0,1)) \quad (\forall r \in (0,\infty))$$

であるから,

$$\lim_{r\to r_0+0} m(B(x,r)) = \lim_{r\to r_0+0} r^N m(B(0,1)) = r_0^N m(B(0,1)) = m(B(x,r_0)).$$

よって十分小さい $\delta \in (0,\infty)$ を取れば (5.157) より,

$$\alpha m(B(x,r_0+\delta)) < |\nu|(B(x,r_0)) \tag{5.158}$$

となる. 任意の $y \in B(x,\delta)$ に対し,

$$B(x,r_0) \subseteq B(y,r_0+\delta)$$

だから, Lebesgue 測度の平行移動不変性と (5.158) と測度の単調性より,

$$\alpha m(B(y,r_0+\delta)) = \alpha m(B(x,r_0+\delta)) < |\nu|(B(x,r_0)) \leqslant |\nu|(B(y,r_0+\delta))$$

となる. よって,

$$\alpha < \frac{|\nu|(B(y,r_0+\delta))}{m(y,r_0+\delta)} \leqslant M\nu(y)$$

であるから,

$$B(x,\delta) \subseteq (\alpha < M\nu)$$

が成り立つ. ゆえに $(\alpha < M\nu)$ は開集合である. □

補題 5.220. (X,d) を距離空間とし, 有限個の開球 $B(x_j,r_j)$ $(j=1,\cdots,n)$ を考える. このとき $\{1,\cdots,n\}$ の部分集合 S で,

$$B(x_i,r_i) \cap B(x_j,r_j) = \varnothing \quad (\forall i,j \in S : i \neq j), \quad \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j,r_j) \subseteq \bigcup_{j\in S} B(x_j,3r_j)$$

を満たすものが存在する.

証明.

$$r_1 \geqslant r_2 \geqslant \cdots \geqslant r_n \tag{5.159}$$

であると仮定してよい. $k(1) := 1$ とおく.

$$B(x_1,r_1) \cap B(x_j,r_j) = \varnothing$$

を満たす最小の $j \in \{2,\cdots,n\}$ を取りそれを $k(2)$ とおく.

$$\bigcup_{i=1}^{2} B(x_{k(i)},r_{k(i)}) \cap B(x_j,r_j) = \varnothing$$

を満たす最小の $j \in \{k(2)+1,\cdots,n\}$ を取りそれを $k(3)$ とおく.

$$\bigcup_{i=1}^{3} B(x_{k(i)},r_{k(i)}) \cap B(x_j,r_j) = \varnothing$$

を満たす最小の $j \in \{k(3)+1,\cdots,n\}$ を取りそれを $k(4)$ とおく. 以下同様の操作を続け, $1 = k(1) < k(2) < \cdots < k(m) \leqslant n$ を取り尽くしたものとする. このとき $\{k(1),k(2),\cdots,k(m)\}$ が求める $\{1,\cdots,n\}$ の部分集合であることを示す. $B(x_{k(i)},r_{k(i)})$ $(i=1,\cdots,m)$ は定義の仕方から明らかに互いに交わらない. 任意の $j \in \{1,\cdots,n\}$ を取り,

$$B(x_j,r_j) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_{k(i)},3r_{k(i)}) \tag{5.160}$$

が成り立つことを示せばよい. $j \in \{k(1), \cdots, k(m)\}$ であるならば自明なので $j \notin \{k(1), \cdots, k(m)\}$ であるとする. $k(i) < j$ を満たす最大の $i \in \{1, \cdots, m\}$ を取りそれを $l \in \{1, \cdots, m\}$ とおく. $\{k(1), k(2), \cdots, k(m)\}$ と l の定義の仕方から,

$$\bigcup_{i=1}^{l} B(x_{k(i)}, r_{k(i)}) \cap B(x_j, r_j) \neq \varnothing$$

であるので, ある $i \in \{1, \cdots, l\}$ に対し

$$B(x_{k(i)}, r_{k(i)}) \cap B(x_j, r_j) \neq \varnothing$$

となる. そこで任意の

$$y \in B(x_{k(i)}, r_{k(i)}) \cap B(x_j, r_j)$$

を取る. (5.159) より $r_{k(i)} \geqslant r_j$ であることと三角不等式より, 任意の $x \in B(x_j, r_j)$ に対し,

$$d(x, x_{k(i)}) \leqslant d(x, x_j) + d(x_j, y) + d(y, x_{k(i)}) < 2r_j + r_{k(i)} \leqslant 3r_{k(i)}$$

となるから,

$$B(x_j, r_j) \subseteq B(x_{k(i)}, 3r_{k(i)})$$

である. よって (5.160) が成り立つ. □

定理 5.221 (Hardy-Littlewood の不等式)**.** $m : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0, \infty]$ を Lebesgue 測度, $\nu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to \mathbb{C}$ を任意の複素数値 Borel 測度とする. このとき任意の $\alpha \in (0, \infty)$ に対し,

$$m\left((\alpha < M\nu)\right) \leqslant \frac{3^N}{\alpha}|\nu|(\mathbb{R}^N)$$

が成り立つ.

証明. 命題 5.219 より $(\alpha < M\nu)$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合である. Lebesgue 測度は位相正則測度である (定理 5.208 を参照) から内部正則性より,

$$m\left((\alpha < M\nu)\right) = \sup\left\{m(K) : K \text{ は } (\alpha < M\nu) \text{ に含まれるコンパクト集合}\right\}$$

である. よって $(\alpha < M\nu)$ に含まれる任意のコンパクト集合 K を取り,

$$m(K) \leqslant \frac{3^N}{\alpha}|\nu|(\mathbb{R}^N) \tag{5.161}$$

が成り立つことを示せばよい. 任意の $x \in K$ に対し $K \subseteq (\alpha < M\nu)$ より

$$\alpha < M\nu(x) = \sup_{r \in (0,\infty)} \frac{|\nu|(B(x,r))}{m(B(x,r))}$$

であるから, 上限の定義より $r_x \in (0, \infty)$ で,

$$\alpha < \frac{|\nu|(B(x,r_x))}{m(B(x,r_x))} \tag{5.162}$$

を満たすものが取れる.

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$$

であるから K のコンパクト性より有限個の $x_1, \cdots, x_n \in K$ が取れて,

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r_{x_j})$$

となる. そして補題 5.220 より $S \subseteq \{1, \cdots, n\}$ で,

$$B(x_i, r_{x_i}) \cap B(x_j, r_{x_j}) = \varnothing \quad (\forall i, j \in S : i \neq j),$$

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r_{x_j}) \subseteq \bigcup_{j \in S} B(x_j, 3r_{x_j}) \tag{5.163}$$

を満たすものが取れる. Lebesgue 測度の平行移動不変性 (命題 5.210) と定理 5.215 より,

$$m(B(x,3r)) = m(B(0,3r)) = 3^N m(B(0,r)) = 3^N m(B(x,r)) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall r \in (0,\infty))$$

であるから (5.163) と (5.162) より,

$$\begin{aligned} m(K) &\leqslant m\left(\bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r_{x_j})\right) \leqslant m\left(\bigcup_{j\in S} B(x_j, 3r_{x_j})\right) \leqslant \sum_{j\in S} m(B(x_j, 3r_{x_j})) = \sum_{j\in S} 3^N m(B(x_j, r_{x_j})) \\ &\leqslant \sum_{j\in S} \frac{3^N}{\alpha} |\nu|(B(x_j, r_{x_j})) = \frac{3^N}{\alpha}|\nu|\left(\bigcup_{j\in S} B(x_j, r_{x_j})\right) \leqslant \frac{3^N}{\alpha}|\nu|(\mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

となる. よって (5.161) が成り立つ. □

定義 5.222 (Lebesgue 点)**.** $x \in \mathbb{R}^N$ が $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ の Lebesgue 点であるとは,

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0$$

が成り立つことを言う.

命題 5.223 (連続な点は Lebesgue 点)**.** $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ が $x \in \mathbb{R}^N$ において連続であるとする. このとき x は f の Lebesgue 点である.

証明. f の x における連続性より, 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し $\delta \in (0,\infty)$ が存在し,

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad (\forall y \in B(x,\delta))$$

が成り立つ. よって,

$$\frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy \leqslant \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \varepsilon dy = \varepsilon \quad (\forall r \in (0,\delta))$$

だから,

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0$$

が成り立つ. □

定理 5.224 (ほとんど全ての点は Lebesgue 点)**.** 任意の $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ に対し, Lebesgue 測度 $m : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0,\infty]$ に関してほとんど全ての点が f の Lebesgue 点である.

証明. 任意の $r \in (0,\infty)$ に対し,

$$T_r f(x) := \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

とおき,

$$Tf(x) := \inf_{\delta\in(0,\infty)} \sup_{r\in(0,\delta)} T_r f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned} Tf(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in (0,\infty), \exists \delta \in (0,\infty) \text{ s.t. } \sup_{r\in(0,\delta)} T_r f(x) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{r\to+0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \text{ は } f \text{ の Lebesgue 点} \end{aligned}$$

だから,

$$(Tf > 0) = \{x \in \mathbb{R}^N : Tf(x) > 0\}$$

が Lebesgue 測度 0 の Borel 集合に含まれることを示せばよい．そのためには，

$$(Tf > 0) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(Tf > \frac{1}{n}\right)$$

より任意の $\alpha \in (0,\infty)$ を取り，

$$(Tf > \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^N : Tf(x) > \alpha\}$$

が Lebesgue 測度 0 の Borel 集合に含まれることを示せばよい．Lebesgue 測度 m は位相正則測度である (定理 5.208 を参照) から定理 5.179 より $C_c(\mathbb{R}^N)$ の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0 \tag{5.164}$$

を満たすものが取れる．そこで，

$$g_n := f - f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおくと，

$$f = f_n + g_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから，

$$T_r f(x) \leqslant T_r f_n(x) + T_r g_n(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (0,\infty), \forall x \in \mathbb{R}^N),$$

従って，

$$\sup_{r\in(0,\delta)} T_r f(x) \leqslant \sup_{r\in(0,\delta)} T_r f_n(x) + \sup_{r\in(0,\delta)} T_r g_n(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall \delta \in (0,\infty), \forall x \in \mathbb{R}^N).$$

これより，

$$Tf(x) \leqslant Tf_n(x) + Tg_n(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^N)$$

が成り立つ．ここで各 f_n は連続関数であるから命題 5.223 より $Tf_n(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^N)$ なので，

$$Tf(x) \leqslant Tg_n(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^N) \tag{5.165}$$

を得る．

$$\begin{aligned} T_r g_n(x) &= \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |g_n(y) - g_n(x)| dy \leqslant \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |g_n(y)| dy + |g_n(x)| \\ &= Mg_n(x) + |g_n(x)| \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (0,\infty), \forall x \in \mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

(Mg_n は $g_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ に対する最大関数 (定義 5.218)) であるから，

$$Tg_n(x) \leqslant Mg_n(x) + |g_n(x)| \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^N)$$

なので，(5.165) と合わせると，

$$Tf(x) \leqslant Mg_n(x) + |g_n(x)| \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^N)$$

を得る．これより，

$$(Tf > \alpha) \subseteq \left(Mg_n > \frac{\alpha}{2}\right) \cup \left(|g_n| > \frac{\alpha}{2}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから，

$$B_n := \left(Mg_n > \frac{\alpha}{2}\right) \cup \left(|g_n| > \frac{\alpha}{2}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおくと，

$$(Tf > \alpha) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

となる．これより $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ が Lebesgue 測度 0 の Borel 集合であることを示せばよい．Hardy-Littlewood の不等式 (定理 5.221) より，

$$m\left(\left(Mg_n > \frac{\alpha}{2}\right)\right) \leqslant \frac{2}{\alpha} 3^N \|g_n\| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であり, 積分の単調性より,

$$\frac{\alpha}{2}m\left(\left(|g_n|>\frac{\alpha}{2}\right)\right)\leqslant\|g_n\|_1\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

である. よって,

$$m(B_n)\leqslant m\left(\left(Mg_n>\frac{\alpha}{2}\right)\right)+m\left(\left(|g_n|>\frac{\alpha}{2}\right)\right)\leqslant\frac{2}{\alpha}(3^N+1)\|g_n\|_1\quad(\forall n\in\mathbb{N})\tag{5.166}$$

である. ここで $g_n=f-f_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ なので (5.164) と (5.166) より,

$$m(B_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\alpha}(3^N+1)\|g_n\|_1\to 0\quad(n\to\infty)$$

であるから, 任意の $\varepsilon\in(0,\infty)$ に対し十分大きい $n_0\in\mathbb{N}$ を取れば,

$$m(B_{n_0})\leqslant\frac{2}{\alpha}(3^N+1)\|g_{n_0}\|_1<\varepsilon$$

となる. よって任意の $\varepsilon\in(0,\infty)$ に対し,

$$m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n\right)<\varepsilon$$

が成り立つので $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n$ は Lebesgue 測度 0 の Borel 集合である. □

系 5.225 (Lebesgue の微分定理)**.** 任意の $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ に対し, Lebesgue 測度 $m:\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}\to[0,\infty]$ に関してほとんど全ての $x\in\mathbb{R}^N$ で,

$$\lim_{r\to+0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}f(y)dy=f(x)$$

が成り立つ.

証明. 定理 5.224 より m-a.e. $x\in\mathbb{R}^N$ で,

$$\lim_{r\to+0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)-f(x)|dy=0$$

が成り立つので, m-a.e. $x\in\mathbb{R}^N$ で,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}f(y)dy-f(x)\right|&=\left|\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}f(y)-f(x)dy\right|\\&\leqslant\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)-f(x)|dy\\&\to 0\quad(r\to+0)\end{aligned}$$

が成り立つ. □

補題 5.226. $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ を開集合, $\Phi:\Omega\to\mathbb{R}^N$ を C^1 級写像とし, ある $a\in\Omega$ に対し,

$$\det\Phi'(a)\neq 0$$

が成り立つとする. このとき,

$$\lim_{r\to+0}\frac{m(\Phi(B(a,r)\cap\Omega))}{m(B(a,r))}=|\det\Phi'(a)|$$

が成り立つ. ただし $B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^N:|x-a|<r\}$ である.

証明.

$$\Psi:\Omega\ni x\mapsto\Phi'(a)^{-1}\Phi(x)\in\mathbb{R}^N$$

とおく. もし,

$$\lim_{r\to+0}\frac{m(\Psi(B(a,r)\cap\Omega))}{m(B(a,r))}=1\tag{5.167}$$

が成り立つならば, $\Phi(x) = \Phi'(a)\Psi(x)$ $(\forall x \in \Omega)$ であることと定理 5.215 より,

$$\lim_{r \to +0} \frac{m(\Phi(B(a,r) \cap \Omega))}{m(B(a,r))} = \lim_{r \to +0} |\mathrm{det}\Phi'(a)| \frac{m(\Psi(B(a,r) \cap \Omega))}{m(B(a,r))} = |\mathrm{det}\Phi'(a)|$$

が成り立つので, (5.167) を示せばよい. 逆関数定理 4.17 より a の開近傍 $U \subseteq \Omega$ を十分小さく取れば $\Psi(U)$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合であり,

$$U \ni x \mapsto \Psi(x) \in \Psi(U) \tag{5.168}$$

は C^1 級同相写像 (定義 4.18) である. $\Psi'(a) = \Phi'(a)^{-1}\Phi'(a) = 1$ であるから, 任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対し次を満たす $\delta \in (0,\infty)$ が取れる.

$$CB(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x-a| \leqslant \delta\} \subseteq U, \quad B(\Psi(a),\delta) \subseteq \Psi(U) \tag{5.169}$$

$$|\Psi(x) - \Psi(a) - (x-a)| \leqslant \varepsilon |x-a| \quad (\forall x \in CB(a,\delta)). \tag{5.170}$$

(5.170) より,

$$|\Psi(x) - \Psi(a)| \leqslant (1+\varepsilon)|x-a| < (1+\varepsilon)\delta \quad (\forall x \in B(a,\delta))$$

であるから,

$$\Psi(B(a,\delta)) \subseteq B(\Psi(a),(1+\varepsilon)\delta) \tag{5.171}$$

が成り立つ. 今,

$$B(\Psi(a),(1-\varepsilon)\delta) \subseteq \Psi(B(a,\delta)) \tag{5.172}$$

が成り立つことを示す. そのためにまず,

$$B(\Psi(a),(1-\varepsilon)\delta) \cap \Psi(\partial B(a,\delta)) = \varnothing \tag{5.173}$$

を示す. ただし $\partial B(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x-a| = \delta\}$ である. もし,

$$B(\Psi(a),(1-\varepsilon)\delta) \cap \Psi(\partial B(a,\delta)) \neq \varnothing$$

ならば $x \in \partial B(a,\delta)$ で,

$$|\Psi(x) - \Psi(a)| < (1-\varepsilon)\delta$$

を満たすものが取れることになる. しかし $x \in \partial B(a,\delta) \subseteq CB(a,\delta)$ であることと (5.170) より,

$$(1-\varepsilon)\delta = (1-\varepsilon)|x-a| \leqslant |\Psi(x) - \Psi(a)|$$

であるから矛盾する. ゆえに (5.173) が成り立つ. よって (5.169) より,

$$B(\Psi(a),(1-\varepsilon)\delta) \subseteq \Psi(B(a,\delta)) \cup \Psi(U \backslash CB(a,\delta)) \tag{5.174}$$

となる. (5.168) は同相写像なので (5.174) の右辺の $\Psi(B(a,\delta))$, $\Psi(U \backslash CB(a,\delta))$ は互いに交わらない $\mathbb{R}^N$ の開集合である. また (5.174) の左辺 $B(\Psi(a),(1-\varepsilon))$ は凸集合, 従って連結 (命題 3.22) である. よって (5.172) が成り立つ. (5.171), (5.172) より,

$$B(\Psi(a),(1-\varepsilon)\delta) \subseteq \Psi(B(a,\delta)) \subseteq B(\Psi(a),(1+\varepsilon)\delta)$$

であり, Lebesgue 測度の平行移動不変性と定理 5.215 より,

$$m\left(B(\Psi(a),(1 \pm \varepsilon)\delta)\right) = (1 \pm \varepsilon)^N m\left(B(a,\delta)\right)$$

であるから,

$$(1-\varepsilon)^N \leqslant \frac{m\left(\Psi(B(a,\delta))\right)}{m(B(a,\delta))} \leqslant (1+\varepsilon)^N$$

が成り立つ. 任意の $r \in (0,\delta)$ に対し, (5.169), (5.170) の δ を r に置き換えたものが成り立つので,

$$(1-\varepsilon)^N \leqslant \frac{m\left(\Psi(B(a,r))\right)}{m(B(a,r))} \leqslant (1+\varepsilon)^N$$

が成り立つ. よって $\varepsilon \in (0,\infty)$ の任意性より (5.167) が成り立つ. □

補題 5.227. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^N$ を C^1 級写像, $E \subseteq \Omega$ を Lebesgue 測度が 0 の σ-コンパクト集合 (定義 5.173) とする. このとき $\Phi(E) \subseteq \mathbb{R}^N$ も Lebesgue 測度が 0 の σ-コンパクト集合である.

証明. 連続写像によるコンパクト集合の像はコンパクトであるから $\Phi(E)$ は σ-コンパクト集合 (従って特に Borel 集合) である. $\Phi(E)$ の Lebesgue 測度が 0 であることを示す. 任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対し,

$$E_{n,m} := \left\{ x \in E : |f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x| \ \left(\forall y \in \Omega : |y - x| < \frac{1}{m} \right) \right\}$$

とおく. $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^N$ の微分可能性[*67]より, 任意の $x \in E$ に対し $m \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| \leqslant |y - x| \ \left(\forall y \in \Omega : |y - x| < \frac{1}{m} \right),$$

従って,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant (1 + \|f'(x)\|)|y - x| \ \left(\forall y \in \Omega : |y - x| < \frac{1}{m} \right)$$

であるから, $1 + \|f'(x)\| \leqslant n$ なる $n \in \mathbb{N}$ を取れば,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x| \ \left(\forall y \in \Omega : |y - x| < \frac{1}{m} \right)$$

となる. よって $x \in E_{n,m}$ なので,

$$E = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} E_{n,m}, \quad \Phi(E) = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} \Phi(E_{n,m})$$

が成り立つ. これより任意の $n, m \in \mathbb{N}$ を取り固定し $\Phi(E_{n,m})$ の Lebesgue 測度が 0 であることを示せばよい. そのためにまず $E_{n,m}, \Phi(E_{n,m})$ が σ-コンパクト集合 (従って Borel 集合) であることを示す. $\overline{E_{n,m}}$ を $E_{n,m}$ の $\mathbb{R}^N$ における閉包とし,

$$E_{n,m} = \overline{E_{n,m}} \cap E \tag{5.175}$$

が成り立つことを示す. 任意の $x \in \overline{E_{n,m}} \cap E$ を取り, $E_{n,m}$ の点列 $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ で $\lim_{k \to \infty} x_k = x$ なるものを取る. このとき $|y - x| < \frac{1}{m}$ を満たす任意の $y \in E$ に対し,

$$|y - x_k| < \frac{1}{m} \quad (\forall k \geqslant k_0)$$

を満たす $k_0 \in \mathbb{N}$ が取れて,

$$|f(y) - f(x_k)| \leqslant n|y - x_k| \quad (\forall k \geqslant n_0)$$

であるから $\lim_{k \to \infty} x_k = x$ であることと f の連続性より,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|$$

が成り立つ. よって $x \in E_{n,m}$ であるから (5.175) が成り立つ. ゆえに $E_{n,m}$ は σ-コンパクト集合 E と $\mathbb{R}^N$ の閉集合 $\overline{E_{n,m}}$ の交叉であるから σ-コンパクト集合であり, Φ の連続性より $\Phi(E_{n,m})$ も σ-コンパクト集合である. 今, $m : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0, \infty]$ を Lebesgue 測度とすると $m(E) = 0$ であるから $m(E_{n,m}) = 0$ である. よって Lebesgue 測度の外部正則性 (定義 5.168 の (2))[*68] より任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し,

$$E_{n,m} \subseteq V, \quad m(V) < \varepsilon$$

を満たす開集合 V が取れる. 命題 5.207 より V は各辺の長さが等しい有界な左半開方体の非交叉列 $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ に対して,

$$V = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$$

[*67] 定理 4.12 より C^1 級写像は微分可能である.
[*68] 定理 5.208 より Lebesgue 測度は位相正則測度である.

と表せる．ここで各 $j \in \mathbb{N}$ に対し I_j の一辺の長さを r_j とする．必要ならば分割することにより，

$$r_j < \frac{1}{Nm} \quad (\forall j \in \mathbb{N}) \tag{5.176}$$

としてよい．$E_{n,m} \cap I_j \neq \varnothing$ なる任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し (5.176) より，

$$|x-y| < Nr_j < \frac{1}{m} \quad (\forall x, y \in E_{n,m} \cap I_j)$$

であるから $E_{n,m}$ の定義より，

$$|f(y)-f(x)| \leqslant n|y-x| < nNr_j \quad (\forall x, y \in E_{n,m} \cap I_j)$$

である．よって $\Phi(E_{n,m} \cap I_j)$ は一辺の長さが nNr_j のある左半開方体 L_j に含まれ，

$$m(L_j) = (nNr_j)^N = (nN)^N r_j^N = (nN)^N m(I_j)$$

である．

$$\Phi(E_{n,m}) = \Phi(E_{n,m} \cap V) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}: E_{n,m} \cap I_j \neq \varnothing} \Phi(E_{n,m} \cap I_j) \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}: E_{n,m} \cap I_j \neq \varnothing} L_j$$

なので，

$$\begin{aligned} m(\Phi(E_{n,m})) &\leqslant \sum_{j \in \mathbb{N}: E_{n,m} \cap I_j \neq \varnothing} m(L_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}: E_{n,m} \cap I_j \neq \varnothing} (nN)^N m(I_j) \\ &\leqslant (nN)^N \sum_{j \in N} m(I_j) = (nN)^N m(V) = (nN)^N \varepsilon \end{aligned}$$

となる．よって $\varepsilon \in (0, \infty)$ の任意性より $m(\Phi(E_{n,m})) = 0$ が成り立つ．□

補題 5.228. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合，$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^N$ を単射 C^1 級関数で，

$$\det\Phi'(x) \neq 0 \quad (\forall x \in \Omega)$$

を満たすものとする．このとき $\Phi(\Omega)$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合であり，$\Phi(\Omega)$ 上の任意の非負値 Borel 関数 $f : \Phi(\Omega) \to [0, \infty]$ に対し，

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(x)dx = \int_{\Omega} f(\Phi(x))|\det\Phi'(x)|dx \tag{5.177}$$

が成り立つ．

証明. 逆関数定理 4.19 より $\Phi(\Omega)$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合であり，$\Omega \ni x \mapsto \Phi(x) \in \Phi(\Omega)$ は同相写像である．よって $\Phi(\Omega)$ 上の Borel 集合族 $\mathcal{B}_{\Phi(\Omega)}$ は Ω 上の Borel 集合族 $\mathcal{B}_{\Omega}$ に対して，

$$\mathcal{B}_{\Phi(\Omega)} = \{\Phi(B) : B \in \mathcal{B}_{\Omega}\}$$

[*69] と表せる．非負値可測関数 $f : \Phi(\Omega) \to [0, \infty]$ の非負値可測単関数の各点単調増加列による近似 (命題 5.29) より，(5.177) を示すには，

$$\int_{\Phi(\Omega)} \chi_{\Phi(B)}(x)dx = \int_B |\det\Phi'(x)|dx \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\Omega})$$

を示せば十分である．すなわち $m : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0, \infty]$ を Lebesgue 測度として，

$$m(\Phi(B)) = \int_B |\det\Phi'(x)|dx \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\Omega}) \tag{5.178}$$

が成り立つことを示せばよい．

$$\Omega_n := (|\Phi| < n) = \{x \in \Omega : |\Phi(x)| < n\} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

[*69] 命題 5.11 より連続写像は Borel 写像 (定義 5.10) である．

とおくと各 Ω_n は開集合であり，

$$\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1} \ \ (\forall n \in \mathbb{N}), \ \ \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n \tag{5.179}$$

である．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{R}^N$ 上の有限 Borel 測度

$$\mu_n : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \ni B \mapsto m(\Phi(B \cap \Omega_n)) \in [0, \infty)$$

を定義する[*70]．このとき μ_n は Lebesgue 測度 $m : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0, \infty]$ に対して絶対連続 (定義 5.100) である．実際, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ が $m(B) = 0$ を満たすならば B に含まれる任意のコンパクト集合 K に対し $m(K) = 0$, よって $m(K \cap \Omega_n) = 0$ であり, $K \cap \Omega_n$ は σ-コンパクトである[*71]から補題 5.227 より，

$$\mu_n(K) = m(\Phi(K \cap \Omega_n)) = 0$$

である．そして $\mathbb{R}^N$ の第二可算性より μ_n は位相正則測度である (定理 5.177) ので内部正則性より，

$$\mu_n(B) = \sup\{\mu_n(K) : K \text{ は } B \text{ に含まれるコンパクト集合 }\} = 0$$

である．よって各 $n \in \mathbb{N}$ に対し μ_n は Lebesgue 測度 m に対して絶対連続なので, Radon-Nikodym の定理 5.104 より $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ の列 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，

$$m(\Phi(B \cap \Omega_n)) = \mu_n(B) = \mu_n(B \cap \Omega_n) = \int_{B\cap\Omega_n} h_n(x)dx \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}) \tag{5.180}$$

を満たすものが取れる．補題 5.226 より，

$$\lim_{r\to+0} \frac{m(\Phi(B(x,r) \cap \Omega_n))}{m(B(x,r))} = |\det\Phi'(x)| \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega_n)$$

であり, (5.180) と Lebesgue の微分定理 5.225 より，

$$\lim_{r\to+0} \frac{m(\Phi(B(x,r) \cap \Omega_n))}{m(B(x,r))} = \lim_{r\to+0} \int_{B(x,r)\cap\Omega_n} h_n(y)dy = h_n(x) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, m\text{-a.e. } x \in \Omega_n)$$

であるから，

$$h_n(x) = |\det\Phi'(x)| \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, m\text{-a.e. } x \in \Omega_n)$$

が成り立つ．よって (5.180) より，

$$m(\Phi(B \cap \Omega_n)) = \int_{B\cap\Omega_n} h_n(x)dx = \int_{B\cap\Omega_n} |\det\Phi'(x)|dx \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N})$$

が成り立つので, (5.179) と測度の単調収束性 (命題 5.32 の (4)) より，

$$m(\Phi(B \cap \Omega)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m(\Phi(B \cap \Omega_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{B\cap\Omega_n} |\det\Phi'(x)|dx = \int_{B\cap\Omega} |\det\Phi'(x)|dx \ \ (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N})$$

が成り立つ．よって (5.178) が成り立つ． □

定理 5.229 (変数変換公式)**.** $A \subseteq \mathbb{R}^N$ を Borel 集合とし, $\Phi : A \to \mathbb{R}^N$ を A を含む $\mathbb{R}^N$ の開集合上で定義された $\mathbb{R}^N$ 値 C^1 級写像の A 上への制限とする．そして Φ が次を満たすとする．

(1) Φ は A の内部 A° 上で単射であり, $\det\Phi'(x) \neq 0$ $(\forall x \in A^\circ)$ である．

(2) $A \backslash A^\circ$ は Lebesgue 測度が 0 の σ-コンパクト集合に含まれる．

(3) $\Phi(A) \subseteq \mathbb{R}^N$ は Borel 集合である．

---

*70 $\Omega_n \ni x \mapsto \Phi(x) \in \Phi(\Omega_n)$ が同相写像であること, $\Phi(B \cap \Omega_n)$ は有界集合である (従って Lebesgue 測度は有限値である) ことに注意.

*71 命題 5.175 より $\mathbb{R}^N$ の開集合 Ω_n は σ-コンパクトである.

このとき任意の非負値 Borel 関数 $f:\Phi(\Omega)\to[0,\infty]$ に対し,

$$\int_{\Phi(A)} f(x)dx=\int_A f(\Phi(x))|\det\Phi'(x)|dx$$

が成り立つ.

証明.

$$\Phi(A)\backslash\Phi(A^\circ)\subseteq\Phi(A\backslash A^\circ)$$

であるから, 条件 (2), (3) と補題 5.227 より,

$$m(\Phi(A)\backslash\Phi(A^\circ))=0$$

である. よって条件 (1), (2) と補題 5.228 より,

$$\int_{\Phi(A)} f(x)dx=\int_{\Phi(A^\circ)} f(x)dx=\int_{A^\circ} f(\Phi(x))|\det\Phi'(x)|dx=\int_A f(\Phi(x))|\det\Phi'(x)|dx$$

が成り立つ. □

5.13 Bochner 積分 (Banach 空間値関数の積分)

この節では Banach 空間と言えば $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間を指すとする.

定義 5.230 (Banach 空間値関数の Bochner 可測性)**.** $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間, B を Banach 空間とする. $f:X\to B$ が $(X,\mathfrak{M})$ 上の B 値 Bochner 可測関数であるとは次が成り立つことを言う.

(1) 任意の $\varphi\in B^*$ に対し $\varphi\circ f:X\ni x\mapsto\Phi(f(x))\in\mathbb{C}$ が $(X,\mathfrak{M})$ 上の可測関数.
(2) $f(X)\subseteq B$ が可分.

注意 5.231. 距離空間においては可分であることと第二可算であることは同値である (命題 1.108) から, 距離空間の可分な部分集合の部分集合は可分である. 特にもし B が可分な Banach 空間であるならば B 値関数の Bochner 可測性の定義 5.230 の条件 (2) は自動的に満たされる.

定義 5.232 (Bochner 可測単関数)**.** $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間, B を Banach 空間とする. $(X,\mathfrak{M})$ 上の B 値 Bochner 可測関数で, 有限個の値しか取らないものを $(X,\mathfrak{M})$ 上の B 値 Bochner 可測単関数と言う.

命題 5.233. $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間, B を Banach 空間とする. このとき次が成り立つ.

(1) $f,g:X\to B$ が Bochner 可測関数ならば, $f+g:X\ni x\mapsto f(x)+g(x)\in B$ は Bochner 可測関数である.
(2) $f:X\to B$ が Bocnher 可測関数であり $h:X\to\mathbb{C}$ が可測関数ならば, $hf:X\ni x\mapsto h(x)f(x)\in B$ は Bochner 可測関数である.
(3) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $(X,\mathfrak{M})$ 上の B 値 Bochner 可測関数の列であり任意の $x\in X$ に対し,

$$f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\in B$$

(ノルム収束) が存在するならば, $f:X\ni x\mapsto f(x)\in B$ は Bochner 可測関数である.
(4) $f:X\to B$ が Bochner 可測関数ならば, $\|f(\cdot)\|:X\ni x\mapsto\|f(x)\|\in[0,\infty)$ は可測関数である.
(5) $f:X\to B$ が Bochner 可測単関数であるための必要十分条件は有限個の $b_1,\cdots,b_n\in B$ と $E_1,\cdots,E_n\in\mathfrak{M}$ が存在し,

$$f(x)=\sum_{j=1}^n\chi_{E_j}(x)b_j(x)\quad(\forall x\in X)$$

と表されることである.

証明. (1) 任意の $\varphi \in B^*$ に対し, $\varphi \circ f : X \ni x \mapsto \varphi(f(x)) \in \mathbb{C}$ と $\varphi \circ g : X \ni x \mapsto \varphi(g(x)) \in \mathbb{C}$ は可測関数であるので,

$$\varphi \circ (f+g) : X \ni x \mapsto \varphi(f(x)+g(x)) = \varphi(f(x)) + \varphi(g(x)) \in \mathbb{C}$$

は可測関数である．また,

$$(f+g)(X) \subseteq f(X) + g(X)$$

であり右辺は可分なので $(f+g)(X)$ も可分である (注意 5.231 を参照).

(2) 任意の $\varphi \in B^*$ に対し, $\varphi \circ f : X \ni x \mapsto \varphi(f(x)) \in \mathbb{C}$ は可測関数であるので,

$$\varphi \circ (hf) : X \ni x \mapsto \varphi(h(x)f(x)) = h(x)\varphi(f(x)) \in \mathbb{C}$$

は可測関数である．また,

$$(hf)(X) \subseteq \mathbb{C}f(X)$$

であり右辺は可分なので $(hf)(X)$ も可分である．

(3) 任意の $\varphi \in B^*$, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\varphi \circ f_n : X \ni x \mapsto \varphi(f_n(x)) \in \mathbb{C}$ は可測関数なので,

$$\varphi \circ f : X \ni x \mapsto \varphi(f(x)) = \lim_{n\to\infty} (\varphi(f_n(x))) \in \mathbb{C}$$

は可測関数である．また,

$$f(X) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(X)}$$

であり右辺は可分なので $f(X)$ も可分である．

(4) $f(X)$ は可分なので稠密な可算部分集合 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を持つ．そして Hahn-Banach の拡張定理 3.72 より B^* の列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\|\varphi_n\| \leqslant 1, \quad \varphi_n(b_n) = \|b_n\| \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{5.181}$$

を満たすものが取れる．今,

$$\|f(x)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(f(x))| \quad (\forall x \in X) \tag{5.182}$$

が成り立つことを示す．任意の $x \in X$, 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ を取る．$f(x) \in \overline{\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ であるから $\|f(x) - b_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が取れて, (5.181) より,

$$\begin{aligned}\|f(x)\| &\geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(f(x))| \geqslant |\varphi_{n_0}(f(x))| \geqslant |\varphi_{n_0}(b_{n_0})| - |\varphi_{n_0}(f(x) - b_{n_0})| \\ &\geqslant \|b_{n_0}\| - \|f(x) - b_{n_0}\| \geqslant \|f(x)\| - 2\|f(x) - b_{n_0}\| > \|f(x)\| - \varepsilon\end{aligned}$$

となる．$\varepsilon \in (0,\infty)$ の任意性より,

$$\|f(x)\| \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(f(x))| \geqslant \|f(x)\|$$

を得る．よって (5.182) が成り立つ．これより任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\{x \in X : \|f(x)\| > \alpha\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : |\varphi_n(f(x))| > \alpha\}$$

であり, 各 $n \in \mathbb{N}$ について $\varphi_n \circ f : X \ni x \mapsto \varphi_n(f(x)) \in \mathbb{C}$ は可測関数なので $\{x \in X : |\varphi_n(f(x))| > \alpha\} \in \mathfrak{M}$ であるから $\{x \in X : \|f(x)\| > \alpha\} \in \mathfrak{M}$, 従って, $\|f(\cdot)\| : X \ni x \mapsto \|f(x)\| \in [0,\infty)$ は可測関数である．

(5) Bochner 可測単関数の定義 5.232 より $f(X) = \{b_1, \cdots, b_n\}$ なる有限個の $b_1, \cdots, b_n \in B$ が取れる．(1), (4) より,

$$E_j := \{x \in X : f(x) = b_j\} = \{x \in X : \|f(x) - b_j\| = 0\} \in \mathfrak{M} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

であり,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \chi_{E_j}(x) b_j \quad (\forall x \in X)$$

である．

□

定義 5.234 (有限可測分割)**.** $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間とする. $E \in \mathfrak{M}$ に対し, 有限個の互いに交わらない $E_1,\cdots,E_n \in \mathfrak{M}$ で $E = \bigcup_{j=1}^n E_j$ を満たすものを E の有限可測分割と言う.

定義 5.235 (準可測単関数性)**.** $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間, B を Banach 空間とし, $E \in \mathfrak{M}$, $f : X \to B$ とする. 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し E の有限可測分割 $E_1,\cdots,E_n \in \mathfrak{M}$ が存在し,

$$\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon \ \ (\forall j \in \{1,\cdots,n\}, \forall x, y \in E_j)$$

が成り立つとき, f は E 上で準可測単関数的であると言うこととする (標準的用語ではない).

命題 5.236 (準可測単関数性が意味すること)**.** $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間, B を Banach 空間とし, $f : X \to B$ が $E \in \mathfrak{M}$ 上で準可測単関数的であるとする. このとき任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し, Bochner 可測関数 $s : X \to B$ で,

$$\begin{aligned} &\|f(x) - s(x)\| < \varepsilon \ \ (\forall x \in E), \ \ \|s(x)\| \leqslant \|f(x)\| \ \ (\forall x \in X), \\ &s(x) = 0 \ \ (\forall x \in X \backslash E) \end{aligned} \tag{5.183}$$

を満たすものが存在する.

証明. 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し, 準可測単関数性の定義 5.235 より, E の有限可測分割 $E_1,\cdots,E_n$ で,

$$\|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ (\forall j \in \{1,\cdots,n\}, \forall x, y \in E_j)$$

を満たすものが取れる. 各 $j \in \{1,\cdots,n\}$ について $x_j \in E_j$ を取り, $b_j \in B$ を,

$$b_j := \begin{cases} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\|f(x_j)\|}\right) f(x_j) & \left(\|f(x_j)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ 0 & \left(\|f(x_j)\| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \end{cases}$$

と定義する. そして Bochner 可測単関数

$$s := \sum_{j=1}^n \chi_{E_j} b_j : X \ni x \mapsto \sum_{j=1}^n \chi_{E_j}(x) b_j \in B$$

を定義する. s が (5.183) を満たすことを示す.

$$\|s(x)\| = 0 \leqslant \|f(x)\| \ \ (\forall x \in X \backslash E)$$

が成り立つことは自明である. 任意の $x \in E$ を取り,

$$\|f(x) - s(x)\| < \varepsilon, \ \ \|s(x)\| \leqslant \|f(x)\| \tag{5.184}$$

が成り立つことを示せばよい. $x \in E_j$ なる $j \in \{1,\cdots,n\}$ を取る. もし $\|f(x_j)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ならば $\|s(x)\| = 0 \leqslant \|f(x)\|$ であり,

$$\|f(x) - s(x)\| = \|f(x)\| = \|f(x) - f(x_j)\| + \|f(x_j)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

である. よって (5.184) は成り立つ. またもし $\|f(x_j)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ ならば,

$$\begin{aligned} \|f(x) - s(x)\| &= \left\| f(x) - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\|f(x_j)\|}\right) f(x_j) \right\| = \left\| f(x) - f(x_j) + \frac{\varepsilon}{2\|f(x_j)\|} f(x_j) \right\| \\ &\leqslant \|f(x) - f(x_j)\| + \|f(x_j)\| \frac{\varepsilon}{2\|f(x_j)\|} < \varepsilon \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} \|f(x)\| - \|s(x)\| &= \|f(x)\| - \|f(x_j)\| \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\|f(x_j)\|}\right) = \|f(x)\| - \|f(x_j)\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geqslant -\|f(x) - f(x_j)\| + \frac{\varepsilon}{2} > 0 \end{aligned}$$

である. よって (5.184) は成り立つ. □

命題 5.237. $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, B を Banach 空間とする．このとき次が成り立つ．

(1) Bochner 可測単関数 $s : X \to B$ は任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対して E 上で準可測単関数的である．

(2) $f, g : X \to B$ が $E \in \mathfrak{M}$ 上で準可測単関数的であるならば, $f + g : X \to B$ も E 上で準可測単関数的である．また任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し $\alpha f : X \to B$ も E 上で準可測単関数的である．

(3) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n : X \to B$ が $E \in \mathfrak{M}$ 上で準可測単関数的であるとし, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は E 上で一様に $f : X \to B$ に収束するとする．すなわち,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

が成り立つとする．このとき f は E 上で準可測単関数的である．

証明. (1) 命題 5.233 の (5) より X の有限可測分割 $X_1, \cdots, X_n \in \mathfrak{M}$ と $b_1, \cdots, b_n \in B$ で,

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} \chi_{X_j}(x) b_j \quad (\forall x \in X)$$

を満たすものが取れる．任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し $E_j := E \cap X_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ とおけば $E_1, \cdots, E_n$ は E の有限可測分割であり,

$$\|s(x) - s(y)\| = 0 \quad (\forall j \in \{1, \cdots, n\}, \forall x, y \in E_j)$$

であるから s は準可測単関数的である．

(2) 準可測単関数性の定義 5.235 より自明である．

(3) 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し,

$$\sup_{x\in E} \|f_{n_0}(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が取れて, f_n は E 上準可測単関数的なので E の有限可測分割 $E_1, \cdots, E_n$ で,

$$\|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall j \in \{1, \cdots, n\}, \forall x, y \in E_j)$$

を満たすものが取れる．よって任意の $j \in \{1, \cdots, n\}$, 任意の $x, y \in E_j$ に対し,

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|f(x) - f_{n_0}(x)\| + \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\| + \|f_{n_0}(y) - f(y)\| < \varepsilon$$

となるので f は E 上準可測単関数的である．

□

定義 5.238 (性質 $P(\mu)$)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, B を Banach 空間, $f : X \to B$ とする．f が性質 $P(\mu)$ を持つ (標準的用語ではない) とは, $\mu(F) < \infty$ なる任意の $F \in \mathfrak{M}$ と任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し, $E \subseteq F$, $\mu(F \backslash E) < \varepsilon$ を満たす $E \in \mathfrak{M}$ で, f が E 上準可測単関数的であるようなものが取れることを言う．

命題 5.239. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, B を Banach 空間とする．このとき次が成り立つ．

(1) Bochner 可測単関数 $s : X \to B$ は性質 $P(\mu)$ を持つ．

(2) $f, g : X \to B$ が性質 $P(\mu)$ を持つならば, $f + g : X \to B$ も性質 $P(\mu)$ を持つ．また任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し $\alpha f : X \to B$ も性質 $P(\mu)$ を持つ．

(3) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(X, \mathfrak{M})$ 上の B 値 Bochner 可測関数の列で各 $n \in \mathbb{N}$ に対し f_n は性質 $P(\mu)$ を持つとする．そして任意の $x \in X$ に対し $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in B$ が存在するとする．このとき Bochner 可測関数 $f : X \ni x \mapsto f(x) \in B$ は性質 $P(\mu)$ を持つ．

証明. (1) 命題 5.237 の (1) より自明である．

(2) $\mu(F) < \infty$ なる任意の $F \in \mathfrak{M}$ と任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ を取る．f, g は性質 $P(\mu)$ を持つので $E_j \subseteq F$, $\mu(F \backslash E_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ $(j = 1, 2)$ を満たす $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ で f が E_1 上準可測単関数的, g が E_2 上準可測単関数的であるようなものが取れる．$E := E_1 \cap E_2 \in \mathfrak{M}$ とおけば f, g は E 上準可測単関数的なので $f + g$ は E 上準可測単関数的であり,

$$\mu(F \backslash E) \leqslant \mu(F \backslash E_1) + \mu(F \backslash E_2) < \varepsilon$$

であるから $f+g$ は性質 $P(\mu)$ を持つ. αf が性質 $P(\mu)$ を持つことは明らかである.

(3) f が Bochner 可測であることは命題 5.233 の (3) による. $\mu(F)<\infty$ なる任意の $F\in\mathfrak{M}$ と任意の $\varepsilon\in(0,\infty)$ を取り固定する.

$$C_{n,m}:=\left\{x\in F:\|f(x)-f_k(x)\|<\frac{1}{m}\ (\forall k\geqslant n)\right\}\quad(\forall n,m\in\mathbb{N})$$

とおくと, 命題 5.233 の (4) より $C_{n,m}\in\mathfrak{M}$ $(\forall n,m\in\mathbb{N})$ である. 任意の $m\in\mathbb{N}$ に対し,

$$C_{n,m}\subseteq C_{n+1,m}\quad(\forall n\in\mathbb{N}),\quad F=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_{n,m}$$

であるから測度の単調収束性 (命題 5.32 の (4)) より $n(m)\in\mathbb{N}$ で,

$$\mu\left(F\backslash C_{n(m),m}\right)<\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$$

を満たすものが取れる. そこで,

$$E_0:=\bigcap_{m\in\mathbb{N}}C_{n(m),m}\in\mathfrak{M}$$

とおけば,

$$\mu(F\backslash E_0)\leqslant\sum_{m\in\mathbb{N}}\mu(F\backslash C_{n(m),m})<\frac{\varepsilon}{2}$$

であり, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は E_0 上で一様に f に収束する. 今, 各 $n\in\mathbb{N}$ について f_n は性質 $P(\mu)$ を持つので $E_n\in\mathfrak{M}$ で,

$$\mu(F\backslash E_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},\quad f_n\text{ は }E_n\text{ 上準可測単関数的.}$$

を満たすものが取れて,

$$E:=\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+}E_n\in\mathfrak{M}$$

とおけば, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し f_n は E 上準可測単関数的であり,

$$\mu(F\backslash E)\leqslant\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\mu(F\backslash E_n)<\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\varepsilon$$

である. そして $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $E(\subseteq E_0)$ 上で f に一様収束するので, 命題 5.237 の (3) より f は E 上で準可測単関数的である. ゆえに f は性質 $P(\mu)$ を持つ.

□

命題 5.240. $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を測度空間, B を Banach 空間, $f:X\to B$ を Bochner 可測関数とする. このとき f は性質 $P(\mu)$ を持つ.

証明. $f(X)$ は可分なので稠密な可算部分集合 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が取れる. よって任意の $m\in\mathbb{N}$ に対し,

$$X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\|f(\cdot)-b_n\|<\frac{1}{m}\right)$$

と表せる. 命題 5.233 の (4) より,

$$\left(\|f(\cdot)-b_n\|<\frac{1}{m}\right)\in\mathfrak{M}\quad(\forall n,m\in\mathbb{N})$$

であるから, 任意の $m\in\mathbb{N}$ に対し $\mathfrak{M}$ の非交叉列 $(X_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X_{m,n},\quad X_{m,n}\subseteq\left(\|f(\cdot)-b_n\|<\frac{1}{m}\right)\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

を満たすものが取れる. 今, 任意の $m\in\mathbb{N}$ に対し $f_m:X\to B$ を,

$$f_m(x):=\sum_{n\in\mathbb{N}}\chi_{X_{m,n}}(x)b_n\quad(\forall x\in X)$$

とおくと, f_m は Bochner 可測単関数の列 $\left(\sum_{n=1}^{N} \chi_{X_{m,n}}(\cdot)b_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ の各点収束極限であるから, 命題 5.239 の (1), (3) より性質 $P(\mu)$ を持つ Bochner 可測関数である. そして,

$$\|f(x) - f_m(x)\| < \frac{1}{m} \quad (\forall x \in X, \forall m \in \mathbb{N})$$

であるから, f は性質 $P(\mu)$ を持つ Bochner 可測関数の列 $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ の各点収束極限であるから命題 5.239 の (3) より性質 $P(\mu)$ を持つ. □

命題 5.241. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間, B を Banach 空間, $f : X \to B$ を Bochner 可測関数とする. このとき $\mu(F) < \infty$ を満たす任意の $F \in \mathfrak{M}$ に対し $\mathfrak{M}$ の非交叉列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq F, \quad \mu\left(F \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = 0, \quad \text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対し } f \text{ は } E_n \text{ 上で準可測単関数的.} \tag{5.185}$$

を満たすものが取れる.

証明. 命題 5.240 より f は性質 $P(\mu)$ (定義 5.238) を持つ. よって

$$E_1 \subseteq F, \quad \mu(F\backslash E_1) < 1, \quad f \text{ は } E_1 \text{ 上で準可測単関数的.}$$

なるものが取れる. そして,

$$E_2 \subseteq F\backslash E_1, \quad \mu\left(F\backslash(E_1 \cup E_2)\right) = \mu\left((F\backslash E_1)\backslash E_2\right) < \frac{1}{2}, \quad f \text{ は } E_2 \text{ 上で準可測単関数的.}$$

なるものが取れる. さらに,

$$E_3 \subseteq F\backslash(E_1 \cup E_2), \quad \mu\left(F\backslash(E_1 \cup E_2 \cup E_3)\right) = \mu\left((F\backslash(E_1 \cup E_2))\backslash E_3\right) < \frac{1}{3}, \quad f \text{ は } E_3 \text{ 上で準可測単関数的.}$$

なるものが取れる. 同様の操作を繰り返せば, $\mathfrak{M}$ の列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$E_n \subseteq F\backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k, \quad \mu\left(F\backslash \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) < \frac{1}{n}, \quad f \text{ は } E_n \text{ 上準可測単関数的.}$$

であるものが構成できる. このとき $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathfrak{M}$ の非交叉列であり, 明らかに (5.185) を満たす. □

定理 5.242 (Bochner 可測関数の Bochner 可測単関数による近似)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を σ-有限測度空間, B を Banach 空間とし, $f : X \to B$ を Bochner 可測関数とする. このとき Bochner 可測単関数の列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で次を満たすものが取れる.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$, 任意の $x \in X$ に対し $\|s_n(x)\| \leqslant \|f(x)\|$.

(2) μ-a.e. $x \in X$ で $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$.

証明. $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ は σ-有限なので, 命題 5.241 より, $\mathfrak{M}$ の非交叉列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\mu\left(X\backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = 0, \quad \text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対し } f \text{ は } E_n \text{ 上準可測単関数的.}$$

なるものが取れる. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, 命題 5.236 より, Bochner 可測単関数の列 $(s_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ で,

$$\begin{aligned}
&\|f(x) - s_{n,m}(x)\| < \frac{1}{m} \quad (\forall x \in E_{n,m}), \quad \|s_{n,m}(x)\| \leqslant \|f(x)\| \quad (\forall x \in X), \\
&s_{n,m}(x) = 0 \quad (\forall x \in X\backslash E_{n,m})
\end{aligned}$$

を満たすものが取れる. そこで Bochner 可測単関数の列 $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ を,

$$s_m(x) := \sum_{n=1}^{m} s_{n,m}(x) \quad (\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in X)$$

としてを定義すると,

$$\|s_m(x)\| \leqslant \|f(x)\| \quad (\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in X)$$

であり, 任意の $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ に対し, 十分大きい $m \in \mathbb{N}$ を取れば,

$$\|f(x) - s_m(x)\| \leqslant \frac{1}{m}$$

となるので,

$$\lim_{m \to \infty} s_m(x) = f(x) \quad (\mu\text{-a.e. } x \in X)$$

が成り立つ. □

定義 5.243 (測度に関して a.e. で等しい Bochner 可測関数類全体)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を σ-有限測度空間, B を Banach 空間とする. $(X, \mathfrak{M})$ 上の B 値 Bochner 可測関数全体を $\mathcal{L}(X, \mathfrak{M}, B)$ とおき,

$$\mathcal{N}(X, \mathfrak{M}, \mu, B) := \{f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{M}, B) : f(x) = 0 \ (\mu\text{-a.e. } x \in X)\}$$

とおく. このとき命題 5.233 より $\mathcal{L}(X, \mathfrak{M}, B)$ は各点ごとの演算で $\mathbb{C}$ 上の線型空間であり, $\mathcal{N}(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ は明らかに $\mathcal{L}(X, \mathfrak{M}, B)$ の線型部分空間である. そこで商線型空間 (定義 2.26)

$$L(X, \mathfrak{M}, \mu, B) := \mathcal{L}(X, \mathfrak{M}, B)/\mathcal{N}(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$$

を定義し, 商写像を,

$$\mathcal{L}(X, \mathfrak{M}, B) \ni f \mapsto [f] \in L(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$$

と表す. $[f] \in L(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ は混乱の恐れがない場合, 簡単のため代表元 $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{M}, B)$ によって表すことがある.

定義 5.244 (Banach 空間値 L^p 空間)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を σ-有限測度空間, B を Banach 空間とする. 任意の $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{M}, B)$ に対し命題 5.233 の (4) より $\|f(\cdot)\| : X \ni x \mapsto \|f(x)\| \in [0, \infty)$ は可測関数である. そこで,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu, B) = \{f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{M}, B) : \|f(\cdot)\| \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)\} \quad (\forall p \in [1, \infty]), \\
&\|f\|_p := \|\|f(\cdot)\|\|_p = \left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty) \quad (\forall p \in [0, \infty)), \\
&\|f\|_\infty := \|\|f(\cdot)\|\|_\infty = \inf\{\alpha \in [0, \infty) : \mu((\alpha < \|f(\cdot)\|)) = 0\}
\end{aligned}$$

と定義する. $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ を $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上の B 値 L^p 関数と言い, $\|f\|_p$ を f の L^p ノルムと言う. 命題 5.124 より任意の $p \in [1, \infty]$ に対し $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ は各点ごとの演算で $\mathbb{C}$ 上の線型空間をなし, $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ 上の L^p ノルムはセミノルムである. そして,

$$\mathcal{N}(X, \mathfrak{M}, \mu, B) = \{f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu, B) : \|f\|_p = 0\} \quad (\forall p \in [1, \infty])$$

であるから, 商線型空間

$$L^p(X, \mathfrak{M}, \mu, B) = \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu, B)/\mathcal{N}(X, \mathfrak{M}, \mu, B) \subseteq L(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$$

が定義でき,

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p \quad (\forall [f] \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu, B))$$

としてノルム

$$L^p(X, \mathfrak{M}, \mu, B) \ni [f] \mapsto \|[f]\|_p \in [0, \infty)$$

が定義できる. これも L^p ノルムと言う. そして L^p ノルムによるノルム空間 $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ を $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上の B 値 L^p 空間と言う. 次の定理 5.245 で見るように $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ は Banach 空間である.

定理 5.245 (Banach 空間値 L^p 空間の完備性)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を σ-有限測度空間, B を Banach 空間とする. このとき任意の $p \in [1, \infty]$ に対し $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ (定義 5.244) は Banach 空間である.

証明.　(1) $p \in [1,\infty)$ の場合. $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ を $L^p(X,\mathfrak{M},\mu,B)$ の任意の Cauchy 列とする. 部分列 $([f_{k(n)}])_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\|f_{k(n+1)} - f_{k(n)}\|_p < \frac{1}{2^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たすものを取り, 各点で単調増加な非負値可測関数の列 $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$ を,

$$g_N := \sum_{n=1}^{N} \|f_{k(n+1)}(\cdot) - f_{k(n)}(\cdot)\| \quad (\forall N \in \mathbb{N})$$

として定義する. Minkowski の不等式 5.122 より任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\left(\int_X |g_N(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \left(\int_X \|f_{k(n+1)}(x) - f_{k(n)}(x)\|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \|f_{k(n+1)} - f_{k(n)}\|_p \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \leqslant 1$$

であるから単調収束定理 5.40 より,

$$\int_X \sup_{n\in\mathbb{N}} g_N(x)^p d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X g_N(x)^p d\mu(x) \leqslant 1 < \infty.$$

よって命題 5.46 より μ-a.e. $x \in X$ で $\sup_{N\in\mathbb{N}} g_N(x)^p < \infty$ であるから,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_{k(n+1)}(x) - f_{k(n)}(x)\| = \sup_{N\in\mathbb{N}} g_N(x) < \infty \quad (\mu\text{-a.e. } x \in X).$$

ゆえに B の完備性より μ-a.e. $x \in X$ で,

$$\lim_{n\to\infty} f_{k(n)}(x) = f_{k(1)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{k(n+1)}(x) - f_{k(n)}(x)) \in B$$

が存在する. よって命題 5.233 の (3) より Bochner 可測関数 $f : X \to B$ で,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_{k(n)}(x) \quad (\mu\text{-a.e. } x \in X) \tag{5.186}$$

を満たすものが取れる. 今, 任意の正実数 ε に対し, $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ が $L^p(X,\mathfrak{M},\mu,B)$ の Cauchy 列であることから,

$$\|f_n - f_m\|_p \leqslant \varepsilon \quad (\forall n, m \geqslant n_0) \tag{5.187}$$

を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が取れる. $m \geqslant n_0$ を満たす任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し (5.186) より,

$$|f(x) - f_m(x)|^p = \lim_{n\to\infty} \|f_{k(n)}(x) - f_m(x)\|^p = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{j\geqslant n} \|f_{k(j)}(x) - f_m(x)\|^p \quad (\mu\text{-a.e. } x \in X)$$

であるから, Fatou の補題 5.41 と (5.187) より,

$$\int_X \|f(x) - f_m(x)\|^p d\mu(x) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{j\geqslant n} \int_X \|f_{k(j)}(x) - f_m(x)\|^p d\mu(x)$$
$$\leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{j\geqslant n} \int_X \|f_{k(j)}(x) - f_m(x)\|^p d\mu(x) \leqslant \sup_{n\geqslant n_0} \int_X \|f_{k(n)}(x) - f_m(x)\|^p d\mu(x)$$
$$= \sup_{n\geqslant n_0} \|f_{k(n)} - f_m\|_p^p \leqslant \varepsilon^p$$

となる. よって $f - f_m \in \mathcal{L}^p(X,\mathfrak{M},\mu,B)$ であるから $f = f - f_m + f_m \in \mathcal{L}^p(X,\mathfrak{M},\mu,B)$ であり,

$$\|f - f_m\|_p = \left(\int_X \|f(x) - f_m(x)\|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon \quad (\forall m \geqslant n_0)$$

が成り立つ. ε は任意の正実数であるから $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ は $[f] \in L^p(X,\mathfrak{M},\mu,B)$ に収束する. ゆえに $L^p(X,\mathfrak{M},\mu,B)$ は Banach 空間である.

(2) $p = \infty$ の場合. $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ を $L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ の任意の Cauchy 列とする.

$$N := \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} (\|f_n - f_m\|_\infty < \|f_n(\cdot) - f_m(\cdot)\|)$$

とおけば,

$$\mu(N) \leqslant \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \mu((\|f_n - f_m\|_\infty < \|f_n(\cdot) - f_m(\cdot)\|)) = 0$$

である. 任意の正実数 ε に対し,

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \ \ (\forall n, m \geqslant n_0)$$

を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ を取ると,

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \ \ (\forall n, m \geqslant n_0, \forall x \in X\backslash N)$$

であるから $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $X\backslash N$ 上で一様 Cauchy 条件 (定義 1.126) を満たす. よって B の完備性と命題 5.233 の (3) より,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ \ (\forall x \in X\backslash N)$$

を満たす Bochner 可測関数 $f : X \to B$ が取れて, 定理 1.127 より $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $X\backslash N$ 上で f に一様収束する. ゆえに任意の正実数 ε に対し,

$$\|f(x) - f_n(x)\| \leqslant \varepsilon \ \ (\forall n \geqslant n_1, \forall x \in X\backslash N)$$

を満たす $n_1 \in \mathbb{N}$ が取れる. $n \geqslant n_1$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$(\varepsilon < \|f(\cdot) - f_n(\cdot)\|) \subseteq N$$

であるから,

$$\mu((\varepsilon < \|f(\cdot) - f_n(\cdot)\|)) \leqslant \mu(N) = 0.$$

よって $f - f_n \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ であるから $f = (f - f_n) + f_n \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ であり,

$$\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon \ \ (\forall n \geqslant n_1)$$

が成り立つ. ε は任意の正実数であるから $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ は $[f] \in L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ に収束する. ゆえに $L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ は Banach 空間である.

□

命題 5.246. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を σ-有限測度空間, $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. このとき任意の Bochner 可測関数 $f, g : X \to \mathcal{H}$ に対し,

$$(f(\cdot) \mid g(\cdot)) : X \ni x \mapsto (f(x) \mid g(x)) \in \mathbb{C} \tag{5.188}$$

は可測関数である. またもし $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{H})$ ならば (5.188) は $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に属し,

$$\|(f(\cdot) \mid g(\cdot))\|_1 = \int_X |(f(x) \mid g(x))| d\mu(x) \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2 \tag{5.189}$$

が成り立つ.

証明.

$$(f(x) \mid g(x)) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k (f(x) + i^k g(x) \mid f(x) + i^k g(x)) = \sum_{k=0}^{3} i^k \|f(x) + i^k g(x)\|^2 \ \ (\forall x \in X)$$

であり, 命題 5.233 より,

$$X \ni x \mapsto \|f(x) + i^k g(x)\|^2 \in [0, \infty) \ \ (k = 0, 1, 2, 3)$$

はそれぞれ可測関数である. よって (5.188) は可測関数である. もし $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{H})$ ならば Hölder の不等式 5.120 より,

$$\int_X |(f(x) \mid g(x))| d\mu(x) \leqslant \int_X \|f(x)\| \|g(x)\| d\mu(x) \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$$

であるから (5.188) は $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に属し, (5.189) が成り立つ. □

定義 5.247 (Hilbert 空間値 L^2 空間)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を σ-有限測度空間, $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. このとき命題 5.246 より,

$$([f] \mid [g])_2 := \int_X (f(x) \mid g(x)) d\mu(x) \in \mathbb{C} \quad (\forall [f], [g] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{H}))$$

として準双線型汎関数 (定義 3.45)

$$(\cdot \mid \cdot)_2 : L^2(X, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{H}) \times L^2(X, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{H}) \ni ([f], [g]) \mapsto ([f] \mid [g])_2 \in \mathbb{C}$$

が定義できる.

$$([f] \mid [f])_2 = \|[f]\|_2^2 \quad (\forall [f] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{H}))$$

より $(\cdot \mid \cdot)_2$ は $L^2(X, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{H})$ 上の内積であり, 定理 5.245 よりこの内積によって $L^2(X, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{H})$ は Hilbert 空間である. 内積 $(\cdot \mid \cdot)_2$ を L^2 内積と言う.

定理 5.248 (Banach 空間値 L^p 関数の Bochner 可測単関数による近似)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を σ-有限測度空間, B を Banach 空間, $p \in [1, \infty)$ とする. このとき任意の $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ に対し Bochner 可測単関数の列 $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で次を満たすものが取れる.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$, 任意の $x \in X$ に対し $\|s_n(x)\| \leqslant \|f(x)\|$.
(2) μ-a.e. $x \in X$ で $\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x)$.
(3) $\lim_{n \to \infty} \|f - s_n\|_p = 0$.

証明. 任意の $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ に対し, 定理 5.242 における Bochner 可測単関数の列 $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を取る. すると (1), (2) が成り立ち, (1) より,

$$\|f(x) - s_n(x)\|^p \leqslant 2^p \|f(x)\|^p \quad (\forall x \in X) \tag{5.190}$$

である. $\|f(\cdot)\|^p : X \ni x \mapsto \|f(x)\|^p \in [0, \infty)$ は μ に関して可積分なので, (2) と (5.190) と Lebesgue 優収束定理 5.59 より,

$$\int_X \|f(x) - s_n(x)\|^p d\mu(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ. よって (3) が成り立つ. □

定理 5.249 (Bochner 積分の一意存在)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を σ-有限測度空間, B を Banach 空間とする. このとき任意の $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ に対し,

$$\int_X f(x) d\mu(x) \in B$$

で,

$$\varphi\left(\int_X f(x) d\mu(x)\right) = \int_X \varphi(f(x)) d\mu(x) \quad (\forall \varphi \in B^*)$$

を満たすものが唯一つ存在する.

証明. B の第二双対空間 B^{**} への自然な等長埋め込み (定理 3.73) を,

$$\iota : B \ni b \mapsto \iota(b) \in B^{**}, \quad \iota(b)(\varphi) = \varphi(b) \quad (\forall b \in B, \forall \varphi \in B^*)$$

とおく. ι の等長性 (ノルム保存性) と B が Banach 空間であることにより $\iota(B) \subseteq B^{**}$ は B^{**} の閉部分空間である. 今, 任意の $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ に対し,

$$\int_X |\varphi(g(x))| d\mu(x) \leqslant \|\varphi\| \int_X \|g(x)\| d\mu(x) = \|\varphi\| \|g\|_1 \quad (\forall \varphi \in B^*)$$

であるから,

$$I_\mu(g) : B^* \ni \varphi \mapsto \int_X \varphi(g(x)) d\mu(x) \in \mathbb{C}$$

として $I_\mu(g) \in B^{**}$ が定義でき,

$$\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu, B) \ni g \mapsto I_\mu(g) \in B^{**} \tag{5.191}$$

はノルム減少 (つまり $\|I_\mu(g)\| \leqslant \|g\|_1$ $(\forall g \in \mathcal{L}^1(X,\mathfrak{M},\mu,B))$) な線型作用素である．任意の $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathfrak{M},\mu,B)$ に対し，定理 5.248 における Bochner 可測単関数の列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取ると，(5.191) がノルム減少な線型作用素であることから，

$$\|I_\mu(f) - I_\mu(s_n)\| = \|I_\mu(f - s_n)\| \leqslant \|f - s_n\|_1 \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{5.192}$$

となる．ここで任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$s_n = \sum_{k=1}^{m(n)} \chi_{E_{n,k}}(\cdot) b_{n,k}, \quad \mu(E_{n,k}) < \infty \quad (k = 1, \cdots, m(n))$$

と表せる*72ので，

$$\begin{aligned} I_\mu(s_n)(\varphi) &= \int_X \varphi(s_n(x)) d\mu(x) = \int_X \sum_{k=1}^{m(n)} \varphi(b_{n,k}) \chi_{E_{n,k}}(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{m(n)} \varphi(b_{n,k}) \mu(E_{n,k}) \\ &= \varphi\left(\sum_{k=1}^{m(n)} \mu(E_{n,k}) b_{n,k}\right) = \iota\left(\sum_{k=1}^{m(n)} \mu(E_{n,k}) b_{n,k}\right)(\varphi) \quad (\forall \varphi \in B^*). \end{aligned}$$

よって，

$$I_\mu(s_n) \in \iota(B) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ．(5.192) より $I_\mu(f) = \lim_{n\to\infty} I_\mu(s_n)$ であり，$\iota(B)$ は B^{**} の閉部分空間であるから，

$$I_\mu(f) = \lim_{n\to\infty} I_\mu(s_n) \in \iota(B)$$

が成り立つ．よって，

$$I_\mu(f) = \iota\left(\int_X f(x) d\mu(x)\right)$$

を満たす

$$\int_X f(x) d\mu(x) \in B$$

が唯一つ存在する．そして ι の等長性と (5.191) のノルム減少性より，

$$\left\|\int_X f(x) d\mu(x)\right\| = \left\|\iota\left(\int_X f(x) d\mu(x)\right)\right\| = \|I_\mu(f)\| \leqslant \|f\|_1$$

である． □

定義 5.250 (Bochner 積分)**.** $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を σ-有限測度空間，B を Banach 空間とする．このとき定理 5.249 より，任意の $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathfrak{M},\mu,B)$ に対し，

$$\int_X f(x) d\mu(x) \in B \tag{5.193}$$

で，

$$\varphi\left(\int_X f(x) d\mu(x)\right) = \int_X \varphi(f(x)) d\mu(x) \quad (\forall \varphi \in B^*)$$

を満たすものが唯一つ存在する．(5.193) を $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathfrak{M},\mu,B)$ の μ に関する Bochner 積分と言う．

命題 5.251. $(X,\mathfrak{M},\mu)$ を σ-有限測度空間，B を Banach 空間とする．このとき，

(1) Bochner 積分

$$L^1(X,\mathfrak{M},\mu,B) \ni [f] \mapsto \int_X f(x) d\mu(x) \in B$$

はノルム減少な有界線型作用素である．

*72 実際，任意の $k \in \{1,\cdots,m(n)\}$，任意の $x \in X$ に対し $\|b_{n,k}\|\chi_{E_{n,k}}(x) \leqslant \|s_n(x)\chi_{E_{n,k}}(x)\| \leqslant \|s_n(x)\|$ であるから $\|b_{n,k}\|\mu(E_{n,k}) \leqslant \|s_n\|_1 < \infty$ である．よってもし $\mu(E_{n,k}) = \infty$ ならば $b_{n,k} = 0$ である．

(2) C を Banach 空間, $T : B \to C$ を有界線型作用素とする．このとき任意の $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ に対し，

$$Tf : X \ni x \mapsto Tf(x) \in C$$

は $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu, C)$ に属し，

$$T\left(\int_X f(x)d\mu(x)\right) = \int_X Tf(x)d\mu(x)$$

が成り立つ．

(3) 任意の $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu, B)$ に対し，

$$\int_X f(x)d\mu(x) \in \overline{\operatorname{span} f(X)}$$

が成り立つ．

証明. (1) Bochner 積分の定義 5.250 と Banach 空間の第二双対空間への埋め込みの等長性 (定理 3.73) より自明である．

(2) 任意の $\psi \in C^*$ に対し $\psi \circ T \in B^*$ であるから，

$$\psi \circ (Tf) : X \ni x \mapsto \psi(Tf(x)) = \psi \circ T(f(x)) \in \mathbb{C}$$

は可測関数であり, $(Tf)(X) = T(f(X))$ は可分である．よって $Tf : X \to C$ は Bochner 可測関数 (定義 5.230) である．そして，

$$\int_X \|Tf(x)\|d\mu(x) \leqslant \int_X \|T\|\|f(x)\|d\mu(x) = \|T\|\|f\|_1$$

であるから $Tf \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu, C)$ であり, 任意の $\psi \in C^*$ に対し，

$$\psi\left(\int_X Tf(x)d\mu(x)\right) = \int_X \psi(Tf(x))d\mu(x) = \int_X (\psi \circ T)(f(x))d\mu(x) = (\psi \circ T)\left(\int_X f(x)d\mu(x)\right)$$

であるから，

$$\int_X Tf(x)d\mu(x) = T\left(\int_X f(x)d\mu(x)\right)$$

である．

(3) もし，

$$\int_X f(x)d\mu(x) \notin \overline{\operatorname{span} f(X)}$$

ならば, Hahn-Banach の分離定理 3.77 より, $\varphi \in B^*$ で，

$$\varphi\left(\int_X f(x)d\mu(x)\right) \neq 0, \quad \varphi\left(\overline{\operatorname{span} f(X)}\right) = \{0\} \tag{5.194}$$

を満たすものが取れることになる．しかし (5.194) の右の式は $\varphi(f(x)) = 0$ $(\forall x \in X)$ を意味するので，

$$\varphi\left(\int_X f(x)d\mu(x)\right) = \int_X \varphi(f(x))d\mu(x) = 0$$

となり, (5.194) の左の式と矛盾する．よって

$$\int_X f(x)d\mu(x) \in \overline{\operatorname{span} f(X)}$$

が成り立つ．

□

補題 5.252. B をノルム空間, A を B の可分な部分集合とすると, $\operatorname{span}(A) \subseteq B$ は可分である．

証明. A の稠密な可算部分集合を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とおく. $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}} := \{q + ir \in \mathbb{C} : q, r \in \mathbb{Q}\}$ とおくと, $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}$ の稠密な可算部分集合であり, $\mathrm{span}(A)$ おいて,

$$D := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} t_k a_k : t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{Q}_{\mathbb{C}} \right\}$$

は稠密な可算集合である. □

定理 5.253 (Bochner 積分に関する Fubini の定理)**.** $(X_1, \mathfrak{M}_1, \mu_1), (X_2, \mathfrak{M}_2, \mu_2)$ をそれぞれ σ-有限測度空間とし, その直積測度空間 (定義 5.82) $(X_1 \times X_2, \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ を考える. B を Banach 空間とし,

$$f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2, \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2, \mu_1 \otimes \mu_2, B)$$

とする. このとき $j, k \in \{1, 2\} : j \neq k$ に対し,

$$N_j := \left\{ x_j \in X_j : \int_{X_k} \|f(x_1, x_2)\| d\mu_k(x_k) = \infty \right\}$$

は μ_j-零集合であり, $F_j : X_j \to B$ を,

$$F_j(x_j) := \begin{cases} \int_{X_k} f(x_1, x_2) d\mu_k(x_k) & (x_j \in X_j \backslash N_j) \\ 0 & (x_j \in N_j) \end{cases}$$

として定義すると $F_j \in \mathcal{L}^1(X_j, \mathfrak{M}_j, \mu_j, B)$ が成り立つ. そして,

$$\int_{X_j} F_j(x_j) d\mu_j(x_j) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2)$$

が成り立つ.

証明. Tonelli の定理 5.84 より,

$$\int_{X_j} \int_{X_k} \|f(x_1, x_2)\| d\mu_k(x_k) d\mu_j(x_j) = \int_{X_1 \times X_2} \|f(x_1, x_2)\| d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) < \infty$$

であるから $(X_j, \mathfrak{M}_j)$ 上の非負値可測関数

$$X_j \ni x_j \mapsto \int_{X_k} \|f(x_1, x_2)\| d\mu_k(x_k) \in [0, \infty] \tag{5.195}$$

は μ_j に関して可積分であるので命題 5.49 より N_j は μ_j-零集合である. 任意の $\varphi \in B^*$ に対し,

$$\varphi(F_j(x_j)) = \begin{cases} \int_{X_k} \varphi(f(x_1, x_2)) d\mu_k(x_k) & (x_j \in X_j \backslash N_j) \\ 0 & (x_j \in N_j) \end{cases}$$

だから $\varphi \circ F_j : X_j \ni x_j \mapsto \varphi \circ F_j(x_j) \in \mathbb{C}$ は可測関数であり, 命題 5.251 の (3) より,

$$F_j(X_j) \subseteq \overline{\mathrm{span}\, f(X_1 \times X_2)}$$

であり, 右辺は可分である[*73]から $F_j(X_j)$ は可分である. ゆえに $F_j : X_j \to B$ は Bochner 可測関数 (定義 5.230) である. そして,

$$\begin{aligned} \int_{X_j} \|F_j(x_j)\| d\mu_j(x_j) &\leqslant \int_{X_j} \int_{X_k} \|f(x_1, x_2)\| d\mu_k(x_k) d\mu_j(x_j) \\ &= \int_{X_1 \times X_2} \|f(x_1, x_2)\| d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) \end{aligned}$$

[*73] $f(X_1 \times X_2)$ が可分であることと補題 5.252 による.

より $F_j \in \mathcal{L}^1(X_j, \mathfrak{M}_j, \mu_j, B)$ である. Fubini の定理 5.85 より任意の $\varphi \in B^*$ に対し,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\int_{X_j} F_j(x_j) d\mu_j(x_j)\right) &= \int_{X_j} \varphi(F_j(x_j)) d\mu_j(x_j) = \int_{X_j \setminus N_j} \int_{X_k} \varphi(f(x_1, x_2)) d\mu_k(x_k) d\mu(x_j) \\ &= \int_{X_j} \int_{X_k} \varphi(f(x_1, x_2)) d\mu_k(x_k) d\mu(x_j) \\ &= \int_{X_1 \times X_2} \varphi(f(x_1, x_2)) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) \\ &= \varphi\left(\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2)\right)\end{aligned}$$

であるから,

$$\int_{X_j} F_j(x_j) d\mu_j(x_j) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2)$$

が成り立つ. □

6 Euclid 空間内の多様体上の微積分

6.1 Euclid 空間内の多様体の定義

定義 6.1 (行列のランク)**.** $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ とする. $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ に対し, 線型写像 $\mathbb{K}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{K}^m$ の像 $A(\mathbb{K}^n) \subseteq \mathbb{K}^m$ の次元を A のランクと言う.

命題 6.2 (行列のランクに関する基本事項)**.** $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ とし, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ のランクを k とする. このとき次が成り立つ.

(1) $k \leqslant n, m$ であり, 線型写像 $\mathbb{K}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{K}^m$ が単射であるための必要十分条件は $k = n$ であることである.

(2) A の転置行列 (定義 2.44) $A^t \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ のランクも k である.

(3) A を縦ベクトル表記 (定義 2.49) したとき, その n 本の縦ベクトルから k 本の線型独立なベクトルが取れる.

(4) A を横ベクトル表記 (定義 2.49) したとき, その m 本の横ベクトルから k 本の線型独立なベクトルが取れる.

証明. (1) $A(\mathbb{K}^n) \subseteq \mathbb{K}^m$ であるから,

$$k = \dim A(\mathbb{K}^n) \leqslant \dim \mathbb{K}^m = m$$

である. また次元定理 2.40 より,

$$n = \dim A(\mathbb{K}^n) + \dim \mathrm{Ker}(A) = k + \dim \mathrm{Ker}(A)$$

であるから $k \leqslant n$ であり,

$$k = n \quad \Leftrightarrow \quad \dim \mathrm{Ker}(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ は単射}$$

である.

(2) $e_1^n, \cdots, e_n^n \in \mathbb{K}^n$, $e_1^m, \cdots, e_m^m \in \mathbb{K}^m$ をそれぞれ標準基底 (縦ベクトル) とする. まず正則行列は線型写像として線型同型写像であるので, 行列のランクは左右から正則行列を掛けても変わらないことに注意する. 命題 5.214 より, $M_{m\times m}(\mathbb{R})$ の有限個の基本行列 (定義 5.213) の積で表される正則行列 $P \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ と, $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ の有限個の基本行列の積で表される正則行列 $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ が存在し, 縦ベクトル表記で,

$$QAP = (e_1^m, \cdots, e_k^m, 0, \cdots, 0) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$$

となる. よって,

$$P^t A^t Q^t = (e_1^n, \cdots, e_k^n, 0 \cdots, 0) \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$$

であるから $P^tA^tQ^t$ のランクは k であり, 従って $A^t = (P^t)^{-1}(P^tA^tQ^t)(Q^t)^{-1}$ のランクは k である.

(3) $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ を縦ベクトル表記したものを $A = (a_1, \cdots, a_n)$ とする ($a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}^m$ は縦ベクトル) と,

$$A(\mathbb{K}^n) = \mathrm{span}\{a_1, \cdots, a_n\}$$

の次元が k であるから, 命題 2.34 より $a_1, \cdots, a_n$ から k 本の線型独立なベクトルが取れる.

(4) $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ を横ベクトル表記したものを $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ とする ($a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{K}^n$ は横ベクトル) と,

$$A^t = (a_1^t, \cdots, a_m^t) \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$$

である. (2) より A^t のランクは k なので (3) より $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{K}^n$ から k 本の線型独立なベクトルが取れる. □

定義 6.3 (局所座標)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の空でない部分集合 $M \subseteq \mathbb{R}^N$ を考える. M の開集合 U と, U からある Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ の上への同相写像 $\varphi : U \to \varphi(U)$ が次を満たすとする.

(1) $\varphi^{-1}:\varphi(U)\ni\varphi(p)\mapsto p\in\mathbb{R}^N$ は C^∞ 級関数である.
(2) 任意の $p\in U$ に対し φ^{-1} の $\varphi(p)$ における微分 (定義 4.1) $(\varphi^{-1})'(\varphi(p))\in M_{N\times n}(\mathbb{R})$ のランクが n である (命題 6.2 より $(\varphi^{-1})'(\varphi(p))\in M_{N\times n}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^N$ の線型写像として単射であり, $n\leqslant N$ が成り立つことに注意).

このとき (U,φ) を M の n 次元局所座標と言う.

定理 6.4. $M\subseteq\mathbb{R}^N$ の n 次元局所座標 $(U\cap M,\varphi)$ (U は $\mathbb{R}^N$ の開集合) と任意の $p_0\in U\cap M$ に対し, p_0 を含む $\mathbb{R}^N$ の開集合 $U_0\subseteq U$ と U_0 から $\mathbb{R}^N$ の開集合の上への C^∞ 級同相写像 (定義 4.18) $\Phi:U_0\to\Phi(U_0)$ で,

$$\Phi(U_0\cap M)=\Phi(U_0)\cap(\mathbb{R}^n\times\{0\}),\ \ \Phi(p)=(\varphi(p),0)\ \ (\forall p\in U_0\cap M)$$

を満たすものが存在する.

証明. 局所座標の定義 6.3 より $(\varphi^{-1})'(\varphi(p_0))\in M_{N\times n}(\mathbb{R})$ のランクは n なので, 命題 6.2 より $(\varphi^{-1})'(\varphi(p_0))\in M_{N\times n}(\mathbb{R})$ を横ベクトル表記したとき, その N 本の横ベクトルから n 本の線型独立なベクトルが取れる. よってある N 次の置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_N$ に対し C^∞ 級写像

$$\varphi(U\cap M)\times\mathbb{R}^{N-n}\ni(\varphi(p),y)\mapsto p+\sum_{j=1}^{N-n}y_je_{\sigma(n+j)}\in\mathbb{R}^N$$

($e_1,\cdots,e_N\in\mathbb{R}^N$ は標準基底) の $(\varphi(p_0),0)$ における微分は正則行列となる. よって逆関数定理 4.19 より, p_0 を含む $\mathbb{R}^N$ の開集合 U_1,U_2 と $0\in\mathbb{R}^{N-n}$ を含む $\mathbb{R}^{N-n}$ の開集合 W が取れて,

$$\varphi(U_1\cap M)\times W\ni(\varphi(p),y)\mapsto p+\sum_{j=1}^{N-n}y_je_{\sigma(n+j)}\in U_2 \tag{6.1}$$

が C^∞ 級同相写像となる. そこで $U_0:=U_1\cap U_2$ とおき, (6.1) の逆写像を U_0 上に制限して得られる C^∞ 級同相写像を,

$$\Phi:U_0\to\Phi(U_0)$$

とおくと, (6.1) が全単射であることから,

$$\Phi(U_0\cap M)=\Phi(U_0)\cap(\mathbb{R}^n\times\{0\}),\ \ \Phi(p)=(\varphi(p),0)\ \ (\forall p\in U_0\cap M)$$

が成り立つ. □

命題 6.5. $M\subseteq\mathbb{R}^N$ の n 次元局所座標 $(U\cap M,\varphi)$ と m 次元局所座標 $(V\cap M,\psi)$ (U,V は $\mathbb{R}^N$ の開集合) があり, その定義域が交わる, すなわち,

$$U\cap V\cap M=(U\cap M)\cap(V\cap M)\neq\varnothing$$

が成り立つとする. このとき $n=m$ であり,

$$\varphi(U\cap V\cap M)\ni\varphi(p)\mapsto\psi(p)\in\psi(U\cap V\cap M)$$

は C^∞ 級同相写像である.

証明. 任意の $p_0\in U\cap V\cap M$ を取る. 定理 6.4 より p_0 を含む $\mathbb{R}^N$ の開集合 $U_0\subseteq U$, $V_0\subseteq V$ と, $\mathbb{R}^N$ の開集合の上への C^∞ 級同相写像

$$\Phi:U_0\to\Phi(U_0),\ \ \Psi:V_0\to\Psi(V_0)$$

で,

$$\Phi(U_0\cap M)=\Phi(U_0)\cap(\mathbb{R}^n\times\{0\}),\ \ \Phi(p)=(\varphi(p),0)\ \ (\forall p\in U\cap M),$$
$$\Psi(V_0\cap M)=\Psi(V_0)\cap(\mathbb{R}^m\times\{0\}),\ \ \Psi(p)=(\psi(p),0)\ \ (\forall p\in V\cap M)$$

を満たすものが取れる.

$$\begin{aligned}
&f:\varphi(U_0\cap V_0\cap M)\ni\varphi(p)\mapsto(\varphi(p),0)=\Phi(p)\in\Phi(U_0\cap V_0),\\
&g:\Phi(U_0\cap V_0)\ni\Phi(p)\mapsto\Psi(p)\in\Psi(U_0\cap V_0),\\
&h:\Psi(U_0\cap V_0)\ni\Psi(p)=(\Psi_1(p),\cdots,\Psi_N(p))\mapsto(\Psi_1(p),\cdots,\Psi_m(p))\in\mathbb{R}^m
\end{aligned}$$

はそれぞれ C^∞ 級写像であり,

$$(h\circ g\circ f)(\varphi(p))=\psi(p)\quad(\forall p\in U_0\cap V_0\cap M)$$

である. チェインルール 4.7 より C^∞ 級写像の合成は C^∞ 級写像なので,

$$h\circ g\circ f:\varphi(U_0\cap V_0\cap M)\ni\varphi(p)\mapsto\psi(p)\in\psi(U_0\cap V_0\cap M)$$

は C^∞ 級である. $p_0\in U\cap V\cap M$ は任意なので,

$$\varphi(U\cap V\cap M)\ni\varphi(p)\mapsto\psi(p)\in\psi(U\cap V\cap M)\tag{6.2}$$

は C^∞ 級写像である. 全く対称的な議論により,

$$\psi(U\cap V\cap M)\ni\psi(p)\mapsto\varphi(p)\in\varphi(U\cap V\cap M)\tag{6.3}$$

が C^∞ 級写像であることも分かる. (6.2) と (6.3) は互いに逆写像であるからこれらの合成写像は恒等写像であるので, チェインルール 4.7 より (6.2) の微分のランクは n, 従って命題 6.2 より $n\leqslant m$ あり, (6.3) の微分のランク m, 従って命題 6.2 より $m\leqslant n$ である. よって $n=m$ であり (6.2) は C^∞ 級同相写像である. □

定義 6.6 (点の周りの局所座標)**.** (U,φ) を Euclid 空間の部分集合 M の n 次元局所座標とし, $p\in U$ とする. このとき (U,φ) を p の周りの M の n 次元局所座標と呼ぶ.

定義 6.7 (Euclid 空間内の多様体の定義)**.** M が Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体であるとは, $M\subseteq\mathbb{R}^N$ であり, M の各点 p に対し p の周りの M の n 次元局所座標が取れることを言う. 命題 6.5 より M が n 次元多様体であるならば, M の任意の局所座標は n 次元である. M の局所座標の族 $\{(U_j,\varphi_j)\}_{j\in J}$ で M を被覆するもの, すなわち, $M=\bigcup_{j\in J}U_j$ を満たすものを M のアトラスと言う.

注意 6.8. Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ はそれ自身, $\mathbb{R}^N$ 内の N 次元多様体である. 実際, 恒等写像 $\mathrm{id}:\mathbb{R}^N\ni x\mapsto x\in\mathbb{R}^N$ に対し $(\mathbb{R}^N,\mathrm{id})$ は $\mathbb{R}^N$ の N 次元局所座標である.

注意 6.9 (n 次元多様体の開集合は n 次元多様体)**.** M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体とすると, M の任意の空でない開集合 V は $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体である. 実際, 任意の $p\in V$ に対し p の周りの M の局所座標 (U,φ) を取れば, $(U\cap V,\varphi)$ は V の n 次元局所座標である.

定理 6.10. M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体とし, $\varnothing\neq H\subseteq M$, $k\in\mathbb{N}$ とする. このとき次は互いに同値である.

(1) H は $\mathbb{R}^N$ 内の k 次元多様体である.

(2) $k\leqslant n$ であり, 任意の $p_0\in H$ に対し p_0 の周りの M の局所座標 (V,ψ) で,

$$\psi(V\cap H)=\varphi(V)\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\})\tag{6.4}$$

を満たすものが取れる.

また (1) が成り立つとき (2) における $p_0\in H$ の周りの M の局所座標 (V,ψ) に対し,

$$\psi(p)=(\varphi(p),0)\quad(\forall p\in V\cap H)$$

とおけば, $(V\cap H,\varphi)$ は $p_0\in H$ の周りの H の局所座標である.

証明. (1) ⇒ (2) を示す. (1) が成り立つとする. 任意の $p_0 \in H$ に対し p_0 の周りの H の局所座標 $(U \cap H, \varphi)$ と p_0 の周りの M の局所座標 (U, ω) (U は M の開集合) を取る. このとき命題 6.5 の証明と全く同様にして定理 6.4 を用いることにより,

$$\omega \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap H) \ni \varphi(p) \mapsto \omega(p) \in \omega(U) \tag{6.5}$$

が C^∞ 級写像であることが分かる. そして,

$$\omega^{-1} \circ (\omega \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U \cap H) \ni \varphi(p) \mapsto p \in \mathbb{R}^N$$

は H の局所座標の定義 6.3 より C^∞ 級であり, その微分のランクは k である. よってチェインルール 4.7 より (6.5) の微分のランクも k でなくてはならないので, 命題 6.2 より $k \leqslant n$ である. (6.5) の $\varphi(p_0)$ における微分 $(\omega \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p_0)) \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ のランクが $k \leqslant n$ なので, この n 本の横ベクトルのうち, k 本の線型独立なベクトルが取れる. よってある n 次の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在し, C^∞ 級写像

$$\varphi(U \cap H) \times \mathbb{R}^{n-k} \ni (\varphi(p), y) \mapsto \omega(p) + \sum_{j=1}^{n-k} y_j e_{\sigma(k+j)} \in \mathbb{R}^n$$

($e_1, \cdots, e_n \in \mathbb{R}^n$ は標準基底) の $(\varphi(p_0), 0)$ における微分が正則行列となる. よって逆関数定理 4.19 より, p_0 を含む M の開集合 $U_1, U_2 \subseteq U$ と $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ を含む $\mathbb{R}^{n-k}$ の開集合 W が存在し,

$$\varphi(U_1 \cap H) \times W \ni (\varphi(p), y) \mapsto \omega(p) + \sum_{j=1}^{n-k} y_j e_{\sigma(k+j)} \in \omega(U_2) \tag{6.6}$$

が C^∞ 級同相写像となる. そこで $V := U_1 \cap U_2$ とおき, (6.6) の逆写像を $\omega(V)$ 上に制限した C^∞ 級同相写像を,

$$\eta : \omega(V) \to \eta(\omega(V))$$

とおく. このとき,

$$\psi := \eta \circ \omega : V \to \psi(V)$$

とおけば, $\psi(V) = \eta(\omega(V))$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であり, (V, ψ) は p_0 の周りの M の局所座標である. そして (6.6) が全単射であることから,

$$\psi(V \cap H) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}), \quad \psi(p) = (\varphi(p), 0) \quad (\forall p \in V \cap H)$$

であることが分かる. よって (2) が成り立つ.

(2) ⇒ (1) を示す. (2) が成り立つとする. 任意の $p_0 \in H$ を取り, p_0 の周りの M の局所座標 (V, ψ) で (6.4) を満たすものを取る. そして,

$$\psi(p) = (\varphi(p), 0) \quad (\forall p \in V \cap H)$$

として $\varphi : V \cap H \to \mathbb{R}^k$ を定義する. 任意の $p \in V \cap H$ を取る. $\psi(V)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合なので $\varepsilon \in (0, \infty)$ が存在し,

$$\{y \in \mathbb{R}^n : |y - \psi(p)| < \varepsilon\} \subseteq \psi(V)$$

が成り立つ. よって $|x - \varphi(p)| < \varepsilon$ なる任意の $x \in \mathbb{R}^k$ に対し,

$$|(x, 0) - \psi(p)| = |x - \varphi(p)| < \varepsilon$$

だから,

$$(x, 0) \in \psi(V) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \psi(V \cap H)$$

となるので,

$$\{x \in \mathbb{R}^k : |x - \varphi(p)| < \varepsilon\} \subseteq \varphi(V \cap H)$$

が成り立つ. これより $\varphi(V \cap H)$ は $\mathbb{R}^k$ の開集合である. $V \cap H$ の点列 $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ と $V \cap H$ の点 p に対し,

$$p_j \to p \quad \Leftrightarrow \quad \psi(p_j) \to \psi(p) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(p_j) \to \varphi(p)$$

であるから命題 1.60 より $\varphi : V \cap H \to \varphi(V \cap H)$ は同相写像である. そして,

$$\iota : \varphi(V \cap H) \ni \varphi(p) \mapsto (\varphi(p), 0) = \psi(p) \in \psi(V)$$

は C^∞ 級写像であるから,

$$\varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ \iota : \varphi(V \cap H) \ni \varphi(p) \mapsto p \in \mathbb{R}^N$$

は C^∞ 級写像であり, チェインルールより,

$$(\varphi^{-1})'(\varphi(p)) = (\psi^{-1})'(\psi(p))\iota'(\varphi(p)) \in M_{N\times k}(\mathbb{R}) \quad (\forall p \in V \cap H) \tag{6.7}$$

となる. $(\psi^{-1})'(\psi(p)) \in M_{N\times n}(\mathbb{R})$ のランクは n であり, $\iota'(\varphi(p)) \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ のランクは明らかに k であるから, (6.7) のランクは k である. よって $(V \cap H, \varphi)$ は p_0 の周りの H の k 次元局所座標である. $p_0 \in H$ は任意なので H は $\mathbb{R}^N$ 内の k 次元多様体である. よって (1) が成り立つ. □

系 6.11. $M \subseteq \mathbb{R}^N$ を Euclid 空間内の n 次元多様体, $\varnothing \neq H \subseteq M$ とする. このとき次は互いに同値である.

(1) H は M の開集合である.
(2) H は $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体である.

証明. (2) ⇒ (1) は定理 6.10 により, (1) ⇒ (2) は注意 6.9 による. □

6.2 Euclid 空間内の多様体上の関数の偏微分と全微分, (余) 接ベクトル空間

定義 6.12 (Euclid 空間内の多様体上の関数の微分可能性)**.** M を Euclid 空間内の多様体とし, M 上で定義され, ある Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ に値を取る関数 $f : M \to \mathbb{R}^N$ を考える. f が $p_0 \in M$ において微分可能であるとは, $p_0 \in M$ の周りの M の任意の局所座標 (U, φ) (定義 6.3) に対し,

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \ni \varphi(p) \mapsto f(p) \in \mathbb{R}^N$$

が $\varphi(p_0)$ において微分可能 (定義 4.1) であることを言う.

注意 6.13. M を Euclid 空間内の多様体とし, $f : M \to \mathbb{R}^N$ とする. f が $p_0 \in M$ において微分可能である (定義 6.12) ことは, 命題 6.5 とチェインルール 4.7 より, $p_0 \in M$ の周りの M の "1 つの局所座標"(U, φ) に対し, $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \ni \varphi(p) \mapsto f(p) \in \mathbb{R}^N$ が $\varphi(p_0)$ において微分可能であることと同値である.

定義 6.14 (Euclid 空間内の多様体上の C^k 級関数)**.** Euclid 空間内の多様体 M 上で定義された関数 $f : M \to \mathbb{R}^N$ が C^k 級 ($k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$) であるとは, M の任意の局所座標 (U, φ) に対し $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^N$ が C^k 級 (定義 4.10) であることを言う.

注意 6.15. Euclid 空間内の多様体 M 上で定義された関数 $f : M \to \mathbb{R}^N$ が C^k 級 ($k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$) である (定義 6.14) ことは, 命題 6.5 とチェインルール 4.7 より, M の "1 つのアトラス (定義 6.7)" $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j\in J}$ について, 各 $j \in J$ に対して $f \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j) \to \mathbb{R}^N$ が C^k 級であることと同値である.

定義 6.16 (局所座標の成分表示)**.** M を Euclid 空間内の n 次元多様体, (U, φ) を M の局所座標とする.

$$\varphi(p) = (x_1(p), \cdots, x_n(p)) \quad (\forall p \in U)$$

であるとき, (U, φ) を $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ と表す. また φ を省略して $(U, x_1, \cdots, x_n)$ とも表す. さらに文脈において局所座標の定義域 U を明記することが本質的ではない場合は U を省略して $(x_1, \cdots, x_n)$ と表すこともある.

定義 6.17 (局所座標による偏微分, 偏導関数)**.** M を Euclid 空間内の n 次元多様体とし, $f : M \to \mathbb{R}^N$ とする. $p_0 \in M$ の周りの M の局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ と $j \in \{1, \cdots, n\}$ に対し,

$$\partial_j(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p_0)) \in \mathbb{R}^N$$

(定義 4.10 を参照) が存在するとき, これを,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_0) = \partial_j(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p_0))$$

と表し, f の p_0 における $(x_1, \cdots, x_n)$ の第 j 座標に関する偏微分と言う. また任意の $p \in U$ に対し,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \partial_j(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \in \mathbb{R}^N$$

が存在するとき,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \ni p \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \in \mathbb{R}^N$$

を $(U, x_1, \cdots, x_n)$ の第 j 座標に関する f の偏導関数と言う.

定義 6.18 (Euclid 空間の標準座標)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の局所座標 $(\mathbb{R}^N, \mathrm{id}; x_1, \cdots, x_N)$ (ただし $\mathrm{id} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ は恒等写像) を $\mathbb{R}^N$ の標準座標と言う. 標準座標 $(x_1, \cdots, x_N)$ の第 j 座標に関する偏微分 (定義 6.17) $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$ は, 定義 4.10 における第 j 座標に関する偏微分と一致する.

定義 6.19 (多様体間の微分同相写像)**.** M, H をそれぞれ Euclid 空間 $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^h$ 内の多様体とし, $f : M \to H$ が全単射であるとする. f, f^{-1} がそれぞれ C^k 級である, つまり $f : M \ni p \mapsto f(p) \in \mathbb{R}^h$ と $f^{-1} : H \ni p \mapsto f^{-1}(p) \in \mathbb{R}^m$ が C^k 級であるとき, $f : M \to H$ は C^k 級同相写像であると言う.

命題 6.20. M, H をそれぞれ Euclid 空間 $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^h$ 内の多様体とする. このとき,

(1) M 上の恒等写像 $M \ni p \mapsto p \in \mathbb{R}^m$ は C^∞ 級である.
(2) M の任意の局所座標 (U, φ) に対し $\varphi : U \ni p \mapsto \varphi(p) \in \varphi(U)$ は C^∞ 級同相写像である.
(3) $f : M \to \mathbb{R}^N$ が $p_0 \in M$ において微分可能である (定義 6.12) ならば, f は p_0 において連続である.
(4) $f : M \to \mathbb{R}^N$ が C^1 級であるならば f は各点で微分可能である.
(5) $f : M \to H$ が $p_0 \in M$ で微分可能 (つまり $f : M \ni p \mapsto f(p) \in \mathbb{R}^h$ が p_0 で微分可能) であり, $g : H \to \mathbb{R}^N$ が $f(p_0) \in H$ で微分可能であるならば, 合成写像 $g \circ f : M \ni p \mapsto g(f(p)) \in \mathbb{R}^N$ は $p_0 \in M$ において微分可能である.
(6) $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ に対し, $f : M \to H$ が C^k 級 (つまり $f : M \ni p \mapsto f(p) \in \mathbb{R}^h$ が C^k 級) であり, $g : H \to \mathbb{R}^N$ も C^k 級ならば, $g \circ f$ は C^k 級である.
(7) $f : M \to \mathbb{R}^N$ が C^2 級ならば, M の任意の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ に対し,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \quad (\forall p \in U, \forall i, j \in \{1, \cdots, n\})$$

が成り立つ.
(8) $f : M \to \mathbb{R}^N$ が $p_0 \in M$ において微分可能であるとすると, $p_0 \in M$ の周りの任意の局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ と $(y_1, \cdots, y_n)$ に対し,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(p_0)\frac{\partial f}{\partial y_k}(p_0) \quad (j = 1, \cdots, n)$$

が成り立つ.

証明. (1) 定義 6.14 と注意 6.15 より自明である.
(2) 定義 6.14 と注意 6.15 より自明である.
(3) 定義 6.12, 注意 6.13 と命題 4.4 による.
(4) 定義 6.14, 注意 6.15 と定理 4.12 による.
(5) $p_0 \in M$ の周りの M の局所座標 (U, φ) と $f(p_0) \in H$ の周りの H の局所座標 (V, ψ) を取る. このとき定理 6.4 より $f(p_0) \in \mathbb{R}^h$ の周りの $\mathbb{R}^h$ の局所座標 (V', Ψ) に対し,

$$V = V' \cap H, \quad \Psi(V) = \Psi(V') \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}), \quad \Psi(q) = (\psi(q), 0) \quad (\forall q \in V)$$

(ただし H は k 次元であるとした) であるとしてよい. (3) より f は p_0 において連続なので p_0 は $U \cap f^{-1}(V)$ の内部の点である. そして,

$$\Psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^h$$

は $\varphi(p_0)$ において微分可能である. ここで,

$$\Psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)) = \Psi(f(p)) = (\psi(f(p)), 0) = ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)), 0) \ \ (\forall p \in U \cap f^{-1}(V))$$

なので,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \ni \varphi(p) \mapsto \psi(f(p)) \in \mathbb{R}^k$$

も $\varphi(p_0)$ において微分可能である. また $g : H \to \mathbb{R}^N$ の $f(p_0)$ における微分可能性より,

$$g \circ \psi^{-1} : \psi(V) \ni \psi(q) \mapsto g(q) \in \mathbb{R}^N$$

は $\psi(f(p_0))$ において微分可能なので, チェインルール 4.7 より,

$$(g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \ni \varphi(p) \mapsto g(f(p)) \in \mathbb{R}^N$$

は $f(p_0)$ において微分可能である.

(6) M の任意のアトラス (定義 6.7) $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ と H の任意のアトラス $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ を取る. $U_i \cap f^{-1}(V_j) \neq \varnothing$ なる任意の $i \in I, j \in J$ に対し (5) と同様にして,

$$\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap f^{-1}(V_j)) \ni \varphi_i(p) \mapsto \psi_j(f(p)) \in \psi_j(V_j)$$

は C^k 級であることが分かる. よって C^k 級関数 $g \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(V_j) \to \mathbb{R}^N$ との合成を考えればチェインルール 4.7 より,

$$(g \circ f) \circ \varphi_i^{-1} := (g \circ \psi_j^{-1}) \circ (\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}) : \varphi_i(U_i \cap f^{-1}(V_j)) \ni \varphi_i(p) \mapsto g(f(p)) \in \mathbb{R}^N$$

は C^k 級であることが分かる. ここで $U_i \cap f^{-1}(V_j) \neq \varnothing$ を満たす $j \in J$ を任意に取ることにより, 任意の $i \in I$ に対し,

$$(g \circ f) \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \ni \varphi_i(p) \mapsto g(f(p)) \in \mathbb{R}^N$$

が C^k 級であることが分かる. よって注意 6.15 より $g \circ f : M \to \mathbb{R}^N$ は C^k 級である.

(7)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \partial_i \partial_j (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \ \ (\forall p \in U, \forall i, j \in \{1, \cdots, n\})$$

であることと, 定理 4.11 による.

(8) $p_0 \in M$ の周りの任意の局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$, $(V, \psi; y_1, \cdots, y_n)$ に対し, 命題 6.5 より,

$$\varphi(U \cap V) \ni \varphi(p) \mapsto \psi(p) \in \psi(U \cap V)$$

は C^∞ 級同相写像であり,

$$f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)) = (f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \ \ (\forall p \in U \cap V)$$

であるから, チェインルール 4.7 より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_0) &= \partial_j (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p_0)) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k (f \circ \psi^{-1})(\psi(p_0)) \partial_j (y_k \circ \varphi^{-1})(\varphi(p_0)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}(p_0) \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(p_0) \ \ (j = 1, \cdots, n)\end{aligned}$$

となる.

□

定義 6.21 (Euclid 空間内の多様体上の恒等写像の偏微分)**.** M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体とし, M 上の恒等写像を $\iota : M \ni p \mapsto p \in \mathbb{R}^N$ とおく. 任意の $p \in M$ と p の周りの M の任意の局所座標 $(\varphi; x_1, \cdots, x_n)$ に対し,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} p := \frac{\partial \iota}{\partial x_j}(p) = \partial_j(\varphi^{-1})(\varphi(p)) \in \mathbb{R}^N \quad (j = 1, \cdots, n)$$

と表す.

命題 6.22. M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体とする. このとき,

(1) 任意の $p \in M$ と p の周りの M の任意の局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ に対し,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} p \in \mathbb{R}^N$$

は線型独立である.

(2) 任意の $p \in M$ と p の周りの M の任意の局所座標 $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)$ に対し,

$$\mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} p\right\} = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial y_1} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_n} p\right\}$$

が成り立つ.

証明. (1) 任意の $p \in M$ と $p \in M$ の周りの M の任意の局所座標 $(\varphi; x_1, \cdots, x_n)$ に対し, 局所座標の定義 6.3 より ${\varphi^{-1}}'(\varphi(p)) \in M_{N \times n}(\mathbb{R})$ のランクは n である. そして ${\varphi^{-1}}'(\varphi(p)) \in M_{N \times n}(\mathbb{R})$ を縦ベクトル表記 (定義 2.49) したものは命題 4.6 より,

$${\varphi^{-1}}'(\varphi(p)) = (\partial_1(\varphi^{-1})(\varphi_1(p)), \cdots, \partial_n(\partial^{-1})(\varphi(p))) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} p\right)$$

である. よって命題 6.2 より, この n 本の縦ベクトル

$$\frac{\partial}{\partial x_1} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} p \in \mathbb{R}^N$$

は線型独立である.

(2) 命題 6.20 の (8) より任意の $j \in \{1, \cdots, n\}$ に対し,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} p = \frac{\partial \iota}{\partial x_j}(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(p) \frac{\partial \iota}{\partial y_k}(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(p) \frac{\partial}{\partial y_k} p,$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} p = \frac{\partial \iota}{\partial y_j}(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial y_j}(p) \frac{\partial \iota}{\partial x_k}(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial y_j}(p) \frac{\partial}{\partial x_k} p$$

であるから,

$$\mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} p\right\} = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial y_1} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_n} p\right\}$$

が成り立つ.

□

定義 6.23 (Euclid 空間内の多様体の接ベクトル空間)**.** M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体とする. このとき任意の $p \in M$ と p の周りの M の任意の局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ に対し,

$$T_p(M) := \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} p\right\} \subseteq \mathbb{R}^N$$

とおき, これを p における M の接ベクトル空間と呼ぶ. 命題 6.22 の (2) より, $T_p(M)$ の定義は p の周りの M の局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ の取り方によらず, 命題 6.22 の (1) より p の周りの M の任意の局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ に対し,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} p \in T_p(M)$$

は $T_p(M)$ の基底であり, $T_p(M)$ は n 次元実線型空間である. $T_p(M)$ の元を M の p における接ベクトルと言う.

注意 6.24 (多様体の開集合の接ベクトル空間). M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体とし, $V \subseteq M$ を M の空でない開集合とする. このとき注意 6.9 より V も $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体であり, 任意の $p \in V$ に対し p の周りの M の任意の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ に対し $(U \cap V, x_1, \cdots, x_n)$ は p の周りの V の局所座標である. よって,

$$T_p(V) = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}p\right\} = T_p(M)$$

である.

定義 6.25 (Euclid 空間の標準座標と標準基底). Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の標準座標 $(x_1, \cdots, x_N)$ (定義 6.18) と標準基底 $(e_1, \cdots, e_N)$ (定義 2.55) を考える. このとき任意の $p \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}p = e_j \in \mathbb{R}^N \quad (j = 1, \cdots, N)$$

であり,

$$T_p(\mathbb{R}^N) = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_N}p\right\} = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_N\} = \mathbb{R}^N$$

である.

定義 6.26 (Euclid 空間内の多様体上の関数の全微分). M を Euclid 空間内の n 次元多様体とし, $f : M \to \mathbb{R}^N$ が $p \in M$ において微分可能 (定義 6.12) とする. このとき線型写像

$$df_p : T_p(M) \to \mathbb{R}^N$$

を, $p \in M$ の周りの M の局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ に対し,

$$df_p v = df_p\left(\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}p\right) = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \in \mathbb{R}^N \quad (\forall v \in T_p(M))$$

と定義する. 次の命題 6.27 より df_p の定義は p の周りの M の局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ の取り方によらない. そこでこの線型写像

$$df_p : T_p(M) \ni v \mapsto df_p v \in \mathbb{R}^N$$

を $f : M \to \mathbb{R}^N$ の $p \in M$ における全微分と言う.

命題 6.27. 定義 6.26 における $df_p : T_p(M) \to \mathbb{R}^N$ は $p \in M$ の周りの M の局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ の取り方によらない.

証明. $p \in M$ の周りの M の任意の局所座標 $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)$ を取る.

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}p = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial}{\partial y_j}p \tag{6.8}$$

が成り立つとして,

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial f}{\partial y_j}(p) \tag{6.9}$$

が成り立つことを示せばよい. 命題 6.20 の (8) より,

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}p = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} v_j \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(p) \frac{\partial}{\partial y_k}p = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial y_j}{\partial x_k}(p)\right)\frac{\partial}{\partial y_j}p \tag{6.10}$$

であり,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}p\right), \quad \left(\frac{\partial}{\partial y_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_n}p\right)$$

はそれぞれ $T_p(M)$ の基底である (命題 6.22) から (6.8), (6.10) より,

$$u_j = \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial y_j}{\partial x_k}(p) \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{6.11}$$

が成り立つ. また命題 6.20 の (8) より,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(p)\frac{\partial f}{\partial y_k}(p) \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{6.12}$$

である. よって (6.9), (6.11), (6.12) より,

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial f}{\partial y_j}(p) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial y_j}{\partial x_k}(p)\frac{\partial f}{\partial y_j}(p) = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(p)\frac{\partial f}{\partial y_k}(p) = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$$

であるから (6.9) が成り立つ. □

注意 6.28. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とし, $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ が $p \in \Omega$ において微分可能であるとする. このとき $\mathbb{R}^N$ 内の N 次元多様体 Ω 上の関数としての f の p における全微分

$$df_p : T_p(\Omega) = \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$$

は, $(x_1, \cdots, x_N)$ を $\mathbb{R}^N$ の標準座標, $(e_1, \cdots, e_N)$ を $\mathbb{R}^N$ の標準基底として, 注意 6.25 より任意の $v_1, \cdots, v_N \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned} df_p \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} &= df_p\left(\sum_{j=1}^{N} v_j e_j\right) = df_p\left(\sum_{j=1}^{N} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} p\right) = \sum_{j=1}^{N} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \\ &= \sum_{j=1}^{N} v_j \partial_j f(p) = f'(p)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を満たす. よって f の p における全微分 df_p は f の p における微分 (定義 4.1) $f'(p) \in M_{M\times N}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^N (= T_p(\Omega))$ から $\mathbb{R}^M$ への線型写像と自然にみなしたものと一致する.

定理 6.29 (多様体上の関数の全微分に関するチェインルール)**.** M, H をそれぞれ Euclid 空間 $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^h$ 内の n 次元, k 次元多様体とし, $f : M \to H$ が $p_0 \in M$ において微分可能 (つまり $f : M \ni p \mapsto f(p) \in \mathbb{R}^h$ が p_0 において微分可能) で $g : H \to \mathbb{R}^N$ が $f(p_0) \in H$ において微分可能であるとする. このとき $g \circ f : M \to \mathbb{R}^N$ は $p_0 \in M$ において微分可能であり, 全微分 (定義 6.26) に関して,

$$df_{p_0}(T_{p_0}(M)) \subseteq T_{f(p_0)}(H), \tag{6.13}$$

$$d(g \circ f)_{p_0} v = dg_{f(p_0)}(df_{p_0} v) \quad (\forall v \in T_{p_0}(M)) \tag{6.14}$$

が成り立つ.

証明. 命題 6.20 の (5) の証明より, $p_0 \in M$ の周りの局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ と $f(p_0) \in H$ の周りの H の局所座標 $(V, \psi; y_1, \cdots, y_k)$ に対し,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

は $\varphi(p_0)$ で微分可能である. よってチェインルール 4.7 より任意の $j \in \{1, \cdots, n\}$ に対し,

$$\begin{aligned} df_{p_0} \frac{\partial}{\partial x_j} p_0 &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(p_0) = \partial_j (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p_0)) = \partial_j\left(\psi^{-1} \circ \left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)\right)(\varphi(p_0)) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \partial_i(\psi^{-1})(\psi(f(p_0)))\partial_j(y_i \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p_0)) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}(p_0)\frac{\partial}{\partial y_i}(f(p_0)) \in T_{f(p_0)}(H) \end{aligned} \tag{6.15}$$

となるので (6.13) が成り立つ．そして任意の $j \in \{1, \cdots, n\}$ に対し (6.15) より，

$$dg_{f(p_0)} df_{p_0} \frac{\partial}{\partial x_j} p_0 = dg_{f(p_0)} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial (y_i \circ f)}{\partial x_j}(p_0) \frac{\partial}{\partial y_i}(f(p_0)) \right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial (y_i \circ f)}{\partial x_j}(p_0) \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(p_0))$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \partial_j \left(y_i \circ f \circ \varphi^{-1} \right)(\varphi(p_0)) \partial_i (g \circ \psi^{-1})(\psi(f(p_0)))$$
$$= \partial_j (g \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p_0)) = d(g \circ f)_{p_0} \frac{\partial}{\partial x_j} p_0$$

となる．よって (6.14) が成り立つ． □

定理 6.30 (多様体上の関数に関する逆関数定理)**.** M, H をそれぞれ Euclid 空間内の n 次元多様体, $f : M \to H$ を C^k 級 ($k \geqslant 1$) 関数 (定義 6.14) とし，ある $p_0 \in M$ に対し，f の p_0 における全微分[*74]

$$df_{p_0} : T_{p_0}(M) \to T_{f(p_0)}(H)$$

が単射であるとする．このとき $p_0 \in M$ の開近傍 $U_0 \subseteq M$ で次の条件を満たすものが存在する．

(1) $f(U_0)$ は H の開集合である．
(2) $U_0 \ni p \mapsto f(p) \in f(U_0)$ は C^k 級同相写像 (定義 6.19) である．

証明. $p_0 \in M$ の周りの M の局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ と $f(p_0) \in H$ の周りの H の局所座標 $(V, \psi; y_1, \cdots, y_n)$ を取る．すると定理 6.29 の (6.15) より，

$$df_{p_0} \frac{\partial}{\partial x_j} p_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y_i \circ f)}{\partial x_j}(p) \frac{\partial}{\partial y_i}(f(p_0)) \quad (j = 1, \cdots, n)$$

であるから，接ベクトル空間 $T_{p_0}(M)$ の基底

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} p_0, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} p_0 \right)$$

と，接ベクトル空間 $T_{f(p_0)}(H)$ の基底

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}(f(p_0)), \cdots, \frac{\partial}{\partial y_n}(f(p_0)) \right)$$

に関する線型写像

$$df_{p_0} : T_{p_0}(M) \to T_{f(p_0)}(H)$$

の行列表現 (定義 2.56) は，

$$\left(\frac{\partial (y_i \circ f)}{\partial x_j}(p_0) \right)_{i,j} = \left(\partial_j \left(y_i \circ f \circ \varphi^{-1} \right)(\varphi(p_0)) \right)_{i,j} = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p_0)) \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \tag{6.16}$$

である．ここで $df_{p_0} : T_{p_0}(M) \to T_{f(p_0)}(H)$ は単射なので，その行列表現 (6.16) はランクが n, すなわち，正則行列である．ゆえに C^k 級写像

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \ni \varphi(p) \mapsto \psi(f(p)) \in \psi(V) \tag{6.17}$$

の $\varphi(p_0)$ における微分が正則行列であるから，逆関数定理 4.19 より，$p_0 \in M$ の開近傍 $U_0 \subseteq U \cap f^{-1}(V)$ と $f(p_0) \in H$ の開近傍 $V_0 \subseteq V$ で，

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_0) \ni \varphi(p) \mapsto \psi(f(p)) \in \psi(V_0)$$

が C^k 級同相写像となるものが存在する．よって $f(U_0) = V_0$ は H の開集合であり，C^∞ 級同相写像 $\varphi : U_0 \ni p \mapsto \varphi(p) \in \varphi(U_0)$ と C^k 級同相写像 (6.17) と C^∞ 級同相写像 $\psi^{-1} : \psi(V_0) \ni \psi(q) \mapsto q \in V_0$ の合成により，

$$U_0 \ni p \mapsto f(p) = \left(\psi^{-1} \circ \left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \right) \circ \varphi \right)(p) \in f(U_0)$$

[*74] 命題 6.20 の (4) より $f : M \to H$ は各点で微分可能であり，定理 6.29 の (6.14) より，任意の $p \in M$ に対し $f : M \to H$ の p における全微分 df_p による接ベクトル空間 $T_p(M)$ の像は H の接ベクトル空間 $T_{f(p)}(H)$ に含まれることに注意．

は C^k 級同相写像である. □

定義 6.31 (多様体の埋め込み)**.** M を Euclid 空間内の多様体, $f: M \to \mathbb{R}^N$ を C^∞ 級写像とし, 次が成り立つとする.

(1) $M \ni p \mapsto f(p) \in f(M)$ は同相写像.
(2) 任意の $p \in M$ に対し $df_p : T_p(M) \to \mathbb{R}^N$ は単射.

このとき $f: M \to \mathbb{R}^N$ を M の $\mathbb{R}^N$ への埋め込みと言う.

定理 6.32 (埋め込み定理)**.** M を Euclid 空間内の n 次元多様体とし, $f : M \to \mathbb{R}^N$ を M の $\mathbb{R}^N$ への埋め込み (定義 6.31) とする. このとき $f(M)$ は $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体 (定義 6.7) であり,

$$M \ni p \mapsto f(p) \in f(M)$$

は C^∞ 級同相写像である.

証明. 任意の $p_0 \in M$ に対し p_0 の周りの M の局所座標 (U, φ) を取る. $f(U)$ は $f(M)$ の開集合であり,

$$\varphi \circ f^{-1} : f(U) \ni f(p) \mapsto \varphi(p) \in \varphi(U)$$

は同相写像である. そして Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\varphi(U)$ 上で定義された関数

$$(\varphi \circ f^{-1})^{-1} = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \ni \varphi(p) \mapsto f(p)$$

の各点 $\varphi(p) \in \varphi(U)$ での全微分は, 定理 6.29 より,

$$d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} = df_p d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \tag{6.18}$$

であり, $d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} = (\varphi^{-1})'(\varphi(p))$ は単射*75で, f は埋め込みなので df_p も単射だから, (6.18) は単射である. よって局所座標の定義 6.3 より $(f(U),\ \varphi \circ f^{-1})$ は $f(p_0)$ の周りの $f(M)$ の n 次元局所座標である. こうして $f(M)$ の各点 $f(p_0)$ の周りで $f(M)$ の n 次元局所座標が取れるので, 定義 6.7 より $f(M)$ は $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体である. そして M の任意の局所座標 (U, φ) に対し, $(f(U),\ \varphi \circ f^{-1})$ は $f(M)$ の局所座標であるから,

$$\begin{aligned} &\varphi : U \ni p \mapsto \varphi(p) \in \varphi(U), \\ &f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \ni \varphi(p) \mapsto f(p) \in f(U) \end{aligned}$$

はそれぞれ C^∞ 級同相写像であるので, その合成

$$U \ni p \mapsto f(p) = (f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi(p) \in f(U)$$

は C^∞ 級同相写像である. よって $f : M \to f(M)$ は C^∞ 級同相写像である. □

定義 6.33 (Euclid 空間内の多様体の余接ベクトル空間)**.** M を Euclid 空間内の n 次元多様体とする. 任意の $p \in M$ に対し M の接ベクトル空間 $T_p(M)$ の双対空間 (定義 2.59) を $T_p^*(M)$ と表し, これを $p \in M$ における M の余接ベクトル空間と言う. $p \in M$ の周りの M の任意の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ を取る. C^∞ 級関数 $x_1, \cdots, x_n : U \to \mathbb{R}$ の全微分 (定義 6.26)

$$dx_{i,p} \in T_p^*(U) = T_p^*(M) \quad (i = 1, \cdots, n)$$

*76 を考えると,

$$dx_{i,p}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} p\right) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = \delta_{i,j} \quad (\forall i, j \in \{1, \cdots, n\})$$

であるから,

$$(dx_{1,p}, \cdots, dx_{n,p})$$

*75 注意 6.28 と局所座標の定義 6.3.
*76 注意 6.24 より $T_p(U) = T_p(M)$ である.

は $T_p(M)$ の順序付けられた基底

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}p\right)$$

の双対基底 (定義 2.60) である.

命題 6.34. M を Euclid 空間内の n 次元多様体とし, $f : M \to \mathbb{R}$ を $p \in M$ において微分可能な関数とする. このとき p における f の全微分 df_p は $T_p^*(M)$ に属し, p の周りの M の任意の局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ に対し,

$$df_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) dx_{j,p} \tag{6.19}$$

が成り立つ.

証明. 全微分の定義 6.26 より $df_p : T_p(M) \to \mathbb{R}$ は $T_p(M)$ 上の線型汎関数だから $df_p \in T_p^*(M)$ であり,

$$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}p\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{6.20}$$

である. 定義 6.33 において述べたように, $T_p(M)$ の基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}p\right)$ の双対基底は $(dx_{1,p}, \cdots, dx_{n,p})$ であるから,

$$v = \sum_{j=1}^{n} dx_{j,p}(v) \frac{\partial}{\partial x_j}p \quad (\forall v \in T_p(M))$$

である. よって (6.20) より,

$$df_p(v) = \sum_{j=1}^{n} dx_{j,p}(v) df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}p\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) dx_{j,p}(v) \quad (\forall v \in T_p(M))$$

であるから (6.19) が成り立つ. □

補題 6.35. M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体, $f_1, \cdots, f_n$ を $p_0 \in M$ の開近傍上で定義された実数値 C^∞ 級関数とし, $df_{1,p_0}, \cdots, df_{n,p_0}$ が $T_{p_0}^*(M)$ の基底であるとする. このとき $p_0 \in M$ の開近傍 $U_0 \subseteq M$ を十分小さく取れば, $(U_0, f_1, \cdots, f_n)$ は M の局所座標となる.

証明. $p_0 \in M$ の周りの M の局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ を取る. ただし U は $f_1, \cdots, f_n$ の定義域に含まれるとする. 命題 6.34 より,

$$df_{j,p_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p_0) dx_{i,p_0}$$

であり, $(df_{1,p_0}, \cdots, df_{n,p_0})$ と $(dx_{1,p_0}, \cdots, dx_{n,p_0})$ はぞれぞれ $T_{p_0}^*(M)$ の基底であるから,

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p_0)\right)_{i,j} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

は正則行列である. そこで,

$$f : U \ni p \mapsto (f_1(p), \cdots, f_n(p)) \in \mathbb{R}^n$$

なる C^∞ 級関数を定義すると,

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \ni p \mapsto f(p) \in \mathbb{R}^n$$

の $\varphi(p_0)$ における微分 $(f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p_0))$ は,

$$(f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p_0)) = \left(\partial_j \left(f_i \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(p_0))\right)_{i,j} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p_0)\right)_{i,j}$$

であるから正則行列である. よって逆関数定理 4.17 より $p_0 \in M$ の開近傍 $U_0 \subseteq U$ で, $f(U_0) = (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(U_0))$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であり,

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_0) \ni \varphi(p) \mapsto f(p) \in f(U_0)$$

が C^∞ 級同相写像となるものが取れる. これと C^∞ 級写像 $U_0 \ni p \mapsto \varphi(p) \in \varphi(U_0)$ の合成を考えれば,

$$U_0 \ni p \mapsto f(p) = (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \in f(U_0) \tag{6.21}$$

は C^∞ 級同相写像となるから, (6.21) の逆写像

$$f^{-1} : f(U_0) \ni f(p) \mapsto p \in \mathbb{R}^N$$

は C^∞ 級であり, 定理 6.29 より,

$$(df^{-1})_{f(p)} df_p = d(f^{-1} \circ f)_p = \mathrm{id} \quad (\forall p \in U_0)$$

だから, 任意の $p \in U_0$ に対し $(df^{-1})_{f(p)}$ は単射である. よって注意 6.28 より $(f^{-1})'(f(p))$ のランクは n であるので, 局所座標の定義 6.3 より $(U_0, f) = (U_0, f_1, \cdots, f_n)$ は M の局所座標である. □

定理 6.36 (レベル多様体)**.** M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体, $f_1, \cdots, f_k : M \to \mathbb{R}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ を C^∞ 級関数とし,

$$H := \{p \in M : f_1(p) = \cdots = f_k(p) = 0\}$$

とおく. もし任意の $p \in H$ に対し $df_{1,p}, \cdots, df_{k,p} \in T_p^*(M)$ が線型独立であるならば, H は $\mathbb{R}^N$ 内の $n-k$ 次元多様体である.

証明. 任意の $p_0 \in H$ を取り, p_0 の周りの M の任意の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ を取る. 仮定より $df_{1,p_0}, \cdots, df_{k,p_0} \in T_{p_0}^*(M)$ は線型独立であるから, $T_{p_0}^*(M)$ の基底 $dx_{1,p_0}, \cdots, dx_{n,p_0}$ のうちのある k 個を $df_{1,p_0}, \cdots, df_{k,p_0}$ と取り替えて $T_{p_0}^*(M)$ の基底が作れる. よって補題 6.35 より p_0 の周りの局所座標 $(V, \psi; y_1, \cdots, y_n)$ で,

$$y_{n-k+j}(p) = f_j(p) \quad (\forall p \in V, j = 1, \cdots, k)$$

を満たすものが取れる. このとき H の定義より,

$$\psi(V \cap H) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\})$$

であるから, 定理 6.10 より H は $\mathbb{R}^N$ 内の $n-k$ 次元多様体である. □

6.3 Euclid 空間内の多様体における Urysohn の補題, 1 の分割

命題 6.37. Euclid 空間内の多様体 (定義 6.7) は (相対位相により) 第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間である.

証明. M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体とする. M が第二可算公理を満たす Hausdorff 空間であることは Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ が第二可算公理を満たす Hausdorff 空間である (定理 1.145) ことと相対位相の定義より自明である. 任意の $p_0 \in M$ と p_0 の周りの M の局所座標 (U, φ) を取る. 局所座標の定義 6.3 より $\varphi(U)$ は Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合であり, $\varphi : U \ni p \mapsto \varphi(p) \in \varphi(U)$ は同相写像である.

$$BC(\varphi(p_0), \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \varphi(p_0)| \leqslant \varepsilon\} \subseteq \varphi(U)$$

なる $\varepsilon \in (0, \infty)$ を取れば, $BC(\varphi(p_0), \varepsilon)$ は $\varphi(p_0) \in \varphi(U)$ のコンパクトな近傍であるので, $\varphi^{-1}(BC(\varphi(p_0), \varepsilon))$ は $p_0 \in M$ のコンパクトな近傍である. よって M は局所コンパクトである. □

定義 6.38 ($C^k(M)$)**.** M を Euclid 空間内の多様体とする. 任意の $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ に対し,

$$C^k(M) := \{f : M \to \mathbb{C} : f \text{ は } C^k \text{ 級}\}, \quad C^k_{\mathbb{R}}(M) := \{f : M \to \mathbb{R} : f \text{ は } C^k \text{ 級}\}$$

とおく. また台がコンパクトな連続関数空間 $C_c(M), C_{c,\mathbb{R}}(M), C_{c,+}(M)$ (定義 5.162, 定義 5.163) に対し,

$$\begin{aligned} C^k_c(M) &:= C_c(M) \cap C^k(M), \\ C^k_{c,\mathbb{R}}(M) &:= C^k(M) \cap C_{c,\mathbb{R}}(M), \\ C^k_{c,+}(M) &:= C^k(M) \cap C_{c,+}(M) \end{aligned}$$

とおく.

補題 6.39. $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を,

$$h(t) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) & (t > 0) \\ 0 & (t \leqslant 0) \end{cases}$$

と定義する. このとき $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ である.

証明. h は $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 上では明らかに C^∞ 級である.

$$\lim_{t \to +0} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) = \lim_{s \to \infty} \frac{s}{\exp(s)} = 0$$

であるから,

$$\lim_{t \to +0} \frac{1}{t}(h(t) - h(0)) = 0$$

である. よって h は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であり, その導関数は,

$$h'(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) & (t > 0) \\ 0 & (t \leqslant 0) \end{cases}$$

である. 今, ある $n \in \mathbb{N}$ に対し $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が n 階までの導関数を持ち, n 階の導関数が,

$$h^{(n)}(t) = \begin{cases} \frac{d^n}{dt^n} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) & (t > 0) \\ 0 & (t \leqslant 0) \end{cases}$$

と表されると仮定する. このときある多項式 $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し,

$$h^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) = p_n\left(\frac{1}{t}\right) \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \quad (\forall t > 0)$$

と表せるから,

$$\lim_{t \to +0} \frac{1}{t}\left(h^{(n)}(t) - h^{(n)}(0)\right) = \lim_{t \to +0} \frac{1}{t} p_n\left(\frac{1}{t}\right) \exp\left(-\frac{1}{t}\right) = \lim_{s \to \infty} \frac{s p_n(s)}{\exp(s)} = 0$$

となる. よって $h^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であり,

$$h^{(n+1)}(t) = \begin{cases} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) & (t > 0) \\ 0 & (t \leqslant 0) \end{cases}$$

が成り立つので, 帰納法より h は C^∞ 級である. □

補題 6.40. 任意の $x_0 \in \mathbb{R}^N$ と任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し, $\psi : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$ を,

$$\psi(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}\right) & (|x - x_0| < \varepsilon) \\ 0 & (|x - x_0| \geqslant \varepsilon) \end{cases}$$

と定義すると, $\psi \in C_{c,+}^\infty(\mathbb{R}^N)$ であり,

$$(\psi > 0) = B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < \varepsilon\},$$
$$\mathrm{supp}(\psi) = CB(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \leqslant \varepsilon\}$$

である.

証明. 補題 6.39 における C^∞ 級関数 $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ に対し,

$$\psi(x) = h\left(\varepsilon^2 - |x - x_0|^2\right) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

であるから, ψ は C^∞ 級であり,

$$(\psi > 0) = \{x \in \mathbb{R}^N : h(\varepsilon^2 - |x - x_0|^2) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^N : \varepsilon^2 - |x - x_0|^2 > 0\} = B(x_0, \varepsilon),$$

$$\mathrm{supp}(\psi) = \overline{(\psi > 0)} = \overline{B(x_0, \varepsilon)} = CB(x_0, \varepsilon)$$

である. 閉球 $CB(x_0, \varepsilon)$ はコンパクトであるから $\psi \in C_{c,+}^\infty(\mathbb{R}^N)$ である. □

補題 6.41. M を Euclid 空間内の多様体, $p_0 \in V \subseteq M$ とし, V は M の開集合であるとする. このとき $f \in C_{c,+}^{\infty}(M)$ で,

$$f(p_0) > 0, \quad \mathrm{supp}(f) \subseteq V$$

を満たすものが存在する.

証明. p_0 の周りの M の局所座標 (U, φ) で $U \subseteq V$ を満たすものを取る. $\varphi(U)$ は Euclid 空間の開集合であるから, 補題 6.40 より $h \in C_{c,+}^{\infty}(\varphi(U))$ で $h(\varphi(p_0)) > 0$ を満たすものが取れる. そこで $f : M \to [0, \infty)$ を,

$$f(p) := \begin{cases} h(\varphi(p)) & (p \in U) \\ 0 & (p \in M \backslash U) \end{cases}$$

と定義する. コンパクト集合

$$K := \varphi^{-1}(\mathrm{supp}(h)) \subseteq U$$

に対し,

$$M = U \cup (M \backslash U) = U \cup (M \backslash K)$$

であり, f は開集合 U 上で C^{∞} 級で, 開集合 $M \backslash K$ 上で 0 だから, f は M 上で C^{∞} 級である. そして,

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{(f > 0)} \subseteq K$$

だから $f \in C_{c,+}^{\infty}(M)$ である. また $f(p_0) = h(\varphi(p_0)) > 0$ である. □

補題 6.42. M を Euclid 空間内の多様体, K, V をそれぞれ M のコンパクト集合と開集合で $K \subseteq V$ を満たすものとする. このとき $f \in C_{c,+}^{\infty}(M)$ で,

$$K \subseteq (f > 0) \subseteq \mathrm{supp}(f) \subseteq V$$

を満たすものが取れる.

証明. 任意の $p \in K$ に対し補題 6.41 より, $f_p \in C_{c,+}^{\infty}(M)$ で,

$$f_p(p) > 0, \quad \mathrm{supp}(f_p) \subseteq V$$

を満たすものが取れる. 各 $p \in K$ に対し $(f_p > 0)$ は p を含む開集合であり,

$$K \subseteq \bigcup_{p \in K} (f_p > 0)$$

であるから, コンパクト性より有限個の $p_1, \cdots, p_n \in K$ が取れて,

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (f_{p_j} > 0)$$

となる. そこで,

$$f := \sum_{j=1}^{n} f_{p_j} \in C_{c,+}^{\infty}(M)$$

とおけば,

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (f_{p_j} > 0) = (f > 0) \subseteq \mathrm{supp}(f) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{supp}(f_{p_j}) \subseteq V$$

となる. □

定理 6.43 (多様体上の Urysohn の補題)**.** M を Euclid 空間内の多様体, K, V をそれぞれ M のコンパクト集合と開集合で $K \subseteq V$ を満たすものとする. このとき $f \in C_{c,+}^{\infty}(M)$ で,

$$K \preceq f \preceq V$$

(定義 5.164 を参照) を満たすものが存在する.

証明. 補題 6.42 より $f_1 \in C_{c,+}^{\infty}(M)$ で,

$$K \subseteq (f_1 > 0) \subseteq \mathrm{supp}(f_1) \subseteq V \tag{6.22}$$

を満たすものが取れる. $\mathrm{supp}(f_1)\backslash(f_1 > 0)$, $V\backslash K$ はそれぞれ M のコンパクト集合と開集合であり,

$$\mathrm{supp}(f_1)\backslash(f_1 > 0) \subseteq V\backslash K$$

であるから, 補題 6.42 より $f_2 \in C_{c,+}^{\infty}(M)$ で,

$$\mathrm{supp}(f_1)\backslash(f_1 > 0) \subseteq (f_2 > 0) \subseteq \mathrm{supp}(f_2) \subseteq V\backslash K \tag{6.23}$$

を満たすものが取れる. 今, $f : M \to [0, \infty)$ を,

$$f(p) := \begin{cases} \frac{f_1(p)}{f_1(p)+f_2(p)} & (p \in (f_1 + f_2 > 0)) \\ 0 & (p \notin (f_1 + f_2 > 0)) \end{cases}$$

とおく. (6.23) より,

$$\mathrm{supp}(f_1) \subseteq (f_1 + f_2 > 0)$$

であるから,

$$M = (f_1 + f_2 > 0) \cup (M\backslash \mathrm{supp}(f_1))$$

であり, f は開集合 $(f_1 + f_2 > 0)$ 上で C^{∞} 級で, 開集合 $M\backslash\mathrm{supp}(f_1)$ 上で 0 なので, f は M 上で C^{∞} 級である. そして,

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{(f > 0)} \subseteq \mathrm{supp}(f_1) \subseteq V$$

であるから特に $f \in C_{c,+}^{\infty}(M)$ である. また, 任意の $p \in K$ に対し (6.23) より $f_2(p) = 0$ であり, (6.22) より $f_1(p) > 0$ であるから $f(p) = 1$ である. よって $f \in C_{c,+}^{\infty}(M)$ は,

$$0 \leqslant f(p) \leqslant 1 \ \ (\forall p \in M), \ \ f(p) = 1 \ \ (\forall p \in K), \ \ \mathrm{supp}(f) \subseteq V$$

を満たす. すなわち $K \preceq f \preceq V$ が成り立つ. □

定理 6.44 (1 の分割)**.** M を Euclid 空間内の多様体, K を M のコンパクト集合, $V_1, \cdots, V_n$ を M の有限個の開集合とし,

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_k$$

が成り立つとする. このとき $h_1 \preceq V_1, \cdots, h_n \preceq V_n$ なる $h_1, \cdots, h_n \in C_{c,+}^{\infty}(M)$ (定義 5.164 を参照) で,

$$\sum_{k=1}^{n} h_k(p) = 1 \ \ (\forall p \in K)$$

を満たすものが存在する.

証明. 局所コンパクト Huasdorff 空間における 1 の分割 (定理 5.166) と全く同様にして証明できる (定理 5.166 の証明において X を M に置き換えて, Urysohn の補題 5.165 を用いたところで代わりに多様体上の Urysohn の補題 6.43 を用いればよい). □

補題 6.45. X を第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間とする. このとき閉包がコンパクトな X の開集合の列 $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n, \ \ \overline{\Omega_n} \subseteq \Omega_{n+1} \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たすものが取れる.

証明. 定理 1.81 より X の開集合の可算基 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\overline{U_n}$ がコンパクトであるものが取れる. $k(1) := 1$ とおく.

$$\overline{U_1} \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_{k(2)}$$

なる $k(2) \in \mathbb{N}$ を取る. 次に,

$$k(3) > k(2), \quad \overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_{k(2)}} \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_{k(3)}$$

なる $k(3) \in \mathbb{N}$ を取る. 次に,

$$k(4) > k(3), \quad \overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_{k(3)}} \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_{k(4)}$$

なる $k(4) \in \mathbb{N}$ を取る. 同様の操作を続けていき狭義単調増加な自然数の列 $(k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_{k(n)}} \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_{k(n+1)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たすものを構成する.

$$\Omega_n := U_1 \cup \cdots \cup U_{k(n)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおけば,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$$

であり,

$$\overline{\Omega}_n \subseteq \overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_{k(n)}} \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_{k(n+1)} = \Omega_{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が求める開集合の列である. □

定理 6.46 (1 の分割)**.** M を Euclid 空間内の多様体, $\mathcal{O}$ を M の任意の開被覆とする. このとき $C^\infty_{c,+}(M)$ の列 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ で次を満たすものが取れる.

(1) 各 $i \in \mathbb{N}$ に対し $\mathrm{supp}(f_i) \subseteq U_i$ を満たす $U_i \in \mathcal{O}$ が存在する.
(2) 各 $i \in \mathbb{N}$ に対し $(f_i > 0) \cap (f_j > 0) \neq \varnothing$ を満たす $j \in \mathbb{N}$ は有限個である.
(3) 任意の $p \in M$ に対し $\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(p) = 1$ が成り立つ.

証明. M は第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間である (命題 6.37) から, 補題 6.45 より, 閉包がコンパクトな M の開集合の列 $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n, \quad \overline{\Omega_n} \subseteq \Omega_{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たすものが取れる.

$$\Omega_0 = \Omega_{-1} = \Omega_{-2} = \varnothing$$

とする. $(\overline{\Omega_n})_{n\in\mathbb{N}}$ はコンパクト集合の単調増加列であるから,

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\Omega_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\Omega_n} \backslash \Omega_{n-1}$$

が成り立つ. 今, 任意の $n \in \mathbb{N}$ を取り固定する. 任意の $p \in \overline{\Omega_n} \backslash \Omega_{n-1}$ に対し, $p \in U_p$ なる $U_p \in \mathcal{O}$ を取り, Urysohn の補題 6.43 により,

$$\{p\} \preceq h_p \preceq U_p \cap \Omega_{n+1} \backslash \overline{\Omega_{n-2}} \tag{6.24}$$

なる $h_p \in C^\infty_{c,+}(M)$ を取る.

$$\overline{\Omega_n} \backslash \Omega_{n-1} \subseteq \bigcup_{p\in\overline{\Omega_n}\backslash\Omega_{n-1}} (h_p > 0)$$

であり, $\overline{\Omega_n} \backslash \Omega_{n-1}$ はコンパクトで各 $(h_p > 0)$ は開集合であるから, 有限個の $p_{n,1}, \cdots, p_{n,m(n)} \in \overline{\Omega_n} \backslash \Omega_{n-1}$ が取れて,

$$\overline{\Omega_n} \backslash \Omega_{n-1} \subseteq (h_{p_{n,1}} > 0) \cup \cdots \cup (h_{p_{n,m(n)}} > 0) \tag{6.25}$$

となる. こうして各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $p_{1,1}, \cdots, p_{n,m(n)} \in \overline{\Omega_n} \backslash \Omega_{n-1}$ を取り, $C_{c,+}^\infty(M)$ の列

$$h_{p_{1,1}}, h_{p_{1,2}}, \cdots, h_{p_{1,m(1)}}, h_{p_{2,1}}, h_{p_{2,2}}, \cdots, h_{p_{2,m(2)}}, h_{p_{3,1}}, h_{p_{3,2}} \cdots, h_{p_{3,m(3)}}, \cdots$$

を改めて $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ とおく. このとき (6.24) より各 $i \in \mathbb{N}$ に対し $\mathrm{supp}(h_i) \subseteq U_i$ なる $U_i \in \mathcal{O}$ が存在する. また,

$$\left(\Omega_{n+1} \backslash \overline{\Omega_{n-2}}\right) \cap \left(\Omega_{m+1} \backslash \overline{\Omega_{m-2}}\right) = \varnothing \quad (\forall n, m \in \mathbb{N} : |n-m| \geqslant 3)$$

であることと (6.24) より各 $i \in \mathbb{N}$ に対し $(h_i > 0) \cap (h_j > 0) \neq \varnothing$ を満たす $j \in \mathbb{N}$ は有限個である. そして (6.25) より,

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\Omega_n} \backslash \Omega_{n-1} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (h_i > 0)$$

であるから,

$$h(p) := \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i(p) \in (0, \infty) \quad (\forall p \in M)$$

として C^∞ 級関数 $h : M \to (0, \infty)$ が定義できる. そこで,

$$f_i := \frac{h_i}{h} \in C_{c,+}^\infty(M) \quad (\forall i \in \mathbb{N})$$

とおけば, $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ は (1), (2), (3) を満たす. □

命題 6.47. M を Euclid 空間内の多様体, F, V をそれぞれ M の閉集合と開集合とし, $F \subseteq V$ とする. このとき非負値 C^∞ 級関数 $f : M \to [0, \infty)$ で,

$$f(p) = 1 \quad (\forall p \in F), \quad f(p) = 0 \quad (\forall p \in M \backslash V)$$

を満たすものが存在する.

証明. 1 の分割 (定理 6.46) より $C_{c,+}^\infty(M)$ の列 $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ で次を満たすものが取れる.

(1) 各 $i \in \mathbb{N}$ に対し $(\varphi_i > 0) \cap (\varphi_j > 0) \neq \varnothing$ を満たす $j \in \mathbb{N}$ が有限個である.
(2) 任意の $p \in M$ に対し $\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(p) = 1$ が成り立つ.

各 $i \in \mathbb{N}$ に対し $F \cap \mathrm{supp}(\varphi_i)$ は V に含まれるコンパクト集合であるから, Urysohn の補題 6.43 より,

$$F \cap \mathrm{supp}(\varphi_i) \preceq \omega_i \preceq V$$

を満たす $\omega_i \in C_{c,+}^\infty(M)$ が取れる. (1) より,

$$f(p) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(p) \omega_i(p) \quad (\forall p \in M)$$

として C^∞ 級関数 $f : M \to [0, \infty)$ が定義できる. 任意の $p \in F$ に対し $\varphi_i(p) > 0$ なる $i \in \mathbb{N}$ を取れば $p \in F \cap \mathrm{supp}(\varphi) \preceq \omega_i$ より $\omega_i(p) = 1$ であるから, (2) より,

$$f(p) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(p) \omega_i(p) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(p) = 1$$

である. また任意の $p \in M \backslash V$, 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対し $\omega_i(p) = 0$ であるから,

$$f(p) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(p) \omega_i(p) = 0$$

である. □

6.4 Euclid 空間内の多様体上の微分形式

定義 6.48 (微分形式の定義). M を Euclid 空間内の n 次元多様体, $r \in \mathbb{N}$ とする. 各点 $p \in M$ に対し余接ベクトル空間 $T_p^*(M)$ (定義 6.33) の r 階反対称テンソル積 (定義 2.72) $\bigwedge^r T_p^*(M)$ を考える. M の空でない部分集合 E に対し,

$$\omega : E \ni p \mapsto \omega_p \in \bigwedge^r T_p^*(M)$$

なる対応を E 上で定義された M の r 階微分形式と言う ($E = M$ の場合は単に M の r 階微分形式と言う). 任意の $p \in E$ に対し $T_p^*(M)$ は n 次元であるから, 命題 2.80 より $r > n$ の場合は $\bigwedge^r T_p^*(M) = \{0\}$ である. $r \in \{1, \cdots, n\}$ の場合は $U \cap E \neq \varnothing$ なる M の任意の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ に対し, 命題 2.79 と命題 2.80 より,

$$\omega_p = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} f_{i_1, \cdots, i_r}(p) dx_{i_1,p} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r,p} \quad (\forall p \in U \cap E)$$

と表せる. ここで $(dx_{1,p}, \cdots, dx_{n,p})$ は $T_p(M)$ の基底 $(\frac{\partial}{\partial x_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}p)$ の双対基底であるから,

$$f_{i_1, \cdots, i_r}(p) = \omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}p\right)$$

である.

注意 6.49 (多様体の開集合上で定義された微分形式). M を Euclid 空間内の n 次元多様体, V を M の空でない開集合とする. このとき V も n 次元多様体 (注意 6.9 を参照) であり, 任意の $p \in V$ に対し $T_p(V) = T_p(M)$ である (注意 6.24) から $T_p^*(V) = T_p^*(M)$ である. よって V 上で定義された M の r 階微分形式

$$V \ni p \mapsto \omega_p \in \bigwedge^r T_p^*(M)$$

は, n 次元多様体 V の r 階微分形式

$$V \ni p \mapsto \omega_p \in \bigwedge^r T_p^*(V)$$

に他ならない.

定義 6.50 (微分形式の連続性). M を Euclid 空間内の n 次元多様体とし, $\omega = (\omega_p)_{p \in E}$ を $E \subseteq M$ 上で定義された M の r 階微分形式とする. ω が連続であるとは, $U \cap E \neq \varnothing$ を満たす M の任意の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ と任意の $i_1, \cdots, i_r \in \{1, \cdots, n\}$ に対し,

$$U \cap E \ni p \mapsto \omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}p\right) \in \mathbb{R}$$

が連続であることを言う.

定義 6.51 (微分形式の外微分可能性). M を Euclid 空間内の n 次元多様体とする. M の r 階微分形式 $\omega = (\omega_p)_{p \in M}$ が $p_0 \in M$ において外微分可能であるとは, p_0 の周りの M の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ と任意の $i_1, \cdots, i_r \in \{1, \cdots, n\}$ に対し,

$$U \ni p \mapsto \omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}p\right) \in \mathbb{R}$$

が p_0 において微分可能であることを言う.

定義 6.52 (微分形式の C^k 級性). M を Euclid 空間内の n 次元多様体とする. M の r 階微分形式 $\omega = (\omega_p)_{p \in M}$ が C^k 級であるとは, M の任意の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ と任意の $i_1, \cdots, i_r \in \{1, \cdots, n\}$ に対し,

$$U \ni p \mapsto \omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}p\right) \in \mathbb{R}$$

が C^k 級であることを言う.

命題 6.53. M を Euclid 空間内の n 次元多様体, $r \in \{1, \cdots, n-1\}$ とし, M の r 階微分形式 $\omega = (\omega_p)_{p \in M}$ が $p_0 \in M$ において外微分可能 (定義 6.51) であるとする. そして p_0 の周りの M の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$, $(V, y_1, \cdots, y_n)$ に対し,

$$\omega_p = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} f_{i_1, \cdots, i_r}(p) dx_{i_1, p} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r, p} \quad (\forall p \in U),$$
$$\omega_p = \sum_{j_1 < \cdots < j_r} g_{j_1, \cdots, j_r}(p) dy_{j_1, p} \wedge \cdots \wedge dy_{j_r, p} \quad (\forall p \in V)$$

と表されるとする. このとき各 $f_{i_1, \cdots, i_r} : U \to \mathbb{R}$ と $g_{j_1, \cdots, j_r} : V \to \mathbb{R}$ は $p_0 \in U \cap V$ において微分可能であり,

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_r} (df_{i_1, \cdots, i_r})_{p_0} \wedge dx_{i_1, p_0} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r, p_0} = \sum_{j_1 < \cdots < j_r} (dg_{j_1, \cdots, j_r})_{p_0} \wedge dy_{j_1, p_0} \wedge \cdots \wedge dy_{j_r, p_0} \tag{6.26}$$

が成り立つ.

証明.

$$f_{i_1, \cdots, i_r}(p) = \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} p \right) \quad (\forall p \in U),$$
$$g_{j_1, \cdots, j_r}(p) = \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial y_{j_1}} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_{j_r}} p \right) \quad (\forall p \in V)$$

であるから外微分可能性の定義 6.51 より各 $f_{i_1, \cdots, i_r} : U \to \mathbb{R}$ と各 $g_{j_1, \cdots, j_r} : V \to \mathbb{R}$ は $p_0 \in U \cap V$ において微分可能である. 任意の $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n$ と任意の $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant n$ に対し,

$$\Phi^{i_1, \cdots, i_r}_{j_1, \cdots, j_r}(p) := \det \left(\frac{\partial x_{i_k}}{\partial y_{j_l}}(p) \right)_{k,l} \quad (\forall p \in U \cap V) \tag{6.27}$$

とおく.

$$dx_{i,p} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) dy_{j,p} \quad (\forall p \in U \cap V) \tag{6.28}$$

である (命題 6.34) ことと外積の反対称性 (命題 2.79) より,

$$\begin{aligned} \omega_p &= \sum_{i_1 < \cdots < i_r} f_{i_1, \cdots, i_r}(p) dx_{i_1, p} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r, p} \\ &= \sum_{j_1 < \cdots < j_r} \left(\sum_{i_1 < \cdots < i_r} f_{i_1, \cdots, i_r}(p) \Phi^{i_1, \cdots, i_r}_{j_1, \cdots, j_r}(p) \right) dy_{j_1, p} \wedge \cdots \wedge dy_{j_r, p} \quad (\forall p \in U \cap V) \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$g_{j_1, \cdots, j_r}(p) = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} f_{i_1, \cdots, i_r}(p) \Phi^{i_1, \cdots, i_r}_{j_1, \cdots, j_r}(p) \quad (\forall p \in U \cap V)$$

が成り立つ. よって,

$$(dg_{j_1, \cdots, j_r})_{p_0} = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \Phi^{i_1, \cdots, i_r}_{j_1, \cdots, j_r}(p_0) (df_{i_1, \cdots, i_r})_{p_0} + \sum_{i_1 < \cdots < i_r} f_{i_1, \cdots, i_r}(p_0) (d\Phi^{i_1, \cdots, i_r}_{j_1, \cdots, j_r})_{p_0}$$

であるから,

$$\begin{aligned} &\sum_{j_1 < \cdots < j_r} (dg_{j_1, \cdots, j_r})_{p_0} \wedge dy_{j_1, p_0} \wedge \cdots \wedge dy_{j_r, p_0} \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \sum_{j_1 < \cdots < j_r} \Phi^{i_1, \cdots, i_r}_{j_1, \cdots, j_r}(p_0) (df_{i_1, \cdots, i_r})_{p_0} \wedge dy_{j_1, p_0} \wedge \cdots \wedge dy_{j_r, p_0} \\ &+ \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \sum_{j_1 < \cdots < j_r} f_{i_1, \cdots, i_r}(p_0) (d\Phi^{i_1, \cdots, i_r}_{j_1, \cdots, j_r})_{p_0} \wedge dy_{j_1, p_0} \wedge \cdots \wedge dy_{j_r, p_0} \end{aligned} \tag{6.29}$$

である. (6.29) の右辺の第一項は (6.27), (6.28) と外積の反対称性 (命題 2.79) より,

$$\begin{aligned}&\sum_{i_1<\cdots<i_r}\sum_{j_1<\cdots<j_r}\Phi^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_r}(p_0)(df_{i_1,\cdots,i_r})_{p_0}\wedge dy_{j_1,p_0}\wedge\cdots\wedge dy_{j_r,p_0}\\&=\sum_{i_1<\cdots<i_r}(df_{i_1,\cdots,i_r})_{p_0}\wedge dx_{i_1,p_0}\cdots\wedge dx_{i_r,p_0}\end{aligned}$$

であるから, (6.26) を示すには (6.29) の右辺の第二項が 0 であること, すなわち,

$$\sum_{i_1<\cdots<i_r}\sum_{j_1<\cdots<j_r}f_{i_1,\cdots,i_r}(p_0)(d\Phi^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_r})_{p_0}\wedge dy_{j_1,p_0}\wedge\cdots\wedge dy_{j_r,p_0}=0$$

を示せばよい. そのためには任意の $1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n$ を取り固定し,

$$\sum_{j_1<\cdots<j_r}(d\Phi^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_r})_{p_0}\wedge dy_{j_1,p_0}\wedge\cdots\wedge dy_{j_r,p_0}=0 \tag{6.30}$$

が成り立つことを示せばよい.

$$\begin{aligned}&\sum_{j_1<\cdots<j_r}(d\Phi^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_r})_{p_0}\wedge dy_{j_1,p_0}\wedge\cdots\wedge dy_{j_r,p_0}\\&=\sum_{j_1<\cdots<j_{r+1}}\sum_{t=1}^{r+1}(-1)^{t-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_{j_t}}\Phi^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,\widehat{j_t},\cdots,j_{r+1}}(p_0)\right)dy_{j_1,p_0}\wedge\cdots\wedge dy_{j_{r+1},p_0}\end{aligned}$$

($\widehat{j_t}$ は j_t を飛ばすことを意味する) であるから, (6.30) を示すにはさらに任意の $1\leqslant j_1<\cdots<j_{r+1}\leqslant n$ を取り固定し,

$$\sum_{t=1}^{r+1}(-1)^{t-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_{j_t}}\Phi^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,\widehat{j_t},\cdots,j_{r+1}}(p_0)\right)=0 \tag{6.31}$$

が成り立つことを示せばよい. しかし (6.27) に注意して, 行列式の反対称性 (命題 2.50) と偏微分の可換性 (命題 6.20 の (7)) を考慮すると,

$$\sum_{t=1}^{r+1}(-1)^{t-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_{j_t}}\Phi^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,\widehat{j_t},\cdots,j_{r+1}}(p_0)\right)=\sum_{s=1}^{r+1}(-1)^{s}\left(\frac{\partial}{\partial y_{j_s}}\Phi^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,\widehat{j_s},\cdots,j_{r+1}}(p_0)\right)$$

となるから, (6.31) は成り立つ. □

定義 6.54 (微分形式の外微分)**.** M を Euclid 空間内の n 次元多様体, $r\in\mathbb{N}$ とし, $\omega=(\omega_p)_{p\in M}$ を M の r 階微分形式とする. そして ω が $p_0\in M$ において外微分可能 (定義 6.51) であるとする. このとき ω の p_0 における外微分

$$d\omega_{p_0}\in\bigwedge^{r+1}T^*_{p_0}(M)$$

を次のように定義する. $r\in\{1,\cdots,n-1\}$ の場合, p_0 の周りの M の局所座標 $(U,x_1,\cdots,x_n)$ に対し,

$$\omega_p=\sum_{i_1<\cdots<i_r}f_{i_1,\cdots,i_r}(p)dx_{i_1,p}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r,p}\quad(\forall p\in U)$$

と表されるならば,

$$d\omega_{p_0}:=\sum_{i_1<\cdots<i_r}(df_{i_1,\cdots,i_r})_{p_0}\wedge dx_{i_1,p_0}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r,p_0}$$

とする. 命題 6.53 よりこの定義は p_0 の周りの M の局所座標 $(U,x_1,\cdots,x_n)$ の取り方によらない. $r\geqslant n$ の場合は $d\omega_{p_0}=0\in\bigwedge^{r+1}T^*_{p_0}(M)=\{0\}$ (定義 6.48 を参照) とする.

定義 6.55 (微分形式の外微分)**.** M を Euclid 空間内の多様体, $\omega=(\omega_p)_{p\in M}$ を各点で外微分可能な M の r 階微分形式とする. このとき M の $r+1$ 階微分形式

$$d\omega:=(d\omega_p)_{p\in M}$$

を ω の外微分と言う.

定義 6.56 (微分形式の外積). M を Euclid 空間内の多様体, $E \subseteq M$ を空でない部分集合とし, $\omega = (\omega_p)_{p \in E}$ と $\theta = (\theta_p)_{p \in E}$ をそれぞれ E 上で定義された M の r 階微分形式, l 階微分形式とする. このとき E 上で定義された M の $r + l$ 階微分形式 $\omega \wedge \theta$ を,

$$\omega \wedge \theta := (\omega_p \wedge \theta_p)_{p \in E}$$

(反対称テンソルの外積の定義 2.74 を参照) と定義する. また E 上で定義された実数値関数 $f : E \to \mathbb{R}$ に対し, E 上で定義された M の r 階微分形式 $f\omega$ を,

$$f\omega := (f(p)\omega_p)_{p \in E}$$

と定義する.

命題 6.57 (微分形式の外微分の基本性質). M を Euclid 空間内の n 次元多様体, $\omega = (\omega_p)_{p \in M}$ と $\theta = (\theta_p)_{p \in M}$ をそれぞれ M の r 階微分形式, l 階微分形式とし, $h : M \to \mathbb{R}$ とする. このとき,

(1) ω が C^1 級 (定義 6.52) ならば ω は M の各点で外微分可能である.

(2) ω と θ が $p_0 \in M$ において外微分可能 (定義 6.51) であり, h が $p_0 \in M$ において微分可能 (定義 6.12) であるとすると, $\omega \wedge \theta = (\omega_p \wedge \theta_p)_{p \in M}$ と $h\omega = (h(p)\omega_p)_{p \in M}$ は $p_0 \in M$ において外微分可能であり, p_0 における外微分 (定義 6.54) について,

$$d(\omega \wedge \theta)_{p_0} = d\omega_{p_0} \wedge \theta_{p_0} + (-1)^r \omega_{p_0} \wedge d\theta_{p_0},$$

$$d(h\omega)_{p_0} = dh_{p_0} \wedge \omega_{p_0} + h(p_0) d\omega_{p_0}$$

が成り立つ.

(3) $h : M \to \mathbb{R}$ が C^2 級 (定義 6.14) ならば, M の 1 階微分形式 $dh = (dh_p)_{p \in M}$ は C^1 級であり,

$$d^2 h = d(dh) = (d(dh)_p)_{p \in M} = 0$$

が成り立つ.

(4) ω が C^2 級ならば, $d\omega = (d\omega_p)_{p \in M}$ は C^1 級であり,

$$d^2 \omega = d(d\omega) = (d(d\omega)_p)_{p \in M} = 0$$

が成り立つ.

証明. (1) 定義 6.52 より M の任意の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ と任意の $i_1, \cdots, i_r \in \{1, \cdots, n\}$ に対し,

$$U \ni p \mapsto \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} p \right) \in \mathbb{R} \tag{6.32}$$

は C^1 級である. よって命題 6.20 の (4) より (6.32) は各点で微分可能である. ゆえに定義 6.51 より ω は M の各点で外微分可能である.

(2) p_0 の周りの M の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ を取ると, 定義 6.51 より p_0 において微分可能な関数

$$f_{i_1, \cdots, i_r} : U \to \mathbb{R}, \quad g_{j_1, \cdots, j_r} : U \to \mathbb{R} \quad (i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_r \in \{1, \cdots, n\})$$

に対し,

$$\omega_p = \sum_{i_1, \cdots, i_r} f_{i_1, \cdots, i_r}(p) dx_{i_1, p} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r, p} \quad (\forall p \in U),$$
$$\theta_p = \sum_{j_1, \cdots, j_r} g_{j_1, \cdots, j_r}(p) dx_{j_1, p} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r, p} \quad (\forall p \in U)$$

と表される.

$$\omega_p \wedge \theta_p = \sum_{\substack{i_1, \cdots, i_r \\ j_1, \cdots, j_r}} f_{i_1, \cdots, i_r}(p) g_{j_1, \cdots, j_r}(p) dx_{i_1, p} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r, p} \wedge dx_{j_1, p} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r, p} \quad (\forall p \in U)$$

であり,

$$f_{i_1,\cdots,i_r}g_{j_1,\cdots,j_r}: U \to \mathbb{R} \ \ (i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_r \in \{1,\cdots,n\})$$

は p_0 において微分可能であるから, 定義 6.51 より $\omega \wedge \theta$ は p_0 において外微分可能である. そして定義 6.54 より,

$$\begin{aligned} d\omega_{p_0} &= \sum_{i_1,\cdots,i_r} (df_{i_1,\cdots,i_r})_{p_0} \wedge dx_{i_1,p_0} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r,p_0}, \\ d\theta_{p_0} &= \sum_{j_1,\cdots,j_r} (dg_{j_1,\cdots,j_r})_{p_0} \wedge dx_{j_1,p_0} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r,p_0} \end{aligned}$$

であり,

$$d(f_{i_1,\cdots,i_r}g_{j_1,\cdots,j_r})_{p_0} = g_{j_1,\cdots,j_r}(p_0)(df_{i_1,\cdots,i_r})_{p_0} + f_{i_1,\cdots,i_r}(p_0)(dg_{j_1,\cdots,j_r})_{p_0}$$

であるから,

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \theta)_{p_0} &= \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r \\ j_1,\cdots,j_r}} d(f_{i_1,\cdots,i_r}g_{j_1,\cdots,j_r})_{p_0} \wedge dx_{i_1,p_0} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r,p_0} \wedge dx_{j_1,p_0} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r,p_0} \\ &= \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r \\ j_1,\cdots,j_r}} g_{j_1,\cdots,j_r}(p_0)(df_{i_1,\cdots,i_r})_{p_0} \wedge dx_{i_1,p_0} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r,p_0} \wedge dx_{j_1,p_0} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r,p_0} \\ &+ \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r \\ j_1,\cdots,j_r}} f_{i_1,\cdots,i_r}(p_0)(dg_{j_1,\cdots,j_r})_{p_0} \wedge dx_{i_1,p_0} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r,p_0} \wedge dx_{j_1,p_0} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r,p_0} \\ &= d\omega_{p_0} \wedge \theta_{p_0} + (-1)^r \omega_{p_0} \wedge d\theta_{p_0} \end{aligned}$$

である. また,

$$h(p)\omega_p = \sum_{i_1,\cdots,i_r} h(p)f_{i_1,\cdots,i_r}(p)dx_{i_1,p} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r,p} \ \ (\forall p \in U)$$

であり,

$$hf_{i_1,\cdots,i_r}: U \to \mathbb{R} \ \ (i_1,\cdots,i_r \in \{1,\cdots,n\})$$

は p_0 において微分可能であるから, $h\omega$ は p_0 において外微分可能であり,

$$d(hf_{i_1,\cdots,i_r})_{p_0} = h(p_0)(df_{i_1,\cdots,i_r})_{p_0} + f_{i_1,\cdots,i_r}(p_0)dh_{p_0}$$

であるから,

$$\begin{aligned} d(h\omega)_{p_0} &= \sum_{i_1,\cdots,i_r} h(p_0)(df_{i_1,\cdots,i_r})_{p_0} \wedge dx_{i_1,p_0} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r,p_0} \\ &+ \sum_{i_1,\cdots,i_r} f_{i_1,\cdots,i_r}(p_0)dh_{p_0} \wedge dx_{i_1,p_0} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r,p_0} \\ &= h(p_0)d\omega_{p_0} + dh_{p_0} \wedge d\omega_{p_0} \end{aligned}$$

である.

(3) M の任意の局所座標 $(U,x_1,\cdots,x_n)$ に対し, 命題 6.34 より

$$dh_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_j}(p)dx_{j,p}, \ \ d\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(p)dx_{i,p} \ \ (\forall p \in U)$$

であるので, 外微分の定義 6.54 より,

$$d^2h_p = \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)_p \wedge dx_{j,p} = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(p)dx_{i,p} \wedge dx_{j,p} \ \ (\forall p \in U)$$

となる. ここで C^2 級関数の偏微分の可換性 (命題 6.20 の (7)) と外積の反対称性 (命題 2.79) より,

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(p)dx_{i,p} \wedge dx_{j,p} = -\sum_{i,j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i}(p)dx_{j,p} \wedge dx_{i,p} \ \ (\forall p \in U)$$

であるから $d^2h_p = 0$ $(\forall p \in U)$ である. $(U,x_1,\cdots,x_n)$ は M の任意の局所座標なので $d^2h = 0$ である.

(4) M の任意の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ に対し, 定義 6.52 より C^2 級関数

$$f_{i_1,\cdots,i_r} : U \to \mathbb{R} \ \ (i_1, \cdots, i_r \in \{1, \cdots, n\})$$

が取れて,

$$\omega_p = \sum_{i_1,\cdots,i_r} f_{i_1,\cdots,i_r}(p) dx_{i_1,p} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r,p} \ \ (\forall p \in U)$$

と表せる. よって外微分の定義 6.54 より,

$$d\omega_p = \sum_{i_1,\cdots,i_r} (df_{i_1,\cdots,i_r})_p \wedge dx_{i_1,p} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r,p} \ \ (\forall p \in U)$$

であり, (2), (3) より,

$$\begin{aligned} d^2\omega_p &= \sum_{i_1,\cdots,i_r} (d^2 f_{i_1,\cdots,i_r})_p \wedge dx_{i_1,p} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r,p} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{r} (-1)^k \sum_{i_1,\cdots,i_r} (df_{i_1,\cdots,i_r})_p \wedge dx_{i_1,p} \wedge \cdots \wedge d^2 x_{i_{k_r},p} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r,p} \\ &= 0 \ \ (\forall p \in U) \end{aligned}$$

である. $(U, x_1, \cdots, x_n)$ は M の任意の局所座標なので $d^2\omega = 0$ である.

□

定義 6.58 (微分形式の引き戻し)**.** M, H をそれぞれ Euclid 空間内の多様体とし, $f : M \to H$ を C^1 級関数, $\omega = (\omega_q)_{q \in E}$ を $E \subseteq H$ 上で定義された H の r 階微分形式とする. そして $f^{-1}(E) \neq \varnothing$ とする. このとき任意の $p \in M, v \in T_p(M)$ に対し, $df_p v \in T_{f(p)}(H)$ である (定理 6.29 を参照) ことに注意して, 任意の $p \in f^{-1}(E)$ に対し,

$$(f^*\omega)_p : \overbrace{T_p(M) \times \cdots \times T_p(M)}^{r \text{ 個}} \to \mathbb{R}, \ \ (f^*\omega)_p(v_1, \cdots, v_r) := \omega_{f(p)}(df_p v_1, \cdots, df_p v_r)$$

を定義する. これは有限次元線型空間 $T_p(M)$ 上の反対称多重線型写像であるから,

$$(f^*\omega)_p \in \bigwedge^r T_p^*(M) \ \ (\forall p \in f^{-1}(E))$$

(命題 2.66 と命題 2.73 を参照) である. こうして $f^{-1}(E)$ 上で定義された M の r 階微分形式

$$f^*\omega = ((f^*\omega)_p)_{p \in f^{-1}(E)}$$

ができる. これを ω の f による引き戻しと言う.

注意 6.59 (引き戻しに関する注意)**.** M, H をそれぞれ Euclid 空間内の n 次元多様体, k 次元多様体とし, $f : M \to H$ を C^1 級関数, $\omega = (\omega_q)_{q \in E}$ を $E \subseteq H$ 上で定義された H の r 階微分形式とする. そして $f^{-1}(E) \neq \varnothing$ とする. H の局所座標 $(V, y_1, \cdots, y_k)$ で $f^{-1}(V \cap E) \neq \varnothing$ なるものに対し,

$$\omega_q = \sum_{j_1,\cdots,j_r} h_{j_1,\cdots,j_r}(q) dy_{j_1,q} \wedge \cdots \wedge dy_{j_r,q} \ \ (\forall q \in V \cap E)$$

と表す. このとき全微分に関するチェインルール (定理 6.29) と次の命題 6.60 の (2) より,

$$(f^*\omega)_p = \sum_{j_1,\cdots,j_r} h_{j_1,\cdots,j_r}(f(p)) d(y_{j_1} \circ f)_p \wedge \cdots \wedge d(y_{j_r} \circ f)_p \ \ (\forall p \in f^{-1}(V \cap E))$$

である. そして $U \cap f^{-1}(V \cap E) \neq \varnothing$ なる M の任意の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ に対し, 命題 6.34 より,

$$d(y_j \circ f)_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y_j \circ f)}{\partial x_i}(p) \ \ (\forall p \in U \cap f^{-1}(V \cap E), \ j = 1, \cdots, k)$$

であるから,

$$(f^*\omega)_p = \sum_{j_1,\cdots,j_r} h_{j_1,\cdots,j_r}(f(p))d(y_{j_1}\circ f)_p \wedge \cdots \wedge d(y_{j_r}\circ f)_p$$
$$= \sum_{i_1,\cdots,i_r}\left(\sum_{j_1,\cdots,j_r} h_{j_1,\cdots,j_r}(f(p))\frac{\partial(y_{j_1}\circ f)}{\partial x_{i_1}}(p)\cdots\frac{\partial(y_{j_r}\circ f)}{\partial x_{i_r}}(p)\right)dx_{i_1,p}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r,p}$$
$$(\forall p \in U \cap f^{-1}(V\cap E))$$

が成り立つ. これよりもし $\omega = (\omega_q)_{q\in E}$ が H の連続な微分形式 (定義 6.50) ならば $f^*\omega = ((f^*\omega)_p)_{p\in f^{-1}(E)}$ は M の連続な微分形式であり, $E \subseteq H$ が開集合で, $\omega = (\omega_q)_{q\in E}$ が H の C^k 級微分形式で, $f : M \to H$ が C^{k+1} 級ならば, $f^*\omega = ((f^*\omega)_p)_{p\in f^{-1}(E)}$ は M の C^k 級微分形式である.

命題 6.60 (微分形式の引き戻しの基本性質)**.** M, H, L をそれぞれ Euclid 空間内の多様体とする.

(1) $f : M \to H$, $g : H \to L$ をそれぞれ C^1 級関数とし, $E \subseteq L$, $(g\circ f)^{-1}(E) \neq \varnothing$ とする. このとき E 上で定義された L の微分形式 ω に対し, $(g\circ f)^{-1}(E)$ 上で定義された M の微分形式に関する等式

$$f^*g^*\omega = (g\circ f)^*\omega$$

が成り立つ.

(2) $f : M \to H$ を C^1 級関数, $E \subseteq H$, $f^{-1}(E) \neq \varnothing$ とする. このとき E 上で定義された H の微分形式 ω, θ と $h : E \to \mathbb{R}$ に対し, $f^{-1}(E)$ 上で定義された M の微分形式に関する等式

$$f^*(\omega\wedge\theta) = f^*\omega \wedge f^*\theta, \quad f^*(h\omega) = (h\circ f)f^*\omega$$

が成り立つ.

(3) $f : M \to H$ を C^2 級関数, ω を H の C^1 級微分形式とすると,

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$$

が成り立つ.

証明. (1) 全微分に関するチェインルール (定理 6.29) より,

$$d(g\circ f)_p = dg_{f(p)}dg_p \quad (\forall p \in M)$$

であるから, 任意の $p \in (g\circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E))$, $v_j \in T_p(M)$ に対し,

$$(f^*g^*\omega)_p(v_j)_j = (g^*\omega)_{f(p)}(df_pv_j)_j = \omega_{g(f(p))}(dg_{f(p)}df_pv_j)_j$$
$$= \omega_{g(f(p))}(d(g\circ f)_pv_j)_j = ((g\circ f)^*\omega)_p(v_j)_j$$

となる. よって $f^*g^*\omega = (g\circ f)^*\omega$ が成り立つ.

(2) 任意の $p \in f^{-1}(E)$, $v_j \in T_p(M)$ に対し,

$$(f^*(\omega\wedge\theta))_p(v_j)_j = \omega_{f(p)} \wedge \theta_{f(p)}(df_pv_j)_j = (f^*\omega)_p \wedge (f^*\omega)_p(v_j)_j,$$

$$(f^*(h\omega))_p(v_j)_j = h(f(p))\omega_{f(p)}(df_pv_j)_j = h(f(p))(f^*\omega)_p(v_j)_j$$

となる. よって $f^*(\omega\wedge\theta) = f^*\omega\wedge f^*\theta$, $f^*(h\omega) = (h\circ f)f^*\omega$ が成り立つ.

(3) H の任意の局所座標 $(V, y_1, \cdots, y_k)$ と, $U \subseteq f^{-1}(V)$ なる M の任意の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ を取る. C^1 級関数 $h_{i_1,\cdots,i_r} : V \to \mathbb{R}$ に対し,

$$\omega_q = \sum_{j_1,\cdots,j_r} h_{j_1,\cdots,j_r}(q)dy_{j_1,q}\wedge\cdots\wedge dy_{j_r,q} \quad (\forall q \in V)$$

と表すと, 任意の $p \in U \subseteq f^{-1}(V)$ に対し全微分に関するチェインルール (定理 6.29) と (2) より,

$$(f^*\omega)_p = \sum_{j_1,\cdots,j_r} (h_{j_1,\cdots,j_r} \circ f)(p) d(y_{j_1} \circ f)_p \wedge \cdots \wedge d(y_{j_r} \circ f)_p$$

となるから, 命題 6.57 の (2), (3) より,

$$\begin{aligned} d(f^*\omega)_p &= \sum_{j_1,\cdots,j_r} d(h_{j_1,\cdots,j_r} \circ f)_p \wedge d(y_{j_1} \circ f)_p \wedge \cdots \wedge d(y_{j_r} \circ f)_p \\ &\quad + \sum_{k=1}^{r} (-1)^k \sum_{j_1,\cdots,j_r} (h_{j_1,\cdots,j_r} \circ f)(p) d(y_{j_1} \circ f)_p \wedge \cdots \wedge d^2(y_{j_k} \circ f)_p \wedge \cdots d(y_{j_r} \circ f)_p \\ &= \sum_{j_1,\cdots,j_r} d(h_{j_1,\cdots,j_r} \circ f)_p \wedge d(y_{j_1} \circ f)_p \wedge \cdots \wedge d(y_{j_r} \circ f)_p \quad (\forall p \in U) \end{aligned}$$

となる. また,

$$d\omega_q = \sum_{j_1,\cdots,j_r} (dh_{j_1,\cdots,j_r})_q \wedge dy_{j_1,q} \wedge \cdots \wedge dy_{j_r,q} \quad (\forall q \in V)$$

であるから, 全微分に関するチェインルール (定理 6.29) と (2) より,

$$(f^*d\omega)_p = \sum_{j_1,\cdots,j_r} d(h_{j_1,\cdots,j_r} \circ f)_p \wedge d(y_{j_1} \circ f)_p \wedge \cdots \wedge d(y_{j_r} \circ f)_p \quad (\forall p \in U)$$

となる. よって,

$$d(f^*\omega)_p = (f^*d\omega)_p \quad (\forall p \in U)$$

が成り立つ. よって局所座標 $(V, y_1, \cdots, y_k)$ と $(U, x_1, \cdots, x_n)$ の任意性より $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$ が成り立つ.

□

6.5 Euclid 空間における Hodge の ⋆-作用素, ベクトル積, 勾配, 発散, Laplacian

命題 6.61 (テンソル積内積空間). $(V_j, (\cdot \mid \cdot)_j)$ $(j = 1, \cdots, N)$ をそれぞれ $\mathbb{R}$ 上の有限次元内積空間とする. このときテンソル積線型空間 (定義 2.65) $\bigotimes_{j=1}^{N} V_j$ 上の内積 $(\cdot \mid \cdot)$ で, 任意の $u_j, v_j \in V_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対し,

$$(u_1 \otimes \cdots \otimes u_N \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) = (u_1 \mid v_1)_1 \cdots (u_N \mid v_N)_N$$

を満たすものが唯一つ存在する.

証明. 一意性は内積の双線型性より自明である. 存在を示す. 任意の $v_j \in V_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対し,

$$V_1 \times \cdots \times V_N \ni (u_1, \cdots, u_N) \mapsto (u_1 \mid v_1)_1 \cdots (u_N \mid v_N)_N \in \mathbb{R}$$

は多重線型写像であるから, 定理 2.68 より線型汎関数

$$v_1 \odot \cdots \odot v_N : \bigotimes_{j=1}^{N} V_j \ni u_1 \otimes \cdots \otimes u_N \mapsto (u_1 \mid v_1)_1 \cdots (u_N \mid v_N)_N \in \mathbb{R}$$

が定義できる. さらに,

$$V_1 \times \cdots \times V_N \ni (v_1, \cdots, v_N) \mapsto v_1 \odot \cdots \odot v_N \in \left(\bigotimes_{j=1}^{N} V_j \right)^*$$

は多重線型写像であるから, 定理 2.68 より線型写像

$$\Phi : \bigotimes_{j=1}^{N} V_j \ni v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \mapsto v_1 \odot \cdots \odot v_N \in \left(\bigotimes_{j=1}^{N} V_j \right)^*$$

が定義できる. そこで,

$$(\cdot \mid \cdot) : \bigotimes_{j=1}^{N} V_j \times \bigotimes_{j=1}^{N} V_j \ni (S, T) \mapsto \Phi(S)(T) \in \mathbb{R} \tag{6.33}$$

なる双線型汎関数を定義すれば, 任意の $u_j, v_j \in V_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対し,

$$(u_1 \otimes \cdots \otimes u_N \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) = (u_1 \mid v_1)_1 \cdots (u_N \mid v_N)_N$$

が成り立つ. よって (6.33) が $\bigotimes_{j=1}^{N} V_j$ 上の内積であることを示せばよい. 各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し $e_{j,1}, \cdots, e_{j,n(j)} \in V_j$ を V_j の正規直交基底とすると, 任意の $T \in \bigotimes_{j=1}^{N} V_j$ に対し,

$$T = \sum_{k_1, \cdots, k_N} \alpha_{k_1, \cdots, k_N} (e_{1,k_1} \otimes \cdots \otimes e_{N,k_N}), \quad \alpha_{k_1, \cdots, k_N} \in \mathbb{R} \ \ (\forall k_j \in \{1, \cdots, n(j)\}, j = 1, \cdots, N)$$

と表せる. このとき,

$$(T \mid T) = \sum_{k_1, \cdots, k_N} \alpha_{k_1, \cdots, k_N}^2 \geqslant 0$$

であるから,

$$(T \mid T) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_{k_1, \cdots, k_N} = 0 \ \ (\forall k_j \in \{1, \cdots, n(j)\}, j = 1, \cdots, N) \quad \Leftrightarrow \quad T = 0$$

である. よって (6.33) は内積である. □

定義 6.62 (Hodge の $\star$-作用素)**.** $(V, (\cdot \mid \cdot))$ を $\mathbb{R}$ 上の N 次元内積空間とする. 任意の $r \in \{1, \cdots, N\}$ に対し命題 6.61 よりテンソル積線型空間 $\bigotimes^r V$ 上の内積 $(\cdot \mid \cdot)_r$ で,

$$(u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) = \frac{1}{r!}(u_1 \mid v_1) \cdots (u_r \mid v_r) \ \ (\forall u_1, v_1, \cdots, u_r, v_r \in V)$$

を満たすものが定まる. この内積を反対称テンソル積線型空間 (定義 2.72) $\bigwedge^r V \subseteq \bigotimes^r V$ に制限したものを考える. 命題 2.78 より,

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)} \ \ (\forall v_1, \cdots, v_r \in V)$$

であるから,

$$\begin{aligned}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \mid v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)_r &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)(u_{\sigma(1)} \mid v_{\tau(1)}) \cdots (u_{\sigma(r)} \mid v_{\tau(r)}) \\ &= \det((u_i \mid v_j))_{i,j} \ \ (\forall u_1, v_1, \cdots, u_r, v_r \in V)\end{aligned} \tag{6.34}$$

が成り立つ.

$$\bigwedge^0 V := \mathbb{R}, \ \ (u \mid v)_0 := uv \ \ \left(\forall u, v \in \bigwedge^0 V\right)$$

とする. 今, $\Omega \in \bigwedge^N V$[*77]で,

$$(\Omega \mid \Omega)_N = 1$$

を満たすものを取り固定する. そして任意の $r \in \{0, 1, \cdots, N\}$ と任意の $T \in \bigwedge^r V$ に対し, 反対称テンソル積空間の内積 (6.34) によって線型汎関数

$$\bigwedge^{N-r} V \ni S \mapsto (T \wedge S \mid \Omega)_N \in \mathbb{R}$$

を定義する. これに対し Riesz の表現定理 3.44 より $\star T \in \bigwedge^{N-r} V$ で,

$$(S \mid \star T)_{N-r} = (T \wedge S \mid \Omega)_N \ \ \left(\forall S \in \bigwedge^{N-r} V\right) \tag{6.35}$$

---

*77 命題 2.80 より $\bigwedge^N V$ は 1 次元である.

なるものが定まる．こうして線型写像

$$\star : \bigwedge^r V \ni T \mapsto \star T \in \bigwedge^{N-r} V \tag{6.36}$$

が定まる．これは明らかに単射であり，

$$\dim \bigwedge^r V = \binom{N}{r} = \frac{N!}{r!(N-r)!} = \binom{N}{N-r} = \dim \bigwedge^{N-r} V$$

であるから (6.36) は線型同型写像である．(6.36) を $\Omega \in \bigwedge^N V$ によって定まる内積空間 V 上の Hodge の $\star$-作用素と言う．

命題 6.63 (Hodge の $\star$-作用素の基本性質)**.** V を $\mathbb{R}$ 上の N 次元内積空間とし，$\Omega \in \bigwedge^N V$ によって定まる Hodge の $\star$-作用素

$$\star : \bigwedge^r V \ni T \mapsto \star T \in \bigwedge^{N-r} V \quad (r \in \{0, 1, \cdots, N\})$$

を考える．このとき，

(1) 任意の $r \in \{0, 1, \cdots, N\}$，任意の $T \in \bigwedge^r V$ に対し，$\star\star T = (-1)^{r(N-r)} T$ が成り立つ．
(2) 任意の $r \in \{0, 1, \cdots, N\}$，任意の $S, T \in \bigwedge^r V$ に対し，$(S \mid T)_r = (\star S \mid \star T)_{N-r}$ が成り立つ．

証明. (1) $\bigwedge^N V$ は 1 次元であり，$(\Omega \mid \Omega)_N = 1$ であるから内積空間 V の正規直交基底 $e_1, \cdots, e_N$ で，

$$\Omega = e_1 \wedge \cdots \wedge e_N$$

を満たすものが取れる．Hodge の $\star$-作用素は線型作用素であるから，ある N 次の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対し，

$$T = e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(r)}$$

と表されるとして示せば十分である．(6.34) と (6.35) より，

$$\star(e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(r)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)(e_{\sigma(r+1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(N)})$$

であるから，

$$\begin{aligned} \star\star(e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(r)}) &= \mathrm{sgn}(\sigma) \star (e_{\sigma(r+1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(N)}) \\ &= (-1)^{r(N-r)} \mathrm{sgn}(\sigma)^2 (e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(r)}) \end{aligned}$$

である．よって $\star\star T = (-1)^{r(N-r)} T$ が成り立つ．

(2) (6.35) と (1) より，

$$\begin{aligned} (\star S \mid \star T)_{N-r} &= (T \wedge \star S \mid \Omega)_N = (-1)^{r(N-r)} (\star S \wedge T \mid \Omega)_N \\ &= (-1)^{r(N-r)} (T \mid \star\star S)_r = (T \mid S) \end{aligned}$$

である．

□

定義 6.64 (Euclid 空間における Hodge の $\star$-作用素)**.** $(e_1, \cdots, e_N)$ を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の標準基底 (定義 2.55) とする．

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_N \in \bigwedge^N \mathbb{R}^N$$

を考えると，

$$(e_1 \wedge \cdots \wedge e_N \mid e_1 \wedge \cdots \wedge e_N)_N = \det((e_i \mid e_j))_{i,j} = 1$$

である．$e_1 \wedge \cdots \wedge e_N$ によって定まる Hodge の $\star$-作用素 (定義 6.62)

$$\star : \bigwedge^r \mathbb{R}^N \to \bigwedge^{N-r} \mathbb{R}^N \quad (r = 0, 1, \cdots, N)$$

を単に Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ における Hodge の $\star$-作用素と言う．

定義 6.65 (Euclid 空間におけるベクトル積)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の Hodge の $\star$-作用素

$$\star : \bigwedge^{N-1} \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

と, 任意の $N-1$ 個のベクトル $v_1, \cdots, v_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$v_1 \times \cdots \times v_{N-1} := \star(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$$

なる $\mathbb{R}^N$ のベクトルを $v_1, \cdots, v_{N-1}$ のベクトル積と言う.

命題 6.66. Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ のベクトル積に関して次が成り立つ.

(1) $\mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^N \ni (v_1, \cdots, v_{N-1}) \mapsto v_1 \times \cdots \times v_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ は反対称な多重線型写像である.

(2) $v_1, \cdots, v_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ に対し, $v_1 \times \cdots \times v_{N-1} \neq 0 \Leftrightarrow v_1, \cdots, v_{N-1}$ は線型独立.

(3) 任意の $v_1, \cdots, v_{N-1}, v_N \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$(v_N \mid v_1 \times \cdots \times v_{N-1}) = \det(v_1, \cdots, v_N) \tag{6.37}$$

(右辺は行列の縦ベクトル表記 (定義 2.49)) が成り立つ. よって特に任意の $v_1, \cdots, v_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ に対し, そのベクトル積 $v_1 \times \cdots \times v_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ は $v_1, \cdots, v_{N-1}$ のそれぞれと直交する.

(4) 任意の $v_1, \cdots, v_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ に対し, $v := v_1 \times \cdots \times v_{N-1}$ とおくと,

$$|v|^2 = \det\left((v_i \mid v_j)\right)_{i,j} = \det(v_1, \cdots, v_{N-1}, v)$$

が成り立つ.

証明. (1) 外積

$$\mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^N \ni (v_1, \cdots, v_{N-1}) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_{N-1} \in \bigwedge^{N-1} \mathbb{R}^N$$

の反対称性 (命題 2.79) と Hodge の $\star$-作用素の線型性より明らかである.

(2) Hodge の $\star$-作用素が線型同型写像であることと命題 2.80 より,

$$v_1 \times \cdots \times v_{N-1} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 \wedge \cdots \wedge v_{N-1} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1, \cdots, v_{N-1} \text{ は線型独立}$$

である.

(3) Hodge の $\star$-作用素の定義 6.62 の (6.34), (6.35) より,

$$\begin{aligned}(v_N \mid v_1 \times \cdots \times v_{N-1}) &= (v_N \mid \star(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{N-1})) = (v_1 \wedge \cdots \wedge v_N \mid e_1 \wedge \cdots \wedge e_N)_N \\ &= \det(v_1, \cdots, v_N)\end{aligned}$$

となる. よって (6.37) が成り立つ. 任意の $v_1, \cdots, v_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ に対し行列式の反対称性 (命題 2.50) より任意の $j \in \{1, \cdots, N-1\}$ に対し,

$$(v_j \mid v_1 \times \cdots \times v_{N-1}) = \det(v_1, \cdots, v_{N-1}, v_j) = 0$$

であるから $v_1 \times \cdots \times v_{N-1}$ は $v_1, \cdots, v_{N-1}$ のそれぞれと直交する.

(4) $v = v_1 \times \cdots \times v_{N-1} = \star(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{N-1})$ であるから命題 6.63 の (2) と定義 6.62 の (6.34) より,

$$\begin{aligned}|v|^2 &= (v_1 \times \cdots \times v_{N-1} \mid v_1 \times \cdots \times v_{N-1}) \\ &= (v_1 \wedge \cdots \wedge v_{N-1} \mid v_1 \wedge \cdots \wedge v_{N-1})_{N-1} \\ &= \det((v_i \mid v_j))_{i,j}.\end{aligned}$$

であり, (6.37) より,

$$|v|^2 = (v \mid v) = (v \mid v_1 \times \cdots \times v_{N-1}) = \det(v_1, \cdots, v_{N-1}, v)$$

である.

□

注意 6.67 (ベクトル積の幾何学的意味)**.** 命題 6.66 より任意の線型独立な $v_1, \cdots, v_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$v_N := v_1 \times \cdots \times v_{N-1} \neq 0$$

であり, v_N は $v_1, \cdots, v_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ が張る面

$$S := \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} t_j v_j : t_1, \cdots, t_{N-1} \in [0,1],\ \sum_{j=1}^{N-1} t_j = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^N$$

と直交している. また縦ベクトル表記 (定義 2.49) により,

$$A := (v_1, \cdots, v_{N-1}, v_N) \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$$

とおけば,

$$|v_N|^2 = \det(A) > 0$$

であり, 定理 5.215 より, $\det(A)$ は $v_1, \cdots, v_N$ が張る立体

$$L := \left\{ \sum_{j=1}^{N} t_j v_j : t_1, \cdots, t_N \in [0,1],\ \sum_{j=1}^{N} t_j = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^N$$

の Lebesgue 測度 (体積) である. よって,

$$|v_N| = \frac{\det(A)}{|v_N|} > 0$$

は自然に S の面積と考えられる.

定義 6.68 (局所座標に対する計量)**.** M を Euclid 空間内の n 次元多様体とする. M の任意の局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ に対し,

$$g_{(U,\varphi)}(p) = (g_{i,j}(p))_{i,j} := \left(\frac{\partial}{\partial x_i} p \mid \frac{\partial}{\partial x_j} p \right)_{i,j} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \quad (\forall p \in U)$$

とおく. $g_{(U,\varphi)} : U \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ を M の局所座標 (U, φ) に対する計量と言う. 次の命題 6.69 より任意の $p \in U$ に対し $g_{(U,\varphi)}(p) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ は正則行列であり, その行列式は正である.

命題 6.69. M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体とする.

(1) M の任意の局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ に対し, その計量 $g_{(U,\varphi)} : U \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ の各点での行列式は,

$$\det(g_{U,\varphi}(p)) = \det\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} p \mid \frac{\partial}{\partial x_j} p \right) \right)_{i,j} > 0 \quad (\forall p \in U)$$

を満たす. また $n = N-1$ の場合, $\mathbb{R}^N$ のベクトル積 (定義 6.65) によって,

$$\det(g_{U,\varphi}(p)) = \left| \frac{\partial}{\partial x_1} p \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_N} p \right| \quad (\forall p \in U)$$

が成り立つ.

(2) M の局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ と $(V, \psi; y_1, \cdots, y_n)$ が $U \cap V \neq \varnothing$ を満たすならば, これらに対する計量 $g_{(U,\varphi)}$ と $g_{(V,\psi)}$ の $U \cap V$ の各点における行列式は,

$$\begin{aligned}\det(g_{(U,\varphi)}(p)) &= \left(\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p) \right)_{i,j} \right)^2 \det(g_{(V,\psi)}(p)) \\ &= \left(\det\left(\psi \circ \varphi^{-1} \right)' (\varphi(p)) \right)^2 \det(g_{(V,\psi)}(p)) \\ &\quad (\forall p \in U \cap V)\end{aligned}$$

を満たす.

証明. (1) Hodge の $\star$-作用素の定義 6.62 (の V を $\mathbb{R}^N$ にしたもの) における $\bigwedge^n \mathbb{R}^N$ の内積 $(\cdot \mid \cdot)_n$ を考えると, 任意の $p \in U$ に対し (6.34) より,

$$\det(g_{(U,\varphi)}(p)) = \det\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}p \mid \frac{\partial}{\partial x_j}p\right)\right)_{i,j} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}p \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}p \mid \frac{\partial}{\partial x_1}p \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}p\right)_n$$

であり, $\frac{\partial}{\partial x_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}p \in \mathbb{R}^N$ は線型独立である (命題 6.22) から命題 2.80 より右辺は正である. $n = N-1$ の場合は命題 6.63 の (2) とベクトル積の定義 6.65 より,

$$\begin{aligned}\det(g_{(U,\varphi)}(p)) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}p \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p \mid \frac{\partial}{\partial x_1}p \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p\right)_{N-1} \\ &= \left(\star\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p\right) \mid \star\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p\right)\right) \\ &= \left|\frac{\partial}{\partial x_1}p \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p\right|^2\end{aligned}$$

である.

(2) 任意の $p \in U \cap V$ に対し命題 6.20 の (8) より,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}p = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(p)\frac{\partial}{\partial y_i}p \quad (j = 1, \cdots, n)$$

であるから,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}p \mid \frac{\partial}{\partial x_j}p\right) = \sum_{k,l} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_k}p \mid \frac{\partial}{\partial y_l}p\right)\frac{\partial y_l}{\partial x_j}(p) \quad (\forall i, j \in \{1, \cdots, n\})$$

である. よって,

$$(\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j}$$

に対し,

$$g_{(U,\varphi)}(p) = (\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))^t g_{(V,\psi)}(p)(\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))$$

である. ゆえに,

$$\det(g_{((U,\varphi)}(p)) = \left(\det(\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))\right)^2 \det(g_{(V,\psi)}(p)) = \left(\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j}\right)^2 \det(g_{(V,\psi)}(p))$$

である.

□

定義 6.70 (Euclid 空間内の多様体上の関数の勾配)**.** M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の多様体, $f : M \to \mathbb{R}$ とし, f は $p \in M$ において微分可能であるとする. $T_p(M) \subseteq \mathbb{R}^N$ (接ベクトル空間の定義 6.23 を参照) は $\mathbb{R}^N$ の内積 $(\cdot \mid \cdot)$ によって内積空間であるから, Riesz の表現定理 3.44 より, 線型汎関数

$$df_p : T_p(M) \to \mathbb{R}$$

に対し, $\mathrm{grad}(f)(p) \in T_p(M)$ で,

$$df_p v = (v \mid \mathrm{grad}(f)(p)) \quad (\forall v \in T_p(M))$$

を満たすものが定まる. $\mathrm{grad}(f)(p) \in T_p(M)$ を f の p における勾配と言う.

命題 6.71 (勾配の計量による表示)**.** M を Euclid 空間内の n 次元多様体, $f : M \to \mathbb{R}$ とし, f は $p \in M$ において微分可能であるとする. そして p の周りの M の局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ に対し, その p における計量 (定義 6.68) $g_{(U,\varphi)}(p) = (g_{i,j}(p))_{i,j} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ の逆行列を $(g^{i,j}(p))_{i,j} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ とおく. このとき f の p における勾配は,

$$\mathrm{grad}(f)(p) = \sum_{i,j} g^{i,j}(p)\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)\frac{\partial}{\partial x_i}p$$

と表せる.

証明. 勾配の定義 6.70 より,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}p \mid \mathrm{grad}(f)(p)\right) = df_p\frac{\partial}{\partial x_i}p = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{6.38}$$

である. $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}p\right)$ は $T_p(M)$ の基底であるから,

$$\mathrm{grad}(f)(p) = \sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial}{\partial x_j}p \tag{6.39}$$

なる $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ が取れる. (6.38) より,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j g_{i,j}(p) = \sum_{j=1}^{n} a_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}p \mid \frac{\partial}{\partial x_j}p\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}p \mid \mathrm{grad}(f)(p)\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{6.40}$$

であり, $(g^{i,j}(p))_{i,j} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ は $(g_{i,j}(p))_{i,j} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ の逆行列であるから (6.40) より,

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} g^{i,j}(p)\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \quad (i = 1, \cdots, n)$$

である. よって (6.39) より,

$$\mathrm{grad}(f)(p) = \sum_{i,j} g^{i,j}(p)\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)\frac{\partial}{\partial x_i}p$$

である. □

定義 6.72 (Euclid 空間の双対空間における Hodge の $\star$-作用素)**.** 線型同型写像 $j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N*}$ を,

$$j(v) := (\cdot \mid v) : \mathbb{R}^N \ni u \mapsto (u \mid v) \in \mathbb{R} \quad (\forall v \in \mathbb{R}^N)$$

として定義し, Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の双対空間 $\mathbb{R}^{N*}$ における内積を,

$$(j(u) \mid j(v)) := (u \mid v) \quad (\forall u, v \in \mathbb{R}^N)$$

と定義する. $\mathbb{R}^N$ の標準基底 $(e_1, \cdots, e_N)$ に対し内積空間 $\mathbb{R}^{N*}$ の正規直交基底 $(j(e_1), \cdots, j(e_N))$ ができ,

$$(j(e_1) \wedge \cdots \wedge j(e_N) \mid j(e_1) \wedge \cdots \wedge j(e_N))_N = \det(\delta_{i,j})_{i,j} = 1$$

であるから, $j(e_1) \wedge \cdots \wedge j(e_N) \in \bigwedge^N \mathbb{R}^{N*}$ によって $\mathbb{R}^{N*}$ 上の Hodge の $\star$-作用素 (定義 6.62) が定まる. 以後, Euclid 空間の双対空間 $\mathbb{R}^{N*}$ における Hodge の $\star$-作用素と言えばこの $j(e_1) \wedge \cdots \wedge j(e_N) \in \bigwedge^N \mathbb{R}^{N^N}$ によって定まる Hodge の $\star$-作用素のこととする.

定義 6.73 ($\mathbb{R}^N$ の微分形式に対する Hodge の $\star$-作用素の作用)**.** 任意の $p \in \mathbb{R}^N$ に対し定義 6.25 より,

$$T_p(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N, \quad T_p^*(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^{N*}$$

であることに注意する. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 上で定義された $\mathbb{R}^N$ の $r \in \{0, 1, \cdots, N\}$ 階微分形式

$$\omega : \Omega \ni p \mapsto \omega_p \in \bigwedge^r \mathbb{R}^{N*}$$

に対し, Ω 上で定義された $\mathbb{R}^N$ の $N - r$ 階微分形式 $\star\omega$ を,

$$\star\omega : \Omega \ni p \mapsto \star\omega_p \in \bigwedge^{N-r} \mathbb{R}^{N*}$$

と定義する.

定義 6.74 (Euclid 空間のベクトル場に対応する 1 階微分形式)**.** $\mathbb{R}^N$ の部分集合 Ω 上で定義され, $\mathbb{R}^N$ に値を取る関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ を Ω 上のベクトル場と言う.
$(e_1, \cdots, e_N)$ を $\mathbb{R}^N$ の標準基底, $(x_1, \cdots, x_N)$ を $\mathbb{R}^N$ の標準座標 (定義 6.25) とする. このとき,

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}p, \ \ j(e_i) = dx_{i,p} \ \ (\forall p \in \mathbb{R}^N, \ i = 1, \cdots, N)$$

であることに注意する. ベクトル場 $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ に対し, Ω 上で定義された $\mathbb{R}^N$ の 1 階微分形式

$$j(u) : \Omega \ni p \mapsto j(u(p)) \in \mathbb{R}^{N^*} = T_p^*(\mathbb{R}^N)$$

を定義する. ベクトル場 $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ を,

$$u(p) = (u_1(p), \cdots, u_N(p)) = \sum_{i=1}^{N} u_i(p)e_i \ \ (\forall p \in \Omega)$$

と表せば, u に対応する 1 階微分形式 $j(u)$ は,

$$j(u)_p = j(u(p)) = \sum_{i=1}^{N} u_i(p)j(e_i) = \sum_{i=1}^{N} u_i(p)dx_{i,p} \ \ (\forall p \in \Omega)$$

と表される.

定義 6.75 (発散)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ を C^1 級のベクトル場とする. u に対応する Ω の C^1 級の微分形式 (定義 6.74) $j(u) = (j(u(p)))_{p\in\Omega}$ に対し, Hodge の $\star$-作用素を作用させた Ω の $N-1$ 階 C^1 級微分形式 (定義 6.73) $\star j(u) = (\star j(u(p)))_{p\in\Omega}$ を考え, さらにその外微分を取ることによって Ω の N 階連続微分形式 $d \star j(u)$ を考える. そして連続関数

$$\mathrm{div}(u) := \star d \star j(u) : \Omega \to \mathbb{R}$$

を定義する. $\mathrm{div}(u)$ をベクトル場 u の発散と言う. $(e_1, \cdots, e_N)$ を $\mathbb{R}^N$ の標準基底とし,

$$u(p) = (u_1(p), \cdots, u_N(p)) = \sum_{j=1}^{N} u_j(p)e_j \ \ (\forall p \in \Omega)$$

と表すと, $\mathbb{R}^N$ の標準座標 $(x_1, \cdots, x_N)$ に対し,

$$\begin{aligned}
j(u) &= \sum_{k=1}^{N} u_k dx_k, \\
\star j(u) &= \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} u_k dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots dx_N, \\
d \star j(u) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N, \\
\mathrm{div}(u) &= \star d \star j(u) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

($\widehat{dx_k}$ は dx_k を飛ばすことを意味する) と表せる.

定義 6.76 (Laplacian)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ を C^2 級関数とする. Ω の C^1 級 1 階微分形式 $du = (du_p)_{p\in\Omega}$ に対し, Hodge の $\star$-作用素を作用させた Ω の C^1 級 $N-1$ 階微分形式 (定義 6.73) $\star du$ を考え, さらにその外微分を取ることによって Ω の N 階連続微分形式 $d \star du$ を考える. そして連続関数

$$\Delta u := \star d \star du : \Omega \to \mathbb{R}$$

を定義する. Δu を u の Laplacian と言う. $\mathbb{R}^N$ の標準座標 $(x_1, \cdots, x_N)$ に対し,

$$\begin{aligned} du &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k, \\ \star\, du &= \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_N \\ d \star du &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N, \\ \Delta u &= \star d \star du = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \end{aligned}$$

($\widehat{dx_k}$ は dx_k を飛ばすことを意味する) と表せる.

定義 6.77 (Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の正の向きの直交座標)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の局所座標 $(U, \psi; y_1, \cdots, y_N)$ が正の向きの直交座標であるとは, 任意の $p \in U$ と $i \neq j$ なる任意の $i, j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i} p \mid \frac{\partial}{\partial y_j} p \right) = 0$$

であり, 正則行列

$$(\varphi^{-1})'(\varphi(p)) = \left(\partial_j \varphi^{-1}(\varphi(p))\right)_{i,j} = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_N} p \right)$$

(右辺は行列の縦ベクトル表示) の行列式が正であることを言う.

定理 6.78 (正の向きの直交座標による発散と Laplacian の表示)**.** $(U, \varphi; y_1, \cdots, y_N)$ を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の正の向きの直交座標 (定義 6.77) とし,

$$h_j(p) := \left| \frac{\partial}{\partial y_j} p \right| \quad (\forall p \in U,\ j = 1, \cdots, N)$$

とおく.

(1) U 上の C^1 級ベクトル場 $u : U \to \mathbb{R}^N$ を,

$$u(p) = \sum_{k=1}^{N} u_k(p) \frac{\partial}{\partial y_k} p \quad (\forall p \in U)$$

と表すと,

$$\operatorname{div}(u) = \frac{1}{h_1 \cdots h_N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_k} (h_1 \cdots h_N u_k)$$

が成り立つ.

(2) U 上の C^2 級関数 $u : U \to \mathbb{R}$ に対し,

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 \cdots h_N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{h_1 \cdots h_N}{h_k^2} \frac{\partial u}{\partial y_k} \right)$$

が成り立つ.

証明. $\mathbb{R}^N$ の標準基底を $(e_1, \cdots, e_N)$ とする. 定義 6.62 における $\bigwedge^N \mathbb{R}^N$ の内積 $(\cdot \mid \cdot)_N$ を考える. 任意の $p \in U$ に対し, 外積の反対称性 (命題 2.79) と定義 6.77 より,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} p \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_N} p \mid e_1 \wedge \cdots \wedge e_N \right)_N = \det \left(\frac{\partial}{\partial y_1} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_N} p \right) > 0$$

であり,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} p \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_N} p \mid \frac{\partial}{\partial y_1} p \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_N} p \right)_N = \left(\det \left(\frac{\partial}{\partial y_1} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_N} p \right) \right)^2 > 0$$

である．また (6.34) より，

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}p \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_N}p \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial y_1}p \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_N}p\right)_N = \det\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_i}p \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial y_j}p\right)\right)_{i,j} = h_1(p)^2 \cdots h_N(p)^2$$

である．よって，

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}p \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_N}p \,\middle|\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_N\right)_N = h_1(p) \cdots h_N(p)$$

であるから，

$$\left(\frac{1}{h_1(p)}\frac{\partial}{\partial y_1}p\right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{1}{h_N(p)}\frac{\partial}{\partial y_N}p\right) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_N \quad (\forall p \in U) \tag{6.41}$$

が成り立つ．また，

$$j\left(\frac{1}{h_k(p)}\frac{\partial}{\partial y_k}p\right) = h_k(p)dy_{k,p} \quad (\forall p \in U,\ k = 1, \cdots, N) \tag{6.42}$$

であるから，

$$(h_1(p)dy_{1,p}) \wedge \cdots \wedge (h_N(p)dy_{N,p}) = j(e_1) \wedge \cdots \wedge j(e_N) \quad (\forall p \in U) \tag{6.43}$$

が成り立つ．

(1) (6.42) より，

$$j(u) = \sum_{k=1}^{N} u_k j\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = \sum_{k=1}^{N} h_k u_k (h_k dy_k)$$

である．任意の $p \in U$ に対し (6.43) と Hodge の $\star$-作用素の定義 6.72 より，

$$\star\, h_k(p)dy_{k,p} = (-1)^{k-1}(h_1(p)dy_{1,p}) \wedge \cdots \wedge (\widehat{h_k(p)dy_{k,p}}) \wedge \cdots \wedge (h_N(p)dy_{N,p}) \tag{6.44}$$

である．よって，

$$\star j(u) = \star \sum_{k=1}^{N} h_k u_k (h_k dy_k) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1}(h_1 \cdots h_N) u_k dy_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_k} \wedge \cdots \wedge dy_N$$

であるから，

$$\begin{aligned} d \star j(u) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_k}(h_1 \cdots h_N u_k)(dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_N) \\ &= \frac{1}{h_1 \cdots h_N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_k}(h_1 \cdots h_N u_k)(h_1 dy_1) \wedge \cdots \wedge (h_N dy_N) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって (6.43) と Hodge の $\star$-作用素の定義 6.72 より，より，

$$\mathrm{div}(u) = \star d \star dj(u) = \frac{1}{h_1 \cdots h_N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_k}(h_1 \cdots h_N u_k)$$

である．

(2) 命題 6.34 より任意の $p \in U$ に対し，

$$du_p = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial y_k}(p) dy_{k,p} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{h_k(p)} \frac{\partial u}{\partial y_k}(p)(h_k(p)dy_{k,p})$$

であるから，(6.44) より，

$$\begin{aligned} \star du &= \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \frac{1}{h_k} \frac{\partial u}{\partial y_k}(h_1 dy_1) \wedge \cdots \wedge (\widehat{h_k dy_k}) \wedge \cdots \wedge (h_N dy_N) \\ &= \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \left(\frac{h_1 \cdots h_N}{h_k^2} \frac{\partial u}{\partial y_k}\right) dy_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_k} \wedge \cdots \wedge dy_N \end{aligned}$$

である．よって，

$$\begin{aligned} d \star du &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{h_1 \cdots h_N}{h_k^2}\frac{\partial u}{\partial y_k}\right) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_N \\ &= \frac{1}{h_1 \cdots h_N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{h_1 \cdots h_N}{h_k^2}\frac{\partial u}{\partial y_k}\right) (h_1 dy_1) \wedge \cdots \wedge (h_N dy_N) \end{aligned}$$

だから，(6.43) と Hodge の $\star$-作用素の定義 6.72 より，

$$\Delta u = \star d \star du = \frac{1}{h_1 \cdots h_N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{h_1 \cdots h_N}{h_k^2}\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)$$

である．

□

定義 6.79 (Levi-Civita の記号)**.** 任意の $j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ に対し，$\varepsilon_{j,k,l} \in \{-1, 0, 1\}$ を次のように定義する．まず j, k, l のうちのいずれか 2 つが等しいとき $\varepsilon_{j,k,l} = 0$ とする．また j, k, l が互いに異なるとき

$$\sigma(1) = j, \quad \sigma(2) = k, \quad \sigma(3) = l$$

として定まる 3 次の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に対し，$\varepsilon_{j,k,l} = \mathrm{sgn}(\sigma)$ とする．

定義 6.80 (回転)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ を開集合，$u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ を C^1 級ベクトル場とする．

$$j(\mathrm{rot}(u)) := \star dj(u)$$

を満たす連続ベクトル場 $\mathrm{rot}(u) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ を u の回転と言う．(e_1, e_2, e_3) を $\mathbb{R}^3$ の標準基底とし，

$$u(p) = (u_1(p), u_2(p), u_3(p)) = u_1(p)e_1 + u_2(p)e_2 + u_3(p)e_3 \quad (\forall p \in \Omega)$$

と表すと，$\mathbb{R}^3$ の標準座標 (x_1, x_2, x_3) に対し，

$$\begin{aligned} j(u) &= u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3, \\ dj(u) &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2, \\ \star\, dj(u) &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) dx_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) dx_3, \\ \mathrm{rot}(u) &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) e_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) e_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) e_3 = \sum_{j,k,l=1}^{3} \varepsilon_{j,k,l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} e_j \end{aligned}$$

となる．

6.6 Euclid 空間内の多様体上の Riemann-Lebesgue 測度

命題 6.81. M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体とする．このとき M は $\mathbb{R}^N$ の Borel 集合である．そして $n < N$ の場合，$\mathbb{R}^N$ の Lebesgue 測度 $m_N : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0, \infty]$ に対し $m_N(M) = 0$ が成り立つ．

証明. 定理 6.4 より $n = N$ の場合は M は $\mathbb{R}^N$ の開集合である．$n < N$ とする．このとき定理 6.4 より $\mathbb{R}^N$ の局所座標の族 $\{(U_j, \Phi_j)\}_{j \in J}$ で，

$$M \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j, \quad \Phi_j(U_j \cap M) = \Phi_j(U_j) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \quad (\forall j \in J)$$

を満たすものが取れる．M は第二可算であるから Lindelöf (命題 1.68) なので J は可算集合であるとしてよい．各 $j \in J$ に対し $\Phi_j(U_j)$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合で，

$$\Phi_j : U_j \to \Phi_j(U_j)$$

は同相写像であり,

$$\Phi_j(U_j) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \Phi_j(U_j \cap M)$$

は $\mathbb{R}^N$ の Borel 集合なので,

$$U_j \cap M = \Phi_j^{-1}\left(\Phi_j(U_j) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})\right)$$

は $\mathbb{R}^N$ の Borel 集合である. よって J の可算性より,

$$M = \bigcup_{j \in J} U_j \cap M$$

は Borel 集合である. また,

$$m_N(M) \leqslant \sum_{j \in J} m_N(U_j \cap M)$$

であり, 任意の $j \in J$ に対し変数変換公式 5.229 より,

$$\begin{aligned} m_N(U_j \cap M) &= \int_{U_j} \chi_{U_j \cap M}(x)dx = \int_{\Phi_j(U_j)} \chi_{\Phi_j(U_j \cap M)}(x)|\det(\Phi_j^{-1})'(x)|dx \\ &= \int_{\Phi_j(U_j) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})} |\det(\Phi_j^{-1})'(x)|dx = 0 \end{aligned}$$

($m_N(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = 0$ に注意) であるから, $m_N(M) = 0$ である. □

定義 6.82. M を Euclid 空間内の n 次元多様体とする. このとき M の局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ に対し, その計量 (定義 6.68) の行列式

$$G_{(U,\varphi)}(p) := \det g_{(U,\varphi)}(p) = \det\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}p \mid \frac{\partial}{\partial x_j}p\right)\right)_{i,j} > 0 \quad (\forall p \in U)$$

(命題 6.69 の (1) を参照) を考える. そして U 上の Borel 測度

$$\mu_{(U,\varphi)} : \mathcal{B}_U \ni B \mapsto \int_{\varphi(U)} \left(\chi_B \sqrt{G_{(U,\varphi)}}\right) \circ \varphi^{-1}(x)dx \in [0, \infty]$$

を定義する. ただし右辺の dx は $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 測度による積分を意味する.

補題 6.83. M を Euclid 空間内の n 次元多様体とする. このとき $U \cap V \neq \varnothing$ を満たす M の任意の局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$, $(V, \psi; y_1, \cdots, y_n)$ で $U \cap V \neq \varnothing$ に対し,

$$\mathcal{B}_{U \cap V} = \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_V$$

であり,

$$\mu_{(U,\varphi)}(B) = \mu_{(V,\psi)}(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{U \cap V})$$

が成り立つ.

証明. 命題 5.7 より,

$$\mathcal{B}_{U \cap V} = \{B \subseteq U \cap V : B \in \mathcal{B}_M\}, \quad \mathcal{B}_U = \{B \subseteq U : B \in \mathcal{B}_M\}, \quad \mathcal{B}_V = \{B \subseteq V : B \in \mathcal{B}_M\}$$

であるから $\mathcal{B}_{U \cap V} = \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_V$ である. 命題 6.69 の (2) より,

$$\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)} = \left|\det(\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))\right| \sqrt{G_{(V,\psi)}(p)} \quad (\forall p \in U \cap V)$$

であるから, 変数変換公式 5.229 より任意の $B \in \mathcal{B}_{U \cap V}$ に対し,

$$\begin{aligned} \mu_{(V,\psi)}(B) &= \int_{\psi(U \cap V)} \left(\chi_B \sqrt{G_{(V,\psi)}}\right) \circ \psi^{-1}(x)dx \\ &= \int_{\varphi(U \cap V)} \left(\chi_B \sqrt{G_{(V,\psi)}}\right) \circ \varphi^{-1}(x) \left|\det(\psi \circ \varphi^{-1})'(x)\right| dx \\ &= \int_{\varphi(U \cap V)} \left(\chi_B \sqrt{G_{(U,\varphi)}}\right) \circ \varphi^{-1}(x)dx \\ &= \mu_{(U,\varphi)}(B) \end{aligned}$$

である. □

定理 6.84. M を Euclid 空間内の多様体とする. このとき M 上の Borel 測度 $\mu_M : \mathcal{B}_M \to [0,\infty]$ で, M の任意の局所座標 (U,φ) に対し,

$$\mu_M(B) = \mu_{(U,\varphi)}(B) = \int_{\varphi(U)} \left(\chi_B \sqrt{G_{(U,\varphi)}}\right) \circ \varphi^{-1}(x)dx \quad (\forall B \in \mathcal{B}_U) \tag{6.45}$$

を満たすものが唯一つ存在する.

証明. まず一意性を示す. 条件を満たす M 上の Borel 測度 $\mu, \nu : \mathcal{B}_M \to [0,\infty]$ が取れたとする. M は第二可算, 従って Lindelöf (命題 1.68) であるから, M の局所座標の可算族 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ で,

$$M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$$

なるものが取れる. 任意の $B \in \mathcal{B}_M$ に対し,

$$B_1 := B \cap U_1, \quad B_i := (B \cap U_i) \backslash (U_1 \cup \cdots \cup U_{i-1}) \quad (\forall i \in \mathbb{N} : i \geqslant 2)$$

とおくと, $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{B}_M$ の非交叉列であり,

$$B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B \cap U_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$$

である. $B_i \in \mathcal{B}_{U_i}$ $(\forall i \in \mathbb{N})$ であるから,

$$\mu(B_i) = \mu_{(U_i,\varphi_i)}(B_i) = \nu(B_i) \quad (\forall i \in \mathbb{N})$$

なので,

$$\mu(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu(B_i) = \nu(B)$$

である. よって一意性が示せた.
存在を示す. 1 の分割 (定理 6.46) より $C^\infty_{c,+}(M)$ の列 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ と M の局所座標の列 $((U_i,\varphi_i))_{i\in\mathbb{N}}$ で,

$$\mathrm{supp}(f_i) \subseteq U_i \quad (\forall i \in \mathbb{N}), \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(p) = 1 \quad (\forall i \in \mathbb{N}) \tag{6.46}$$

を満たすものが取れる. $\mu_M : \mathcal{B}_M \to [0,\infty]$ を,

$$\mu_M(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{U_i} f_i(p)\chi_{B\cap U_i}(p)d\mu_{(U_i,\varphi_i)}(p) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_M)$$

と定義する. このとき $\mathcal{B}_M$ の任意の非交叉列 $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ に対し,

$$\begin{aligned}
\mu_M\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{U_i} f_i(p) \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{B_j\cap U_i}(p)d\mu_{(U_i,\varphi_i)}(p) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{U_i} f_i(p)\chi_{B_j\cap U_i}(p)d\mu_{(U_i,\varphi_i)}(p) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{U_i} f_i(p)\chi_{B_j\cap U_i}(p)d\mu_{(U_i,\varphi_i)}(p) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(B_j)
\end{aligned}$$

である[*78]から μ_M は M 上の Borel 測度である. M の任意の局所座標 (U,φ) を取り, μ_M が (6.45) を満たすことを示す. 任意の $B \in \mathcal{B}_U$ を取る. $U \cap U_i = \varnothing$ を満たす任意の $i \in \mathbb{N}$ に対し $B \cap U_i = \varnothing$ であるから,

$$\int_{U_i} f_i(p)\chi_{B\cap U_i}(p)d\mu_{(U_i,\varphi_i)}(p) = 0 = \int_U f_i(p)\chi_{B\cap U_i}(p)d\mu_{(U,\varphi)}(p)$$

[*78] 2 つ目の等号において単調収束定理 5.40 を用いた.

である. また $U \cap U_i \neq \varnothing$ を満たす任意の $i \in \mathbb{N}$ に対し, 補題 6.83 より,

$$\begin{aligned}\int_{U_i} f_i(p)\chi_{B\cap U_i}(p)d\mu_{(U_i,\varphi_i)}(p) &= \int_{U\cap U_i} f_i(p)\chi_{B\cap U_i}(p)d\mu_{(U_i,\varphi_i)}(p) \\ &= \int_{U\cap U_i} f_i(p)\chi_{B\cap U_i}(p)d\mu_{(U,\varphi)}(p) \\ &= \int_{U} f_i(p)\chi_{B\cap U_i}(p)d\mu_{(U,\varphi)}(p)\end{aligned}$$

である. よって,

$$\int_{U_i} f_i(p)\chi_{B\cap U_i}(p)d\mu_{(U_i,\varphi_i)}(p) = \int_{U} f_i(p)\chi_{B\cap U_i}(p)d\mu_{(U,\varphi)}(p) \quad (\forall i \in \mathbb{N})$$

が成り立つので, (6.46) より,

$$\begin{aligned}\mu_M(B) &= \sum_{i\in\mathbb{N}}\int_{U_i} f_i(p)\chi_{B\cap U_i}(p)d\mu_{(U_i,\varphi_i)}(p) = \sum_{i\in\mathbb{N}}\int_{U} f_i(p)\chi_{B\cap U_i}(p)d\mu_{(U,\varphi)}(p) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}}\int_{U} f_i(p)\chi_{B}(p)d\mu_{(U,\varphi)}(p) = \int_{U} \chi_{B}(p)d\mu_{(U,\varphi)}(p) = \mu_{(U,\varphi)}(B)\end{aligned}$$

が成り立つ. よって μ_M は (6.45) を満たすので存在が示せた. □

定義 6.85 (Euclid 空間内の多様体上の Riemann-Lebesgue 測度)**.** M を Euclid 空間内の n 次元多様体とする. 定理 6.84 より M 上の Borel 測度 $\mu_M : \mathcal{B}_M \to [0,\infty]$ で, M の任意の局所座標 (U,φ) に対し,

$$\mu_M(B) = \int_{\varphi(U)} \left(\chi_B\sqrt{G_{(U,\varphi)}}\right)\circ\varphi^{-1}(x)dx \quad (\forall B \in \mathcal{B}_U)$$

(ただし右辺の dx は $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 測度による積分を意味し, $G_{(U,\varphi)}$ は (U,φ) に対する計量 (定義 6.68) の行列式である) を満たすものが唯一つ存在する. μ_M を M の Riemann-Lebesgue 測度と言う.

注意 6.86. Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の N 次元多様体 $D \subseteq \mathbb{R}^N$ (定理 6.4 より $\mathbb{R}^N$ の開集合) の Riemann-Lebesgue 測度 $\mu_D : \mathcal{B}_D \to [0,\infty]$ は $\mathbb{R}^N$ の Lebesgue 測度 m_N と一致する. 実際, 標準座標 (定義 6.18) (D, id) に対する計量 (定義 6.68) は単位行列であるから,

$$\mu_D(B) = \int_D \chi_B(x)\sqrt{G_{(D,\mathrm{id})}(x)}dx = \int_D \chi_B(x)dx = m_N(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_D)$$

である.

命題 6.87. M, H をそれぞれ Euclid 空間内の n 次元, k 次元多様体とし, $H \subseteq M$ (従って定理 6.10 より $k \leqslant n$) とする. もし $k < n$ ならば M の Riemann-Lebesgue 測度 $\mu_M : \mathcal{B}_M \to [0,\infty]$ に対し $\mu_M(H) = 0$ が成り立つ.

証明. 定理 6.10 と M の第二可算性より, M の局所座標の可算族 $\{(V_i,\psi_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ で,

$$H \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i, \quad \psi_i(V_i\cap H) = \psi_i(V_i)\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\}) \quad (\forall i \in \mathbb{N})$$

を満たすものが取れる. $\mathbb{R}^n$ において $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ の Lebesgue 測度は 0 なので, 各 $i \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\mu_M(V_i\cap H) = \int_{\psi_i(V_i)}\left(\chi_{V_i\cap H}\sqrt{G_{(V_i,\psi_i)}}\right)\circ\psi_i^{-1}(x)dx = \int_{\psi_i(V_i)\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\})}\sqrt{G_{(V_i,\psi_i)}(\psi_i^{-1}(x))}dx = 0$$

である. よって,

$$\mu_M(H) = \mu_M\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i\cap H\right) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}}\mu_M(V_i\cap H) = 0$$

である. □

定理 6.88 (Riemann-Lebesgue 測度の位相正則性)**.** M を Euclid 空間内の多様体, $\mu_M : \mathcal{B}_M \to [0,\infty]$ を M の Riemann-Lebesgue 測度とする. このとき,

(1) μ_M は位相正則測度 (定義 5.168) であり, σ-有限である.

(2) 任意の開集合 $V \subseteq M$ に対し,

$$\mu_M(V) = \sup\left\{\int_M f(x)d\mu_M(x) : f \in C^\infty_{c,+}(M),\ f \preceq V\right\},$$

任意のコンパクト集合 $K \subseteq M$ に対し,

$$\mu_M(K) = \inf\left\{\int_M f(x)d\mu_M(x) : f \in C^\infty_{c,+}(M),\ f \succeq K\right\}$$

が成り立つ ($f \preceq V$, $f \succeq K$ の意味については定義 5.164 を参照).

(3) 任意の $p \in [1,\infty)$, 任意の $f \in \mathcal{L}^p(M,\mathcal{B}_M,\mu_M)$ に対し, $C^\infty_c(M)$ の列 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{i\to\infty}\|f_i - f\|_p = 0$ を満たすものが存在する.

(4) 任意の $f \in \mathcal{L}^1(M,\mathcal{B}_M,\mu_M)$ に対し,

$$\|f\|_1 = \sup\left\{\left|\int_M f(x)\varphi(x)d\mu_M(x)\right| : \varphi \in C^\infty_c(M),\ \sup_{x\in M}|\varphi(x)| \leqslant 1\right\}$$

が成り立つ.

証明. (1) M は第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間である (命題 6.37) から μ_M の位相正則性を示すには定理 5.177 より任意のコンパクト集合 $K \subseteq M$ に対し $\mu_M(K) < \infty$ が成り立つことを示せばよい. K のコンパクト性より M の有限個の局所座標 $((U_i,\varphi_i))_{i=1,\cdots,m}$ で,

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i$$

を満たすものが取れる. よって 1 の分割 (定理 6.44) より $f_i \in C^\infty_{c,+}(M)$ $(i = 1,\cdots,m)$ で,

$$f_i \preceq V_i \ \ (i = 1,\cdots,m),\quad \sum_{i=1}^m f_i(p) = 1 \ \ (\forall p \in K)$$

を満たすものが取れる. これより,

$$\begin{aligned}\mu_M(K) &= \sum_{i=1}^m \int_M f_i(p)\chi_K(p)d\mu_M(p) = \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i(U_i)} \left(f_i\chi_K\sqrt{G_{(U_i,\varphi_i)}}\right)\circ\varphi_i^{-1}(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i(\mathrm{supp}(f_i)\cap K)} \left(f_i\sqrt{G_{(U_i,\varphi_i)}}\right)\circ\varphi_i^{-1}(x)dx\end{aligned}$$

であり, 各 $i \in \{1,\cdots,m\}$ について $\mathrm{supp}(f_i)\cap K$ はコンパクトだから $\varphi_i(\mathrm{supp}(f_i)\cap K)$ もコンパクトであり,

$$\left(f_i\sqrt{G_{(U_i,\varphi_i)}}\right)\circ\varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \to [0,\infty)$$

は連続関数なので $\varphi_i(\mathrm{supp}(f_i)\cap K)$ 上で有界である. よって,

$$\int_{\varphi_i(\mathrm{supp}(f_i)\cap K)} \left(f_i\sqrt{G_{(U_i,\varphi_i)}}\right)\circ\varphi_i^{-1}(x)dx < \infty$$

であるから,

$$\mu_M(K) = \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i(\mathrm{supp}(f_i)\cap K)} \left(f_i\sqrt{G_{(U_i,\varphi_i)}}\right)\circ\varphi_i^{-1}(x)dx < \infty$$

である. ゆえに μ_M は位相正則測度である. 命題 5.175 より M は σ-コンパクトであり μ_M はコンパクト集合に対して有限測度を与えるので, μ_M は σ-有限である.

(2) 命題 5.169 の (2), (3) の証明において一般の局所コンパクト Hausdorff 空間における Urysohn の補題 5.165 を用いたところで代わりに多様体上の Urysohn の補題 6.43 を用いればよい.

(3) 定理 5.179 において命題 5.169 の (2) を用いたところで代わりにこの定理の (2) を用いればよい.

(4) 定理 5.180 の証明において定理 5.179 を用いたところで代わりにこの定理の (3) を用い, 一般の局所コンパクト Hausdorff 空間における Urysohn の補題 5.165 を用いたところで代わりに多様体上の Urysohn の補題 6.43 を用れいればよい.

□

定理 6.89 (積多様体とその Riemann-Lebesgue 測度)**.** $M_1, \cdots, M_k$ をそれぞれ Euclid 空間 $\mathbb{R}^{N_1}, \cdots, \mathbb{R}^{N_k}$ 内の $n_1, \cdots, n_k$ 次元多様体とする. このとき,

$$
\begin{aligned}
&N := N_1 + \cdots + N_k \in \mathbb{N}, \quad n := n_1 + \cdots + n_k \in \mathbb{N}, \\
&M := M_1 \times \cdots \times M_k \subseteq \mathbb{R}^{N_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{N_k} = \mathbb{R}^N
\end{aligned}
$$

とおくと, M は Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体である. そして各 M_j の任意の局所座標 (U_j, φ_j) に対し,

$$
U := U_1 \times \cdots \times U_k, \quad \varphi(p_1, \cdots, p_k) := (\varphi_1(p_1), \cdots, \varphi_k(p_k)) \quad (\forall (p_1, \cdots, p_k) \in U_1 \times \cdots \times U_k) \tag{6.47}
$$

とおけば, (U, φ) は M の局所座標である. また M の Riemann-Lebesgue 測度 (定義 6.85) μ_M は $M_1, \cdots, M_k$ の Riemann-Lebesgue 測度 $\mu_{M_1}, \cdots, \mu_{M_k}$ の直積測度 (定義 5.82) である. すなわち,

$$
\mu_M = \mu_{M_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{M_k}
$$

が成り立つ (命題 5.16 より $\mathcal{B}_M = \mathcal{B}_{M_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{M_k}$ であることに注意).

証明. M が $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体であることを示すには Euclid 空間内の多様体の定義 6.7 より M の各点の周りで M の n 次元局所座標 (定義 6.3) が取れることを示せばよいので, 各 M_j の任意の局所座標 (U_j, φ_j) に対し (6.47) が M の n 次元局所座標であることを示せばよい.

$$
\varphi(U) = \varphi_1(U_1) \times \cdots \times \varphi_k(U_k) \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k} = \mathbb{R}^n
$$

は $\mathbb{R}^n$ の開集合であり,

$$
\varphi : U \ni p = (p_1, \cdots, p_k) \mapsto (\varphi_1(p_1), \cdots, \varphi_k(p_k)) = \varphi(p) \in \varphi(U)
$$

は明らかに同相写像である. そしてこの逆写像

$$
\varphi^{-1} : \varphi(U) = \varphi_1(U_1) \times \cdots \times \varphi_k(U_k) \ni \varphi(p) = (\varphi_1(p_1), \cdots, \varphi_k(p_k)) \mapsto (p_1, \cdots, p_k) = p \in \mathbb{R}^N
$$

の任意の点 $\varphi(p) = (\varphi_1(p_1), \cdots, \varphi_k(p_k)) \in \varphi(U)$ における微分 (定義 4.1) は,

$$
\begin{aligned}
&(\varphi^{-1})'(\varphi(p)) = (\varphi^{-1})'(\varphi_1(p_1), \cdots, \varphi_k(p_k)) \\
&= \begin{pmatrix}
(\varphi_1^{-1})'(\varphi_1(p_1)) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & (\varphi_2^{-1})'(\varphi_2(p_2)) & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & (\varphi_{k-1}^{-1})'(\varphi_{k-1}(p_{k-1})) & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & (\varphi_k^{-1})'(\varphi_k(p_k))
\end{pmatrix} \\
&\in M_{N \times n}(\mathbb{R})
\end{aligned} \tag{6.48}
$$

であり, 局所座標の定義 6.3 より各 $(\varphi_k^{-1})'(\varphi_k(p_k)) \in M_{N_k \times n_k}(\mathbb{R})$ のランクは n_k だから $(\varphi^{-1})'(\varphi(p))$ のランクは n である (命題 6.2 を参照). よって局所座標の定義 6.3 より (U, φ) は M の n 次元局所座標であり, M は $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体である. また, M の局所座標 (U, φ) に対する計量 (定義 6.68) の行列式は (6.48) より,

$$
G_{(U,\varphi)}(p) = G_{(U,1\varphi_1)}(p_1) \cdots G_{(U_k,\varphi_k)}(p_k) \quad (\forall p = (p_1, \cdots, p_k) \in U_1 \times \cdots \times U_k = U) \tag{6.49}
$$

と表されることが分かる．これより任意の $B_1 \in \mathcal{B}_{U_1}, \cdots, B_k \in \mathcal{B}_{U_k}$ に対し Tonelli の定理 5.84 より，

$$
\begin{aligned}
\mu_M(B_1 \times \cdots \times B_k) &= \int_{\varphi(U)} \left(\chi_{B_1\times\cdots\times B_k}\sqrt{G_{(U,\varphi)}}\right) \circ \varphi^{-1}(x)dx \\
&= \int_{\varphi_1(U_1)\times\cdots\times\varphi_k(U_k)} \prod_{j=1}^{k} \left(\chi_{B_j}\sqrt{G_{(U_j,\varphi_j)}}\right) \circ \varphi_j^{-1}(x_j)dx_1\cdots dx_k \\
&= \prod_{j=1}^{k} \int_{\varphi_j(U_j)} \left(\chi_{B_j}\sqrt{G_{(U_j,\varphi_j)}}\right) \circ \varphi_j^{-1}(x_j)dx_j \\
&= \prod_{j=1}^{k} \mu_{M_j}(B_j) = (\mu_{M_1}\otimes\cdots\otimes\mu_{M_k})(B_1\times\cdots\times B_k)
\end{aligned}
$$

が成り立つので, 直積測度の一意性 (定理 5.81) より，

$$
\mu_M(B) = (\mu_{M_1}\otimes\cdots\otimes\mu_{M_k})(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_U = \mathcal{B}_{U_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{B}_{U_k})
$$

が成り立つ[*79]．よって 1 の分割 (定理 6.46) より $\mu_M = \mu_{M_1}\otimes\cdots\otimes\mu_{M_k}$ が成り立つ． □

補題 6.90. M, H をそれぞれ Euclid 空間内の n 次元多様体, $\Phi : M \to H$ を C^1 級写像, $E \subseteq M$ を σ-コンパクトで $\mu_M(E) = 0$ を満たすものとする．このとき $\mu_H(\Phi(E)) = 0$ が成り立つ．

証明. M は第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間であるから Lindelöf (命題 1.68) であり, M の任意の開集合は σ-コンパクト (命題 5.175) である．よって M, H のある局所座標 $(U,\varphi), (V,\psi)$ に対し，

$$
E \subseteq U \cap \Phi^{-1}(V)
$$

が成り立つとして示せば十分である．$\varphi(E)$ は $\varphi(U)$ の σ-コンパクト集合であり，

$$
0 = \mu_M(E) = \int_{\varphi(U)} \left(\chi_E\sqrt{G_{(U,\varphi)}}\right)\circ\varphi^{-1}(x)dx = \int_{\varphi(U)} \chi_{\varphi(E)}(x)\sqrt{G_{(U,\varphi)}(\varphi^{-1}(x))}dx,
$$

$$
\sqrt{G_{(U,\varphi)}(\varphi^{-1}(x))} > 0 \quad (\forall x \in \varphi(U))
$$

であるから, 命題 5.46 より $\varphi(E)$ の n 次元 Lebesgue 測度は 0 である．

$$
\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1} : \varphi(U\cap\Phi^{-1}(V)) \to \psi(V)
$$

は C^1 級写像であるから, 補題 5.227 より，

$$
\left(\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1}\right)(\varphi(E)) = \psi(\Phi(E))
$$

の n 次元 Lebesgue 測度も 0 である．ゆえに，

$$
\mu_H(\Phi(E)) = \int_{\psi(V)} \left(\chi_{\Phi(E)}\sqrt{G_{(V,\psi)}}\right)\psi^{-1}(x)dx = \int_{\psi(V)} \chi_{\psi(\Phi(E))}(x)\sqrt{G_{(V,\psi)}(\psi^{-1}(x))}dx = 0
$$

である． □

定義 6.91 (Jacobian)**.** M, H をそれぞれ Euclid 空間内の n 次元多様体とし, $\Phi : M \to H$ を C^1 級写像とする．このとき $J\Phi : M \to [0,\infty)$ を次のように定義する．すなわち任意の $p \in M$ に対し p の周りの M の局所座標 $(U,\varphi; x_1,\cdots,x_n)$ と $\Phi(p) \in H$ の周りの H の局所座標 $(V,\psi; y_1,\cdots,y_n)$ を取り, $(U,\varphi), (V,\psi)$ に対する計量 (定義 6.68) の行列式を $G_{(U,\varphi)}, G_{(V,\psi)}$ とおいて，

$$
J\Phi(p) := \frac{\sqrt{G_{(V,\psi)}(\Phi(p))}}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}}\left|\det\left(\frac{\partial(y_i\circ\Phi)}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j}\right| = \frac{\sqrt{G_{(V,\psi)}(\Phi(p))}}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}}\left|\det(\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1})'(\varphi(p))\right| \tag{6.50}
$$

[*79] $\mathcal{B}_U = \mathcal{B}_{U_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{B}_{U_k}$ であることは命題 5.16 による．

と定義する．この定義が $p \in M$ の周りの M の局所座標 (U, φ) と $\Phi(p) \in H$ の周りの H の局所座標 (V, ψ) の取り方によらないことは命題 6.69 の (2) より明らかである．

注意 6.92. M, H をそれぞれ Euclid 空間内の n 次元多様体とし, $\Phi : M \to H$ を C^1 級写像とする．$p \in M$ に対し $J\Phi(p) > 0$ であることは $d\Phi_p : T_p(M) \to T_{\Phi(p)}(H)$ が線型同型写像であることと同値である．実際, $p \in M$ の周りの M の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ と $\Phi(p) \in H$ の周りの H の局所座標 $(V, y_1, \cdots, y_n)$ に対し, (6.50) より,

$$J\Phi(p) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(\frac{\partial(y_i \circ \Phi)}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j} \neq 0$$

であり, 定理 6.29 より $\left(\frac{\partial(y_i\circ\Phi)}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j}$ は, $T_p(M)$ の基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}p\right)_{j=1,\cdots,n}$ と $T_{\Phi(p)}(H)$ の基底 $\left(\frac{\partial}{\partial y_j}(\Phi(p))\right)_{j=1,\cdots,n}$ に関する $d\Phi_p : T_p(M) \to T_{\Phi(p)}(H)$ の行列表現である．

補題 6.93. M, H をそれぞれ Euclid 空間内の n 次元多様体, $\Phi : M \to H$ を C^1 級同相写像 (定義 6.19) とする．このとき任意の非負値 Borel 関数 $f : H \to [0, \infty]$ に対し,

$$\int_H f(q) d\mu_H(q) = \int_M f(\Phi(p)) J\Phi(p) d\mu_M(p)$$

が成り立つ．

証明. 非負値 Borel 関数の非負値 Borel 単関数の各点単調増加列による近似 (命題 5.29) と単調収束定理 5.40 より, f は H の Borel 集合の指示関数であるとして示せば十分である．また $\Phi : M \to H$ は同相写像なので H の任意の Borel 集合は M の Borel 集合の Φ による像で表される．よって任意の $B \in \mathcal{B}_M$ を取り,

$$\mu_H(\Phi(B)) = \int_M \chi_B(\Phi(p)) J\Phi(p) d\mu_M(p) \tag{6.51}$$

が成り立つことを示せば十分である．ここで M は第二可算, 従って Lindelöf である (命題 1.68) ので, M, H のある局所座標 $(U, \varphi), (V, \psi)$ に対し,

$$B \subseteq U \cap \Phi^{-1}(V)$$

が成り立つと仮定して (6.51) を示せば十分である．このとき,

$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \Phi^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

に対して変数変換公式 (定理 5.229) を用いることによって,

$$\begin{aligned}
\mu_H(\Phi(B)) &= \int_{\psi(V)} \left(\chi_{\Phi(B)}\sqrt{G_{(V,\psi)}}\right) \circ \psi^{-1}(y) dy \\
&= \int_{\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1}(\varphi(U\cap\Phi^{-1}(V)))} \chi_{\psi(\Phi(B))}(y)\sqrt{G_{(V,\psi)}(\psi^{-1}(y))} dy \\
&= \int_{\varphi(U\cap\Phi^{-1}(V))} \chi_B \circ \varphi^{-1}(x)\sqrt{G_{(V,\psi)}(\Phi(\varphi^{-1}(x)))} \left|\det\left(\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1}\right)'(x)\right| dx \\
&= \int_{\varphi(U)} \left(\chi_B\sqrt{G_{(U,\varphi)}}\right) \circ \varphi^{-1}(x) \frac{\sqrt{G_{(V,\psi)}(\Phi(\varphi^{-1}(x)))}}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(\varphi^{-1}(x))}} \left|\det\left(\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1}\right)'(x)\right| dx
\end{aligned} \tag{6.52}$$

を得る．

$$\frac{\sqrt{G_{(V,\psi)}(\Phi(\varphi^{-1}(x)))}}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(\varphi^{-1}(x))}} \left|\det\left(\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1}\right)'(x)\right| = J\Phi(\varphi^{-1}(x))$$

であるから, (6.52) の右辺は,

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi(U)} \left(\chi_B\sqrt{G_{(U,\varphi)}}\right) \circ \varphi^{-1}(x) \frac{\sqrt{G_{(V,\psi)}(\Phi(\varphi^{-1}(x)))}}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(\varphi^{-1}(x))}} \left|\det\left(\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1}\right)'(x)\right| dx \\
&= \int_{\varphi(U)} \left(\chi_B J\Phi\sqrt{G_{(U,\varphi)}}\right) \circ \varphi^{-1}(x) dx = \int_M \chi_B(p) J\Phi(p) d\mu_M(p)
\end{aligned}$$

となる. よって (6.51) が成り立つ. □

定理 6.94 (多様体上の変数変換公式). M, H をそれぞれ Euclid 空間内の n 次元多様体, $\Phi : M \to H$ を C^1 級写像, $B \in \mathcal{B}_M$ とし, 次が成り立つとする.

(1) $\Phi(B) \in \mathcal{B}_H$.
(2) Φ は B の内部 B° 上で単射であり, $J\Phi(p) > 0$ $(\forall p \in B^\circ)$.
(3) $B \backslash B^\circ$ は σ-コンパクトな μ_M-零集合に含まれる.

このとき, 任意の非負値 Borel 関数 $f : \Phi(B) \to [0, \infty]$ に対し,

$$\int_{\Phi(B)} f(q) d\mu_H(q) = \int_B f(\Phi(p)) J\Phi(p) d\mu_M(p)$$

が成り立つ.

証明. (2) と注意 6.92 と多様体上の逆関数定理 6.30 より $\Phi(B^\circ)$ は H の開集合であり,

$$B^\circ \ni p \mapsto \Phi(p) \in \Phi(B^\circ)$$

は C^1 級同相写像である. また (3) より σ-コンパクトな μ_M-零集合 E が存在し,

$$\Phi(B) \backslash \Phi(B^\circ) \subseteq \Phi(B \backslash B^\circ) \subseteq \Phi(E)$$

となるから, 補題 6.90 と (1) より,

$$\mu_H(\Phi(B) \backslash \Phi(B^\circ)) = 0$$

が成り立つ. ゆえに補題 6.93 より,

$$\int_{\Phi(B)} f(q) d\mu_H(q) = \int_{\Phi(B^\circ)} f(q) d\mu_H(q) = \int_{B^\circ} f(\Phi(p)) J\Phi(p) d\mu_M(p) = \int_B f(\Phi(p)) J\Phi(p) d\mu_M(p)$$

が成り立つ. □

定義 6.95 (単位球面). 任意の 2 以上の自然数 N に対し, $N-1$ 次元単位球面を,

$$S_{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$$

として定義する.

命題 6.96 ($N-1$ 次元単位球面は $N-1$ 次元多様体). 任意の 2 以上の自然数 N に対し, $N-1$ 次元単位球面 $S_{N-1} \subseteq \mathbb{R}^N$ は $\mathbb{R}^N$ 内の $N-1$ 次元多様体である.

証明.

$$f : \mathbb{R}^N \ni x = (x_1, \cdots, x_N) \mapsto |x|^2 = \sum_{j=1}^N |x_j|^2 \in \mathbb{R}$$

は C^∞ 級関数であり, 任意の $x \in S_{N-1}$ に対し命題 6.34 より,

$$df_x = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j = \sum_{j=1}^N 2x_j dx_j \neq 0$$

である. よって,

$$S_{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) = 1\}, \quad df_x \neq 0 \quad (\forall x \in S_{N-1})$$

であるから定理 6.36 より S_{N-1} は $\mathbb{R}^N$ 内の $N-1$ 次元多様体である. □

命題 6.97. 2 以上の自然数 N に対し C^∞ 級写像 $\Phi_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を,

$$\Phi_N(r, \theta_1, \cdots, \theta_{N-1}) := \begin{pmatrix} r\cos(\theta_1) \\ r\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ r\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\theta_3) \\ \vdots \\ r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{N-2})\cos(\theta_{N-1}) \\ r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{N-2})\sin(\theta_{N-1}) \end{pmatrix} \tag{6.53}$$

と定義する. また,

$$\Omega_N := \Phi_N((0,\infty)\times(0,\pi)\times\cdots\times(0,\pi)\times(0,2\pi))$$

とおく. このとき,

(1) 任意の $(r, \theta_1, \cdots, \theta_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$\det\Phi_N'(r, \theta_1, \cdots, \theta_{N-1}) = r^{N-1}\sin(\theta_1)^{N-2}\sin(\theta_2)^{N-3}\cdots\sin(\theta_{N-2})$$

が成り立つ.

(2)

$$(0,\infty)\times[0,\pi]\times\cdots\times[0,\pi]\times[0,2\pi) \ni (r,\theta_1,\cdots,\theta_{N-2},\theta_{N-1}) \mapsto \Phi_N(r,\theta_1,\cdots,\theta_{N-2},\theta_{N-1}) \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$$

は全単射である.

(3) Ω_N は $\mathbb{R}^N$ の開集合であり,

$$(0,\infty)\times(0,\pi)\times\cdots\times(0,\pi)\times(0,2\pi) \ni (r,\theta_1,\cdots,\theta_{N-1}) \mapsto \Phi_N(r,\theta_1,\cdots,\theta_{N-1}) \in \Omega_N \tag{6.54}$$

は C^∞ 級同相写像である. そして $\mathbb{R}^N$ の局所座標

$$(\Omega_N, \Phi_N^{-1}) = (\Omega_N, r, \theta_1, \cdots, \theta_{N-1}) \tag{6.55}$$

は正の向きの直交座標 (定義 6.77) であり, 任意の $x = \Phi_N(r,\theta_1,\cdots,\theta_{N-1}) \in \Omega_N$ に対し,

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}x\right| = 1, \quad \left|\frac{\partial}{\partial\theta_1}x\right| = r, \quad \left|\frac{\partial}{\partial\theta_2}x\right| = r\sin(\theta_1), \quad \cdots, \quad \left|\frac{\partial}{\partial\theta_{N-1}}x\right| = r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{N-2}) \tag{6.56}$$

が成り立つ.

(4)

$$S_{N-1,0} := \Phi_N(\{1\}\times(0,\pi)\times\cdots\times(0,\pi)\times(0,2\pi))$$

は $N-1$ 次元単位球面 S_N の開集合であり,

$$\Theta_{N-1} : S_{N-1,0} \ni \Phi_N(1,\theta_1,\cdots,\theta_{N-1}) \mapsto (\theta_1,\cdots,\theta_{N-2},\theta_{N-1}) \in (0,\pi)\times\cdots\times(0,\pi)\times(0,2\pi) \tag{6.57}$$

とおけば $(S_{N-1,0}, \Theta_{N-1})$ は S_{N-1} の局所座標である. さらに S_{N-1} の Riemann-Lebesgue 測度 (定義 6.85) $\mu_{S_{N-1}} : \mathcal{B}_{S_{N-1}} \to [0,\infty)$ に対し,

$$\mu_{S_{N-1}}(S_{N-1}\backslash S_{N-1,0}) = 0,$$

$$\mu_{S_{N-1}}(S_{N-1}) = \int_{[0,\pi]^{N-2}\times[0,2\pi]} \sin(\theta_1)^{N-2}\sin(\theta_2)^{N-3}\cdots\sin(\theta_{N-2})d\theta_1\cdots d\theta_{N-1}$$

が成り立つ.

証明. (1) N に関する帰納法で示す. $N=2$ の場合は明らかに成り立つ. ある 2 以上の自然数 $N-1$ まで成り立つと仮定し, N の場合も成り立つことを示す. $F, G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を,

$$F(r,\theta_1,\cdots,\theta_{N-1}) = (\Phi_2(r,\theta_1),\theta_2,\cdots,\theta_{N-1}),$$
$$G(x,y,\theta_2,\cdots,\theta_{N-1}) = (x, \Phi_{N-1}(y,\theta_2,\cdots,\theta_{N-1}))$$

と定義すると, 任意の $(r,\theta_1,\cdots,\theta_{N-1})\in\mathbb{R}^N$ に対し,

$$\Phi_N(r,\theta_1,\cdots,\theta_{N-1})=G\circ F(r,\theta_1,\cdots,\theta_{N-1})$$

であるから, チェインルール (定理 4.7) と帰納法の仮定より,

$$\begin{aligned}&\det\Phi_N'(r,\theta_1,\cdots,\theta_{N-1})=\det\left(G'(F(r,\theta_1,\cdots,\theta_{N-1}))F'(r,\theta_1,\cdots,\theta_{N-1})\right)\\&=\det\begin{pmatrix}1&0\\0&\Phi_{N-1}'(r\sin(\theta_1),\theta_2,\cdots,\theta_{N-1})\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\Phi_2'(r,\theta_1)&0\\0&1\end{pmatrix}\\&=\det\Phi_{N-1}'(r\sin(\theta_1),\theta_2,\cdots,\theta_{N-1})\det\Phi_2'(r,\theta_1)\\&=(r\sin(\theta_1))^{N-2}\sin(\theta_2)^{N-3}\sin(\theta_3)^{N-4}\cdots\sin(\theta_{N-1})r\\&=r^{N-1}\sin(\theta_1)^{N-2}\sin(\theta_2)^{N-3}\cdots\sin(\theta_{N-1})\end{aligned}$$

である. よって N の場合も成り立つ.

(2) 任意の $x=(x_1,\cdots,x_N)\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ を取り,

$$x=\Phi_N(r_1,\theta_1,\cdots,\theta_{N-1})\tag{6.58}$$

を満たす $(r,\theta_1,\cdots,\theta_{N-2},\theta_{N-1})\in(0,\infty)\times[0,\pi]\cdots\times[0,\pi]\times[0,2\pi)$ が唯一つ存在することを示す. まず $r:=|x|\in(0,\infty)$ とおく. 中間値の定理 1.131 より,

$$x_1\in[-r,r]=[r\cos(\pi),r\cos(0)]\subseteq r\cos([0,\pi])$$

なので $x_1=r\cos(\theta_1)$ なる $\theta_1\in[0,\pi]$ が唯一つ存在する (cos は $[0,\pi]$ 上で狭義単調減少であることに注意). $|x_2|\leqslant|(x_2,\cdots,x_N)|=r\sin(\theta_1)$ であるから, 中間値の定理 1.131 より,

$$x_2\in[-r\sin(\theta_1),r\sin(\theta_1)]=[r\sin(\theta_1)\cos(\pi),r\sin(\theta_1)\cos(0)]\subseteq r\sin(\theta_1)\cos([0,\pi])$$

なので $x_2=r\sin(\theta_1)\cos(\theta_2)$ なる $\theta_2\in[0,\pi]$ が唯一つ存在する. 同様の操作によって $\theta_3,\cdots,\theta_{N-2}\in[0,\pi]$ で,

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{N-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos(\theta_1)\\r\sin(\theta_1)\cos(\theta_2)\\\vdots\\r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{N-3})\cos(\theta_{N-2})\end{pmatrix}$$

なるものが一意存在することが分かる.

$$|x_{N-1}|^2+|x_N|^2=|x|^2-\sum_{k=1}^{N-2}|x_k|^2=(r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{N-2}))^2$$

であるから, 命題 4.46 より,

$$\begin{aligned}x_{N-1}&=r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{N-3})\sin(\theta_{N-2})\cos(\theta_{N-1}),\\x_N&=r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{N-3})\sin(\theta_{N-2})\sin(\theta_{N-1})\end{aligned}$$

を満たす $\theta_{N-1}\in[0,2\pi)$ が唯一つ存在する. よって (6.58) を満たす $(r,\theta_1,\cdots,\theta_{N-2},\theta_{N-1})\in(0,\infty)\times[0,\pi]\cdots\times[0,\pi]\times[0,2\pi)$ が唯一つ存在する.

(3) (1), (2) より (6.54) は各点での微分が正則な全単射 C^∞ 級写像であるので逆関数定理 4.19 より C^∞ 級同相写像である. よって (Ω_N,Φ_N^{-1}) は $\mathbb{R}^N$ の局所座標である. 任意の $x=\Phi_N(r,\theta_1,\cdots,\theta_{N-1})\in\Omega_N$ に対し,

$$\frac{\partial}{\partial r}x=\Phi_N(1,\theta_1,\cdots,\theta_{N-1})$$

であり, 任意の $k \in \{1, \cdots, N-1\}$ に対し,

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{k-1})\sin(\theta_k) \\ r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{k-1})\cos(\theta_k)\cos(\theta_{k+1}) \\ r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{k-1})\cos(\theta_k)\sin(\theta_{k+1})\cos(\theta_{k+2}) \\ \vdots \\ r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{k-1})\cos(\theta_k)\sin(\theta_{k+1})\cdots\sin(\theta_{N-2})\cos(\theta_{N-1}) \\ r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{k-1})\cos(\theta_k)\sin(\theta_{k+1})\cdots\sin(\theta_{N-2})\sin(\theta_{N-1}) \end{pmatrix}$$

である. これより (6.56) が成り立つことが分かる. また任意の $k \in \{1, \cdots, N-1\}$ に対し,

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}x \mid \frac{\partial}{\partial \theta_k}x\right) = r(\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{k-1}))^2\{-\cos(\theta_k)\sin(\theta_k)+\sin(\theta_k)\cos(\theta_k)\} = 0$$

であり, $k < l$ なる任意の $k, l \in \{1, \cdots, N-1\}$ に対し,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial \theta_k}x \mid \frac{\partial}{\partial \theta_l}x\right) &= (r\sin(\theta_1)\cdots\widehat{\sin(\theta_k)}\cdots\sin(\theta_{l-1}))^2\cos(\theta_k)\sin(\theta_k) \\ &\quad \{-\cos(\theta_l)\sin(\theta_l)+\sin(\theta_l)\cos(\theta_l)\} = 0\end{aligned}$$

となる. よって (6.55) は $\mathbb{R}^N$ の正の向きの直交座標である.

(4) (2), (3) より,

$$S_{N-1,0} = \Omega_N \cap S_{N-1}$$

であり Ω_N は $\mathbb{R}^N$ の開集合であるから $S_{N-1,0}$ は S_{N-1} の開集合である. また (Ω_N, Φ_N^{-1}) は $\mathbb{R}^N$ の局所座標であり,

$$\begin{aligned}&\Phi_N^{-1}(\Omega_N \cap S_{N-1}) = \Phi_N^{-1}(\Omega_N) \cap (\{1\} \times \mathbb{R}^{N-1}), \\ &\Phi_N^{-1}(x) = (1, \Theta_{N-1}(x)) \quad (\forall x \in \Omega_N \cap S_{N-1} = S_{N-1,0})\end{aligned}$$

であるから定理 6.10 より $(S_{N-1,0}, \Theta_{N-1}) = (S_N \cap \Omega_N, \Theta_{N-1})$ は S_{N-1} の局所座標である. S_{N-1} と $S_{N-1,0}$ はそれぞれ C^∞ 級写像

$$\mathbb{R}^{N-1} \ni (\theta_1, \cdots, \theta_{N-1}) \mapsto \Phi_N(1, \theta_1, \cdots, \theta_{N-1}) \in S_{N-1}$$

による $[0,\pi]^{N-2} \times [0, 2\pi]$, $(0,\pi)^{N-2} \times (0, 2\pi)$ の像であり,

$$\left([0,\pi]^{N-2} \times [0,2\pi]\right) \setminus \left((0,\pi)^{N-2} \times (0,2\pi)\right)$$

は σ-コンパクトな $N-1$ 次元 Lebesgue 測度 0 の集合であるから, 補題 6.90 より,

$$\mu_{S_{N-1}}(S_{N-1} \backslash S_{N-1,0}) = 0$$

である. S_{N-1} の局所座標 $(S_{N-1,0}, \Theta_{N-1})$ の計量 (定義 6.68) の行列式は (6.55) が直交座標であることと (6.56) より, 任意の $\omega = \Theta_{N-1}^{-1}(\theta_1, \cdots, \theta_{N-1}) \in S_{N-1,0}$ に対し,

$$G_{\Theta_{N-1}}(\omega) = \det\left(\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}\omega \mid \frac{\partial}{\partial \theta_j}\omega\right)\right)_{i,j} = \left(\sin(\theta_1)^{N-2}\sin(\theta_2)^{N-3}\cdots\sin(\theta_{N-2})\right)^2$$

であるから, Riemann-Lebesgue 測度の定義 6.85 より,

$$\begin{aligned}\mu_{S_{N-1}}(S_{N-1}) = \mu_{S_{N-1}}(S_{N-1,0}) &= \int_{\Theta_{N-1}(S_{N-1,0})} \sqrt{G_{\Theta_{N-1}}(\Theta_{N-1}^{-1}(\theta_1, \cdots, \theta_{N-1}))}d\theta_1\cdots d\theta_{N-1} \\ &= \int_{(0,\pi)^{N-2}\times(0,2\pi)} \sin(\theta_1)^{N-2}\sin(\theta_2)^{N-3}\cdots\sin(\theta_{N-2})d\theta_1\cdots d\theta_{N-1}\end{aligned}$$

である.

□

定義 6.98 (極座標)**.** N を 2 以上の自然数とする. Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の局所座標 (6.55) $(r, \theta_1, \cdots, \theta_{N-1})$ を $\mathbb{R}^N$ の極座標と言う. また $N-1$ 次元単位球面 S_{N-1} の局所座標 (6.57) $(\theta_1, \cdots, \theta_{N-1})$ を S_{N-1} の極座標と言う.

定理 6.99 (極座標変換)**.** N を 2 以上の自然数とする. 中心 $a \in \mathbb{R}^N$, 半径 $R \in (0, \infty)$ の球 $B(a, R) \subseteq \mathbb{R}^N$ 上で定義された非負値 Borel 関数 $f : B(a, R) \to [0, \infty]$ に対し,

$$\int_{B(a,R)} f(x)dx = \int_{[0,R)} \left(\int_{S_{N-1}} f(a + r\omega) d\mu_{S_{N-1}}(\omega) \right) r^{N-1} dr$$

が成り立つ.

証明. C^∞ 級写像

$$\Psi : \mathbb{R} \times S_{N-1} \ni (r, \omega) \mapsto a + r\omega \in \mathbb{R}^N$$

を考えると,

$$\Psi([0, R) \times S_{N-1}) = B(a, R)$$

である. 命題 6.97 の (4) における $S_{N-1,0}$ に対し, Ψ の $(0, R) \times S_{N-1,0}$ における Jacobian (定義 6.91) $J\Psi$ が,

$$J\Psi(r, \omega) = r^{N-1} \tag{6.59}$$

を満たすことを示す. 命題 6.97 の (4) における S_{N-1} の局所座標 $(S_{N-1,0}, \Theta_{N-1})$ に対し

$$\mathrm{id} \times \Theta_{N-1} : (0, R) \times S_{N-1,0} \ni (r, \omega) \mapsto (r, \Theta_{N-1}(\omega)) \in (0, R) \times (0, \pi)^{N-2} \times (0, 2\pi)$$

は $\mathbb{R} \times S_{N-1}$ の局所座標であり, その計量 (定義 6.68) の行列式は定理 6.89 より,

$$G_{\mathrm{id} \times \Theta_{N-1}}(r, \omega) = G_{\mathrm{id}}(r) G_{\Theta_{N-1}}(\omega) = G_{\Theta_{N-1}}(\omega) = \det \left(\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \omega \mid \frac{\partial}{\partial \theta_j} \omega \right) \right)_{i,j}$$

である. そして命題 6.97 の (6.55) が直交座標であることと (6.56) より,

$$\det \left(\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \omega \mid \frac{\partial}{\partial \theta_j} \omega \right) \right)_{i,j} = \prod_{k=1}^{N-1} \left| \frac{\partial}{\partial \theta_k} \omega \right|^2 = \left(\sin(\theta_1)^{N-2} \sin(\theta_2)^{N-3} \cdots \sin(\theta_{N-2}) \right)^2$$

であるので,

$$G_{\mathrm{id} \times \Theta_{N-1}}(r, \omega) = \left(\sin(\theta_1)^{N-2} \sin(\theta_2)^{N-3} \cdots \sin(\theta_{N-2}) \right)^2 \tag{6.60}$$

である. また,

$$\left(\Psi \circ (\mathrm{id} \times \Theta_{N-1})^{-1} \right) (r, \theta_1, \cdots, \theta_{N-1}) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta_1) \\ r\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ r\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\theta_3) \\ \vdots \\ r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{N-2})\cos(\theta_{N-1}) \\ r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{N-2})\sin(\theta_{N-1}) \end{pmatrix}$$

を満たすので, 命題 6.97 の (1) より,

$$\det \left(\Psi \circ (\mathrm{id} \times \Theta_{N-1}^{-1}) \right)' (r, \theta_1, \cdots, \theta_{N-1}) = r^{N-1} \sin(\theta_1)^{N-2} \sin(\theta_2)^{N-3} \cdots \sin(\theta_{N-2}) \tag{6.61}$$

である. よって Jacobian の定義 6.91 と (6.60), (6.61) より,

$$\begin{aligned} J\Psi(r, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{G_{\mathrm{id} \times \Theta_{N-1}}(r, \omega)}} \left| \det \left(\Psi \circ (\mathrm{id} \times \Theta_{N-1}^{-1}) \right)' ((\mathrm{id} \times \Theta_{N-1})(r, \omega)) \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{G_{\mathrm{id} \times \Theta_{N-1}}(r, \omega)}} \left| \det \left(\Psi \circ (\mathrm{id} \times \Theta_{N-1}^{-1}) \right)' (r, \theta_1, \cdots, \theta_{N-1}) \right| \\ &= \frac{1}{\sin(\theta_1)^{N-2} \sin(\theta_2)^{N-3} \cdots \sin(\theta_{N-2})} r^{N-1} \sin(\theta_1)^{N-2} \sin(\theta_2)^{N-3} \cdots \sin(\theta_{N-2}) \\ &= r^{N-1} \end{aligned}$$

であるので (6.59) が成り立つ. Ψ は $(0,R)\times S_{N-1,0}$ 上で単射であり, (6.59) より $J\Psi$ は $(0,R)\times S_{N-1,0}$ 上で正である. そして命題 6.97 の (4) より,

$$([0,R)\times S_{N-1})\setminus((0,R)\times S_{N-1,0})$$

は $\mathbb{R}\times S_{N-1}$ の σ-コンパクトな零集合である. よって変数変換公式 (定理 6.94) より,

$$\begin{aligned}\int_{B(a,R)} f(x)dx &= \int_{\Psi([0,R)\times S_{N-1})} f(x)dx = \int_{[0,R)}\left(\int_{S_{N-1}} f(\Psi(r,\omega))J\Psi(r,\omega)d\mu_{S_{N-1}}(\omega)\right)dr \\ &= \int_{[0,R)}\left(\int_{S_{N-1}} f(a+r\omega)d\mu_{S_{N-1}}(\omega)\right)r^{N-1}dr\end{aligned}$$

が成り立つ. □

6.7 Euclid 空間内の多様体の向き, 向き付けられた超曲面上の単位法線ベクトル場

定義 6.100 (互いに同じ向きの局所座標)**.** M を Euclid 空間内の n 次元多様体とし, $(U,x_1,\cdots,x_n)$, $(V,y_1,\cdots,y_n)$ をそれぞれ M の局所座標とする. $U\cap V\neq\varnothing$ であり, 任意の $p\in U\cap V$ に対し接ベクトル空間 $T_p(M)$ の基底変換行列 $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j}\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ の行列式が,

$$\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)>0$$

を満たすとき, $(U,x_1,\cdots,x_n)$ と $(V,y_1,\cdots,y_n)$ は互いに同じ向きであると言う. また便宜上, $U\cap V=\varnothing$ の場合も $(U,x_1,\cdots,x_n)$ と $(V,y_1,\cdots,y_n)$ は互いに同じ向きであると言うことにする.

定義 6.101 (多様体の向き付け可能性)**.** M を Euclid 空間内の多様体とする. M が向き付け可能であるとは, M が互いに同じ向きの局所座標からなるアトラス (定義 6.7) を持つことを言う.

定義 6.102 (多様体の向き)**.** M を Euclid 空間内の向き付け可能な多様体とする. $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$ をそれぞれ互いに同じ向きの局所座標からなる M のアトラスとする. もし $\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$ が互いに同じ向きの局所座標からなる M のアトラスであるならば $\mathcal{A}_1\sim\mathcal{A}_2$ と表すこととする. このとき $\sim$ は M の互いに同じ向きの局所座標からなるアトラス全体における同値関係 (定義 2.21) である (次の命題 6.103 を参照). この同値関係による同値類のそれぞれを M の向きと言い, M の向きが 1 つ指定されているとき M は向き付けられていると言う. そして M が向き付けられているときその指定された向きのことを M の正の向きと言い, その向きに属するアトラスを M の正の向きのアトラスと言い, 正の向きのアトラスに属する局所座標を M の正の向きの局所座標と言う.

命題 6.103. M を Euclid 空間内の向き付け可能な多様体とする. このとき定義 6.102 における, 互いに同じ向きの局所座標からなる M のアトラス全体における関係 $\sim$ は同値関係である.

証明. $\sim$ が同値関係 (定義 2.21) の反射律と対称律を満たすことは自明である. 推移律を満たすことを示す. $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3$ をそれぞれ互いに同じ向きの局所座標からなる M のアトラスとし, $\mathcal{A}_1\sim\mathcal{A}_2$ かつ $\mathcal{A}_2\sim\mathcal{A}_3$ とする. このとき $\mathcal{A}_1\sim\mathcal{A}_3$ が成り立つことを示せばよい. そのためには任意の $(U,x_1,\cdots,x_n)\in\mathcal{A}_1$ と任意の $(W,z_1,\cdots,z_n)\in\mathcal{A}_3$ を取り, これらが互いに同じ向きの局所座標 (定義 6.100) であることを示せばよい. $U\cap W=\varnothing$ ならば同じ向きなので $U\cap W\neq\varnothing$ とする. 任意の $p\in U\cap W$ を取る. $p\in V$ なる $(V,y_1,\cdots,y_n)\in\mathcal{A}_2$ を取れば, 命題 6.20 の (8) より,

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(p)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(p)\frac{\partial z_i}{\partial y_k}(p)\quad(\forall i,j\in\{1,\cdots,n\})$$

であるから,

$$\det\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j}=\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j}\det\left(\frac{\partial z_i}{\partial y_j}(p)\right)_{i,j}\tag{6.62}$$

である. $\mathcal{A}_1\sim\mathcal{A}_2$ より $\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j}>0$ であり, $\mathcal{A}_2\sim\mathcal{A}_3$ より $\det\left(\frac{\partial z_i}{\partial y_j}(p)\right)_{i,j}>0$ である. よって (6.62) より $\det\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j}>0$ であるから $(U,x_1,\cdots,x_n)$ と $(W,z_1,\cdots,z_n)$ は互いに同じ向きである. □

定義 6.104 (向き付けられた多様体の開集合の向き)**.** M を Euclid 空間内の向き付けられた多様体 (定義 6.102) とし, $D \subseteq M$ を空でない開集合とする. このとき D の局所座標は M の局所座標で定義域が D に含まれるものであるから, D は向き付け可能である. そこで通常特に断らない限り, D は正の向きの局所座標が M の正の向きの局所座標となるように向き付けられているとする.

定義 6.105 (Euclid 空間の正の向き)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の標準座標 (定義 6.25) を $(\mathbb{R}^N, \mathrm{id})$ とする. このとき $\mathbb{R}^N$ のアトラス $\{(\mathbb{R}^N, \mathrm{id})\}$ が正の向きのアトラスとなるように Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の向きを定める.

注意 6.106. 定義 6.77 における Euclid 空間の正の向きの直交座標は正の向きの局所座標である.

命題 6.107. M を Euclid 空間内の向き付けられた n 次元多様体とする. このとき M の n 階微分形式 Ω_M で, 任意の $p \in M$ と p の周りの M の任意の正の向きの局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ に対し,

$$\Omega_{M,p} = \sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)} dx_{1,p} \wedge \cdots \wedge dx_{n,p}$$

を満たすものが唯一つ存在する. ただし $G_{(U,\varphi)}$ は局所座標 (U, φ) に対する計量 (定義 6.68) の行列式である.

証明. 任意の $p \in M$ と p の周りの任意の正の向きの局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$, $(V, \psi; y_1, \cdots, y_n)$ を取り,

$$\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)} dx_{1,p} \wedge \cdots \wedge dx_{n,p} = \sqrt{G_{(V,\psi)}(p)} dy_{1,p} \wedge \cdots \wedge dy_{n,p} \tag{6.63}$$

が成り立つことを示せばよい. 命題 6.34 より,

$$dx_{i,p} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) dy_{j,p} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

だから外積の反対称性 (命題 2.79) より,

$$\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)} dx_{1,p} \wedge \cdots \wedge dx_{n,p} = \sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)} \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \right)_{i,j} dy_{1,p} \wedge \cdots \wedge dy_{n,p} \tag{6.64}$$

であり, 命題 6.69 より,

$$\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)} \left| \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \right)_{i,j} \right| = \sqrt{G_{(V,\psi)}(p)} \tag{6.65}$$

である. ここで $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ と $(V, \psi; y_1, \cdots, y_n)$ は互いに同じ向きの局所座標であるので,

$$\left| \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \right)_{i,j} \right| = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \right)_{i,j}$$

だから, (6.65) より,

$$\sqrt{G_{(V,\psi)}(p)} = \sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)} \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \right)_{i,j}$$

が成り立つ. よって (6.64) より,

$$\begin{aligned} \sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)} dx_{1,p} \wedge \cdots \wedge dx_{n,p} &= \sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)} \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \right)_{i,j} dy_{1,p} \wedge \cdots \wedge dy_{n,p} \\ &= \sqrt{G_{(V,\psi)}(p)} dy_{1,p} \wedge \cdots \wedge dy_{n,p} \end{aligned}$$

となるので (6.63) が成り立つ. □

定義 6.108 (向き付けられた多様体の体積要素)**.** M を Euclid 空間内の向き付けられた n 次元多様体とする. このとき命題 6.107 より M の n 階微分形式 Ω_M で, M の任意の正の向きの局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ に対し,

$$\Omega_{M,p} = \sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)} dx_{1,p} \wedge \cdots \wedge dx_{n,p} \quad (\forall p \in U)$$

を満たすものが唯一つ存在する. Ω_M を M の体積要素と言う.

命題 6.109 (局所座標が正の向きであるための条件)**.** M を Euclid 空間内の向き付けられた n 次元多様体とし, Ω_M をその体積要素 (定義 6.108) とする. このとき M の局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ に対し, 次は互いに同値である.

(1) $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ は M の正の向きの局所座標である.
(2) 任意の $p \in U$ に対し $\Omega_{M,p}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}p\right) > 0$ が成り立つ.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つ場合, 体積要素の定義 6.108 より,

$$\Omega_{M,p} = \sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}dx_{1,p} \wedge \cdots \wedge dx_{n,p} \quad (\forall p \in U)$$

であるから,

$$\Omega_{M,p}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}p\right) = \sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)} > 0$$

である. よって (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとする. (1) を示すには, $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ が $U \cap V \neq \varnothing$ を満たす M の任意の正の向きの局所座標 $(V, \psi; y_1, \cdots, y_n)$ と同じ向きであることを示せばよい. 体積要素の定義 6.108 より,

$$\Omega_{M,p} = \sqrt{G_{(V,\psi)}(p)}dy_{1,p} \wedge \cdots \wedge dy_{n,p} \quad (\forall p \in U \cap V)$$

であるから,

$$dx_{i,p} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) dy_{j,p} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

(命題 6.34) と外積の反対称性 (命題 2.79) より,

$$\Omega_{M,p} = \sqrt{G_{(V,\psi)}(p)}\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j} dx_{1,p} \wedge \cdots \wedge dx_{n,p} \quad (\forall p \in U \cap V)$$

である. よって,

$$\Omega_{M,p}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}p\right) = \sqrt{G_{(V,\psi)}(p)}\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j} \quad (\forall p \in U \cap V)$$

であり, (2) が成り立つことから,

$$\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j} > 0 \quad (\forall p \in U \cap V)$$

である. よって $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ は $(V, \psi; y_1, \cdots, y_n)$ と同じ向きである. □

定義 6.110 (Euclid 空間内の超曲面)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の $N-1$ 次元多様体を $\mathbb{R}^N$ 内の超曲面と言う. $N = 3$ の場合は単に曲面と言う.

命題 6.111. M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の向き付けられた超曲面とする. このとき,

(1) $\nu : M \to \mathbb{R}^N$ で, 任意の $p \in M$ と p の周りの M の正の向きの局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_{N-1})$ に対し,

$$\nu(p) = \frac{1}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p\right) \tag{6.66}$$

を満たすものが唯一つ存在する. ただし $G_{(U,\varphi)}$ は局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_{N-1})$ に対する計量 (定義 6.68) の行列式であり, $\frac{\partial}{\partial x_1}p \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p$ はベクトル積 (定義 6.65) である.

(2) (1) における $\nu : M \to \mathbb{R}^N$ は C^∞ 級であり,

$$|\nu(p)| = 1, \quad \nu(p) \in (T_p(M))^\perp \quad (\forall p \in M) \tag{6.67}$$

が成り立つ. ただし $(T_p(M))^\perp$ は p における M の接ベクトル空間 $T_p(M) \subseteq \mathbb{R}^N$ (定義 6.23) の直交補空間である.

証明. (1) 任意の $p \in M$ と p の周りの M の任意の正の向きの局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_{N-1})$, $(V, \psi; y_1, \cdots, y_{N-1})$ に対し，

$$\frac{1}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p\right) = \frac{1}{\sqrt{G_{(V,\psi)}(p)}}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}p \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial y_{N-1}}p\right) \tag{6.68}$$

が成り立つことを示せばよい．

$$\frac{\partial}{\partial x_j}p = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p) \frac{\partial}{\partial y_i}p \quad (i = 1, \cdots, N-1)$$

とベクトル積の反対称性 (命題 6.66) より，

$$\frac{1}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p\right) = \frac{1}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}}\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}p \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial y_{N-1}}p\right) \tag{6.69}$$

である．命題 6.69 より，

$$\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)} = \left|\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j}\right| \sqrt{G_{(V,\psi)}(p)}$$

であり，$(U, \varphi; x_1, \cdots, x_{N-1})$, $(V, \psi; y_1, \cdots, y_{N-1})$ は互いに同じ向きであるから，

$$\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j} > 0,$$

従って，

$$\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)} = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j} \sqrt{G_{(V,\psi)}(p)}$$

である．よって (6.69) より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p\right) &= \frac{1}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}}\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}p \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial y_{N-1}}p\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{G_{(V,\psi)}(p)}}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}p \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial y_{N-1}}p\right)\end{aligned}$$

だから (6.68) が成り立つ．

(2) ベクトル積の性質 (命題 6.66 の (3), (4)) より (6.66) によって表される $\nu(p)$ は，

$$\nu(p) \in \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p\right\}^{\perp} = T_p(M)^{\perp},$$
$$|\nu(p)|^2 = \frac{1}{G_{(U,\varphi)}(p)}\det\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}p \mid \frac{\partial}{\partial x_j}p\right)\right)_{i,j} = 1$$

を満たす．また $(e_1, \cdots, e_N)$ を $\mathbb{R}^N$ の標準基底として

$$\nu(p) = \sum_{j=1}^{N} \nu_j(p) e_j \in \mathbb{R}^N$$

と成分表示すると，ベクトル積の性質 (命題 6.66 の (3)) より任意の $j \in \{1, \cdots, N-1\}$ に対し，

$$\nu_j(p) = (\nu(p) \mid e_j) = \frac{1}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}}\det\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p, e_j\right)$$

であるから $U \ni p \mapsto \nu_j(p) \in \mathbb{R}$ は C^∞ 級である．よって $\nu : M \to \mathbb{R}^N$ は C^∞ 級である．

□

定義 6.112 (向き付けられた超曲面の正の向きの単位法線ベクトル場)**.** M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の向き付けられた超曲面とする．このとき命題 6.111 より $\nu : M \to \mathbb{R}^N$ で M の任意の正の向きの局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_{N-1})$ に対し，

$$\nu(p) = \frac{(-1)^{N-1}}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} p \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_{N-1}} p \right) \quad (\forall p \in U)$$

と表されるものが一意存在する．そして $\nu : M \to \mathbb{R}^N$ は C^∞ 級であり，

$$|\nu(p)| = 1, \quad \nu(p) \in (T_p(M))^\perp \quad (\forall p \in M)$$

が成り立つ．この ν を M の正の向きの単位法線ベクトル場と言う．

定義 6.113 (多様体内の滑らかな境界を持つ開集合)**.** M を Euclid 空間内の n $(n \geqslant 2)$ 次元多様体とし，$D \subseteq M$ を開集合とする．D が滑らかな境界を持つとは，D の (M における) 境界 $\partial D = \overline{D} \backslash D \subseteq M$ の各点 $p \in \partial D$ に対し，p の周りの M の局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ で次の条件を満たすものが存在することを言う．

(a) $\varphi(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の有界開方体 ($\mathbb{R}$ の有界開区間 n 個の直積) である．
(b) $\varphi(U \cap \partial D) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$.
(c) $\varphi(U \cap D) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty))$.

(b) と定理 6.10 より $(U \cap \partial D; x_1, \cdots, x_{n-1})$ は ∂D の $n-1$ 次元局所座標であり，∂D は $n-1$ 次元多様体である．

命題 6.114. M を Euclid 空間内の向き付けられた n $(n \geqslant 2)$ 次元多様体とし，$D \subseteq M$ を滑らかな境界を持つ開集合 (定義 6.113) とする．このとき，

(1) 任意の $p_0 \in \partial D$ に対し，p_0 の周りの M の "正の向きの" 局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ で定義 6.113 の条件 (a),(b),(c) を満たすものが存在する．
(2) $p_0 \in \partial D$ に対し $(U, x_1, \cdots, x_n), (V, y_1, \cdots, y_n)$ を p_0 の周りの M の正の向きの局所座標で定義 6.113 の条件 (a),(b),(c) を満たすものとすると，p_0 の周りの ∂D の局所座標 $(U \cap \partial D, x_1, \cdots, x_{n-1}), (V \cap \partial D, y_1, \cdots, y_{n-1})$ は互いに同じ向きである．

証明. (1) Ω_M を M の体積要素 (定義 6.108) とする．任意の $p_0 \in \partial D$ に対し p_0 の周りの M の局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ で定義 6.113 の条件 (a),(b),(c) を満たすものを取る．(a) より $\varphi(U)$ は開方体なので連結である．よって U も連結であり，連続写像

$$U \ni p \mapsto \Omega_{M,p} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} p \right) \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

による U の像

$$\left\{ \Omega_{M,p} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} p \right) : p \in U \right\} \subseteq \mathbb{R} \backslash \{0\} \tag{6.70}$$

も $\mathbb{R}$ の連結集合である．よって (6.70) の左辺は $(0, \infty)$ に含まれるか $(-\infty, 0)$ に含まれる．$(0, \infty)$ に含まれる場合は命題 6.109 より $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ は M の正の向きの局所座標である．また (6.70) の左辺が $(-\infty, 0)$ に含まれる場合は p_0 の周りの M の局所座標 $(U, -x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を考えればこれは定義 6.113 の条件 (a),(b),(c) を満たし，

$$\Omega_{M,p} \left(\frac{\partial}{\partial (-x_1)} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} p \right) = -\Omega_{M,p} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} p \right) > 0 \quad (\forall p \in U)$$

であるから命題 6.109 より $(U, -x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は M の正の向きの局所座標である．

(2) $(U, x_1, \cdots, x_n), (V, y_1, \cdots, y_n)$ は互いに同じ向きだから任意の $p \in U \cap V \cap \partial D$ に対し，

$$0 < \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p) \right)_{i,j=1,\cdots,n}$$

であり，定義 6.113 の条件 (b) より，

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_j}(p) = 0 \quad (\forall j = 1, \cdots, n-1)$$

である．よって，

$$0 < \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j=1,\cdots,n} = \frac{\partial y_n}{\partial x_n}(p)\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j=1,\cdots,n-1}$$

であり，定義 6.113 の条件 (c) より，

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_n}(p) \geqslant 0$$

であるから，

$$0 < \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j=1,\cdots,n-1}$$

である．ゆえに ∂D の局所座標 $(U \cap \partial D, x_1, \cdots, x_{n-1})$ と $(V \cap \partial D, y_1, \cdots, y_{n-1})$ は互いに同じ向きである．

□

定義 6.115 (向き付けられた多様体 M 内の滑らかな境界を持つ開集合 D の境界 ∂D の向き)**.** M を Euclid 空間内の向き付けられた n 次元多様体とし，$D \subseteq M$ を滑らかな境界を持つ開集合とする．命題 6.114 の (1) より ∂D の各点に対しその周りの M の正の向きの局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ で定義 6.113 の条件 (a),(b),(c) を満たすものが取れる．そのような M の正の向きの局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ 全体を $\mathcal{A}$ と表し，

$$\mathcal{A}_{\partial D} := \{(U \cap \partial D, (-1)^n x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) : (U, x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{A}\}$$

とおく．このとき命題 6.114 の (2) より $\mathcal{A}_{\partial D}$ は互いに同じ向きの局所座標からなる ∂D のアトラスである．そこでこのアトラス $\mathcal{A}_{\partial D}$ が正の向きのアトラス (定義 6.102) となるように ∂D の向きを定める．この ∂D の向きを M の向きに整合した向きと言う．

定義 6.116 (外向き単位法線ベクトル場)**.** M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の N 次元多様体, すなわち $\mathbb{R}^N$ の開集合 (定理 6.4) とする．M は $\mathbb{R}^N$ の向き (定義 6.105) によって向き付けられている (定義 6.104)．今，$D \subseteq M$ が滑らかな境界を持つ M の開集合とする．このとき ∂D の M の向きに整合した向き (定義 6.115) に関する正の向きの単位法線ベクトル場 (定義 **??**) $\nu : \partial D \to \mathbb{R}^N$ を，D に対する外向き単位法線ベクトル場と言う．外向きと言うのは ∂D の正の向きの局所座標 $(U \cap \partial D, (-1)^N x_1, x_2, \cdots, x_{N-1})$ が定義 6.113 の条件 (a),(b),(c) を満たす M の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_N)$ から来ているものとすれば，任意の $p \in U \cap \partial D$ に対し，

$$\begin{aligned}
\nu(p) &= \frac{(-1)^{N-1}}{\sqrt{G_{(U\cap\partial D,(-1)^N x_1,\cdots,x_{N-1})}(p)}}\left(\frac{\partial}{\partial(-1)^N x_1}p \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{G_{(U\cap\partial D,x_1,\cdots,x_{N-1})}(p)}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p\right)
\end{aligned}$$

であり，p から D の内側を向いたベクトル $\frac{\partial}{\partial x_N}p \in \mathbb{R}^N$ (定義 6.113 の条件 (c) を参照) との内積が，ベクトル積の性質 (命題 6.66 の (3)) より，

$$\begin{aligned}
\left(\nu(p) \mid \frac{\partial}{\partial x_N}p\right) &= -\frac{1}{\sqrt{G_{(U\cap\partial D,x_1,\cdots,x_{N-1})}(p)}}\det\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_N}p\right) \\
&= -\frac{\sqrt{G_{(U,x_1,\cdots,x_N)}(p)}}{\sqrt{G_{(U\cap\partial D,x_1,\cdots,x_{N-1})}(p)}} < 0
\end{aligned}$$

であることによる．

定理 6.117 (レベル多様体上の外向き単位法線ベクトル場)**.** M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の N 次元多様体 (すなわち $\mathbb{R}^N$ の開集合)，$f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とし，

$$D = \{p \in M : f(p) > 0\}$$

とおく．もし M における D の境界 $\partial D = \overline{D} \backslash D$ ($\overline{D}$ は M における閉包) が，

$$\partial D = \{p \in M : f(p) = 0\}, \quad df_p \neq 0 \quad (\forall p \in \partial D) \tag{6.71}$$

を満たすならば, D は滑らかな境界を持つ開集合であり, D に対する外向き単位法線ベクトル場 $\nu : \partial D \to \mathbb{R}^N$ は,

$$\nu(p) = -\frac{\mathrm{grad} f(p)}{|\mathrm{grad}(f)(p)|} \quad (\forall p \in \partial D)$$

を満たす.

証明. 任意の $p_0 \in \partial D$ を取り固定する. (6.71) より $df_{p_0} \neq 0$ だから定理 6.36 より p_0 の周りの M の局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_N)$ で,

$$x_N(p) = f(p) \quad (\forall p \in U) \tag{6.72}$$

を満たすものが取れる. ここで必要ならば $U \ni p_0$ を小さく取り直し $\varphi(U)$ は有界開方体 ($\mathbb{R}$ の有界開区間 N 個の直積) としてよく, さらに必要ならば x_1 を $-x_1$ と置き換えて $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_N)$ は M の正の向きの局所座標であるとしてよい. このとき D の定義と (6.71) より,

$$\varphi(U \cap D) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty)), \quad \varphi(U \cap \partial D) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$$

であるので, $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_N)$ は定義 6.113 の条件 (a),(b),(c) を満たす. よって D は滑らかな境界を持つ開集合である. そして D に対する外向き単位法線ベクトル場 (定義 6.116) $\nu : \partial D \to \mathbb{R}^N$ は, 上のように取られた $p_0 \in \partial D$ の周りの M の正の向きの局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_N)$ に対し,

$$\nu(p) = \frac{-1}{\sqrt{G_{(U \cap \partial D, x_1, \cdots, x_{N-1})}(p)}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} p \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x_{N-1}} p \right) \quad (\forall p \in U \cap \partial D) \tag{6.73}$$

と表される. 勾配の定義 6.70 と (6.72) より任意の $j \in \{1, \cdots, N-1\}$ に対し,

$$\left(\mathrm{grad}(f)(p) \mid \frac{\partial}{\partial x_j} p \right) = df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} p \right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial x_N}{\partial x_j}(p) = 0 \quad (\forall p \in U \cap \partial D) \tag{6.74}$$

であるから,

$$\nu(p),\ \mathrm{grad}(f)(p) \in (T_p(\partial D))^{\perp} \quad (\forall p \in U \cap \partial D) \tag{6.75}$$

である. $(T_p(\partial D))^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^N$ は 1 次元であり $|\nu(p)| = 1$ なので,

$$\mathrm{grad}(f)(p) = (\mathrm{grad}(f)(p) \mid \nu(p)) \nu(p) \quad (\forall p \in U \cap \partial D) \tag{6.76}$$

と表せる. 今, M の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_N)$ の計量 (定義 6.68) $g_{(U,\varphi)}(p) \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ $(\forall p \in U)$ の逆行列を $(g^{i,j}(p))_{i,j} \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ $(\forall p \in U)$ とおくと, 命題 6.71 と (6.74) より,

$$\mathrm{grad}(f)(p) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} g^{i,j}(p) \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} p = \sum_{i=1}^{N} g^{i,N}(p) \frac{\partial}{\partial x_i} p \quad (\forall p \in U \cap \partial D) \tag{6.77}$$

であるから, (6.75) より,

$$(\mathrm{grad}(f)(p) \mid \nu(p)) = g^{N,N}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_N} p \mid \nu(p) \right) \quad (\forall p \in U \cap \partial D) \tag{6.78}$$

である. ここで正則行列の逆行列の余因子行列による表示 (定理 2.53) より,

$$g^{N,N}(p) = \frac{G_{(U \cap \partial D, x_1, \cdots, x_{N-1})}(p)}{G_{(U, x_1, \cdots, x_N)}(p)} \quad (\forall p \in U \cap \partial D) \tag{6.79}$$

と表せて, 一方 (6.73) とベクトル積の性質 (命題 6.66 の (3)) より,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_N} p \mid \nu(p) \right) &= \frac{-1}{\sqrt{G_{(U \cap \partial D, x_1, \cdots, x_{N-1})}(p)}} \det \left(\frac{\partial}{\partial x_1} p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_N} p \right) \\ &= -\frac{\sqrt{G_{(U, x_1, \cdots, x_N)}(p)}}{\sqrt{G_{(U \cap \partial D, x_1, \cdots, x_{N-1})}(p)}} \quad (\forall p \in U \cap \partial D) \end{aligned} \tag{6.80}$$

である[*80]から, (6.78), (6.79), (6.80) より,

$$(\mathrm{grad}(f)(p) \mid \nu(p)) = -\frac{\sqrt{G_{(U\cap\partial D, x_1,\cdots,x_{N-1})}(p)}}{\sqrt{G_{(U,x_1,\cdots,x_N)}(p)}} < 0 \quad (\forall p \in U \cap \partial D)$$

が成り立つ. よって (6.76) より,

$$(\mathrm{grad}(f)(p) \mid \nu(p)) = -|\mathrm{grad}(f)(p)| \quad (\forall p \in U \cap \partial D)$$

であり,

$$\nu(p) = -\frac{\mathrm{grad}(f)(p)}{|\mathrm{grad}(f)(p)|} \quad (\forall p \in U \cap \partial D)$$

が成り立つ. □

6.8 Stokes の定理, Gauss の発散定理, Poincaré の補題

定義 6.118 (向き付けられた n 次元多様体上の n 階微分形式の積分)**.** M を Euclid 空間内の n 次元多様体とし, Ω_M を M の体積要素 (定義 6.108) とする. 空でない M の Borel 集合 $B \subseteq M$ 上で定義された M の n 階微分形式 $\omega = (\omega_p)_{p\in B}$ に対し, $f : B \to \mathbb{R}$ で,

$$\omega_p = f(p)\Omega_{M,p} \quad (\forall p \in B)$$

を満たすものが定まる[*81]. $f : B \to \mathbb{R}$ が Borel 関数であり, M の Riemann-Lebesgue 測度 (定義 6.85) μ_M に関して可積分であるとき, $\omega = (\omega_p)_{p\in B}$ は可積分であると言い, ω の積分を,

$$\int_B \omega := \int_B f(p) d\mu_M(p)$$

によって定義する.

命題 6.119. M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の向き付けられた超曲面 ($N-1$ 次元多様体), Ω_M を M の体積要素, $\nu : M \to \mathbb{R}^N$ を正の向きの単位法線ベクトル場 (定義 6.112) とし, $u : M \to \mathbb{R}^N$ を連続なベクトル場とする. そして u に対応する M 上で定義された $\mathbb{R}^N$ の 1 階連続微分形式 $j(u) = (j(u(p)))_{p\in M}$ (定義 6.74) とそれに Hodge の $\star$ 作用素を作用させて得られる M 上で定義された $\mathbb{R}^N$ の $N-1$ 階連続微分形式 $\star j(u) = (\star j(u(p)))_{p\in M}$ (定義 6.73) を考える. このとき恒等写像 $\iota_M : M \ni p \mapsto p \in \mathbb{R}^N$ による引き戻し (定義 6.58) によって得られる M 上の $N-1$ 階連続微分形式 $\iota_M^* \star j(u)$ は,

$$(\iota_M^* \star j(u))_p = (u(p) \mid \nu(p))\Omega_{M,p} \quad (\forall p \in M) \tag{6.81}$$

と表される.

証明. $u(p) = (u_1(p), \cdots, u_N(p))$ $(\forall p \in M)$ と成分表示する. Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の標準座標を $(t_1, \cdots, t_N)$ と表すと,

$$j(u) = \sum_{k=1}^N u_k dt_k, \quad \star j(u) = \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} u_k dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_k} \wedge \cdots \wedge dt_N$$

($\widehat{dt_k}$ は dt_k を飛ばすことを意味する) となる. よって M の任意の正の向きの局所座標 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_{N-1})$ と任意の $p \in U$ に対し, 外積の反対称性 (命題 2.79) より,

$$\begin{aligned}(\iota_M^* \star j(u))_p &= \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} u_k(p) dt_{1,p} \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_{k,p}} \wedge \cdots \wedge dt_{N,p} \\ &= \det\left(u(p), \frac{\partial}{\partial x_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p\right) dx_{1,p} \wedge \cdots \wedge dx_{N-1,p} \end{aligned} \tag{6.82}$$

[*80] $(U, x_1, \cdots, x_N)$ は正の向きの局所座標だから $\det\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_N}p\right) > 0$ であることに注意.

[*81] 任意の $p \in M$ に対し $\bigwedge^n T_p^*(M)$ が 1 次元であることによる.

となる (ただし右辺の行列は縦ベクトル表記 (定義 2.49)). ここで単位法線ベクトル場の定義 6.112 より,

$$\nu(p)=\frac{(-1)^{N-1}}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p\times\cdots\times\frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p\right)$$

であるから, ベクトル積の性質 (命題 6.66 の (3)) より,

$$(u(p)\mid\nu(p))=\frac{(-1)^{N-1}}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}}\det\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p,u(p)\right) \tag{6.83}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}}\det\left(u(p),\frac{\partial}{\partial x_1}p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p\right) \tag{6.84}$$

である. また体積要素の定義 6.108 より,

$$\Omega_{M,p}=\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}dx_{1,p}\wedge\cdots\wedge dx_{N-1,p}$$

であるから (6.82), (6.83) より,

$$\begin{aligned}(\iota_M^*\star j(u))_p&=\det\left(u(p),\frac{\partial}{\partial x_1}p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{N-1}}p\right)dx_{1,p}\wedge\cdots\wedge dx_{N-1,p}\\&=(u(p)\mid\nu(p))\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}dx_{1,p}\wedge\cdots\wedge dx_{N-1,p}\\&=(u(p)\mid\nu(p))\Omega_{M,p}\end{aligned}$$

となる. よって (6.81) が成り立つ. □

注意 6.120. 命題 6.119 においてもし $M\ni p\mapsto(u(p)\mid\nu(p))\in\mathbb{R}$ が M の Riemann-Lebesgue 測度 μ_M に関して可積分ならば, 定義 6.118 より,

$$\int_M\iota_M^*\star j(u)=\int_M(u(p)\mid\nu(p))d\mu_M(p)$$

である.

定理 6.121 (Stokes の定理)**.** M を Euclid 空間内の向き付けられた n 次元 ($n\geqslant 2$) 多様体, $D\subseteq M$ を滑らかな境界を持つ開集合 (定義 6.113) とし, $\overline{D}\subseteq M$ はコンパクトであるとする. このとき M の $n-1$ 階 C^1 級微分形式 ω に対し,

$$\int_D d\omega=\int_{\partial D}\iota_{\partial D}^*\omega \tag{6.85}$$

が成り立つ. ただし $\iota_{\partial D}^*\omega$ は恒等写像 $\iota_{\partial D}:\partial D\ni p\mapsto p\in M$ による ω の引き戻し (定義 6.58) である.

証明. 命題 6.114 より正の向きの局所座標からなる M のアトラス $\mathcal{A}$ で次の条件を満たすものが取れる.

(a) 任意の $(U,\varphi)\in\mathcal{A}$ に対し $\varphi(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の有界開方体 ($\mathbb{R}$ の有界開区間 n 個の直積).

(b) $U\cap\partial D\neq\varnothing$ を満たす任意の $(U,\varphi)\in\mathcal{A}$ に対し,

$$\varphi(U\cap\partial D)=\varphi(U)\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}),\quad\varphi(U\cap D)=\varphi(U)\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\infty)).$$

$\overline{D}$ はコンパクトであるので有限個の $(U_1,\varphi_1),\cdots,(U_m,\varphi_m)\in\mathcal{A}$ で,

$$\overline{D}\subseteq\bigcup_{i=1}^m U_i$$

を満たすものが取れる. これに対し 1 の分割 (定理 6.44) より $h_1,\cdots,h_m\in C_{c,+}^\infty(M)$ で,

$$h_i\preceq U_i\ \ (i=1,\cdots,m),\quad\sum_{i=1}^m h_i(p)=1\ \ (\forall p\in\overline{D})$$

を満たすものが取れる．このとき，

$$d\omega = \sum_{i=1}^{m} d(h_i\omega) \ \ (\text{on } D), \ \ \iota_{\partial D}^{*}\omega = \sum_{i=1}^{m} \iota_{\partial D}^{*}(h_i\omega) \ \ (\text{on } \partial D)$$

であるので，

$$\int_D d\omega = \sum_{i=1}^{m} \int_D d(h_i\omega), \ \ \int_{\partial D} \iota_{\partial D}^{*}\omega = \sum_{i=1}^{m} \int_{\partial D} \iota_{\partial D}^{*}(h_i\omega)$$

である．よって (6.85) を示すには各 $i \in \{1, \cdots, m\}$ に対し，

$$\int_D d(h_i\omega) = \int_{\partial D} \iota_{\partial D}^{*}(h_i\omega)$$

が成り立つことを示せばよい．これより最初から

$$\text{supp}(\omega) = \overline{\{p \in M : \omega_p \neq 0\}}$$

はコンパクトであり，ある 1 つの $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{A}$ に対し，

$$\text{supp}(\omega) \subseteq U \tag{6.86}$$

であると仮定して (6.85) を示せば十分である．

$$\varphi(U) := \prod_{k=1}^{n} (a_k, b_k), \tag{6.87}$$

$$\varphi(\text{supp}(\omega)) \subseteq \prod_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k] \subseteq \prod_{k=1}^{n} (a_k, b_k) = \varphi(U) \tag{6.88}$$

とおく．また，

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} f_k dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_n \tag{6.89}$$

($\widehat{dx_k}$ は dx_k を飛ばすことを意味する) とおく．ω は台 $\text{supp}(\omega)$ がコンパクトな C^1 級微分形式であるから $f_1, \cdots, f_m \in C_c^1(M)$ であり，

$$\text{supp}(f_k) \subseteq \text{supp}(\omega) \subseteq U \ \ (k = 1, \cdots, m) \tag{6.90}$$

である．そして外微分の定義 6.54 と体積要素の定義 6.108 より，

$$d\omega_p = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(p) dx_{1,p} \wedge \cdots \wedge dx_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(p) \frac{1}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}} \Omega_{M,p} \ \ (\forall p \in U) \tag{6.91}$$

である．U は連結なので $U \subseteq D$ か $U \subseteq M \backslash \overline{D}$ か $U \cap \partial D \neq \varnothing$ のいずれかが成り立つ．

(1) $U \subseteq D$ の場合．(6.86), (6.91) と微分形式の積分の定義 6.118 と Riemann-Lebesgue 測度の定義 6.85 より，

$$\begin{aligned} \int_D d\omega = \int_U d\omega &= \int_U \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(p) \frac{1}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}} d\mu_M(p) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\varphi(U)} \partial_k (f_k \circ \varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \end{aligned} \tag{6.92}$$

となる．ここで (6.90) と (6.87), (6.88) より，

$$\text{supp}(f_k \circ \varphi^{-1}) = \varphi(\text{supp}(f_k)) \subseteq \prod_{j=1}^{n} [\alpha_j, \beta_j] \subseteq \prod_{j=1}^{n} (a_j, b_j) = \varphi(U) \ \ (k = 1, \cdots, n)$$

であるから, Fubini の定理 5.85 と微積分学の基本定理 5.206 より任意の $k \in \{1, \cdots, n\}$ に対し,

$$\int_{\varphi(U)} \partial_k (f_k \circ \varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{\prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]} \partial_k (f_k \circ \varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$
$$= \int_{\prod_{i \neq k} [\alpha_i, \beta_i]} \left[f_k \circ \varphi^{-1}(x_1, \cdots, x_n) \right]_{x_k = \alpha_k}^{x_k = \beta_k} dx_1 \cdots \widehat{dx_k} \cdots dx_n = 0$$

となる. よって (6.92) より,

$$\int_D d\omega = \sum_{k=1}^n \int_{\varphi(U)} \partial_k (f_k \circ \varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0$$

である. 一方, $\mathrm{supp}(\omega) \subseteq U \subseteq D$ であるから $\mathrm{supp}(\omega) \cap \partial D = \varnothing$ なので $\iota_{\partial D}^* \omega = 0$ である. よって,

$$\int_{\partial D} \iota_{\partial D}^* \omega = 0$$

なので (6.85) が成り立つ.

(2) $U \subseteq M \backslash \overline{D}$ の場合. $\mathrm{supp}(\omega) \subseteq U \subseteq D$ より $d\omega = 0$, $\iota_{\partial D}^* \omega = 0$ なので,

$$\int_D d\omega = 0, \quad \int_{\partial D} \iota_{\partial D}^* \omega = 0$$

であるから (6.85) が成り立つ.

(3) $U \cap \partial D \neq \varnothing$ の場合. (6.86), (6.91) より,

$$\begin{aligned} \int_D d\omega = \int_{U \cap D} d\omega &= \int_{\varphi(U \cap D)} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(p) \frac{1}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}} d\mu_M(p) \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{\varphi(U \cap D)} \partial_k (f_k \circ \varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \end{aligned} \tag{6.93}$$

である. (b) と (6.87), (6.88) より,

$$\varphi(U \cap D) = \prod_{k=1}^{n-1} (a_k, b_k) \times (0, b_n) \supseteq \prod_{k=1}^{n-1} [\alpha_k, \beta_k] \times (0, \beta_n] \supseteq \varphi(\mathrm{supp}(\omega) \cap D)$$

であるから, Fubini の定理 5.85 と微積分学の基本定理 5.206 より, 任意の $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ に対し,

$$\begin{aligned} &\int_{\varphi(U \cap D)} \partial_k (f_k \circ \varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\prod_{i \neq k}^{n-1} [\alpha_i, \beta_i] \times [0, \beta_n]} \partial_k (f_k \circ \varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\prod_{i \neq k}^{n-1} [\alpha_i, \beta_i] \times [0, \beta_n]} \left[f_k \circ \varphi^{-1}(x_1, \cdots, x_n) \right]_{x_k = \alpha_k}^{x_k = \beta_k} dx_1 \cdots \widehat{dx_k} \cdots dx_n = 0 \end{aligned}$$

となり, また,

$$\begin{aligned} &\int_{\varphi(U \cap D)} \partial_n (f_n \circ \varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\prod_{i=1}^{n-1} [\alpha_i, \beta_i] \times [0, \beta_n]} \partial_n (f_n \circ \varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= -\int_{\prod_{i=1}^{n-1} [\alpha_i, \beta_i]} (f_n \circ \varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{n-1} \end{aligned}$$

となる. よって (6.93) より,

$$\int_D d\omega = \int_{U \cap D} d\omega = -\int_{\prod_{k=1}^{n-1} [\alpha_k, \beta_k]} (f_n \circ \varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{n-1} \tag{6.94}$$

である. 一方, (6.89) より任意の $p \in U \cap \partial D$ に対し,

$$(\iota_{\partial D}^{*}\omega)_p = (-1)^{n-1} f_n(p) dx_{1,p} \wedge \cdots \wedge dx_{n-1,p} = -f_n(p) d((-1)^n x_1)_p \wedge \cdots \wedge dx_{n-1,p}$$

であり, $(U \cap \partial D, (-1)^n x_1, \cdots, x_{n-1})$ は ∂D の正の向きの局所座標 (定義 6.115) であるから ∂D の体積要素 $\Omega_{\partial D}$ に対し,

$$\begin{aligned}(\iota_{\partial D}^{*}\omega)_p &= -f_n(p) d((-1)^n x_1)_p \wedge \cdots \wedge dx_{n-1,p} \\ &= -f_n(p) \frac{1}{G_{(U\cap\partial D,(-1)^n x_1,\cdots,x_{n-1})}(p)} \Omega_{\partial D,p}\end{aligned}$$

である. また (b) と (6.87), (6.88) より,

$$\varphi(U \cap \partial D) = \prod_{k=1}^{n-1} (a_k, b_k) \times \{0\} \supseteq \prod_{k=1}^{n-1} [\alpha_k, \beta_k] \supseteq \operatorname{supp}((f_n \circ \varphi^{-1})(\,\cdot\,, 0))$$

であるから, 微分形式の積分の定義 6.118 と Riemann-Lebesgue 測度の定義 6.85 より,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \iota_{\partial D}^{*}\omega = \int_{U\cap\partial D} \iota_{\partial D}^{*}\omega &= \int_{U\cap\partial D} -f_n(p) \frac{1}{G_{(U\cap\partial D,(-1)^n x_1,\cdots,x_{n-1})}(p)} d\mu_{\partial D}(p) \\ &= \int_{\varphi(U\cap\partial D)} -(f_n \circ \varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{n-1} \\ &= -\int_{\prod_{k=1}^{n-1}[\alpha_k,\beta_k]} (f_n \circ \varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{n-1} \qquad (6.95)\end{aligned}$$

となる. よって (6.94), (6.95) より (6.85) が成り立つ.

□

系 6.122 (Gauss の発散定理)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の滑らかな境界を持つ有界開集合 D と $\overline{D}$ を含む $\mathbb{R}^N$ の開集合 U 上で定義された C^1 級ベクトル場 $u : U \to \mathbb{R}^N$ に対し,

$$\int_D \operatorname{div}(u)(x) dx = \int_{\partial D} (u(p) \mid \nu(p)) d\mu_{\partial D}(p)$$

が成り立つ. ただし $\nu : \partial D \to \mathbb{R}^N$ は D に対する外向き単位法線ベクトル場 (定義 6.116) であり, $\mu_{\partial D}$ は超曲面 ∂D 上の Riemann-Lebesgue 測度 (定義 6.85) である.

証明. 発散の定義 6.75 より,

$$\operatorname{div}(u) = \star d \star j(u)$$

であるから, $\mathbb{R}^N$ の標準座標を $(x_1, \cdots, x_N)$ とおくと,

$$d \star j(u) = \operatorname{div}(u) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N$$

である. $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N$ は $\mathbb{R}^N$ の体積要素 (定義 6.108) であるから, 微分形式の積分の定義 6.118 より,

$$\int_D d \star j(u) = \int_D \operatorname{div}(u)(x) dx$$

である. Stokes の定理 6.121 より,

$$\int_D d \star j(u) = \int_{\partial D} \iota_{\partial D}^{*} \star j(u)$$

であり, 命題 6.119 より,

$$\int_{\partial D} \iota_{\partial D}^{*} \star j(u) = \int_{\partial D} (u(p) \mid \nu(p)) d\mu_{\partial D}(p)$$

である. よって,

$$\int_D \operatorname{div}(u)(x) dx = \int_D d \star j(u) = \int_{\partial D} \iota_{\partial D}^{*} \star j(u) = \int_{\partial D} (u(p) \mid \nu(p)) d\mu_{\partial D}(p)$$

である. □

定義 6.123 (右手系)**.** $\mathbb{R}^3$ の順序付けられた 3 つのベクトル (v_1, v_2, v_3) が右手系をなすとは,

$$\det(v_1, v_2, v_3) > 0$$

(右辺は行列の縦ベクトル表記 (定義 2.49)) が成り立つことを言う.

命題 6.124. M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の向き付けられた曲面 (2 次元多様体), $\nu : M \to \mathbb{R}^3$ を M の正の向きの単位法線ベクトル場 (定義 6.112) とし, $D \subseteq M$ を M の滑らかな境界を持つ開集合とする. このとき,

(1) $\ell : \partial D \to \mathbb{R}^3$ で次を満たすものが唯一つ存在する. 任意の $p \in \partial D$ と p の周りの M の正の向きの局所座標 $(U, \varphi; x_1, x_2)$ で,

$$\varphi(U \cap \partial D) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}), \quad \varphi(U \cap D) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times (0, \infty)) \tag{6.96}$$

を満たすものに対し,

$$\ell(p) = \left| \frac{\partial}{\partial x_1} p \right|^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} p. \tag{6.97}$$

(2) (1) における $\ell : \partial D \to \mathbb{R}^3$ に対し,

$$\ell(p) \in T_p(\partial D), \quad \ell(p) \perp \nu(p), \quad |\ell(p)| = 1 \quad (\forall p \in \partial D)$$

が成り立つ.

(3) (1) における $\ell : \partial D \to \mathbb{R}^3$ は C^∞ 級である.

(4) 任意の $p \in \partial D$ と p から D の内側を向く M の接ベクトル $v \in T_p(M)$ $(v \neq 0)$ に対し, $(\nu(p), \ell(p), v)$ は右手系をなす.

証明. (1) 任意の $p \in \partial D$ と p の周りの M の正の向きの局所座標 $(U, \varphi; x_1, x_2)$, $(V, \psi; y_1, y_2)$ で,

$$\varphi(U \cap \partial D) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}), \quad \varphi(U \cap D) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times (0, \infty)),$$
$$\psi(U \cap \partial D) = \psi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}), \quad \psi(U \cap D) = \psi(U) \cap (\mathbb{R} \times (0, \infty))$$

なるものに対し,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_1} p \right|^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} p = \left| \frac{\partial}{\partial y_1} p \right|^{-1} \frac{\partial}{\partial y_1} p \tag{6.98}$$

が成り立つことを示せばよいが, 命題 6.114 より $(U \cap \partial D, x_1)$ と $(V \cap \partial D, y_1)$ は互いに同じ向きなので,

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(p) > 0$$

であり,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} p = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(p) \frac{\partial}{\partial y_1} p$$

であるから (6.98) は成り立つ.

(2) 任意の $p \in \partial D$ と p の周りの M の正の向きの局所座標 $(U, \varphi; x_1, x_2)$ で (6.96) を満たすものに対し, $(U \cap \partial D, x_1)$ は ∂D の局所座標であるから,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} p \in T_p(\partial D)$$

である. よって,

$$\ell(p) = \left| \frac{\partial}{\partial x_1} p \right|^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} p \in T_p(\partial D), \quad |\ell(p)| = 1$$

である. また (U, x_1, x_2) は M の局所座標であるから,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} p \in T_p(\partial D) \subseteq T_p(M)$$

である. よって $\nu(p) \in (T_p(M))^\perp$ より, $\ell(p) \perp \nu(p)$ である.

(3) M の正の向きの局所座標 $(U, \varphi; x_1, x_2)$ で (6.96) を満たすものに対し,

$$\ell(p) = \left|\frac{\partial}{\partial x_1}p\right|^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1}p = \left|\partial_1\varphi^{-1}(\varphi(p))\right|^{-1} \partial_1\varphi^{-1}(\varphi(p)) \quad (\forall p \in U \cap \partial D)$$

であるから, $U \cap \partial D \ni p \mapsto \ell(p) \in \mathbb{R}^3$ は C^∞ 級である. よって $(U, \varphi; x_1, x_2)$ の任意性より $\ell : \partial D \to \mathbb{R}^3$ は C^∞ 級である.

(4) 任意の $p \in \partial D$ と p の周りの M の正の向きの局所座標 $(U, \varphi; x_1, x_2)$ で (6.96) を満たすものに対し, $\frac{\partial}{\partial x_2}p \in T_p(M)$ は p から D の内側を向いている. よって

$$\det\left(\nu(p), \ell(p), \frac{\partial}{\partial x_2}p\right) > 0 \tag{6.99}$$

(右辺は行列の縦ベクトル表記) を示せばよい. 定義 6.112 より,

$$\nu(p) = \frac{1}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p \times \frac{\partial}{\partial x_2}p\right)$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\det\left(\nu(p), \ell(p), \frac{\partial}{\partial x_2}(p)\right) &= \frac{1}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}}\left|\frac{\partial}{\partial x_1}p\right|^{-1} \det\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p \times \frac{\partial}{\partial x_2}p,\ \frac{\partial}{\partial x_1}p,\ \frac{\partial}{\partial x_2}p\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{G_{(U,\varphi)}(p)}}\left|\frac{\partial}{\partial x_1}p\right|^{-1} \det\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p,\ \frac{\partial}{\partial x_2}p,\ \frac{\partial}{\partial x_1}p \times \frac{\partial}{\partial x_2}p\right)
\end{aligned}$$

であり, ベクトル積の性質 (命題 6.66 の (3)) より,

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial x_1}p,\ \frac{\partial}{\partial x_2}p,\ \frac{\partial}{\partial x_1}p \times \frac{\partial}{\partial x_2}p\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}p \times \frac{\partial}{\partial x_2}p \;\middle|\; \frac{\partial}{\partial x_1}p \times \frac{\partial}{\partial x_2}p\right) > 0$$

であるから (6.99) は成り立つ.

□

定義 6.125 (向き付けられた曲面 M の滑らかな境界を持つ開集合 D の境界 ∂D 上の正の向きの単位接ベクトル場). M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の向き付けられた曲面 (2 次元多様体), $D \subseteq M$ を M の滑らかな境界を持つ開集合とする. このとき命題 6.124 における $\ell : \partial D \to \mathbb{R}^3$ を D に対して正の向きの ∂D 上の単位接ベクトル場と言う. 命題 6.124 より $\ell : \partial D \to \mathbb{R}^3$ は C^∞ 級で,

$$\ell(p) \in T_p(\partial D) \cap (T_p(M))^\perp, \quad |\ell(p)| = 1 \quad (\forall p \in \partial D)$$

であり, 任意の $p \in \partial D$ に対し p から D の内側を向く M の接ベクトル $v \in T_p(M)$ に対し $(\nu(p), \ell(p), v)$ は右手系 (定義 6.123) をなす. ただし $\nu : M \to \mathbb{R}^3$ は M 上の正の向きの単位法線ベクトル場 (定義 6.112) である.

系 6.126 (古典的な Stokes の定理). M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の向き付けられた曲面 (2 次元多様体), $U \subseteq \mathbb{R}^3$ を M を含む $\mathbb{R}^3$ の開集合とし, $u : U \to \mathbb{R}^3$ を C^1 級ベクトル場とする. また $D \subseteq M$ を M の滑らかな境界を持つ開集合で $\overline{D} \subseteq M$ がコンパクトであるものとする. そして μ_M を曲面 M の面積測度, $\mu_{\partial D}$ を曲線 ∂D の線測度[*82], $\nu : M \to \mathbb{R}^3$ を M の正の向きの単位法線ベクトル場 (定義 6.112), $\ell : \partial D \to \mathbb{R}^3$ を D に対して正の向きの ∂D 上の単位接ベクトル場 (定義 6.125) とする. このとき,

$$\int_D (\mathrm{rot}(u)(p) \mid \nu(p))\, d\mu_M(p) = \int_{\partial D} (u(p) \mid \ell(p)) d\mu_{\partial D}(p) \tag{6.100}$$

が成り立つ.

[*82] $\mu_M, \mu_{\partial D}$ はそれぞれ $M, \partial D$ の Riemann-Lebesgue 測度 (定義 6.85) のことである.

証明. 回転の定義 6.80 より,

$$\star j(\mathrm{rot}(u)) = dj(u)$$

であるから恒等写像 $\iota_M : M \ni p \mapsto p \in \mathbb{R}^3$ に対し命題 6.119 より,

$$(\mathrm{rot}(u)(p) \mid \nu(p))\Omega_{M,p} = (\iota_M^* \star j(\mathrm{rot}(u)))_p = (\iota_M^* dj(u))_p = (d\iota_M^* j(u))_p \quad (\forall p \in M)$$

である. ただし Ω_M は M の体積要素 (定義 6.108) であり, 最後の等号において引き戻しと外微分の可換性 (命題 6.60 の (3)) を用いた. よって微分形式の積分の定義 6.118 より,

$$\int_D (\mathrm{rot}(u)(p) \mid \nu(p)) d\mu_M(p) = \int_D (\mathrm{rot}(u)(p) \mid \nu(p))\Omega_{M,p} = \int_D d\iota_M^* j(u) \tag{6.101}$$

となる. そして恒等写像 $\iota_{\partial D} \ni p \mapsto p \in M$ に対し Stokes の定理 6.121 より,

$$\int_D d\iota_M^* j(u) = \int_{\partial D} \iota_{\partial D}^* \iota_M^* j(u) = \int_{\partial D} (\iota_M \circ \iota_{\partial D})^* j(u) = \int_{\partial D} \iota_{\partial D}^* j(u) \tag{6.102}$$

(ただし 2 番目の等号において命題 6.60 の (1) を用いた) となる. ここで (t_1, t_2, t_3) を $\mathbb{R}^3$ の標準座標とし, $(U, \varphi; x_1, x_2)$ を M の正の向きの局所座標で,

$$\varphi(U \cap \partial D) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}), \quad \varphi(U \cap D) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times (0, \infty))$$

なるものとすると, 定義 6.125 より,

$$\ell(p) = \left| \frac{\partial}{\partial x_1}(p) \right|^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} p$$

であり, $(U \cap \partial D, x_1)$ は ∂D の正の向きの局所座標である (定義 6.115) から, ∂D の体積要素は,

$$\Omega_{\partial D, p} = \left| \frac{\partial}{\partial x_1}(p) \right|^{-1} dx_{1,p}$$

である. よって,

$$\begin{aligned}
(\iota_{\partial D}^* j(u))_p &= (\iota_{\partial D}^* (u_1 dt_1 + u_2 dt_2))_p = \left(u_1(p) \frac{\partial t_1}{\partial x_1}(p) + u_2(p) \frac{\partial t_2}{\partial x_1}(p) \right) dx_{1,p} \\
&= \left(u(p) \mid \frac{\partial}{\partial x_1} p \right) dx_{1,p} = (u(p) \mid \ell(p))\, \Omega_{\partial D, p}
\end{aligned}$$

であるから,

$$\int_{\partial D} \iota_{\partial D}^* j(u) = \int_{\partial D} (u(p) \mid \ell(p)) d\mu_{\partial D}(p) \tag{6.103}$$

である. よって (6.101), (6.102), (6.103) より,

$$\int_D (\mathrm{rot}(u)(p) \mid \nu(p)) d\mu_M(p) = \int_D d\iota_M^* j(u) = \int_{\partial D} \iota_{\partial D}^* j(u) = \int_{\partial D} (u(p) \mid \ell(p)) d\mu_{\partial D}(p)$$

であるので (6.100) が成り立つ. □

定義 6.127 (星形集合)**.** 空でない集合 $U \subseteq \mathbb{R}^N$ が $a \in U$ を中心とする星形集合であるとは,

$$a + t(x - a) \in U \quad (\forall x \in U, \forall t \in [0, 1])$$

が成り立つことを言う.

注意 6.128. $\mathbb{R}^N$ の任意の凸集合は星形集合である. また星形集合は明らかに弧状連結 (定義 3.21) である.

定理 6.129 (Poincaré の補題)**.** $U \subseteq \mathbb{R}^N$ を星形開集合とし, ω を U の r 階 C^1 級微分形式する. もし $d\omega = 0$ ならば $\omega = d\theta$ を満たす U の $r-1$ 階 C^1 級微分形式 θ が存在する.

証明. $r \geqslant N+1$ ならば自明なので $r \in \{1, \cdots, N\}$ とする.

(1) U が 0 を中心とする星形開集合の場合. C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ で $f(0)=0$, $f(t)=1$ なるものを取り[*83], C^∞ 級写像

$$\Phi : \mathbb{R} \times U \ni (t,x) \mapsto f(t)x \in U$$

を定義する.

$$\omega = \sum_{j_1<\cdots<j_r} \alpha_{j_1,\cdots,j_r}(x) dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r}$$

とおき, ω の Φ による引き戻し (定義 6.58) を,

$$\Phi^*\omega = \sum_{j_1<\cdots<j_r} \beta_{j_1,\cdots,j_r}(t,x) dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r} \tag{6.104}$$

$$+ \sum_{i_1<\cdots<i_{r-1}} \gamma_{i_1,\cdots,i_{r-1}}(t,x) dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{r-1}} \tag{6.105}$$

とおく. このとき任意の $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant N$ と任意の $(t,x) \in \mathbb{R} \times U$ に対し,

$$\beta_{j_1,\cdots,j_r}(t,x) = f(t)^r \alpha_{j_1,\cdots,j_r}(\Phi(t,x))$$

であり, 引き戻しと外微分の可換性 (命題 6.60 の (4)) より,

$$d\Phi^*\omega = \Phi^* d\omega = 0$$

であるから (6.104) より,

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta_{j_1,\cdots,j_r}(t,x) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \gamma_{j_1,\cdots,\widehat{j_k},\cdots,j_r}(t,x)$$

($\widehat{j_k}$ は j_k を飛ばすことを意味する) が成り立つ. よって微積分学の基本定理 5.206 より,

$$\begin{aligned}
\alpha_{j_1,\cdots,j_r}(x) &= \beta_{j_1,\cdots,j_r}(1,x) - \beta_{j_1,\cdots,j_r}(0,x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\beta_{j_1,\cdots,j_r}(t,x) dt \\
&= \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k} \gamma_{j_1,\cdots,\widehat{j_k},\cdots,j_r}(t,x) dt
\end{aligned} \tag{6.106}$$

が成り立つ. そこで任意の $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{r-1} \leqslant N$ に対し,

$$\delta_{i_1,\cdots,i_{r-1}}(x) := \int_0^1 \gamma_{i_1,\cdots,i_{r-1}}(t,x) dt \quad (\forall x \in U)$$

とおけば $\gamma_{i_1,\cdots,i_{r-1}}$ が C^1 級である[*84]ことと Lebesgue 優収束定理 5.59 より, $\delta_{i_1,\cdots,i_{r-1}} : U \to \mathbb{R}$ は C^1 級であり, 任意の $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant N$ と $k \in \{1, \cdots, r\}$ に対し (6.106) より,

$$\sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \delta_{j_1,\cdots,\widehat{j_k},\cdots,j_r}(x) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \gamma_{j_1,\cdots,\widehat{j_k},\cdots,j_r}(t,x) dt = \alpha_{j_1,\cdots,j_r}(x) \tag{6.107}$$

である. ゆえに,

$$\theta := \sum_{i_1<\cdots<i_{r-1}} \delta_{i_1,\cdots,i_{r-1}}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{r-1}}$$

とおけば, θ は U の $r-1$ 階 C^1 級微分形式であり (6.107) より,

$$\begin{aligned}
d\theta &= \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \delta_{j_1,\cdots,\widehat{j_k},\cdots,j_r}(x) dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r} \\
&= \sum_{k=1}^r \alpha_{j_1,\cdots,j_r}(x) dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r} = \omega
\end{aligned}$$

が成り立つ.

[*83] 例えば Urysohn の補題 6.43 により $h \in C^\infty_{c,+}(\mathbb{R})$ で $\int_{\mathbb{R}} h(s)ds = 1$, $\mathrm{supp}(h) \subseteq (0,1)$ を満たすものを取り $f(t) := \int_0^t h(s)ds$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ とおけばよい.

[*84] $\Phi^*\omega$ が C^1 級である (注意 6.59) ことによる.

(2) U が a を中心とする星形開集合の場合. $V := U - a$ とおけば V は 0 を中心とする星形開集合である. そこで C^∞ 級同相写像 $\Psi : V \ni x \mapsto x + a \in U$ による ω の引き戻し $\Psi^*\omega$ を考えればこれは V の r 階 C^1 級微分形式であり, 引き戻しと外微分の可換性 (命題 6.60 の (4)) より,

$$d\Psi^*\omega = \Psi^* d\omega = 0$$

である. よって (1) より V の $r-1$ 階 C^1 級微分形式 θ で $d\theta = \Psi^*\omega$ なるものが取れる. よって $\Psi^{-1} : U \to V$ による θ の引き戻し $\Psi^{-1*}\theta$ を考えればこれは U の $r-1$ 階 C^1 級微分形式であり,

$$d\Psi^{-1*}\theta = \Psi^{-1*} d\theta = \Psi^{-1*}\Psi^*\omega = (\Psi \circ \Psi^{-1})^*\omega = \omega$$

が成り立つ.

□

系 6.130 (Poincaré の補題の系)**.** $U \subseteq \mathbb{R}^3$ を星形開集合とする. このとき,

(1) C^1 級ベクトル場 $F : U \to \mathbb{R}^3$ が $\mathrm{rot}(F) = 0$ を満たすならば, C^2 級関数 $f : U \to \mathbb{R}$ で $F = \mathrm{grad}(f)$ を満たすものが存在する.

(2) C^1 級ベクトル場 $B : U \to \mathbb{R}^3$ が $\mathrm{div}(B) = 0$ を満たすならば, C^1 級ベクトル場 $A : U \to \mathbb{R}^3$ で $B = \mathrm{rot}(A)$ を満たすものが存在する.

証明. (1) 回転の定義 6.80 より $\star j(\mathrm{rot}(F)) = dj(F)$ であるから, $\mathrm{rot}(F) = 0$ より $dj(F) = 0$ である. よって Poincaré の補題 6.129 より C^1 級関数 $f : U \to \mathbb{R}$ で, $df = j(F)$ なるものが取れる. 勾配の定義 6.70 とベクトル場 F に対応する微分形式 $j(F)$ の定義 6.74 より $F = \mathrm{grad}(f)$ である.

(2) 発散の定義 6.75 より $\star d \star j(B) = \mathrm{div}(B) = 0$ だから $d \star j(B) = 0$ である. よって Poincaré の補題 6.129 より C^1 級ベクトル場 $A : U \to \mathbb{R}^3$ で, $\star j(B) = dj(A)$ なるものが取れる. これより,

$$j(B) = \star\star j(B) = \star dj(A) = j(\mathrm{rot}(A))$$

であるから $B = \mathrm{rot}(A)$ である.

□

6.9 特異方体上の連続微分形式の積分と Stokes の定理

定義 6.131 (特異方体)**.** $n \in \{1, \cdots, N\}$ とする. Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次の特異方体とは $\mathbb{R}^n$ のある有界閉方体 ($\mathbb{R}$ の有界閉区間 n 個の直積) $I \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で定義され $\mathbb{R}^N$ に値を取る連続写像 $c : I \to \mathbb{R}^N$ であり, I を含むある開方体 ($\mathbb{R}$ の開区間 n 個の直積) $\tilde{I} \subseteq \mathbb{R}^n$ と C^1 級写像 $\tilde{c} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^N$ で,

$$c(t) = \tilde{c}(t) \quad (\forall t \in I)$$

を満たすものが存在するようなものを言う. また, もし上の条件を満たす $\tilde{c} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^N$ として C^k 級 ($k \in \{2, 3, \cdots\} \cup \{\infty\}$) のものが取れるとき, c は C^k 級の特異方体であると言う.

定義 6.132 (特異方体上の連続微分形式の積分)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次特異方体 $c : I \to \mathbb{R}^N$ に対し, c の像 $c(I) \subseteq \mathbb{R}^N$ 上で定義された $\mathbb{R}^N$ の n 階連続微分形式 (定義 6.50) $\omega = (\omega_p)_{p \in c(I)}$ の積分を,

$$\int_c \omega := \int_I (\star c^*\omega)(t_1, \cdots, t_n) dt_1 \cdots dt_n$$

として定義する. ただし $c^*\omega$ は ω の c による引き戻し (定義 6.58) によって得られる I 上で定義された $\mathbb{R}^n$ の n 階連続微分形式であり, $\star c^*\omega : I \to \mathbb{R}$ はそれに Hodge の $\star$-作用素を作用させて (定義 6.73) 得られる I 上の連続関数である.

定義 6.133 (互いに同値な特異方体, 互いに逆向きな特異方体)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次特異方体 $c_1 : I_1 \to \mathbb{R}^N$ と $c_2 : I_2 \to \mathbb{R}^N$ が互いに同値であるとは次が成り立つことを言う.

(1) $c_1(I_1) = c_2(I_2)$.
(2) C^1 級同相写像 $\Phi : I_1^\circ \to I_2^\circ$ で,

$$c_2 \circ \Phi(t) = c_1(t), \quad \det\Phi'(t) > 0 \quad (\forall t \in I_1^\circ)$$

を満たすものが存在する.

また, $\mathbb{R}^N$ 内の n 次特異方体 $c_1 : I_1 \to \mathbb{R}^N$ と $c_2 : I_2 \to \mathbb{R}^N$ が互いに逆向きであるとは次が成り立つことを言う.

(1) $c_1(I_1) = c_2(I_2)$.
(2) C^1 級同相写像 $\Phi : I_1^\circ \to I_2^\circ$ で,

$$c_2 \circ \Phi(t) = c_1(t), \quad \det\Phi'(t) < 0 \quad (\forall t \in I_1^\circ)$$

を満たすものが存在する.

それぞれの (2) の条件を満たす Φ を互いに同値 (互いに逆向き) な特異方体のパラメータ変換と言う.

命題 6.134. Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次特異方体 $c_1 : I_1 \to \mathbb{R}^N$, $c_2 : I_2 \to \mathbb{R}^N$ の像 $c_1(I_1), c_2(I_2)$ が一致するとし, $c_1(I_1) = c_2(I_2)$ 上で定義された $\mathbb{R}^N$ の n 階連続微分形式 ω を考える. このとき,

(1) c_1 と c_2 が互いに同値ならば,

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$$

が成り立つ.
(2) c_1 と c_2 が互いに逆向きならば,

$$\int_{c_1} \omega = -\int_{c_2} \omega$$

が成り立つ.

証明.

$$c_1^*\omega = f dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n, \quad c_2^*\omega = g dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n$$

とおき, 定義 6.133 の (2) における C^1 級同相写像 $\Phi : I_1^\circ \to I_2^\circ$ を取る. このとき命題 6.60 より I_1° 上で,

$$\begin{aligned} f dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n = c_1^*\omega = (c_2 \circ \Phi)^*\omega = \Phi^* c_2^*\omega &= \Phi^*(g dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n) \\ &= (g \circ \Phi) d\Phi_1 \wedge \cdots \wedge d\Phi_n \\ &= (g \circ \Phi)(\det\Phi') dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \end{aligned}$$

であるから,

$$f(t) = g(\Phi(t))\det\Phi'(t) \quad (\forall t \in I_1^\circ)$$

が成り立つ. よって c_1 と c_2 が互いに同値, すなわち $\det\Phi'(t) > 0$ $(\forall t \in I_1^\circ)$ の場合, 変数変換公式 (定理 5.229) より,

$$\begin{aligned} \int_{c_1} \omega = \int_{I_1} (\star c_1^*\omega)(t) dt = \int_{I_1} f(t) dt &= \int_{I_1^\circ} g(\Phi(t))\det\Phi'(t) dt \\ &= \int_{I_1^\circ} g(\Phi(t))|\det\Phi'(t)| dt = \int_{I_2} g(t) dt \\ &= \int_{I_2} (\star c_2^*\omega)(t) dt = \int_{c_2} \omega \end{aligned}$$

であり, c_1 と c_2 が互いに逆向き, すなわち $\det\Phi'(t) < 0$ $(\forall t \in I_1^\circ)$ の場合, 変数変換公式より,

$$\begin{aligned} \int_{c_1} \omega = \int_{I_1} (\star c_1^*\omega)(t) dt = \int_{I_1} f(t) dt &= \int_{I_1^\circ} g(\Phi(t))\det\Phi'(t) dt \\ &= -\int_{I_1^\circ} g(\Phi(t))|\det\Phi'(t)| dt = -\int_{I_2} g(t) dt \\ &= -\int_{I_2} (\star c_2^*\omega)(t) dt = -\int_{c_2} \omega \end{aligned}$$

である. □

定義 6.135 (集合が生成する自由 $\mathbb{Z}$-加群)**.** X を空でない集合とし, X から $\mathbb{Z}$ への写像全体を $\mathrm{Map}(X,\mathbb{Z})$ とおく. 任意の $f=(f(x))_{x\in X}, g=(g(x))_{x\in X}\in\mathrm{Map}(X,\mathbb{Z})$, 任意の $\alpha\in\mathbb{Z}$ に対し,

$$f+g:=(f(x)+g(x))_{x\in X}\in\mathrm{Map}(X,\mathbb{Z}),\quad \alpha f:=(\alpha f(x))_{x\in X}\in\mathrm{Map}(X,\mathbb{Z})$$

とおいて $\mathrm{Map}(X,\mathbb{Z})$ に加法と整数倍の演算を定義する. 任意の $x\in X$ に対し $\delta_x\in\mathrm{Map}(X,\mathbb{Z})$ を x において 1 を取り, x 以外の点で 0 を取るものとすると,

$$\iota: X\ni x\mapsto\delta_x\in\mathrm{Map}(X,\mathbb{Z})$$

は単射である. そこで X と $\iota(X)\subseteq\mathrm{Map}(X,\mathbb{Z})$ を同一視して $X\subseteq\mathrm{Map}(X,\mathbb{Z})$ とみなす. そして,

$$M:=\left\{\sum_{j=1}^{k}\alpha_j x_j : k\in\mathbb{N},\ \alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{Z},\ x_1,\cdots,x_k\in X\right\}\subseteq\mathrm{Map}(X,\mathbb{Z})$$

とおく. このとき M は加法と整数倍の演算で閉じている. M を X から生成される自由 $\mathbb{Z}$-加群と言う.

定義 6.136 (チェイン)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次特異方体全体が生成する自由 $\mathbb{Z}$-加群 (定義 6.135) の 0 ではない元を $\mathbb{R}^N$ 内の n 次のチェインと言う. $\mathbb{R}^N$ 内の n 次のチェイン c は, 互いに異なる n 次特異方体 $c_j: I_j\to\mathbb{R}^N$ $(j=1,\cdots,k)$ と $\alpha_j\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ $(j=1,\cdots,k)$ によって,

$$c=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j c_j$$

と一意に表される. この表示を c の標準表示と呼ぶこととする. そしてこれに対し,

$$c^*:=\bigcup_{j=1}^{k}c_j(I_j)$$

を c の跡と呼ぶこととする.

定義 6.137 (チェイン上の連続微分形式の積分)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次チェイン c と c の跡 c^*(定義 6.136) 上で定義された $\mathbb{R}^N$ の n 階連続微分形式 ω に対し, ω の c 上での積分を, c の標準表示

$$c=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j c_j$$

に対して,

$$\int_c\omega:=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\int_{c_j}\omega$$

と定義する.

定義 6.138 (特異方体の境界)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の $n\in\{2,\cdots,N\}$ 次特異方体

$$c: I=\prod_{j=1}^{n}[a_{j,0},a_{j,1}]\to\mathbb{R}^N$$

を考える. 各 $k\in\{1,\cdots,n\}$ に対し $I^{(k)}$ を I から $[a_{k,0},a_{k,1}]$ を除いたもの

$$I^{(k)}:=[a_{1,0},a_{1,1}]\times\cdots\times\widehat{[a_{k,0},a_{k,1}]}\times\cdots\times[a_{n,0},a_{n,1}]$$

とし, これに対し $\mathbb{R}^N$ 内の $n-1$ 次特異方体

$$c_{k,\alpha}: I^{(k)}\ni(t_1,\cdots,\widehat{t_k},\cdots,t_n)\mapsto c(t_1,\cdots,t_{k-1},a_{k,\alpha},t_{k+1},\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^N\quad(\alpha=0,1)$$

($\widehat{t_k}$ は t_k を飛ばすことを意味する) を定義する. このとき $\mathbb{R}^N$ 内の $n-1$ 次チェイン

$$\partial c := \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{k+\alpha} c_{k,\alpha}$$

を c の境界と言う.

定理 6.139 (特異方体上の微分形式に関する Stokes の定理)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の $n \in \{2, \cdots, N\}$ 次の C^2 級特異方体 (定義 6.131) $c : I \to \mathbb{R}^N$ と, $c(I)$ を含む $\mathbb{R}^N$ の開集合上で定義された $n-1$ 階 C^1 級微分形式 ω を考える. このとき,

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

が成り立つ.

証明.

$$I = \prod_{j=1}^{n} [a_{j,0}, a_{j,1}]$$

とおき, 各 $k \in \{1, \cdots, n\}$ に対し,

$$I^{(k)} := [a_{1,0}, a_{1,1}] \times \cdots \times \widehat{[a_{k,0}, a_{k,1}]} \times \cdots \times [a_{n,0}, a_{n,1}],$$

$$\iota_{k,\alpha} : I^{(k)} \ni (t_1, \cdots, \widehat{t_k}, \cdots, t_n) \mapsto (t_1, \cdots, t_{k-1}, a_{k,\alpha}, t_{k+1}, \cdots, t_n) \in I \quad (\alpha = 0, 1)$$

($\widehat{t_k}$ は t_k を飛ばすことを意味する) とおく. このとき,

$$\partial c = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{k+\alpha} c \circ \iota_{k,\alpha}$$

だから, チェイン上の微分形式の積分の定義 6.137 と特異方体上の微分形式の積分の定義 6.132 より,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial c} \omega &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{k+\alpha} \int_{c \circ \iota_{k,\alpha}} \omega \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{k+\alpha} \int_{I^{(k)}} (\star (c \circ \iota_{k,\alpha})^* \omega)(t_1, \cdots, \widehat{t_k}, \cdots, t_n) dt_1 \cdots \widehat{dt_k} \cdots dt_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{k+\alpha} \int_{I^{(k)}} (\star \iota_{k,\alpha}^* c^* \omega)(t_1, \cdots, \widehat{t_k}, \cdots, t_n) dt_1 \cdots \widehat{dt_k} \cdots dt_n
\end{aligned} \tag{6.108}$$

(3 番目の等号において引き戻しの性質 (命題 6.60 の (1)) を用いた) である. 今, $(t_1, \cdots, t_n)$ を Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の標準座標とし, I を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合上で定義された $\mathbb{R}^n$ の $n-1$ 階 C^1 級微分形式 $c^*\omega$ を,

$$c^*\omega := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} f_k (dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_k} \wedge \cdots \wedge dt_n) \tag{6.109}$$

と表す. このとき各 $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$ に対し,

$$\iota_{k,\alpha}^* c^* \omega = (-1)^{k-1} (f_k \circ \iota_{k,\alpha})(dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_k} \wedge \cdots \wedge dt_n)$$

であるから (6.108) より,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial c} \omega &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{k+\alpha} \int_{I^{(k)}} (\star \iota_{k,\alpha}^* c^* \omega)(t_1, \cdots, \widehat{t_k}, \cdots, t_n) dt_1 \cdots \widehat{dt_k} \cdots dt_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha-1} \int_{I^{(k)}} (f \circ \iota_{k,\alpha})(t_1, \cdots, \widehat{t_k}, \cdots, t_n) dt_1 \cdots \widehat{dt_k} \cdots dt_n
\end{aligned} \tag{6.110}$$

となる. 一方, (6.109) より,

$$dc^*\omega = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial t_k}(dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n)$$

であるから,

$$\begin{aligned}\int_c d\omega &= \int_I (\star c^* d\omega)(t_1, \cdots, t_n) dt_1 \cdots dt_n = \int_I (\star dc^*\omega)(t_1, \cdots, t_n) dt_1 \cdots dt_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_I \frac{\partial f_k}{\partial t_k}(t_1, \cdots, t_n) dt_1 \cdots dt_n \qquad (6.111)\end{aligned}$$

(2 番目の等号で引き戻しと外微分の可換性 (命題 6.60 の (3)) を用いた) となり, Fubini の定理 5.85 と微積分学の基本定理 5.206 より各 $k \in \{1, \cdots, n\}$ に対し,

$$\int_I \frac{\partial f_k}{\partial t_k}(t_1, \cdots, t_n) dt_1 \cdots dt_n = \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha-1} \int_{I^{(k)}} (f_k \circ \iota_{k,\alpha})(t_1, \cdots, \widehat{t_k}, \cdots, t_n) dt_1 \cdots \widehat{dt_k} \cdots dt_n \qquad (6.112)$$

である. よって (6.111), (6.112) より,

$$\begin{aligned}\int_c d\omega &= \sum_{k=1}^{n} \int_I \frac{\partial f_k}{\partial t_k}(t_1, \cdots, t_n) dt_1 \cdots dt_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha-1} \int_{I^{(k)}} (f_k \circ \iota_{k,\alpha})(t_1, \cdots, \widehat{t_k}, \cdots, t_n) dt_1 \cdots \widehat{dt_k} \cdots dt_n \qquad (6.113)\end{aligned}$$

となるので, (6.110) と (6.113) より,

$$\int_c d\omega = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha-1} \int_{I^{(k)}} (f_k \circ \iota_{k,\alpha})(t_1, \cdots, \widehat{t_k}, \cdots, t_n) dt_1 \cdots \widehat{dt_k} \cdots dt_n = \int_{\partial c} \omega$$

が成り立つ. □

定義 6.140 (曲線, 路, 閉路, サイクル)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の 1 次の特異方体 (定義 6.131) $c : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ のことを $\mathbb{R}^N$ 内の曲線と言う (少なくとも C^1 級であることに注意). そして $c(a) \in \mathbb{R}^N$ を c の始点, $c(b) \in \mathbb{R}^N$ を c の終点と言う.
$\mathbb{R}^N$ 内の 1 次のチェイン (定義 6.136) c が路であるとは, 有限個の曲線 $c_1, \cdots, c_k$ で, 各 $j \in \{1, \cdots, k\}$ に対し c_j の終点と c_{j+1} の始点が一致するものに対し,

$$c = \sum_{j=1}^{k} c_j$$

と表されるものを言う. さらに c_k の終点が c_1 の始点と一致するとき c を閉路と言う.
有限個の閉路の和で表されるチェインのことをサイクルと言う.

定義 6.141 (線積分, 複素線積分)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の 1 次のチェイン (定義 6.136) c と, c の跡 c^* 上で定義された $\mathbb{R}^N$ の 1 階連続微分形式 ω に対し, ω の c 上での積分 (定義 6.132)

$$\int_c \omega$$

を ω の c 上での線積分と言う.
$\mathbb{R}^N$ 内の 1 次チェイン c と, c の跡 c^* 上で定義された連続なベクトル場 $u : c^* \to \mathbb{R}^N$ に対し, u に対応する $\mathbb{R}^N$ の 1 階連続微分形式 (定義 6.74) $j(u)$ の c 上での線積分

$$\int_c j(u)$$

をベクトル場 u の c 上での線積分と言う. c が曲線 $c : I \to \mathbb{R}^N$ の場合,

$$(c^* j(u))_t = \left(c^* \sum_{k=1}^{N} u_k dx_k\right)_t = \sum_{k=1}^{N} u_k(c(t)) dc_{k,t} = \sum_{k=1}^{N} u_k(c(t)) \frac{dc_k}{dt}(t) dt = \left(u(c(t)) \mid \frac{dc}{dt}(t)\right) dt$$

だから, ベクトル場 $u : c(I) \to \mathbb{R}^N$ の c 上での線積分は,

$$\int_c j(u) = \int_I \left(u(t) \mid \frac{dc}{dt}(t) \right) dt$$

となる.

$\mathbb{C}(= \mathbb{R}^2)$ の 1 次チェイン c と, c の跡 c^* 上で定義された連続関数

$$f : c^* \ni x + iy \mapsto f_x(x+iy) + i f_y(x+iy) \in \mathbb{C} \quad (x, y \in \mathbb{R}, f_x(x+iy), f_y(x+iy) \in \mathbb{R})$$

に対し,

$$\int_c f(z)dz := \int_c (f_x dx - f_y dy) + i \int_c (f_x dy + f_y dx)$$

を f の c 上での複素線積分と言う. c が曲線 $c = c_x + ic_y : I \to \mathbb{C}$ の場合,

$$(c^*(f_x dx - f_y dy))_t = f_x(c(t))dc_{x,t} - f_y(c(t))dc_{y,t} = \left(f_x(c(t))\frac{dc_x}{dt}(t) - f_y(c(t))\frac{dc_y}{dt}(t) \right) dt,$$
$$(c^*(f_x dy + f_y dx))_t = f_x(c(t))dc_{y,t} + f_y(c(t))dc_{x,t} = \left(f_x(c(t))\frac{dc_y}{dt}(t) + f_y(c(t))\frac{dc_x}{dt}(t) \right) dt$$

より, 連続関数 $f : c(I) \to \mathbb{C}$ の c 上での線積分は,

$$\begin{aligned}
\int_c f(z)dz &= \int_c (f_x dx - f_y dy) + i \int_c (f_x dy + f_y dx) \\
&= \int_I \left(f_x(c(t))\frac{dc_x}{dt}(t) - f_y(c(t))\frac{dc_y}{dt}(t) \right) dt + i \int_I \left(f_x(c(t))\frac{dc_y}{dt}(t) + f_y(c(t))\frac{dc_x}{dt}(t) \right) dt \\
&= \int_I f(c(t))\frac{dc}{dt}(t)dt
\end{aligned}$$

となる.

7 複素解析

7.1 複素線積分の基本性質, サイクルの回転数

定義 7.1 ($\mathbb{C}$ 内の 1 次チェインの長さ)**.** $\mathbb{C}$ 内の 1 次チェイン c の標準表示 (定義 6.136) を,

$$c = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j c_j$$

とし, 各曲線 c_j の定義域を $[a_j, b_j] \subseteq \mathbb{R}$ とおく. このとき,

$$l(c) := \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j| \int_{a_j}^{b_j} |c_j'(t)| dt \tag{7.1}$$

を c の長さと言う.

c の跡

$$c^* = \bigcup_{j=1}^{k} c_j([a_j, b_j]) \subseteq \mathbb{C}$$

(コンパクトであることに注意) 上で定義された複素数値連続関数全体に sup ノルムを入れた Banach 空間 $C(c^*)$ (定義 5.159) を考える. このとき任意の $f \in C(c^*)$ に対し f の c 上の複素線積分 (定義 6.141) は,

$$\int_c f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int_{c_j} f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int_{a_j}^{b_j} f(c_j(t)) c_j'(t) dt$$

と表される. よって,

$$C(c^*) \ni f \mapsto \int_c f(z)dz \in \mathbb{C} \tag{7.2}$$

は線型汎関数であり, (7.1) より任意の $f \in C(c^*)$ に対し,

$$\left| \int_c f(z)dz \right| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j| \int_{a_j}^{b_j} |f(c_j(t))| |c_j'(t)| dt \leqslant \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j| \|f\| \int_{a_j}^{b_j} |c_j'(t)| dt = l(c) \|f\|$$

となる. よって (7.2) はノルムが $l(c)$ 以下の有界線型汎関数である.

定義 7.2 ($\mathbb{C}$ 内の線分)**.** 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し,

$$[0,1] \ni t \mapsto \alpha + t(\beta - \alpha) \in \mathbb{C}$$

なる C^∞ 級曲線を α を始点, β を終点とする線分と言い, これを $[\alpha, \beta]$ と表す. そして任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ に対し, 閉路 (定義 6.140) $\partial\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ を,

$$\partial\Delta(\alpha, \beta, \gamma) := [\alpha, \beta] + [\beta, \gamma] + [\gamma, \alpha]$$

と定義する.

補題 7.3. 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ と,

$$\{\alpha + t(\beta - \alpha) : t \in [0, 1]\}$$

上で定義された任意の複素数値連続関数 f に対し,

$$\int_{[\alpha,\beta]} f(z)dz = -\int_{[\beta,\alpha]} f(z)dz$$

が成り立つ.

証明.

$$[\alpha,\beta]:[0,1]\ni t\mapsto \alpha+t(\beta-\alpha)=(1-t)\alpha+t\beta\in\mathbb{C},$$
$$[\beta,\alpha]:[0,1]\ni s\mapsto \beta+s(\alpha-\beta)=s\alpha+(1-s)\beta\in\mathbb{C}$$

であるから,

$$[0,1]\ni t\mapsto 1-t\in[0,1]$$

なるパラメータ変換により $[\alpha,\beta]$ と $[\beta,\alpha]$ は互いに逆向き (定義 6.133) である. よって命題 6.134 より,

$$\int_{[\alpha,\beta]} f(z)dz=-\int_{[\beta,\alpha]} f(z)dz$$

が成り立つ. □

補題 7.4. $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ を凸開集合とし, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ を連続関数とする. もし,

$$\int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,\gamma)} f(z)dz=0\quad(\forall\alpha,\beta,\gamma\in\Omega) \tag{7.3}$$

が成り立つならば, 正則関数 $F:\Omega\to\mathbb{C}$ で $F'(z)=f(z)$ $(\forall z\in\Omega)$ を満たすものが存在する.

証明. 任意の $\alpha\in\Omega$ を取り固定し,

$$F(z):=\int_{[\alpha,z]} f(w)dw\in\mathbb{C}\quad(\forall z\in\Omega)$$

として $F:\Omega\to\mathbb{C}$ を定義する. このとき任意の $z_0,z\in\Omega$ に対し, (7.3) と補題 7.3 より,

$$\begin{aligned}0&=\int_{\partial\Delta(\alpha,z_0,z)} f(w)dw=\int_{[\alpha,z_0]} f(w)dw+\int_{[z_0,z]} f(w)dw+\int_{[z,\alpha]} f(w)dw\\&=F(z_0)+\int_{[z_0,z]} f(w)dw-F(z)\end{aligned}$$

となるから,

$$F(z)-F(z_0)=\int_{[z_0,z]} f(w)dw=\int_0^1 f(z_0+t(z-z_0))(z-z_0)dt \tag{7.4}$$

が成り立つ. f の z_0 における連続性より, 任意の $\varepsilon\in(0,\infty)$ に対し $\delta\in(0,\infty)$ が存在し,

$$|z-z_0|<\delta\quad\Rightarrow\quad|f(z)-f(z_0)|\leqslant\varepsilon$$

となるから, (7.4) より,

$$0<|z-z_0|<\delta\quad\Rightarrow\quad\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)\right|=\int_0^1|f(z_0+t(z-z_0))-f(z_0)|dt\leqslant\varepsilon$$

となる. よって任意の $z_0\in\Omega$ に対し F は z_0 で複素微分可能であり, $F'(z_0)=f(z_0)$ が成り立つ. □

補題 7.5. $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ を開集合, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ を連続関数で, ある正則関数 $F:\Omega\to\mathbb{C}$ に対し $F'(z)=f(z)$ $(\forall z\in\Omega)$ となるものとする. このとき跡が Ω に含まれる任意のサイクル (定義 6.140) c に対し,

$$\int_c f(z)dz=0$$

が成り立つ.

証明. サイクルは閉路の和であるから c は 1 つの閉路であると仮定して示せば十分である. Cauchy-Riemann の関係式 (4.24) より,

$$f_x=\frac{\partial F_x}{\partial x}=\frac{\partial F_y}{\partial y},\quad f_y=\frac{\partial F_y}{\partial x}=-\frac{\partial F_x}{\partial y}$$

である．よって，

$$f_x dx - f_y dy = \frac{\partial F_x}{\partial x}dx + \frac{\partial F_x}{\partial y}dy = dF_x,$$
$$f_x dy + f_y dx = \frac{\partial F_x}{\partial y}dy + \frac{\partial F_y}{\partial x}dx = dF_y$$

であるから，複素線積分の定義 6.141 より，

$$\int_c f(z)dz = \int_c (f_x dx - f_y dy) + i\int_c (f_x dy + f_y dx) = \int_c dF_x + i\int_c dF_y \tag{7.5}$$

となる．ここで c は閉路 (定義 6.140) であるから有限個の C^1 級関数 $c_j : [a_j, b_j] \to \Omega\ (j = 1, \cdots, k)$ で，

$$c_j(b_j) = c_{j+1}(a_{j+1}) \ \ (j = 1, \cdots, k-1), \ \ c_k(b_k) = c_1(a_1)$$

なるものに対し，

$$c = \sum_{j=1}^{k} c_j$$

と表せる．よって (7.5) より，

$$\int_c f(z)dz = \sum_{j=1}^{k}\int_{c_j} dF_x + i\sum_{j=1}^{k}\int_{c_j} dF_y$$

であり，

$$\sum_{j=1}^{k}\int_{c_j} dF_x = \sum_{j=1}^{k}\int_{a_j}^{b_j} \frac{d}{dt}F_x(c_j(t))dt = \sum_{j=1}^{k}(F_x(c_j(b_j)) - F_x(c_j(a_j))) = F_x(c_k(b_k)) - F_x(c_1(a_1)) = 0,$$
$$\sum_{j=1}^{k}\int_{c_j} dF_y = \sum_{j=1}^{k}\int_{a_j}^{b_j} \frac{d}{dt}F_y(c_j(t))dt = \sum_{j=1}^{k}(F_y(c_j(b_j)) - F_y(c_j(a_j))) = F_y(c_k(b_k)) - F_y(c_1(a_1)) = 0$$

であるから，

$$\int_c f(z)dz = 0$$

が成り立つ． □

定理 7.6. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を凸開集合，$f : \Omega \to \mathbb{C}$ を連続関数とする．そしてある一点 $p \in \Omega$ を除いた開集合 $\Omega\backslash\{p\}$ 上で f は正則であるとする．このとき跡が Ω に含まれる任意のサイクル (定義 6.140) c に対し，

$$\int_c f(z)dz = 0$$

が成り立つ．

証明. 補題 7.4 と補題 7.5 より任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$ を取り，

$$\int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,\gamma)} f(z)dz = 0 \tag{7.6}$$

が成り立つことを示せばよい．α, β, γ が同一直線上にある場合，補題 7.3 より (7.6) は成り立つので，$\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$ は同一直線上にはないとする．α, β, γ を頂点とする三角形

$$K := \{t_1\alpha + t_2\beta + t_3\gamma : t_1, t_2, t_3 \in [0, 1], t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$$

を考える[*85]．

[*85] Ω は凸集合であるから K は Ω に含まれる．また K はコンパクト集合 $\{(t_1, t_2, t_3) \in [0, 1]^3 : t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$ の連続写像による像であるからコンパクトである．

(1) $p \in \Omega \backslash K$ の場合に (7.6) が成り立つことを示す．このとき $K \subseteq \Omega \backslash \{p\}$ である．$\mathbb{C}(=\mathbb{R}^2)$ 内の 2 次特異方体 (定義 6.131)

$$c : [0,1] \times [0,1] \ni (s,t) \mapsto (1-t)\left((1-s)\alpha + s\beta\right) + t\gamma \in K$$

を考えると, c の境界は定義 6.138 より,

$$\partial c = [\alpha, \beta] + [\beta, \gamma] - [\alpha, \gamma] + [\gamma, \gamma]$$

であるから, 補題 7.3 より,

$$\int_{\partial c} f(z)dz = \int_{[\alpha,\beta]} f(z)dz + \int_{[\beta,\gamma]} f(z)dz + \int_{[\gamma,\alpha]} f(z)dz = \int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,\gamma)} f(z)dz \tag{7.7}$$

である．$\Omega \backslash \{p\}$ 上で f は正則 (定義 4.23) であるから, $\Omega \backslash \{p\} \supseteq K$ 上で 1 階微分形式 $f_x dx - f_y dy$, $f_y dx + f_x dy$ は C^1 級であり, その外微分は Cauchy-Riemann の関係式 (4.24) より,

$$\begin{aligned} d(f_x dx - f_y dy) &= -\left(\frac{\partial f_x}{\partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial x}\right) dx \wedge dy = 0, \\ d(f_y dx + f_x dy) &= \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} - \frac{\partial f_y}{\partial y}\right) dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

である．よって複素線積分の定義 6.141 と特異方体上の Stokes の定理 6.139 より,

$$\int_{\partial c} f(z)dz = \int_{\partial c} (f_x dx - f_y dy) + i\int_{\partial c} (f_y dx + f_x dy) = \int_c d(f_x dx - f_y dy) + i\int_c d(f_y dx + f_x dy) = 0$$

であるから (7.7) より,

$$\int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,\gamma)} f(z)dz = \int_{\partial c} f(z)dz = 0$$

が成り立つ．

(2) p が三角形 K の頂点である場合に (7.6) が成り立つことを示す．$p = \alpha$ として示せば十分である．任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対し,

$$\beta' := \alpha + \varepsilon(\beta - \alpha), \quad \gamma' := \alpha + \varepsilon(\gamma - \alpha)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \int_{[\alpha,\beta]} f(z)dz &= \int_{[\alpha,\beta']} f(z)dz + \int_{[\beta',\beta]} f(z)dz, \\ \int_{[\alpha,\gamma]} f(z)dz &= \int_{[\alpha,\gamma']} f(z)dz + \int_{[\gamma',\gamma]} f(z)dz \end{aligned}$$

であることと補題 7.3 より,

$$\int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,\gamma)} f(z)dz = \int_{\partial\Delta(\alpha,\beta',\gamma')} f(z)dz + \int_{\partial\Delta(\beta,\gamma',\beta')} f(z)dz + \int_{\partial\Delta(\gamma,\gamma',\beta)} f(z)dz \tag{7.8}$$

となることが分かる．(1) の結果より (7.8) の右辺の第二項, 第三項は 0 であるから,

$$\int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,\gamma)} f(z)dz = \int_{\partial\Delta(\alpha,\beta',\gamma')} f(z)dz$$

となる．よって,

$$\begin{aligned} \left|\int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,\gamma)} f(z)dz\right| &= \left|\int_{\partial\Delta(\alpha,\beta',\gamma')} f(z)dz\right| \leqslant \sup_{z\in K}|f(z)|\left(|\beta' - \alpha| + |\gamma' - \beta'| + |\gamma' - \alpha|\right) \\ &= \varepsilon \sup_{z\in K}|f(z)|(|\beta - \alpha| + |\gamma - \beta| + |\alpha - \gamma|) \end{aligned}$$

となり, $\varepsilon \in (0,1)$ は任意であるから (7.6) が成り立つ．

(3) p が三角形 K の辺上にある場合に (7.6) が成り立つことを示す. p が α と β を結ぶ線分上にあるとして示せば十分であるが, このとき補題 7.3 より,

$$\int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,\gamma)} f(z)dz = \int_{\partial\Delta(\alpha,p,\gamma)} f(z)dz + \int_{\partial\Delta(p,\beta,\gamma)} f(z)dz$$

であり, (2) の結果より右辺は 0 であるので成り立つ.

(4) p が三角形 K の内部にある場合に (7.6) が成り立つことを示す. このとき補題 7.3 より,

$$\int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,\gamma)} f(z)dz = \int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,p)} f(z)dz + \int_{\partial\Delta(\beta,\gamma,p)} f(z)dz + \int_{\partial\Delta(\gamma,\alpha,p)} f(z)dz$$

であり, (2) の結果より右辺は 0 である. よって成り立つ.

□

命題 7.7. $\mathbb{C}$ 内の任意の 1 次のチェイン c と, c の跡 c^* (定義 6.136) 上で定義された連続関数 $f : c^* \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\mathbb{C}\backslash c^* \ni w \mapsto \int_c \frac{f(z)}{z-w}dz \in \mathbb{C} \tag{7.9}$$

は何回でも複素微分可能であり, 任意 $a \in \mathbb{C}\backslash c^*$ と,

$$B(a,r) = \{w \in \mathbb{C} : |w-a| < r\} \subseteq \mathbb{C}\backslash c^* \tag{7.10}$$

を満たす任意の $r \in (0,\infty)$ に対し,

$$\int_c \frac{f(z)}{z-w}dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\int_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right)(w-a)^n \quad (\forall w \in B(a,r)) \tag{7.11}$$

が成り立つ.

証明. 定理 4.30 より冪級数関数は何回でも複素微分可能であるので, 任意の $a \in \mathbb{C}\backslash c^*$ と (7.10) を満たす任意の $r \in (0,\infty)$ を取り固定し, (7.11) が成り立つことを示せばよい[*86]. 任意の $w \in B(a,r)$ と任意の $z \in c^*$ に対し,

$$\frac{|w-a|}{|z-a|} < \frac{r}{|z-a|} \leqslant 1$$

であるから $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$ は絶対収束 (定義 3.29) し,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} = \frac{1}{z-a}\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}} = \frac{1}{z-w} \tag{7.12}$$

が成り立つ. $w \in B(a,r)$ を固定し, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し連続関数 $\varphi_N : c^* \to \mathbb{C}$ を,

$$\varphi_N(z) := \sum_{n=0}^{N} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \quad (\forall z \in c^*)$$

として定義する. このとき $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$ が絶対収束することと c^* がコンパクトであることから $(\varphi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ は一様収束する[*87]. そして,

$$C(c^*) \ni g \mapsto \int_c g(z)dz \in \mathbb{C}$$

[*86] 命題 4.27 より (7.11) が成り立つならば複素数列 $\left(\int_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を係数とする冪級数の収束半径は r 以上であることに注意.

[*87] $|z_0 - w| = \min\{|z-w| : z \in c^*\}$ を満たす $z_0 \in c^*$ が存在することに注意.

は有界線型汎関数である (定義 7.1 を参照) から, 任意の $w \in B(a,r)$ に対し (7.12) より

$$\begin{aligned}\int_c \frac{f(z)}{z-w}dz &= \int_c \sum_{n=0}^{\infty} f(z)\frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}dz = \int_c \lim_{N\to\infty}\varphi_N(z)f(z)dz = \lim_{N\to\infty}\int_c \varphi_N(z)f(z)dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right)(w-a)^n\end{aligned}$$

が成り立つ. □

命題 7.8. $\mathbb{C}$ 内の任意のサイクル (定義 6.140) c に対し,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z-w} \in \mathbb{Z} \quad (\forall w \in \mathbb{C}\backslash c^*)$$

(c^* は c の跡 (定義 6.136)) が成り立つ.

証明. サイクルは有限個の閉路の和なので c は 1 つの閉路であると仮定して示せば十分である. 適当にパラメータ変換 (定義 6.133) することで, $\gamma(0) = \gamma(1)$ を満たす連続関数 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ と $[0,1]$ の分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ に対し,

$$c = \sum_{j=1}^{n} \gamma|_{[t_{j-1},t_j]} \quad (\text{各 } j \in \{1,\cdots,n\} \text{ について } \gamma|_{[t_{j-1},t_j]} : [t_{j-1},t_j] \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{C} \text{ は } C^1 \text{ 級.})$$

としてよい. このとき,

$$\int_c \frac{dz}{z-w} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w}dt \quad (\forall w \in \mathbb{C}\backslash c^*)$$

と表される. 任意の $w \in \mathbb{C}\backslash c^*$ を取り固定する.

$$f(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-w}ds\right) \quad (\forall t \in [0,1])$$

とおくと, $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ は連続であり,

$$f'(t) = f(t)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w} \quad (\forall j \in \{1,\cdots,n\}, \forall t \in (t_{j-1},t_j))$$

である. よって,

$$g(t) := \frac{f(t)}{\gamma(t)-w} \quad (\forall t \in [0,1])$$

とおくと $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ は連続関数であり,

$$g'(t) = \frac{f'(t)}{\gamma(t)-w} - \frac{f(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-w)^2} = 0 \quad (\forall j \in \{1,\cdots,n\}, \forall t \in (t_{j-1},t_j))$$

である. ゆえに平均値の定理 4.9 より,

$$g(1) = g(t_n) = g(t_{n-1}) = \cdots = g(t_1) = g(t_0) = g(0)$$

であるから, $\gamma(0) = \gamma(1)$ より $f(1) = f(0)$ である. よって,

$$\exp\left(\int_c \frac{dz}{z-w}\right) = \exp\left(\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w}dt\right) = f(1) = f(0) = \exp(0) = 1$$

である. ゆえに命題 4.46 より,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z-w} \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ. □

定義 7.9 (サイクルの回転数). c を $\mathbb{C}$ 内のサイクル (定義 6.140) とする．命題 7.8 より任意の $w \in \mathbb{C}\backslash c^*$ に対し，

$$\mathrm{Ind}_c(w) := \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z-w} \in \mathbb{Z}$$

である．この整数 $\mathrm{Ind}_c(w)$ を c の w における回転数と言う．

命題 7.10. c を $\mathbb{C}$ 内のサイクルとし，

$$\mathrm{Ind}_c : \mathbb{C}\backslash c^* \to \mathbb{Z}$$

を c の回転数とする．このとき，

(1) 任意の連結集合 $C \subseteq \mathbb{C}\backslash c^*$ に対し Ind_c は C 上で唯一つの整数値しか取らない．

(2) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\{z \in \mathbb{C}\backslash c^* : \mathrm{Ind}_c(z) = n\}$ は $\mathbb{C}\backslash c^*$ の開集合である．

(3) 十分大きい $R \in (0,\infty)$ を取れば，

$$\mathrm{Ind}_c(w) = 0 \ \ (\forall w \in \mathbb{C} : |w| > R)$$

が成り立つ．

証明. (1) 命題 7.7 より $\mathrm{Ind}_c : \mathbb{C}\backslash c^* \to \mathbb{Z}$ は連続であるから命題 1.54 より $\mathrm{Ind}_c(C)$ は連結である．$\mathbb{Z}$ の連結集合は一点集合なので $\mathrm{Ind}_c(C)$ は一点集合である．

(2) 命題 7.7 より $\mathrm{Ind}_c : \mathbb{C}\backslash c^* \to \mathbb{Z}$ は連続であり, $\mathbb{Z}$ の一点集合は $\mathbb{Z}$ の開集合である．よって $\{z \in \mathbb{C}\backslash c^* : \mathrm{Ind}_c(z) = n\}$ は連続写像 $\mathrm{Ind}_c : \mathbb{C}\backslash c^* \to \mathbb{Z}$ による開集合 $\{n\} \subseteq \mathbb{Z}$ の逆像であるから $\mathbb{C}\backslash c^*$ の開集合である．

(3) c の跡 c^* はコンパクトであるから十分大きい $R_0 \in (0,\infty)$ を取れば，

$$z \in c^* \quad \Rightarrow \quad |z| \leqslant R_0$$

となる．よって $|w| > R_0$ なる任意の $w \in \mathbb{C}$ に対し，

$$|z-w| \geqslant |w| - |z| \geqslant |w| - R_0 > 0 \ \ (\forall z \in c^*)$$

であるから，

$$|\mathrm{Ind}_c(w)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z-w}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} l(c) \max_{z\in c^*} \frac{1}{|z-w|} \leqslant \frac{1}{2\pi} l(c) \frac{1}{|w|-R_0}$$

($l(c)$ は c の長さ (定義 7.1)) となる．ゆえに，

$$\frac{1}{2\pi} l(c) \frac{1}{R-R_0} < 1$$

を満たす $R \in (R_0,\infty)$ を取れば，

$$|\mathrm{Ind}_c(w)| \leqslant \frac{1}{2\pi} l(c) \frac{1}{R-R_0} < 1 \ \ (\forall w \in \mathbb{C} : |w| > R)$$

となるので, 回転数は整数であることから，

$$\mathrm{Ind}_c(w) = 0 \ \ (\forall w \in \mathbb{C} : |w| > R)$$

が成り立つ．

□

命題 7.11. 任意の $a \in \mathbb{C}$ と $r \in (0,\infty)$ に対し，

$$c : [0, 2\pi] \ni \theta \mapsto a + re^{i\theta} \in \mathbb{C}$$

なる閉路を考えると，

$$\mathrm{Ind}_c(z) = \begin{cases} 1 & (|z-a| < r) \\ 0 & (|z-a| > r) \end{cases}$$

が成り立つ．

証明. $B(a,r)=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|<r\}\subseteq\mathbb{C}\backslash c^*$ は連結集合であるから, 命題 7.10 の (1) より任意の $z\in B(a,r)$ に対し,

$$\mathrm{Ind}_c(z)=\mathrm{Ind}_c(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{z-a}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{c'(\theta)}{c(\theta)-a}d\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}}=1$$

である. また $\mathbb{C}\backslash CB(a,r)=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|>r\}\subseteq\mathbb{C}\backslash c^*$ も連結集合であるから命題 7.10 の (1) より $\mathrm{Ind}_c(\mathbb{C}\backslash CB(a,r))$ は一点集合であり, 命題 7.10 の (3) より Ind_c は a の十分遠方で 0 になるので, 任意の $z\in\mathbb{C}\backslash CB(a,r)$ に対し $\mathrm{Ind}_c(z)=0$ である. □

定義 7.12 (円周に沿った複素線積分の表記)**.** 任意の $a\in\mathbb{C}$ と $r\in(0,\infty)$ に対し,

$$c:[0,2\pi]\ni\theta\mapsto a+re^{i\theta}\in\mathbb{C}$$

なる閉路に沿った複素線積分

$$\int_c f(z)dz$$

を,

$$\int_{\partial B(a,r)}f(z)dz$$

と表す.

命題 7.13. $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ を凸開集合, c を跡 c^* が Ω に含まれるサイクル (定義 6.140) とする. このとき,

$$\mathrm{Ind}_c(w)=0\ \ (\forall w\in\mathbb{C}\backslash\Omega)$$

が成り立つ.

証明. 任意の $w\in\mathbb{C}\backslash\Omega$ に対し,

$$\Omega\ni z\mapsto\frac{1}{z-w}\in\mathbb{C}$$

は正則関数であるから, 定理 7.6 より,

$$\mathrm{Ind}_c(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{z-w}=0$$

である. □

定理 7.14 (凸開集合における Cauchy の積分定理)**.** $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ を凸開集合, c を跡 c^* が Ω に含まれるサイクル (定義 6.140) とし, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ を正則関数とする. このとき,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z-w}dz=f(w)\mathrm{Ind}_c(w)\ \ (\forall w\in\Omega\backslash c^*)$$

が成り立つ.

証明. 任意の $w\in\Omega\backslash c^*$ を取り固定する. $g:\Omega\to\mathbb{C}$ を,

$$g(z):=\begin{cases}\frac{f(z)-f(w)}{z-w} & (z\neq w)\\ f'(w) & (z=w)\end{cases}$$

と定義すると, g は Ω 上で連続で $\Omega\backslash\{w\}$ 上で正則である. よって定理 7.6 より,

$$0=\int_c g(z)dz=\int_c\frac{f(z)-f(w)}{z-w}dz=\int_c\frac{f(z)}{z-w}dz-f(w)\int_c\frac{1}{z-w}dz$$

が成り立つ. ゆえに,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z-w}dz=f(w)\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{z-w}=f(w)\mathrm{Ind}_c(w)\ \ (\forall w\in\Omega\backslash c^*)$$

が成り立つ. □

7.2 正則関数の冪級数展開可能性 (解析性), Liouvliie の定理, 一致の原理

定理 7.15 (正則関数の冪級数展開可能性)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を開集合, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ を正則関数とする. このとき f は何回でも複素微分可能である. そして任意の $a \in \Omega$ と,

$$B(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\} \subseteq \Omega \tag{7.13}$$

を満たす任意の $R \in (0, \infty)$ に対し,

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n \quad (\forall z \in B(a, R))$$

が成り立つ.

証明. 任意の $a \in \Omega$ と (7.13) を満たす任意の $R \in (0, \infty)$ を取り固定する. 任意の $r \in (0, R)$ に対し, 凸開集合 $B(a, R)$ 内の閉路

$$[0, 2\pi] \ni \theta \mapsto a + re^{i\theta} \in B(a, R)$$

を考えると, 命題 7.11 と定理 7.14 より,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{z - w}dz \quad (\forall w \in B(a, r))$$

(円周に沿った複素線積分の表記の定義 7.12 を参照) が成り立つ. よって命題 7.7 より f は $B(a, r)$ 上で何回でも複素微分可能であり,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{z - w}dz = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}dz\right)(w - a)^n \quad (\forall w \in B(a, r))$$

が成り立つ. よって定理 4.30 より,

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}dz \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+) \tag{7.14}$$

であり,

$$f(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(w - a)^n \quad (\forall w \in B(a, r))$$

である. $r \in (0, R)$ は任意であるので, f は $B(a, R)$ 上で何回でも複素微分可能であり,

$$f(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(w - a)^n \quad (\forall w \in B(a, R))$$

が成り立つ. そして $B(a, R)$ の任意性より f は Ω 上で何回でも複素微分可能である. □

系 7.16 (Morera の定理)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を開集合, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ を連続関数とし, Ω に含まれる $\mathbb{C}$ の任意の開球 B と任意の $\alpha, \beta, \gamma \in B$ に対し,

$$\int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,\gamma)} f(z)dz = 0$$

が成り立つとする. このとき $f : \Omega \to \mathbb{C}$ は正則関数である.

証明. B は凸開集合であるから補題 7.4 より, 正則関数 $F : B \to \mathbb{C}$ で $F'(z) = f(z)$ $(\forall z \in B)$ なるものが存在する. 定理 7.15 より F は B 上で何回でも複素微分可能であるから f は B 上で正則である. B は Ω に含まれる $\mathbb{C}$ の任意の開球であるから f は Ω 上で正則である. □

補題 7.17. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を開集合, $f:\Omega \to \mathbb{C}$ を正則関数とする. このとき任意の $a \in \Omega$ と,

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant R\} \subseteq \Omega \tag{7.15}$$

を満たす任意の $R \in (0,\infty)$ に対し,

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{R^n} \sup_{|z-a|=R} |f(z)| \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+)$$

が成り立つ.

証明. (7.14) より

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(a,R)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+)$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}|f^{(n)}(a)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial B(a,R)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(a+Re^{i\theta})}{R^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leqslant \frac{n!}{R^n} \sup_{|z-a|=R} |f(z)| \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+)\end{aligned}$$

が成り立つ. □

定義 7.18 (整関数)**.** $\mathbb{C}$ 上で定義された正則関数を整関数と言う.

定理 7.19 (Liouville の定理)**.** 有界な整関数は定数関数である.

証明. $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を有界な整関数とし, $M := \sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)| < \infty$ とおく. 定理 7.15 より,

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad (\forall z \in \mathbb{C}) \tag{7.16}$$

が成り立つ. また補題 7.17 より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!}{R^n} M \to 0 \quad (R \to \infty)$$

が成り立つから, (7.16) より,

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

が成り立つ. よって f は定数関数である. □

定義 7.20 ($\mathbb{C}$ 上の多項式)**.** $n \in \mathbb{Z}_+$, $c_0, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$ に対し,

$$p : \mathbb{C} \ni z \mapsto \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \in \mathbb{C}$$

を $\mathbb{C}$ 上の n 次多項式と言う.

定義 7.21 (関数の零点)**.** 集合 X 上の関数 $f: X \to \mathbb{C}$ に対し, $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ の点を f の零点と言う.

定理 7.22 (代数学の基本定理)**.** 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{C}$ 上の n 次多項式

$$p : \mathbb{C} \ni z \mapsto \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \in \mathbb{C}$$

は零点を持つ.

証明. p が零点を持たないと仮定すると, $p(z) \neq 0$ $(\forall z \in \mathbb{C})$ であり,

$$q : \mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{1}{p(z)} \in \mathbb{C}$$

は整関数である. $c_n \neq 0$ であるから,

$$p(z) = c_n z^n \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k z^k}{c_n z^n}\right) \quad (\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}) \tag{7.17}$$

と表せて,

$$\lim_{|z|\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k z^k}{c_n z^n} = 0$$

であるから十分大きい $R_0 \in (0,\infty)$ を取れば,

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{c_n} z^{k-n}\right| \leqslant \frac{1}{2} \quad (\forall z \in \mathbb{C} : |z| > R_0)$$

が成り立つ. よって (7.17) より,

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |c_n z^n| \left|1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k z^k}{c_n z^n}\right| \geqslant |c_n z^n| \left(1 - \left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k z^k}{c_n z^n}\right|\right) \\ &\geqslant \frac{1}{2}|c_n z^n| \quad (\forall z \in \mathbb{C} : |z| > R_0) \end{aligned}$$

となるので,

$$\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \infty$$

が成り立つ. 従って,

$$\lim_{|z|\to\infty} |q(z)| = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|p(z)|} = 0$$

が成り立つ. これより $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は無限遠で消える連続関数 (定義 5.159) だから有界である (命題 5.160). ゆえに q は有界な整関数だから Liouville の定理 7.19 より q は定数関数である. しかしこれは p が定数関数であることを意味するので矛盾する. よって p は零点を持つ. □

補題 7.23. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を連結開集合とし, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ を正則関数とする. もし,

$$f^{(n)}(a) = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+)$$

を満たす $a \in \Omega$ が存在するならば $f(z) = 0$ $(\forall z \in \Omega)$ が成り立つ.

証明.

$$U := \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0 \ (\forall n \in \mathbb{Z}_+)\} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0\}$$

とおく. 仮定より $U \neq \varnothing$ であり, 各 $f^{(n)} : \Omega \to \mathbb{C}$ は連続関数なので U は Ω の閉集合である. 任意の $a \in U$ と $B(a,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\} \subseteq \Omega$ なる任意の $R \in (0,\infty)$ に対し, 定理 7.15 より,

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = 0 \quad (\forall z \in B(a,R))$$

となる. よって f は開集合 $B(a,R)$ 上で恒等的に 0 だから $B(a,R) \subseteq U$ が成り立つ. これは U が開集合であることを意味する. よって U は Ω の開かつ閉の集合だから Ω の連結性より $\Omega = U$ が成り立つ. ゆえに $f(z) = 0$ $(\forall z \in \Omega)$ である. □

定理 7.24 (一致の原理)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を連結開集合とし, $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ を正則関数とする. そして $a \in \Omega$ と Ω の点列 $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ で次の条件を満たすものが存在すると仮定する.

(1) $a_m \neq a$ $(\forall m \in \mathbb{N})$.
(2) $\lim_{m\to\infty} a_m = a$.
(3) $f(a_m) = g(a_m)$ $(\forall m \in \mathbb{N})$.

このとき $f(z) = g(z)$ $(\forall z \in \Omega)$ が成り立つ.

証明. $h(z) := f(z) - g(z)$ $(\forall z \in \Omega)$ として正則関数 $h : \Omega \to \mathbb{C}$ を定義する. 補題 7.23 より,

$$h^{(n)}(a) = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+) \tag{7.18}$$

が成り立つことを示せばよいので, $h^{(n)}(a) \neq 0$ を満たす $n \in \mathbb{Z}_+$ が存在すると仮定して矛盾を導く. 今, $h^{(n)}(a) \neq 0$ を満たす $n \in \mathbb{Z}_+$ のうち最小のものを取りそれを n_0 とおく. (2), (3) より $h(a) = \lim_{m\to\infty} h(a_m) = 0$ であるから $n_0 \geqslant 1$ である. $B(a,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\} \subseteq \Omega$ を満たす $R \in (0,\infty)$ に対し, 定理 7.15 より,

$$h(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{h^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = \sum_{n\geqslant n_0} \frac{h^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \quad (\forall z \in B(a,R))$$

と表せるので, $k : \Omega \to \mathbb{C}$ を,

$$k(z) := \begin{cases} \frac{h(z)}{(z-a)^{n_0}} & (z \neq a) \\ \frac{h^{(n_0)}(a)}{n_0!} & (z = a) \end{cases} \tag{7.19}$$

として定義すれば $B(a,R)$ 上で,

$$k(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{h^{(n_0+n)}(a)}{(n_0+n)!}(z-a)^n \quad (\forall z \in B(a,R))$$

であるから k は正則関数, 特に連続関数である. (1), (3) より,

$$k(a_m) = \frac{h(a_m)}{(a_m-a)^{n_0}} = 0 \quad (\forall m \in \mathbb{Z}_+)$$

であるから (2) と k の連続性より,

$$k(a) = \lim_{m\to\infty} k(a_m) = 0$$

となる. しかし (7.19) より,

$$k(a) = \frac{h^{(n_0)}(a)}{n_0!} \neq 0$$

であるから矛盾する. よって (7.18) が成り立つ. □

7.3 Cauchy の積分公式と Cauchy の積分定理

補題 7.25. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を開集合, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ を正則関数とし, $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ を,

$$g(z,w) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & (z \neq w) \\ f'(z) & (z = w) \end{cases}$$

と定義する. このとき g は連続関数である.

証明. 任意の $z_0 \in \Omega$ を取り g が $(z_0, z_0) \in \Omega \times \Omega$ において連続であることを示せば十分である. $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ の z_0 における連続性より任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し Ω に含まれる $\mathbb{C}$ の開球 B が存在し,

$$|f'(z) - f'(z_0)| \leqslant \varepsilon \quad (\forall z \in B) \tag{7.20}$$

が成り立つ. 任意の $z, w \in B (z \neq w)$ に対し微積分学の基本定理 5.206 より,

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} = \int_0^1 f'(w + t(z-w))dt$$

であるから,

$$g(z,w)=\int_0^1 f'(w+t(z-w))dt \quad (\forall z,w\in B) \tag{7.21}$$

である. B は凸集合なので,

$$w+t(z-w)\in B \quad (\forall z,w\in B,\forall t\in[0,1])$$

であるから, 任意の $z,w\in B$ に対し (7.21), (7.20) より,

$$\begin{aligned}|g(z,w)-g(z_0,z_0)|&=\left|\int_0^1 f'(w+t(z-w))-f'(z_0)dt\right|\\&\leqslant\int_0^1|f'(w+t(z-w))-f'(z_0)|dt\\&\leqslant\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ. よって $g:\Omega\times\Omega\to\mathbb{C}$ は (z_0,z_0) において連続である. □

補題 7.26. c_1,c_2 をそれぞれ $\mathbb{C}$ 内の 1 次チェインとし, c_1^*,c_2^* を c_1,c_2 の跡 (定義 6.136) とする. そして $f:c_1^*\times c_2^*\to\mathbb{C}$ を連続関数とする. このとき $j,k\in\{1,2\},j\neq k$ に対し,

$$c_j^*\ni z_j\mapsto\int_{c_k}f(z_1,z_2)dz_k\in\mathbb{C} \tag{7.22}$$

は連続であり,

$$\int_{c_1}\left(\int_{c_2}f(z_1,z_2)dz_2\right)dz_1=\int_{c_2}\left(\int_{c_1}f(z_1,z_2)dz_1\right)dz_2$$

が成り立つ.

証明. 任意の $\varphi_1\in C(c_1^*),\varphi_2\in C(c_2^*)$ に対し,

$$\varphi_1\otimes\varphi_2:c_1^*\times c_2^*\ni(z_1,z_2)\mapsto\varphi_1(z_1)\varphi_2(z_2)\in\mathbb{C}$$

として $\varphi_1\otimes\varphi_2\in C(c_1^*\times c_2^*)$ を定義すると, Stone-Weierstrass の定理 5.194 より,

$$\mathcal{A}:=\operatorname{span}\{\varphi_1\otimes\varphi_2:\varphi_1\in C(c_1^*),\varphi_2\in C(c_2^*)\}$$

は $C(c_1^*\times c_2^*)$ において sup ノルムで稠密である. そこで $\mathcal{A}$ の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0$ を満たすものを取る. 明らかに各 $n\in\mathbb{N}$ について,

$$c_j^*\ni z_j\mapsto\int_{c_k}f_n(z_1,z_2)dz_k\in\mathbb{C} \tag{7.23}$$

は連続関数であり,

$$\int_{c_1}\left(\int_{c_2}f_n(z_1,z_2)dz_2\right)dz_1=\int_{c_2}\left(\int_{c_1}f_n(z_1,z_2)dz_1\right)dz_2 \tag{7.24}$$

が成り立つ. c_1,c_2 の長さ $l(c_1),l(c_2)$ (定義 7.1) に対し,

$$\begin{aligned}\sup_{z_j\in c_j^*}\left|\int_{c_k}f(z_1,z_2)dz_k-\int_{c_k}f_n(z_1,z_2)dz_k\right|&=\sup_{z_j\in c_j^*}\left|\int_{c_k}(f(z_1,z_2)-f_n(z_1,z_2))\,dz_k\right|\\&\leqslant l(c_k)\|f-f_n\|\to0\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

であるから, (7.23) からなる c_j^* 上の連続関数の列は (7.22) に一様収束する. よって定理 1.125 より (7.22) は連続関数である. そして,

$$\begin{aligned}&\left|\int_{c_1}\left(\int_{c_2}f(z_1,z_2)dz_2\right)dz_1-\int_{c_1}\left(\int_{c_2}f_n(z_1,z_2)dz_2\right)dz_1\right|\\&=\left|\int_{c_1}\left(\int_{c_2}(f(z_1,z_2)-f_n(z_1,z_2))\,dz_2\right)dz_1\right|\\&\leqslant l(c_1)\sup_{z_1\in c_1^*}\left|\int_{c_2}(f(z_1,z_2)-f_n(z_1,z_2))\,dz_2\right|\\&\leqslant l(c_1)l(c_2)\|f-f_n\|\to0\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

であるから，

$$\int_{c_1}\left(\int_{c_2} f(z_1,z_2)dz_2\right)dz_1 = \lim_{n\to\infty}\int_{c_1}\left(\int_{c_2} f_n(z_1,z_2)dz_2\right)dz_1$$

であり，同様にして，

$$\int_{c_2}\left(\int_{c_1} f(z_1,z_2)dz_1\right)dz_2 = \lim_{n\to\infty}\int_{c_2}\left(\int_{c_1} f_n(z_1,z_2)dz_1\right)dz_2$$

である．よって (7.24) より，

$$\begin{aligned}&\int_{c_1}\left(\int_{c_2} f(z_1,z_2)dz_2\right)dz_1 = \lim_{n\to\infty}\int_{c_1}\left(\int_{c_2} f_n(z_1,z_2)dz_2\right)dz_1\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{c_2}\left(\int_{c_1} f_n(z_1,z_2)dz_1\right)dz_2 = \int_{c_2}\left(\int_{c_1} f(z_1,z_2)dz_1\right)dz_2\end{aligned}$$

が成り立つ． □

定理 7.27 (Cauchy の積分公式)**.** $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ を開集合，c を跡 c^* が Ω に含まれるサイクル (定義 6.140) で，

$$\mathrm{Ind}_c(w)=0 \quad (\forall w\in\mathbb{C}\backslash\Omega) \tag{7.25}$$

を満たすものとする．このとき Ω 上の任意の正則関数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ に対し，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-w}dz = \mathrm{Ind}_c(w)f(w) \quad (\forall w\in\Omega\backslash c^*) \tag{7.26}$$

が成り立つ．

証明． $g:\Omega\times\Omega\to\mathbb{C}$ を，

$$g(z,w) := \begin{cases}\frac{f(z)-f(w)}{z-w} & (z\neq w)\\ f'(z) & (z=w)\end{cases}$$

と定義すると，補題 7.25 より g は連続関数である．

$$\int_c g(z,w)dz = \int_c \frac{f(z)-f(w)}{z-w}dz \quad (\forall w\in\Omega\backslash c^*) \tag{7.27}$$

であるから (7.26) を示すには，

$$\int_c g(z,w)dz = 0 \quad (\forall w\in\Omega) \tag{7.28}$$

を示せばよい．$h:\Omega\to\mathbb{C}$ を，

$$h(w) := \int_c g(z,w)dz \quad (\forall w\in\Omega)$$

とおくと補題 7.26 より h は連続関数である．そして Ω に含まれる $\mathbb{C}$ の任意の開球 B と任意の $\alpha,\beta,\gamma\in B$ に対し，補題 7.26 より，

$$\int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,\gamma)} h(w)dw = \int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,\gamma)}\left(\int_c g(z,w)dz\right)dw = \int_c\left(\int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,\gamma)} g(z,w)dw\right)dz \tag{7.29}$$

であり，任意の $z\in c^*$ に対し $B\ni w\mapsto g(z,w)\in\mathbb{C}$ は $B\backslash\{z\}$ 上で正則な連続関数だから，定理 7.6 より，

$$\int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,\gamma)} g(z,w)dw = 0$$

である．よって (7.29) より，

$$\int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,\gamma)} h(w)dw = \int_c\left(\int_{\partial\Delta(\alpha,\beta,\gamma)} g(z,w)dw\right)dz = 0$$

なので, Morera の定理 7.16 より $h:\Omega\to\mathbb{C}$ は正則関数である. 今,

$$\Omega_1 := \{w\in\mathbb{C}\backslash c^* : \mathrm{Ind}_c(w)=0\}$$

とおくと, 命題 7.10 の (2) より Ω_1 は $\mathbb{C}\backslash c^*$ の開集合であり, (7.25) より $\mathbb{C}\backslash\Omega\subseteq\Omega_1$ である. よって,

$$\mathbb{C}=\Omega\cup(\mathbb{C}\backslash\Omega)=\Omega\cup\Omega_1$$

であり, 任意の $w\in\Omega\cap\Omega_1$ に対し (7.27) より,

$$\begin{aligned} h(w) &= \int_c \frac{f(z)-f(w)}{z-w}dz = \int_c \frac{f(z)}{z-w}dz - f(w)\int_c \frac{dz}{z-w} \\ &= \int_c \frac{f(z)}{z-w}dz - 2\pi i f(w)\mathrm{Ind}_c(w) = \int_c \frac{f(z)}{z-w}dz \end{aligned}$$

であるから, $\widetilde{h}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を,

$$\widetilde{h}(w) := \begin{cases} h(w) & (w\in\Omega) \\ \int_c \frac{f(z)}{z-w}dz & (w\in\Omega_1) \end{cases}$$

として定義でき, 命題 7.7 より,

$$\Omega_1 \ni w \mapsto \int_c \frac{f(z)}{z-w}dz \in \mathbb{C}$$

は正則関数であるから $\widetilde{h}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は整関数である. 命題 7.10 の (3) より十分大きい $R_0\in(0,\infty)$ を取れば,

$$\begin{aligned} z\in c^* \quad &\Rightarrow \quad |z|\leqslant R_0, \\ |w|>R_0 \quad &\Rightarrow \quad w\in\Omega_1 \end{aligned}$$

となる. よって $|w|>R_0$ を満たす任意の $w\in\mathbb{C}$ に対し,

$$|\widetilde{h}(w)| = \left|\int_c \frac{f(z)}{z-w}dz\right| \leqslant l(c)\max_{z\in c^*}|f(z)|\frac{1}{|w|-R_0}$$

が成り立つ ($l(c)$ は c の長さ (定義 7.1) である) ので,

$$\lim_{|w|\to\infty}|\widetilde{h}(w)|=0 \tag{7.30}$$

が成り立つ. これより $\widetilde{h}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は無限遠で消える連続関数であるから有界 (命題 5.160) である. ゆえに $\widetilde{h}$ は有界な整関数だから Liouville の定理 7.19 より定数関数であり, (7.30) より $\widetilde{h}(w)=0$ $(\forall w\in\mathbb{C})$ が成り立つ. よって特に (7.28) が成り立つ. □

系 7.28 (Cauchy 積分定理)**.** $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ を開集合, c を跡 c^* が Ω に含まれるサイクルで,

$$\mathrm{Ind}_c(w)=0 \ \ (\forall w\in\mathbb{C}\backslash\Omega)$$

を満たすものとする. このとき Ω 上の任意の正則関数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ に対し,

$$\int_c f(z)dz=0$$

が成り立つ.

証明. 任意の $w\in\Omega\backslash c^*$ を取り固定する. $F:\Omega\to\mathbb{C}$ を,

$$F(z) := f(z)(z-w) \ \ (\forall z\in\Omega)$$

と定義すると F は正則関数であるから, Cauchy の積分公式 7.27 より,

$$\int_c f(z)dz = \int_c \frac{F(z)}{z-w}dz = 2\pi i F(w)\mathrm{Ind}_c(w)=0$$

である. □

7.4 特異点の周りの Laurant 展開と留数定理

定義 7.29 (特異点)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を開集合, $A \subseteq \Omega$ を有限集合とし, $f : \Omega \backslash A \to \mathbb{C}$ を正則関数とする. このとき A の元を f の特異点と言う.

定理 7.30. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を開集合, $a \in \Omega$ とし, $f : \Omega \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ を正則関数とする. このとき,

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant R\} \subseteq \Omega$$

を満たす任意の $R > 0$ に対し,

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} c_n (z-a)^n + \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{-n} (z-a)^{-n} \quad (\forall z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < R) \tag{7.31}$$

(右辺の無限和はそれぞれ収束するとする) を満たすような複素数列 $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ が唯一つ存在する. そして,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,R)} \frac{f(a)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (\forall n \in \mathbb{Z}) \tag{7.32}$$

(円周に沿った複素線積分の表記の定義 7.12 を参照) が成り立つ.

証明. まず (7.31) を満たすような $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ の一意性を示す. そのためには,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} d_n (z-a)^n + \sum_{n \in \mathbb{N}} d_{-n} (z-a)^{-n} = 0 \quad (\forall z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < R) \tag{7.33}$$

(左辺の無限和はそれぞれ収束する) を満たす $(d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ に対し, $d_n = 0$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$ が成り立つことを示せばよい. $\lim_{|z-a| \to +0} |z-a|^{-1} = \infty$ であり, $0 < |z-a| < R$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し $\sum_{n \in \mathbb{N}} d_{-n}(z-a)^{-n}$ は収束するので, 命題 4.27 の (2) より $(d_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ を係数とする冪級数の収束半径 (定義 4.26) は ∞ である. よって定理 4.30 より整関数

$$\varphi : \mathbb{C} \ni w \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} d_{-n} w^n \in \mathbb{C}$$

が定義できる. また $0 < |z-a| < R$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し $\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} d_n (z-a)^n$ は収束するので命題 4.27 の (2) より $(d_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ を係数とする冪級数の収束半径は R 以上である. よって定理 4.30 より,

$$B(a,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\} \ni z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} d_n (z-a)^n \in \mathbb{C}$$

は正則関数なので特に連続だから $R_0 \in (0,R)$ に対し,

$$M := \max_{|z-a| \leqslant R_0} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} d_n (z-a)^n \right| < \infty$$

が存在する. $|w| \geqslant R_0^{-1}$ を満たす任意の $w \in \mathbb{C}$ に対し $w = (z-a)^{-1}$ なる $z \in \mathbb{C}$ を取ると, $|z-a| \leqslant R_0$ だから (7.33) より,

$$|\varphi(w)| = |\varphi((z-a)^{-1})| = \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} d_{-n} (z-a)^{-n} \right| = \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} d_n (z-a)^n \right| \leqslant M$$

となる. よって,

$$|\varphi(w)| \leqslant M \quad (\forall w \in \mathbb{C} : |w| \geqslant R_0^{-1})$$

であるから φ は有界な整関数なので Liouville の定理 7.19 より $\varphi(w) = \varphi(0) = 0$ $(\forall w \in \mathbb{C})$ である. ゆえに,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} d_{-n} w^n = 0 \quad (\forall w \in \mathbb{C}), \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} d_n (z-a)^n = 0 \quad (\forall z \in B(a,R))$$

だから定理 4.30 より $d_n = 0$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$ が成り立つ.
次に (7.31) を満たす $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ の存在を示す. $0 < |w-a| < R$ を満たす任意の $w \in \mathbb{C}$ を取り固定する. $0 < r < |w-a| < R$ を満たす任意の r を取り, 2 つの閉路

$$c_1 : [0, 2\pi] \ni \theta \mapsto a + Re^{i\theta} \in \Omega\backslash\{a\},$$
$$c_2 : [0, 2\pi] \ni \theta \mapsto a + re^{-i\theta} \in \Omega\backslash\{a\}$$

に対しサイクル $c_1 + c_2$ を考える. このとき命題 7.11 より,

$$\mathrm{Ind}_{c_1+c_2}(z) = \mathrm{Ind}_{c_1}(z) + \mathrm{Ind}_{c_2}(z) = \begin{cases} 0 & (|z-a| < r) \\ 1 & (r < |z-a| < R) \\ 0 & (R < |z-a|) \end{cases}$$

が成り立つ. よって特に,

$$\mathrm{Ind}_{c_1+c_2}(w) = 1, \quad \mathrm{Ind}_{c_1+c_2}(z) = 0 \quad (\forall z \in \mathbb{C}\backslash(\Omega\backslash\{a\}))$$

であるから, Cauchy の積分公式 7.27 より,

$$\begin{aligned} f(w) = \mathrm{Ind}_{c_1+c_2}(w) f(w) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1+c_2} \frac{f(z)}{z-w} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,R)} \frac{f(z)}{z-w} dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{z-w} dz \end{aligned} \tag{7.34}$$

が成り立つ. ここで $r < |w-a| < R$ より一様収束で,

$$\frac{1}{z-w} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \quad (|z-a| = R),$$
$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n} \quad (|z-a| = r)$$

が成り立つので, (7.34) の右辺の第一項, 第二項の $2\pi i$ 倍はそれぞれ

$$\int_{\partial B(a,R)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{\partial B(a,R)} f(z) \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \int_{\partial B(a,R)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz (w-a)^n,$$
$$-\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{\partial B(a,r)} f(z) \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} dz = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}} dz (w-a)^{-n}$$

となる. よって,

$$f(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,R)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz (w-a)^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}} dz (w-a)^{-n} \tag{7.35}$$

を得る. さらに Cauchy の積分定理 7.28 より,

$$0 = \int_{c_1+c_2} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}} dz = \int_{\partial B(a,R)} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}} dz - \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}} dz$$

であるから,

$$\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}} dz = \int_{\partial B(a,R)} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}} dz.$$

よって (7.35) より,

$$f(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,R)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz (w-a)^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,R)} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}} dz (w-a)^{-n}$$

が成り立つ. これより,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,R)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

とおけば $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ が求める複素数列である. □

定義 7.31 (特異点周りの Laurant 展開, 主要部, 留数)**.** 定理 7.30 における (7.31) を f の特異点 a の周りの Laurant 展開と言う．そして，

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_{-n}(z-a)^{-n}$$

を f の a における主要部と言い，

$$\mathrm{Res}(f,a) := c_{-1}$$

を f の a における留数と言う．

注意 7.32. 定義 7.31 における主要部を与える正則関数

$$p:\mathbb{C}\backslash\{a\}\ni a\mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} c_{-n}(z-a)^{-n}\in\mathbb{C}$$

を考える．このとき a を通らない任意のサイクル c に対し，

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_{-n}(z-a)^{-n} \quad (z\in c^*)$$

は一様収束するので，

$$\int_c p(z)dz = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_{-n}\int_c (z-a)^{-n}dz$$

であり，2 以上の任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し，

$$\mathbb{C}\backslash\{a\}\ni z\mapsto (z-a)^{-n}\in\mathbb{C}$$

は，

$$\mathbb{C}\backslash\{a\}\ni z\mapsto \frac{1}{-n+1}(z-a)^{-n+1}\in\mathbb{C}$$

の複素導関数であるから，補題 7.5 より，

$$\int_c (z-a)^{-n}dz = 0 \quad (\forall n\in\mathbb{N}: n\geqslant 2)$$

である．よって，

$$\int_c p(z)dz = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_{-n}\int_c (z-a)^{-n}dz = c_{-1}\int_c \frac{dz}{z-a} = \mathrm{Res}(f,a)\mathrm{Ind}_c(a)$$

となる．

定理 7.33 (留数定理)**.** $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ を開集合，$A\subseteq\Omega$ を有限集合とし，$f:\Omega\backslash A\to\mathbb{C}$ を正則関数とする．そして c を跡 c^* が $\Omega\backslash A$ に含まれるサイクルとし，

$$\mathrm{Ind}_c(w) = 0 \quad (\forall w\in\mathbb{C}\backslash\Omega)$$

を満たすものとする．このとき，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)dz = \sum_{a\in A}\mathrm{Res}(f,a)\mathrm{Ind}_c(a)$$

が成り立つ．

証明. $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$, $a_i\neq a_j$ $(i\neq j)$ とする．f の特異点 a_j における主要部を $p_j:\mathbb{C}\backslash\{a_j\}\to\mathbb{C}$ とおくと，

$$\Omega\backslash A\ni z\mapsto f(z)-\sum_{j=1}^n p_j(z)\in\mathbb{C}$$

は Ω 上の正則関数に拡張できる．よって Cauchy の積分定理 7.28 と注意 7.32 より，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)dz = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i}\int_c p_j(z)dz = \sum_{j=1}^n \mathrm{Res}(f,a_j)\mathrm{Ind}_c(a_j) = \sum_{a\in A}\mathrm{Res}(f,a)\mathrm{Ind}_c(a)$$

が成り立つ． □

7.5 複素 Banach 空間値正則関数の特徴付け

命題 7.34. c を $\mathbb{C}$ 内の 1 次チェイン (定義 6.136), B を $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間とし, c の跡 c^* 上で定義された B 値連続関数 $f : c^* \to B$ を考える. このとき,

$$\varphi\left(\int_c f(z)dz\right) = \int_c \varphi(f(z))dz \quad (\forall \varphi \in B^*) \tag{7.36}$$

を満たす

$$\int_c f(z)dz \in B$$

が唯一つ存在し, それは c の標準表示 (定義 6.136)

$$c = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j c_j, \quad c_j : I_j \to \mathbb{C} \quad (j = 1, \cdots, k)$$

と B 値連続関数の Riemann 積分

$$\int_{I_j} f(c_j(t))c_j'(t)dt \in B \quad (j = 1, \cdots, k)$$

に対し,

$$\int_c f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int_{I_j} f(c_j(t))c_j'(t)dt \tag{7.37}$$

と表される.

証明. 一意性は

$$\iota : B \to B^{**}, \quad \iota(b)(\varphi) := \varphi(b) \quad (\forall b \in B, \forall \varphi \in B^*)$$

が単射であること (定理 3.73) による. 存在は有界閉区間上の Banach 空間値連続関数

$$I_j \ni t \mapsto f(c_j(t))c_j'(t) \in B \quad (j = 1, \cdots, k)$$

の Riemann 積分 (定義 5.203)

$$\int_{I_j} f(c_j(t))c_j'(t)dt \in B \quad (j = 1, \cdots, k)$$

に対し,

$$\begin{aligned}\int_c \varphi(f(z))dz &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int_{I_j} \varphi(f(c_j(t))c_j'(t))dt = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \varphi\left(\int_{I_j} f(c_j(t))c_j'(t)dt\right) \\ &= \varphi\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \varphi\left(\int_{I_j} f(c_j(t))c_j'(t)dt\right)\right) \quad (\forall \varphi \in B^*)\end{aligned}$$

となることによる. □

定義 7.35 (複素 Banach 空間値連続関数の複素線積分)**.** $\mathbb{C}$ 内の 1 次チェイン c の跡 c^* 上で定義され, $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間 B に値を取る連続関数 $f : c^* \to B$ に対し, (7.36) を満たす

$$\int_c f(z)dz \in B$$

を f の c 上の複素線積分と言う.

命題 7.36. c を $\mathbb{C}$ 内の 1 次チェイン, B を $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間とし, c の跡 c^* 上で定義された B 値連続関数全体に各点ごとの演算と sup ノルムを入れた Banach 空間を $C(c^*, B)$ とおく[*88]. このとき,

$$C(c^*, B) \ni f \mapsto \int_c f(z)dz \in B \tag{7.38}$$

は有界線型作用素であり, その作用素ノルムは c の長さ (定義 7.1) $l(c)$ 以下である.

証明. 命題 7.34 より c の標準表示 (定義 6.136)

$$c = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j c_j, \quad c_j : I_j \to \mathbb{C} \ \ (j = 1, \cdots, k)$$

に対し,

$$\int_c f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int_{I_j} f(c_j(t))c_j'(t)dt \ \ (\forall f \in C(c^*, B))$$

であるから (7.38) は線型作用素であり,

$$\begin{aligned}\left\|\int_c f(z)dz\right\| &\leqslant \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j| \left\|\int_{I_j} f(c_j(t))c_j'(t)dt\right\| \leqslant \|f\| \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j| \int_{I_j} |c_j'(t)|dt \\ &= \|f\| l(c) \ \ (\forall f \in C(c^*, B))\end{aligned}$$

である. よって (7.38) は有界線型作用素であり, その作用素ノルムは $l(c)$ 以下である. □

定理 7.37 (Banach 空間値正則関数の特徴付け)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を開集合, B を $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間とする. このとき連続関数 $f : \Omega \to B$ に対し次は互いに同値である.

(1) f は正則関数 (定義 4.23) である.
(2) 任意の $\varphi \in B^*$ に対し $\Omega \ni z \mapsto \varphi(f(z)) \in \mathbb{C}$ は正則関数である.
(3) 跡が Ω に含まれるサイクル (定義 6.140) c で $\mathrm{Ind}_c(w) = 0$ $(\forall w \in \mathbb{C}\backslash\Omega)$ を満たすものに対し,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-w}dz = \mathrm{Ind}_c(w)f(w) \ \ (\forall w \in \Omega\backslash c^*)$$

が成り立つ.
(4) $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant R\} \subseteq \Omega$ なる任意の $a \in \Omega$ と $R \in (0, \infty)$ に対し,

$$f(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,R)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz(w-a)^n \ \ (\forall w \in \mathbb{C} : |w-a| < R)$$

が成り立つ.
(5) f は何回でも複素微分可能である.

証明. (1) ⇒ (2), (5) ⇒ (1) は自明である. また (4) ⇒ (5) は定理 4.30 による.
(2) ⇒ (3) を示す. (2) が成り立つとすると, 任意の $w \in \Omega\backslash c^*$ に対し Cauchy の積分公式 7.27 より,

$$\mathrm{Ind}_c(w)\varphi(f(w)) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\varphi(f(z))}{z-w}dz = \varphi\left(\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-w}dz\right) \ \ (\forall \varphi \in B^*)$$

が成り立つ. よって,

$$\iota : B \to B^{**}, \quad \iota(b)(\varphi) = \varphi(b) \ \ (\forall b \in B, \forall \varphi \in B^*)$$

が単射であること (定理 3.73) から,

$$\mathrm{Ind}_c(w)f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-w}dz$$

[*88] 完備性は定理 1.127 と定理 1.125 による.

を得る. よって (3) が成り立つ.
(3) ⇒ (4) を示す. (3) が成り立つとすると, $|w-a|<R$ なる任意の $w \in \mathbb{C}$ に対し命題 7.11 より,

$$f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,R)}\frac{f(z)}{z-w}dz$$

となる. ここで,

$$\frac{1}{z-w}=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \quad (\forall z\in\mathbb{C}:|z-a|=R)$$

は一様収束するから, 命題 7.36 より,

$$f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,R)}\frac{f(z)}{z-w}dz=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,R)}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz(w-a)^n$$

となる. よって (4) が成り立つ. □

注意 7.38. 定理 7.37 を用いれば, Liouville の定理 7.19, 一致の原理 7.24, Laurant 展開 (定理 7.30), 留数定理 7.33 などは Banach 空間値正則関数に対しても成り立つことが分かる. 証明は全く同様である.

8 超関数, Fourier 変換, Sobolev 空間

8.1 多重指数, Leibniz ルール

定義 8.1 (多重指数)**.** $N \in \mathbb{N}$ とする. $\mathbb{Z}_+^N$ の元 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ を N 次の多重指数と言い,

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$$

を多重指数 α の長さと言う. $\mathbb{R}^N$ の開集合 Ω 上で定義された $C^{|\alpha|}$ 級関数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_N^{\alpha_N} f$$

(定理 4.11 より右辺の偏微分は順序によらないことに注意) と定義する. また任意の $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{C}^N$ に対し,

$$x^\alpha := x_1^\alpha \cdots x_N^\alpha \in \mathbb{C}$$

と定義し, 任意の $\mathbb{C}^N$ 値関数 $f = (f_1, \cdots, f_N) : X \ni p \mapsto (f_1(p), \cdots, f_N(p)) \in \mathbb{C}^N$ に対し,

$$f^\alpha := f_1^{\alpha_1} \cdots f_N^{\alpha_N} : X \ni p \mapsto f_1(p)^{\alpha_1} \cdots f_N(p)^{\alpha_N} \in \mathbb{C}$$

と定義する.

定義 8.2 (多重指数の順序, 和, 差, 多重二項係数)**.** N 次の多重指数全体 (定義 8.1) における順序を,

$$\beta \leqslant \alpha \quad \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \quad \beta_1 \leqslant \alpha_1, \cdots, \beta_N \leqslant \alpha_N$$

として定義する. 任意の N 次の多重指数 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し α, β の和を,

$$\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_N + \beta_N)$$

と定義する. また N 次の多重指数 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ で $\beta \leqslant \alpha$ なるものに対し α, β の差を,

$$\alpha - \beta := (\alpha_1 - \beta_1, \cdots, \alpha_N - \beta_N)$$

と定義する. さらに N 次の多重指数 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ で $\beta \leqslant \alpha$ なるものに対し,

$$\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_N}{\beta_N} = \frac{\alpha_1!}{\beta_1!(\alpha_1 - \beta_1)!} \cdots \frac{\alpha_N!}{\beta_N!(\alpha_N - \beta_N)!}$$

と定義する. これを多重二項係数と言う.

命題 8.3 (Leibniz ルール)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ とし, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ を長さが m 以下の多重指数とする. このとき任意の $f, g \in C^m(\Omega)$ に対し,

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha - \beta} g$$

が成り立つ.

証明.　(1) $N = 1$ の場合. $n \leqslant m$ を満たす任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

が成り立つことを n に関する帰納法で示す. $n = 0, 1$ の場合は自明である. ある $n \leqslant m - 1$ まで成り立つと仮定する. このとき,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

であり, $1 \leqslant k \leqslant n$ に対し,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} = \frac{n!(n+1-k+k)}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(k+1)} g^{(n-k)}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} \\
&= fg^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= fg^{(n+1)} g + f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= fg^{(n+1)} g + f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.
\end{aligned}$$

よって $n+1$ の場合も成り立つ.

(2) 一般の場合. (1) より任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し,

$$\partial_j^{\alpha_j}(fg) = \sum_{\beta_j \leqslant \alpha_j} \binom{\alpha_j}{\beta_j} (\partial_j^{\beta_j} f)(\partial_j^{\alpha_j - \beta_j} g)$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha(fg) &= \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_N^{\alpha_N}(fg) = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_{N-1}^{\alpha_{N-1}} \sum_{\beta_N \leqslant \alpha_N} \binom{\alpha_N}{\beta_N} (\partial_N^{\beta_N} f)(\partial_N^{\alpha_N - \beta_N} g) \\
&= \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_{N-2}^{\alpha_{N-2}} \sum_{\beta_{N-1} \leqslant \alpha_{N-1}} \sum_{\beta_N \leqslant \alpha_N} \binom{\alpha_{N-1}}{\beta_{N-1}} \binom{\alpha_N}{\beta_N} (\partial_{N-1}^{\beta_{N-1}} \partial_N^{\beta_N} f)(\partial_{N-1}^{\alpha_{N-1} - \beta_{N-1}} \partial_N^{\alpha_N - \beta_N} g) \\
&= \cdots \\
&= \sum_{\beta_1 \leqslant \alpha_1} \cdots \sum_{\beta_N \leqslant \alpha_N} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_N}{\beta_N} (\partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_N^{\beta_N} f)(\partial_1^{\alpha_1 - \beta_1} \cdots \partial_N^{\alpha_N - \beta_N} g) \\
&= \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha - \beta} g
\end{aligned}$$

となる.

□

命題 8.4 (多重二項定理)**.** 任意の $x, y \in \mathbb{C}^N$ と任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha - \beta}$$

が成り立つ.

証明. 各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し二項定理より,

$$(x_j + y_j)^{\alpha_j} = \sum_{\beta_j \leqslant \alpha_j} \binom{\alpha_j}{\beta_j} x_j^{\beta_j} y_j^{\alpha_j - \beta_j}$$

であるから,

$$\begin{aligned}(x+y)^\alpha &= (x_1+y_1)^{\alpha_1}\cdots(x_N+y_N)^{\alpha_N}\\ &= \sum_{\beta_1\leqslant\alpha_1}\cdots\sum_{\beta_N\leqslant\alpha_N}\binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_N}{\beta_N}(x_1^{\beta_1}\cdots x_N^{\beta_N})(y_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdots y_N^{\alpha_N-\beta_N})\\ &= \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}x^\beta y^{\alpha-\beta}\end{aligned}$$

となる. □

8.2 Fréchet 空間 $C^\infty(\Omega), D_K(\Omega)$

定義 8.5 (距離空間の部分集合間の距離). (X,d) を距離空間とする. 任意の空でない $E,F\subseteq X$ に対し, E,F の距離を,

$$d(E,F) := \inf\{d(x,y) : x\in E, y\in F\}$$

として定義する. また任意の $x\in X$ に対し x と E の距離を,

$$d(x,E) := d(\{x\},E) = \inf\{d(x,y) : y\in E\}$$

として定義する.

命題 8.6. 距離空間 (X,d) の部分集合間の距離に関して次が成り立つ.

(1) 任意の $x\in X$ と空でない任意の $E\subseteq X$ に対し, $d(x,E)=0 \Leftrightarrow x\in\overline{E}$.
(2) 任意の空でない $E\subseteq X$ に対し $B:=\{x\in X : d(x,E)<r\}$ は開集合, $C:=\{x\in X : d(x,E)\leqslant r\}$ は閉集合である.
(3) 任意の空でない $E,F\subseteq X$ に対し $d(E,F)=d(\overline{E},\overline{F})$.
(4) $\varnothing\neq K\subseteq\Omega\subseteq X$ とし, K,Ω をそれぞれ X のコンパクト集合, 開集合とすると, $d(K,X\backslash\Omega)>0$.

証明. (1) 定義 8.5 より,

$$d(x,E)=0 \quad\Leftrightarrow\quad d(x,E)<\varepsilon \ \ (\forall\varepsilon\in(0,\infty)) \quad\Leftrightarrow\quad B(x,\varepsilon)\cap E\neq\varnothing \ \ (\forall\varepsilon\in(0,\infty))$$

であり, 命題 1.58 より,

$$B(x,\varepsilon)\cap E\neq\varnothing \ \ (\forall\varepsilon\in(0,\infty)) \quad\Leftrightarrow\quad x\in\overline{E}$$

であるから, $d(x,E)=0\Leftrightarrow x\in\overline{E}$ である.

(2) 任意の $x\in B$ を取り固定し $r':=r-d(x,E)\in(0,\infty)$ とおく. $d(x',x)<r'$ を満たす任意の $x'\in X$ に対し,

$$d(x',y)\leqslant d(x',x)+d(x,y) \ \ (\forall y\in E)$$

より $d(x',E)\leqslant d(x',x)+d(x,E)$ であるから,

$$d(x',E)\leqslant d(x',x)+d(x,E)<r'+d(x,E)=r$$

である. よって,

$$B(x,r')=\{x'\in X : d(x',x)<r'\}\subseteq B$$

だから B は X の開集合である.
任意の $x\in X\backslash C$ を取り固定し $r':=d(x,E)-r\in(0,\infty)$ とおく. $d(x',x)<r'$ を満たす任意の $x'\in X$ に対し,

$$d(x',y)\geqslant d(x,y)-d(x,x') \ \ (\forall y\in E)$$

より $d(x',E)\geqslant d(x,E)-d(x,x')$ であるから,

$$d(x',E)\geqslant d(x,E)-d(x,x')>d(x,E)-r'=r$$

である. よって,

$$B(x,r') = \{x' \in X : d(x',x) < r'\} \subseteq X \backslash C$$

だから $X\backslash C$ は X の開集合, 従って C は X の閉集合である.

(3)

$$d(E,F) = \inf\{d(x,y) : x \in E, y \in F\} \geqslant \inf\{d(x,y) : x \in \overline{E}, y \in \overline{E}\} = d(\overline{E},\overline{F})$$

である. 逆の不等式を示す. 任意の $x \in \overline{E}, y \in \overline{F}$ に対し x に収束する E の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と y に収束する F の点列 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取れば,

$$|d(x,y) - d(x_n,y_n)| \leqslant d(x,x_n) + d(y,y_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

なので,

$$d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \geqslant d(E,F)$$

である. よって $d(\overline{E},\overline{F}) \geqslant d(E,F)$ である.

(4)

$$\Omega_n := \left\{x \in X : d(x, X\backslash\Omega) > \frac{1}{n}\right\} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおけば (2) より各 Ω_n は開集合であり, (1) より,

$$K \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$$

である. よって K のコンパクト性より十分大きい $n_0 \in \mathbb{N}$ を取れば $K \subseteq \Omega_{n_0}$ となり, $d(K, X\backslash\Omega) \geqslant \frac{1}{n_0} > 0$ である.

□

命題 8.7. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を空でない開集合とする. このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\Omega_n := \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| < n,\ d\left(x, \mathbb{R}^N\backslash\Omega\right) > \frac{1}{n}\right\}$$

は $\mathbb{R}^N$ の開集合であり, $\overline{\Omega_n} \subseteq \mathbb{R}^N$ はコンパクトである. そして

$$\overline{\Omega_n} \subseteq \Omega_{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \quad \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\Omega_n}$$

が成り立つ.

証明. 命題 8.6 の (2) より各 $n \in \mathbb{N}$ に対し Ω_n は開集合である. また Ω_n は有界なので $\overline{\Omega_n} \subseteq \mathbb{R}^N$ はコンパクトである. そして命題 8.6 の (2) より

$$\left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant n, d(x, \mathbb{R}^N\backslash\Omega) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$$

は閉集合であり, これは Ω_n を含み Ω_{n+1} に含まれるので,

$$\overline{\Omega_n} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant n, d(x, \mathbb{R}^N\backslash\Omega) \geqslant \frac{1}{n}\right\} \subseteq \Omega_{n+1}$$

が成り立つ. 任意の $n \in \mathbb{N}$, 任意の $x \in \overline{\Omega_n}$ に対し $d(x, \mathbb{R}^N\backslash\Omega) \geqslant \frac{1}{n} > 0$ なので $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\Omega_n} \subseteq \Omega$ である. そして任意の $x \in \Omega$ に対し命題 8.6 の (1) より $d\left(x, \mathbb{R}^N\backslash\Omega\right) > 0$ であるから十分大きい $n \in \mathbb{N}$ を取れば $x \in \Omega_n$ となる. よって $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\Omega_n}$ が成り立つ.

□

定義 8.8 (コンパクト一様収束)**.** X を位相空間, (Y,d) を距離空間とし, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $X \to Y$ の写像からなるネットとする. $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $f : X \to Y$ にコンパクト一様収束するとは, X の任意のコンパクト集合 K と任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在し,

$$d(f_\lambda(x), f(x)) < \varepsilon \quad (\forall x \in K, \forall \lambda \geqslant \lambda_0)$$

が成り立つことを言う. すなわち $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $f : X \to Y$ にコンパクト一様収束するとは X の任意のコンパクト集合 K に対し $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が K 上で f に一様収束することである.

命題 8.9. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を命題 8.7 における開集合の単調増加列とする. そして $\mathbb{C}$ 上の線型空間 $C^\infty(\Omega)$ 上のセミノルムの可算分離族 (定義 3.56) $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を,

$$p_n : C^\infty(\Omega) \ni f \mapsto \max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{x\in\overline{\Omega_n}} |\partial^\alpha f(x)| \in [0,\infty) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

として定義する. このとき $C^\infty(\Omega)$ のネット $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $f \in C^\infty(\Omega)$ に対し次は互いに同値である.

(1) $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が誘導するセミノルム位相 (定義 3.57) に関して $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は f に収束する.
(2) 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $(\partial^\alpha f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $\partial^\alpha f$ にコンパクト一様収束 (定義 8.8) する.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. 任意のコンパクト集合 $K \subseteq \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ と任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し十分大きい $n \in \mathbb{N}$ を取れば,

$$K \subseteq \Omega_n, \quad |\alpha| \leqslant n$$

となるので,

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha f_\lambda(x) - \partial^\alpha f(x)| \leqslant p_n(f_\lambda - f) \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

が成り立つ. (1) が成り立つことから $(p_n(f_\lambda - f))_{\lambda\in\Lambda}$ は 0 に収束するので K 上で $(\partial^\alpha f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $\partial^\alpha f$ に一様収束する. コンパクト集合 $K \subseteq \Omega$ と $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ は任意なので (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\overline{\Omega_n} \subseteq \Omega$ はコンパクトである (命題 8.7 を参照) から任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $(\partial^\alpha f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $\partial^\alpha f$ に $\overline{\Omega_n}$ 上で一様収束する. よって

$$p_n(f_\lambda - f) = \max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{x\in\overline{\Omega_n}} |\partial^\alpha f_\lambda(x) - \partial^\alpha f(x)| \to 0$$

が成り立つから命題 3.59 より $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が誘導するセミノルム位相で $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は f に収束する. □

定理 8.10. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とし, 命題 8.9 における $C^\infty(\Omega)$ 上のセミノルムの可算分離族 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を考える. このとき $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が定めるセミノルム位相により $C^\infty(\Omega)$ は Fréchet 空間 (定義 3.86) である.

証明. $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が定めるセミノルム位相に関する Cauchy 列 (定義 3.85) とする. このとき任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ と任意のコンパクト集合 $K \subseteq \Omega$ に対し,

$$K \subseteq \Omega_n, \quad |\alpha| \leqslant n$$

なる $n \in \mathbb{N}$ を取れば,

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha f_i(x) - \partial^\alpha f_j(x)| \leqslant p_n(f_i - f_j) \to 0 \quad (i,j \to \infty)$$

となる. K 上の連続関数全体 $C(K)$ は sup ノルムで Banach 空間であるから $(\partial^\alpha f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は K 上で一様収束する. よって任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $f_\alpha \in C(\Omega)$ が定まり, $(\partial^\alpha f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は f_α にコンパクト一様収束する.
今, $f := f_0 \in C(\Omega)$ とおき, ある $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し

$$f \in C^n(\Omega), \quad \partial^\alpha f = f_\alpha \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant n) \tag{8.1}$$

が成り立つと仮定する. そして $|\alpha| = n$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ と任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ を取り,

$$\beta := \alpha + (0, \cdots, 0, \overset{j\ 番目}{1}, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{Z}_+^N$$

とおく. このとき任意の $x \in \Omega$ と絶対値が十分小さい $h \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ に対し微積分学の基本定理 5.206 より,

$$\frac{\partial^\alpha f_i(x + he_j) - \partial^\alpha f_i(x)}{h} = \int_0^1 \partial^\beta f_i(x + the_j) dt$$

であり, コンパクト集合 $\{x+the_j \in \Omega : t \in [0,1]\}$ 上で $(\partial^\beta f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は f_β に, $(\partial^\alpha f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $f_\alpha = \partial^\alpha f$ に一様収束するので,

$$\frac{\partial^\alpha f(x+he_j) - \partial^\alpha f(x)}{h} = \int_0^1 f_\beta(x+the_j)dt$$

となる. よって $h \to 0$ とすれば Lebesgue 優収束定理 5.59 より $\partial_j \partial^\alpha f(x) = f_\beta(x)$ を得る. $x \in \Omega$ は任意なので $\partial_j\partial^\alpha f = f_\beta$ であり, α と j の任意性より,

$$f \in C^{n+1}(\Omega), \quad \partial^\beta f = f_\beta \quad (\forall \beta \in \mathbb{Z}_+^N : |\beta| = n+1)$$

が成り立つ. よって帰納法により (8.1) は任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して成り立つので,

$$f \in C^\infty(\Omega), \quad \partial^\alpha f = f_\alpha \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N)$$

が成り立つ. 前段で述べたことと合わせて任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $(\partial^\alpha f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $\partial^\alpha f(= f_\alpha)$ にコンパクト一様収束する. よって命題 8.9 より $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が誘導するセミノルム位相に関して $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は f に収束する. これより $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が誘導するセミノルム位相により $C^\infty(\Omega)$ は Fréchet 空間である. □

定義 8.11 (Fréchet 空間 $C^\infty(\Omega)$)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とする. 定理 8.10 より $\mathbb{C}$ 上の線型空間 $C^\infty(\Omega)$ に命題 8.9 におけるセミノルム位相を入れたものは Fréchet 空間である. 以後, Fréchet 空間 $C^\infty(\Omega)$ と言うとき, それはこのセミノルム位相による Fréchet 空間のこととする.

命題 8.12. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とする. Fréchet 空間 $C^\infty(\Omega)$ において次が成り立つ.

(1) 任意の多重指数 $\beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$C^\infty(\Omega) \ni f \mapsto \partial^\beta f \in C^\infty(\Omega) \tag{8.2}$$

は連続線型写像である.

(2) 任意の $g \in C^\infty(\Omega)$ に対し,

$$C^\infty(\Omega) \ni f \mapsto fg \in C^\infty(\Omega) \tag{8.3}$$

は連続線型写像である.

証明. (1) $C^\infty(\Omega)$ の列 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が $f \in C^\infty(\Omega)$ に収束するならば, 命題 8.9 より任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $(\partial^\alpha\partial^\beta f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $\partial^\alpha\partial^\beta f$ にコンパクト一様収束する. よって命題 8.9 より $(\partial^\beta f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は f_i に収束するので (8.2) は連続である*89. 線型写像であることは明らかである.

(2) $C^\infty(\Omega)$ の列 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が $f \in C^\infty(\Omega)$ に収束するとする. 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し Leibniz ルール 8.3 より,

$$\partial^\alpha(f_i g) - \partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta(f_i - f)\partial^{\alpha-\beta} g$$

であり, 任意のコンパクト集合 $K \subseteq \Omega$ に対し K 上の連続関数の sup ノルムを $\|\cdot\|_K$ とおけば,

$$\|\partial^\alpha(f_i g) - \partial^\alpha(fg)\|_K \leqslant \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^\beta(f_i - f)\|_K \|\partial^{\alpha-\beta} g\|_K$$

となる. 命題 8.9 より,

$$\lim_{i\to\infty} \|\partial^\beta(f_i - f)\|_K = 0 \quad (\forall \beta \in \mathbb{Z}_+^N : \beta \leqslant \alpha)$$

であるから,

$$\lim_{i\to\infty} \|\partial^\alpha(f_i g) - \partial^\alpha(fg)\|_K = 0$$

が成り立つ. よって命題 8.9 より $(f_i g)_{i\in\mathbb{N}}$ は fg に収束するので (8.3) は連続である. □

*89 連続性の点列による特徴付け (命題 1.60) を参照.

命題 8.13. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $K \subseteq \Omega$ をコンパクト集合とする.

$$D_K(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K\}$$

とおくと, $D_K(\Omega)$ は Fréchet 空間 $C^\infty(\Omega)$ の閉部分空間である.

証明. (線型) 部分空間であることは明らかである. 任意の $\varphi \in \overline{D_K(\Omega)} \subseteq C^\infty(\Omega)$ に対し命題 1.58 より $D_K(\Omega)$ の点列 $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ で $\lim_{i\to\infty} \varphi_i = \varphi$ なるものが取れる. このとき,

$$\varphi(x) = \lim_{i\to\infty} \varphi_i(x) = 0 \quad (\forall x \in \Omega \backslash K)$$

であるから,

$$\mathrm{supp}(\varphi) = \overline{(\varphi \neq 0)} \subseteq K$$

である. よって $\varphi \in D_K(\Omega)$ だから $D_K(\Omega) = \overline{D_K(\Omega)}$ であるので $D_K(\Omega)$ は閉である. □

定義 8.14 (Fréchet 空間 $D_K(\Omega)$)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $K \subseteq \Omega$ をコンパクト集合とする. このとき命題 8.13 より,

$$D_K(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K\}$$

は Fréchet 空間 $C^\infty(\Omega)$ の閉部分空間である. よって命題 3.101 より相対位相により $D_K(\Omega)$ 自体 Fréchet 空間である. 以後, Fréchet 空間 $D_K(\Omega)$ と言うとき, それは Fréchet 空間 $C^\infty(\Omega)$ の閉部分空間としての Fréchet 空間のこととする.

注意 8.15. $D_K(\Omega)$ の列 $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が $\varphi \in D_K(\Omega)$ に収束することは命題 8.9 より任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $(\partial^\alpha \varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が $\partial^\alpha \varphi$ に "一様収束" することと同値である.

8.3 超関数空間 $D'(\Omega)$

定義 8.16 (テスト関数空間 $D(\Omega)$)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とする. 超関数論の文脈では台がコンパクトな C^∞ 級関数全体がなす $\mathbb{C}$ 上の線型空間を $C_c^\infty(\Omega)$ の代わりに $D(\Omega)$ と表し, $D(\Omega)$ の元のことを Ω 上のテスト関数, $D(\Omega)$ を Ω 上のテスト関数空間と呼ぶ.

注意 8.17. 任意のコンパクト集合 $K \subseteq \Omega$ に対し Fréchet 空間 (定義 8.14) $D_K(\Omega)$ を考えると Ω 上のテスト関数空間 $D(\Omega)$ は,

$$D(\Omega) = \bigcup_{K \subseteq \Omega \text{ はコンパクト}} D_K(\Omega)$$

と表される.

定義 8.18 (超関数空間 $D'(\Omega)$)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とする. Ω 上のテスト関数空間 $D(\Omega)$ 上で定義された線型汎関数

$$u : D(\Omega) \to \mathbb{C}$$

が Ω 上の超関数であるとは, 任意のコンパクト集合 $K \subseteq \Omega$ に対し u の Fréchet 空間 (定義 8.14) $D_K(\Omega)$ 上への制限

$$D_K(\Omega) \ni \varphi \mapsto u(\varphi) \in \mathbb{C}$$

が連続であることを言う. Ω 上の超関数全体を $D'(\Omega)$ と表す. $D'(\Omega)$ は

$$(u_1 + u_2)(\varphi) = u_1(\varphi) + u_2(\varphi), \quad (au)(\varphi) = au(\varphi) \quad (\forall u, u_1, u_2 \in D'(\Omega), \forall a \in \mathbb{C}, \forall \varphi \in D(\Omega))$$

によって $\mathbb{C}$ 上の線型空間をなす. 任意のテスト関数 $\varphi \in D(\Omega)$ に対し $D'(\Omega)$ 上の線型汎関数

$$\iota_\varphi : D'(\Omega) \ni u \mapsto u(\varphi) \in \mathbb{C}$$

を考え, 線型汎関数の分離族 (定義 3.61) $\{\iota_\varphi : \varphi \in D(\Omega)\}$ が誘導する汎弱位相 (定義 3.62) を $D'(\Omega)$ に入れる. こうして定義される位相線型空間 $D'(\Omega)$ を Ω 上の超関数空間と言う.

注意 8.19. 汎弱位相の基本性質 (命題 3.63) より, 超関数空間 $D'(\Omega)$ のネット $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $u \in D'(\Omega)$ に収束することは,

$$u_\lambda(\varphi) \to u(\varphi) \quad (\forall \varphi \in D(\Omega))$$

が成り立つことと同値である.

定義 8.20 (局所 L^p 空間 $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とする. Ω 上の Lebesgue 測度に関して a.e. で等しい Borel 関数類全体 (定義 5.125) を $L(\Omega)$ と表し, 任意の $p \in [1, \infty]$ に対し $L^p(\Omega)$ を Ω 上の Lebesgue 測度に関する L^p 空間とする. このとき,

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{[f] \in L(\Omega) : \text{任意のコンパクト集合 } K \subseteq \Omega \text{ に対し } [f\chi_K] \in L^p(\Omega)\}$$

を局所 L^p 空間と言う.

注意 8.21 ($L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$)**.** 任意の $p \in [1, \infty]$ に対し p の共役指数 (定義 5.118) を q とおく. 任意のコンパクト集合 $K \subseteq \Omega$ に対し $[\chi_K] \in L^q(\Omega)$ であるから, 任意の $[f] \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に対し Hölder の不等式 5.130 より,

$$[f\chi_K] = [f\chi_K][\chi_K] \in L^1(\Omega)$$

が成り立つ. よって

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \quad (\forall p \in [1, \infty])$$

である.

注意 8.22 ($C(\Omega) \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$)**.** 連続関数 $f \in C(\Omega)$ に対し f はコンパクト集合上で有界なので

$$[f] \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \quad (\forall p \in [1, \infty])$$

である. また Lebesgue 測度は空でない開集合に対して正の測度を与えるので, 任意の $f \in C(\Omega)$ に対し $[f] = 0$ (つまり f は Lebesgue 測度に関して a.e. で 0) は $f(x) = 0$ $(\forall x \in \Omega)$ を意味する. よって

$$C(\Omega) \ni f \mapsto [f] \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \quad (\forall p \in [1, \infty])$$

は単射である. 以後, 特に断らない限り, 連続関数 $f \in C(\Omega)$ に対しては f と $[f]$ (Lebesgue 測度に関して f と a.e. で等しい関数類) は区別しない.

定理 8.23 ($L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ の $D'(\Omega)$ への埋め込み)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とする. このとき任意の $[f] \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に対し,

$$u_{[f]} : D(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \in \mathbb{C} \tag{8.4}$$

は $D'(\Omega)$ に属する. そして,

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \ni [f] \mapsto u_{[f]} \in D'(\Omega) \tag{8.5}$$

は単射線型写像である.

証明. 任意の $[f] \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に対し (8.4) は明らかに $D(\Omega)$ 上の線型汎関数である. (8.4) が $D'(\Omega)$ に属することを示すには定義 8.18 より任意のコンパクト集合 $K \subseteq \Omega$ を取り (8.4) の Fréchet 空間 $D_K(\Omega)$ 上への制限

$$D_K(\Omega) \ni \varphi \mapsto u_{[f]}(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \in \mathbb{C} \tag{8.6}$$

が連続であることを示せばよい. Fréchet 空間 $D_K(\Omega)$ の列 $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が $\varphi \in D_K(\Omega)$ に収束するとする. このとき注意 8.15 より $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は φ に一様収束するので,

$$|u_{[f]}(\varphi_i) - u_{[f]}(\varphi)| = |u_{[f]}(\varphi_i - \varphi)| = \left|\int_K f(x)(\varphi_i(x) - \varphi(x))dx\right| \leqslant \int_K |f(x)|dx \|\varphi_i - \varphi\| \to 0$$

となる. よって (8.6) は連続である.[*90] ゆえに (8.4) は $D'(\Omega)$ に属する.
(8.5) が線型写像であることは明らかである. 単射であることを示す. $[f] \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ が $u_{[f]} = 0$ を満たすとして $[f] = 0$

[*90] Fréchet 空間が第一可算であること (定理 3.88 と命題 1.107) と連続性の点列による特徴付け (命題 1.60) による.

が成り立つことを示せばよい．命題 8.7 における $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考えると任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $\overline{\Omega_n}$ は Ω のコンパクト集合であるから f の Ω_n 上への制限 $f|_{\Omega_n}$ は可積分である．よって定理 6.88 の (4) より,

$$\|f|_{\Omega_n}\|_1=\sup\left\{\left|\int_{\Omega}f(x)\varphi(x)dx\right|:\varphi\in D(\Omega_n),\|\varphi\|\leqslant 1\right\}=\sup\{|u_{[f]}(\varphi)|:\varphi\in D(\Omega_n),\|\varphi\|\leqslant 1\}=0$$

が成り立つ．$(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加列であり $\Omega=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n$ であるから単調収束定理より,

$$\|f\|_1=\int_{\Omega}|f(x)|dx=\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\Omega_n}|f(x)|dx=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f|_{\Omega_n}\|_1=0$$

が成り立つ．よって (8.5) は単射である． □

定義 8.24 ($L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\subseteq D'(\Omega)$)**.** $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ を開集合とする．定理 8.23 より任意の $[f]\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に対し,

$$u_{[f]}:D(\Omega)\ni\varphi\mapsto\int_{\Omega}f(x)\varphi(x)dx\in\mathbb{C}$$

とおくと $u_{[f]}\in D'(\Omega)$ であり,

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\ni[f]\mapsto u_{[f]}\in D'(\Omega)$$

は単射線型写像である．そこで以後, しばしば $[f]\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ と $u_{[f]}\in D'(\Omega)$ を同一視し, $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\subseteq D'(\Omega)$ とみなす．

命題 8.25. $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ を開集合とし, $f,\partial_j f\in C(\Omega)$ とする．このとき,

$$\int_{\Omega}\partial_j f(x)\varphi(x)dx=-\int_{\Omega}f(x)\partial_j\varphi(x)dx\ \ (\forall\varphi\in D(\Omega))$$

が成り立つ．

証明. $g:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ を,

$$g(x):=\begin{cases}f(x)\varphi(x) & (x\in\Omega)\\ 0 & (x\in\mathbb{R}^N\backslash\Omega)\end{cases}$$

とおく．このとき,

$$\mathbb{R}^N=\Omega\cup(\mathbb{R}^N\backslash\operatorname{supp}(\varphi))$$

であり, g は開集合 $\Omega,\mathbb{R}^N\backslash\operatorname{supp}(\varphi)$ のそれぞれの上で第 j 座標に関する連続な偏導関数を持つので, g は $\mathbb{R}^N$ 上で第 j 座標に関して連続な偏導関数を持ち,

$$\partial_j g(x)=\begin{cases}\partial_j(f\varphi)(x) & (x\in\Omega)\\ 0 & (x\in\mathbb{R}^N\backslash\operatorname{supp}(\varphi))\end{cases}$$

である．よって Fubini の定理 5.85 と微積分学の基本定理 5.206 より,

$$\int_{\Omega}\partial_j(f\varphi)(x)dx=\int_{\mathbb{R}^N}\partial_j g(x)dx=0$$

が成り立つ．ここで,

$$\partial_j f(x)\varphi(x)=\partial_j(f\varphi)(x)-f(x)\partial_j\varphi(x)\ \ (\forall x\in\Omega)$$

なので,

$$\int_{\Omega}\partial_j f(x)\varphi(x)dx=\int_{\Omega}\partial_j(f\varphi)(x)dx-\int_{\Omega}f(x)\partial_j\varphi(x)dx=-\int_{\Omega}f(x)\partial_j\varphi(x)dx$$

が成り立つ． □

定義 8.26 (超関数の弱微分)**.** $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ を開集合, $u\in D'(\Omega)$ とする．任意の $\alpha\in\mathbb{Z}^N_+$ に対し,

$$\partial^\alpha u:D(\Omega)\ni\varphi\mapsto(-1)^{|\alpha|}u(\partial^\alpha\varphi)\in\mathbb{C}$$

とおくと命題 8.12 の (1) より $\partial^\alpha u \in D'(\Omega)$ である．$\partial^\alpha u \in D'(\Omega)$ を u の多重指数 α の弱微分と言う．命題 8.25 より $f \in C^n(\Omega)$ に対し，

$$\partial^\alpha u_f = u_{\partial^\alpha f} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant n)$$

が成り立つ．これより $C^n(\Omega) \subseteq D'(\Omega)$ の元に対する弱微分 ∂^α は $|\alpha| \leqslant n$ である限り通常の意味での偏微分と一致する．よって超関数の弱微分は C^n 級関数の偏微分の意味の拡張である．

定義 8.27 (超関数と滑らかな関数の積)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $u \in D'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ とする．このとき f と u の積 fu を,

$$fu : D(\Omega) \ni \varphi \mapsto u(f\varphi) \in \mathbb{C}$$

と定義する．命題 8.12 の (2) より $fu \in D'(\Omega)$ である．任意の $[g] \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ と $f \in C^\infty(\Omega)$ に対し，

$$fu_{[g]}(\varphi) = u_{[g]}(f\varphi) = \int_\Omega f(x)g(x)\varphi(x)dx = u_{[fg]}(\varphi) \quad (\forall \varphi \in D(\Omega))$$

であるから,

$$fu_{[g]} = u_{[fg]}$$

である．よって超関数と滑らかな関数の積は $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に属する関数と滑らかな関数の積の意味の拡張である．

命題 8.28 (超関数と滑らかな関数の積の弱微分に関する Leibniz ルール)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $u \in D'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ とする．このとき任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し，

$$\partial^\alpha(fu) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} u$$

が成り立つ．

証明. 任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し，

$$\begin{aligned}\partial_j(fu)(\varphi) &= -(fu)(\partial_j\varphi) = -u(f\partial_j\varphi) = -u(\partial_j(f\varphi)) + u((\partial_j f)\varphi) \\ &= \partial_j u(f\varphi) + (\partial_j f)u(\varphi) = (f\partial_j u + (\partial_j f)u)(\varphi) \quad (\forall \varphi \in D(\Omega))\end{aligned}$$

だから,

$$\partial_j(fu) = f\partial_j u + (\partial_j f)u \quad (\forall j \in \{1, \cdots, N\})$$

である．このことと帰納法により示せる (Leibniz ルール (命題 8.3) の証明と全く同様). □

命題 8.29. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とする．このとき次が成り立つ．

(1) 任意の $p \in [1, \infty]$ に対し $L^p(\Omega) \ni [f] \mapsto u_{[f]} \in D'(\Omega)$ は (L^p ノルムによる位相と $D'(\Omega)$ の位相 (定義 8.18) に関して) 連続である．
(2) 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $D'(\Omega) \ni u \mapsto \partial^\alpha u \in D'(\Omega)$ は連続である．
(3) 任意の $f \in C^\infty(\Omega)$ に対し $D'(\Omega) \ni u \mapsto fu \in D'(\Omega)$ は連続である．
(4) $D'(\Omega)$ の列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と線型汎関数 $u : D(\Omega) \to \mathbb{C}$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty} u_n(\varphi) = u(\varphi) \quad (\forall \varphi \in D(\Omega))$$

が成り立つならば $u \in D'(\Omega)$ が成り立つ．

証明. (1) $L^p(\Omega)$ の列 $([f_i])_{i\in\mathbb{N}}$ が $[f] \in L^p(\Omega)$ に収束するとすると, 任意の $\varphi \in D(\Omega)$ に対し Hölder の不等式 5.120 より,

$$|u_{[f_i]}(\varphi) - u_{[f]}(\varphi)| = \left|\int_\Omega (f_i(x) - f(x))\varphi(x)dx\right| \leqslant \|[f_i] - [f]\|_p \|\varphi\|_q \to 0 \quad (i \to \infty)$$

となるから注意 8.19 より位相線型空間 $D'(\Omega)$ において $\lim_{i\to\infty} u_{[f_i]} = u_{[f]}$ が成り立つ．よって命題 1.60 より $L^p(\Omega) \ni [f] \mapsto u_{[f]} \in D'(\Omega)$ は連続である．

(2) $D'(\Omega)$ のネット $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $u \in D'(\Omega)$ に収束するとすると, 任意の $\varphi \in D(\Omega)$ に対し注意 8.19 より,

$$\partial^\alpha u_\lambda(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}u_\lambda(\partial^\alpha\varphi) \to (-1)^{|\alpha|}u(\partial^\alpha\varphi) = \partial^\alpha u(\varphi)$$

が成り立つ. よって注意 8.19 より $D'(\Omega)$ において $\partial^\alpha u_\lambda \to \partial^\alpha u$ が成り立つので, 命題 1.50 より $D'(\Omega) \ni u \mapsto \partial^\alpha u \in D'(\Omega)$ は連続である.

(3) $D'(\Omega)$ のネット $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $u \in D'(\Omega)$ に収束するとすると, 任意の $\varphi \in D(\Omega)$ に対し注意 8.19 より,

$$fu_\lambda(\varphi) = u_\lambda(f\varphi) \to u(f\varphi) = fu(\varphi)$$

が成り立つ. よって注意 8.19 より $D'(\Omega)$ において $fu_\lambda \to fu$ が成り立つので命題 1.50 より $D'(\Omega) \ni u \mapsto fu \in D'(\Omega)$ は連続である.

(4) 任意のコンパクト集合 $K \subseteq \Omega$ を取る. $D'(\Omega)$ の定義 8.18 より各 $i \in \mathbb{N}$ に対し $u_i \in D'(\Omega)$ の Fréchet 空間 $D_K(\Omega)$ (定義 8.14) 上への制限

$$D_K(\Omega) \ni \varphi \mapsto u_i(\varphi) \in \mathbb{C}$$

は連続線型汎関数である. そして $\lim_{i\to\infty} u_i(\varphi) = u(\varphi)$ $(\forall\varphi \in D_K(\Omega))$ が成り立つので一様有界性定理 3.97 より,

$$D_K(\Omega) \ni \varphi \mapsto u(\varphi) \in \mathbb{C}$$

は連続である. コンパクト集合 $K \subseteq \Omega$ は任意なので $D'(\Omega)$ の定義 8.18 より $u \in D'(\Omega)$ である.

□

定義 8.30 (関数の 0 拡張)**.** 集合 X の部分集合 E 上で定義された関数 $f : E \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in E) \\ 0 & (x \in X\backslash E) \end{cases}$$

として定義される関数 $\tilde{f} : X \to \mathbb{C}$ を f の X 上への 0 拡張と言う.

定義 8.31 (テスト関数空間の包含関係)**.** $\Omega_0, \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ をそれぞれ開集合とし, $\Omega_0 \subseteq \Omega$ とする. このとき任意の $\varphi \in D(\Omega_0)$ に対し, $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega_0$ がコンパクトであることから, φ の Ω 上への 0 拡張 $\tilde{\varphi} : \Omega \to \mathbb{C}$ は $D(\Omega)$ に属し, $\mathrm{supp}(\tilde{\varphi}) = \mathrm{supp}(\varphi)$ である. そこで以後, $\varphi \in D(\Omega_0)$ の Ω 上への 0 拡張はそのまま φ と表し, $D(\Omega_0) \subseteq D(\Omega)$ とみなす.

定義 8.32 (超関数の制限)**.** $\Omega_0, \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ をそれぞれ開集合とし, $\Omega_0 \subseteq \Omega$ とする. $D(\Omega_0) \subseteq D(\Omega)$ (定義 8.31) だから任意の $u \in D'(\Omega)$ に対し,

$$u|_{\Omega_0} : D(\Omega_0) \ni \varphi \mapsto u(\varphi) \in \mathbb{C}$$

が定義でき, 明らかに $u|_{\Omega_0} \in D'(\Omega)$ である. $u|_{\Omega_0}$ を u の Ω_0 上への制限と言う.

注意 8.33. $[f] \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に対し関数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ の Ω_0 上への制限を $f|_{\Omega_0} : \Omega_0 \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ とおく. このとき任意の $\varphi \in D(\Omega_0)$ に対し,

$$u_{[f]}(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = \int_{\Omega_0} f|_{\Omega_0}(x)\varphi(x)dx = u_{[f|_{\Omega_0}]}(\varphi)$$

となるから $[f]$ の $D'(\Omega)$ の元としての Ω_0 上への制限は $[f|_{\Omega_0}] \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_0) \subseteq D'(\Omega_0)$ である.

注意 8.34. 任意の $u \in D'(\Omega)$ と任意の $\alpha \in \mathbb{Z}^N_+$ に対し,

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha u)|_{\Omega_0}(\varphi) &= \partial^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}u(\partial^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}u|_{\Omega_0}(\partial^\alpha\varphi) \\ &= \partial^\alpha(u|_{\Omega_0})(\varphi) \quad (\forall\varphi \in D(\Omega_0))\end{aligned}$$

であるから,

$$(\partial^\alpha u)|_{\Omega_0} = \partial^\alpha(u|_{\Omega_0})$$

である.

命題 8.35. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $u \in D'(\Omega)$ とする. このとき開集合 $U \subseteq \Omega$ で $u|_U = 0 \in D'(U)$ を満たすもののうち最大のものが存在する.

証明. $u|_U = 0$ を満たす開集合 $U \subseteq \Omega$ 全体を $\mathcal{U}$ とおき, 開集合

$$U_0 := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \subseteq \Omega$$

を定義する. このとき任意の $\varphi \in D(U_0)$ に対し $\mathrm{supp}(\varphi)$ のコンパクト性より有限個の $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ が取れて,

$$\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$$

となる. よって 1 の分割 (定理 6.44) より $h_j \in D(U_j)$ $(j = 1, \cdots, n)$ で,

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} h_j \varphi$$

なるものが取れる. 各 $j \in \{1, \cdots, n\}$ について $h_j \varphi \in D(U_j)$ より $u(h_j \varphi) = 0$ だから,

$$u(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} u(h_j \varphi) = 0$$

である. よって $u|_{U_0} = 0 \in D'(U_0)$ なので U_0 が求める最大の開集合である. □

定義 8.36 (超関数の台)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $u \in D'(\Omega)$ とする. 命題 8.35 より $u|_U = 0 \in D'(U)$ を満たす開集合 $U \subseteq \Omega$ のうち最大のものが存在する. それを $\Omega \backslash \mathrm{supp}(u)$ と表し, Ω の閉集合 $\mathrm{supp}(u)$ を u の台と言う.

命題 8.37 (関数としての台と超関数としての台)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $[f] \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ とする. $[f] \in D'(\Omega)$ としての台 $\mathrm{supp}([f])$ (定義 8.36) と $[f]$ の代表元である $f : \Omega \to \mathbb{C}$ の台 $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ について,

$$\mathrm{supp}([f]) \subseteq \mathrm{supp}(f)$$

が成り立つ. また $f \in C(\Omega)$ の場合は,

$$\mathrm{supp}([f]) = \mathrm{supp}(f)$$

が成り立つ.

証明. 任意の $\varphi \in D(\Omega \backslash \mathrm{supp}(f))$ に対し,

$$u_{[f]}(\varphi) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0$$

であるから超関数の台の定義 8.36 より

$$\Omega \backslash \mathrm{supp}(f) \subseteq \Omega \backslash \mathrm{supp}([f]),$$

従って,

$$\mathrm{supp}([f]) \subseteq \mathrm{supp}(f)$$

が成り立つ. $f \in C(\Omega)$ の場合を考える. 任意の $\varphi \in D(\Omega \backslash \mathrm{supp}([f]))$ に対し $u_f(\varphi) = 0$ なので定理 8.23 より,

$$\int_{\Omega \backslash \mathrm{supp}([f])} |f(x)| dx = 0$$

である. よって命題 5.46 より $f : \Omega \backslash \mathrm{supp}([f]) \to \mathbb{C}$ は Lebesgue 測度に関して a.e. で 0 であり, f の連続性より $f(x) = 0$ $(\forall x \in \Omega \backslash \mathrm{supp}([f]))$ である. よって $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\} \subseteq \mathrm{supp}([f])$ であるから,

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \subseteq \mathrm{supp}([f])$$

である. ゆえに $f \in C(\Omega)$ の場合は $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}([f])$ が成り立つ. □

命題 8.38. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $u \in D'(\Omega)$ とする．このとき,

(1) 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $\mathrm{supp}(\partial^\alpha u) \subseteq \mathrm{supp}(u)$ が成り立つ.
(2) 任意の $f \in C^\infty(\Omega)$ に対し $\mathrm{supp}(fu) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(u)$ が成り立つ.
(3) 任意の開集合 $\Omega_0 \subseteq \Omega$ に対し $\mathrm{supp}(u|_{\Omega_0}) \subseteq \mathrm{supp}(u)$ が成り立つ.

証明. (1) 任意の $\varphi \in D(\Omega \backslash \mathrm{supp}(u))$ に対し $\partial^\alpha \varphi \in D(\Omega \backslash \mathrm{supp}(u))$ なので,

$$\partial^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi) = 0$$

である．よって超関数の台の定義 8.36 より,

$$\Omega \backslash \mathrm{supp}(u) \subseteq \Omega \backslash \mathrm{supp}(\partial^\alpha u)$$

だから,

$$\mathrm{supp}(\partial^\alpha u) \subseteq \mathrm{supp}(u)$$

が成り立つ.

(2) 任意の $\varphi \in D(\Omega \backslash (\mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(u)))$ に対し,

$$\mathrm{supp}(f\varphi) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega \backslash \mathrm{supp}(u)$$

だから,

$$fu(\varphi) = u(f\varphi) = 0$$

である．よって超関数の台の定義 8.36 より,

$$\Omega \backslash (\mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(u)) \subseteq \Omega \backslash \mathrm{supp}(fu)$$

だから,

$$\mathrm{supp}(fu) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(u)$$

が成り立つ.

(3) 任意の $\varphi \in D(\Omega_0 \backslash \mathrm{supp}(u)) \subseteq D(\Omega \backslash \mathrm{supp}(u))$ に対し,

$$u|_{\Omega_0}(\varphi) = u(\varphi) = 0$$

であるから超関数の台の定義 8.36 より,

$$\Omega_0 \backslash \mathrm{supp}(u) \subseteq \Omega_0 \backslash \mathrm{supp}(u|_{\Omega_0})$$

である．よって,

$$\mathrm{supp}(u|_{\Omega_0}) \subseteq \mathrm{supp}(u)$$

が成り立つ.

□

定理 8.39 (超関数の台を保存する一意拡張)**.** $\Omega, \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N$ をそれぞれ開集合で $\Omega \subseteq \widetilde{\Omega}$ を満たすものとする．そして $u \in D'(\Omega)$ が $\mathbb{R}^N$ の距離に関して,

$$d(\mathrm{supp}(u), \widetilde{\Omega} \backslash \Omega) > 0 \tag{8.7}$$

(定義 8.5 を参照) を満たすとする．このとき $\widetilde{u} \in D'(\widetilde{\Omega})$ で,

$$\widetilde{u}|_\Omega = u, \quad \mathrm{supp}(\widetilde{u}) = \mathrm{supp}(u)$$

を満たすものが唯一つ存在する.

証明.

$$0 < r_1 < r_2 < d(\mathrm{supp}(u), \widetilde{\Omega}\backslash\Omega)$$

に対し,

$$\Omega_j := \left\{x \in \widetilde{\Omega} : d(x, \mathrm{supp}(u)) < r_j\right\}, \quad \Omega_j' := \left\{x \in \widetilde{\Omega} : d(x, \mathrm{supp}(u)) \leqslant r_j\right\} \quad (j = 1, 2)$$

とおく. このとき,

$$\mathrm{supp}(u) \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega_1' \subseteq \Omega_2 \subseteq \Omega_2' \subseteq \Omega$$

であり, 命題 8.6 の (2) より Ω_1, Ω_2 は $\widetilde{\Omega}$ の開集合, Ω_1', Ω_2' は $\widetilde{\Omega}$ の閉集合である. よって系 6.47 より $h \in C^\infty(\widetilde{\Omega})$ で,

$$h(x) = 1 \ \ (\forall x \in \Omega_1'), \quad h(x) = 0 \ \ (\forall x \in \widetilde{\Omega}\backslash\Omega_2)$$

を満たすものが取れる. これより $\widetilde{\Omega}$ の位相[*91]に関して,

$$\mathrm{supp}(h) = \overline{\{x \in \widetilde{\Omega} : h(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega_2' \subseteq \Omega, \tag{8.8}$$

$$\mathrm{supp}(1-h) = \overline{\{x \in \widetilde{\Omega} : 1 - h(x) \neq 0\}} \subseteq \widetilde{\Omega}\backslash\Omega_1 \subseteq \widetilde{\Omega}\backslash \mathrm{supp}(u) \tag{8.9}$$

が成り立つ. (8.8) より任意の $\varphi \in D(\widetilde{\Omega})$ に対し $h\varphi \in D(\Omega)$ であるから線型汎関数

$$\widetilde{u} : D(\widetilde{\Omega}) \ni \varphi \mapsto u(h\varphi) \in \mathbb{C}$$

が定義でき, 命題 8.12 の (2) より任意のコンパクト集合 $K \subseteq \widetilde{\Omega}$ に対し $\widetilde{u}$ の Fréchet 空間 $D_K(\widetilde{\Omega})$ (定義 8.14) 上への制限

$$\widetilde{u} : D_K(\widetilde{\Omega}) \ni \varphi \mapsto \widetilde{u}(\varphi) = u(h\varphi) \in \mathbb{C}$$

は連続である. よって超関数の定義 8.18 より $\widetilde{u} \in D'(\widetilde{\Omega})$ である. そして (8.9) より任意の $\varphi \in D(\Omega)$ に対し,

$$\mathrm{supp}((1-h)\varphi) \subseteq \Omega\backslash\Omega_1 \subseteq \Omega\backslash \mathrm{supp}(u)$$

が成り立つので,

$$u(\varphi) - \widetilde{u}(\varphi) = u(\varphi) - u(h\varphi) = u((1-h)\varphi) = 0 \ \ (\forall \varphi \in D(\Omega)),$$

よって,

$$\widetilde{u}|_\Omega = u$$

が成り立つ. (8.7) より $\mathrm{supp}(u)$ は $\widetilde{\Omega}$ の閉集合であり, 任意の $\varphi \in D(\widetilde{\Omega}\backslash \mathrm{supp}(u))$ に対し (8.8) より $h\varphi \in D(\Omega\backslash \mathrm{supp}(u))$ なので $\widetilde{u}(\varphi) = u(h\varphi) = 0$ である. よって超関数の台の定義 8.36 より

$$\widetilde{\Omega}\backslash \mathrm{supp}(u) \subseteq \widetilde{\Omega}\backslash \mathrm{supp}(\widetilde{u})$$

だから,

$$\mathrm{supp}(\widetilde{u}) \subseteq \mathrm{supp}(u) \tag{8.10}$$

が成り立つ. $\widetilde{u}|_\Omega = u$ なので命題 8.38 の (3) より (8.10) の逆の包含関係も成り立つ. 以上で存在が示せた.

一意性を示す. $v \in D'(\widetilde{\Omega})$ が,

$$v|_\Omega = u, \quad \mathrm{supp}(v) = \mathrm{supp}(u)$$

を満たすとすると, 任意の $\varphi \in D(\widetilde{\Omega})$ に対し (8.9) より,

$$\mathrm{supp}((1-h)\varphi) \subseteq \widetilde{\Omega}\backslash\Omega_1 \subseteq \widetilde{\Omega}\backslash \mathrm{supp}(u) = \widetilde{\Omega}\backslash \mathrm{supp}(v)$$

であるから,

$$v(\varphi) - \widetilde{u}(\varphi) = v(\varphi) - u(h\varphi) = v(\varphi) - v(h\varphi) = v((1-h)\varphi) = 0$$

である. よって $v = \widetilde{u}$ である. これで一意性が示せた. □

[*91] つまり $\mathbb{R}^N$ の相対位相.

定理 8.40 (超関数の台を保存する制限)**.** $\Omega_0, \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合で $\Omega_0 \subseteq \Omega$ を満たすものとする．そして $u \in D'(\Omega)$ が $\mathbb{R}^N$ の距離に関して,

$$\mathrm{supp}(u) \subseteq \Omega_0, \quad d(\mathrm{supp}(u), \Omega\backslash\Omega_0) > 0$$

を満たすと仮定する．このとき u の Ω_0 上への制限 $u|_{\Omega_0} \in D'(\Omega_0)$ の台は,

$$\mathrm{supp}(u|_{\Omega_0}) = \mathrm{supp}(u)$$

を満たす．

証明.

$$0 < r_1 < r_2 < d(\mathrm{supp}(u), \Omega\backslash\Omega_0)$$

に対し,

$$\Omega_j := \{x \in \Omega : d(x, \mathrm{supp}(u)) < r_j\}, \quad \Omega_j' := \{x \in \Omega : d(x, \mathrm{supp}(u)) \leqslant r_j\} \quad (j = 1, 2)$$

とおく．このとき,

$$\mathrm{supp}(u) \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega_1' \subseteq \Omega_2 \subseteq \Omega_2' \subseteq \Omega_0$$

であり, 命題 8.6 の (2) より Ω_1, Ω_2 は Ω の開集合で, Ω_1', Ω_2' は Ω の閉集合である．よって系 6.47 より $h \in C^\infty(\Omega)$ で,

$$h(x) = 1 \quad (\forall x \in \Omega_1'), \quad h(x) = 0 \quad (\forall x \in \Omega\backslash\Omega_2)$$

を満たすものが取れる．これより Ω の位相に関して,

$$\mathrm{supp}(h) = \overline{\{x \in \Omega : h(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega_2' \subseteq \Omega_0, \tag{8.11}$$

$$\mathrm{supp}(1-h) = \overline{\{x \in \Omega : 1 - h(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega\backslash\Omega_1 \subseteq \Omega\backslash\mathrm{supp}(u) \tag{8.12}$$

が成り立つ．任意の $\varphi \in D(\Omega)$ に対し (8.12) より $(1-h)\varphi \in D(\Omega\backslash\mathrm{supp}(u))$ であるから,

$$u(\varphi) - u(h\varphi) = u((1-h)\varphi) = 0$$

であり, (8.11) より $h\varphi \in D(\Omega_0)$ であるから,

$$u(\varphi) = u(h\varphi) = u|_{\Omega_0}(h\varphi) \quad (\forall \varphi \in D(\Omega))$$

である．これより任意の $\varphi \in D(\Omega\backslash\mathrm{supp}(u|_{\Omega_0}))$ に対し,

$$u(\varphi) = u|_{\Omega_0}(h\varphi) = 0$$

だから, 超関数の台の定義 8.36 より,

$$\Omega\backslash\mathrm{supp}(u|_{\Omega_0}) \subseteq \Omega\backslash\mathrm{supp}(u),$$

従って,

$$\mathrm{supp}(u) \subseteq \mathrm{supp}(u|_{\Omega_0})$$

が成り立つ．命題 8.38 の (3) よりこの逆の包含関係も成り立つので $\mathrm{supp}(u) = \mathrm{supp}(u|_{\Omega_0})$ である． □

定理 8.41 (台を保存する一意拡張の弱微分)**.** $\Omega, \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N$ をそれぞれ開集合で $\Omega \subseteq \widetilde{\Omega}$ なるものとする．そして $u \in D'(\Omega)$ が $\mathbb{R}^N$ の距離に関して,

$$d(\mathrm{supp}(u), \widetilde{\Omega}\backslash\Omega) > 0$$

を満たすとする．このとき任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $u, \partial^\alpha u \in D'(\Omega)$ の台を保存する一意拡張 (8.39) $\tilde{u}, \widetilde{\partial^\alpha u} \in D'(\widetilde{\Omega})$ について,

$$\partial^\alpha \tilde{u} = \widetilde{\partial^\alpha u}$$

が成り立つ．

証明. 命題 8.38 の (1) より,

$$\mathrm{supp}(\partial^\alpha \widetilde{u}) \subseteq \mathrm{supp}(\widetilde{u}) = \mathrm{supp}(u)$$

であるから, $\mathrm{supp}(\partial^\alpha \widetilde{u}) \subseteq \Omega$ であり,

$$d(\mathrm{supp}(\partial^\alpha \widetilde{u}), \widetilde{\Omega}\backslash\Omega) \geqslant d(\mathrm{supp}(u), \widetilde{\Omega}\backslash\Omega) > 0$$

である. よって定理 8.40 より,

$$\mathrm{supp}(\partial^\alpha \widetilde{u}) = \mathrm{supp}((\partial^\alpha \widetilde{u})|_\Omega) = \mathrm{supp}(\partial^\alpha u)$$

[*92]であるから $\partial^\alpha u$ の台を保存する拡張の一意性 (定理 8.39) より,

$$\widetilde{\partial^\alpha u} = \partial^\alpha \widetilde{u}$$

が成り立つ. □

定義 8.42 (超関数の変数変換)**.** $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^N$ をそれぞれ開集合とし, $\Phi : \Omega \to \Omega'$ を C^∞ 級同相写像 (定義 4.18) とする. このとき

$$\Omega' \ni x \mapsto |\mathrm{det}{\Phi^{-1}}'(x)| \in (0, \infty)$$

は C^∞ 級関数である. 今, 任意の $[f] \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega')$ を取る. 任意のコンパクト集合 $K \subseteq \Omega$ に対し $\Phi(K) \subseteq \Omega'$ はコンパクトであるから変数変換公式 5.229 より,

$$\int_K |f \circ \Phi(x)| dx = \int_{\Phi(K)} |f(x)||\mathrm{det}{\Phi^{-1}}'(x)| dx < \infty$$

となる. よって,

$$[f] \circ \Phi := [f \circ \Phi] \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

である. そして任意の $\varphi \in D(\Omega)$ に対し変数変換公式 5.229 より,

$$\int_\Omega (f \circ \Phi(x))\varphi(x) dx = \int_{\Omega'} f(x)(\varphi \circ \Phi^{-1}(x))|\mathrm{det}{\Phi^{-1}}'(x)| dx$$

であるから,

$$u_{[f]\circ\Phi}(\varphi) = u_{[f]}\left((\varphi \circ \Phi^{-1})|\mathrm{det}{\Phi^{-1}}'|\right) \quad (\forall \varphi \in D(\Omega))$$

となる. そこでこれと整合するように任意の $u \in D'(\Omega')$ に対し,

$$u \circ \Phi : D(\Omega) \ni \varphi \mapsto u\left((\varphi \circ \Phi^{-1})|\mathrm{det}{\Phi^{-1}}'|\right) \in \mathbb{C}$$

とおく. チェインルール 4.7 と命題 8.12 の (2) より任意のコンパクト集合 $K \subseteq \Omega$ に対し Fréchet 空間 $D_K(\Omega)$ から Fréchet 空間 $D_{\Phi(K)}(\Omega')$ への線型写像

$$D_K(\Omega) \ni \varphi \mapsto (\varphi \circ \Phi^{-1}))|\mathrm{det}{\Phi^{-1}}'| \in D_{\Phi(K)}(\Omega')$$

は連続であるので,

$$u \circ \Phi : D_K(\Omega) \ni \varphi \mapsto (u \circ \Phi)(\varphi) \in \mathbb{C}$$

は連続である. よって超関数の定義 8.18 より $u \circ \Phi \in D'(\Omega)$ である. $u \circ \Phi \in D'(\Omega)$ を $u \in D'(\Omega')$ の $\Phi : \Omega \to \Omega'$ による変数変換と言う.

命題 8.43. $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^N$ をそれぞれ開集合とし, $\Phi = (\Phi_1, \cdots, \Phi_N) : \Omega \to \Omega'$ を C^∞ 級同相写像とする. このとき

(1) 任意の $u \in D'(\Omega')$ に対し $(u \circ \Phi) \circ \Phi^{-1} = u$ が成り立つ.

[*92] 注意 8.34 より $(\partial^\alpha \widetilde{u})|_\Omega = \partial^\alpha(\widetilde{u}|_\Omega) = \partial^\alpha u$ である.

(2) $D'(\Omega') \ni u \mapsto u \circ \Phi \in D'(\Omega)$ は連続である[*93].
(3) 任意の $u \in D'(\Omega')$ に対し $\mathrm{supp}(u \circ \Phi) = \Phi^{-1}(\mathrm{supp}(u))$ が成り立つ.
(4) 任意の $u \in D'(\Omega')$, 任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し,

$$\partial_j (u \circ \Phi) = \sum_{k=1}^{N} ((\partial_k u) \circ \Phi) \partial_j \Phi_k$$

が成り立つ.

証明. (1) $\Phi \circ \Phi^{-1}(x) = x$ $(\forall x \in \Omega')$ であることとチェインルール 4.7 より,

$$|\det(\Phi' \circ \Phi^{-1}(x))| \, |\det {\Phi^{-1}}'(x)| = |\det(\Phi \circ \Phi^{-1})'(x)| = 1 \quad (\forall x \in \Omega')$$

であるから, 任意の $\varphi \in D(\Omega')$ に対し,

$$((u \circ \Phi) \circ \Phi^{-1})(\varphi) = (u \circ \Phi) \left((\varphi \circ \Phi)|\det \Phi'|\right) = u \left(\varphi |\det(\Phi' \circ \Phi^{-1})||\det {\Phi^{-1}}'|\right) = u(\varphi)$$

である.

(2) $D'(\Omega')$ のネット $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が $u \in D'(\Omega')$ に収束するならば, 注意 8.19 より任意の $\varphi \in D(\Omega)$ に対し,

$$(u_\lambda \circ \Phi)(\varphi) = u_\lambda \left((\varphi \circ \Phi^{-1})|\det {\Phi^{-1}}'|\right) \to u \left((\varphi \circ \Phi^{-1})|\det {\Phi^{-1}}'|\right) = (u \circ \Phi)(\varphi)$$

となる. よって注意 8.19 より $u_\lambda \circ \Phi \to u \circ \Phi$ が成り立つので, 連続性のネットによる特徴付け (命題 1.50) より $D'(\Omega') \ni u \mapsto u \circ \Phi \in D'(\Omega)$ は連続である.

(3) 任意の

$$\varphi \in D\left(\Omega \backslash \Phi^{-1}(\mathrm{supp}(u))\right) = D\left(\Phi^{-1}(\Omega' \backslash \mathrm{supp}(u))\right)$$

に対し,

$$\mathrm{supp}(\varphi \circ \Phi^{-1}) = \Phi(\mathrm{supp}(\varphi)) \subseteq \Omega' \backslash \mathrm{supp}(u)$$

であるから,

$$(u \circ \Phi)(\varphi) = u\left((\varphi \circ \Phi^{-1})|\det {\Phi^{-1}}'|\right) = 0$$

である. よって超関数の台の定義 8.36 より,

$$\Omega \backslash \Phi^{-1}(\mathrm{supp}(u)) \subseteq \Omega \backslash \mathrm{supp}(u \circ \Phi)$$

だから,

$$\mathrm{supp}(u \circ \Phi) \subseteq \Phi^{-1}(\mathrm{supp}(u)) \tag{8.13}$$

が成り立つ. この結果と (1) より

$$\mathrm{supp}(u) = \mathrm{supp}((u \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}) \subseteq \Phi(\mathrm{supp}(u \circ \Phi))$$

が成り立つので, (8.13) の逆の包含関係も成り立つ.

(4) 任意の $\varphi \in D(\Omega)$ に対しチェインルール 4.7 より,

$$\partial_j \varphi = \partial_j \left((\varphi \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi\right) = \sum_{k=1}^{N} \left(\left(\partial_k (\varphi \circ \Phi^{-1})\right) \circ \Phi\right) \partial_j \Phi_k$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\partial_j (u \circ \Phi)(\varphi) &= -(u \circ \Phi)(\partial_j \varphi) = -u \left(\left((\partial_j \varphi) \circ \Phi^{-1}\right) |\det {\Phi^{-1}}'|\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{N} u \left(\partial_k (\varphi \circ \Phi^{-1}) \left((\partial_j \Phi_k) \circ \Phi^{-1}\right) |\det {\Phi^{-1}}'|\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} ((\partial_k u) \circ \Phi) (\partial_j \Phi_k)(\varphi) + \sum_{k=1}^{N} u \left((\varphi \circ \Phi^{-1}) \partial_k \left(\left((\partial_j \Phi_k) \circ \Phi^{-1}\right) |\det {\Phi^{-1}}'|\right)\right)
\end{aligned} \tag{8.14}$$

*93 超関数空間の位相の定義 8.18 を参照.

である．よって任意の $\varphi \in D(\Omega)$ に対し (8.14) の右辺の第二項が 0 であることを示せばよい．そのためには任意の $\varphi \in D(\Omega)$ に対し，

$$\sum_{k=1}^{N} (\varphi \circ \Phi^{-1})\partial_k \left(\left((\partial_j \Phi_k) \circ \Phi^{-1} \right) |\mathrm{det}\Phi^{-1\prime}| \right) = 0 \tag{8.15}$$

が成り立つことを示せばよい．任意の $f \in D(\Omega')$ を取り，(8.14) において u を f ($D'(\Omega')$ の元とみなす) に置き換えれば，任意の $\varphi \in D(\Omega)$ に対し，

$$\partial_j(f \circ \Phi)(\varphi) = \sum_{k=1}^{N} ((\partial_k f) \circ \Phi)\,(\partial_j \Phi_k)(\varphi) + \sum_{k=1}^{N} f\left((\varphi \circ \Phi^{-1})\partial_k \left(\left((\partial_j \Phi_k) \circ \Phi^{-1} \right) |\mathrm{det}\Phi^{-1\prime}| \right) \right) \tag{8.16}$$

となる．チェインルール 4.7 より，

$$\partial_j(f \circ \Phi)(\varphi) = \sum_{k=1}^{N} ((\partial_k f) \circ \Phi)\,(\partial_j \Phi_k)(\varphi)$$

なので，(8.16) の第二項は 0 である．よって，

$$\sum_{k=1}^{N} f\left((\varphi \circ \Phi^{-1})\partial_k \left(\left((\partial_j \Phi_k) \circ \Phi^{-1} \right) |\mathrm{det}\Phi^{-1\prime}| \right) \right) = 0 \quad (\forall f \in D(\Omega'), \forall \varphi \in D(\Omega))$$

が成り立つから，定理 8.23 より (8.15) が成り立つ．

□

定義 8.44 (平行移動)**.** 任意の $y \in \mathbb{R}^N$ に対し，

$$\Phi_y : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto x - y \in \mathbb{R}^N$$

なる C^∞ 級同相写像を定義する．そして $\mathbb{R}^N$ 上で定義された関数 f と超関数 $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ に対し，

$$T_y f := f \circ \Phi_y, \quad T_y u := u \circ \Phi_y$$

をそれぞれ f, u の y による平行移動と言う．

系 8.45. 任意の $u \in D'(\mathbb{R}^N)$, $y \in \mathbb{R}^N$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し，

$$\partial^\alpha T_y u = T_y \partial^\alpha u$$

が成り立つ．

証明. 命題 8.43 の (4) を用いればよい． □

8.4 急減少関数空間 $\mathcal{S}_N$ と Fourier 変換

定義 8.46. $\mathbb{R}^N$ 上の恒等写像

$$\mathrm{id} = (\mathrm{id}_1, \cdots, \mathrm{id}_N) : \mathbb{R}^N \ni (x_1, \cdots, x_N) \mapsto (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

と任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し，

$$\mathrm{id}^\alpha = \mathrm{id}_1^{\alpha_1} \cdots \mathrm{id}_N^{\alpha_N} : \mathbb{R}^N \ni (x_1, \cdots, x_N) \mapsto x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N} \in \mathbb{R}$$

とする．また，

$$|\mathrm{id}| : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto |x| \in [0, \infty)$$

とする．

定義 8.47 (多項式空間 $\mathcal{P}_N$)**.** $\mathbb{R}^N$ 上の複素数値 C^∞ 級関数空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の線型部分空間

$$\mathcal{P}_N := \mathrm{span}\{\mathrm{id}^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+^N\}$$

を $\mathbb{R}^N$ 上の多項式空間と言い, $\mathcal{P}_N$ の元を $\mathbb{R}^N$ 上の多項式と言う.

命題 8.48. $\mathbb{C}$ 上の線型空間

$$\mathcal{S}_N := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N,\ \mathrm{id}^\beta\, \partial^\alpha f \in C_0(\mathbb{R}^N) \right\}$$

[*94]を考え, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{S}_N$ 上のノルム $p_n : \mathcal{S}_N \to [0, \infty)$ を,

$$p_n(f) := \max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |(1 + |x|^2)^n \partial^\alpha f(x)| \quad (\forall f \in \mathcal{S}_N)$$

として定義する. このとき $\mathcal{S}_N$ のネット $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と $f \in \mathcal{S}_N$ に対し, 次は互いに同値である.

(1) $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が誘導するセミノルム位相 (定義 3.57) に関して $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は f に収束する.
(2) 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $(\mathrm{id}^\beta\, \partial^\alpha f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は $\mathrm{id}^\beta\, \partial^\alpha f$ に一様収束する.

証明. (1) ⇒ (2) を示す. (1) が成り立つとする. 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $|\alpha|, |\beta| \leqslant n$ なる $n \in \mathbb{N}$ を取る. このとき,

$$|x^\beta| \leqslant |x|^{|\beta|} \leqslant (1 + |x|^2)^{|\beta|} \leqslant (1 + |x|^2)^n \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left| x^\beta \partial^\alpha f_\lambda(x) - x^\beta \partial^\alpha f(x) \right| &\leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|^2)^n |\partial^\alpha f_\lambda(x) - \partial^\alpha f(x)| \\ &\leqslant p_n(f_\lambda - f) \to 0 \end{aligned}$$

となる. よって (2) が成り立つ.
(2) ⇒ (1) を示す. (2) が成り立つならば任意の多項式 $g \in \mathcal{P}_N = \mathrm{span}\{\mathrm{id}^\beta : \beta \in \mathbb{Z}_+^N\}$ と任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $(g \partial^\alpha f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は $g \partial^\alpha f$ に一様収束する. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $(1 + |\mathrm{id}|^2)^n \in \mathcal{P}_N$ であり, $|\alpha| \leqslant n$ なる $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ は有限個であるから,

$$p_n(f_\lambda - f) = \max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|^2) |\partial^\alpha f_\lambda(x) - \partial^\alpha f(x)| \to 0$$

となる. これが任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つので命題 3.59 より $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が誘導するセミノルム位相に関して $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は f に収束する. □

定理 8.49. 命題 8.48 における $\mathbb{C}$ 上の線型空間 $\mathcal{S}_N$ と $\mathcal{S}_N$ 上のノルムの可算族 $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を考える. このとき $\mathcal{S}_N$ は $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が誘導するセミノルム位相により Fréchet 空間 (定義 3.86) である.

証明. $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ を $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が定めるセミノルム位相に関する $\mathcal{S}_N$ の Cauchy 列 (定義 3.85) とする. このとき任意の多重指数 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し, $|\alpha|, |\beta| \leqslant n$ なる $n \in \mathbb{N}$ を取れば,

$$|x^\beta| \leqslant |x|^{|\beta|} \leqslant (1 + |x|^2)^{|\beta|} \leqslant (1 + |x|^2)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

だから,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\beta \partial^\alpha f_i(x) - x^\beta \partial^\alpha f_j(x)| &\leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|^2)^n |\partial^\alpha f_i(x) - \partial^\alpha f_j(x)| \\ &\leqslant p_n(f_i - f_j) \to 0 \quad (i, j \to \infty) \end{aligned}$$

となる. よって $(\mathrm{id}^\beta\, \partial^\alpha f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ は sup ノルムによる Banach 空間 $C_0(\mathbb{R}^N)$[*95]における Cauchy 列であるので, ある $f_{\alpha,\beta} \in C_0(\mathbb{R}^N)$ に一様収束する. 今, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$\lim_{i \to \infty} x^\beta \partial^\alpha f_i(x) = f_{\alpha,\beta}(x), \quad \lim_{i \to \infty} x^\beta \partial^\alpha f_i(x) = x^\beta f_{\alpha,0}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

[*94] $C_0(\mathbb{R}^N)$ は無限遠で消える連続関数空間 (定義 5.159) である.
[*95] 完備性については命題 5.160 を参照.

であるから,

$$f_{\alpha,\beta}(x) = x^\beta f_{\alpha,0}(x) \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N, \forall x \in \mathbb{R}^N) \tag{8.17}$$

である．ここで $f := f_{0,0} \in C_0(\mathbb{R}^N)$ とおき, ある $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$f \in C^n(\mathbb{R}^N), \quad \partial^\alpha f = f_{\alpha,0} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant n) \tag{8.18}$$

が成り立つと仮定する．そして $|\alpha| = n$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ と任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ を取り,

$$\gamma := \alpha + (0, \cdots, 0, \overset{j\text{ 番目}}{1}, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{Z}_+^N$$

とおく．このとき任意の $x \in \mathbb{R}^N$ と任意の $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し, 微積分学の基本定理 5.206 より,

$$\frac{\partial^\alpha f_i(x + he_j) - \partial^\alpha f_i(x)}{h} = \int_0^1 \partial^\gamma f_i(x + the_j)dt$$

であり, $(\partial^\alpha f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $\partial^\alpha f = f_{\alpha,0} \in C_0(\mathbb{R}^N)$ に, $(\partial^\gamma f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $f_{\gamma,0} \in C_0(\mathbb{R}^N)$ にそれぞれ一様収束するので,

$$\frac{\partial^\alpha f(x + he_j) - \partial^\alpha f(x)}{h} = \int_0^1 f_{\gamma,0}(x + the_j)dt$$

となる．よって $h \to 0$ とすれば Lebesgue 優収束定理 5.59 より $\partial_j \partial^\alpha f(x) = f_{\gamma,0}(x)$ を得る．$x \in \mathbb{R}^N$ は任意なので $\partial_j\partial^\alpha f = f_{\gamma,0}$ であり, α と j の任意性より,

$$f \in C^{n+1}(\mathbb{R}^N), \quad \partial^\gamma f = f_{\gamma,0} \quad (\forall \gamma \in \mathbb{Z}_+^N : |\gamma| = n + 1)$$

が成り立つ．よって帰納法より (8.18) は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つので,

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \partial^\alpha f = f_{\alpha,0} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N)$$

が成り立つ．そして (8.17) より任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $\mathrm{id}^\beta \partial^\alpha f = f_{\alpha,\beta} \in C_0(\mathbb{R}^N)$ であるから $f \in \mathcal{S}_N$ であり, $(\mathrm{id}^\beta \partial^\alpha f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $\mathrm{id}^\beta \partial^\alpha f = f_{\alpha,\beta}$ に一様収束するから命題 8.48 より $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が誘導するセミノルム位相に関して f に収束する．よって $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が誘導するセミノルム位相に関して $\mathcal{S}_N$ は Fréchet 空間である． □

定義 8.50 (急減少関数空間 $\mathcal{S}_N$)**.** $\mathbb{C}$ 上の線型空間

$$\mathcal{S}_N := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N,\ \mathrm{id}^\beta \partial^\alpha f \in C_0(\mathbb{R}^N) \right\}$$

を考え, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{S}_N$ 上のノルム $p_N : \mathcal{S}_N \to [0, \infty)$ を,

$$p_n(f) := \max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |(1 + |x|^2)^n \partial^\alpha f(x)| \quad (\forall f \in \mathcal{S}_N)$$

として定義する．このとき定理 8.49 より $\mathcal{S}_N$ は $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が誘導するセミノルム位相により Fréchet 空間である．この Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ を $\mathbb{R}^N$ 上の急減少関数空間と言う．

定義 8.51 (高々多項式的に増加する関数)**.** $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ が高々多項式的に増加する関数であるとは, ある $C \in (0, \infty)$ と $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し,

$$|f(x)| \leqslant C(1 + |x|^2)^n$$

が成り立つことを言う．

注意 8.52. 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$|x^\alpha| \leqslant |x|^{|\alpha|} \leqslant (1 + |x|^2)^{|\alpha|} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

であるから任意の多項式 ($\mathcal{P}_N$ の元) は高々多項式的に増加する関数である．

定義 8.53 (緩増加関数空間 $\mathcal{T}_N$)**.**

$$\mathcal{T}_N := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \text{任意の } \alpha \in \mathbb{Z}_+^N \text{ に対し } \partial^\alpha f \text{ は高々多項式的に増加する関数}\}$$

を $\mathbb{R}^N$ 上の緩増加関数空間と言い, $\mathcal{T}_N$ の元を $\mathbb{R}^N$ 上の緩増加関数と言う.

命題 8.54. $\mathbb{R}^N$ 上の急減少関数空間 $\mathcal{S}_N$, 緩増加関数空間 $\mathcal{T}_N$ に対し次が成り立つ.

(1) 任意の $f \in \mathcal{S}_N$, 任意の $g \in \mathcal{T}_N$ に対し $fg \in \mathcal{S}_N$ であり, 任意の $g \in \mathcal{T}_N$ に対し,

$$\mathcal{S}_N \ni f \mapsto fg \in \mathcal{S}_N \tag{8.19}$$

は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型写像である.

(2) $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を C^∞ 級写像で 1 階以上の全ての偏導関数が有界であるものとすると, 任意の $f \in \mathcal{T}_N$ に対し $f \circ \Phi \in \mathcal{T}_N$ である.

(3) $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を C^∞ 級同相写像 (定義 4.18) で Φ, Φ^{-1} の 1 階以上の全ての偏導関数が有界であるものとすると, 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ に対し $f \circ \Phi \in \mathcal{S}_N$ であり,

$$\mathcal{S}_N \ni f \mapsto f \circ \Phi \in \mathcal{S}_N \tag{8.20}$$

は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型写像である.

(4) 任意の $p \in [1, \infty]$ に対し $\mathcal{S}_N \subseteq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ であり,

$$\mathcal{S}_N \ni f \mapsto [f] \in L^p(\mathbb{R}^N) \tag{8.21}$$

は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ から Banach 空間 $L^p(\mathbb{R}^N)$ への連続線型写像である.

証明. (1) 任意の $f \in \mathcal{S}_N$, $g \in \mathcal{T}_N$, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し, Leibniz ルール 8.3 より,

$$\mathrm{id}^\beta\, \partial^\alpha (fg) = \sum_{\gamma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma f (\mathrm{id}^\beta\, \partial^{\alpha-\gamma} g)$$

であり, 各 $\gamma \leqslant \alpha$ に対し $\mathrm{id}^\beta\, \partial^{\alpha-\gamma} g$ は高々多項式的に増加する連続関数であるから $\partial^\gamma f (\mathrm{id}^\beta\, \partial^{\alpha-\gamma} g) \in C_0(\mathbb{R}^N)$ である. よって $fg \in \mathcal{S}_N$ である. 任意の $g \in \mathcal{T}_N$ に対し (8.19) は明らかに線型写像である. $\mathcal{S}_N$ は Fréchet 空間であるから (8.19) が連続であることを示すには, 閉グラフ定理 3.102 より, $\mathcal{S}_N$ の列 $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ と $f, h \in \mathcal{S}_N$ に対し, $\mathcal{S}_N$ において

$$\lim_{i \to \infty} f_i = f, \quad \lim_{i \to \infty} f_i g = h$$

が成り立つと仮定して $h = fg$ が成り立つことを示せばよい. しかし $\mathcal{S}_N$ の列の収束は特に各点収束を意味するので,

$$h(x) = \lim_{i \to \infty} f_i(x) g(x) = f(x) g(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

であるから $h = fg$ である. よって (8.19) は連続である.

(2) チェインルール 4.7 より任意の多項式的に増加する関数 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ に対し,

$$f \circ \Phi : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto f(\Phi(x)) \in \mathbb{C}$$

が高々多項式的に増加する関数であることを示せば十分である. 微積分学の基本定理 5.206 より,

$$\Phi(x) - \Phi(0) = \sum_{j=1}^N \int_0^1 \partial_j \Phi(tx) x_j dt \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

であるから, $\|\partial_j \Phi\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\partial_j \Phi(x)| < \infty$ $(j = 1, \cdots, N)$ とおけば,

$$|\Phi(x)| \leqslant |\Phi(0)| + \left(\sum_{j=1}^N \|\partial_j \Phi\| \right) |x| \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N) \tag{8.22}$$

となる. ここで f は高々多項式的に増加する関数であるから, ある $C \in (0,\infty)$ と $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し,

$$|f(\Phi(x))| \leqslant C(1+|\Phi(x)|^2)^n \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

となるので (8.22) より $f \circ \Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ は高々多項式的に増加する関数である.

(3) 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ を取る. $f \circ \Phi \in \mathcal{S}_N$ を示すにはチェインルール 4.7 より任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $\mathrm{id}^\beta((\partial^\alpha f)\circ\Phi) \in C_0(\mathbb{R}^N)$ が成り立つことを示せば十分であるが, $\mathrm{id}^\beta \in \mathcal{T}_N$ だから (2) より,

$$g := (\mathrm{id}^\beta) \circ \Phi^{-1} \in \mathcal{T}_N$$

であり, (1) より $gf \in \mathcal{S}_N \subseteq C_0(\mathbb{R}^N)$ なので,

$$\mathrm{id}^\beta((\partial^\alpha f)\circ\Phi) = (gf)\circ\Phi \in C_0(\mathbb{R}^N)$$

である. よって任意の $f \in \mathcal{S}_N$ に対し $f \circ \Phi \in \mathcal{S}_N$ である. (8.20) は明らかに線型写像である. $\mathcal{S}_N$ は Fréchet 空間であるから (8.20) が連続であることを示すには, 閉グラフ定理 3.102 より, $\mathcal{S}_N$ の列 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ と $f, g \in \mathcal{S}_N$ に対し, $\mathcal{S}_N$ において,

$$\lim_{i\to\infty} f_i = f, \quad \lim_{i\to\infty} f_i \circ \Phi = g$$

が成り立つと仮定して $g = f \circ \Phi$ が成り立つことを示せばよい. しかし $\mathcal{S}_N$ における収束は各点収束を意味するので,

$$g(x) = \lim_{i\to\infty} f_i \circ \Phi(x) = f \circ \Phi(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

であるから $g = f \circ \Phi$ である. よって (8.20) は連続である.

(4) $p = \infty$ の場合は自明であるので $p \in [1,\infty)$ の場合を示す. $2np > N$ なる $n \in \mathbb{N}$ を取り固定する.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}(1+|x|^2)^n|f(x)| \leqslant p_n(f) \quad (\forall f \in \mathcal{S}_N)$$

より, 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ に対し,

$$|f(x)|^p \leqslant \frac{p_n(f)^p}{(1+|x|^2)^{np}} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

であるから, 極座標変換 6.99 より,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|f(x)|^p dx &\leqslant p_n(f)^p \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{(1+|x|^2)^{np}}dx = p_n(f)^p \mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})\int_0^\infty \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{np}}dr \\ &\leqslant p_n(f)^p \mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})\left(1+\int_1^\infty r^{N-1-2np}dr\right) \\ &= p_n(f)^p \mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})\left(1+\frac{1}{2np-N}\right) < \infty\end{aligned}$$

となる. よって $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ $(\forall f \in \mathcal{S}_N)$ であり,

$$R := \left(\mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})\left(1+\frac{1}{2np-N}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

とおくと,

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant Rp_n(f) \quad (\forall f \in \mathcal{S}_N)$$

が成り立つ. これより $\mathcal{S}_N$ の列 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が $f \in \mathcal{S}_N$ に収束するとすると,

$$\|f_i - f\|_p \leqslant Rp_n(f_i - f) \to 0 \quad (i \to \infty)$$

となるので (8.21) は連続である[*96].

□

[*96] 連続性の点列による特徴付け (命題 1.60) による.

定義 8.55 (Euclid 空間における内積の表記の簡略)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ における内積を,

$$x \cdot y := (x \mid y) = \sum_{j=1}^{N} x_j y_j \in \mathbb{R} \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^N)$$

とも表す.

定義 8.56 (L^1 関数の Fourier 変換)**.** 任意の $[f] \in L^1(\mathbb{R}^N)$ に対し, $\mathbb{R}^N$ 上の有界連続関数

$$\widehat{[f]} : \mathbb{R}^N \ni k \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ik\cdot x} dx \in \mathbb{C}$$

を定義する[*97]. $\widehat{[f]}$ を $[f]$ の Fourier 変換と言う. $\widehat{[f]}$ は $\widehat{f}$ とも表す.

定義 8.57. 任意の $y \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$e_y : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto e^{ix\cdot y} \in \mathbb{C}$$

と定義する.

命題 8.58 (L^1 関数の Fourier 変換の基本性質)**.** $L^1(\mathbb{R}^N)$ の Fourier 変換 (定義 8.56) に関して次が成り立つ.

(1) 任意の $[f] \in L^1(\mathbb{R}^N)$ と任意の $y \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$\widehat{T_y[f]} = e_{-y}\widehat{[f]}, \quad \widehat{[e_y f]} = T_y[f].$$

ただし, T_y は y による平行移動 (定義 8.44) である.

(2) 任意の $[f], [g] \in L^1(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\widehat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(x) g(x) dx.$$

(3) 任意の $f \in \mathcal{S}_N$, 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$\widehat{\partial^\alpha f} = i^{|\alpha|} \operatorname{id}^\alpha \widehat{f}.$$

(4) 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ に対し $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ であり, 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$\widehat{\operatorname{id}^\alpha f} = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \widehat{f}.$$

(5) 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ に対し $\widehat{f} \in \mathcal{S}_N$.

(6) 任意の $[f] \in L^1(\mathbb{R}^N)$ に対し $\widehat{[f]} \in C_0(\mathbb{R}^N)$.

証明. (1) Lebesgue 測度の平行移動不変性 5.210 より,

$$\begin{aligned}\widehat{T_y[f]}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) e^{-ik\cdot x} dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ik\cdot x} e^{-ik\cdot y} dx \\ &= e_{-y}(k)\widehat{[f]}(k) \quad (\forall k \in \mathbb{R}^N)\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}\widehat{[e_y f]}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{ix\cdot y} e^{-ix\cdot k} dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ix\cdot(k-y)} dx \\ &= \widehat{[f]}(k-y) = T_y[f](k) \quad (\forall k \in \mathbb{R}^N)\end{aligned}$$

である.

---

*97 任意の $k \in \mathbb{R}^N$ に対し $\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ik\cdot x} dx\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |f(x) e^{-ik\cdot x}| dx = \|f\|_1$ であるから $\widehat{[f]} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ は有界である. 連続性は Lebesgue 優収束定理 5.59 による.

(2) Tonelli の定理 5.84 より,

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ni (x,y) \mapsto f(x)g(y)e^{-ix\cdot y} \in \mathbb{C}$$

は $\mathbb{R}^{2N} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ の Lebesgue 測度に関して可積分であるから, Fubini の定理 5.85 より,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\widehat{g}(x)dx &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x)g(y)e^{-ix\cdot y}dy\right)dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x)g(y)e^{-ix\cdot y}dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(y)g(y)dy\end{aligned}$$

である.

(3) 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ と任意の $j \in \{1,\cdots,N\}$ に対し,

$$\widehat{\partial_j f} = i\,\mathrm{id}_j\,\widehat{f} \tag{8.23}$$

が成り立つことを示せば十分である.

$$\partial_j f(x)e^{-ik\cdot x} = \partial_j(fe_{-k})(x) + ik_j f(x)e^{-ik\cdot x} \quad (\forall k,x \in \mathbb{R}^N)$$

より,

$$\widehat{\partial_j f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}\partial_j(fe_{-k})(x)dx + ik_j\widehat{f}(k) \quad (\forall k \in \mathbb{R}^N)$$

である. これより (8.23) を示すには,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\partial_j(fe_{-k})(x)dx = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{R}^N) \tag{8.24}$$

を示せばよい. 任意の $k \in \mathbb{R}^N$ に対し $fe_{-k} \in C_0(\mathbb{R}^N)$ (無限遠で消える連続関数) なので Lebesgue 優収束定理 5.59 と微積分学の基本定理 5.206 より,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\partial_j(fe_{-k})(x)dx_j = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\partial_j(fe_{-k})(x)dx_j \\ &= \lim_{R\to\infty}\left((fe_{-k})(x_1,\cdots,x_{j-1},R,x_{j+1},\cdots,x_N) - (fe_{-k})(x_1,\cdots,x_{j-1},-R,x_{j+1},\cdots,x_N)\right) \\ &= 0 \quad (\forall x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_N \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

となる. よって Fubini の定理 5.85 より (8.24) が成り立つ.

(4) 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ と任意の $j \in \{1,\cdots,N\}$ に対し,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\widehat{f}(k+he_j) - \widehat{f}(k)}{h} = -i\widehat{(\mathrm{id}_j f)}(k) \quad (\forall k \in \mathbb{R}^N) \tag{8.25}$$

が成り立つことを示せば十分である. 任意の $k \in \mathbb{R}^N$ に対し微積分学の基本定理と Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{f}(k+he_j) - \widehat{f}(k)}{h} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-ik\cdot x}\left(\frac{e^{-ihx_j}-1}{h}\right)dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-ik\cdot x}(-ix_j)\left(\int_0^1 e^{-ithx_j}dt\right)dx \\ &\to \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)(-ix_j)e^{-ik\cdot x}dx \\ &= -i\widehat{(\mathrm{id}_j f)}(k) \quad (h\to 0)\end{aligned}$$

となる. よって (8.25) が成り立つ.

(5) (3), (4) より任意の $f \in \mathcal{S}_N$, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$\mathrm{id}^\beta \partial^\alpha \widehat{f} = (-i)^{|\alpha|} \mathrm{id}^\beta \widehat{(\mathrm{id}^\alpha f)} = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \widehat{(\partial^\beta \mathrm{id}^\alpha f)}$$

だから $\mathrm{id}^\beta \partial^\alpha \widehat{f}$ は有界連続関数である. よって $(1+|\mathrm{id}|^2)\,\mathrm{id}^\beta \partial^\alpha \widehat{f}$ も有界連続関数なので $\mathrm{id}^\beta \partial^\alpha \widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^N)$ (無限遠で消える連続関数) である. よって急減少関数空間の定義 8.50 より $\widehat{f} \in \mathcal{S}_N$ である.

(6) 任意の $[f] \in L^1(\mathbb{R}^N)$ に対し, 定理 6.88 の (3) より $D(\mathbb{R}^N)$ の列 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{i\to\infty}\|f_i - f\|_1 = 0$ なるものが取れる. よって,

$$\sup_{k\in\mathbb{R}^N} |\widehat{f_i}(k) - \widehat{f}(k)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \|f_i - f\|_1 \to 0 \quad (i \to \infty) \tag{8.26}$$

である. ここで明らかに $D(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}_N$ なので (5) より $\widehat{f_i} \in \mathcal{S}_N \subseteq C_0(\mathbb{R}^N)$ $(\forall i \in \mathbb{N})$ である. そして無限遠で消える連続関数の空間 $C_0(\mathbb{R}^N)$ は命題 5.160 より sup ノルムで Banach 空間なので (8.26) より $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^N)$ である.

□

定理 8.59. $g_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ を,

$$g_N(x) := \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

と定義する. このとき $g_N \in \mathcal{S}_N$ であり,

$$\widehat{g_N} = g_N \tag{8.27}$$

が成り立つ.

証明. 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $\partial^\alpha g_N = p_\alpha g_N$ なる多項式 $p_\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ が取れる. また,

$$\frac{1}{g_N(x)} = \exp\left(\frac{|x|^2}{2}\right) \geqslant \frac{|x|^{2n}}{2^n n!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall n \in \mathbb{N})$$

であるから, 任意の $\beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $|\beta| < 2n$ なる $n \in \mathbb{N}$ を取れば,

$$|x^\beta g_N(x)| \leqslant |x|^{|\beta|} \frac{2^n n!}{|x|^{2n}} = \frac{2^n n!}{|x|^{2n-|\beta|}} \to 0 \quad (|x| \to \infty)$$

が成り立つ. これより任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $\mathrm{id}^\beta \partial^\alpha g_N \in C_0(\mathbb{R}^N)$ (無限遠で消える連続関数) なので $\mathcal{S}_N$ の定義 8.50 より $g_N \in \mathcal{S}_N$ である. 任意の $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ に対し $g_N(x) = g_1(x_1)\cdots g_1(x_N)$ であり, Fubini の定理 5.85 より, 任意の $k = (k_1, \cdots, k_N) \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$\widehat{g_N}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x|^2}{2}} e^{-ik\cdot x} dx = \prod_{j=1}^N \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_j^2}{2}} e^{-ik_j x_j} dx_j = \widehat{g_1}(k_1)\cdots\widehat{g_1}(k_N)$$

である. よって (8.27) を示すには $N = 1$ の場合を示せば十分である. 以後, $g := g_1$ とする. 明らかに

$$g' + \mathrm{id}\, g = 0$$

であり, この両辺を Fourier 変換すると, 命題 8.58 の (3), (4) より,

$$\widehat{g}' + \mathrm{id}\, \widehat{g} = 0$$

を得る. よって,

$$\left(\frac{\widehat{g}}{g}\right)' = \frac{\widehat{g}'}{g} - \frac{\widehat{g} g'}{g^2} = \frac{-\mathrm{id}\, \widehat{g}}{g} - \frac{-\mathrm{id}\, \widehat{g} g}{g^2} = 0$$

だから平均値の定理 4.9 より,

$$\frac{\widehat{g}(x)}{g(x)} = \frac{\widehat{g}(0)}{g(0)} = \widehat{g}(0) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \tag{8.28}$$

が成り立つ. ここで Fubini の定理と極座標変換 6.99 より,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy = 2\pi\int_0^\infty re^{-\frac{r^2}{2}}dr = 2\pi\int_0^\infty \frac{d}{dr}(-e^{-\frac{r^2}{2}})dr = 2\pi$$

[*98]であるから,

$$\widehat{g}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1$$

である. よって (8.28) より $\widehat{g} = g$ が成り立つ. □

定理 8.60 (Fourier 逆変換公式)**.** $f \in C_b(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$[*99]が $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ を満たすならば,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(k)e^{ik\cdot x}dk \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

が成り立つ.

証明. $g : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto \exp(-\frac{|x|^2}{2}) \in \mathbb{R}$ に対し, 定理 8.59 と Lebesgue 優収束定理 5.59, 変数変換 5.215 より,

$$\begin{aligned}(2\pi)^{\frac{N}{2}}f(0) &= (2\pi)^{\frac{N}{2}}\widehat{g}(0)f(0) = \int_{\mathbb{R}^N} g(x)f(0)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)f\left(\frac{x}{n}\right)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} n^N g(nx)f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} n^N\widehat{g}(nx)f(x)dx \end{aligned} \tag{8.29}$$

となる. ここで任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $g_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{S}_N$ を,

$$g_{\frac{1}{n}}(x) := g\left(\frac{x}{n}\right) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

とおくと, 変数変換 5.215 より,

$$\widehat{g_{\frac{1}{n}}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} g_{\frac{1}{n}}(y)e^{-ix\cdot y}dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} n^N g(y)e^{-inx\cdot y}dy = n^N\widehat{g}(nx) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^N)$$

であるから, (8.29) と命題 8.58 の (2) より,

$$\begin{aligned}(2\pi)^{\frac{N}{2}}f(0) &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} n^N\widehat{g}(nx)f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{g_{\frac{1}{n}}}(x)f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} g_{\frac{1}{n}}(x)\widehat{f}(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} g\left(\frac{x}{n}\right)\widehat{f}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(x)dx\end{aligned}$$

となる. よって,

$$f(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(k)dk \tag{8.30}$$

が成り立つ. 任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対し f の $-x$ による平行移動 (定義 8.44) は $T_{-x}f \in C_b(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ であり, 命題 8.58 の (1) より $\widehat{T_{-x}f} = e_x\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ であるから, f を $T_{-x}f$ に置き換えて上の結果 (8.30) を適用すると,

$$f(x) = T_{-x}f(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}(\widehat{T_{-x}f})(k)dk = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(k)e^{ik\cdot x}dk$$

を得る. □

定義 8.61 (L^1 関数の Fourier 逆変換)**.** 任意の $[f] \in L^1(\mathbb{R}^N)$ に対し, $\mathbb{R}^N$ 上の有界連続関数

$$\widecheck{[f]} : \mathbb{R}^N \ni k \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{ik\cdot x}dx \in \mathbb{C}$$

を定義する[*100]. $\widecheck{[f]}$ を $[f]$ の Fourier 逆変換と言う. $\widecheck{[f]}$ は $\check{f}$ とも表す.

---

*98 命題 6.97 の (4) より $\mu_{S_1}(S_1) = 2\pi$ であることに注意.

*99 $C_b(\mathbb{R}^N)$ は $\mathbb{R}^N$ 上の複素数値有界連続関数全体.

*100 連続性は Lebesgue 優収束定理 5.59 による.

命題 8.62. $L^1(\mathbb{R}^N)$ の Fourier 逆変換 (定義 8.61) に関して次が成り立つ.

(1) 任意の $[f] \in L^1(\mathbb{R}^N)$ と任意の $y \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$\widecheck{T_y[f]} = e_y[\check{f}], \quad \widecheck{[e_y f]} = T_{-y}[f].$$

ただし $e_y : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto e^{ix\cdot y} \in \mathbb{C}$ であり, T_y は y による平行移動 (定義 8.44) である.

(2) 任意の $[f], [g] \in L^1(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\check{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \check{f}(x)g(x)dx.$$

(3) 任意の $f \in \mathcal{S}_N$, 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$\widecheck{\partial^\alpha f} = (-i)^{|\alpha|}\,\mathrm{id}^\alpha\,\check{f}.$$

(4) 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ に対し $\check{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ であり, 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$\widecheck{\mathrm{id}^\alpha f} = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha \check{f}.$$

(5) 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ に対し $\check{f} \in \mathcal{S}_N$.

(6) 任意の $[f] \in L^1(\mathbb{R}^N)$ に対し $\widecheck{[f]} \in C_0(\mathbb{R}^N)$.

(7) $g : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) \in \mathbb{R}$ に対し $\check{g} = g$.

(8) $f \in C_b(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ が $\check{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ を満たすならば,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \check{f}(k)e^{-ik\cdot x}dk \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

が成り立つ.

証明. (1) ~ (6) は命題 8.58 と, (7) は定理 8.59 と, (8) は定理 8.60 と全く同様にして証明できる. □

定理 8.63 (Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ の自己同型写像としての Fourier 変換)**.** 急減少関数空間 $\mathcal{S}_N$ 上の Fourier 変換

$$\mathcal{S}_N \ni f \mapsto \hat{f} \in \mathcal{S}_N \tag{8.31}$$

は Fréchet 空間同型写像である. そしてこの逆写像は Fourier 逆変換

$$\mathcal{S}_N \ni f \mapsto \check{f} \in \mathcal{S}_N \tag{8.32}$$

である. また,

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x), \quad \check{\check{f}}(x) = f(-x) \quad (\forall f \in \mathcal{S}_N, \forall x \in \mathbb{R}^N)$$

が成り立つ.

証明. 命題 8.58 の (5) より任意の $f \in \mathcal{S}_N$ に対し $\hat{f} \in \mathcal{S}_N$ であり, 命題 8.54 の (4) より $\mathcal{S}_N \subseteq C_b(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ であるから, Fourier 逆変換公式 8.60 より, 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ に対し,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(k)e^{ik\cdot x}dk = \check{\hat{f}}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

である. また同様に命題 8.62 の (5), (7) より任意の $f \in \mathcal{S}_N$ に対し $\check{f} \in \mathcal{S}_N$ であり,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \check{f}(k)e^{-ik\cdot x}dk = \hat{\check{f}}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

である. よって (8.31) と (8.32) はそれぞれ線型同型写像で互いに逆写像である. (8.31) が連続であることを示す. Fréchet 空間における閉グラフ定理 3.102 より, $\mathcal{S}_N$ の列 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ と $f, g \in \mathcal{S}_N$ が $\mathcal{S}_N$ において,

$$\lim_{i\to\infty} f_i = f, \quad \lim_{i\to\infty} \hat{f}_i = g \tag{8.33}$$

を満たす仮定とし, $g = \widehat{f}$ が成り立つことを示せばよい. 命題 8.54 の (4) より (8.33) の左の式は $\lim_{i\to\infty}\|f_i - f\|_1 = 0$ を意味するので,

$$\sup_{k\in\mathbb{R}^N}|\widehat{f}_i(k) - \widehat{f}(k)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\|f_i - f\|_1 \to 0 \quad (i \to \infty)$$

となる. よって $(\widehat{f}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $\widehat{f}$ に一様収束する. また (8.33) の右の式は特に $(\widehat{f}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が g に一様収束することを意味する[*101]. ゆえに $\widehat{f} = g$ である. これで (8.31) が連続であることが示された. 全く同様にして (8.32) が連続であることも示される. よって (8.31) は同相写像である[*102]. 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ に対し Fourier 逆変換公式 8.60 より,

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(k)e^{-ik\cdot x}dk = f(-x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

であり, 命題 8.62 の (8) より,

$$\check{\check{f}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}\check{f}(k)e^{ik\cdot x}dk = f(-x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

である. □

8.5 緩増加超関数空間 $\mathcal{S}_N'$ と Fourier 変換, Plancherel の定理

命題 8.64 (Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ における $D(\mathbb{R}^N)$ の稠密性)**.** $D(\mathbb{R}^N)$ は急減少関数空間 $\mathcal{S}_N$ (定義 8.50) において稠密である.

証明. Urysohn の補題 6.43 により $\omega \in D(\mathbb{R}^N)$ で,

$$0 \leqslant \omega(x) \leqslant 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N), \quad \omega(x) = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant 1) \tag{8.34}$$

を満たすものを取り, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\omega_{\frac{1}{n}}(x) := \omega\left(\frac{x}{n}\right) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

として $\omega_{\frac{1}{n}} \in D(\mathbb{R}^N)$ を定義する. このとき (8.34) より,

$$0 \leqslant \omega_{\frac{1}{n}}(x) \leqslant 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N), \quad \omega_{\frac{1}{n}}(x) = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant n) \tag{8.35}$$

である. 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ を取り, $D(\mathbb{R}^N)$ の列 $(\omega_{\frac{1}{n}}f)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathcal{S}_N$ の位相で f に収束することを示せばよい. Leibniz ルール 8.3 より任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$\partial^\alpha(\omega_{\frac{1}{n}}f)(x) = \sum_{0<\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}n^{-|\beta|}\partial^\beta\omega\left(\frac{x}{n}\right)\partial^{\alpha-\beta}f(x) + \omega_{\frac{1}{n}}(x)\partial^\alpha f(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^N)$$

となる. よって任意の $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$x^\gamma\partial^\alpha(\omega_{\frac{1}{n}}f)(x) - \omega_{\frac{1}{n}}(x)x^\gamma\partial^\alpha f(x) = \sum_{0<\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}n^{-|\beta|}\partial^\beta\omega\left(\frac{x}{n}\right)x^\gamma\partial^{\alpha-\beta}f(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^N)$$

となるので, sup ノルムに関して,

$$\|\mathrm{id}^\gamma\,\partial^\alpha(\omega_{\frac{1}{n}}f) - \omega_{\frac{1}{n}}\,\mathrm{id}^\gamma\,\partial^\alpha f\| \leqslant \sum_{0<\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}n^{-|\beta|}\|\partial^\beta\omega\|\|\mathrm{id}^\gamma\,\partial^{\alpha-\beta}f\| \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{8.36}$$

が成り立つ. 任意の $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}_+^N$ を取り固定する. $\mathcal{S}_N$ の定義 8.50 より $\mathrm{id}^\gamma\,\partial^\alpha f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ (無限遠で消える連続関数) であるから, 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し, 十分大きい $n_0 \in \mathbb{N}$ を取れば,

$$|x^\gamma\partial^\alpha f(x)| \leqslant \varepsilon \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N : |x| > n_0)$$

[*101] 急減少関数空間における収束の特徴付け (命題 8.48) を参照.
[*102] Fréchet 空間における開写像定理 3.99 を用いても示せる.

となる. よって (8.35) より任意の $n \in \mathbb{N}(n \geqslant n_0)$ に対し sup ノルムに関して,

$$\|\omega_{\frac{1}{n}}\,\mathrm{id}^{\gamma}\,\partial^{\alpha} f - \mathrm{id}^{\gamma}\,\partial^{\alpha} f\| \leqslant \varepsilon$$

となるから,

$$\lim_{n\to\infty}\|\omega_{\frac{1}{n}}\,\mathrm{id}^{\gamma}\,\partial^{\alpha} f - \mathrm{id}^{\gamma}\,\partial^{\alpha} f\| = 0$$

が成り立つ. これを (8.36) と合わせると,

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathrm{id}^{\gamma}\,\partial^{\alpha}(\omega_{\frac{1}{n}} f) - \mathrm{id}^{\gamma}\,\partial^{\alpha} f\| = 0$$

を得る. これが任意の $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}_+^N$ に対して成り立つから, 命題 8.48 より $\mathcal{S}_N$ の位相で $(\omega_{\frac{1}{n}} f)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に収束する. ゆえに $D(\mathbb{R}^N)$ は $\mathcal{S}_N$ で稠密である. □

定理 8.65. 線型汎関数 $u : D(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ が Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ (定義 8.50) の相対位相で連続であるとする. このとき,

(1) $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ である.

(2) ある $n_0 \in \mathbb{N}$ と $C \in (0, \infty)$ が存在し,

$$|u(\varphi)| \leqslant p_{n_0}(\varphi) \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N))$$

が成り立つ. ただし,

$$p_n : \mathcal{S}_N \ni f \mapsto \max_{|\alpha|\leqslant n}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}(1+|x|^2)^n|\partial^{\alpha} f(x)| \in [0,\infty) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{8.37}$$

である.

(3) u は $\mathcal{S}_N$ 上の線型汎関数に拡張でき, その拡張は一意的である.

証明. (1) $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ を示すには, $D'(\mathbb{R}^N)$ の定義 8.18 より, 任意のコンパクト集合 $K \subseteq \mathbb{R}^N$ に対し u の Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.14) 上への制限

$$D_K(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto u(\varphi) \in \mathbb{C} \tag{8.38}$$

が連続であることを示せばよい. $D_K(\mathbb{R}^N)$ の列 $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が $\varphi \in D_K(\mathbb{R}^N)$ に収束するならば, 注意 8.15 より, 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $(\partial^{\alpha}\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $\partial^{\alpha}\varphi$ に一様収束するから, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|x^{\beta}\partial^{\alpha}\varphi_i(x) - x^{\beta}\partial^{\alpha}\varphi(x)| \leqslant \sup_{x\in K}|x^{\beta}|\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|\partial^{\alpha}\varphi_i(x) - \partial^{\alpha}\varphi(x)| \to 0 \quad (i \to \infty)$$

となる. よって命題 8.48 より $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{S}_N$ の位相で φ に収束するので, $u : D(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ が $\mathcal{S}_N$ の相対位相で連続であることから,

$$\lim_{i\to\infty} u(\varphi_i) = u(\varphi)$$

が成り立つ. よって点列による連続性の特徴付け (命題 1.60) より (8.38) は連続であるので, $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ である.

(2) $u : D(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ は $\mathcal{S}_N$ の相対位相で連続なので,

$$\{\varphi \in D(\mathbb{R}^N) : |u(\varphi)| < 1\}$$

は $\mathcal{S}_N$ の相対位相に関する $0 \in D(\mathbb{R}^N)$ の開近傍である. そして定義 8.50 より $\mathcal{S}_N$ の位相は $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が誘導するセミノルム位相なので, セミノルム位相の基本性質 (命題 3.59 の (3)) より, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ と $\varepsilon \in (0, \infty)$ が存在し,

$$\bigcap_{k=1}^{n_0}\{\varphi \in D(\mathbb{R}^N) : p_k(\varphi) < \varepsilon\} \subseteq \{\varphi \in D(\mathbb{R}^N) : |u(\varphi)| < 1\} \tag{8.39}$$

が成り立つ. ここで (8.37) より,

$$p_1(\varphi) \leqslant p_2(\varphi) \leqslant \cdots \leqslant p_{n_0}(\varphi) \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N))$$

であるから (8.39) は,

$$\{\varphi \in D(\mathbb{R}^N) : p_{n_0}(\varphi) < \varepsilon\} \subseteq \{\varphi \in D(\mathbb{R}^N) : |u(\varphi)| < 1\} \tag{8.40}$$

を意味する.

$$p_{n_0}\left(\frac{\varepsilon\varphi}{p_{n_0}(\varphi)+\delta}\right) < \varepsilon \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N), \forall \delta \in (0,\infty))$$

であるから, (8.40) より,

$$\left| u\left(\frac{\varepsilon\varphi}{p_{n_0}(\varphi)+\delta}\right)\right| < 1 \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N), \forall \delta \in (0,\infty))$$

であり, 従って,

$$|u(\varphi)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}(p_{n_0}(\varphi)+\delta) \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N), \forall \delta \in (0,\infty))$$

が成り立つ. $\delta \in (0,\infty)$ の任意性より,

$$|u(\varphi)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} p_{n_0}(\varphi) \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N))$$

を得る. よって C を $\frac{1}{\varepsilon}$ とおけば求める結果を得る.

(3) (2) よりある $n_0 \in \mathbb{N}$ と $C \in (0,\infty)$ が存在し,

$$|u(\varphi)| \leqslant C p_{n_0}(\varphi) \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N)) \tag{8.41}$$

が成り立つ.

$$p_{n_0} : \mathcal{S}_N \ni \varphi \mapsto \max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1+|x|^2)^{n_0} |\partial^\alpha \varphi(x)| \in [0,\infty)$$

は $\mathcal{S}_N$ 上のノルムである. 命題 8.64 より, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}_N$ に対し $D(\mathbb{R}^N)$ の列 $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ で $\mathcal{S}_N$ の Fréchet 空間としての位相で φ に収束するものが取れる. 特に,

$$\lim_{i \to \infty} p_{n_0}(\varphi_i - \varphi) = 0$$

が成り立つのでノルム空間 $(\mathcal{S}_N, p_{n_0})$ において $D(\mathbb{R}^N)$ は稠密である. よって (8.41) と命題 3.19 より $u : D(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ はノルム空間 $(\mathcal{S}_N, p_{n_0})$ 上のノルムが C 以下の有界線型汎関数 $\tilde{u} : \mathcal{S}_N \to \mathbb{C}$ に拡張できる. $\mathcal{S}_N$ の列 $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ が $\mathcal{S}_N$ の Fréchet 空間としての位相で $\varphi \in \mathcal{S}_N$ に収束するならば, 特に $\lim_{i \to \infty} p_{n_0}(\varphi_i - \varphi) = 0$ であるから,

$$|\tilde{u}(\varphi_i) - \tilde{u}(\varphi)| = |\tilde{u}(\varphi_i - \varphi)| \leqslant C p_{n_0}(\varphi_i - \varphi) \to 0 \quad (i \to \infty)$$

が成り立つ. よって連続性の点列による特徴付け (命題 1.60) より $\tilde{u} : \mathcal{S}_N \to \mathbb{C}$ は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型汎関数である. これで存在が示せた. 一意性は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ における $D(\mathbb{R}^N)$ の稠密性 (命題 8.64) による.

□

定義 8.66 (緩増加超関数空間 $\mathcal{S}'_N$)**.** 線型汎関数 $u : D(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ で, Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ (定義 8.50) の相対位相で連続であるもの (定理 8.65 の (1) より $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ であることに注意) を $\mathbb{R}^N$ 上の緩増加超関数と言う. $\mathbb{R}^N$ 上の緩増加超関数全体がなす $D'(\mathbb{R}^N)$ の線型部分空間を $\mathcal{S}'_N$ と表し, $\mathcal{S}'_N$ を $\mathbb{R}^N$ 上の緩増加超関数空間と言う. 定理 8.65 の (3) より任意の $u \in \mathcal{S}'_N$ に対し u は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型汎関数に一意拡張できる. そこでその拡張もそのまま u と表す. こうして $\mathcal{S}'_N$ は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型汎関数全体のなす線型空間と同一視できる.

命題 8.67. 次が成り立つ.

(1) 任意の $u \in \mathcal{S}'_N$ と任意の $f \in \mathcal{T}_N$ (緩増加関数 (定義 8.53)) に対し, $fu \in \mathcal{S}'_N$[*103] であり,

$$(fu)(\varphi) = u(f\varphi) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}_N)$$

である.

[*103] 滑らかな関数と超関数の積の定義 8.27 を参照.

(2) $\Phi:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ を C^∞ 級同相写像で, Φ,Φ^{-1} の 1 階以上の全ての偏導関数が有界であるものとすると, 任意の $u\in\mathcal{S}'_N$ に対し $u\circ\Phi\in\mathcal{S}'_N$[*104]であり,

$$(u\circ\Phi)(\varphi)=u\left((\varphi\circ\Phi^{-1})|\mathrm{det}\Phi^{-1\prime}|\right)\quad(\forall\varphi\in\mathcal{S}_N)$$

である.

(3) 任意の $p\in[1,\infty]$ に対し $L^p(\mathbb{R}^N)\subseteq\mathcal{S}'_N$ である.

(4) $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ が高々多項式的に増加する Borel 関数 (定義 8.51) ならば, $[f]\in\mathcal{S}'_N$ である. 特に $\mathcal{T}_N\subseteq\mathcal{S}'_N$ である.

証明. (1) 命題 8.54 の (1) より,

$$\mathcal{S}_N\ni\varphi\mapsto f\varphi\in\mathcal{S}_N$$

は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型写像であるから,

$$\mathcal{S}_N\ni\varphi\mapsto u(f\varphi)\in\mathbb{C}$$

は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型汎関数である. ゆえに $fu\in\mathcal{S}'_N$ であり, $(fu)(\varphi)=u(f\varphi)$ $(\forall\varphi\in\mathcal{S}_N)$ である.

(2)

$$|\mathrm{det}\Phi^{-1\prime}|:\mathbb{R}^N\ni x\mapsto|\mathrm{det}\Phi^{-1\prime}(x)|\in(0,\infty)$$

は全ての偏導関数が有界な C^∞ 級関数であるから, 命題 8.54 の (1), (3) より,

$$\mathcal{S}_N\ni\varphi\mapsto(\varphi\circ\Phi^{-1})|\mathrm{det}\Phi^{-1\prime}|\in\mathcal{S}_N$$

は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型写像である. よって,

$$\mathcal{S}_N\ni\varphi\mapsto u\left((\varphi\circ\Phi^{-1})|\mathrm{det}\Phi^{-1\prime}|\right)\in\mathbb{C}$$

は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型汎関数である. ゆえに $u\circ\Phi\in\mathcal{S}'_N$ であり,

$$(u\circ\Phi)(\varphi)=u\left((\varphi\circ\Phi^{-1})|\mathrm{det}\Phi^{-1\prime}|\right)\quad(\forall\varphi\in\mathcal{S}_N)$$

である.

(3) 任意の $[f]\in L^p(\mathbb{R}^N)$ を取る. $q\in[1,\infty]$ を p の共役指数 (定義 5.118) とする. Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ の列 $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が $\varphi\in\mathcal{S}_N$ に収束するならば, 命題 8.54 の (4) より,

$$\lim_{i\to\infty}\|\varphi_i-\varphi\|_q=0$$

となるから, Hölder の不等式 5.130 より,

$$\begin{aligned}|u_{[f]}(\varphi_i)-u_{[f]}(\varphi)|&=\left|\int_{\mathbb{R}^N}f(x)\varphi_i(x)dx-\int_{\mathbb{R}^N}f(x)\varphi(x)dx\right|=\left|\int_{\mathbb{R}^N}f(x)(\varphi_i(x)-\varphi(x))dx\right|\\&\leqslant\|[f]\|_p\|\varphi_i-\varphi\|_q\to0\quad(i\to\infty)\end{aligned}$$

となる. よって連続性の点列による特徴付け (命題 1.60) より,

$$u_{[f]}:\mathcal{S}_N\ni\varphi\mapsto\int_{\mathbb{R}^N}f(x)\varphi(x)dx\in\mathbb{C}$$

は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型汎関数だから $[f]=u_{[f]}\in\mathcal{S}'_N$ である.

(4) $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ が高々多項式的に増加する Borel 関数ならば, ある $C\in(0,\infty)$ と $n\in\mathbb{Z}_+$ が存在し,

$$|f(x)|\leqslant C(1+|x|^2)^n\quad(\forall x\in\mathbb{R}^N)$$

[*104] 超関数の変数変換の定義 8.42 を参照.

となる. Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ の列 $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が $\varphi \in \mathcal{S}_N$ に収束するならば, 命題 8.54 の (1) より Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ において $((1+|\mathrm{id}|^2)^n\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $(1+|\mathrm{id}|^2)^n\varphi$ に収束する. よって命題 8.54 の (4) より,

$$\int_{\mathbb{R}^N}(1+|x|^2)^n|\varphi_i(x)-\varphi(x)|dx = \|(1+|\mathrm{id}|^2)^n\varphi_i-(1+|\mathrm{id}|^2)^n\varphi\|_1 \to 0 \ \ (i\to\infty)$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}|u_{[f]}(\varphi_i)-u_{[f]}(\varphi)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N}f(x)\varphi_i(x)dx-\int_{\mathbb{R}^N}f(x)\varphi(x)dx\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^N}|f(x)||\varphi_i(x)-\varphi(x)|dx\\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^N}(1+|x|^2)^n|\varphi_i(x)-\varphi(x)|dx \to 0 \ \ (i\to\infty)\end{aligned}$$

が成り立つ. よって連続性の点列による特徴付け (命題 1.60) より,

$$u_{[f]}:\mathcal{S}_N \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^N}f(x)\varphi(x)dx \in \mathbb{C}$$

は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型汎関数だから $[f]=u_{[f]}\in\mathcal{S}_N'$ である.

□

定義 8.68 (緩増加超関数の Fourier 変換と Fourier 逆変換)**.** 任意の $u\in\mathcal{S}_N'$ に対し,

$$\begin{aligned}\hat{u}&:\mathcal{S}_N\ni\varphi\mapsto u(\hat{\varphi})\in\mathbb{C},\\ \check{u}&:\mathcal{S}_N\ni\varphi\mapsto u(\check{\varphi})\in\mathbb{C}\end{aligned}$$

を定義すると, 定理 8.63 より $\hat{u},\check{u}\in\mathcal{S}_N'$ であり,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_N'\ni u\mapsto \hat{u}\in\mathcal{S}_N',\\ \mathcal{S}_N'\ni u\mapsto \check{u}\in\mathcal{S}_N'\end{aligned}$$

はそれぞれ線型同型写像で互いに逆写像である. $u\in\mathcal{S}_N'$ に対し $\hat{u}\in\mathcal{S}_N'$ を u の Fourier 変換, $\check{u}\in\mathcal{S}_N'$ を u の Fourier 逆変換と言う.

注意 8.69 (L^1 関数の Fourier 変換と緩増加超関数の Fourier 変換の整合性)**.** 命題 8.67 の (3) より $L^1(\mathbb{R}^N)\subseteq\mathcal{S}_N'$ である. 今, 任意の $[f]\in L^1(\mathbb{R}^N)$ に対し, $[f]$ と同一視される (定義 8.24 を参照) 緩増加超関数

$$u_{[f]}:\mathcal{S}_N\ni\varphi\mapsto\int_{\mathbb{R}^N}f(x)\varphi(x)dx\in\mathbb{C}$$

の Fourier 変換 $\widehat{u_{[f]}}\in\mathcal{S}_N'$ は, 命題 8.58 の (2) より,

$$\widehat{u_{[f]}}(\varphi)=u_{[f]}(\hat{\varphi})=\int_{\mathbb{R}^N}f(x)\hat{\varphi}(x)dx=\int_{\mathbb{R}^N}\hat{f}(x)\varphi(x)dx=u_{\widehat{[f]}}(\varphi)\ \ (\forall\varphi\in\mathcal{S}_N)$$

となる. よって $[f]\in L^1(\mathbb{R}^N)$ の L^1 関数としての Fourier 変換 (定義 8.56) と緩増加超関数としての Fourier 変換 (定義 8.68) は一致する. Fourier 逆変換に関しても同様である.

命題 8.70. 任意の $u\in\mathcal{S}_N'$ と任意の $\alpha\in\mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$\begin{aligned}\widehat{(\partial^\alpha u)}=i^{|\alpha|}\,\mathrm{id}^\alpha\,\hat{u},\ \ \widehat{(\mathrm{id}^\alpha u)}=i^{|\alpha|}\partial^\alpha\hat{u},\\ \widecheck{(\partial^\alpha u)}=(-i)^{|\alpha|}\,\mathrm{id}^\alpha\,\check{u},\ \ \widecheck{(\mathrm{id}^\alpha u)}=(-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha\check{u}\end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. 命題 8.58 の (3), (4) より任意の $\varphi\in\mathcal{S}_N$ に対し,

$$\begin{aligned}\widehat{(\partial^\alpha u)}(\varphi)&=\partial^\alpha u(\hat{\varphi})=(-1)^{|\alpha|}u(\partial^\alpha\hat{\varphi})=i^{|\alpha|}u(\widehat{\mathrm{id}^\alpha\varphi})=i^{|\alpha|}\,\mathrm{id}^\alpha\,\hat{u}(\varphi),\\ \widehat{(\mathrm{id}^\alpha u)}(\varphi)&=\mathrm{id}^\alpha\,u(\hat{\varphi})=u(\mathrm{id}^\alpha\,\hat{\varphi})=(-i)^{|\alpha|}u(\widehat{\partial^\alpha\varphi})=(-i)^{|\alpha|}\hat{u}(\partial^\alpha\varphi)=i^{|\alpha|}\partial^\alpha\hat{u}(\varphi)\end{aligned}$$

である. よって上段が成り立つ. 命題 8.62 の (3), (4) より下段も全く同様にして示せる. □

定理 8.71 (Plancherel の定理)**.** $L^2(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}'_N$ (命題 8.67 の (3)) の元の Fourier 変換は $L^2(\mathbb{R}^N)$ に属し,

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \ni [f] \mapsto \widehat{[f]} \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

は Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上のユニタリ作用素 (定義 5.143) である. そして,

$$\mathcal{F}^{-1}[f] = \mathcal{F}^*[f] = \widecheck{[f]} \ \ (\forall [f] \in L^2(\mathbb{R}^N))$$

が成り立つ.

証明. Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^N)$ の内積を,

$$([f] \mid [g])_2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{g(x)}dx \ \ (\forall [f], [g] \in L^2(\mathbb{R}^N))$$

と表す. 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ に対し,

$$\begin{aligned}
\overline{\widehat{f}(k)} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \overline{f(x)e^{-ik\cdot x}}dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \overline{f(x)}e^{ik\cdot x}dx = \widecheck{\overline{f}}(k), \\
\overline{\widecheck{f}(k)} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \overline{f(x)e^{ik\cdot x}}dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \overline{f(x)}e^{-ik\cdot x}dx = \widehat{\overline{f}}(k) \ \ (\forall k \in \mathbb{R}^N)
\end{aligned}$$

である. これと命題 8.58 の (2) より, 任意の $f, g \in \mathcal{S}_N$ に対し,

$$\begin{aligned}
(\widehat{f} \mid \widehat{g})_2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(x)\widecheck{\overline{g}}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \widecheck{\widehat{f}}(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{g(x)}dx = (f \mid g)_2, \\
(\widecheck{f} \mid \widecheck{g})_2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \widecheck{f}(x)\overline{\widecheck{g}(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^N} \widecheck{f}(x)\widehat{\overline{g}}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\widecheck{f}}(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{g(x)}dx = (f \mid g)_2
\end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_N, \|\cdot\|_2) \ni f \mapsto \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N), \\
(\mathcal{S}_N, \|\cdot\|_2) \ni f \mapsto \widecheck{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)
\end{aligned}$$

はそれぞれ等長線型作用素である. 定理 6.88 の (3) より $\mathcal{S}_N$ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ において稠密なので, 命題 3.19 より Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の等長線型作用素

$$\mathcal{F}, \mathcal{F}' : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$$

で,

$$\mathcal{F}f = \widehat{f}, \ \ \mathcal{F}'f = \widecheck{f} \ \ (\forall f \in \mathcal{S}_N)$$

なるものが一意存在する. そして,

$$\mathcal{F}\mathcal{F}'f = \mathcal{F}'\mathcal{F}f = f \ \ (\forall f \in \mathcal{S}_N)$$

より,

$$\mathcal{F}\mathcal{F}'[f] = \mathcal{F}'\mathcal{F}[f] = [f] \ \ (\forall [f] \in L^2(\mathbb{R}^N))$$

であるから, $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ は Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上のユニタリ作用素であり, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ である. 任意の $[f] \in L^2(\mathbb{R}^N)$ に対し, $[f], \mathcal{F}[f], \mathcal{F}^*[f] \in L^2(\mathbb{R}^N)$ と同一視される緩増加超関数を $u_{[f]}, u_{\mathcal{F}[f]}, u_{\mathcal{F}^*[f]} \in \mathcal{S}'_N$ とおき, $[f] \in L^2(\mathbb{R}^N)$ に L^2 ノルムで収束する $\mathcal{S}_N$ の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取ると, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}_N$ に対し, 命題 8.58 の (2) より,

$$\begin{aligned}
\widehat{u_{[f]}}(\varphi) = u_{[f]}(\widehat{\varphi}) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\widehat{\varphi}(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f_n}(x)\varphi(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{F}f_n)(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{F}[f])(x)\varphi(x)dx = u_{\mathcal{F}[f]}(\varphi),
\end{aligned}$$

命題 8.62 の (2) より,

$$\begin{aligned}\widetilde{u_{[f]}}(\varphi) &= u_{[f]}(\check{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\check{\varphi}(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\check{\varphi}(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \widecheck{f_n}(x)\varphi(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(\mathcal{F}^*f_n)(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N}(\mathcal{F}^*[f])(x)\varphi(x)dx = u_{\mathcal{F}^*[f]}(\varphi)\end{aligned}$$

となる. よって,

$$\widehat{[f]} = \mathcal{F}[f] \in L^2(\mathbb{R}^N), \quad \widecheck{[f]} = \mathcal{F}^*[f] \in L^2(\mathbb{R}^N) \quad (\forall [f] \in L^2(\mathbb{R}^N))$$

であるので証明が終わる. □

8.6 台がコンパクトな超関数の空間 $\mathcal{E}'_N$

命題 8.72 (Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ における $D(\mathbb{R}^N)$ の稠密性)**.** $D(\mathbb{R}^N)$ は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.11) において稠密である.

証明. Urysohn の補題 6.43 により $\omega \in D(\mathbb{R}^N)$ で,

$$0 \leqslant \omega(x) \leqslant 1, \quad \omega(x) = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant 1) \tag{8.42}$$

を満たすものを取り, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\omega_{\frac{1}{n}} \in D(\mathbb{R}^N)$ を,

$$\omega_{\frac{1}{n}}(x) := \omega\left(\frac{x}{n}\right) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

として定義する. このとき (8.42) より,

$$0 \leqslant \omega_{\frac{1}{n}}(x) \leqslant 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N), \quad \omega_{\frac{1}{n}}(x) = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant n) \tag{8.43}$$

である. 任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ を取り, $D(\mathbb{R}^N)$ の列 $(\omega_{\frac{1}{n}}f)_{n\in\mathbb{N}}$ が Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の位相 (定義 8.11) で f に収束することを示せばよい. そのためには, 命題 8.9 より, 任意のコンパクト集合 $K \subseteq \mathbb{R}^N$ と任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ を取り, $(\partial^\alpha(\omega_{\frac{1}{n}}f))_{n\in\mathbb{N}}$ が $\partial^\alpha f$ に K 上で一様収束することを示せばよい. Leibniz ルール 8.3 より,

$$\partial^\alpha(\omega_{\frac{1}{n}}f)(x) = \sum_{0<\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}n^{-|\beta|}\partial^\beta\omega\left(\frac{x}{n}\right)\partial^{\alpha-\beta}f(x) + \omega_{\frac{1}{n}}(x)\partial^\alpha f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

であるから,

$$\sup_{x\in K}|\partial^\alpha(\omega_{\frac{1}{n}}f)(x) - \omega_{\frac{1}{n}}(x)\partial^\alpha f(x)| \leqslant \sum_{0<\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}n^{-|\beta|}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|\partial^\beta\omega(x)|\sup_{x\in K}|\partial^{\alpha-\beta}f(x)| \to 0 \quad (n\to\infty) \tag{8.44}$$

となる. $K \subseteq \mathbb{R}^N$ はコンパクトなので,

$$K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < n_0\}$$

を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が取れて, (8.43) より,

$$\sup_{x\in K}|\omega_{\frac{1}{n}}(x)\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(x)| = 0 \quad (\forall n \geqslant n_0)$$

となる. これを (8.44) と合わせれば,

$$\sup_{x\in K}|\partial^\alpha(\omega_{\frac{1}{n}}f)(x) - \partial^\alpha f(x)| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

を得る. よって $(\partial^\alpha(\omega_{\frac{1}{n}}f))_{n\in\mathbb{N}}$ は $\partial^\alpha f$ に K 上で一様収束するので求める結果を得た. □

定理 8.73. $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ に対し次は互いに同値である.

(1) u は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.11) の相対位相で連続である.

(2) u の台 (定義 8.36) $\mathrm{supp}(u)$ はコンパクトである.
(3) ある $h \in D(\mathbb{R}^N)$ に対し $u = hu$[*105]である.

そして (1), (2), (3) が成り立つとき, u は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 上の連続線型汎関数に拡張でき, その拡張は一意的である.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする.

$$CB(0,n) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant n\} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおく. もし $\mathrm{supp}(u)$[*106]がコンパクトではないならば $\mathrm{supp}(u)$ は有界ではないので, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathrm{supp}(u)$ は $CB(0,n)$ に含まれない. よって超関数の台の定義 8.36 より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\varphi_n \in D(\mathbb{R}^N \backslash CB(0,n))$ で $u(\varphi_n) = 1$ なるものが取れる. こうして $D(\mathbb{R}^N)$ の列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を構成する. 任意のコンパクト集合 $K \subseteq \mathbb{R}^N$ に対し, 十分大きい $n_0 \in \mathbb{N}$ を取れば $K \subseteq CB(0,n)$ $(\forall n \geqslant n_0)$ となるから,

$$\mathrm{supp}(\varphi_n) \subseteq \mathbb{R}^N \backslash CB(0,n) \subseteq \mathbb{R}^N \backslash K \quad (\forall n \geqslant n_0)$$

となり, 従って,

$$\partial^\alpha \varphi_n(x) = 0 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in K)$$

となる. よって任意のコンパクト集合 $K \subseteq \mathbb{R}^N$ と任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $(\partial^\alpha \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に K 上で一様収束するので, 命題 8.9 より, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の位相で 0 に収束する. よって (1) が成り立つことから $\lim_{n\to\infty} u(\varphi_n) = 0$ とならなければならないが, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $u(\varphi_n) = 1$ なので矛盾する. ゆえに $\mathrm{supp}(u)$ はコンパクトである.
(2) $\Rightarrow$ (3) を示す. (2) が成り立つとする. このとき $\mathrm{supp}(u)$ を含む $\mathbb{R}^N$ の有界開集合 B が取れる. $\overline{B} \subseteq \mathbb{R}^N$ はコンパクトなので Urysohn の補題 6.43 より, $h \in D(\mathbb{R}^N)$ で $h(x) = 1$ $(\forall x \in \overline{B})$ なるものが取れる. 任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$\mathrm{supp}((1-h)\varphi) \subseteq \mathbb{R}^N \backslash B \subseteq \mathbb{R}^N \backslash \mathrm{supp}(u)$$

であるから,

$$0 = u((1-h)\varphi) = u(\varphi) - u(h\varphi) = u(\varphi) - hu(\varphi)$$

である. よって $u = hu$ であるので (3) が成り立つ.
(3) $\Rightarrow$ (1) を示す. (3) が成り立つとする. $D(\mathbb{R}^N)$ の列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の位相で $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ に収束するとすると, 命題 8.12 の (2) より $(h\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Fréchet 空間 $D_{\mathrm{supp}(h)}(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.14 を参照) において $h\varphi$ に収束する. $D'(\mathbb{R}^N)$ の定義 8.18 より, u を Fréchet 空間 $D_{\mathrm{supp}(h)}(\mathbb{R}^N)$ 上に制限したものは連続であるから, $\lim_{n\to\infty} u(h\varphi_n) = u(h\varphi)$ である. ゆえに,

$$u(\varphi_n) = u(h\varphi_n) \to u(h\varphi) = u(\varphi)$$

であるから, 連続性の点列による特徴付け (命題 1.60) より u は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の相対位相で連続である.
(1), (2), (3) が成り立つとし, u の Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 上の連続線型汎関数に一意的に拡張できることを示す. (3) より $h \in D(\mathbb{R}^N)$ で $u = hu$ なるものが取れる. そこで線型汎関数

$$\tilde{u} : C^\infty(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto u(h\varphi) \in \mathbb{C}$$

を定義すると,

$$\tilde{u}(\varphi) = u(h\varphi) = u(\varphi) \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N))$$

であるから $\tilde{u}$ は u の拡張である. 今, Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ に収束するならば, 命題 8.12 の (2) より $(h\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Fréchet 空間 $D_{\mathrm{supp}(h)}(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.14 を参照) において $h\varphi$ に収束するので,

$$\tilde{u}(\varphi_n) = u(h\varphi_n) \to u(h\varphi) = \tilde{u}(\varphi) \quad (n \to \infty)$$

[*105] 滑らかな関数と超関数の積の定義 8.27 を参照.
[*106] 超関数の台の定義 8.36 より $\mathbb{R}^N$ の閉集合である.

となる．よって連続性の点列による特徴付け (命題 1.60) より $\tilde{u} : C^\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 上の連続線型汎関数である．一意性は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ における $D(\mathbb{R}^N)$ の稠密性 (命題 8.72) による． □

定義 8.74 (台がコンパクトな超関数の空間 $\mathcal{E}'_N$)**.** $D'(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.18) の元で台がコンパクトなもの全体のなす線型部分空間を,

$$\mathcal{E}'_N := \{u \in D'(\mathbb{R}^N) : \mathrm{supp}(u) \text{ はコンパクト }\}$$

と表す．定理 8.73 より,

$$\mathcal{E}'_N = \{u \in D'(\mathbb{R}^N) : u \text{ は Fréchet 空間 } C^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ の相対位相で連続 }\}$$

であり, 任意の $u \in \mathcal{E}'_N$ に対し u は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 上の連続線型汎関数に一意的に拡張できる．こうして $\mathcal{E}'_N$ は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 上の連続線型汎関数全体のなす線型空間と同一視できる．

命題 8.75. $\mathcal{E}'_N \subseteq \mathcal{S}'_N$ である．

証明. 任意の $u \in \mathcal{E}'_N$ を取る．$D(\mathbb{R}^N)$ の列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathcal{S}_N$ の位相 (定義 8.50) で $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ に収束するとすると, 特に任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $(\partial^\alpha\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\partial^\alpha\varphi$ にコンパクト一様収束するから, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の位相 (定義 8.11) で φ に収束する．定義 8.74 より u は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の位相で連続であるから $\lim_{n\to\infty} u(\varphi_n) = u(\varphi)$ が成り立つ．よって連続性の点列による特徴付け (命題 1.60) より $u : D(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ は $\mathcal{S}_N$ の位相で連続であるので $u \in \mathcal{S}'_N$ である． □

命題 8.76. 任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$\delta_x : C^\infty(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{C}$$

なる線型汎関数を定義すると $\delta_x \in \mathcal{E}'_N$ であり,

$$\mathrm{supp}(\delta_x) = \{x\}$$

である．

証明. Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.11) の列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ に収束するとすると, 特に $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は φ に各点収束するから,

$$\delta_x(\varphi_n) = \varphi_n(x) \to \varphi(x) = \delta_x(\varphi)$$

となる．よって連続性の点列による特徴付け (命題 1.60) より $\delta_x : C^\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 上の連続線型汎関数なので $\delta_x \in \mathcal{E}'_N$ である．

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x) = 0 \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N \backslash \{x\}))$$

であるから, 超関数の台の定義 8.36 より,

$$\mathrm{supp}(\delta_x) \subseteq \{x\}$$

である．$\delta_x \neq 0$ より $\mathrm{supp}(\delta_x) \neq \varnothing$ であるので $\mathrm{supp}(\delta_x) = \{x\}$ である． □

定義 8.77 (Dirac のデルタ超関数)**.** 任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対し命題 8.76 における $\delta_x \in \mathcal{E}'_N$ を, $\{x\}$ を台とする Dirac のデルタ超関数と言う．

8.7 合成積と Fourier 変換, Friedrichs の軟化子

命題 8.78. 任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ に対し,

(1)

$$\mathbb{R}^N \ni y \mapsto T_y f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{8.45}$$

[*107]は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.11) の位相で連続である．

[*107] $T_y f$ は y による f の平行移動 (定義 8.44) である．すなわち $T_y f(x) = f(x - y)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^N)$．

(2) 任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し, Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の位相で,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(T_{-he_j} f - f) = \partial_j f \tag{8.46}$$

が成り立つ.

証明. (1) $T_{x+y} f = T_x T_y f$ $(\forall x, y \in \mathbb{R}^N)$ であるから (8.45) が連続であることを示すには, (8.45) が $y = 0$ において連続であることを示せば十分である. 任意のコンパクト集合 $K \subseteq \mathbb{R}^N$ と任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ を取る. 任意の

$$y \in CB(0,1) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y| \leqslant 1\}$$

に対し, 微積分学の基本定理 5.206 より,

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in K}|\partial^\alpha T_y f(x) - \partial^\alpha f(x)| = \sup_{x\in K}|\partial^\alpha f(x-y) - \partial^\alpha f(x)| \\
&= \sup_{x\in K}\left|\sum_{j=1}^N \int_0^1 y_j \partial_j \partial^\alpha f(x-ty)dt\right| \leqslant \sum_{j=1}^N |y_j| \sup_{x\in K+CB(0,1)} |\partial_j \partial^\alpha f(x)|
\end{aligned}$$

($K + CB(0,1)$ はコンパクトであることに注意) であるから,

$$\lim_{y\to 0} \sup_{x\in K}|\partial^\alpha T_y f(x) - \partial^\alpha f(x)| = 0$$

となる. よって命題 8.9 より (8.45) は $y = 0$ において連続である.

(2) 任意のコンパクト集合 $K \subseteq \mathbb{R}^N$ と任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ を取る. 微積分学の基本定理 5.206 より $0 < |h| \leqslant 1$ なる任意の $h \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in K}\left|\frac{\partial^\alpha T_{-he_j} f(x) - \partial^\alpha f(x)}{h} - \partial^\alpha \partial_j f(x)\right| = \sup_{x\in K}\left|\frac{\partial^\alpha f(x+he_j) - \partial^\alpha f(x)}{h} - \partial_j \partial^\alpha f(x)\right| \\
&= \sup_{x\in K}\left|\int_0^1 \partial_j \partial^\alpha f(x+the_j) - \partial_j \partial^\alpha f(x)dt\right| = \sup_{x\in K}\left|\int_0^1 \int_0^1 th\partial_j^2 \partial^\alpha f(x+sthe_j)dsdt\right| \\
&\leqslant |h| \sup_{x\in K+CB(0,1)} |\partial_j^2 \partial^\alpha f(x)|
\end{aligned}$$

であるから,

$$\lim_{h\to 0} \sup_{x\in K}\left|\frac{\partial^\alpha T_{-he_j} f(x) - \partial^\alpha f(x)}{h} - \partial^\alpha \partial_j f(x)\right| = 0$$

である. よって命題 8.9 より Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ において (8.46) が成り立つ.

□

命題 8.79. 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ に対し,

(1)

$$\mathbb{R}^N \ni y \mapsto T_y f \in \mathcal{S}_N \tag{8.47}$$

は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ (定義 8.50) の位相で連続である.

(2) 任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し, Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ の位相で,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(T_{-he_j} f - f) = \partial_j f \tag{8.48}$$

が成り立つ.

証明. (1) $T_{x+y} f = T_x T_y f$ $(\forall x, y \in \mathbb{R}^N)$ であるから (8.47) が連続であることを示すには, (8.47) が $y = 0$ において連続であることを示せば十分である. 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ を取る. 任意の $x, y \in \mathbb{R}^N$ に対し微積分学の基本定理 5.206 より,

$$\partial^\alpha T_y f(x) - \partial^\alpha f(x) = \partial^\alpha f(x-y) - \partial^\alpha f(x) = \sum_{j=1}^N \int_0^1 (-y_j) \partial_j \partial^\alpha f(x-ty)dt \tag{8.49}$$

であり, 多重二項定理 8.4 より,

$$x^\beta = (x - ty + ty)^\beta = \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} (x-ty)^\gamma (ty)^{\beta-\gamma} \quad (\forall t \in [0,1])$$

であるから, (8.49) より,

$$x^\beta \partial^\alpha T_y f(x) - x^\beta \partial^\alpha f(x) = \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} \sum_{j=1}^N \int_0^1 (-y_j)(ty)^{\beta-\gamma}(x-ty)^\gamma \partial_j \partial^\alpha f(x-ty)dt$$

となる．よって,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\beta \partial^\alpha T_y f(x) - x^\beta \partial^\alpha f(x)| \leqslant \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} \sum_{j=1}^N |y_j||y|^{|\beta-\gamma|} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\partial_j \partial^\alpha f(x)| \to 0 \quad (y \to 0)$$

が成り立つので, 命題 8.48 より (8.47) は $y = 0$ において連続である.

(2) 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ を取る．任意の $x \in \mathbb{R}^N$ と $h \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ に対し微積分学の基本定理 5.206 より,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^\alpha T_{-he_j} f(x) - \partial^\alpha f(x)}{h} - \partial^\alpha \partial_j f(x) = \frac{\partial^\alpha f(x+he_j) - \partial^\alpha f(x)}{h} - \partial_j \partial^\alpha f(x) \\ &= \int_0^1 \partial_j \partial^\alpha f(x + the_j) - \partial_j \partial^\alpha f(x) dt = \int_0^1 \int_0^1 th \partial_j^2 \partial^\alpha f(x + sthe_j) dsdt \end{aligned} \tag{8.50}$$

であり, 多重二項定理 8.4 より,

$$x^\beta = (x + sthe_j - sthe_j)^\beta = \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} (-sthe_j)^{\beta-\gamma}(x + sthe_j)^\gamma \quad (\forall s, t \in [0,1])$$

であるから, (8.50) より,

$$\begin{aligned} &\frac{x^\beta \partial^\alpha T_{-he_j} f(x) - x^\beta \partial^\alpha f(x)}{h} - x^\beta \partial^\alpha \partial_j f(x) \\ &= \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} \int_0^1 \int_0^1 (th)(-sthe_j)^{\beta-\gamma}(x + sthe_j)^\gamma \partial_j^2 \partial^\alpha f(x + sthe_j) dsdt \end{aligned}$$

となる．よって,

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left| \frac{x^\beta \partial^\alpha T_{-he_j} f(x) - x^\beta \partial^\alpha f(x)}{h} - x^\beta \partial^\alpha \partial_j f(x) \right| \\ &\leqslant \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} |h|^{1+|\beta-\gamma|} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\gamma \partial_j^2 \partial^\alpha f(x)| \to 0 \quad (h \to 0) \end{aligned}$$

となるので, 命題 8.48 より Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ において (8.48) が成り立つ.

□

定義 8.80 (反転)**.** $\mathbb{R}^N$ 上の関数 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ に対し, f の反転 $f_{-1} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ を $f_{-1}(x) := f(-x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^N)$ として定義する．また $\mathbb{R}^N$ 上の超関数 $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ に対し, u の反転 $u_{-1} \in D'(\mathbb{R}^N)$ を,

$$u_{-1}(\varphi) := u(\varphi_{-1}) \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N))$$

として定義する (超関数の変数変換の定義 8.42 を参照).

命題 8.81. 任意の $f \in D(\mathbb{R}^N)$ と任意の $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$f * u : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x f_{-1}) \in \mathbb{C} \tag{8.51}$$

は C^∞ 級であり,

$$\partial^\alpha (f * u) = (\partial^\alpha f) * u = f * \partial^\alpha u \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N)$$

が成り立つ.

証明. まず (8.51) が連続であることを示す．任意の $x \in \mathbb{R}^N$ を取り, x において (8.51) が連続であることを示せばよい．任意の

$$y \in CB(x,1) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y-x| \leqslant 1\}$$

に対し，

$$\mathrm{supp}(T_y f_{-1}) = y + \mathrm{supp}(f_{-1}) = y - \mathrm{supp}(f) \subseteq CB(x,1) - \mathrm{supp}(f)$$

であり，

$$K := CB(x,1) - \mathrm{supp}(f)$$

はコンパクトであるから, x に収束する $CB(x,1)$ の列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ に対し, 命題 8.78 の (1) より Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.14) において $(T_{x_i} f_{-1})_{i\in\mathbb{N}}$ は $T_x f_{-1}$ にに収束する．そして超関数の定義 8.18 より u の Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ 上への制限 $D_K(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto u(\varphi) \in \mathbb{C}$ は連続であるから，

$$f * u(x_i) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_{x_i} f_{-1}) \to \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x f_{-1}) = f * u(x) \ \ (i \to \infty)$$

が成り立つ．ゆえに連続性の点列による特徴付け (命題 1.60) より (8.51) は $x \in \mathbb{R}^N$ において連続である．よって (8.51) は連続である．

今, ある $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し，

$$f * u \in C^n(\mathbb{R}^N), \ \ \partial^\alpha(f*u) = f * \partial^\alpha u \ \ (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant n)$$

が成り立つと仮定する．そして $|\alpha| = n$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ と任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$, および任意の $x \in \mathbb{R}^N$ を取る．$CB(0,1) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y| \leqslant 1\}$ とおき, コンパクト集合

$$K := CB(0,1) + \mathrm{supp}(T_x f_{-1}) \subseteq \mathbb{R}^N$$

を考えると, $|h| \leqslant 1$ なる任意の $h \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\mathrm{supp}(T_{x+he_j} f_{-1}) = \mathrm{supp}(T_{he_j} T_x f_{-1}) = he_j + \mathrm{supp}(T_x f_{-1}) \subseteq K$$

であり, 命題 8.78 の (2) より Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.14) において，

$$\frac{T_{x+he_j} f_{-1} - T_x f_{-1}}{h} \to -\partial_j T_x f_{-1} \ \ (0 < |h| \leqslant 1, h \to 0)$$

となる．超関数の定義 8.18 より $\partial^\alpha u \in D'(\mathbb{R}^N)$ の Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ 上への制限 $D_K(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto \partial^\alpha u(\varphi) \in \mathbb{C}$ は連続線型汎関数であるから，

$$\begin{aligned}
&\frac{f * \partial^\alpha u(x+he_j) - f * \partial^\alpha u(x)}{h} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \frac{\partial^\alpha u(T_{x+he_j} f_{-1}) - \partial^\alpha u(T_x f_{-1})}{h} \\
&\to -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \partial^\alpha u(\partial_j T_x f_{-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \partial_j \partial^\alpha u(T_x f_{-1}) = f * (\partial_j \partial^\alpha u)(x) \ \ (0 < |h| \leqslant 1, h \to 0)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $\partial^\alpha(f*u) = f * \partial^\alpha u$ は任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し各点 $x \in \mathbb{R}^N$ において第 j 座標に関して偏微分可能であり，

$$\partial_j \partial^\alpha (f*u) = \partial_j (f * \partial^\alpha u) = f * \partial_j \partial^\alpha u \tag{8.52}$$

が成り立つ．そして前段の連続性の議論で $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ を $\partial_j \partial^\alpha u \in D'(\mathbb{R}^N)$ に置き換えれば, 各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し (8.52) が連続であることが分かる．よって $f * u \in C^{n+1}(\mathbb{R}^N)$ であるから $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| = n$ と $j \in \{1, \cdots, N\}$ の任意性より，

$$f * u \in C^{n+1}(\mathbb{R}^N), \ \ \partial^\alpha(f*u) = f * \partial^\alpha u \ \ (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant n+1)$$

が成り立つ．ゆえに $n \in \mathbb{Z}_+$ に関する帰納法より，

$$f * u \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \ \ \partial^\alpha(f*u) = f * \partial^\alpha u \ \ (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N)$$

を得る. ここで,

$$\partial^\alpha T_x f_{-1} = (-1)^{|\alpha|} T_x(\partial^\alpha f)_{-1} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, \forall x \in \mathbb{R}^N)$$

より,

$$\begin{aligned}\partial^\alpha (f * u)(x) = f * \partial^\alpha u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\partial^\alpha u(T_x f_{-1}) = (-1)^{|\alpha|}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(\partial^\alpha T_x f_{-1}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x(\partial^\alpha f)_{-1}) = \partial^\alpha f * u(x) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, \forall x \in \mathbb{R}^N)\end{aligned}$$

であるから証明が終わる. □

命題 8.82. 次が成り立つ.

(1) 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ と任意の $u \in \mathcal{S}_N'$ (定義 8.66) に対し,

$$f * u : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x f_{-1}) \in \mathbb{C} \tag{8.53}$$

は C^∞ 級であり,

$$\partial^\alpha (f * u) = (\partial^\alpha f) * u = f * \partial^\alpha u \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N)$$

が成り立つ.

(2) 任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ と任意の $u \in \mathcal{E}_N'$ (定義 8.74) に対し,

$$f * u : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x f_{-1}) \in \mathbb{C}$$

は C^∞ 級であり,

$$\partial^\alpha (f * u) = (\partial^\alpha f) * u = f * \partial^\alpha u \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N)$$

が成り立つ.

証明. (1) 命題 8.79 の (1) より,

$$\mathbb{R}^N \ni x \mapsto T_x f_{-1} \in \mathcal{S}_N$$

は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ の位相で連続であり, u は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型汎関数である (定義 8.66) から (8.53) は連続である.

今, ある $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し,

$$f * u \in C^n(\mathbb{R}^N), \quad \partial^\alpha (f * u) = f * \partial^\alpha u \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant n)$$

が成り立つと仮定する. $|\alpha| = n$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ と任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$, および任意の $x \in \mathbb{R}^N$ を取る. 命題 8.79 の (2) より Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ の位相で,

$$\frac{T_{x+he_j} f_{-1} - T_x f_{-1}}{h} \to -\partial_j T_x f_{-1} \quad (h \in \mathbb{R}, h \to 0)$$

であり, $\partial^\alpha u \in \mathcal{S}_N'$ は $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型汎関数であるから,

$$\begin{aligned}&\frac{f * \partial^\alpha u(x + he_j) - f * \partial^\alpha u(x)}{h} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \frac{\partial^\alpha u(T_{x+he_j} f_{-1}) - \partial^\alpha u(T_x f_{-1})}{h} \\ &\to -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \partial^\alpha u(\partial_j T_x f_{-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \partial_j \partial^\alpha u(T_x f_{-1}) = f * \partial_j \partial^\alpha u(x) \quad (h \in \mathbb{R}, h \to 0)\end{aligned}$$

が成り立つ. よって $\partial^\alpha (f * u) = f * \partial^\alpha u$ は任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し第 j 座標に関して偏微分可能であり,

$$\partial_j \partial^\alpha (f * u) = \partial_j (f * \partial^\alpha u) = f * \partial_j \partial^\alpha u \tag{8.54}$$

が成り立つ．ここで前段の連続性の議論で $u \in \mathcal{S}'_N$ を $\partial_j \partial^\alpha u \in \mathcal{S}'_N$ に置き換えれば各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し (8.54) は連続であることが分かるので, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| = n$ と $j \in \{1, \cdots, N\}$ の任意性より,

$$f * u \in C^{n+1}(\mathbb{R}^N), \quad \partial^\alpha (f * u) = f * \partial^\alpha u \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant n+1)$$

が成り立つ．よって帰納法より,

$$f * u \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \partial^\alpha (f * u) = f * \partial^\alpha u \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N)$$

が成り立つ．ここで,

$$\partial^\alpha T_x f_{-1} = (-1)^{|\alpha|} T_x (\partial^\alpha f)_{-1} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, \forall x \in \mathbb{R}^N)$$

より,

$$\begin{aligned}\partial^\alpha (f * u)(x) &= f * \partial^\alpha u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \partial^\alpha u(T_x f_{-1}) = (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(\partial^\alpha T_x f_{-1}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x (\partial^\alpha f)_{-1}) = \partial^\alpha f * u(x) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, \forall x \in \mathbb{R}^N)\end{aligned}$$

であるので証明が終わる．

(2) (1) の証明で Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ を Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ に置き換え, $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型汎関数全体 $\mathcal{S}'_N$ を Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 上の連続線型汎関数全体 $\mathcal{E}'_N$ (定義 8.74) に置き換える．そして命題 8.79 を用いるところで命題 8.78 を用いれば (2) の証明となる．

□

定義 8.83 (合成積)**.** 命題 8.81 と命題 8.82 における

$$\begin{aligned}&D(\mathbb{R}^N) \times D'(\mathbb{R}^N) \ni (f, u) \mapsto f * u \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \\ &\mathcal{S}_N \times \mathcal{S}'_N \ni (f, u) \mapsto f * u \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \\ &C^\infty(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{E}'_N \ni (f, u) \mapsto f * u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)\end{aligned}$$

を合成積と言う．いずれの $f * u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ も,

$$f * u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x f_{-1}) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

と表され,

$$\partial^\alpha (f * u) = (\partial^\alpha f) * u = f * \partial^\alpha u \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N)$$

となる．

注意 8.84 (超関数が局所 L^1 関数の場合の合成積)**.** 任意の $[g] \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ に対し, $[g]$ は $D'(\mathbb{R}^N)$ の元

$$D(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} g(x) \varphi(x) dx \in \mathbb{C}$$

と同一視する (定義 8.24 を参照) ので, 任意の $f \in D(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$\begin{aligned}f * [g](x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} T_x f_{-1}(y) g(y) dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(x-y) dy \qquad (8.55)\end{aligned}$$

である (最後の等号では変数変換 $y \mapsto x - y$ を用いた). またある $p \in [1, \infty]$ に対し $[g] \in L^p(\mathbb{R}^N)$ である場合や g が多項式的に増加する関数であるような場合は $[g] \in \mathcal{S}'_N$ (命題 8.67) であるから, 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ に対し等式 (8.55) が成り立ち, $[g]$ の台がコンパクトである場合は $[g] \in \mathcal{E}'_N$ であるから, 任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ に対し等式 (8.55) が成り立つ．

命題 8.85 (合成積の台)**.** 合成積 $f * u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.83) に対し,

$$\mathrm{supp}(f * u) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : f * u(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(u)} \tag{8.56}$$

が成り立つ.

証明. $f * u(x) \neq 0$ なる任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対し $u(T_x f_{-1}) \neq 0$ であるから超関数の台の定義 8.36 より,

$$\mathrm{supp}(T_x f_{-1}) \cap \mathrm{supp}(u) \neq \varnothing$$

である. ここで,

$$\mathrm{supp}(T_x f_{-1}) = x + \mathrm{supp}(f_{-1}) = x - \mathrm{supp}(f)$$

であるから,

$$(x - \mathrm{supp}(f)) \cap \mathrm{supp}(u) \neq \varnothing$$

なので, ある $y \in \mathrm{supp}(f)$ と $z \in \mathrm{supp}(u)$ に対し $x - y = z$ となる. よって,

$$x = y + z \in \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(u)$$

だから $\{x \in \mathbb{R}^N : f * u(x) \neq 0\} \subseteq \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(u)$ であり, 従って (8.56) が成り立つ. □

命題 8.86 ($\mathcal{S}_N * \mathcal{S}'_N \subseteq \mathcal{T}_N$)**.** 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ と任意の $u \in \mathcal{S}'_N$ に対し, $f * u \in \mathcal{T}_N$ が成り立つ[*108].

証明. Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ のセミノルム位相 (定義 8.50) を誘導するノルムの列

$$p_n : \mathcal{S}_N \ni f \mapsto \max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|^2)^n |\partial^\alpha f(x)| \in [0, \infty) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

を考える. 定理 8.65 の (2) より, $u \in \mathcal{S}'_N$ に対しある $n_0 \in \mathbb{N}$ と $C \in (0, \infty)$ が存在し,

$$|u(\varphi)| \leqslant C p_{n_0}(\varphi) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}_N) \tag{8.57}$$

が成り立つ. 任意の多重指数 $\beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し, (8.57) より,

$$\begin{aligned} |\partial^\beta (f * u)(x)| &= |(\partial^\beta f) * u(x)| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} |u(T_x (\partial^\beta f)_{-1})| \\ &\leqslant \frac{C}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} p_{n_0}(T_x (\partial^\beta f)_{-1}) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N) \end{aligned} \tag{8.58}$$

であり,

$$1 + |y + z|^2 \leqslant 2(1 + |y|^2)(1 + |z|^2) \quad (\forall y, z \in \mathbb{R}^N)$$

より,

$$1 + |y|^2 \leqslant 2(1 + |x|^2)(1 + |x - y|^2) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^N)$$

であるから,

$$\begin{aligned} p_{n_0}(T_x (\partial^\beta f)_{-1}) &= \max_{|\alpha| \leqslant n_0} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} (1 + |y|^2)^{n_0} |\partial^\alpha T_x (\partial^\beta f)_{-1}(y)| \\ &\leqslant \max_{|\alpha| \leqslant n_0} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} 2^{n_0} (1 + |x|^2)^{n_0} (1 + |x - y|^2)^{n_0} |\partial^\alpha \partial^\beta f(x - y)| \\ &= 2^{n_0} (1 + |x|^2)^{n_0} p_{n_0}(\partial^\beta f) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N) \end{aligned} \tag{8.59}$$

である. よって任意の多重指数 $\beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し (8.58), (8.59) より,

$$|\partial^\beta (f * u)(x)| \leqslant \frac{C}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} 2^{n_0} (1 + |x|^2)^{n_0} p_{n_0}(\partial^\beta f) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

となるから, $\partial^\beta (f * u) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ は高々多項式的に増加する関数である. ゆえに $f * u \in \mathcal{T}_N$ である. □

[*108] $\mathcal{T}_N$ は緩増加関数空間 (定義 8.53) である.

命題 8.87. 任意の $u \in \mathcal{E}'_N$ に対し,

$$C^\infty(\mathbb{R}^N) \ni f \mapsto f * u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{8.60}$$

は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.11) 上の連続線型写像である.

証明. (8.60) が線型写像であることは明らかである. 連続性を示すには, 閉グラフ定理 3.102 より, $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の列 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ と $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ が Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の位相で,

$$\lim_{i\to\infty} f_i = f, \quad \lim_{i\to\infty} f_i * u = g \tag{8.61}$$

を満たすと仮定して $g = f * u$ が成り立つことを示せばよい. (8.61) の左の式より任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対し Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ において $\lim_{i\to\infty} T_x f_{i,-1} = T_x f_{-1}$ であり, $u \in \mathcal{E}'_N$ は定義 8.74 より Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 上の連続線型汎関数であるから,

$$f_i * u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x f_{i,-1}) \to \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x f_{-1}) = f * u(x) \quad (i \to \infty)$$

である. そして (8.61) の右の式は特に $(f_i * u)_{i\in\mathbb{N}}$ が g に各点収束することを意味するので,

$$g(x) = \lim_{i\to\infty} f_i * u(x) = f * u(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

である. よって $g = f * u$ であるから求める結果を得た. □

命題 8.88 ($\mathcal{S}_N * \mathcal{S}_N \subseteq \mathcal{S}_N$)**.** 任意の $f, g \in \mathcal{S}_N$ に対し $f * g = g * f \in \mathcal{S}_N$ が成り立つ. また任意の $g \in \mathcal{S}_N$ に対し,

$$\mathcal{S}_N \ni f \mapsto f * g \in \mathcal{S}_N \tag{8.62}$$

は連続である.

証明. 任意の $f, g \in \mathcal{S}_N$ に対し注意 8.84 より,

$$f * g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy = g * f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

である. $f * g \in \mathcal{S}_N$ であることを示す. そのためには $\mathcal{S}_N$ の定義 8.50 より任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ を取り $\mathrm{id}^\beta \partial^\alpha (f * g)$ が有界であることを示せばよい[*109]. $\partial^\alpha (f * g) = \partial^\alpha f * g$ (命題 8.82 を参照) であることと多重二項定理 8.4 より,

$$\begin{aligned}
x^\beta \partial^\alpha (f * g)(x) &= x^\beta (\partial^\alpha f) * g(x) = x^\beta \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} (\partial^\alpha f)(y) g(x-y) dy \\
&= \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} y^\gamma \partial^\alpha f(y) (x-y)^{\beta-\gamma} g(x-y) dy \\
&= \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} (\mathrm{id}^\gamma \partial^\alpha f) * (\mathrm{id}^{\beta-\gamma} g)(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)
\end{aligned}$$

であり, $\mathrm{id}^\gamma \partial^\alpha f, \mathrm{id}^{\beta-\gamma} g \in \mathcal{S}_N$ であるから結局, 任意の $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_N$ に対し $\varphi * \psi$ が有界であることを示せばよいが,

$$|\varphi * \psi(x)| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\psi(x-y)dy \right| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \|\varphi\|_1 \|\psi\|_\infty < \infty \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

であるから $\varphi * \psi$ は有界である. よって $f * g \in \mathcal{S}_N$ が成り立つ.
任意の $g \in \mathcal{S}_N$ に対し (8.62) が Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型写像であることを示す. 線型写像であることは明らかである. 連続性を示すには, 閉グラフ定理 3.102 より, $\mathcal{S}_N$ の列 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ と $f, h \in \mathcal{S}_N$ が Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ の位相で,

$$\lim_{i\to\infty} f_i = f, \quad \lim_{i\to\infty} f_i * g = h \tag{8.63}$$

[*109] $h \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ が任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $\mathrm{id}^\beta \partial^\alpha h$ が有界であるような関数ならば, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $(1 + |\mathrm{id}|^2)\,\mathrm{id}^\beta \partial^\alpha h$ も有界であるから, $\mathrm{id}^\beta \partial^\alpha h \in C_0(\mathbb{R}^N)$ (無限遠で消える連続関数) である.

を満たすとして $f*g=h$ が成り立つことを示せばよい. (8.63) の左の式と命題 8.54 の (4) より $\lim_{i\to\infty}\|f_i-f\|_1=0$ であり, g は有界であるから,

$$f_i*g(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}f_i(y)g(x-y)dy\to\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}f(y)g(x-y)dy=f*g(x)\ \ (\forall x\in\mathbb{R}^N) \tag{8.64}$$

である. また (8.63) の右の式は特に $(f_i*g)_{i\in\mathbb{N}}$ が h に各点収束することを意味するので (8.64) より,

$$h(x)=\lim_{i\to\infty}f_i*g(x)=f*g(x)\ \ (\forall x\in\mathbb{R}^N)$$

である. よって $f*g=h$ が成り立つので (8.62) は連続である. □

補題 8.89. $\mathbb{R}^N\ni x\mapsto e_x\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の位相 (定義 8.11) で連続である. ただし $e_x(y)=e^{ix\cdot y}$ $(\forall y\in\mathbb{R}^N)$ である.

証明. 任意の $\alpha\in\mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$\partial^\alpha e_x(y)=(ix)^\alpha e_x(y)\ \ (\forall x,y\in\mathbb{R}^N) \tag{8.65}$$

であり, 微積分学の基本定理 5.206 より,

$$\begin{aligned}|e_x(y)-e_{x_0}(y)|=|e^{ix\cdot y}-e^{ix\cdot y_0}|&=\left|\int_0^1 i(x-x_0)\cdot y\exp(i(x_0+t(x-x_0))\cdot y)dt\right|\\&\leqslant|x-x_0||y|\ \ (\forall x_0,x,y\in\mathbb{R}^N)\end{aligned} \tag{8.66}$$

である. 今, 任意の $\alpha\in\mathbb{Z}_+^N$ と任意のコンパクト集合 $K\subseteq\mathbb{R}^N$ を取る. そして

$$K\subseteq\{y\in\mathbb{R}^N:|y|\leqslant M\} \tag{8.67}$$

なる $M\in(0,\infty)$ を取る. このとき (8.65), (8.66), (8.67) より任意の $x_0,x\in\mathbb{R}^N$ に対し,

$$\begin{aligned}&\sup_{y\in K}|\partial^\alpha e_x(y)-\partial^\alpha e_{x_0}(y)|=\sup_{y\in K}|(ix)^\alpha e_x(y)-(ix_0)^\alpha e_{x_0}(y)|\\&\leqslant\sup_{y\in K}|((ix)^\alpha-(ix_0)^\alpha)e_x(y)|+\sup_{y\in K}|(ix_0)^\alpha(e_x(y)-e_{x_0}(y))|\\&\leqslant|x^\alpha-x_0^\alpha|+|x_0^\alpha||x-x_0|M\end{aligned}$$

となる. よって,

$$\lim_{x\to x_0}\sup_{y\in K}|\partial^\alpha e_x(y)-\partial^\alpha e_{x_0}(y)|=0$$

が成り立つので, 命題 8.9 より, Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の位相で $\lim_{x\to x_0}e_x=e_{x_0}$ が成り立つ. ゆえに $\mathbb{R}^N\ni x\mapsto e_x\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の位相で連続である. □

定理 8.90 (合成積の Fourier 変換)**.** 合成積の Fourier 変換について,

(1) 任意の $f,g\in\mathcal{S}_N$ に対し,

$$\widehat{f*g}=\hat{f}\hat{g},\ \ \widehat{fg}=\hat{f}*\hat{g},$$
$$\widecheck{f*g}=\check{f}\check{g},\ \ \widecheck{fg}=\check{f}*\check{g}.$$

が成り立つ (命題 8.88 より $f*g\in\mathcal{S}_N$ であることに注意).

(2) 任意の $f\in\mathcal{S}_N,u\in\mathcal{S}'_N$ に対し,

$$\widehat{f*u}=\hat{f}\hat{u},\ \ \widehat{fu}=\hat{f}*\hat{u},$$
$$\widecheck{f*u}=\check{f}\check{u},\ \ \widecheck{fu}=\check{f}*\check{u}$$

が成り立つ (命題 8.86 と命題 8.67 より $f*u\in\mathcal{T}_N\subseteq\mathcal{S}'_N$, $fu\in\mathcal{S}'_N$ であることに注意).

(3) 任意の $u \in \mathcal{E}'_N$ に対し $\hat{u}, \check{u} \in \mathcal{T}_N$ (緩増加関数 (定義 8.53)) であり,

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(e_{-x}), \quad \check{u}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(e_x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

が成り立つ (ただし $e_x(y) = e^{ix\cdot y}$ $(\forall y \in \mathbb{R}^N)$ である). 特に Dirac のデルタ超関数 $\delta_y \in \mathcal{E}'_N$ (定義 8.77) に対し,

$$\hat{\delta_y}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{-ix\cdot y}, \quad \check{\delta_y}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{ix\cdot y} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

が成り立つ.

(4) 任意の $f \in \mathcal{S}_N, u \in \mathcal{E}'_N$ に対し $f * u \in \mathcal{S}_N$ である. また任意の $u \in \mathcal{E}'_N$ に対し,

$$\mathcal{S}_N \ni f \mapsto f * u \in \mathcal{S}_N$$

は連続線型写像である.

証明. (1) 任意の $f, g \in \mathcal{S}_N$, 任意の $k \in \mathbb{R}^N$ に対し, Fubini の定理 5.85 と変数変換より,

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} (f * g)(x) e^{-ix\cdot k} dx = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(x-y) e^{-iy\cdot k} e^{-i(x-y)\cdot k} dy \right) dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) e^{-iy\cdot k} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(x-y) e^{-i(x-y)\cdot k} dx \right) dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) e^{-iy\cdot k} \hat{g}(k) dy = \hat{f}(k)\hat{g}(k)
\end{aligned}$$

となるので $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ が成り立つ. 全く同様にして $\widecheck{f * g} = \check{f}(k)\check{g}(k)$ が成り立つことも分かる. 任意の $f, g \in \mathcal{S}_N$ に対し $\varphi = \hat{f} \in \mathcal{S}_N, \psi = \hat{g} \in \mathcal{S}_N$ とおくと, 定理 8.63 より $f = \check{\varphi}, g = \check{\psi}$ であるから,

$$fg = \check{\varphi}\check{\psi} = \widecheck{\varphi * \psi}$$

である. この両辺を Fourier 変換すれば,

$$\widehat{fg} = \varphi * \psi = \hat{f} * \hat{g}$$

を得る. $\widecheck{fg} = \check{f} * \check{g}$ も全く同様にして示せる.

(2) 任意の $f \in \mathcal{S}_N, u \in \mathcal{S}'_N$ と任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ を取り, $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq I$ を満たす $\mathbb{R}^N$ の有界閉方体 I ($\mathbb{R}$ の有界閉区間 N 個の直積) を取る.

$$\widehat{f * u}(\check{\varphi}) = (f * u)(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} u(T_x f_{-1}) \varphi(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_I u(T_x f_{-1}) \varphi(x) dx \tag{8.68}$$

である. 命題 8.79 より,

$$I \ni x \mapsto \varphi(x) T_x f_{-1} \in \mathcal{S}_N$$

は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 値の連続関数であるから, Riemann 積分 (定義 5.203)

$$\int_I \varphi(x) T_x f_{-1} dx \in \mathcal{S}_N$$

が存在する. Dirac のデルタ超関数 $\delta_y \in \mathcal{E}'_N \subseteq \mathcal{S}'_N$ $(\forall y \in \mathbb{R}^N)$ (命題 8.75) に対し,

$$\begin{aligned}
\delta_y \left(\int_I \varphi(x) T_x f_{-1} dx \right) &= \int_I \varphi(x) \delta_y(T_x f_{-1}) dx = \int_I \varphi(x) T_x f_{-1}(y) dx \\
&= \int_I \varphi(x) f_{-1}(y-x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) f_{-1}(y-x) dx \\
&= (2\pi)^{\frac{N}{2}} f_{-1} * \varphi(y) \quad (\forall y \in \mathbb{R}^N)
\end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_I \varphi(x)T_x f_{-1}dx = f_{-1} * \varphi$$

である. これと (8.68) より,

$$u(f_{-1} * \varphi) = u\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_I \varphi(x)T_x f_{-1}dx\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_I \varphi(x)u(T_x f_{-1})dx = \widehat{f * u}(\breve{\varphi}) \tag{8.69}$$

である. 定理 8.63 より $f_{-1} = \hat{\hat{f}}, \varphi = \hat{\hat{\varphi}}$ だから, (1) と (8.69) より,

$$\hat{f}\hat{u}(\breve{\varphi}) = \hat{u}(\hat{f}\breve{\varphi}) = u(\hat{\hat{f}} * \hat{\breve{\varphi}}) = u(f_{-1} * \varphi) = \widehat{f * u}(\breve{\varphi})$$

となる. よって任意の $f \in \mathcal{S}_N$ と任意の $u \in \mathcal{S}'_N$ に対し,

$$\hat{f}\hat{u}(\breve{\varphi}) = \widehat{f * u}(\breve{\varphi}) \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N))$$

が成り立つ. ここで $D(\mathbb{R}^N)$ が $\mathcal{S}_N$ において稠密である (命題 8.64) ことと定理 8.63 より $\{\breve{\varphi} : \varphi \in D(\mathbb{R}^N)\}$ は $\mathcal{S}_N$ において稠密であるから,

$$\hat{f}\hat{u} = \widehat{f * u}$$

が成り立つ. 全く同様にして $\breve{f}\breve{u} = \widecheck{f * u}$ が成り立つことも分かる. そして任意の $f \in \mathcal{S}_N$ と任意の $u \in \mathcal{S}'_N$ に対し $g = \hat{f} \in \mathcal{S}_N, v = \hat{u} \in \mathcal{S}'_N$ とおくと定理 8.63 より $f = \breve{g}, u = \breve{v}$ であるから,

$$fu = \breve{g}\breve{v} = \widecheck{g * v}$$

である. この両辺を Fourier 変換すれば,

$$\widehat{fu} = g * v = \hat{f} * \hat{u}$$

を得る. 全く同様にして $\widecheck{fu} = \breve{f} * \breve{u}$ が成り立つことも分かる.

(3) 任意の $u \in \mathcal{E}'_N$ に対し定理 8.73 より $h \in D(\mathbb{R}^N)$ で $u = hu$ なるものが取れる. $\mathcal{E}'_N \subseteq \mathcal{S}'_N$ (命題 8.75) であるから (2) と命題 8.86 より,

$$\hat{u} = \widehat{hu} = \hat{h} * \hat{u} \in \mathcal{S}_N * \mathcal{S}'_N \subseteq \mathcal{T}_N, \quad \breve{u} = \widecheck{hu} = \breve{h} * \breve{u} \in \mathcal{S}_N * \mathcal{S}'_N \subseteq \mathcal{T}_N$$

である. 今, 任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ を取り, $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq I$ なる $\mathbb{R}^N$ の有界閉方体 I を取る. 補題 8.89 より,

$$I \ni x \mapsto \varphi(x)e_{-x} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$$

は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 値連続関数であるから Riemann 積分 (定義 5.203)

$$\int_I \varphi(x)e_{-x}dx \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$$

が存在する. Dirac のデルタ超関数 $\delta_y \in \mathcal{E}'_N$ $(\forall y \in \mathbb{R}^N)$ に対し,

$$\delta_y\left(\int_I \varphi(x)e_{-x}dx\right) = \int_I \varphi(x)\delta_y(e_{-x})dx = \int_I \varphi(x)e^{-ix\cdot y}dx = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\hat{\varphi}(y) \quad (\forall y \in \mathbb{R}^N)$$

であるから,

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_I \varphi(x)e_{-x}dx = \hat{\varphi}$$

が成り立つ. よって,

$$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_I \varphi(x)u(e_{-x})dx = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}u(e_{-x})\right)\varphi(x)dx \tag{8.70}$$

であり, これが任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ に対して成り立つから, $\mathbb{R}^N \ni x \mapsto u(e_{-x}) \in \mathbb{C}$ が連続関数であること (補題 8.89) と定理 8.23 より,

$$\widehat{u}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(e_{-x}) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

が成り立つ. 全く同様にして $\check{u}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(e_x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^N)$ が成り立つことも分かる. 特に Dirac のデルタ超関数 $\delta_y \in \mathcal{E}'_N$ $(\forall y \in \mathbb{R}^N)$ に対し,

$$\begin{aligned} \widehat{\delta_y}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \delta_y(e_{-x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} e_{-x}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{-ix\cdot y}, \\ \check{\delta_y}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \delta_y(e_x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} e_x(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{ix\cdot y} \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

である.

(4) 任意の $f \in \mathcal{S}_N, u \in \mathcal{E}'_N$ に対し (2), (3) より,

$$\widehat{f * u} = \widehat{f}\widehat{u} \in \mathcal{S}_N \mathcal{T}_N \subseteq \mathcal{S}_N$$

であるから,

$$f * u = \check{\widehat{f * u}} \in \check{\mathcal{S}_N} = \mathcal{S}_N$$

である. 任意の $u \in \mathcal{E}'_N$ に対し,

$$\mathcal{S}_N \ni f \mapsto f * u \in \mathcal{S}_N \tag{8.71}$$

が Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型写像であることを示す. 線型写像であることは明らかである. 連続性を示すには, 閉グラフ定理 3.102 より, $\mathcal{S}_N$ の列 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ と $f, g \in \mathcal{S}_N$ が Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ の位相で,

$$\lim_{i\to\infty} f_i = f, \quad \lim_{i\to\infty} f_i * u = g \tag{8.72}$$

を満たすと仮定して $g = f * u$ が成り立つことを示せばよい. 任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対し (8.72) の左の式と命題 8.54 の (3) より Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ の位相で,

$$\lim_{i\to\infty} T_x f_{i,-1} = T_x f_{-1}$$

が成り立ち, $u \in \mathcal{E}'_N \subseteq \mathcal{S}'_N$ は $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型汎関数であるから,

$$f_i * u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x f_{i,-1}) \to \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x f_{-1}) = f * u(x) \quad (i \to \infty)$$

が成り立つ. (8.72) の右の式は特に $(f_i * u)_{i\in\mathbb{N}}$ が g に各点収束することを意味するので,

$$g(x) = \lim_{i\to\infty} f_i * u(x) = f * u(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

となる. よって $g = f * u$ であるから (8.71) は連続である.

□

定理 8.91 (合成積の結合法則)**.** 合成積に関して,

(1) 任意の $f, g \in D(\mathbb{R}^N), u \in D'(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$f * (g * u) = (f * g) * u$$

(命題 8.85 より $f * g \in D(\mathbb{R}^N)$ であることに注意) が成り立つ.

(2) 任意の $f, g \in \mathcal{S}_N, u \in \mathcal{S}'_N$ に対し,

$$f * (g * u) = (f * g) * u$$

(命題 8.86 と命題 8.67 の (4) より $g * u \in \mathcal{T}_N \subseteq \mathcal{S}'_N$, 命題 8.88 より $f * g \in \mathcal{S}_N$ であることに注意) が成り立つ.

(3) 任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $g \in D(\mathbb{R}^N)$, $u \in \mathcal{E}'_N$ に対し,

$$f * (g * u) = (f * g) * u$$

(命題 8.85 より $g * u \in D(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{E}'_N$ であることに注意) が成り立つ.

証明. (1) 任意の $f, g \in D(\mathbb{R}^N)$, $u \in D'(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$ を取り固定する. $f * g \in D(\mathbb{R}^N)$ の反転は,

$$\begin{aligned}(f * g)_{-1}(y) = (f * g)(-y) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(z) g(-y - z) dz = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(-z) g(-y + z) dz \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f_{-1}(z) g_{-1}(y - z) dz = f_{-1} * g_{-1}(y) \quad (\forall y \in \mathbb{R}^N)\end{aligned}$$

であるから,

$$(f * g) * u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x(f * g)_{-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x(f_{-1} * g_{-1})) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(f_{-1} * T_x g_{-1}) \tag{8.73}$$

となる. $\mathrm{supp}(f_{-1}) \subseteq I$ なる有界閉方体 I を取り, コンパクト集合

$$K := I + \mathrm{supp}(T_x g_{-1})$$

を考える.

$$\mathrm{supp}(T_y T_x g_{-1}) = y + \mathrm{supp}(T_x g_{-1}) \subseteq I + \mathrm{supp}(T_x g_{-1}) = K \quad (\forall y \in I) \tag{8.74}$$

であり, Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ は定義 8.14 より Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.11) の閉部分空間であるから, 命題 8.78 の (1) と (8.74) より,

$$I \ni y \mapsto f_{-1}(y) T_y T_x g_{-1} \in D_K(\mathbb{R}^N)$$

は Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ 値連続関数である. よって Riemann 積分 (定義 5.203)

$$\int_I f_{-1}(y) T_y T_x g_{-1} dy \in D_K(\mathbb{R}^N)$$

が定義できる. Dirac のデルタ超関数 $\delta_z \in \mathcal{E}'_N$ $(\forall z \in \mathbb{R}^N)$ に対し,

$$\begin{aligned}\delta_z \left(\int_I f_{-1}(y) T_y T_x g_{-1} dy \right) &= \int_I f_{-1}(y) \delta_z (T_y T_x g_{-1}) dy = \int_I f_{-1}(y) T_x g_{-1}(z - y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f_{-1}(y) T_x g_{-1}(z - y) dy \\ &= (2\pi)^{\frac{N}{2}} (f_{-1} * T_x g_{-1})(z) \quad (\forall z \in \mathbb{R}^N)\end{aligned}$$

であるから,

$$f_{-1} * T_x g_{-1} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_I f_{-1}(y) T_y T_x g_{-1} dy \tag{8.75}$$

である. $D'(\mathbb{R}^N)$ の定義 8.18 より $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ の Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ 上への制限 $D_K(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto u(\varphi) \in \mathbb{C}$ は連続線型汎関数であるから (8.73) と (8.75) より,

$$\begin{aligned}(f * g) * u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u\left(f_{-1} * T_x g_{-1}\right) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_I f_{-1}(y) u(T_y T_x g_{-1}) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f_{-1}(y) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_{x+y} g_{-1}) dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f_{-1}(y)(g * u)(x + y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)(g * u)(x - y) dy = f * (g * u)(x)\end{aligned}$$

となる. よって任意の $f, g \in D(\mathbb{R}^N)$ と $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ に対し $(f * g) * u = f * (g * u)$ が成り立つ.

(2) 任意の $f \in D(\mathbb{R}^N)$, $g \in \mathcal{S}_N$, $u \in \mathcal{S}'_N$, $x \in \mathbb{R}^N$ を取り固定する.

$$(f * g) * u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x(f * g)_{-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x(f_{-1} * g_{-1})) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(f_{-1} * T_x g_{-1}) \tag{8.76}$$

である. $\mathrm{supp}(f_{-1}) \subseteq I$ なる有界閉方体 I を取る. 命題 8.79 の (2) より,

$$I \ni y \mapsto f_{-1}(y) T_y T_x g_{-1} \in \mathcal{S}_N$$

は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 値連続関数であるから Riemann 積分 5.203

$$\int_I f_{-1}(y) T_y T_x g_{-1} dy \in \mathcal{S}_N$$

が存在し, Dirac のデルタ超関数 $\delta_z \in \mathcal{E}'_N \subseteq \mathcal{S}'_N$ $(\forall z \in \mathbb{R}^N)$ に対し,

$$\delta_z\left(\int_I f_{-1}(y) T_y T_x g_{-1} dy\right) = \int_I f_{-1}(y) T_x g_{-1}(z - y) dy = (2\pi)^{\frac{N}{2}} (f_{-1} * T_x g_{-1})(z) \quad (\forall z \in \mathbb{R}^N)$$

であるから,

$$f_{-1} * T_x g_{-1} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_I f_{-1}(y) T_y T_x g_{-1} dy \tag{8.77}$$

である. $u \in \mathcal{S}'_N$ は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型汎関数であるから (8.76), (8.77) より,

$$\begin{aligned}(f * g) * u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(f_{-1} * T_x g_{-1}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_I f_{-1}(y) u(T_y T_x g_{-1}) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f_{-1}(y) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_{x+y} g_{-1}) dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f_{-1}(y)(g * u)(x + y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)(g * u)(x - y) dy = f * (g * u)(x)\end{aligned}$$

となる. これで,

$$(f * g) * u = f * (g * u) \quad (\forall f \in D(\mathbb{R}^N), \forall g \in \mathcal{S}_N, \forall u \in \mathcal{S}'_N) \tag{8.78}$$

が成り立つことが示された. 任意の $f, g \in \mathcal{S}_N$ と任意の $u \in \mathcal{S}'_N$ を取る. Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ において $D(\mathbb{R}^N)$ は稠密である (命題 8.64) から, $D(\mathbb{R}^N)$ の列 $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ で $\mathcal{S}_N$ の位相で,

$$\lim_{i \to \infty} f_i = f$$

となるものが取れる. このとき命題 8.88 より $\mathcal{S}_N$ の位相で,

$$\lim_{i \to \infty} f_i * g = f * g$$

が成り立つから, $u \in \mathcal{S}'_N$ が $\mathcal{S}_N$ 上の連続線型汎関数であることと命題 8.54 の (4) より任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$\begin{aligned}(f * g) * u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x(f * g)_{-1}) = \lim_{i \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x(f_i * g)_{-1}) \\ &= \lim_{i \to \infty} (f_i * g) * u(x) = \lim_{i \to \infty} f_i * (g * u)(x) = f * (g * u)(x)\end{aligned}$$

が成り立つ (4 番目の等号において (8.78) を用いた). ゆえに,

$$(f * g) * u = f * (g * u) \quad (\forall f, g \in \mathcal{S}_N, \forall u \in \mathcal{S}'_N)$$

が成り立つ.

(3) (1) より,

$$(f * g) * u(x) = f * (g * u)(x) \quad (\forall f, g \in D(\mathbb{R}^N), \forall u \in \mathcal{E}'_N) \tag{8.79}$$

が成り立つ. 任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $g \in D(\mathbb{R}^N)$, $u \in \mathcal{E}'_N$ を取る. Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.11) において $D(\mathbb{R}^N)$ は稠密である (命題 8.72) ので $D(\mathbb{R}^N)$ の列 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ で Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の位相で,

$$\lim_{i\to\infty} f_i = f$$

となるものが取れる. このとき命題 8.87 より Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の位相で,

$$\lim_{i\to\infty} f_i * g = f * g$$

が成り立つから, $u \in \mathcal{E}'_N$ が Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 上の連続線型汎関数である (定義 8.74) ことと (8.79) より任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$\begin{aligned}(f * g) * u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x(f * g)_{-1}) = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} u(T_x(f_i * g)_{-1}) \\ &= \lim_{i\to\infty} (f_i * g) * u(x) = \lim_{i\to\infty} f_i * (g * u)(x) = f * (g * u)(x)\end{aligned}$$

が成り立つ. よって,

$$(f * g) * u = f * (g * u) \quad (\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \forall g \in D(\mathbb{R}^N), \forall u \in \mathcal{E}'_N)$$

が成り立つ.

□

定義 8.92 (Friedrichs の軟化子). $\varphi : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$ を,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| \geqslant 1) \end{cases}$$

と定義すると補題 6.40 より $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ であり,

$$(\varphi > 0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}, \ \ \mathrm{supp}(\varphi) = \overline{(\varphi > 0)} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant 1\}$$

である. これに対し,

$$\psi := (2\pi)^{\frac{N}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)dx\right)^{-1} \varphi \in D(\mathbb{R}^N)$$

とおき, 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し,

$$\psi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^N} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

とおく. このとき,

(1)
$$\psi_\varepsilon \in D(\mathbb{R}^N), \ \ \psi_\varepsilon(x) \in [0, \infty) \ \ (\forall x \in \mathbb{R}^N).$$

(2)
$$(\psi_\varepsilon > 0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < \varepsilon\}, \ \ \mathrm{supp}(\psi_\varepsilon) = \overline{(\psi_\varepsilon > 0)} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant \varepsilon\}.$$

(3)
$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(x)dx = 1.$$

(4) $|x| = |y|$ なる任意の $x, y \in \mathbb{R}^N$ に対し $\psi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(y)$.

である. 逆順序による有向集合 (定義 1.19) $(0, \infty)$ によって添字付けられた $D(\mathbb{R}^N)$ のネット $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\infty)}$ で, 上の (1) ~ (4) の条件を満たすものを $\mathbb{R}^N$ 上の Friedrichs の軟化子と言う.

補題 8.93. 任意の $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ (無限遠で消える連続関数) に対し f は一様連続である.

証明. 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ を取る. $C_0(\mathbb{R}^N)$ の定義 5.159 より,

$$K := \left\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

はコンパクトである. 任意の $x \in K$ に対し x における f の連続性より $\delta_x \in (0,\infty)$ が存在し,

$$y \in B(x,\delta_x) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y-x| < \delta_x\} \quad \Rightarrow \quad |f(y)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8.80}$$

となる. K はコンパクトであるから有限個の $x_1,\cdots,x_n \in K$ が存在し,

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B\left(x_j, \frac{\delta_{x_j}}{2}\right) \tag{8.81}$$

となる. そこで,

$$\delta := \min\left\{\frac{\delta_{x_1}}{2},\cdots,\frac{\delta_{x_n}}{2}\right\}$$

とおく. $|x-y| < \delta$ を満たす任意の $x,y \in \mathbb{R}^N$ を取り, $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ が成り立つことを示せばよい. もし $x,y \notin K$ ならば,

$$|f(y)-f(x)| \leqslant |f(y)| + |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる. x,y のうち少なくとも一方が K に属するとする. そこで $x \in K$ とする. このとき (8.81) よりある $j \in \{1,\cdots,n\}$ に対して $x \in B\left(x_j, \frac{\delta_{x_j}}{2}\right)$ となるから,

$$|x-x_j| < \frac{\delta_{x_j}}{2} < \delta_{x_j}, \quad |y-x_j| \leqslant |y-x| + |x-x_j| < \delta + \frac{\delta_{x_j}}{2} \leqslant \delta_{x_j}$$

となる. よって (8.80) より,

$$|f(x)-f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(y)-f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

であるから,

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f(x_j)| + |f(x_j)-f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つ. よって f は一様連続である. □

補題 8.94. 任意の $f \in D(\mathbb{R}^N), u \in D'(\mathbb{R}^N)$ に対し $f * u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ は $D'(\mathbb{R}^N)$ の元として,

$$(f*u)(\varphi) = u(\varphi * f_{-1}) \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N))$$

を満たす.

証明. 任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ を取り, $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq I$ を満たす有界閉方体 $I \subseteq \mathbb{R}^N$ を取る. そしてコンパクト集合

$$K := I - \mathrm{supp}(f)$$

を考える. このとき,

$$\mathrm{supp}(T_x f_{-1}) = x + \mathrm{supp}(f_{-1}) = x - \mathrm{supp}(f) \in I - \mathrm{supp}(f) = K \quad (\forall x \in I)$$

であることと命題 8.78 より,

$$I \ni x \mapsto \varphi(x) T_x f_{-1} \in D_K(\mathbb{R}^N)$$

は Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ 値[*110]連続関数である. よって Riemann 積分 (定義 5.203)

$$\int_I \varphi(x) T_x f_{-1} dx \in D_K(\mathbb{R}^N)$$

[*110] Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ は定義 8.14 より Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の閉部分空間であることに注意.

が存在する．Dirac のデルタ超関数 $\delta_y \in \mathcal{E}'_N$ $(\forall y \in \mathbb{R}^N)$ に対し，

$$\delta_y\left(\int_I \varphi(x) T_x f_{-1} dx\right) = \int_I \varphi(x)\delta_y(T_x f_{-1})dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) f_{-1}(y-x)dx$$
$$= (2\pi)^{\frac{N}{2}}(f_{-1} * \varphi)(y) \quad (\forall y \in \mathbb{R}^N)$$

であるから，

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_I \varphi(x) T_x f_{-1} dx = f_{-1} * \varphi \tag{8.82}$$

である．$D'(\mathbb{R}^N)$ の定義 8.18 より u の Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ 上への制限は連続線型汎関数であるから，(8.82) より，

$$u(f_{-1} * \varphi) = u\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_I \varphi(x) T_x f_{-1} dx\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_I \varphi(x) u(T_x f_{-1}) dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)(f * u)(x)dx = (f * u)(\varphi)$$

となる． □

定理 8.95 (Friedrichs の軟化子の基本性質)**.** $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,\infty)}$ を $\mathbb{R}^N$ 上の Friedrichs の軟化子 (定義 8.92) とする．このとき，

(1) 任意の $f \in C(\mathbb{R}^N)$ に対し $(\psi_\varepsilon * f)_{\varepsilon \in (0,\infty)}$ は $\varepsilon \to +0$ で f にコンパクト一様収束する．

(2) 任意の $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ に対し，

$$\psi_\varepsilon * f \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N) \quad (\forall \varepsilon \in (0,\infty))$$

であり，Banach 空間 $C_0(\mathbb{R}^N)$ (命題 5.160) において $\lim_{\varepsilon \to +0} \psi_\varepsilon * f = f$ が成り立つ．

(3) 任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ に対し Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.11) において $\lim_{\varepsilon \to +0} \psi_\varepsilon * f = f$ が成り立つ．

(4) 任意の $f \in \mathcal{S}_N$ に対し Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ (定義 8.50) において $\lim_{\varepsilon \to +0} \psi_\varepsilon * f = f$ が成り立つ (命題 8.88 より $\psi_\varepsilon * f \in \mathcal{S}_N$ $(\forall \varepsilon \in (0,\infty))$ であることに注意)．

(5) 任意の $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ に対し位相線型空間 $D'(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.18) において $\lim_{\varepsilon \to +0} \psi_\varepsilon * u = u$ が成り立つ．すなわち，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \psi_\varepsilon * u(\varphi) = \varphi \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N))$$

が成り立つ．

証明. (1) Friedrichs の軟化子の定義 8.92 の (3) より，

$$|\psi_\varepsilon * f(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(y)(f(x-y) - f(x))dy\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(y)|f(x-y) - f(x)|dy \tag{8.83}$$

である．任意のコンパクト集合 $K \subseteq \mathbb{R}^N$ に対し，

$$K - CB(0,1) = K - \{y \in \mathbb{R}^N : |y| \leqslant 1\}$$

はコンパクトであるから，定理 1.123 より，

$$K - CB(0,1) \ni x - y \mapsto f(x-y) \in \mathbb{C}$$

は一様連続である．よって任意の $\delta \in (0,\infty)$ に対し，十分小さい $\varepsilon_0 \in (0,1]$ を取れば，

$$\sup_{|y|<\varepsilon} \sup_{x \in K} |f(x-y) - f(x)| \leqslant \delta \quad (\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0])$$

が成り立つので，Friedrichs の軟化子の定義 8.92 の (2), (3) より，

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(y)|f(x-y) - f(x)|dy \leqslant \delta \quad (\forall x \in K, \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0])$$

となり, 従って (8.83) より,

$$\sup_{x\in K}|\psi_\varepsilon * f(x) - f(x)| \leqslant \delta \quad (\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_0])$$

となる. これより $(\psi_\varepsilon * f)_{\varepsilon\in(0,\infty)}$ は K 上で f に一様収束する. $K \subseteq \mathbb{R}^N$ は任意のコンパクト集合であるから $(\psi_\varepsilon * f)_{\varepsilon\in(0,\infty)}$ は f にコンパクト一様収束する.

(2) 補題 8.93 より任意の $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ に対し f は一様連続であるから,

$$\mathbb{R}^N \ni y \mapsto T_y f \in C_0(\mathbb{R}^N)$$

は Banach 空間 $C_0(\mathbb{R}^N)$ 値の連続関数である. よって任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し,

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(y) T_y f dy \in C_0(\mathbb{R}^N)$$

が存在する[*111]. 任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対し Banach 空間 $C_0(\mathbb{R}^N)$ 上の有界線型汎関数 $\delta_x : C_0(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{C}$ を考えれば,

$$\begin{aligned}\delta_x\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(y) T_y f dy\right) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(y) \delta_x(T_y f) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(y) f(x-y) dy = \psi_\varepsilon * f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)\end{aligned}$$

となるから,

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(y) T_y f dy = \psi_\varepsilon * f$$

である. よって Friedrichs の軟化子の定義 8.92 の (2), (3) より,

$$\begin{aligned}\|\psi_\varepsilon * f - f\| &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\left\|\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(y)(T_y f - f) dy\right\| \\ &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(y)\|T_y f - f\| dy \to 0 \quad (\varepsilon \to +0)\end{aligned}$$

が成り立つ.

(3) 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ と任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し命題 8.78 より $\partial^\alpha(\psi_\varepsilon * f) = \psi_\varepsilon * \partial^\alpha f$ であり, (1) より $(\psi_\varepsilon * \partial^\alpha f)_{\varepsilon\in(0,\infty)}$ は $\varepsilon \to +0$ で $\partial^\alpha f$ にコンパクト一様収束する. よって Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の位相で $\lim_{\varepsilon\to+0} \psi_\varepsilon * f = f$ が成り立つ (命題 8.9).

(4) 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ と任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し命題 8.78 より $\partial^\alpha(\psi_\varepsilon * f) = \psi_\varepsilon * \partial^\alpha f$ であり, 任意の $\beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し多重二項定理 8.4 より,

$$\mathrm{id}^\beta \partial^\alpha(\psi_\varepsilon * f) = \mathrm{id}^\beta(\psi_\varepsilon * \partial^\alpha f) = \psi_\varepsilon * (\mathrm{id}^\beta \partial^\alpha f) + \sum_{0<\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\gamma}(\mathrm{id}^\gamma \psi_\varepsilon) * (\mathrm{id}^{\beta-\gamma}\partial^\alpha f) \tag{8.84}$$

が成り立つ[*112]. $0 < \gamma \leqslant \beta$ なる任意の $\gamma \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し変数変換より,

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|\left((\mathrm{id}^\gamma \psi_\varepsilon) * (\mathrm{id}^{\beta-\gamma}\partial^\alpha f)\right)(x)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\left|y^\gamma \psi_\varepsilon(y)(x-y)^{\beta-\gamma}\partial^\alpha f(x-y)\right| dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\left|(\varepsilon y)^\gamma \psi(y)(x-\varepsilon y)^{\beta-\gamma}\partial^\alpha f(x-\varepsilon y)\right| dy \\ &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\varepsilon^{|\gamma|}\|y^\gamma\psi\|_1\|\mathrm{id}^{\beta-\gamma}\partial^\alpha f\|_\infty \to 0 \quad (\varepsilon \to +0)\end{aligned}$$

[*111] Riemann 積分 (定義 5.203), Bochner 積分 (定義 5.250) いずれの意味でも同じである.
[*112] 命題 8.88 の証明と同様にして計算すれば分かる.

であり, (2) より,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\psi_\varepsilon*(\mathrm{id}^\beta\,\partial^\alpha f)=\mathrm{id}^\beta\,\partial^\alpha f\ \ (\text{一様収束})$$

であるから, (8.84) より,

$$\begin{aligned}\mathrm{id}^\beta\,\partial^\alpha(\psi_\varepsilon*f)&=\psi_\varepsilon*(\mathrm{id}^\beta\,\partial^\alpha f)+\sum_{0<\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\gamma}(\mathrm{id}^\gamma\,\psi_\varepsilon)*(\mathrm{id}^{\beta-\gamma}\,\partial^\alpha f)\\&\to\mathrm{id}^\beta\,\partial^\alpha f\ \ (\varepsilon\to+0)\ \ (\text{一様収束})\end{aligned}$$

が成り立つ. $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^N$ は任意であるから命題 8.48 より Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ において $\lim_{\varepsilon\to+0}\psi_\varepsilon*f=f$ が成り立つ.

(5) 任意の $\varphi\in D(\mathbb{R}^N)$ を取る. Friedrichs の軟化子の定義 8.92 の (4) より各 ψ_ε の反転 (定義 8.80) は ψ_ε であるから, 補題 8.94 より,

$$\psi_\varepsilon*u(\varphi)=u(\psi_\varepsilon*\varphi)\ \ (\forall\varepsilon\in(0,\infty))$$

である. コンパクト集合

$$K:=\{x\in\mathbb{R}^N:|x|\leqslant 1\}+\mathrm{supp}(\varphi)$$

を考えると, 命題 8.85 と Friedrichs の軟化子の定義 8.92 の (2) より,

$$\mathrm{supp}(\psi_\varepsilon*\varphi)\subseteq\mathrm{supp}(\psi_\varepsilon)+\mathrm{supp}(\varphi)\subseteq K\ \ (\forall\varepsilon\in(0,1])$$

であるから, (3) より Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.14) において,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\in(0,1]\\ \varepsilon\to+0}}\psi_\varepsilon*\varphi=\varphi$$

が成り立つ. $D'(\mathbb{R}^N)$ の定義 8.18 より u の Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ 上への制限は連続線型汎関数であるから,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\in(0,1]\\ \varepsilon\to+0}}u(\psi_\varepsilon*\varphi)=u(\varphi)$$

が成り立つ. ゆえに任意の $\varphi\in D(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\in(0,1]\\ \varepsilon\to+0}}\psi_\varepsilon*u(\varphi)=\lim_{\substack{\varepsilon\in(0,1]\\ \varepsilon\to+0}}u(\psi_\varepsilon*\varphi)=u(\varphi)$$

が成り立つので, 位相線型空間 $D'(\mathbb{R}^N)$ の位相で $\lim_{\varepsilon\to+0}\psi_\varepsilon*u=u$ が成り立つ.

□

定義 8.96 (超関数と台がコンパクトな超関数の合成積)**.** 次の定理 8.97 の (1) で見るように $\mathbb{R}^N$ 上の任意の超関数 $u\in D'(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.18) と任意の台がコンパクトな超関数 $v\in\mathcal{E}'_N$ (定義 8.74) に対し超関数 $v*u\in D'(\mathbb{R}^N)$ を,

$$v*u:D(\mathbb{R}^N)\ni\varphi\mapsto u(\varphi*v_{-1})\in\mathbb{C}$$

[*113]として定義できる. これは補題 8.94 より $f\in D(\mathbb{R}^N)\subseteq\mathcal{E}'_N$ と $u\in D'(\mathbb{R}^N)$ の合成積 $f*u$ の定義と矛盾しない.

定理 8.97. 台がコンパクトな超関数 $v\in\mathcal{E}'_N$ に対し次が成り立つ.

(1) 任意の $u\in D'(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$v*u:D(\mathbb{R}^N)\ni\varphi\mapsto u(\varphi*v_{-1})\in\mathbb{C}$$

とおくと $v*u\in D'(\mathbb{R}^N)$.

(2) 任意の $u\in\mathcal{S}'_N$ に対し,

$$v*u:\mathcal{S}_N\ni\varphi\mapsto u(\varphi*v_{-1})\in\mathbb{C}$$

(定理 8.90 の (4) より任意の $\varphi\in D(\mathbb{R}^N)$ に対し $\varphi*v_{-1}\in\mathcal{S}_N$ であることに注意) とおくと $v*u\in\mathcal{S}'_N$.

[*113] v_{-1} は v の反転 (定義 8.80) である. 合成積の台に関する命題 8.85 より任意の $\varphi\in D(\mathbb{R}^N)$ に対し $\varphi*v_{-1}\in D(\mathbb{R}^N)$ であることに注意.

(3) 任意の $u \in \mathcal{E}'_N$ に対し,

$$v * u : C^\infty(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto u(\varphi * v_{-1}) \in \mathbb{C}$$

とおくと $v * u \in \mathcal{E}'_N$.

証明. (1) $v * u : D(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ は明らかに線型汎関数である. $v * u \in D'(\mathbb{R}^N)$ であることを示すには, $D'(\mathbb{R}^N)$ の定義 8.18 より, 任意のコンパクト集合 $K \subseteq \mathbb{R}^N$ を取り, $v * u$ の Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.14) 上への制限

$$D_K(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto v * u(\varphi) = u(\varphi * v_{-1}) \in \mathbb{C} \tag{8.85}$$

が連続線型汎関数であることを示せばよい. 命題 8.85 より,

$$\mathrm{supp}(\varphi * v_{-1}) \subseteq K - \mathrm{supp}(v) \quad (\forall \varphi \in D_K(\mathbb{R}^N))$$

であり $K - \mathrm{supp}(v)$ はコンパクト集合である. Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$, $D_{K-\mathrm{supp}(v)}(\mathbb{R}^N)$ は定義 8.14 より Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.11) の閉部分空間であるから, 命題 8.87 より,

$$D_K(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto \varphi * v_{-1} \in D_{K-\mathrm{supp}(v)}(\mathbb{R}^N) \tag{8.86}$$

は Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ から Fréchet 空間 $D_{K-\mathrm{supp}(v)}(\mathbb{R}^N)$ への連続線型写像である. ここで $D'(\mathbb{R}^N)$ の定義 8.18 より u の Fréchet 空間 $D_{K-\mathrm{supp}(v)}(\mathbb{R}^N)$ 上への制限

$$D_{K-\mathrm{supp}(v)} \ni \varphi \mapsto u(\varphi) \in \mathbb{C} \tag{8.87}$$

は連続線型汎関数であり, (8.85) は (8.86) と (8.87) の合成であるので, (8.85) は Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ 上の連続線型汎関数である. ゆえに $v * u \in D'(\mathbb{R}^N)$ である.

(2) 定理 8.90 の (4) より,

$$\mathcal{S}_N \ni \varphi \mapsto \varphi * v_{-1} \in \mathcal{S}_N$$

は Fréchet 空間 $\mathcal{S}_N$ (定義 8.50) 上の連続線型写像である. よって $u \in \mathcal{S}'_N$ (定義 8.66) ならば,

$$\mathcal{S}_N \ni \varphi \mapsto u(\varphi * v_{-1}) \in \mathbb{C}$$

は連続線型汎関数であるので, $u * v \in \mathcal{S}'_N$ である.

(3) 命題 8.87 より,

$$C^\infty(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto \varphi * v_{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$$

は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.11) 上の連続線型写像であるから, $u \in \mathcal{E}'_N$ ならば,

$$C^\infty(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto u(\varphi * v_{-1}) \in \mathbb{C}$$

は Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 上の連続線型汎関数である. よって台がコンパクトな超関数の定義 8.74 より $u * v \in \mathcal{E}'_N$ である.

□

命題 8.98 (超関数と Dirac のデルタ超関数の合成積)**.** 任意の $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ と Dirac のデルタ超関数 $\delta_y \in \mathcal{E}'_N$ $(\forall y \in \mathbb{R}^N)$ (定義 8.77) に対し,

$$\delta_y * u = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} T_y u \quad (\forall y \in \mathbb{R}^N)$$

[*114]が成り立つ.

[*114] $T_y u$ は u の y による平行移動 (定義 8.44) である.

証明. 任意の $y \in \mathbb{R}^N$ を取り固定する. 任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$\begin{aligned}\varphi * (\delta_y)_{-1}(x) = \varphi * \delta_{-y}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\delta_{-y}(T_x\varphi_{-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}T_x\varphi_{-1}(-y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\varphi(x+y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}T_{-y}\varphi(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)\end{aligned}$$

であるから,

$$\varphi * (\delta_y)_{-1} = T_{-y}\varphi \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N))$$

である. よって超関数と台がコンパクトな超関数の合成積の定義 8.96 より,

$$\delta_y * u(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}u(\varphi * (\delta_y)_{-1}) == \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}u(T_{-y}\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}T_y u(\varphi) \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N))$$

であるから,

$$\delta_y * u = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}T_y u$$

が成り立つ. □

命題 8.99. $u \in D'(\mathbb{R}^N)$, $v \in \mathcal{E}'_N$ とし, $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\infty)}$ を Friedrichs の軟化子とする. そして,

$$v_\varepsilon := \psi_\varepsilon * v \in D(\mathbb{R}^N), \quad u_\varepsilon := \psi_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \quad (\forall \varepsilon \in (0,\infty))$$

[*115]とおく. このとき位相線型空間 $D'(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.18) において,

$$\lim_{\varepsilon\to+0} v * u_\varepsilon = v * u, \quad \lim_{\varepsilon\to+0} v_\varepsilon * u = v * u \tag{8.88}$$

が成り立つ.

証明. 任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ に対し, 定理 8.95 の (5) より,

$$v * u_\varepsilon(\varphi) = u_\varepsilon(\varphi * v_{-1}) \to u(\varphi * v_{-1}) = v * u(\varphi) \quad (\varepsilon \to +0)$$

であるから位相線型空間 $D'(\mathbb{R}^N)$ の位相で $\lim_{\varepsilon\to+0} v * u_\varepsilon = v * u$ が成り立つ. (8.88) の右の式が成り立つことを示す. 任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ を取る. Friedrichs の軟化子の定義 8.92 の (4) より任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し,

$$(v_\varepsilon)_{-1} = \psi_\varepsilon * v_{-1} \quad (\forall \varepsilon \in (0,\infty))$$

であるから, 定理 8.91 より,

$$v_\varepsilon * u(\varphi) = u(\varphi * (v_\varepsilon)_{-1}) = u(\varphi * (\psi_\varepsilon * v_{-1})) = u((\varphi * \psi_\varepsilon) * v_{-1}) \quad (\forall \varepsilon \in (0,\infty)) \tag{8.89}$$

となる. そこでコンパクト集合

$$K := \mathrm{supp}(\varphi) + \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant 1\} - \mathrm{supp}(v)$$

を考えると命題 8.85 より,

$$\mathrm{supp}((\varphi * \psi_\varepsilon) * v_{-1}) \subseteq K \quad (\forall \varepsilon \in (0,1])$$

となるので, 定理 8.95 の (3) と命題 8.87 より, Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.14) において,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\in(0,1]\\ \varepsilon\to+0}} (\varphi * \psi_\varepsilon) * v_{-1} = \varphi * v_{-1}$$

が成り立つ. $D'(\mathbb{R}^N)$ の定義 8.18 より $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ の Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ 上への制限は連続線型汎関数であるから (8.89) より,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\in(0,1]\\ \varepsilon\to+0}} v_\varepsilon * u(\varphi) = \lim_{\substack{\varepsilon\in(0,1]\\ \varepsilon\to+0}} u((\varphi * \psi_\varepsilon) * v_{-1}) = u(\varphi * v_{-1}) = v * u(\varphi)$$

となる. よって任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ に対し $\lim_{\varepsilon\to+0} v_\varepsilon * u(\varphi) = u(\varphi)$ が成り立つので, 位相線型空間 $D'(\mathbb{R}^N)$ の位相で $\lim_{\varepsilon\to+0} v_\varepsilon * u = v * u$ が成り立つ. □

[*115] $\psi_\varepsilon * v \in D(\mathbb{R}^N)$ であることは合成積の台に関する命題 8.85 を参照.

定理 8.100. 台がコンパクトな超関数 $v \in \mathcal{E}'_N$ に対し次が成り立つ.

(1) 任意の $f \in D(\mathbb{R}^N), u \in D'(\mathbb{R}^N)$ に対し, $f * (v * u) = (f * v) * u$.
(2) 任意の $f \in \mathcal{S}_N, u \in \mathcal{S}'_N$ に対し, $f * (v * u) = (f * v) * u$.
(3) 任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N), u \in \mathcal{E}'_N$ に対し, $f * (v * u) = (f * v) * u$.
(4) 任意の $u \in \mathcal{E}'_N$ に対し, $v * u = u * v$.

証明. $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,\infty)}$ を Friedrichs の軟化子とし,

$$v_\varepsilon := \psi_\varepsilon * v, \quad u_\varepsilon := \psi_\varepsilon * u \quad (\forall \varepsilon \in (0,\infty))$$

とおく.

(1) 命題 8.99 と定理 8.91 の (1) より,

$$\begin{aligned} f * (v * u)(x) &= (v * u)(T_x f_{-1}) = \lim_{\varepsilon \to +0} (v_\varepsilon * u)(T_x f_{-1}) = \lim_{\varepsilon \to +0} f * (v_\varepsilon * u)(x) \\ &= \lim_{\varepsilon \to +0} (f * v_\varepsilon) * u(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N) \end{aligned} \tag{8.90}$$

である. ここでコンパクト集合

$$K := \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(v) + \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant 1\}$$

を考えると, 命題 8.85 より,

$$\mathrm{supp}(f * v_\varepsilon) \subseteq \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(v_\varepsilon) \subseteq K \quad (\forall \varepsilon \in (0,1])$$

であるから, 定理 8.95 の (3) より Fréchet 空間 $D_K(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.14) において,

$$\lim_{\substack{\varepsilon \in (0,1] \\ \varepsilon \to +0}} f * v_\varepsilon = f * v$$

が成り立つ. よって任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対し, Fréchet 空間 $D_{x-K}(\mathbb{R}^N)$ において,

$$\lim_{\substack{\varepsilon \in (0,1] \\ \varepsilon \to +0}} T_x(f * v_\varepsilon)_{-1} = T_x(f * v)_{-1}$$

が成り立ち, u の Fréchet 空間 $D_{x-K}(\mathbb{R}^N)$ 上への制限は連続線型汎関数である ($D'(\mathbb{R}^N)$ の定義 8.18) から,

$$\lim_{\substack{\varepsilon \in (0,1] \\ \varepsilon \to +0}} (f * v_\varepsilon) * u(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \in (0,1] \\ \varepsilon \to +0}} u(T_x(f * v_\varepsilon)_{-1}) = u(T_x(f * v)_{-1}) = (f * v) * u(x)$$

が成り立つ. よって (8.90) と合わせて,

$$f * (v * u)(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} (f * v_\varepsilon) * u(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \in (0,1] \\ \varepsilon \to +0}} (f * v_\varepsilon) * u(x) = (f * v) * u(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

を得る.

(2) $\mathcal{S}_N$ において $D(\mathbb{R}^N)$ は稠密 (命題 8.64) なので $\mathcal{S}_N$ の位相で $f \in \mathcal{S}_N$ に収束する $D(\mathbb{R}^N)$ の列 $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ が取れる. 定理 8.96 の (2) より $v * u \in \mathcal{S}'_N$ なので,

$$f * (v * u)(x) = (v * u)(T_x f_{-1}) = \lim_{i \to \infty} (v * u)(T_x(f_i)_{-1}) = \lim_{i \to \infty} f_i * (v * u)(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N) \tag{8.91}$$

が成り立つ. ここで定理 8.90 の (4) より,

$$\lim_{i \to \infty} f_i * v = f * v \quad (\text{in } \mathcal{S}_N)$$

であるから, (1) より任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$\lim_{i \to \infty} f_i * (v * u)(x) = \lim_{i \to \infty} (f_i * v) * u(x) = \lim_{i \to \infty} u(T_x(f_i * v)_{-1}) = u(T_x(f * v)_{-1}) = (f * v) * u(x)$$

が成り立つ. よって (8.91) と合わせて,

$$f * (v * u)(x) = \lim_{i\to\infty} f_i * (v * u)(x) = (f * v) * u(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

を得る.

(3) Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.11) において $D(\mathbb{R}^N)$ は稠密 (命題 8.72) なので Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ の位相で $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ に収束する $D(\mathbb{R}^N)$ の列 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が取れる. 定理 8.96 の (3) より $v * u \in \mathcal{E}'_N$ なので,

$$f * (v * u)(x) = (v * u)(T_x f_{-1}) = \lim_{i\to\infty} (v * u)(T_x (f_i)_{-1}) = \lim_{i\to\infty} f_i * (v * u)(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N) \tag{8.92}$$

が成り立つ. そして (1) と命題 8.87 より,

$$\lim_{i\to\infty} f_i * (v * u)(x) = \lim_{i\to\infty} (f_i * v) * u(x) = (f * v) * u(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

であるから (8.92) と合わせて,

$$f * (v * u)(x) = \lim_{i\to\infty} f_i * (v * u)(x) = (f * v) * u(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

を得る.

(4) 命題 8.99 より任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ に対し位相線型空間 $D'(\mathbb{R}^N)$ において,

$$\varphi * u = \lim_{\varepsilon\to+0} \varphi * u_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to+0} u_\varepsilon * \varphi = u * \varphi$$

が成り立つ. よって再び命題 8.99 より位相線型空間 $D'(\mathbb{R}^N)$ において,

$$v * u = \lim_{\varepsilon\to+0} v_\varepsilon * u = \lim_{\varepsilon\to+0} u * v_\varepsilon = u * v$$

が成り立つ.

□

命題 8.101 (平行移動の L^p 連続性)**.** 任意の $p \in [1,\infty)$ と $[f] \in L^p(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$\mathbb{R}^N \ni y \mapsto T_y[f] \in L^p(\mathbb{R}^N) \tag{8.93}$$

は L^p ノルムで連続である.

証明. $T_x T_y[f] = T_{x+y}[f]$ $(\forall x, y \in \mathbb{R}^N)$ であるから (8.93) の連続性を示すには $y = 0$ における連続性を示せば十分である. 定理 5.179 より $L^p(\mathbb{R}^N)$ において台がコンパクトな連続関数空間 $C_c(\mathbb{R}^N)$ は稠密である. よって任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し,

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

を満たす $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ が取れる. コンパクト集合

$$K := \mathrm{supp}(g) + \{y \in \mathbb{R}^N : |y| \leqslant 1\}$$

を定義すると,

$$\mathrm{supp}(T_y g) = \mathrm{supp}(g) + y \in K \quad (\forall y \in \mathbb{R}^N : |y| \leqslant 1)$$

であるから,

$$\|T_y g - g\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |T_y g(x) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant m(K)^{\frac{1}{p}} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |T_y g(x) - g(x)| \quad (\forall y \in \mathbb{R}^N : |y| \leqslant 1)$$

($m(K)$ は K の Lebesgue 測度) となる. ここで補題 8.93 より g は一様連続であるから十分小さい $\delta \in (0,1]$ を取れば,

$$\|T_y g - g\|_p \leqslant m(K)^{\frac{1}{p}} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |T_y g(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall y \in \mathbb{R}^N : |y| \leqslant \delta)$$

となるので, $|y| \leqslant \delta$ を満たす任意の $y \in \mathbb{R}^N$ に対し, Lebesgue 測度の平行移動不変性 (命題 5.210) より,

$$\|T_y f - f\|_p \leqslant \|T_y f - T_y g\|_p + \|T_y g - g\|_p + \|g - f\|_p = 2\|f - g\|_p + \|T_y g - g\|_p < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

となる. よって (8.93) は $y = 0$ において連続である. □

定義 8.102 ($L^1(\mathbb{R}^N)$ と $L^p(\mathbb{R}^N)$ $(p \in [1, \infty))$ の合成積)**.** $p \in [1, \infty)$ とする. 任意の $[g] \in L^p(\mathbb{R}^N)$ に対し, 命題 8.101 より,

$$\mathbb{R}^N \ni y \mapsto T_y[g] \in L^p(\mathbb{R}^N) \tag{8.94}$$

は Banach 空間 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 値連続関数であるからその像は可分である.*[116] そして Lebesgue 測度の平行移動不変性 (命題 5.210) より $\|T_y[g]\|_p = \|[g]\|_p$ $(\forall y \in \mathbb{R}^N)$ であるから, 任意の $[f] \in L^1(\mathbb{R}^N)$ に対し Banach 空間 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 値関数

$$\mathbb{R}^N \ni y \mapsto f(y)T_y[g] \in L^p(\mathbb{R}^N)$$

は Lebesgue 測度に関して Bochner 積分可能 (定義 5.250) である. よって Lebesgue 測度に関する Bochner 積分により,

$$[f] * [g] := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)T_y[g]dy \in L^p(\mathbb{R}^N)$$

が定義できる. これを $[f] \in L^1(\mathbb{R}^N)$ と $[g] \in L^p(\mathbb{R}^N)$ の合成積と言う. 任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$L^p(\mathbb{R}^N) \ni [h] \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\varphi(x)dx \in \mathbb{C}$$

は有界線型汎関数であるから, Fubini の定理 5.85 より,

$$\begin{aligned}
([f] * [g])(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^N} ([f] * [g])(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(y)T_y g(x)\varphi(x)dx \right) dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)\varphi(x)dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy \right) dx
\end{aligned}$$

である. よって $[f] * [g]$ の代表元は Lebesgue 測度に関して a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ で,

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy$$

である. ゆえにこの合成積の定義は, $f \in \mathcal{S}_N \subseteq L^1(\mathbb{R}^N)$ と $[g] \in L^p(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}'_N$ の合成積の定義 8.83 と矛盾しない.

定義 8.103 ($L^1(\mathbb{R}^N)$ と $C_0(\mathbb{R}^N)$ の合成積)**.** 任意の $g \in C_0(\mathbb{R}^N)$ に対し補題 8.93 より,

$$\mathbb{R}^N \ni y \mapsto T_y g \in C_0(\mathbb{R}^N)$$

は Banach 空間 $C_0(\mathbb{R}^N)$ 値の連続関数であるからその像は可分である. よって任意の $[f] \in L^1(\mathbb{R}^N)$ に対し Banach 空間 $C_0(\mathbb{R}^N)$ 値関数

$$\mathbb{R}^N \ni y \mapsto f(y)T_y g \in C_0(\mathbb{R}^N)$$

は Lebesgue 測度に関して Bochner 積分可能 (定義 5.250) である. よって Lebesgue 測度に関する Bochner 積分により,

$$[f] * g := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)T_y g dy \in C_0(\mathbb{R}^N)$$

*[116] $\mathbb{R}^N$ は σ-コンパクトであるから連続写像 (8.94) の像は Banach 空間 $L^p(\mathbb{R}^N)$ の σ-コンパクト集合である. 距離空間のコンパクト集合は可分 (命題 1.111) なので (8.94) の像は可分である.

が定義できる．これを $[f] \in L^1(\mathbb{R}^N)$ と $g \in C_0(\mathbb{R}^N)$ の合成積と言う．任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対し，

$$\delta_x : C_0(\mathbb{R}^N) \ni h \mapsto h(x) \in \mathbb{C}$$

は有界線型汎関数であるから，

$$[f] * g(x) = \delta_x([f] * g) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\delta_x(T_y g)dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy$$

である．ゆえにこの合成積の定義は，$f \in \mathcal{S}_N \subseteq L^1(\mathbb{R}^N)$ と $g \in C_0(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}'_N$ の合成積の定義 8.83 と矛盾しない．

命題 8.104 (Young の不等式)**.** 定義 8.102 と定義 8.103 における合成積について，

(1) 任意の $p \in [1, \infty)$, $[g] \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $[f] \in L^1(\mathbb{R}^N)$ に対し，

$$\|[f] * [g]\|_p \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \|[f]\|_1 \|[g]\|_p \tag{8.95}$$

が成り立つ．また Friedrichs の軟化子 (定義 8.92) $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,\infty)}$ に対し，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \|\psi_\varepsilon * [g] - [g]\|_p = 0$$

が成り立つ．

(2) 任意の $g \in C_0(\mathbb{R}^N)$, $[f] \in L^1(\mathbb{R}^N)$ に対し，

$$\|[f] * g\| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \|[f]\|_1 \|g\|$$

($\|\cdot\|$ は sup ノルム) が成り立つ．また Friedrichs の軟化子 $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,\infty)}$ に対し，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \|\psi_\varepsilon * g - g\| = 0$$

が成り立つ．

証明． (1) 定義 8.102 より $[f] * [g]$ は Banach 空間 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 値関数 $\mathbb{R}^N \ni y \mapsto f(y)T_y[g] \in L^p(\mathbb{R}^N)$ の Lebesgue 測度に関する Bochner 積分により，

$$[f] * [g] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)T_y[g]dy$$

と表されるので，$\|T_y[g]\|_p = \|[g]\|_p$ $(\forall y \in \mathbb{R}^N)$ (Lebesgue 測度の平行移動不変性) より，

$$\|[f] * [g]\|_p = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left\| \int_{\mathbb{R}^N} f(y)T_y[g]dy \right\|_p \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)| \|T_y[g]\|_p dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \|[f]\|_1 \|[g]\|_p$$

が成り立つ．また Friedrichs の軟化子の定義 8.92 の (3) より，

$$\psi_\varepsilon * [g] - [g] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(y)(T_y[g] - [g])dy \quad (\forall \varepsilon \in (0, \infty))$$

であるので，Friedrichs の軟化子の定義 8.92 の (1), (2) と命題 8.101 より，

$$\|\psi_\varepsilon * [g] - [g]\|_p \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(y) \|T_y[g] - [g]\|_p dy \to 0 \quad (\varepsilon \to +0)$$

が成り立つ．

(2) (1) と全く同様にして定義 8.103 から示される．

□

定義 8.105. 命題 8.104 における (8.95) を Young の不等式と言う．

8.8 Sobolev 空間 $H^m(\Omega)$ の定義

定義 8.106 (Sobolev 空間 $H^m(\Omega)$)**.** $\mathbb{R}^N$ の任意の開集合 Ω と任意の $m \in \mathbb{Z}_+$ に対し, $L^2(\Omega)$ の線型部分空間

$$H^m(\Omega) := \left\{[f] \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha [f] \in L^2(\Omega)\ (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant m)\right\}$$

を定義する. そして $L^2(\Omega)$ の内積

$$(\cdot \mid \cdot)_2 : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{C},$$
$$([f] \mid [g])_2 = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx \quad (\forall [f], [g] \in L^2(\Omega))$$

に対し, $H^m(\Omega)$ に内積

$$(\cdot \mid \cdot)_{2,m} : H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \to \mathbb{C},$$
$$([f] \mid [g])_{2,m} := \sum_{|\alpha| \leqslant m} (\partial^\alpha [f] \mid \partial^\alpha [g])_2 \quad (\forall [f], [g] \in H^m(\Omega)) \tag{8.96}$$

を定義する. このとき次の命題 8.107 より $H^m(\Omega)$ は内積 $(\cdot \mid \cdot)_{2,m}$ により Hilbert 空間となる. この Hilbert 空間 $H^m(\Omega)$ を Ω 上の m 階 Sobolev 空間と言う. $H^m(\Omega)$ の内積 $(\cdot \mid \cdot)_{2,m}$ が定めるノルムを,

$$\|[f]\|_{2,m} := \sqrt{([f] \mid [f])_{2,m}} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha [f]\|_2^2} \quad (\forall [f] \in H^m(\Omega)) \tag{8.97}$$

と表す.

命題 8.107 (Sobolev 空間の完備性)**.** 定義 8.106 における $H^m(\Omega)$ は内積 (8.96) によって Hilbert 空間をなす.

証明. $([f_i])_{i\in\mathbb{N}}$ を内積空間 $(H^m(\Omega), (\cdot \mid \cdot)_{2,m})$ の Cauchy 列とする. このとき (8.97) より $|\alpha| \leqslant m$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$\|\partial^\alpha [f_i] - \partial^\alpha [f_j]\|_2 \leqslant \|[f_i] - [f_j]\|_{2,m} \to 0 \quad (i, j \to \infty)$$

であるから $(\partial^\alpha [f_i])_{i\in\mathbb{N}}$ は Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ の Cauchy 列である. よって $[f^{(\alpha)}] \in L^2(\Omega)$ で,

$$\lim_{i\to\infty} \|\partial^\alpha [f_i] - [f^{(\alpha)}]\|_2 = 0 \tag{8.98}$$

を満たすものが存在する.

$$[f] := [f^{(0)}] \in L^2(\Omega)$$

とおく. $|\alpha| \leqslant m$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し (8.98) と命題 8.29 の (1) より,

$$\lim_{i\to\infty} \partial^\alpha [f_i] = [f^{(\alpha)}] \quad (\text{in topology of } D'(\Omega)) \tag{8.99}$$

が成り立つ. 特に,

$$\lim_{i\to\infty} [f_i] = [f] \quad (\text{in topology of } D'(\Omega))$$

であるから命題 8.29 の (2) より,

$$\lim_{i\to\infty} \partial^\alpha [f_i] = \partial^\alpha [f] \quad (\text{in topology of } D'(\Omega)) \tag{8.100}$$

が成り立つ. よって $|\alpha| \leqslant m$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し (8.99) と (8.100) が成り立つので,

$$\partial^\alpha [f] = [f^{(\alpha)}] \in L^2(\Omega) \tag{8.101}$$

[*117]が成り立つ. ゆえに $[f] \in H^m(\Omega)$ であり, (8.98) と (8.101) より,

$$\|[f] - [f_i]\|_{2,m}^2 = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha [f] - \partial^\alpha [f_i]\|_2^2 \to 0 \quad (i \to \infty)$$

[*117] 位相線型空間 $D'(\Omega)$ (定義 8.18) は Hausdorff 空間であるから収束列 (ネット) の収束点は一意的である (命題 1.36) ことに注意.

が成り立つので, 内積空間 $(H^m(\Omega), (\cdot \mid \cdot)_{2,m})$ の Cauchy 列 $([f_i])_{i\in\mathbb{N}}$ は $[f] \in H^m(\Omega)$ に収束する．よって内積空間 $(H^m(\Omega), (\cdot \mid \cdot)_{2,m})$ は Hilbert 空間である． □

命題 8.108. 開集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 上の $m \in \mathbb{Z}_+$ 階 Sobolev 空間 $H^m(\Omega)$ を考える．このとき任意の $[f] \in H^m(\Omega)$ と $|\beta| \leqslant m$ なる任意の $\beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し，

$$\|\partial^\beta[f]\|_2 \leqslant \|[f]\|_{2,m} \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha[f]\|_2$$

が成り立つ．

証明. (8.97) より直和 Hilbert 空間 (定義 5.155) $\bigoplus_{|\alpha|\leqslant m} L^2(\Omega)$ に対し，

$$H^m(\Omega) \ni [f] \mapsto (\partial^\alpha[f])_{|\alpha|\leqslant m} \in \bigoplus_{|\alpha|\leqslant m} L^2(\Omega)$$

は等長線型作用素であり, $\bigoplus_{|\alpha|\leqslant m} L^2(\Omega)$ における三角不等式より，

$$\|\partial^\beta[f]\|_2 \leqslant \|(\partial^\alpha[f])_{|\alpha|\leqslant m}\| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha[f]\|_2$$

である． □

定義 8.109 ($H_0^m(\Omega)$)**.** 開集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 上の $m \in \mathbb{Z}_+$ 階 Sobolev 空間 $H^m(\Omega)$ を考える．Ω 上の台がコンパクトな C^∞ 級関数全体 $D(\Omega)$ は明らかに $H^m(\Omega)$ の線型部分空間である．そこで $D(\Omega) \subseteq H^m(\Omega)$ のノルム $\|\cdot\|_{2,m}$ による閉包を取ることによって得られる $H^m(\Omega)$ の閉部分空間を，

$$H_0^m(\Omega) := \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{2,m}} \subseteq H^m(\Omega)$$

と表す．

定理 8.110 ($H_0^m(\mathbb{R}^N) = H^m(\mathbb{R}^N)$)**.** 任意の $m \in \mathbb{Z}_+$ に対し $H_0^m(\mathbb{R}^N) = H^m(\mathbb{R}^N)$ が成り立つ．

証明. Urysohn の補題 6.43 により $\omega \in D(\mathbb{R}^N)$ で，

$$\omega(x) = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant 1) \tag{8.102}$$

なるものを取る．各 $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し $\omega_\varepsilon \in D(\mathbb{R}^N)$ を，

$$\omega_\varepsilon(x) := \omega(\varepsilon x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

とおく．(8.102) より，

$$\omega_\varepsilon(x) = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant \varepsilon^{-1}) \tag{8.103}$$

である．今, 任意の $[f] \in H^m(\mathbb{R}^N)$ を取り, Friedrichs の軟化子 (定義 8.92) $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\infty)}$ に対し，

$$f_\varepsilon := \omega_\varepsilon(\psi_\varepsilon * [f]) \in D(\mathbb{R}^N) \quad (\forall \varepsilon \in (0,\infty))$$

とおく．$|\alpha| \leqslant m$ を満たす任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し，

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|\partial^\alpha f_\varepsilon - \partial^\alpha[f]\|_2 = 0 \tag{8.104}$$

が成り立つことを示せばよい. Leibniz ルール 8.3 と命題 8.78 より任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し，

$$\partial^\alpha f_\varepsilon(x) = \sum_{0<\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varepsilon^{|\beta|}(\partial^\beta\omega)(\varepsilon x)(\psi_\varepsilon * \partial^{\alpha-\beta}[f])(x) + \omega_\varepsilon(x)(\psi_\varepsilon * \partial^\alpha[f])(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N) \tag{8.105}$$

となるので, Young の不等式 8.104 と $\|\psi_\varepsilon\|_1 = (2\pi)^{\frac{N}{2}}$ (Friedrichs の軟化子の定義 8.92 の (3)) より，

$$\|\partial^\alpha f_\varepsilon - \omega_\varepsilon(\psi_\varepsilon * \partial^\alpha[f])\|_2 \leqslant \sum_{0<\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varepsilon^{|\beta|}\|\omega\|_\infty\|\partial^{\alpha-\beta}[f]\|_2 \to 0 \quad (\varepsilon \to +0) \tag{8.106}$$

となる．また,

$$\begin{aligned}\|\omega_\varepsilon(\psi_\varepsilon * \partial^\alpha[f]) - \partial^\alpha[f]\|_2 &\leqslant \|\omega_\varepsilon((\psi_\varepsilon * \partial^\alpha[f]) - \partial^\alpha[f])\|_2 + \|(\omega_\varepsilon - 1)\partial^\alpha[f]\|_2 \\ &\leqslant \|(\psi_\varepsilon * \partial^\alpha[f]) - \partial^\alpha[f]\|_2 + \|(\omega_\varepsilon - 1)\partial^\alpha[f]\|_2 \end{aligned} \tag{8.107}$$

であり, (8.107) の右辺の第 1 項は Friedrichs の軟化子の性質 (命題 8.104) より $\varepsilon \to +0$ で 0 に収束し, (8.107) の右辺の第 2 項は (8.103) と Lebesgue 優収束定理 5.59 より $\varepsilon \to +0$ で 0 に収束する．よって,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \|\omega_\varepsilon(\psi_\varepsilon * \partial^\alpha[f]) - \partial^\alpha[f]\|_2 = 0$$

が成り立つ．これを (8.106) と合わせれば,

$$\|\partial^\alpha f_\varepsilon - \partial^\alpha[f]\|_2 \leqslant \|\partial^\alpha f_\varepsilon - \omega_\varepsilon(\psi_\varepsilon * \partial^\alpha[f])\|_2 + \|\omega_\varepsilon(\psi_\varepsilon * \partial^\alpha[f]) - \partial^\alpha[f]\|_2 \to 0 \quad (\varepsilon \to +0)$$

となるので (8.104) を得る． □

定理 8.111 (Sobolev 空間の変数変換). $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とし, $\Phi : \Omega \to \Omega'$ を C^∞ 級同相写像で Φ, Φ^{-1} の 1 階以上の全ての偏導関数が有界であるものとする．このとき任意の $m \in \mathbb{Z}_+$, 任意の $u \in H^m(\Omega')$ に対し $u \circ \Phi \in H^m(\Omega)$ (超関数の変数変換の定義 8.42 を参照) であり,

$$H^m(\Omega') \ni u \mapsto u \circ \Phi \in H^m(\Omega) \tag{8.108}$$

は有界な線型同型写像である．

証明. $|\alpha| \leqslant m$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ を取り固定する．命題 8.43 の (2) と命題 8.28 より,

$$\partial^\alpha(u \circ \Phi) = \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} f_{\alpha,\beta}((\partial^\beta u) \circ \Phi) \quad (\forall u \in H^m(\Omega')) \tag{8.109}$$

を満たす, 全ての偏導関数が有界な $f_{\alpha,\beta} \in C^\infty(\Omega)$ $(\forall \beta \in \mathbb{Z}_+^N : |\beta| \leqslant |\alpha|)$ が取れる (有界性は $\Phi : \Omega \to \Omega'$ の 1 階以上の全ての偏導関数が有界であることによる). 変数変換公式 5.229 より $|\beta| \leqslant |\alpha|$ なる任意の $\beta \in \mathbb{Z}_+^N$ と任意の $u \in H^m(\Omega')$ に対し,

$$\int_\Omega |(\partial^\beta u) \circ \Phi(x)|^2 dx = \int_{\Omega'} |\partial^\beta u(x)|^2 |\det \Phi^{-1\prime}(x)| dx \leqslant \|\partial^\beta u\|_2^2 \|\det \Phi^{-1\prime}\|_\infty < \infty$$

[*118] となるので, (8.109) より,

$$\|\partial^\alpha(u \circ \Phi)\|_2 \leqslant \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} \|f_{\alpha,\beta}\|_\infty \|(\partial^\beta u) \circ \Phi\|_2 \leqslant \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} \|f_{\alpha,\beta}\|_\infty \sqrt{\|\det \Phi^{-1\prime}\|_\infty} \|\partial^\beta u\|_2 \quad (\forall u \in H^m(\Omega'))$$

が成り立つ．よって,

$$C_\alpha := \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} \|f_{\alpha,\beta}\|_\infty \sqrt{\|\det \Phi^{-1\prime}\|_\infty}$$

とおけば,

$$\|\partial^\alpha(u \circ \Phi)\|_2 \leqslant C_\alpha \|\partial^\alpha u\|_2 \quad (\forall u \in H^m(\Omega')) \tag{8.110}$$

となる．これが $|\alpha| \leqslant m$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対して成り立つので, 任意の $u \in H^m(\Omega')$ に対し $u \circ \Phi \in H^m(\Omega)$ であり,

$$C := \max_{|\alpha| \leqslant m} C_\alpha$$

とおけば, (8.110) より,

$$\|u \circ \Phi\|_{2,m}^2 = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha(u \circ \Phi)\|_2^2 \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant m} C^2 \|\partial^\alpha u\|_2 = C^2 \|u\|_{2,m}^2$$

[*118] $\det \Phi^{-1\prime} : \Omega' \to \mathbb{R}$ の有界性は $\Phi^{-1} : \Omega' \to \Omega$ の 1 階以上の全ての偏導関数が有界であることによる．

となるので (8.109) は有界線型写像である. 全く対称的な議論により任意の $u \in H^m(\Omega)$ に対し $u \circ \Phi^{-1} \in H^m(\Omega')$ が成り立つこととと,

$$H^m(\Omega) \ni u \mapsto u \circ \Phi^{-1} \in H^m(\Omega') \tag{8.111}$$

が有界線型写像であることが示される. そして命題 8.42 の (1) より (8.109) と (8.111) は互いに逆写像である. □

補題 8.112. $\Omega, \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N$ をそれぞれ開集合で $\Omega \subseteq \widetilde{\Omega}$ なるものとし, 空でない $S \subseteq \Omega$ に対し $\mathbb{R}^N$ の距離に関して,

$$d(S, \widetilde{\Omega} \backslash \Omega) > 0$$

[*119]が成り立つとする. このとき全ての偏導関数が有界な非負値関数 $h \in C^\infty(\widetilde{\Omega})$ で,

$$h(x) = 1 \ \ (\forall x \in S), \ \ d(\mathrm{supp}(h), \widetilde{\Omega} \backslash \Omega) > 0$$

を満たすものが存在する.

証明.

$$r := d(S, \widetilde{\Omega} \backslash \Omega) > 0, \ \ r_1 := \frac{r}{3}$$

とおき,

$$E := \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, S) < r_1\} \tag{8.112}$$

とおく. そして $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,\infty)}$ を Friedrichs の軟化子 (定義 8.92) とし,

$$h := \psi_{r_1} * \chi_E \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$$

とおく. このとき h は非負値であり命題 8.78 より,

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha h(x)| &= |(\partial^\alpha \psi_{r_1}) * \chi_E(x)| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha \psi_{r_1}(y) \chi_E(x-y) dy \right| \\ &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \|\partial^\alpha \psi_{r_1}\|_1 < \infty \ \ (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, \forall x \in \mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

が成り立つから h の全ての偏導関数は有界である. また Friedrichs の軟化子の定義 8.92 より,

$$\{y \in \mathbb{R}^N : \psi_{r_1}(y) \neq 0\} = B(0, r_1), \ \ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_{r_1}(y) dy = 1$$

(ただし $B(0, r_1) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y| < r_1\}$) であるから, 任意の $x \in S$ に対し E の定義 (8.112) より,

$$h(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_{r_1}(y) \chi_E(x-y) dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_{r_1}(y) dy = 1$$

となる. 命題 8.85 より,

$$\mathrm{supp}(h) = \overline{\mathrm{supp}(\psi_{r_1}) + \mathrm{supp}([\chi_E])} \subseteq \overline{B(0, r_1) + E} \tag{8.113}$$

であり, 任意の $x \in B(0, r_1), y \in E, z \in \widetilde{\Omega} \backslash \Omega$ に対し, $|y - w| < r_1$ なる $w \in S$ を取れば,

$$|x + y - z| \geqslant |w - z| - |x + y - w| \geqslant d(S, \widetilde{\Omega} \backslash \Omega) - (|x| + |y - w|) > r - 2r_1 = r_1$$

となるので,

$$d(B(0, r_1) + E, \ \widetilde{\Omega} \backslash \Omega) \geqslant r_1 > 0$$

である. よって (8.113) より,

$$d(\mathrm{supp}(h), \widetilde{\Omega} \backslash \Omega) \geqslant d(\overline{B(0, r_1) + E}, \ \widetilde{\Omega} \backslash \Omega) = d(B(0, r_1) + E, \ \widetilde{\Omega} \backslash \Omega) \geqslant r_1 > 0$$

が成り立つ. □

[*119] 距離空間の部分集合間の距離の定義 8.5 を参照.

定理 8.113 (Sobolev 空間の元の 0 拡張と制限について)**.** $\Omega, \widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N$ をそれぞれ開集合で $\Omega \subseteq \widetilde{\Omega}$ なるものとし, 任意の $u \in L^2(\Omega)$ に対し u の $\widetilde{\Omega}$ 上への 0 拡張 (定義 8.30) を $\widetilde{u} \in L^2(\widetilde{\Omega})$ とおき, 任意の $v \in L^2(\widetilde{\Omega})$ に対し v の Ω 上への制限を $v|_\Omega \in L^2(\Omega)$ とおく. このとき,

(1) 任意の $u \in H_0^m(\Omega)$ に対し $\widetilde{u} \in H_0^m(\widetilde{\Omega})$ であり,

$$\partial^\alpha \widetilde{u} = \widetilde{\partial^\alpha u} \ \ (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant m), \quad \|u\|_{2,m} = \|\widetilde{u}\|_{2,m}$$

が成り立つ.

(2) $u \in H^m(\Omega)$ が $d(\mathrm{supp}(u), \widetilde{\Omega} \backslash \Omega) > 0$ を満たすならば $\widetilde{u} \in H^m(\widetilde{\Omega})$ であり,

$$\mathrm{supp}(u) = \mathrm{supp}(\widetilde{u}), \quad \partial^\alpha \widetilde{u} = \widetilde{\partial^\alpha u} \ \ (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant m), \quad \|u\|_{2,m} = \|\widetilde{u}\|_{2,m}$$

が成り立つ. またもし $\widetilde{u} \in H_0^m(\widetilde{\Omega})$ ならば $u \in H_0^m(\Omega)$ が成り立つ.

(3) $d(\Omega, \mathbb{R}^N \backslash \widetilde{\Omega}) > 0$ ならば, 任意の $v \in H^m(\widetilde{\Omega})$ に対し,

$$v|_\Omega \in \overline{D(\widetilde{\Omega})|_\Omega}^{\|\cdot\|_{2,m}} \subseteq H^m(\Omega)$$

が成り立つ. すなわち $D(\widetilde{\Omega})$ の列 $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{i \to \infty} \|v|_\Omega - v_i|_\Omega\|_{2,m} = 0$$

を満たすものが取れる.

証明.　(1) $u \in H_0^m(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{2,m}}$ だから $D(\Omega)$ の列 $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ で $\lim_{i\to\infty} \|u_i - u\|_{2,m} = 0$ を満たすものが取れる. $|\alpha| \leqslant m$ を満たす任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $\lim_{i\to\infty} \|\partial^\alpha u_i - \partial^\alpha u\|_2 = 0$ であるから, 任意の $\varphi \in D(\widetilde{\Omega})$ に対し,

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha \widetilde{u}(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|} \widetilde{u}(\partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{u}(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx \\
&= \lim_{i \to \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_i(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = \lim_{i \to \infty} \int_\Omega \partial^\alpha u_i(x) \varphi(x) dx \\
&= \int_\Omega \partial^\alpha u(x) \varphi(x) dx = \int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{\partial^\alpha u}(x) \varphi(x) dx
\end{aligned}$$

となる. よって,

$$\partial^\alpha \widetilde{u} = \widetilde{\partial^\alpha u} \in L^2(\widetilde{\Omega}) \ \ (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant m)$$

であるから $\widetilde{u} \in H_0^m(\widetilde{\Omega})$[*120] であり,

$$\|\widetilde{u}\|_{2,m}^2 = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha \widetilde{u}\|_2^2 = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\widetilde{\partial^\alpha u}\|_2^2 = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha u\|_2^2 = \|u\|_{2,m}^2$$

である.

(2) $d(\mathrm{supp}(u), \widetilde{\Omega} \backslash \Omega) > 0$ より $\mathrm{supp}(u)$ は $\widetilde{\Omega}$ の閉集合なので, 超関数の台の定義 8.36 より $\mathrm{supp}(\widetilde{u}) = \mathrm{supp}(u)$ であることが分かる. よって定理 8.39 より $\widetilde{u} \in L^2(\widetilde{\Omega}) \subseteq D'(\widetilde{\Omega})$ は $u \in H^m(\Omega) \subseteq D'(\Omega)$ の台を保存する一意拡張である. ゆえに定理 8.41 より,

$$\partial^\alpha \widetilde{u} = \widetilde{\partial^\alpha u} \in L^2(\widetilde{\Omega})$$

であるから $\widetilde{u} \in H^m(\widetilde{\Omega})$ であり,

$$\|\widetilde{u}\|_{2,m}^2 = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha \widetilde{u}\|_2^2 = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\widetilde{\partial^\alpha u}\|_2^2 = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha u\|_2^2 = \|u\|_{2,m}^2$$

[*120] $|\alpha| \leqslant m$ を満たす任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $\lim_{i\to\infty} \|\partial^\alpha u_i - \partial^\alpha \widetilde{u}\|_2 = \lim_{i\to\infty} \|\partial^\alpha u_i - \widetilde{\partial^\alpha u}\|_2 = 0$ であることに注意.

である.

今, $\widetilde{u} \in H_0^m(\widetilde{\Omega})$ が成り立つとする. このとき $D(\widetilde{\Omega})$ の列 $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{i\to\infty}\|\widetilde{u}-\varphi_i\|_{2,m} = 0$ を満たすものが取れる. $d(\mathrm{supp}(u), \widetilde{\Omega}\backslash\Omega) > 0$ であるから補題 8.112 より全ての偏導関数が有界な $h \in C^\infty(\widetilde{\Omega})$ で,

$$h(x) = 1 \ \ (\forall x \in \mathrm{supp}(u)), \ \ d(\mathrm{supp}(h), \widetilde{\Omega}\backslash\Omega) > 0 \tag{8.114}$$

を満たすものが取れる. 滑らかな関数と超関数の積に関する Leibniz ルール 8.28 より $|\alpha| \leqslant m$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$\partial^\alpha(h(\widetilde{u}-\varphi_i)) = \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(\partial^\beta h)\partial^{\alpha-\beta}(\widetilde{u}-\varphi_i)$$

であるから,

$$\|\partial^\alpha(h(\widetilde{u}-\varphi_i))\|_2 \leqslant \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\||\partial^\beta h\|_\infty\|\partial^{\alpha-\beta}(\widetilde{u}-\varphi_i)\|_2 \to 0 \ \ (i\to\infty)$$

である. よって,

$$\lim_{i\to\infty}\|h\widetilde{u}-h\varphi_i\|_{2,m} = 0 \tag{8.115}$$

が成り立つ. ここで (8.114) より,

$$u = (h\widetilde{u})|_\Omega, \ \ (h\varphi_i)|_\Omega \in D(\Omega) \ \ (\forall i \in \mathbb{N})$$

であるから (8.115) より,

$$u = (h\widetilde{u})|_\Omega = \lim_{i\to\infty}(h\varphi_i)|_\Omega \in \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{2,m}} = H_0^m(\Omega)$$

である.

(3) 補題 8.112 より全ての偏導関数が有界な $h \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ で,

$$h(x) = 1 \ \ (\forall x \in \Omega), \ \ d(\mathrm{supp}(h), \mathbb{R}^N\backslash\widetilde{\Omega}) > 0$$

を満たすものが取れる. 滑らかな関数と超関数の積に関する Leibniz ルール 8.28 より $hv \in H^m(\widetilde{\Omega})$ であり, $\mathrm{supp}(hv) \subseteq \mathrm{supp}(h)$ より,

$$d(\mathrm{supp}(hv), \mathbb{R}^N\backslash\widetilde{\Omega}) \geqslant d(\mathrm{supp}(h), \mathbb{R}^N\backslash\widetilde{\Omega}) > 0$$

であるから (2) の前半より $hv \in H^m(\widetilde{\Omega})$ の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張は $H^m(\mathbb{R}^N)$ に属し, 定理 8.110 より $H^m(\mathbb{R}^N) = H_0^m(\mathbb{R}^N)$ なので, (2) の後半より $hv \in H_0^m(\widetilde{\Omega})$ が成り立つ. よって $D(\widetilde{\Omega})$ の列 $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{i\to\infty}\|hv - v_i\|_{2,m} = 0$$

を満たすものが取れる. $(hv)|_\Omega = v|_\Omega$ であるから,

$$\lim_{i\to\infty}\|v|_\Omega - v_i|_\Omega\|_{2,m} = 0$$

である.

□

定義 8.114 (半空間)**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ に対し,

$$\mathbb{R}_+^N := \mathbb{R}^{N-1}\times(0,\infty), \ \ \mathbb{R}_-^N := \mathbb{R}^{N-1}\times(-\infty,0)$$

と定義する.

命題 8.115 (半空間上の Sobolev 空間 $H^m(\mathbb{R}_+^N)$ の基本性質)**.**

$$H^m(\mathbb{R}_+^N) = \overline{D(\mathbb{R}^N)|_{\mathbb{R}_+^N}}^{\|\cdot\|_{2,m}}$$

が成り立つ (ただし $D(\mathbb{R}^N)|_{\mathbb{R}_+^N} = \{u|_{\mathbb{R}_+^N} : u \in D(\mathbb{R}^N)\}$ である). すなわち任意の $u \in H^m(\mathbb{R}_+^N)$ に対し, $D(\mathbb{R}^N)$ の元の列 $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{i\to\infty}\|u - u_i|_{\mathbb{R}_+^N}\|_{2,m} = 0$$

を満たすものが取れる.

証明. 任意の $u \in H^m(\mathbb{R}^N_+)$ を取り固定し $u \in \overline{D(\mathbb{R}^N)|_{\mathbb{R}^N_+}}^{\|\cdot\|_{2,m}}$ が成り立つことを示す. 任意の $t \in (0,\infty)$ に対し,

$$\Phi_t : \mathbb{R}^{N-1} \times (-t,\infty) \ni x \mapsto x + te_N \in \mathbb{R}^N_+$$

($(e_1,\cdots,e_N)$ は $\mathbb{R}^N$ の標準基底) とおくと, 定理 8.111 より $u \circ \Phi_t \in H^m(\mathbb{R}^{N-1} \times (-t,\infty))$ であり,

$$\mathbb{R}^N_+ \subseteq \mathbb{R}^{N-1} \times (-t,\infty), \ \ d(\mathbb{R}^N_+,\ \mathbb{R}^N \backslash (\mathbb{R}^{N-1} \times (-t,\infty))) = t > 0$$

であるから, 定理 8.113 の (3) より,

$$(u \circ \Phi_t)|_{\mathbb{R}^N_+} \in \overline{D(\mathbb{R}^N)|_{\mathbb{R}^N_+}}^{\|\cdot\|_{2,m}} \subseteq H^m(\mathbb{R}^N_+) \ \ (\forall t \in (0,\infty))$$

が成り立つ. よって $u \in \overline{D(\mathbb{R}^N)|_{\mathbb{R}^N_+}}^{\|\cdot\|_{2,m}}$ を示すには,

$$\lim_{t \to +0} \|(u \circ \Phi_t)|_{\mathbb{R}^N_+} - u\|_{2,m} = 0$$

が成り立つことを示せばよい. そのためには $|\alpha| \leqslant m$ を満たす任意の $\alpha \in \mathbb{Z}^N_+$ を取り,

$$\lim_{t \to +0} \|\partial^\alpha (u \circ \Phi_t)|_{\mathbb{R}^N_+} - \partial^\alpha u\|_2 = 0$$

が成り立つことを示せばよい. 命題 8.43 の (2) より,

$$\partial^\alpha (u \circ \Phi_t)|_{\mathbb{R}^N_+} = ((\partial^\alpha u) \circ \Phi_t)|_{\mathbb{R}^N_+}$$

である. そこで $u_\alpha := \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ とおき, u_α の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張 (定義 8.30) を $\widetilde{u_\alpha} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ とおく. このとき $\mathbb{R}^N$ 上の平行移動の L^2 ノルム連続性 (命題 8.101) と Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned}
&\|\partial^\alpha (u \circ \Phi_t)|_{\mathbb{R}^N_+} - \partial^\alpha u\|_2 = \|(u_\alpha \circ \Phi_t)|_{\mathbb{R}^N_+} - u_\alpha\|_2 = \|(T_{-te_N}\widetilde{u_\alpha})|_{\mathbb{R}^N_+} - u_\alpha\|_2 \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1} \times (-t,0]} |u_\alpha(x_1,\cdots,x_{N-1},x_N+t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \|T_{-te_N}\widetilde{u_\alpha} - \widetilde{u_\alpha}\|_2 \\
&\to 0 \ \ (t \to +0)
\end{aligned}$$

となる. よって求める結果を得た. □

命題 8.116 (半空間上の Sobolev 空間 $H^m(\mathbb{R}^N_+)$ の基本性質 2)**.** $u \in H^m(\mathbb{R}^N_+)$ に対し次は互いに同値である.

(1) $u \in H^m_0(\mathbb{R}^N_+)$ (定義 8.109).
(2) u の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張 (定義 8.30) $\widetilde{u}$ が $H^m(\mathbb{R}^N)$ に属する.

証明. (1) ⇒ (2) は定理 8.113 の (1) による.
(2) ⇒ (1) を示す. (1) が成り立つとする. Urysohn の補題 6.43 により $\omega \in D(\mathbb{R}^N)$ で $\omega(x) = 1$ $(\forall x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant 1)$ を満たすものを取り, 各 $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し $\omega_\varepsilon \in D(\mathbb{R}^N)$ を,

$$\omega_\varepsilon(x) := \omega(\varepsilon x) \ \ (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

として定義する. そして $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,\infty)}$ を Friedrichs の軟化子 (定義 8.92) とし,

$$v_\varepsilon := \omega_\varepsilon(\psi_\varepsilon * T_{2\varepsilon e_N}\widetilde{u}) \in D(\mathbb{R}^N) \ \ (\forall \varepsilon \in (0,\infty))$$

とおく. このとき命題 8.85 より,

$$\mathrm{supp}(\psi_\varepsilon * T_{2\varepsilon e_N}\widetilde{u}) \subseteq \overline{\mathrm{supp}(\psi_\varepsilon) + \mathrm{supp}(\widetilde{u}) + 2\varepsilon e_N} \subseteq \mathbb{R}^N_+ \ \ (\forall \varepsilon \in (0,\infty))$$

であるから,

$$\mathrm{supp}(v_\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^N_+ \ \ (\forall \varepsilon \in (0,\infty)) \tag{8.116}$$

が成り立つ. 今, $|\alpha| \leqslant m$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ を取る. Leibniz ルール 8.3 と命題 8.78 より,

$$\partial^\alpha v_\varepsilon(x) = \sum_{0<\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varepsilon^{|\beta|}(\partial^\beta \omega)(\varepsilon x)(\psi_\varepsilon * T_{2\varepsilon e_N}\partial^{\alpha-\beta}\tilde{u})(x) + \omega_\varepsilon(x)(\psi_\varepsilon * T_{2\varepsilon e_N}\partial^\alpha \tilde{u})(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

であるから,

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|\partial^\alpha v_\varepsilon - \omega_\varepsilon(\psi_\varepsilon * T_{2\varepsilon e_N}\partial^\alpha\tilde{u})\|_2 = 0 \tag{8.117}$$

が成り立つ. そして Young の不等式, Friedrichs の軟化子の基本性質 (命題 8.104), 平行移動の L^2 連続性 (命題 8.101), Lebesgue 優収束定理 5.59 より,

$$\begin{aligned}
\|\omega_\varepsilon(\psi_\varepsilon * T_{2\varepsilon e_N}\partial^\alpha\tilde{u}) - \partial^\alpha\tilde{u}\|_2 &\leqslant \|\omega_\varepsilon(\psi_\varepsilon * T_{2\varepsilon e_N}\partial^\alpha\tilde{u} - \psi_\varepsilon * \partial^\alpha\tilde{u})\|_2 + \|\omega_\varepsilon(\psi_\varepsilon * \partial^\alpha\tilde{u} - \partial^\alpha\tilde{u})\|_2 \\
&\quad + \|(\omega_\varepsilon - 1)\partial^\alpha\tilde{u}\|_2 \\
&\leqslant \|\psi_\varepsilon * T_{2\varepsilon e_N}\partial^\alpha\tilde{u} - \psi_\varepsilon * \partial^\alpha\tilde{u}\|_2 + \|\psi_\varepsilon * \partial^\alpha\tilde{u} - \partial^\alpha\tilde{u}\|_2 + \|(\omega_\varepsilon - 1)\partial^\alpha\tilde{u}\|_2 \\
&\leqslant \|T_{2\varepsilon e_N}\partial^\alpha\tilde{u} - \partial^\alpha\tilde{u}\|_2 + \|\psi_\varepsilon * \partial^\alpha\tilde{u} - \partial^\alpha\tilde{u}\|_2 + \|(\omega_\varepsilon - 1)\partial^\alpha\tilde{u}\|_2 \\
&\to 0 \quad (\varepsilon \to +0)
\end{aligned}$$

であるから, (8.117) と合わせて,

$$\|\partial^\alpha v_\varepsilon - \partial^\alpha\tilde{u}\|_2 \leqslant \|\partial^\alpha v_\varepsilon - \omega_\varepsilon(\psi_\varepsilon * T_{2\varepsilon e_N}\partial^\alpha\tilde{u})\|_2 + \|\omega_\varepsilon(\psi_\varepsilon * T_{2\varepsilon e_N}\partial^\alpha\tilde{u}) - \partial^\alpha\tilde{u}\|_2 \to 0 \quad (\varepsilon \to +0)$$

を得る. よって,

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|v_\varepsilon - \tilde{u}\|_{2,m} = 0$$

が成り立つ. これと (8.116) より,

$$u = \tilde{u}|_{\mathbb{R}_+^N} = \lim_{\varepsilon\to+0} v_\varepsilon|_{\mathbb{R}_+^N} \in \overline{D(\mathbb{R}_+^N)}^{\|\cdot\|_{2,m}} = H_0^m(\mathbb{R}_+^N)$$

であるので (1) が成り立つ. □

8.9 Sobolev 空間 $H^m(\Omega)$ の拡張作用素

補題 8.117 (Vandermonde の行列式)**.** 任意の $N \in \mathbb{N}, x_1, \cdots, x_N \in \mathbb{C}$ に対し,

$$V_N(x_1, \cdots, x_N) := (x_j^{i-1})_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{pmatrix} \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$$

なる行列を考える. このとき,

$$\det V_N(x_1, \cdots, x_N) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant N} (x_j - x_i) \tag{8.118}$$

が成り立つ.

証明. N に関する帰納法で示す. $N = 2$ の場合は明らかに成り立つ. ある 2 以上の自然数 $N - 1$ に対して成り立つと仮定して, N の場合も (8.118) が成り立つことを示す. $x_1, \cdots, x_N \in \mathbb{C}$ のうち等しいものが存在するならば, 行列式の反対称性 (命題 2.50) より $\det V_N(x_1, \cdots, x_N) = 0$ であるから (8.118) は成り立つ. そこで互いに異なる $x_1, \cdots, x_N \in \mathbb{C}$ を取り固定し,

$$f(x) := \det V_N(x_1, \cdots, x_{N-1}, x) \quad (\forall x \in \mathbb{C})$$

とおく. このとき命題 2.50 より $f(x)$ は x の $N - 1$ 次の多項式であり, x^{N-1} の係数は

$$V_{N-1}(x_1, \cdots, x_{N-1}) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant N-1} (x_j - x_i) \neq 0$$

である. そして $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_{N-1}) = 0$ であるから,

$$f(x) = (V_{N-1}(x_1, \cdots, x_{N-1}))\,(x - x_1)\cdots(x - x_{N-1}) \quad (\forall x \in \mathbb{C})$$

である. よって,

$$\begin{aligned}\det V_N(x_1, \cdots, x_N) &= f(x_N) = (V_{N-1}(x_1, \cdots, x_{N-1}))\,(x_N - x_1)\cdots(x_N - x_{N-1})\\ &\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant N-1}(x_j - x_i)\right)(x_N - x_1)\cdots(x_N - x_{N-1})\\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant N}(x_j - x_i)\end{aligned}$$

であるから N の場合も (8.118) は成り立つ. □

定理 8.118 (半空間上の Sobolev 空間の拡張作用素)**.** $m \in \mathbb{N}$ とし, $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{R}$ を,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -2 & \cdots & -m \\ (-1)^2 & (-2)^2 & \cdots & (-m)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{m-1} & (-2)^{m-1} & \cdots & (-m)^{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.119}$$

(補題 8.117, 定理 2.53 を参照) として定まるものとする. そして各 $k \in \{1, \cdots, m\}$ に対し,

$$\Phi_k : \mathbb{R}^N_- \ni (x_1, \cdots, x_{N-1}, x_N) \mapsto (x_1, \cdots, x_{N-1}, -kx_N) \in \mathbb{R}^N_+$$

とおき, 任意の $u \in H^m(\mathbb{R}^N_+)$ に対し,

$$E_m u := \tilde{u} + \sum_{k=1}^{m} a_k(\widetilde{u_k \circ \Phi_k}) \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

[*121]とおく. このとき $E_m u \in H^m(\mathbb{R}^N)$ であり,

$$\partial^\alpha E_m u = \widetilde{\partial^\alpha u} + \sum_{k=1}^{m} a_k \partial^\alpha(\widetilde{u \circ \Phi_k}) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}^N_+ : |\alpha| \leqslant m)$$

[*122]が成り立つ. そして,

$$E_m : H^m(\mathbb{R}^N_+) \ni u \mapsto E_m u \in H^m(\mathbb{R}^N)$$

は有界線型作用素である.

証明. $|\alpha| \leqslant m$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}^N_+$ に対し,

$$E^{(\alpha)}_m u := \widetilde{\partial^\alpha u} + \sum_{k=1}^{m} a_k \partial^\alpha(\widetilde{u \circ \Phi_k}) \in L^2(\mathbb{R}^N) \quad (\forall u \in H^m(\mathbb{R}^N_+))$$

とおくと, Sobolev 空間の変数変換 (定理 8.111) より,

$$H^m(\mathbb{R}^N_+) \ni u \mapsto E^{(\alpha)}_m u \in L^2(\mathbb{R}^N) \tag{8.120}$$

は有界線型作用素である. 今,

$$\partial^\alpha E_m u = E^{(\alpha)}_m u \quad (\forall u \in D(\mathbb{R}^N)|_{\mathbb{R}^N_+}, \forall \alpha \in \mathbb{Z}^N_+ : |\alpha| \leqslant m) \tag{8.121}$$

[*121] $v \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ に対し $\tilde{v} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ を v の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張 (定義 8.30) とする.
[*122] Sobolev 空間の変数変換 (定理 8.111) より任意の $u \in H^m(\mathbb{R}^N_+)$ に対し $u \circ \Phi_k \in H^m(\mathbb{R}^N_-)$ であることに注意.

[*123]が成り立つことを帰納法で示す. そこである $n \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$ に対し,

$$\partial^\alpha E_m u = E_m^{(\alpha)} u \quad (\forall u \in D(\mathbb{R}^N)|_{\mathbb{R}_+^N}, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant n) \tag{8.122}$$

が成り立つと仮定する ($n = 0$ の場合は自明的に成り立つことに注意). そして (8.122) が $n+1$ に対しても成り立つことを示す. そのためには, $|\alpha| = n$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ と任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ を取り,

$$\beta := \alpha + (0, \cdots, 0, \overset{j \text{ 番目}}{1}, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{Z}_+^N$$

とおき, 任意の $u \in D(\mathbb{R}^N)|_{\mathbb{R}_+^N}$ に対し,

$$\partial^\beta E_m u = E_m^{(\beta)} u \tag{8.123}$$

が成り立つことを示せばよい. 任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$\begin{aligned}\partial^\beta E_m u(\varphi) &= \partial_j \partial^\alpha E_m u(\varphi) = \partial_j E_m^{(\alpha)} u(\varphi) = -E_m^{(\alpha)} u(\partial_j \varphi) \\ &= -\int_{\mathbb{R}_+^N} \partial^\alpha u(x) \partial_j \varphi(x) dx - \sum_{k=1}^m a_k \int_{\mathbb{R}_-^N} \partial^\alpha (u \circ \Phi_k)(x) \partial_j \varphi(x) dx \end{aligned} \tag{8.124}$$

となる. この右辺を $j \neq N$ の場合と $j = N$ の場合に分けて考える. $j \neq N$ の場合. Fubini の定理 5.85 と部分積分により,

$$((8.124) \text{ の右辺}) = \int_{\mathbb{R}_+^N} \partial^\beta u(x) \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^m a_k \int_{\mathbb{R}_-^N} \partial^\beta (u \circ \Phi_k)(x) \varphi(x) dx = E_m^{(\beta)} u(\varphi)$$

である. $j = N$ の場合, Fubini の定理 5.85 と部分積分と (8.119) より,

$$\begin{aligned}((8.124) \text{ の右辺}) &= \int_{\mathbb{R}_+^N} \partial^\beta u(x) \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^m a_k \int_{\mathbb{R}_-^N} \partial^\beta (u \circ \Phi_k)(x) \varphi(x) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \partial^\alpha u(x, 0) \varphi(x, 0) dx - \sum_{k=1}^m a_k (-k)^{\alpha_N} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (\partial^\alpha u)(x, 0) \varphi(x, 0) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^N} \partial^\beta u(x) \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^m a_k \int_{\mathbb{R}_-^N} \partial^\beta (u \circ \Phi_k)(x) \varphi(x) dx = E_m^{(\beta)} u(\varphi)\end{aligned}$$

である. よって $j \neq N$, $j = N$ いずれの場合も (8.124) の右辺は $E_m^\beta u(\varphi)$ となるので, (8.123) が成り立つ. ゆえに (8.122) は $n+1$ の場合も成り立つので, 帰納法より (8.121) が成り立つ.
今, 任意の $u \in H^m(\mathbb{R}_+^N)$ を取る. 命題 8.115 より $D(\mathbb{R}^N)|_{\mathbb{R}_+^N}$ の列 $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{i \to \infty} \|u - u_i\|_{2,m} = 0$$

なるものが取れる. このとき $|\alpha| \leqslant m$ を満たす任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し, (8.120) が有界線型作用素であることから,

$$\lim_{i \to \infty} \|E_m^{(\alpha)} u_i - E_m^{(\alpha)} u\|_2 = 0, \quad \lim_{i \to \infty} \|E_m u_i - E_m u\|_2 = 0$$

が成り立つ. よって命題 8.29 の (1), (2) と (8.121) より, 位相線型空間 $D'(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.18) において,

$$\partial^\alpha E_m u = \lim_{i \to \infty} \partial^\alpha E_m u_i = \lim_{i \to \infty} E_m^{(\alpha)} u_i = E_m^{(\alpha)} u$$

が成り立つ. ゆえに任意の $u \in H^m(\mathbb{R}_+^N)$ に対し,

$$\partial^\alpha E_m u = E_m^{(\alpha)} u \in L^2(\mathbb{R}^N) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant m)$$

[*123] $D(\mathbb{R}^N)|_{\mathbb{R}_+^N}$ は $D(\mathbb{R}^N)$ の元の $\mathbb{R}_+^N$ 上への制限全体.

であるので $E_m u \in H^m(\mathbb{R}^N)$ であり, 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し有界線型作用素 (8.120) の作用素ノルムを C_α とおいて,

$$C := \max_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha$$

とおくと,

$$\|E_m u\|_{2,m}^2 = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha E_m u\|_2^2 = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|E_m^{(\alpha)} u\|_2^2 \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha^2 \|u\|_2^2 \leqslant C^2 \|u\|_{2,m}^2$$

となる. よって,

$$H^m(\mathbb{R}_+^N) \ni u \mapsto E_m u \in H^m(\mathbb{R}^N)$$

は有界線型作用素である. □

定義 8.119 (半空間上の Sobolev 空間 $H^m(\mathbb{R}_+^N)$ の拡張作用素)**.** $m \in \mathbb{N}$ に対し, 定理 8.118 における有界線型作用素

$$E_m : H^m(\mathbb{R}_+^N) \to H^m(\mathbb{R}^N)$$

を $H^m(\mathbb{R}_+^N)$ の $\mathbb{R}^N$ 上への拡張作用素と言う ($E_m u|_{\mathbb{R}_+^N} = u$ ($\forall u \in H^m(\mathbb{R}_+^N)$) であることに注意).

補題 8.120. $\varnothing \neq S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ とし, Ω は $\mathbb{R}^N$ の開集合とする. このとき Ω の境界 $\partial\Omega = \overline{\Omega}\backslash\Omega$ に対し,

$$d(S, \mathbb{R}^N\backslash\Omega) = d(S, \partial\Omega)$$

が成り立つ.

証明. $\partial\Omega \subseteq \mathbb{R}^N\backslash\Omega$ であるから,

$$d(S, \partial\Omega) \geqslant d(S, \mathbb{R}^N\backslash\Omega)$$

である. 逆の不等式を示す. 任意の $x \in S$, $y \in \mathbb{R}^N\backslash\Omega$ を取る.

$$s := \sup\{t \in [0,1] : x + t(y-x) \in \Omega\}$$

とおけば, 上限の定義より $x + s(y-x) \in \overline{\Omega}$ である. もし $x + s(y-x) \in \Omega$ であるならば $s < 1$ であり, Ω が開集合であることから $x + s'(y-x) \in \Omega$ を満たす $s' \in (s,1)$ が存在することになり矛盾する. よって $x + s(y-x) \in \overline{\Omega}\backslash\Omega = \partial\Omega$ である. ゆえに,

$$|x-y| \geqslant s|y-x| = |x - (x + s(y-x))| \geqslant d(S, \partial\Omega)$$

が成り立つ. $x \in S$, $y \in \mathbb{R}^N\backslash\Omega$ は任意なので,

$$d(S, \mathbb{R}^N\backslash\Omega) \geqslant d(S, \partial\Omega)$$

が成り立つ. □

定理 8.121 (滑らかでコンパクトな境界を持つ開集合上の Sobolev 空間の拡張作用素)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を滑らかでコンパクトな境界 $\partial\Omega$ を持つ開集合 (定義 6.113) とする. このとき任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し, 有界線型作用素 $E : H^m(\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^N)$ で $Eu|_\Omega = u$ ($\forall u \in H^m(\Omega)$) を満たすものが存在する.

証明. 滑らかな境界を持つ開集合の定義 6.113 と $\partial\Omega$ のコンパクト性より, 有限個の $\mathbb{R}^N$ の局所座標 $((U_i, \Phi_i))_{i=1,\cdots,\ell}$ で次を満たすものが取れる.

(1) $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$.
(2) 各 $i \in \{1, \cdots, \ell\}$ に対し,

$$\Phi_i(U_i) = (-1,1)^N, \quad \Phi_i(U_i \cap \Omega) = (-1,1)^{N-1} \times (0,1),$$
$$\Phi_i(U_i \cap \partial\Omega) = (-1,1)^{N-1} \times \{0\}.$$

(3) 各 $i \in \{1, \cdots, \ell\}$ に対し Φ_i, Φ_i^{-1} の全ての偏導関数は有界.

(1) の左辺は $\mathbb{R}^N$ のコンパクト集合, 右辺は開集合であるから閉包がコンパクトな $\mathbb{R}^N$ の開集合 D で,

$$\partial\Omega \subseteq D \subseteq \overline{D} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$$

を満たすものが取れる (定理 1.81 など). よって 1 の分割 (定理 6.44) より $h_i \in D(U_i)$ $(i = 1, \cdots, \ell)$ で,

$$\sum_{i=1}^{\ell} h_i(x) = 1 \quad (\forall x \in D) \tag{8.125}$$

を満たすものが取れる.

$$h_0 := 1 - \sum_{i=1}^{\ell} h_i \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{8.126}$$

とおく (h_0 は全ての偏導関数が有界である). 任意の $u \in H^m(\Omega)$ に対し (8.125) より $\mathrm{supp}(h_0 u) \subseteq \Omega \backslash D \subseteq \mathbb{R}^N \backslash D$ であり, $\partial\Omega$ は開集合 D に含まれるコンパクト集合なので命題 8.6 の (4) より $d(\mathbb{R}^N \backslash D, \partial\Omega) > 0$ であるから,

$$d(\mathrm{supp}(h_0 u), \partial\Omega) \geqslant d(\mathbb{R}^N \backslash D, \partial\Omega) > 0$$

である. よって補題 8.120 より,

$$d(\mathrm{supp}(h_0 u), \mathbb{R}^N \backslash \Omega) = d(\mathrm{supp}(h_0 u), \partial\Omega) > 0$$

であるので, 定理 8.113 の (2) より $h_0 u \in H^m(\Omega)$ の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張 $\widetilde{h_0 u}$ は $H^m(\mathbb{R}^N)$ に属し,

$$\|\widetilde{h_0 u}\|_{2,m} = \|h_0 u\|_{2,m} \leqslant C_0 \|u\|_{2,m}$$

となる. ただし C_0 は h_0 と m のみにより u によらない非負実数である[*124] そこで,

$$E_0 : H^m(\Omega) \ni u \mapsto \widetilde{h_0 u} \in H^m(\mathbb{R}^N) \tag{8.127}$$

とおけば E_0 は有界線型作用素である. 任意の $i \in \{1, \cdots, \ell\}$ を取る. $\mathrm{supp}(h_i) \subseteq U_i$ はコンパクトであるから,

$$\Phi_i(\mathrm{supp}(h_i)) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)^N \tag{8.128}$$

なる $\varepsilon \in (0,1)$ が取れる. Φ_i の $U_i \cap \Omega$ 上への制限を,

$$\Psi_i : U_i \cap \Omega \to (-1,1)^{N-1} \times (0,1)$$

とおく. このとき任意の $u \in H^m(\Omega)$ に対し (3) と Sobolev 空間の変数変換 (定理 8.111) より,

$$(h_i u) \circ \Psi_i^{-1} \in H^m((-1,1)^{N-1} \times (0,1)) \tag{8.129}$$

であり, (8.128) より,

$$\mathrm{supp}\left((h_i u) \circ \Psi_i^{-1}\right) \subseteq \mathrm{supp}(h_i \circ \Psi_i^{-1}) = \Psi_i(\mathrm{supp}(h_i|_{U_i \cap \Omega})) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)^{N-1} \times (0, \varepsilon)$$

だから,

$$d\left(\mathrm{supp}\left((h_i u) \circ \Psi_i^{-1}\right),\ \mathbb{R}_+^N \backslash \left((-1,1)^{N-1} \times (0,1)\right)\right) \geqslant 1 - \varepsilon > 0$$

である. よって定理 8.113 の (2) より (8.129) の $\mathbb{R}_+^N$ 上への 0 拡張 $\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}$ は $H^m(\mathbb{R}_+^N)$ に属し,

$$\begin{aligned} &\mathrm{supp}\left(\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}\right) = \mathrm{supp}\left((h_i u) \circ \Psi_i^{-1}\right) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)^{N-1} \times (0, \varepsilon), \\ &\|\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}\|_{2,m} = \|(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}\|_{2,m} \end{aligned} \tag{8.130}$$

[*124] 滑らかな関数と超関数の積に関する Leibniz ルール 8.28 より $|\alpha| \leqslant m$ を満たす任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $\|\partial^\alpha(h_0 u)\|_2 \leqslant \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^\beta h_0\|_\infty \|\partial^{\alpha-\beta} u\|_2$ である. C_0 はこれより得られる.

を満たす．そこで半空上の Sobolev 空間 $H^m(\mathbb{R}^N_+)$ の拡張作用素 (定義 8.119) を $F : H^m(\mathbb{R}^N_+) \to H^m(\mathbb{R}^N)$ とおけば,

$$F\left(\widetilde{(h_i u)\circ\Psi_i^{-1}}\right) \in H^m(\mathbb{R}^N)$$

であり, F の定義の仕方と (8.130) の上の式より,

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}\left(F\left(\widetilde{(h_i u)\circ\Psi_i^{-1}}\right)\right) &\subseteq \overline{((-\varepsilon,\varepsilon)^{N-1}\times(0,\varepsilon))\cup\bigcup_{k=1}^{m}\left((-\varepsilon,\varepsilon)^{N-1}\times\left(-\frac{\varepsilon}{k},0\right)\right)}\\ &\subseteq[-\varepsilon,\varepsilon]^N\end{aligned}$$

である．よって,

$$F\left(\widetilde{(h_i u)\circ\Psi_i^{-1}}\right)\circ\Phi_i \in H^m(U_i)$$

の台はコンパクト集合 $\Phi_i^{-1}([-\varepsilon,\varepsilon]^N)\subseteq U_i$ に含まれるので, 命題 8.6 の (4) より,

$$d\left(\operatorname{supp}\left(F\left(\widetilde{(h_i u)\circ\Psi_i^{-1}}\right)\circ\Phi_i\right),\ \mathbb{R}^N\backslash U_i\right) > 0$$

であるから, 定理 8.113 の (2) より $F\left(\widetilde{(h_i u)\circ\Psi_i^{-1}}\right)\circ\Phi_i \in H^m(U_i)$ の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張を $E_i u$ とおけば,

$$E_i u\in H^m(\mathbb{R}^N),\quad \operatorname{supp}(E_i u)\subseteq U_i,\quad \|E_i u\|_{2,m} = \|F\left(\widetilde{(h_i u)\circ\Psi_i^{-1}}\right)\circ\Phi_i\|_{2,m} \tag{8.131}$$

である．(3) と Sobolev 空間の変数変換 (定理 8.111), $F : H^m(\mathbb{R}^N_+)\to H^m(\mathbb{R}^N)$ が有界線型作用素であること, および (8.130) の下の式より, $u\in H^m(\Omega)$ によらない非負実数 C_i が存在し,

$$\|E_i u\|_{2,m} = \left\|F\left(\widetilde{(h_i u)\circ\Psi_i^{-1}}\right)\circ\Phi_i\right\|_{2,m} \leqslant C_i\|u\|_{2,m}$$

となるので,

$$E_i : H^m(\Omega)\to H^m(\mathbb{R}^N)$$

は有界線型作用素である．そして任意の $u\in H^m(\Omega)$ に対し,

$$E_i u|_{U_i\cap\Omega} = F\left(\widetilde{(h_i u)\circ\Psi_i^{-1}}\right)\circ\Phi_i|_{U_i\cap\Omega} = h_i u|_{U_i\cap\Omega}$$

であり, (8.131) より,

$$\operatorname{supp}(E_i u|_\Omega)\subseteq\operatorname{supp}(E_i u)\cap\Omega\subseteq U_i\cap\Omega$$

であるから,

$$E_i u|_\Omega = h_i u\quad (\forall u\in H^m(\Omega)) \tag{8.132}$$

である．今, 有界線型作用素

$$E := E_0 + \sum_{i=1}^{\ell} E_i : H^m(\Omega)\to H^m(\mathbb{R}^N)$$

を定義すると, 任意の $u\in H^m(\Omega)$ に対し, (8.127), (8.132), (8.126) より,

$$Eu|_\Omega = E_0 u|_\Omega + \sum_{i=1}^{\ell} E_i u|_\Omega = h_0 u + \sum_{i=1}^{\ell} h_i u = u$$

であるから, E は求める有界線型作用素である．□

定義 8.122 (滑らかでコンパクトな境界を持つ開集合上の Sobolev 空間の拡張作用素)**.** $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ を滑らかでコンパクトな境界を持つ開集合とする．このとき定理 8.121 より, 任意の $m\in\mathbb{Z}_+$ に対し有界線型作用素 $E : H^m(\Omega)\to H^m(\mathbb{R}^N)$ で $Eu|_\Omega = u$ $(\forall u\in H^m(\Omega))$ を満たすものが存在する．E を $H^m(\Omega)$ の $\mathbb{R}^N$ 上への拡張作用素と言う．

系 8.123. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を滑らかでコンパクトな境界を持つ開集合とする．このとき任意の $m \in \mathbb{Z}_+$ に対し，

$$H^m(\Omega) = \overline{D(\mathbb{R}^N)|_\Omega}^{\|\cdot\|_{2,m}}$$

が成り立つ．ただし $D(\mathbb{R}^N)|_\Omega = \{u|_\Omega : u \in D(\mathbb{R}^N)\} \subseteq H^m(\Omega)$ である．

証明. 拡張作用素 $E : H^m(\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^N)$ を考える．定理 8.110 より $H^m(\mathbb{R}^N) = H_0^m(\mathbb{R}^N) = \overline{D(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{2,m}}$ であるから，任意の $u \in H^m(\Omega)$ に対し，$D(\mathbb{R}^N)$ の列 $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ で，

$$\lim_{i\to\infty} \|Eu - \varphi_i\|_{2,m} = 0$$

なるものが取れる．よって Ω に制限したものを考えれば，

$$\|u - \varphi_i|_\Omega\|_{2,m} = \|Eu|_\Omega - \varphi_i|_\Omega\|_{2,m} \leqslant \|Eu - \varphi_i\|_{2,m} \to 0 \ \ (i \to \infty)$$

であるから，

$$u = \lim_{i\to\infty} \varphi_i|_\Omega \in \overline{D(\mathbb{R}^N)|_\Omega}^{\|\cdot\|_{2,m}} \subseteq H^m(\Omega)$$

である．□

8.10 Sobolev 空間 $H^1(\Omega)$ のトレース作用素

補題 8.124. 有界線型作用素

$$\Gamma_0 : H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^{N-1})$$

で，任意の $f \in C(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$ に対し，

$$\Gamma_0 f = f(\cdot, 0) \tag{8.133}$$

を満たすものが唯一つ存在する．ただし $N = 1$ の場合は $L^2(\mathbb{R}^{N-1}) = \mathbb{C}$ とみなし，(8.133) は $\Gamma_0 f = f(0)$ とみなす．

証明. 一意性は $H^1(\mathbb{R}^N)$ において $D(\mathbb{R}^N) \subseteq C(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$ が稠密である (定理 8.110) ことによる．存在を示す．$h \in D(\mathbb{R})$ で $h(0) = 1, h(1) = 0$ なるものを取り，

$$C := \max\left\{\|h\|_2, \|h'\|_2\right\}$$

とおく．任意の $f \in (\mathbb{R}^N)$ と任意の $x \in \mathbb{R}^{N-1}$ に対し，微積分学の基本定理 5.206 と Hölder の不等式 5.120 より，

$$\begin{aligned}
|f(x,0)| = |h(1)f(x,1) - h(0)f(x,0)| &= \left|\int_0^1 (h'(t)f(x,t) + h(t)\partial_N f(x,t))dt\right| \\
&\leqslant \int_0^1 |h'(t)f(x,t)|dt + \int_0^1 |h(t)\partial_N f(x,t)|dt \\
&\leqslant \|h'\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \|h\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_N f(x,t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C\left\{\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_N f(x,t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\}
\end{aligned}$$

である．よって Minkowski の不等式 5.122 と Tonelli の定理 5.84 より，

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(x,0)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &\leqslant C\left\{\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|^2 dt\right) dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_N f(x,t)|^2 dt\right) dx\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&= C(\|f\|_2 + \|\partial_N f\|_2) \leqslant 2C\|f\|_{2,1}
\end{aligned}$$

となる．これより，

$$\Gamma_0 : (D(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{2,1}) \to L^2(\mathbb{R}^{N-1}), \ \ \Gamma_0 f := f(\cdot, 0) \ \ (\forall f \in D(\mathbb{R}^N)) \tag{8.134}$$

とおけば,

$$\|\Gamma_0 f\|_2 \leqslant 2C\|f\|_{2,1} \quad (\forall f \in D(\mathbb{R}^N))$$

なので, (8.134) は有界線型作用素である. $H^1(\mathbb{R}^N)$ において $D(\mathbb{R}^N)$ は稠密 (定理 8.110) なので命題 3.19 より (8.134) は $H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^{N-1})$ の有界線型作用素に一意拡張できる. その拡張もそのまま $\Gamma_0 : H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^{N-1})$ と表す. 任意の $f \in C(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$ を取る. Urysohn の補題 6.43 により $\omega \in D(\mathbb{R}^N)$ で $\omega(x) = 1$ $(\forall x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant 1)$ なるものを取り, 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し $\omega_\varepsilon \in D(\mathbb{R}^N)$ を,

$$\omega_\varepsilon(x) := \omega(\varepsilon x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

として定義する. そして $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,\infty)}$ を Friedrichs の軟化子 (定義 8.92) とし,

$$f_n := \omega_{\frac{1}{n}} \left(\psi_{\frac{1}{n}} * f\right) \in D(\mathbb{R}^N) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおく. 定理 8.110 の証明より,

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad (\text{in } H^1(\mathbb{R}^N))$$

であるから,

$$\Gamma_0 f = \lim_{n\to\infty} \Gamma_0 f_n = \lim_{n\to\infty} f_n(\cdot, 0) \quad (\text{in } L^2(\mathbb{R}^{N-1}))$$

である. よって $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $(f_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ が存在し,

$$\Gamma_0 f(x) = \lim_{n\to\infty} f_{k(n)}(x, 0) \quad (\text{a.e. } x \in \mathbb{R}^{N-1}) \tag{8.135}$$

が成り立つ (定理 5.127 の証明を参照). 一方, Friedrichs の軟化子の基本性質 (定理 8.92 の (1)) より,

$$\lim_{n\to\infty} \psi_{\frac{1}{n}} * f = f \quad (\text{コンパクト一様収束})$$

であり, $\omega_{\frac{1}{n}}(x) = 1$ $(\forall x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant n)$ であるから,

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \omega_{\frac{1}{n}}(\psi_{\frac{1}{n}} * f) = f \quad (\text{コンパクト一様収束})$$

である. よって特に,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x, 0) = f(x, 0) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^{N-1})$$

が成り立つ. これと (8.135) より,

$$\Gamma_0 f = f(\cdot, 0)$$

を得る. これで存在が示せた. □

定理 8.125 (半空間上の 1 階 Sobolev 空間 $H^1(\mathbb{R}^N_+)$ のトレース作用素)**.** 有界線型作用素

$$\Gamma : H^1(\mathbb{R}^N_+) \to L^2(\mathbb{R}^{N-1})$$

で, 任意の $f \in C(\overline{\mathbb{R}^N_+})|_{\mathbb{R}^N_+} \cap H^1(\mathbb{R}^N_+)$ に対し,

$$\Gamma f = f(\cdot, 0) \tag{8.136}$$

を満たすものが唯一つ存在する. ただし $C(\overline{\mathbb{R}^N_+})|_{\mathbb{R}^N_+} = \{f|_{\mathbb{R}^N_+} : f \in C(\overline{\mathbb{R}^N_+})\} \subseteq C(\mathbb{R}^N_+)$ である. また $N = 1$ の場合は $L^2(\mathbb{R}^{N-1}) = \mathbb{C}$ とみなし, (8.136) は $\Gamma f = f(0)$ とみなす.

証明. 一意性は $H^1(\mathbb{R}^N_+)$ において $D(\mathbb{R}^N)|_{\mathbb{R}^N_+} = \{u|_{\mathbb{R}^N_+} : u \in D(\mathbb{R}^N)\} \subseteq C(\overline{\mathbb{R}^N_+})|_{\mathbb{R}^N_+} \cap H^1(\mathbb{R}^N_+)$ が稠密である (命題 8.115) ことによる. 存在を示す. 半空間 $H^1(\mathbb{R}^N_+)$ の $\mathbb{R}^N$ 上への拡張作用素 (8.118)

$$E : H^1(\mathbb{R}^N_+) \to H^1(\mathbb{R}^N)$$

と補題 8.126 における有界線型作用素

$$\Gamma_0 : H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^{N-1})$$

の合成により, 有界線型作用素

$$\Gamma := \Gamma_0 E : H^1(\mathbb{R}^N_+) \to L^2(\mathbb{R}^{N-1})$$

を定義する. 任意の $f \in C(\overline{\mathbb{R}^N_+})|_{\mathbb{R}^N_+} \cap H^1(\mathbb{R}^N_+)$ に対し, $\widetilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ を

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x_1, \cdots, x_{N-1}, x_N) & (x_N \geqslant 0) \\ f(x_1, \cdots, x_{N-1}, -x_N) & (x_N < 0) \end{cases}$$

と定義すると $\widetilde{f} \in C(\mathbb{R}^N)$ であり, 拡張作用素 E の定義の仕方 (8.118) と $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^N$ の Lebesgue 測度が 0 であることから $\widetilde{f} = Ef \in C(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$ である. よって補題 8.126 より,

$$\Gamma f = \Gamma_0 E f = \Gamma_0 \widetilde{f} = \widetilde{f}(\cdot, 0) = f(\cdot, 0)$$

であるので, 存在が示せた. □

定義 8.126 (半空間上の 1 階 Sobolev 空間 $H^1(\mathbb{R}^N_+)$ 上のトレース作用素)**.** 定理 8.126 における有界線型作用素

$$\Gamma : H^1(\mathbb{R}^N_+) \to L^2(\mathbb{R}^{N-1})$$

を $H^1(\mathbb{R}^N_+)$ 上のトレース作用素と言う.

定理 8.127 ($H^1(\mathbb{R}^N_+)$ 上のトレース作用素の基本性質)**.** $H^1(\mathbb{R}^N_+)$ のトレース作用素を $\Gamma : H^1(\mathbb{R}^N_+) \to L^2(\mathbb{R}^{N-1})$ とする. このとき任意の $u \in H^1(\mathbb{R}^N_+)$ に対し次は互いに同値である.

(1) $u \in H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$.
(2) $\Gamma u = 0$.
(3) u の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張 (定義 8.30) $\widetilde{u}$ が $H^1(\mathbb{R}^N)$ に属する.

証明. (1) ⇒ (2) を示す. (1) が成り立つならば $D(\mathbb{R}^N_+)$ の列 $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{i\to\infty}\|u - u_i\|_{2,1} = 0$ を満たすものが取れる. よって,

$$\Gamma u = \lim_{i\to\infty} \Gamma u_i = \lim_{i\to\infty} u_i(\cdot, 0) = 0$$

($D(\mathbb{R}^N_+) \subseteq D(\mathbb{R}^N)$ に注意) であるから (2) が成り立つ.
(2) ⇒ (3) を示す. (2) が成り立つとする. 任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$, 任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ を取る.

$$\partial_j \widetilde{u}(\varphi) = -\widetilde{u}(\partial_j \varphi) = -\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{u}(x)\partial_j\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^N_+} u(x)\partial_j\varphi(x)dx \tag{8.137}$$

である. ここで命題 8.115 より $D(\mathbb{R}^N)|_{\mathbb{R}^N_+}$ の列 $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{i\to\infty}\|u_i - u\|_2 = 0, \quad \lim_{i\to\infty}\|\partial_j u_i - u\|_2 = 0$$

を満たすものが取れるので, (8.137) の右辺は,

$$\begin{aligned} (8.137) \text{ の右辺} &= -\int_{\mathbb{R}^N_+} u(x)\partial_j\varphi(x)dx = -\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N_+} u_i(x)\partial_j\varphi(x)dx \\ &= \lim_{i\to\infty}\left(-\int_{\mathbb{R}^N_+}\partial_j(u_i\varphi)(x)dx + \int_{\mathbb{R}^N_+}\partial_j u_i(x)\varphi(x)dx\right) \\ &= -\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N_+}\partial_j(u_i\varphi)(x)dx + \int_{\mathbb{R}^N_+}\partial_j u(x)\varphi(x)dx \end{aligned} \tag{8.138}$$

となる. (8.138) の右辺の第 1 項は, Fubini の定理 5.85 と微積分学の基本定理 5.206 より, $j \neq N$ の場合,

$$(8.138) \text{ の右辺の第 1 項} = -\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N_+}\partial_j(u_i\varphi)(x)dx = 0$$

であり, $j = N$ の場合, $\lim_{i\to\infty}\|\Gamma u_i - \Gamma u\|_2 = 0$ と $\Gamma u = 0$ より,

$$\begin{aligned}(8.138)\text{ の右辺の第 1 項} &= -\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N_+}\partial_N(u_i\varphi)(x)dx = \lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}u_i(x,0)\varphi(x,0)dx\\ &= \lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\Gamma u_i(x)\varphi(x,0)dx = \int_{\mathbb{R}^{N-1}}\Gamma u(x)\varphi(x,0)dx = 0\end{aligned}$$

となる. よっていずれにせよ (8.138) の右辺の第 1 項は 0 なので,

$$\partial_j\widetilde{u}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N_+}\partial_j u(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{\partial_j u}(x)\varphi(x)dx = \widetilde{\partial_j u}(\varphi)$$

が成り立つ. ただし $\widetilde{\partial_j u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ は $\partial_j u \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張である. これより,

$$\partial_j\widetilde{u} = \widetilde{\partial_j u} \in L^2(\mathbb{R}^N)\ \ (\forall j \in \{1,\cdots,N\})$$

が成り立つので $\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ である.
(3) ⇒ (1) は命題 8.116 による. □

定理 8.128 (滑らかでコンパクトな境界を持つ開集合上の 1 階 Sobolev 空間のトレース作用素)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を滑らかでコンパクトな境界 $\partial\Omega$ を持つ開集合 (定義 6.113) とする. このとき有界線型作用素

$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$$

で, 任意の $u \in C(\overline{\Omega})|_\Omega \cap H^1(\Omega)$ に対し,

$$\gamma u = u|_{\partial\Omega}$$

を満たすものが唯一つ存在する. ただし $L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$ はコンパクト超曲面 $\partial\Omega$ の面積測度[*125] $\mu_{\partial\Omega} : \mathcal{B}_{\partial\Omega} \to [0,\infty)$ に関する L^2 空間である.

証明. 滑らかな境界を持つ開集合の定義 6.113 と $\partial\Omega$ のコンパクト性より, 有限個の $\mathbb{R}^N$ の局所座標 $((U_i,\Phi_i))_{i=1,\cdots,\ell}$ で次を満たすものが取れる.

(1) $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$.
(2) 各 $i \in \{1,\cdots,\ell\}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\Phi_i(U_i) = (-1,1)^N,\quad \Phi_i(U_i\cap\Omega) = (-1,1)^{N-1}\times(0,1),\\ &\Phi_i(U_i\cap\partial\Omega) = (-1,1)^{N-1}\times\{0\}.\end{aligned}$$

(3) 各 $i \in \{1,\cdots,\ell\}$ に対し Φ_i, Φ_i^{-1} の全ての偏導関数は有界.

(1) の左辺は $\mathbb{R}^N$ のコンパクト集合, 右辺は開集合であるから閉包がコンパクトな $\mathbb{R}^N$ の開集合 D で,

$$\partial\Omega \subseteq D \subseteq \overline{D} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$$

を満たすものが取れる (定理 1.81 など). よって 1 の分割 (定理 6.44) より $h_i \in D(U_i)$ $(i = 1,\cdots,\ell)$ で,

$$\sum_{i=1}^{\ell} h_i(x) = 1\ \ (\forall x \in D) \tag{8.139}$$

を満たすものが取れる. 任意の $i \in \{1,\cdots,\ell\}$ を取り固定する. $\Psi_i : U_i\cap\Omega \to (-1,1)^{N-1}\times(0,1)$ を Φ_i の $U_i\cap\Omega$ 上への制限, $\Theta_i : U_i\cap\partial\Omega \to (-1,1)^{N-1}$ を $\Phi_i(x) = (\Theta_i(x), 0)$ $(\forall x \in U_i\cap\partial\Omega)$ なるものとする. このとき定理 6.10 より $(U_i\cap\partial\Omega, \Theta_i)$ は $\partial\Omega$ の局所座標である. $\mathrm{supp}(h_i) \subseteq U_i$ はコンパクトだから $\varepsilon \in (0,1)$ で,

$$\mathrm{supp}(h_i\circ\Phi_i^{-1}) = \Phi_i(\mathrm{supp}(h_i)) \subseteq (-\varepsilon,\varepsilon)^N \tag{8.140}$$

[*125] つまり $\mathbb{R}^N$ 内の $N-1$ 次元多様体 $\partial\Omega$ 上の Riemann-Lebesgue 測度 (定義 6.85).

を満たすものが取れる. 任意の $u \in H^1(\Omega)$ を取る. (3) と Sobolev 空間の変数変換 (定理 8.111) より,

$$(h_i u) \circ \Psi_i^{-1} \in H^1((-1,1)^{N-1} \times (0,1)) \tag{8.141}$$

であり, (8.140) より,

$$\operatorname{supp}\left((h_i u) \circ \Psi_i^{-1}\right) \subseteq \operatorname{supp}(h_i \circ \Psi_i^{-1}) = \Psi_i(\operatorname{supp}(h_i|_{U_i \cap \Omega})) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)^{N-1} \times (0, \varepsilon)$$

だから,

$$d\left(\operatorname{supp}\left((h_i u) \circ \Psi_i^{-1}\right),\ \mathbb{R}_+^N \backslash \left((-1,1)^{N-1} \times (0,1)\right)\right) \geqslant 1 - \varepsilon > 0$$

である. よって定理 8.113 の (2) より (8.141) の $\mathbb{R}_+^N$ 上への 0 拡張 $\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}$ は $H^1(\mathbb{R}_+^N)$ に属し,

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp}\left(\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}\right) = \operatorname{supp}\left((h_i u) \circ \Psi_i^{-1}\right) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)^{N-1} \times (0, \varepsilon), \\ &\|\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}\|_{2,1} = \|(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}\|_{2,1} \end{aligned} \tag{8.142}$$

を満たす. そこで $H^1(\mathbb{R}_+^N)$ のトレース作用素 (8.126) を $\Gamma : H^1(\mathbb{R}_+^N) \to L^2(\mathbb{R}^{N-1})$ とすれば,

$$\Gamma\left(\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}\right)|_{(-1,1)^{N-1}} \in L^2((-1,1)^{N-1})$$

である. (3) より局所座標 $(U_i \cap \Omega, \Theta_i)$ に対する計量 (定義 6.68) の行列式は有界であるから, 面積測度 $\mu_{\partial\Omega}$ の定義 6.85 より,

$$L^2((-1,1)^{N-1}) \ni v \mapsto v \circ \Theta_i \in L^2(U_i \cap \partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$$

は有界線型作用素である. そこでこの作用素ノルムを C とする. 今,

$$\Gamma\left(\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}\right) \circ \Theta_i \in L^2(U_i \cap \partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$$

の $\partial\Omega$ 上への 0 拡張を $\gamma_i u \in L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$ とおくと, (8.142) より,

$$\begin{aligned} \|\gamma_i u\|_2 &= \left\|\Gamma\left(\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}\right) \circ \Theta_i\right\|_2 \leqslant C \left\|\Gamma\left(\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}\right)\right\|_2 \\ &\leqslant C\|\Gamma\| \left\|\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}\right\|_{2,1} = C\|\Gamma\| \left\|(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}\right\|_{2,1} \end{aligned}$$

である. よって (3) と Sobolev 空間の変数変換 (定理 8.111) より,

$$\gamma_i : H^1(\Omega) \to \gamma_i u \in L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$$

は有界線型作用素である. 任意の $u \in C(\overline{\Omega})|_\Omega \cap H^1(\Omega)$ を取る. (2) より $(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}$ は $(-1,1)^{N-1} \times [0,1)$ 上の連続関数とみなせてその台は $(-\varepsilon, \varepsilon)^{N-1} \times [0, \varepsilon)$ に含まれるので, $(h_i f) \circ \Psi_i^{-1}$ の $\mathbb{R}_+^N$ 上への 0 拡張 $\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}$ は $\overline{\mathbb{R}_+^N} = \mathbb{R}^{N-1} \times [0, \infty)$ 上の連続関数とみなせる. よって $H^1(\mathbb{R}_+^N)$ のトレース作用素 Γ の定義 8.126 より, 任意の $x \in U_i \cap \partial\Omega$ に対し,

$$(\gamma_i u)(x) = \Gamma\left(\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}\right) \circ \Theta_i(x) = \widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}(\Theta_i(x), 0) = (h_i u)(x)$$

である. そして γ_i の定義より $\gamma_i u$ は $\partial\Omega \backslash (U_i \cap \partial\Omega)$ 上では 0 なので $\gamma_i u = (h_i u)|_{\partial\Omega}$ である. よって,

$$\gamma_i u = (h_i u)|_{\partial\Omega} \tag{8.143}$$

が成り立つ. 今, 有界線型作用素

$$\gamma := \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$$

を定義すると, 任意の $u \in C(\overline{\Omega})|_\Omega \cap H^1(\Omega)$ に対し, (8.143) と (8.139) より,

$$\gamma u = \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i u = \sum_{i=1}^{\ell} (h_i u)|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$$

である．よって存在が示せた．
一意性を示す．$\gamma, \gamma' : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$ が条件を満たす有界線型作用素であるとする．系 8.123 より任意の $u \in H^1(\Omega)$ に対し $D(\mathbb{R}^N)|_\Omega$ の列 $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ で，

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{2,1} = 0$$

を満たすものが取れる．$D(\mathbb{R}^N)|_\Omega \subseteq C(\overline{\Omega})|_\Omega \cap H^1(\Omega)$ より $\gamma u_k = u_k|_{\partial\Omega} = \gamma' u_k$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ であるから，

$$\gamma u = \lim_{k\to\infty} \gamma u_k = \lim_{k\to\infty} \gamma' u_k = \gamma' u$$

である．よって一意性が示せた． □

定義 8.129 (滑らかでコンパクトな境界を持つ開集合上の 1 階 Sobolev 空間のトレース作用素)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を滑らかでコンパクトな境界 $\partial\Omega$ を持つ開集合とする．このとき定理 8.128 より有界線型作用素

$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$$

で，任意の $u \in C(\overline{\Omega})|_\Omega \cap H^1(\Omega)$ に対し，

$$\gamma u = u|_{\partial\Omega}$$

を満たすものが唯一つ存在する．γ を $H^1(\Omega)$ のトレース作用素と言う．

定理 8.130 (トレース作用素の基本性質)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を滑らかでコンパクトな境界 $\partial\Omega$ を持つ開集合とし，$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$ をトレース作用素 (8.128) とする．このとき任意の $u \in H^1(\Omega)$ に対し次は互いに同値である．

(1) $u \in H_0^1(\Omega)$.
(2) $\gamma u = 0$.
(3) u の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張 (定義 8.30) $\tilde{u}$ が $H^1(\mathbb{R}^N)$ に属する．

証明. (1) ⇒ (2) を示す．(1) が成り立つならば $D(\Omega)$ の列 $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{k\to\infty}\|u_k - u\|_{2,1} = 0$ なるものが取れる．よって，

$$\gamma u = \lim_{k\to\infty} \gamma u_k = \lim_{k\to\infty} u_k|_{\partial\Omega} = 0$$

であるから (2) が成り立つ．
(2) ⇒ (1) を示す．(2) が成り立つとする．定理 8.128 の証明における記号を用いる．任意の $i \in \{1, \cdots, \ell\}$ を取る．系 8.123 より $D(\mathbb{R}^N)|_\Omega$ の列 $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{k\to\infty}\|u_k - u\|_{2,1} = 0$ なるものが取れる．(8.143) より，

$$\gamma_i u = \lim_{k\to\infty} \gamma_i u_k = \lim_{k\to\infty} (h_i u_k)|_{\partial\Omega} = h_i|_{\partial\Omega} \lim_{k\to\infty} \gamma u_k = h_i|_{\partial\Omega}\gamma u = 0$$

であるから，

$$\Gamma\left(\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}\right) \circ \Theta_i = 0$$

である．$\Theta_i : U_i \cap \partial\Omega \to (-1,1)^{N-1}$ は $\partial\Omega$ の局所座標であるから，面積測度 $\mu_{\partial\Omega}$ の定義 6.85 より，

$$\Gamma\left(\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}\right)|_{(-1,1)^{N-1}} = 0 \tag{8.144}$$

である．ここで (8.142) より，

$$\operatorname{supp}\left(\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}\right) = \operatorname{supp}((h_i u) \circ \Psi_i^{-1}) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)^{N-1} \times (0, \varepsilon) \tag{8.145}$$

であるから，

$$\operatorname{supp}\left(\Gamma\left(\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}\right)\right) \subseteq (-\varepsilon,\varepsilon)^{N-1} \subseteq (-1,1)^{N-1}$$

である．よって (8.144) より，

$$\Gamma\left(\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}\right) = 0$$

である. 定理 8.127 より,

$$\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}} \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

であるから, 定理 8.113 の (2) より[*126],

$$(h_i u) \circ \Psi_i^{-1} \in H_0^1((-1,1)^{N-1} \times (0,1))$$

が成り立ち, Sobolev 空間の変数変換 (定理 8.111) より,

$$(h_i u)|_{U_i \cap \Omega} \in H_0^1(U_i \cap \Omega)$$

が成り立つ. そして $(h_i u)|_{U_i \cap \Omega} \in H_0^1(U_i \cap \Omega)$ の Ω 上への 0 拡張は $h_i u$ であるから, 定理 8.113 の (1) より,

$$h_i u \in H_0^1(\Omega) \tag{8.146}$$

が成り立つ. 今,

$$h_0 := 1 - \sum_{i=1}^{\ell} h_i \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$$

とおく (h_0 は全ての偏導関数が有界である) と, (8.139) より $\mathrm{supp}(h_0 u) \subseteq \Omega \backslash D \subseteq \mathbb{R}^N \backslash D$ であり, $\partial\Omega$ は開集合 D に含まれるコンパクト集合であるから,

$$d(\mathrm{supp}(h_0 u), \partial\Omega) \geqslant d(\mathbb{R}^N \backslash D, \partial\Omega) > 0$$

である. よって補題 8.120 より,

$$d(\mathrm{supp}(h_0 u), \mathbb{R}^N \backslash \Omega) = d(\mathrm{supp}(h_0 u), \partial\Omega) > 0$$

であるから, 定理 8.113 の (2) より $h_0 u \in H_0^1(\Omega)$ が成り立つ. ゆえに (8.146) と合わせて,

$$u = h_0 u + \sum_{i=1}^{\ell} h_i u \in H_0^1(\Omega)$$

を得る. これより (1) が成り立つ.

(1) $\Rightarrow$ (3) は定理 8.113 の (1) による.

(3) $\Rightarrow$ (2) を示す. (3) が成り立つとする. 定理 8.128 の証明における記号を用いる. 任意の $i \in \{1, \cdots, \ell\}$ を取る. Sobolev 空間の変数変換 (定理 8.111) より $(h_i \tilde{u}) \circ \Phi_i^{-1} \in H^1((-1,1)^N)$ であり, (8.139) より,

$$\mathrm{supp}((h_i \tilde{u}) \circ \Phi_i^{-1}) \subseteq \mathrm{supp}(h_i \circ \Phi_i^{-1}) = \Phi_i(\mathrm{supp}(h_i)) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)^N$$

である. よって定理 8.113 の (2) より $(h_i \tilde{u}) \circ \Phi_i^{-1}$ の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張は $H^1(\mathbb{R}^N)$ に属する. ここで $(h_i \tilde{u}) \circ \Phi_i^{-1}$ の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張は $\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}} \in H^1(\mathbb{R}_+^N)$ の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張であるから, $\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}} \in H^1(\mathbb{R}_+^N)$ の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張は $H^1(\mathbb{R}^N)$ に属するので, 定理 8.126 より,

$$\Gamma\left(\widetilde{(h_i u) \circ \Psi_i^{-1}}\right) = 0$$

である. よって $\gamma_i u = 0$ だから,

$$\gamma u = \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i u = 0$$

である. よって (2) が成り立つ. □

[*126] (8.145) と $H^1(\mathbb{R}^N) = H_0^1(\mathbb{R}^N)$ (定理 8.110) であることに注意.

8.11 Sobolev の埋め込み定理, Rellich-Kondrachov の定理

定義 8.131 ($BC^k(\Omega)$)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $k \in \mathbb{Z}_+$ とする. $BC^k(\Omega) \subseteq C^k(\Omega)$ を k 階までの全ての偏導関数が有界な C^k 級関数全体のなす線型空間にノルム

$$\|\cdot\|_{\infty,k} : BC^k(\Omega) \to [0,\infty), \quad \|f\|_{\infty,k} := \max_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha f(x)| \quad (\forall f \in BC^k(\Omega)) \tag{8.147}$$

を入れた Banach 空間とする (次の命題 8.132 を参照).

命題 8.132. 定義 8.131 における線型空間 $BC^k(\Omega)$ はノルム (8.147) により Banach 空間である.

証明. $k=0$ の場合は $BC^0(\Omega)$ は Ω 上の有界連続関数空間に sup ノルムを入れた Banach 空間 $C_b(\Omega)$ (定義 5.158 を参照) であるから $k \geqslant 1$ とする. $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を $BC^k(\Omega)$ の Cauchy 列とする. このとき $|\alpha| \leqslant k$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $(\partial^\alpha f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は Banach 空間 $C_b(\Omega)$ の Cauchy 列であるから, ある $f^{(\alpha)} \in C_b(\Omega)$ に一様収束する. $f := f^{(0)} \in C_b(\Omega)$ とおく. 今, ある $m \in \{0,1,\cdots,k-1\}$ に対し,

$$f \in C^m(\Omega), \quad \partial^\alpha f = f^{(\alpha)} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant m) \tag{8.148}$$

が成り立つと仮定する. $|\alpha| = m$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ と任意の $j \in \{1,\cdots,N\}$ を取り,

$$\beta := \alpha + (0,\cdots,0,\overset{j\text{ 番目}}{1},0,\cdots,0) \in \mathbb{Z}_+^N$$

とおく. 任意の $x \in \Omega$ と絶対値が十分小さい任意の $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し微積分学の基本定理 5.206 より,

$$\frac{\partial^\alpha f_i(x+he_j) - \partial^\alpha f_i(x)}{h} = \int_0^1 \partial^\beta f_i(x+the_j)dt \quad (\forall i \in \mathbb{N})$$

であり, $(\partial^\alpha f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $\partial^\alpha f = f^{(\alpha)}$ に, $(\partial^\beta f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $f^{(\beta)}$ に一様収束するので,

$$\frac{\partial^\alpha f(x+he_j) - \partial^\alpha f(x)}{h} = \int_0^1 f^{(\beta)}(x+the_j)dt$$

が成り立つ. よって $h \to 0$ とすれば Lebesgue 優収束定理 5.59 より $\partial_j\partial^\alpha f(x) = f^{(\beta)}(x)$ を得る. これが任意の $x \in \Omega$ に対して成り立つので $\partial_j\partial^\alpha f = f^{(\beta)} \in C(\Omega)$ であり, α と j の任意性から,

$$f \in C^{n+1}(\Omega), \quad \partial^\beta f = f^{(\beta)} \quad (\forall \beta \in \mathbb{Z}_+^N : |\beta| = n+1)$$

が成り立つ. よって (8.148) は $m+1$ に対しても成り立つので帰納法より,

$$f \in C^k(\Omega), \quad \partial^\alpha f = f^{(\alpha)} \in C_b(\Omega) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant k)$$

が成り立つ. ゆえに $f \in BC^k(\Omega)$ であり, $|\alpha| \leqslant k$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $(\partial^\alpha f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $\partial^\alpha f = f^{(\alpha)}$ に一様収束するので,

$$\|f - f_i\|_{\infty,k} = \max_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f_i(x)| \to 0 \quad (i \to \infty)$$

が成り立つ. これより $BC^k(\Omega)$ は Banach 空間である. □

命題 8.133. $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ を Fourier 変換 (Plancherel の定理 8.71), $m \in \mathbb{Z}_+$ とする. このとき任意の $u \in H^m(\mathbb{R}^N)$ に対し $(1+|\mathrm{id}|^2)^{\frac{m}{2}}\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ である. そして $H^m(\mathbb{R}^N)$ のノルム

$$p_m : H^m(\mathbb{R}^N) \to [0,\infty), \quad p_m(u) := \|(1+|\mathrm{id}|^2)^{\frac{m}{2}}\mathcal{F}u\|_2 \quad (\forall u \in H^m(\mathbb{R}^N))$$

に対し正実数 C が存在し,

$$p_m(u) \leqslant C\|u\|_{2,m}, \quad \|u\|_{2,m} \leqslant p_m(u) \quad (\forall u \in H^m(\mathbb{R}^N))$$

が成り立つ.

証明. $C_\alpha \in \mathbb{N}\ (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant m)$ で,

$$(1+|x|^2)^m = \left(1 + \sum_{j=1}^N |x_j|^2\right)^m = \sum_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha |x^\alpha|^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N) \tag{8.149}$$

を満たすものが取れる. よって任意の $u \in H^m(\mathbb{R}^N)$ に対し命題 8.70 と Plancherel の定理 8.71 より,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} (1+|x|^2)^m |\mathcal{F}u(x)|^2 dx = \sum_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |x^\alpha \mathcal{F}u(x)|^2 dx \\
&= \sum_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}\partial^\alpha u(x)|^2 dx = \sum_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha \|\mathcal{F}\partial^\alpha u\|_2^2 \\
&= \sum_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha \|\partial^\alpha u\|_2^2 < \infty
\end{aligned}$$

となるので $(1+|\mathrm{id}|^2)^{\frac{m}{2}} \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ であり,

$$C := \max_{|\alpha|\leqslant m} \sqrt{C_\alpha}$$

とおくと,

$$p_m(u)^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (1+|x|^2)^m |\mathcal{F}u(x)|^2 dx = \sum_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha \|\partial^\alpha u\|_2^2 \leqslant C^2 \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha u\|_2^2 = C^2 \|u\|_{2,m}^2$$

となる. また $C_\alpha \geqslant 1\ (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+ : |\alpha| \leqslant m)$ より,

$$\|u\|_{2,m}^2 = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha u\|_2^2 \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha \|\partial^\alpha u\|_2^2 = p_m(u)^2$$

である. □

定理 8.134 (Sobolev の埋め込み定理)**.** $m, k, N \in \mathbb{N}$ が $m > k + \frac{N}{2}$ を満たすとする. このとき,

$$H^m(\mathbb{R}^N) \subseteq BC^k(\mathbb{R}^N)$$

であり, 埋め込み

$$H^m(\mathbb{R}^N) \ni u \mapsto u \in BC^k(\mathbb{R}^N)$$

は Hilbert 空間 $H^m(\mathbb{R}^N)$ から Banach 空間 $BC^k(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.131) への有界線型作用素である.

証明. 命題 8.133 における $H^m(\mathbb{R}^N)$ のノルム $p_m : H^m(\mathbb{R}^N) \to [0,\infty)$ を考える. 任意の $u \in D(\mathbb{R}^N)$ と $|\alpha| \leqslant k$ を満たす任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し, Fourier 変換の基本性質 (命題 8.58 の (3), (4) と定理 8.63) と Hölder の不等式 5.120 より,

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha u(x)| &= \left|\partial^\alpha \check{\hat{u}}(x)\right| = \left|(\widecheck{\mathrm{id}^\alpha \hat{u}})(x)\right| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} |y^\alpha \hat{u}(y)| dy \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y^\alpha|^2}{(1+|y|^2)^m} dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (1+|y|^2)^m |\hat{u}(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^{2|\alpha|}}{(1+|y|^2)^m} dy\right)^{\frac{1}{2}} p_m(u) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)
\end{aligned} \tag{8.150}$$

となる. ここで単位球面 $S_{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$ の面積測度 (定義 6.85) を $\mu : \mathcal{B}_{S_{N-1}} \to [0,\infty)$ とすると極座標変換 (6.99) より,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^{2|\alpha|}}{(1+|y|^2)^m} dy = \mu(S_{N-1}) \int_0^\infty r^{N-1} \frac{r^{2|\alpha|}}{(1+r^2)^m} dr \leqslant \mu(S_{N-1}) \left(1 + \int_1^\infty r^{N-1} \frac{r^{2k}}{(1+r^2)^m} dr\right) \\
&\leqslant \mu(S_{N-1}) \left(1 + \int_1^\infty r^{2k-2m+N-1} dr\right) = \mu(S_{N-1}) \left(1 + \frac{1}{2\left(m-k-\frac{N}{2}\right)}\right) < \infty
\end{aligned} \tag{8.151}$$

となるから,

$$C := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\left(\mu(S_{N-1})\left(1+\frac{1}{2\left(m-k-\frac{N}{2}\right)}\right)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

とおけば, (8.150), (8.151) より, 任意の $u \in D(\mathbb{R}^N)$ と $|\alpha| \leqslant k$ を満たす任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$|\partial^\alpha u(x)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|y|^{2|\alpha|}}{(1+|y|^2)^m}dy\right)^{\frac{1}{2}} p_m(u) \leqslant Cp_m(u) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

が成り立つ. よって $BC^k(\mathbb{R}^N)$ のノルム $\|\cdot\|_{\infty,k}$ (定義 8.131) に対し,

$$\|u\|_{\infty,k} = \max_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|\partial^\alpha u(x)| \leqslant Cp_m(u) \quad (\forall u \in D(\mathbb{R}^N)) \tag{8.152}$$

が成り立つ. 今, 任意の $u \in H^m(\mathbb{R}^N)$ を取る. $H^m(\mathbb{R}^N) = H_0^m(\mathbb{R}^N)$ (定理 8.110) より $D(\mathbb{R}^N)$ の列 $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{i\to\infty} p_m(u_i - u) = 0 \tag{8.153}$$

なるものが取れる. (8.152) より,

$$\|u_i - u_j\|_{\infty,k} \leqslant Cp_m(u_i - u_j) \quad (\forall i, j \in \mathbb{N})$$

であるから $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は Banach 空間 $BC^k(\mathbb{R}^N)$ の Cauchy 列である. よって $v \in BC^k(\mathbb{R}^N)$ で,

$$\lim_{i\to\infty}\|u_i - v\|_{\infty,k} = 0 \tag{8.154}$$

を満たすものが取れる. (8.153) は $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ のある部分列が Lebesgue 測度に関して a.e. で u に各点収束することを意味し (定理 5.127 の証明を参照), (8.154) は $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が v に一様収束することを意味する. よって $u = v \in BC^k(\mathbb{R}^N)$ であり,

$$\|u\|_{\infty,k} = \|v\|_{\infty,k} = \lim_{i\to\infty}\|u_i\|_{\infty,k} \leqslant \lim_{i\to\infty} Cp_m(u_i) = Cp_m(u)$$

が成り立つ. これより,

$$H^m(\mathbb{R}^N) \subseteq BC^k(\mathbb{R}^N), \quad \|u\|_{\infty,k} \leqslant Cp_m(u) \quad (\forall u \in H^m(\mathbb{R}^N))$$

が成り立つので命題 8.133 より求める結果を得る. □

定理 8.135 (Sobolev の埋め込み定理)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を滑らかでコンパクトな境界を持つ開集合とし, $m, k \in \mathbb{Z}_+$ が $m > k + \frac{N}{2}$ を満たすとする. このとき,

$$H^m(\Omega) \subseteq BC^k(\Omega)$$

であり, 埋め込み

$$H^m(\Omega) \ni u \mapsto u \in BC^k(\Omega)$$

は Hilbert 空間 $H^m(\Omega)$ から Banach 空間 $BC^k(\Omega)$ (定義 8.131) への有界線型作用素である.

証明. Ω は滑らかでコンパクトな境界を持つ開集合であるから拡張作用素

$$E : H^m(\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^N)$$

を持つ (定理 8.121). この作用素ノルムを $\|E\|$ とおく. 定理 8.134 より $H^m(\mathbb{R}^N) \subseteq BC^k(\mathbb{R}^N)$ であり, ある正実数 C が存在し,

$$\|u\|_{\infty,k} \leqslant C\|u\|_{2,m} \quad (\forall u \in H^m(\mathbb{R}^N))$$

が成り立つ. 任意の $u \in H^m(\Omega)$ に対し $Eu \in H^m(\mathbb{R}^N) \subseteq BC^k(\mathbb{R}^N)$ であるから,

$$u = Eu|_\Omega \in BC^k(\Omega), \quad \|u\|_{\infty,k} \leqslant \|Eu\|_{\infty,k} \leqslant C\|Eu\|_{2,m} \leqslant C\|E\|\|u\|_{2,m}$$

である. よって,

$$H^m(\Omega) \subseteq BC^k(\Omega), \quad \|u\|_{\infty,k} \leqslant C\|E\|\|u\|_{2,m} \quad (\forall u \in H^m(\Omega))$$

が成り立つので求める結果を得た. □

補題 8.136 (Ascoli-Arzela の定理). X をコンパクト Hausdorff 空間とし, sup ノルムによる Banach 空間 $C(X)$ の部分集合 $\mathcal{F}$ が次を満たすとする.

(1) $\sup_{f\in\mathcal{F}}\|f\| < \infty$.
(2) 任意の $x \in X$, 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し, x の近傍 U_x で次を満たすものが存在する.

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}|f(y)-f(x)| < \varepsilon \quad (\forall y \in U_x).$$

このとき $\mathcal{F}$ の閉包 $\overline{\mathcal{F}} \subseteq C(X)$ は (点列) コンパクトである.

証明. $C(X)$ は Banach 空間であるから閉集合 $\overline{\mathcal{F}} \subseteq C(X)$ はノルムによる距離で完備距離空間である. よって $\overline{\mathcal{F}}$ が (点列) コンパクトであることを示すには, 定理 1.118 より, $\overline{\mathcal{F}}$ が全有界 (定義 1.109) であることを示せばよい. そしてそのためには $\mathcal{F}$ が全有界であることを示せばよい. 今, 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ を取り固定する. 任意の $x \in X$ に対し, (2) より, x の開近傍 U_x で,

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}|f(y)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall y \in U_x) \tag{8.155}$$

を満たすものが取れる. X はコンパクトであるから有限個の $x_1,\cdots,x_N \in X$ が取れて,

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} U_{x_j} \tag{8.156}$$

となる.

$$\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{C}^N, \quad \Phi(f) := (f(x_1),\cdots,f(x_N)) \in \mathbb{C}^N$$

なる写像を定義すると, (1) より $\Phi(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{C}^N$ は有界集合なので閉包はコンパクトである. よって有限個の $f_1,\cdots,f_M \in \mathcal{F}$ が取れて,

$$\Phi(\mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{M}\left\{z \in \mathbb{C}^N : |z-\Phi(f_k)| < \frac{\varepsilon}{3}\right\} \tag{8.157}$$

となる. 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対し (8.157) より,

$$|\Phi(f)-\Phi(f_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

なる $k \in \{1,\cdots,M\}$ が取れる. そして任意の $x \in X$ に対し (8.156) より $x \in U_{x_j}$ なる $j \in \{1,\cdots,N\}$ が取れるので, (8.155) より,

$$|f(x)-f_k(x)| \leqslant |f(x)-f(x_j)| + |f(x_j)-f_k(x_j)| + |f_k(x_j)-f_k(x)| \leqslant \varepsilon$$

となる. よって $\|f-f_k\| \leqslant \varepsilon$ であるから,

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{k=1}^{M}\{f \in C(X) : \|f-f_k\| \leqslant \varepsilon\}$$

が成り立つ. これより $\mathcal{F}$ は全有界である. 従って $\overline{\mathcal{F}} \subseteq C(X)$ はコンパクトである. □

補題 8.137. Banach 空間 $C_b(\mathbb{R}^N)$[*127]の有界列 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ に対し, ある $C \in (0,\infty)$ が存在し,

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}|f_i(x)-f_i(y)| \leqslant C|x-y| \quad (\forall x,y \in \mathbb{R}^N)$$

が成り立つと仮定する. このとき $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ のある部分列はコンパクト一様収束 (定義 8.8) する.

証明. 任意の $r \in (0,\infty)$ に対し中心 $0 \in \mathbb{R}^N$, 半径 r の閉球を,

$$K(r) := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant r\}$$

[*127] $\mathbb{R}^N$ 上の有界連続関数全体のなす線型空間に sup ノルムを入れたもの (定義 5.158).

と表す．$K(1)$ はコンパクトだから Ascoli-Arzela の定理 8.136 より $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $(f_{k_1(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ は $K(1)$ 上一様収束する．そして $K(2)$ はコンパクトだから Ascoli-Arzela の定理 8.136 より $(f_{k_1(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $(f_{k_2(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ は $K(2)$ 上で一様収束する．さらに $K(3)$ はコンパクトだから Ascoli-Arzela の定理 8.136 より $(f_{k_2(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $(f_{k_3(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ は $K(3)$ 上一様収束する．この操作を続けていき, $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ の部分列の列

$$(f_{k_1(i)})_{i\in\mathbb{N}},\ (f_{k_2(i)})_{i\in\mathbb{N}},\ (f_{k_3(i)})_{i\in\mathbb{N}},\ \cdots,\ (f_{k_n(i)})_{i\in\mathbb{N}},\ (f_{k_{n+1}(i)})_{i\in\mathbb{N}},\ \cdots$$

で, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $(f_{k_{n+1}(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ が $(f_{k_n(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ の部分列であり, $(f_{k_n(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ が $K(n)$ 上で一様収束するようなものを構成する．このとき,

$$k_i(i) \leqslant k_{i+1}(i) < k_{i+1}(i+1)\quad (\forall i\in\mathbb{N})$$

であるから, $(f_{k_i(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ は $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ の部分列である．そして任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $(f_{k_i(i)})_{i\geqslant n}$ は $(f_{k_n(i)})_{i\geqslant n}$ の部分列であるから, $(f_{k_i(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ は $K(n)$ 上で一様収束する．よって $(f_{k_i(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ はコンパクト一様収束する． □

定理 8.138 (Rellich-Kondrachov の定理 1)**.** $n,m\in\mathbb{Z}_+, n<m$ とし, $H^m(\mathbb{R}^N)$ の列 $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が次を満たすとする．

(1) ある正実数 M に対し $\|u_i\|_{2,m}\leqslant M$ $(\forall i\in\mathbb{N})$.
(2) あるコンパクト集合 $K\subseteq\mathbb{R}^N$ に対し $\mathrm{supp}(u_i)\subseteq K$ $(\forall i\in\mathbb{N})$.

このとき $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ のある部分列は $H^n(\mathbb{R}^N)$ において収束する．

証明. Urysohn の補題 6.43 より $h\in D(\mathbb{R}^N)$ で $h(x)=1$ $(\forall x\in K)$ を満たすものが取れる．(2) より $u_i=hu_i$ $(\forall i\in\mathbb{N})$ であるから, 定理 8.90 の (2) より各 u_i の Fourier 変換を $\widehat{u}_i$ とおけば,

$$\widehat{u}_i=\widehat{hu_i}=\widehat{h}*\widehat{u}_i\in C^\infty(\mathbb{R}^N)\quad(\forall i\in\mathbb{N})$$

となる．よって任意の $i\in\mathbb{N}, j\in\{1,\cdots,N\}, x\in\mathbb{R}^N$ に対し,

$$\begin{aligned}\widehat{u}_i(x)&=\widehat{h}*\widehat{u}_i(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{h}(x-y)\widehat{u}_i(y)dy,\\ \partial_j\widehat{u}_i(x)&=(\partial_j\widehat{h})*\widehat{u}_i(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}\partial_j\widehat{h}(x-y)\widehat{u}_i(y)dy\end{aligned}\tag{8.158}$$

である．Plancherel の定理 8.71 と (1) より,

$$\|\widehat{u}_i\|_2=\|u_i\|_2\leqslant\|u_i\|_{2,m}\leqslant M\quad(\forall i\in\mathbb{N})$$

であるから, (8.158) と Hölder の不等式 5.120 より,

$$|\widehat{u}_i(x)|\leqslant\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\|\widehat{h}\|_2M,\quad\|\partial_j\widehat{u}_i(x)|\leqslant\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\|\partial_j\widehat{h}\|_2M\quad(\forall i\in\mathbb{N},\forall j\in\{1,\cdots,N\})$$

が成り立つ．これより,

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|\widehat{u}_i(x)|<\infty,\tag{8.159}$$

$$\sum_{j=1}^N\sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|\partial_j\widehat{u}_i(x)|<\infty\tag{8.160}$$

が成り立ち, (8.160) の左辺を C とおくと微積分学の基本定理 5.206 より,

$$|\widehat{u}_i(x)-\widehat{u}_i(y)|=\left|\sum_{j=1}^N(x_j-y_j)\int_0^1\partial_j\widehat{u}_i(y+t(x-y))dt\right|\leqslant NC|y-x|\quad(\forall i\in\mathbb{N},\forall x,y\in\mathbb{R}^N)\tag{8.161}$$

が成り立つ．(8.159), (8.161) と補題 8.137 より, $(\widehat{u}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $(\widehat{u}_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^N$ 上コンパクト一様収束する．今, $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ の部分列 $(u_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ が $H^n(\mathbb{R}^N)$ において収束することを示す．そのためには命題 8.133 より, $(u_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ が $H^n(\mathbb{R}^N)$ のノルム

$$p_n:H^n(\mathbb{R}^N)\ni v\mapsto\|(1+|\mathrm{id}|^2)^{\frac{n}{2}}\widehat{v}\|_2\in[0,\infty)$$

に関して Cauchy 列であることを示せばよい. 任意の $R \in (0,\infty)$ と $i, j \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\begin{aligned} p_n(u_{k(i)} - u_{k(j)})^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (1+|x|^2)^n |\hat{u}_{k(i)}(x) - \hat{u}_{k(j)}(x)|^2 dx \\ &= \int_{|x|\leqslant R} (1+|x|^2)^n |\hat{u}_{k(i)}(x) - \hat{u}_{k(j)}(x)|^2 dx + \int_{R<|x|} \frac{(1+|x|^2)^m}{(1+|x|^2)^{m-n}} |\hat{u}_{k(i)}(x) - \hat{u}_{k(j)}(x)|^2 dx \\ &\leqslant \sup_{|x|\leqslant R} |\hat{u}_{k(i)}(x) - \hat{u}_{k(j)}(x)|^2 \int_{|x|\leqslant R} (1+|x|^2)^n dx + \int_{R<|x|} \frac{(1+|x|^2)^m}{(1+R^2)^{m-n}} |\hat{u}_{k(i)}(x) - \hat{u}_{k(j)}(x)|^2 dx \end{aligned} \tag{8.162}$$

となる. ここで (1) と命題 8.133 より R, i, j によらない $M' \in (0,\infty)$ が存在し,

$$((8.162)\text{ の右辺の第 2 項}) \leqslant \frac{M'}{(1+R^2)^{m-n}}$$

が成り立つ. よって任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し, 十分大きい $R \in (0,\infty)$ を取れば,

$$p_n(u_{k(i)} - u_{k(j)})^2 \leqslant \sup_{|x|\leqslant R} |\hat{u}_{k(i)}(x) - \hat{u}_{k(j)}(x)|^2 \int_{|x|\leqslant R} (1+|x|^2)^n dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall i, j \in \mathbb{N}) \tag{8.163}$$

となり, $(\hat{u}_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ はコンパクト集合 $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant R\}$ 上で一様収束するので,

$$p_n(u_{k(i)} - u_{k(j)})^2 < \varepsilon \quad (\forall i, j \in \mathbb{N} : i, j \geqslant i_0)$$

を満たす $i_0 \in \mathbb{N}$ が取れる. これより $(u_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ は $H^n(\mathbb{R}^n)$ の Cauchy 列である. □

定理 8.139 (Rellich-Kondrachov の定理 2)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を滑らかな境界を持つ有界開集合とし, $n, m \in \mathbb{Z}_+$ が $n < m$ を満たすとする. このとき Hilbert 空間 $H^m(\Omega)$ の任意の有界列 $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $H^n(\Omega)$ において収束する部分列を持つ.

証明. Ω は有界であるから $\overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N$, $\partial\Omega = \overline{\Omega}\backslash\Omega$ はコンパクトである. $\partial\Omega$ のコンパクト性より $H^m(\Omega)$ は拡張作用素

$$E : H^m(\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^N)$$

を持ち (定理 8.121), $\overline{\Omega}$ のコンパクト性と Urysohn の補題 6.43 より $h \in D(\mathbb{R}^N)$ で $h(x) = 1$ $(\forall x \in \overline{\Omega})$ を満たすものが取れる. $H^m(\Omega)$ の任意の有界列 $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ に対し, E が有界線型作用素であることから $(Eu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は $H^m(\mathbb{R}^N)$ の有界列である. よって Leibniz ルール 8.28 より $(hEu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ も $H^m(\mathbb{R}^N)$ の有界列である. そして

$$\mathrm{supp}(hEu_i) \subseteq \mathrm{supp}(h) \quad (\forall i \in \mathbb{N})$$

であり $\mathrm{supp}(h)$ はコンパクトであるから, 定理 8.138 より $(hEu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $(hEu_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ は $H^n(\mathbb{R}^N)$ において収束する. ここで,

$$u_i = (hEu_i)|_\Omega \quad (\forall i \in \mathbb{N})$$

であるから $(u_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ は $H^n(\Omega)$ において収束する. □

9 Banach 環, C^*-環のスペクトル

この節で考える Banach 環, C^*-環は全て断ることなく $\mathbb{C}$ 上のものとする. また Banach 環が単位的である (乗法単位元を持つ) とき, その単位元のノルム[*128]は断ることなく 1 であるとする.

9.1 Banach 環のスペクトルに関する基本事項, 正則関数カルキュラス

定義 9.1 (単位的 Banach 環の可逆元全体)**.** $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とする. $A \in \mathcal{A}$ で乗法逆元 $A^{-1} \in \mathcal{A}$ を持つものを $\mathcal{A}$ の可逆元と言う. $\mathcal{A}$ の可逆元全体を $GL(\mathcal{A})$ と表す.

命題 9.2. $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とする. $A \in \mathcal{A}$ が $\|A\| < 1$ を満たすならば,

$$1 - A \in GL(\mathcal{A}), \quad (1 - A)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} A^n$$

が成り立つ.

証明.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \|A^n\| \leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|} < \infty$$

なので $\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} A^n$ は絶対収束 (定義 3.29) する.

$$(1 - A) \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} A^n = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} A^n \right)(1 - A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} A^n - \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} A^{n+1} = 1$$

であるから $\sum_{\in \mathbb{Z}_+} A^n = (1 - A)^{-1}$ である. □

命題 9.3 (単位的 Banach 環の可逆元全体は開集合)**.** $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とする. $\mathcal{A}$ の可逆元全体 $GL(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ の開集合である.

証明. 任意の $A \in GL(\mathcal{A})$ を取る. $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ なる任意の $B \in \mathcal{A}$ に対し,

$$\|A^{-1}(A - B)\| \leqslant \|A^{-1}\| \|A - B\| < 1$$

であるから命題 9.2 より $1 - A^{-1}(A - B) \in GL(\mathcal{A})$ である. よって

$$B = A - (A - B) = A\left(1 - A^{-1}(A - B)\right) \in GL(\mathcal{A})$$

である. これより A を中心とする半径 $\frac{1}{\|A^{-1}\|}$ の $\mathcal{A}$ の開球は $GL(\mathcal{A})$ に含まれるので $GL(\mathcal{A})$ は開集合である. □

命題 9.4. 単位的 Banach 環の可逆元全体 $GL(\mathcal{A})$ における全単射

$$GL(\mathcal{A}) \ni A \mapsto A^{-1} \in GL(\mathcal{A}) \tag{9.1}$$

は同相写像である.

証明. (9.1) の逆写像はそれ自身であるから (9.1) が連続であることを示せばよい. 任意の $A_0 \in GL(\mathcal{A})$ を取り A_0 における連続性を示す. $\|A - A_0\| < \frac{1}{2\|A_0^{-1}\|}$ を満たす任意の $A \in GL(\mathcal{A})$ を取る.

$$\|A^{-1} - A_0^{-1}\| \leqslant \|A_0^{-1}\| \|A_0 A^{-1} - 1\| \tag{9.2}$$

の右辺の評価を考える.

$$AA_0^{-1} = (A_0 - (A_0 - A))A_0^{-1} = 1 - (A_0 - A)A_0^{-1}$$

[*128] $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環, $1 \in \mathcal{A}$ を単位元とすると $\|1\| = \|1^2\| \leqslant \|1\|^2$ より $1 \leqslant \|1\|$ である.

であり，

$$\|(A_0 - A)A_0^{-1}\| \leqslant \|A_0 - A\|\|A_0^{-1}\| < \frac{1}{2} \tag{9.3}$$

であるから，命題 9.2 より，

$$A_0A^{-1} = (AA_0^{-1})^{-1} = (1 - (A_0 - A)A_0^{-1})^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} ((A_0 - A)A_0^{-1})^n$$

である．よって，

$$A_0A^{-1} - 1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} ((A_0 - A)A_0^{-1})^n$$

であるから (9.3) より，

$$\begin{aligned}\|A_0A^{-1} - 1\| &\leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \|(A_0 - A)A_0^{-1}\|^n = \frac{\|(A_0 - A)A_0^{-1}\|}{1 - \|(A_0 - A)A_0^{-1}\|} \\ &\leqslant 2\|(A_0 - A)A_0^{-1}\| \leqslant 2\|A_0^{-1}\|\|A_0 - A\|\end{aligned}$$

である．よって (9.2) より，

$$\|A^{-1} - A_0^{-1}\| \leqslant \|A_0^{-1}\|\|A_0A^{-1} - 1\| \leqslant 2\|A_0^{-1}\|^2\|A_0 - A\| \to 0 \quad (A \to A_0)$$

となるので (9.1) は A_0 において連続である． □

定義 9.5 (単位的 Banach 環の元のスペクトル, レゾルベント集合)**.** $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とする．任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し，

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \notin GL(\mathcal{A})\}$$

を A のスペクトルと言う．また，

$$\rho(A) := \mathbb{C} \backslash \sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \in GL(\mathcal{A})\}$$

を A のレゾルベント集合と言う．

命題 9.6 (レゾルベント集合は $\mathbb{C}$ の開集合)**.** $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とする．任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し A のレゾルベント集合 $\rho(A)$ は $\mathbb{C}$ の開集合である．

証明. $\rho(A)$ は連続写像

$$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda - A \in \mathcal{A}$$

による $GL(\mathcal{A})$ の逆像であり，$GL(\mathcal{A})$ は命題 9.3 より $\mathcal{A}$ の開集合であるから $\rho(A)$ は $\mathbb{C}$ の開集合である． □

命題 9.7 (レゾルベント等式)**.** $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とする．任意の $\lambda_0, \lambda \in \rho(A)$ に対し，

$$(\lambda - A)^{-1} - (\lambda_0 - A)^{-1} = (\lambda_0 - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\lambda_0 - A)^{-1}$$

が成り立つ．そして，

$$\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{A} \tag{9.4}$$

は Banach 空間 $\mathcal{A}$ 値正則関数である．

証明. 任意の $\lambda_0, \lambda \in \rho(A)$ に対し，

$$\begin{aligned}(\lambda - A)^{-1} - (\lambda_0 - A)^{-1} &= (\lambda - A)^{-1}((\lambda_0 - A) - (\lambda - A))(\lambda_0 - A)^{-1} \\ &= (\lambda_0 - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\lambda_0 - A)^{-1}\end{aligned}$$

である．そして任意の $\lambda_0 \in \rho(A)$ に対し命題 9.4 より

$$\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1}(\lambda_0 - A)^{-1} \in \mathcal{A}$$

は連続であるから (9.4) は各点で複素微分可能 (定義 4.20) であり,

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda - A)^{-1} = -(\lambda - A)^{-2}$$

である. よって (9.4) は Banach 空間 $\mathcal{A}$ 値正則関数である. □

命題 9.8 (単位的 Banach 環の元のスペクトルは非空)**.** $\mathcal{A} \neq \{0\}$ を単位的 Banach 環とする. このとき任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $\sigma(A) \neq \varnothing$ が成り立つ.

証明. ある $A \in \mathcal{A}$ に対し $\sigma(A) = \varnothing$ であると仮定する. このとき $\rho(A) = \mathbb{C}$ であり, 命題 9.7 より,

$$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{A} \tag{9.5}$$

は Banach 空間 $\mathcal{A}$ 値整関数である. また命題 9.4 より,

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| = |\lambda|^{-1}\|(1 - \lambda^{-1}A)^{-1}\| \to 0 \quad (|\lambda| \to \infty) \tag{9.6}$$

であるから (9.5) は無限遠で消える連続関数なので有界である. ゆえに (9.5) は有界な整関数だから, Liouville の定理 7.38 と (9.6) より, (9.5) は恒等的に 0 と言うことになる. しかし可逆元は 0 ではない[*129]ので矛盾する. よって任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $\sigma(A) \neq \varnothing$ である. □

定義 9.9 (スペクトル半径)**.** $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とする. 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し,

$$\mathrm{spr}(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

を A のスペクトル半径と言う.

命題 9.10 (スペクトル半径はノルム以下)**.** $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とする. 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し,

$$\mathrm{spr}(A) \leqslant \|A\|$$

が成り立つ.

証明. 任意の $A \in \mathcal{A}$ を取る. $\|A\| < |\lambda|$ を満たす任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し $\|\lambda^{-1}A\| < 1$ であるから, 命題 9.2 より,

$$\lambda - A = \lambda(1 - \lambda^{-1}A) \in GL(\mathcal{A})$$

である. よって $\lambda \notin \sigma(A)$ であるから,

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|A\|\}$$

である. これより $\mathrm{spr}(A) \leqslant \|A\|$ が成り立つ. □

系 9.11. $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とする. 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}$ は空でないコンパクト集合である.

証明. 命題 9.8 より $\sigma(A) \neq \varnothing$ であり, 命題 9.6 と命題 9.10 より $\sigma(A)$ は $\mathbb{C}$ の有界閉集合であるのでコンパクトである. □

補題 9.12. $\mathcal{S}$ を $\mathbb{C}$ の長さが正の線分 (定義 7.2) からなる有限集合とし, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し z を始点とする $\mathcal{S}$ の元の数と z を終点とする $\mathcal{S}$ の元の数が一致するとする. このとき $\mathcal{S}$ に属する全ての線分の和はサイクル (閉路の和 (定義 6.140)) である.

証明. 今, 互いに異なる $c_1, \cdots, c_m \in \mathcal{S}$ で, 各 $j \in \{1, \cdots, m-1\}$ に対し c_j の終点と c_{j+1} の始点が一致するようなものが取れているとする. もし c_m の終点が c_1 の始点と一致しないならば, $\{c_1, \cdots, c_m\}$ の元のうち終点が c_m の終点と一致するものの数は, $\{c_1, \cdots, c_m\}$ の元のうち始点が c_m の終点と一致するものの数より 1 個多い. よって仮定より $c_{m+1} \in \mathcal{S} \backslash \{c_1, \cdots, c_m\}$ で始点が c_m の終点と一致するものが取れる. こうして互いに異なる $c_1, \cdots, c_{m+1} \in \mathcal{S}$ で, 各

[*129] 可逆元が 0 ならば単位元は 0 であり $\mathcal{A} = \{0\}$ である.

$j \in \{1, \cdots, m\}$ に対し c_j の終点と c_{j+1} の始点が一致するようなものができる. 同じことを繰り返せば, $\mathcal{S}$ が有限集合であることから, 最終的に互いに異なる $c_1, \cdots, c_m, c_{m+1}, \cdots, c_{m'} \in \mathcal{S}$ で各 $j \in \{1, \cdots, m'-1\}$ に対し c_j の終点と c_{j+1} の始点が一致し, $c_{m'}$ の終点と c_1 の始点が一致するものができる. よってこのとき,

$$c_1 + \cdots + c_{m'}$$

は閉路である. 今, この閉路を構成する互いに異なる $\mathcal{S}$ の元 $c_1, \cdots, c_{m'}$ を改めて $c_{1,1}, \cdots, c_{1,m(1)}$ とおき,

$$\mathcal{S}_1 := \mathcal{S} \backslash \{c_{1,1}, \cdots, c_{1,m(1)}\}$$

とおく. もし $\mathcal{S}_1 \neq \varnothing$ ならば, $c_{1,1} + \cdots + c_{1,m(1)}$ が閉路であることから, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し z を始点とする $\mathcal{S}_1$ の元の数と z を終点とする $\mathcal{S}_1$ の元の数は一致する. よって上と同様にして互いに異なる $c_{2,1}, \cdots, c_{2,m(2)} \in \mathcal{S}_1$ で $c_{2,1} + \cdots + c_{2,m(2)}$ が閉路となるようなものが取れる.

$$\mathcal{S}_2 := \mathcal{S}_1 \backslash \{c_{2,1}, \cdots, c_{2,m(2)}\}$$

とおく. もし $\mathcal{S}_2 \neq \varnothing$ ならば, 同様にして互いに異なる $c_{3,1}, \cdots, c_{3,m(3)} \in \mathcal{S}_3$ で $c_{3,1} + \cdots + c_{3,m(3)}$ が閉路となるものが取れる.

$$\mathcal{S}_3 := \mathcal{S}_2 \backslash \{c_{3,1}, \cdots, c_{3,m(3)}\}$$

とおく. 同様の操作を続ければ, $\mathcal{S}$ が有限集合であることから, 最終的に

$$\mathcal{S}_k = \mathcal{S}_{k-1} \backslash \{c_{k,1}, \cdots, c_{k,m(k)}\} = \varnothing$$

となる. このとき,

$$\mathcal{S} = \{c_{1,1}, \cdots, c_{1,m(1)}\} \cup \cdots \cup \{c_{k,1}, \cdots, c_{k,m(k)}\}$$

であり, $\mathcal{S}$ に属する全ての線分の和は k 個の閉路の和

$$(c_{1,1} + \cdots + c_{1,m(1)}) + \cdots + (c_{k,1} + \cdots + c_{k,m(k)})$$

である. □

定理 9.13. $K, V \subseteq \mathbb{C}$ をそれぞれコンパクト集合と開集合とし, $K \subseteq V$ であるとする. このとき $\mathbb{C}$ のサイクル c (定義 6.140) で次の条件を満たすものが存在する.

(1) c の跡 c^* (定義 6.136) は $V \backslash K$ に含まれる.
(2) 任意の $z \in \mathbb{C} \backslash c^*$ に対し c の z における回転数 $\mathrm{Ind}_c(z)$ は 0 か 1 である.
(3) 任意の $z \in K$ に対し $\mathrm{Ind}_c(z) = 1$ である.
(4) 任意の $z \in \mathbb{C} \backslash V$ に対し $\mathrm{Ind}_c(z) = 0$ である.

証明. 命題 8.6 の (4) より十分小さい $\delta \in (0, \infty)$ を取れば,

$$d(K, \ \mathbb{C} \backslash V) \geqslant 2\delta > 0 \tag{9.7}$$

となる. そこで複素平面 $\mathbb{C}$ において各 $n \in \mathbb{N}$ に対し実軸からの距離が n の直線と虚軸からの距離が n の直線を引く. こうして複素平面に間隔 δ の格子を作る. 今, その格子がなす 1 辺の長さが δ の正方形 (辺と内部) のうち, K と交わるものを全て取り, それらを $Q_1, \cdots, Q_m$ とする. このとき各 Q_j の直径は 2δ より小さいので (9.7) より,

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} Q_j \subseteq V \tag{9.8}$$

が成り立つ. 今, 各 Q_j に対し 4 つの線分 (定義 7.2) $c_{j,1}, c_{j,2}, c_{j,3}, c_{j,4}$ で, その跡がそれぞれ Q_j の辺であり,

$$c_j := c_{j,1} + c_{j,2} + c_{j,3} + c_{j,4}$$

が Q_j の周を反時計周りに周る閉路であるようなものを取る．このとき $\mathbb{C}$ の線分からなる有限集合

$$\widetilde{\mathcal{S}} := \{c_{j,k} : j \in \{1, \cdots, m\}, k \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

は明らかに補題 9.12 の仮定を満たす．よって $\widetilde{\mathcal{S}}$ の元で跡が K と交わるものを全て除いたものを $\mathcal{S}$ とおくと $\mathcal{S}$ も補題 9.12 の仮定を満たす．なぜなら $\widetilde{\mathcal{S}}$ の元で跡が K と交わるものに対し, それと跡が等しく向きが逆の $\widetilde{\mathcal{S}}$ の元が存在するからである．そこで $\mathcal{S}$ の全ての元の和からなるサイクルを c とおき, $\widetilde{\mathcal{S}}$ の全ての元の和からなるサイクルを,

$$\widetilde{c} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{4} c_{j,k} = \sum_{j=1}^{m} c_j$$

とおく．各 $j \in \{1, \cdots, m\}$ に対し命題 7.10 と Cauchy の積分定理 7.28 より,

$$\mathrm{Ind}_{c_j}(z) = \begin{cases} 0 & (z \in \mathbb{C} \backslash Q_j) \\ 1 & (z \in Q_j^\circ) \end{cases}$$

であるから, 任意の $z \in \mathbb{C} \backslash \widetilde{c}^* = \left(\mathbb{C} \backslash \bigcup_{j=1}^m Q_j\right) \cup \bigcup_{j=1}^m Q_j^\circ$ に対し,

$$\mathrm{Ind}_c(z) = \mathrm{Ind}_{\widetilde{c}}(z) = \begin{cases} 0 & \left(z \in \mathbb{C} \backslash \bigcup_{j=1}^m Q_j\right) \\ 1 & \left(z \in \bigcup_{j=1}^m Q_j^\circ\right) \end{cases} \tag{9.9}$$

である．また任意の $z \in \widetilde{c}^* \backslash c^*$ に対し, ある $j \in \{1, \cdots, m\}$ が存在し $z \in \partial Q_j$ であり, z に収束する Q_j° の点列 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を取れば, 回転数の連続性 (命題 7.7) より,

$$\mathrm{Ind}_c(z) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{Ind}_c(z_n) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{Ind}_{\widetilde{c}}(z_n) = 1$$

である．よって,

$$\mathrm{Ind}_c(z) = 1 \quad (\forall z \in \widetilde{c}^* \backslash c^*) \tag{9.10}$$

である．(9.9), (9.10) より任意の $z \in \mathbb{C} \backslash c^* = \mathbb{C} \backslash \widetilde{c}^* \cup \widetilde{c}^* \backslash c^*$ に対し $\mathrm{Ind}_c(z)$ は 0 か 1 なので (2) が成り立つ．任意の $z \in K$ を取る．(9.8) より $z \in Q_j$ なる $j \in \{1, \cdots, m\}$ が取れる．もし $z \in \partial Q_j$ ならば $z \in \widetilde{c}^* \backslash c^*$ であるから (9.10) より $\mathrm{Ind}_c(z) = 1$ であり, もし $z \in Q_j^\circ$ ならば (9.9) より $\mathrm{Ind}_c(z) = \mathrm{Ind}_{\widetilde{c}}(z) = 1$ である．よって (3) が成り立つ．任意の $z \in \mathbb{C} \backslash V$ に対し, (9.8) より $z \in \mathbb{C} \backslash \bigcup_{j=1}^m Q_j$ であるから, (9.9) より $\mathrm{Ind}_c(z) = \mathrm{Ind}_{\widetilde{c}}(z) = 0$ である．よって (4) が成り立つ． □

定義 9.14. $K, V \subseteq \mathbb{C}$ をそれぞれコンパクト集合と開集合とし, $K \subseteq V$ であるとする．$\mathbb{C}$ のサイクル c が定理 9.13 の条件 (1) ∼ (4) を満たすことを,

$$K \preceq c \preceq V$$

と表すこととする．

定義 9.15 ($\mathcal{H}(K)$)**.** $K \subseteq \mathbb{C}$ を空でないコンパクト集合とする．K を含む $\mathbb{C}$ の開集合上で定義された正則関数全体を $\mathcal{H}(K)$ と表す．そして任意の $f \in \mathcal{H}(K)$ に対し f の定義域を $D(f)$ (K を含む開集合) と表す．任意の $f, g \in \mathcal{H}(K)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し, $f + g, \alpha f, fg \in \mathcal{H}(K)$ を,

$$\begin{aligned} f + g &: D(f + g) := D(f) \cap D(g) \ni z \mapsto f(z) + g(z) \in \mathbb{C}, \\ \alpha f &: D(\alpha f) = D(f) \ni z \mapsto \alpha f(z) \in \mathbb{C}, \\ fg &: D(fg) = D(f) \cap D(g) \ni z \mapsto f(z)g(z) \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

と定義する．

定義 9.16 ($H(K)$)**.** $K \subseteq \mathbb{C}$ を空でないコンパクト集合とする．$f, g \in \mathcal{H}(K)$ (定義 9.15) に対し, K を含む開集合 $U \subseteq D(f) \cap D(g)$ で $f(z) = g(z)$ ($\forall z \in U$) を満たすものが存在するとき $f \sim g$ と表すこととする．このとき ∼ は明らかに $\mathcal{H}(K)$ における同値関係 (定義 2.21) である．そこでこの同値関係による商集合と商写像 (定義 2.24) を,

$$H(K) := \mathcal{H}(K)/\sim, \quad \mathcal{H}(K) \ni f \mapsto [f] \in H(K)$$

と表す. 任意の $[f],[g]\in H(K), \alpha\in\mathbb{C}$ に対し $[f]+[g], \alpha[f], [f][g]\in H(K)$ を,

$$[f]+[g]:=[f+g],\quad \alpha[f]:=[\alpha f],\quad [f][g]:=[fg]$$

として定義する (well-defined である). こうして $H(K)$ はこれらを加法, スカラー倍, 乗法として $\mathbb{C}$ 上の可換な多元環をなす.

定義 9.17 (正則関数カルキュラス)**.** $\mathcal{A}\neq\{0\}$ を単位的 Banach 環とし, 任意の $A\in\mathcal{A}$ を取り固定する. A のスペクトル $\sigma(A)$ は $\mathbb{C}$ の空でないコンパクト集合である (系 9.11). そこで $H(\sigma(A))$ (定義 9.16) を考え, 写像

$$H(\sigma(A))\ni f\mapsto [f](A)\in\mathcal{A} \tag{9.11}$$

を次のように定義する. すなわち, 任意の $[f]\in H(\sigma(A))$ に対し, $[f]$ の代表元 $f:D(f)\to\mathbb{C}$ と $\sigma(A)\preceq c\preceq D(f)$ を満たすサイクル c (定義 9.14, 定理 9.13) を取り, Banach 空間値正則関数 $D(f)\backslash\sigma(A)\ni\lambda\mapsto f(\lambda)(\lambda-A)^{-1}\in\mathcal{A}$ (命題 9.7) の複素線積分 (7.35) によって,

$$[f](A):=\frac{1}{2\pi i}\int_c f(\lambda)(\lambda-A)^{-1}d\lambda\in\mathcal{A}$$

と定義する. このとき次の命題 9.19 により写像 (9.11) は well-defined である. (9.11) を $A\in\mathcal{A}$ における正則関数カルキュラスと言う.

注意 9.18. $[f]\in H(\sigma(A))$ に対し $[f](A)$ を $f(A)$ とも表す.

命題 9.19. 定義 9.17 における写像 (9.11) は well-defined である.

証明. 任意の $[f]\in H(\sigma(A))$ に対し $[f]$ の任意の代表元 $f_1,f_2\in\mathcal{H}(\sigma(A))$ と $\sigma(A)\preceq c_1\preceq D(f_1), \sigma(A)\preceq c_2\preceq D(f_2)$ を満たす任意のサイクル c_1,c_2 を取る. このとき,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} f_1(\lambda)(\lambda-A)^{-1}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} f_2(\lambda)(\lambda-A)^{-1}d\lambda \tag{9.12}$$

が成り立つことを示せばよい. $f_1\sim f_2$ (定義 9.16) なので $\sigma(A)\subseteq U\subseteq D(f_1)\cap D(f_2)$ なる開集合 U で $f_1(z)=f_2(z)$ $(\forall z\in U)$ を満たすものが取れる. そこで $\sigma(A)\preceq c\preceq U$ を満たすサイクル c を取る. このとき各 $j\in\{1,2\}$ に対しサイクル c_j-c は跡が $D(f_j)\backslash\sigma(A)$ に含まれ,

$$\mathrm{Ind}_{c_j-c}(z)=\mathrm{Ind}_{c_j}(z)-\mathrm{Ind}_c(z)=0\quad (j=1,2,\ \forall z\in\mathbb{C}:z\notin D(f_j)\backslash\sigma(A)) \tag{9.13}$$

である. そして $D(f_j)\backslash\sigma(A)\ni\lambda\mapsto f_j(\lambda)(\lambda-A)^{-1}\in\mathcal{A}$ は Banach 空間値正則関数であるから, (9.13) と Cauchy の積分定理 7.38 より,

$$0=\int_{c_j-c} f_j(\lambda)(\lambda-A)^{-1}d\lambda=\int_{c_j} f_j(\lambda)(\lambda-A)^{-1}d\lambda-\int_c f_j(\lambda)(\lambda-A)^{-1}d\lambda\quad (j=1,2) \tag{9.14}$$

が成り立つ. ここで c の跡は U に含まれ, U 上で f_1 と f_2 は一致するので,

$$\int_c f_1(\lambda)(\lambda-A)^{-1}d\lambda=\int_c f_2(\lambda)(\lambda-A)^{-1}d\lambda \tag{9.15}$$

である. よって (9.14), (9.15) より (9.12) が成り立つ. □

定理 9.20. $\mathcal{A}\neq\{0\}$ を単位的 Banach 環, $A\in\mathcal{A}$ とする. A における正則関数カルキュラス (定義 9.17)

$$H(\sigma(A))\ni [f]\mapsto [f](A)\in\mathcal{A} \tag{9.16}$$

について次が成り立つ.

(1) $1:\mathbb{C}\ni z\mapsto 1\in\mathbb{C}$ と $\mathrm{id}:\mathbb{C}\ni z\mapsto z\in\mathbb{C}$ に対し, $[1](A)=1$, $[\mathrm{id}](A)=A$.
(2) (9.16) は多元環準同型写像である.

(3) 任意の $[f] \in H(\sigma(A))$ に対し, $\sigma([f](A)) = f(\sigma(A))$.
(4) 任意の $[f] \in H(\sigma(A))$, $[g] \in H(\sigma([f](A)))$ に対し, $[g]([f](A)) = [g \circ f](A)$.
(5) $\sigma(A)$ を含む $\mathbb{C}$ の開集合 U 上で定義された正則関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $f : U \to \mathbb{C}$ にコンパクト一様収束 (定義 8.8) するならば f は正則関数であり, $\lim_{n\to\infty}[f_n](A) = [f](A)$ である.

証明. (1) 任意の $m \in \mathbb{Z}_+$ に対し $[\mathrm{id}^m](A) = A^m$ が成り立つことを示せばよい. $\|A\| < R$ を満たす正実数 R に対し命題 9.10 より $\sigma(A) \subseteq B(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ であるから, 命題 7.11, 定義 7.12 より,

$$[\mathrm{id}^m](A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R)} \lambda^m(\lambda - A)^{-1}d\lambda$$

である. ここで命題 9.2 より,

$$\lambda^m(\lambda - A)^{-1} = \lambda^{m-1}\left(1 - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{\lambda^m}{\lambda^{n+1}}A^n \quad (\forall \lambda \in \partial B(0,R))$$

であり, 右辺の級数は $\partial B(0,R)$ 上で一様収束するので,

$$[\mathrm{id}^m](A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R)} \lambda^m(\lambda - A)^{-1}d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R)}\frac{\lambda^m}{\lambda^{n+1}}d\lambda\right)A^n$$

である. ここで $n \neq m$ ならば $\mathbb{C}\backslash\{0\} \ni \lambda \mapsto \frac{\lambda^m}{\lambda^{n+1}} \in \mathbb{C}$ は原始関数を持つので補題 7.5 より,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R)}\frac{\lambda^m}{\lambda^{n+1}}d\lambda = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+ : n \neq m)$$

であり, 命題 7.11, 定義 7.12 より,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R)}\frac{\lambda^m}{\lambda^{m+1}}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R)}\frac{d\lambda}{\lambda} = 1$$

であるから,

$$[\mathrm{id}^m](A) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\int_{\partial B(0,R)}\frac{\lambda^m}{\lambda^{n+1}}d\lambda\right)A^n = A^m$$

である.

(2) (9.16) が線型写像であることは自明である. 任意の $[f_1], [f_2] \in H(\sigma(A))$ を取り,

$$[f_1 f_2](A) = [f_1](A)[f_2](A)$$

が成り立つことを示せばよい. $\sigma(A) \subseteq U \subseteq D(f_1) \cap D(f_2)$ なる開集合 U を取り, $\sigma(A) \preceq c_1 \preceq U$ なるサイクル c_1 を取ると,

$$[f_1](A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} f_1(\lambda)(\lambda - A)^{-1}d\lambda$$

である. 回転数の連続性 (命題 7.7) と命題 7.10 より $\{z \in \mathbb{C}\backslash c_1^* : \mathrm{Ind}_{c_1}(z) = 1\}$ は $\mathbb{C}\backslash c_1^*$ の有界閉集合であり c_1^* はコンパクトであるから,

$$c_1^* \cup \{z \in \mathbb{C}\backslash c_1^* : \mathrm{Ind}_{c_1}(z) = 1\}$$

はコンパクトである. また $\sigma(A) \preceq c_1 \preceq U$ より,

$$\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C}\backslash c_1^* : \mathrm{Ind}_{c_1}(z) = 1\}$$

であるから,

$$c_1^* \cup \{z \in \mathbb{C}\backslash c_1^* : \mathrm{Ind}_{c_1}(z) = 1\} \preceq c_2 \preceq U \tag{9.17}$$

なるサイクル c_2 を取れば $\sigma(A) \preceq c_2 \preceq U$ である. よって,

$$[f_2](A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} f_2(\lambda)(\lambda - A)^{-1}d\lambda$$

である. (9.17) より $c_1^* \cap c_2^* = \varnothing$ であり, 任意の $\lambda_1 \in c_1^*, \lambda_2 \in c_2^*$ に対し, 命題 9.7 より,

$$(\lambda_1 - A)^{-1}(\lambda_2 - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left((\lambda_1 - A)^{-1} - (\lambda_2 - A)^{-1}\right)$$

であるから,

$$\begin{aligned}
[f_1](A)[f_2](A) &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\left(\int_{c_1} f_1(\lambda_1)(\lambda_1 - A)^{-1}d\lambda_1\right)\left(\int_{c_2} f_2(\lambda_2)(\lambda_2 - A)^{-1}d\lambda_2\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{c_1}\left(\int_{c_2} f_1(\lambda_1)f_2(\lambda_2)(\lambda_1 - A)^{-1}(\lambda_2 - A)^{-1}d\lambda_2\right)d\lambda_1 \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f_2(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}d\lambda_2\right)f_1(\lambda_1)(\lambda_1 - A)^{-1}d\lambda_1 \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f_1(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}d\lambda_1\right)f_2(\lambda_2)(\lambda_2 - A)^{-1}d\lambda_2 \qquad (9.18)
\end{aligned}$$

となる. ただし 3 番目の等号における積分順序の入れ替えで補題 7.26 を用いた. ここで (9.17) より,

$$\mathrm{Ind}_{c_2}(\lambda_1) = 1 \ \ (\forall \lambda_1 \in c_1^*), \ \ \mathrm{Ind}_{c_1}(\lambda_2) = 0 \ \ (\forall \lambda_2 \in c_2^*)$$

であるから Cauchy の積分公式 7.27 より,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f_2(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}d\lambda_2 &= \mathrm{Ind}_{c_2}(\lambda_1)f_2(\lambda_1) = f_2(\lambda_1) \ \ (\forall \lambda_1 \in c_1^*), \\
\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f_1(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}d\lambda_1 &= \mathrm{Ind}_{c_1}(\lambda_2)f_1(\lambda_2) = 0 \ \ (\forall \lambda_2 \in c_2^*)
\end{aligned}$$

である. これを (9.18) の右辺に代入すれば,

$$[f_1](A)[f_2](A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} f_2(\lambda_1)f_1(\lambda_1)(\lambda_1 - A)^{-1}d\lambda_1 = [f_1 f_2](A)$$

を得る.

(3) $\lambda_0 \notin f(\sigma(A))$ ならば,

$$\sigma(A) \subseteq D := \{z \in \mathbb{C} : |\lambda_0 - f(z)| > 0\}$$

であり D は $\mathbb{C}$ の開集合である. そして,

$$g : D \ni z \mapsto \frac{1}{\lambda_0 - f(z)} \in \mathbb{C}$$

は正則関数なので (1), (2) より,

$$\begin{aligned}
(\lambda_0 - [f](A))[g](A) &= [(\lambda_0 - f)g](A) = 1, \\
[g](A)(\lambda_0 - [f](A)) &= [g(\lambda_0 - f)](A) = 1
\end{aligned}$$

である. よって $\lambda_0 - [f](A) \in GL(\mathcal{A})$ なので $\lambda_0 \notin \sigma([f](A))$ である. ゆえに $\sigma([f](A)) \subseteq f(\sigma(A))$ が成り立つ. 逆の包含関係を示す. 任意の $\mu_0 \in \sigma(A)$ を取る. 正則関数 $D(f) \ni z \mapsto f(\mu_0) - f(z) \in \mathbb{C}$ は $\mu_0 \in \sigma(A) \subseteq D(f)$ において 0 であるから, 定理 7.15 より, ある正則関数 $h : D(f) \to \mathbb{C}$ に対し,

$$f(\mu_0) - f(z) = (\mu_0 - z)h(z) \ \ (\forall z \in \mathbb{C})$$

となる. よって (1), (2) より,

$$f(\mu_0) - [f](A) = (\mu_0 - A)[h](A) = [h](A)(\mu_0 - A)$$

である. これよりもし $f(\mu_0) - [f](A) \in GL(\mathcal{A})$ ならば $\mu_0 - A \in GL(\mathcal{A})$ となり $\mu_0 \in \sigma(A)$ であることに矛盾する. よって $f(\mu_0) - [f](A) \notin GL(\mathcal{A})$ なので $f(\mu_0) \in \sigma([f](A))$ である. よって $f(\sigma(A)) \subseteq \sigma([f](A))$ である.

(4) (3) より $f(\sigma(A)) = \sigma([f](A)) \subseteq D(g)$ だから $\sigma(A) \subseteq f^{-1}(D(g))$ である. よって,

$$\sigma(A) \preceq c_1 \preceq f^{-1}(D(g))$$

なるサイクル c_1 が取れる. そしてこのとき,

$$f(\sigma(A)) \cup f(c_1^*) \subseteq D(g)$$

であり, 左辺はコンパクトであるから,

$$f(\sigma(A)) \cup f(c_1^*) \preceq c_2 \preceq D(g) \tag{9.19}$$

なるサイクル c_2 が取れる. (9.19) より $f(c_1^*) \cap c_2^* = \varnothing$ であるから, (2) より,

$$(w - [f](A))^{-1} = [(w-f)^{-1}](A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} (w - f(\lambda))^{-1}(\lambda - A)^{-1} d\lambda \quad (\forall w \in c_2^*) \tag{9.20}$$

であり, また, (9.19) より,

$$\mathrm{Ind}_{c_2}(f(\lambda)) = 1 \quad (\forall \lambda \in c_1^*) \tag{9.21}$$

である. そして $\sigma([f](A)) = f(\sigma(A)) \preceq c_2 \preceq D(g)$ であるから, (9.20), (9.21) と Cauchy の積分公式 7.27 より,

$$\begin{aligned}
[g]([f](A)) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} g(w)(w - [f](A))^{-1} dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} g(w)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} (w - f(\lambda))^{-1}(\lambda - A)^{-1} d\lambda\right) dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{g(w)}{w - f(\lambda)} dw\right)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{c_1} g(f(\lambda))(\lambda - A)^{-1} d\lambda = [g \circ f](A)
\end{aligned}$$

である (ただし 3 番目の等号における積分順序の入れ替えで補題 7.26 を用いた).

(5) $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant R\} \subseteq U$ なる任意の $a \in \mathbb{C}$ と $R \in (0, \infty)$ に対し, 命題 7.11 と Cauchy の積分公式 7.27 より,

$$f_n(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,R)} \frac{f_n(z)}{z - w} dz \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall w \in \mathbb{C} : |w - a| < R)$$

が成り立ち, コンパクト集合 $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| = R\} \subseteq U$ 上で $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に一様収束するので,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,R)} \frac{f(z)}{z - w} dz \quad (\forall w \in \mathbb{C} : |w - a| < R)$$

が成り立つ. よって命題 7.7 より $f : U \to \mathbb{C}$ は正則関数である. 今, $\sigma(A) \preceq c \preceq U$ なる任意のサイクル c を取る. c の跡 c^* はコンパクトだから $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は c^* 上で f に一様収束する. よって命題 7.36 より,

$$[f_n](A) = \frac{1}{2\pi i}\int_c f_n(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \to \frac{1}{2\pi i}\int_c f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda = [f](A) \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ.

□

注意 9.21 (スペクトル写像定理)**.** 定理 9.20 の (3) を正則関数カルキュラスに関するスペクトル写像定理と言う.

定理 9.22 (Gelfand の公式)**.** $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とする. このとき任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し A のスペクトル半径 (定義 9.9) $\mathrm{spr}(A)$ について,

$$\mathrm{spr}(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

が成り立つ.

証明. スペクトル写像定理 (定理 9.20 の (3)) より,

$$\lambda^n \in \sigma(A^n) \quad (\forall \lambda \in \sigma(A), \forall n \in \mathbb{N})$$

であるから, 命題 9.10 より,

$$|\lambda|^n \leqslant \mathrm{spr}(A^n) \leqslant \|A^n\| \quad (\forall \lambda \in \sigma(A), \forall n \in \mathbb{N}),$$

従って,

$$|\lambda| \leqslant \sqrt[n]{\|A^n\|} \quad (\forall \lambda \in \sigma(A), \forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ. よって,

$$\mathrm{spr}(A) \leqslant \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|A^n\|} \tag{9.22}$$

が成り立つ. 今, $\lambda \in \mathbb{C}$ が $0 < |\lambda| < \frac{1}{\mathrm{spr}(A)}$ [*130]を満たすならば $\mathrm{spr}(A) < \frac{1}{|\lambda|}$ より $\frac{1}{\lambda} \notin \sigma(A)$ であるから, $1 - \lambda A = \lambda\left(\frac{1}{\lambda} - A\right) \in GL(\mathcal{A})$ である. そこで,

$$f : \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \frac{1}{\mathrm{spr}(A)}\right\} \ni \lambda \mapsto (1 - \lambda A)^{-1} \in \mathcal{A}$$

を定義する. $|\lambda_1|, |\lambda_2| < \frac{1}{\mathrm{spr}(A)}$ なる任意の $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned} f(\lambda_1) - f(\lambda_2) &= (1 - \lambda_1 A)^{-1} \left((1 - \lambda_2 A) - (1 - \lambda_1 A)\right)(1 - \lambda_2 A)^{-1} \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - \lambda_1 A)^{-1} A (1 - \lambda_2 A)^{-1} \end{aligned}$$

であるから命題 9.4 より f は Banach 空間 $\mathcal{A}$ 値正則関数である. よって定理 7.37 より f は何回でも複素微分可能であり, f の n 階導関数 $f^{(n)}$ に対し,

$$f(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n \quad \left(\forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \frac{1}{\mathrm{spr}(A)}\right) \tag{9.23}$$

と表せる. 一方, $|\lambda| < \frac{1}{\|A\|} \leqslant \frac{1}{\mathrm{spr}(A)}$ を満たす任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し $\|\lambda A\| < 1$ であるから, 命題 9.2 より,

$$f(\lambda) = (1 - \lambda A)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \lambda^n A^n \quad \left(\forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \frac{1}{\|A\|} \leqslant \frac{1}{\mathrm{spr}(A)}\right) \tag{9.24}$$

である. よって (9.23), (9.24) より,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = A^n \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+)$$

であるから,

$$f(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \lambda^n A^n \quad \left(\forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \frac{1}{\mathrm{spr}(A)}\right)$$

が成り立つ. よって命題 4.27 より Banach 空間 $\mathcal{A}$ の列 $(A^n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ を係数とする冪級数の収束半径は $\frac{1}{\mathrm{spr}(A)}$ 以上であるから,

$$\frac{1}{\mathrm{spr}(A)} \leqslant \frac{1}{\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geqslant n} \sqrt[k]{\|A^k\|}},$$

従って,

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geqslant n} \sqrt[k]{\|A^k\|} \leqslant \mathrm{spr}(A)$$

が成り立つ. これと (9.22) より,

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geqslant n} \sqrt[k]{\|A^k\|} \leqslant \mathrm{spr}(A) \leqslant \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geqslant n} \sqrt[k]{\|A^k\|}$$

[*130] ただし $\frac{1}{0} = \infty$.

であるから,

$$\mathrm{spr}(A) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{\|A^k\|} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \sqrt[k]{\|A^k\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

が成り立つ. □

命題 9.23 (単位的 Banach 環上の指数関数の加法定理)**.** $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とし, 正則関数カルキュラス (定義 9.17) によって定義される $\exp(A)\in\mathcal{A}$ $(\forall A\in\mathcal{A})$ を考える. このとき,

(1) 任意の $A\in\mathcal{A}$ に対し $\exp(A)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{A^n}{n!}$ が成り立つ.
(2) $A,B\in\mathcal{A}$ が $AB=BA$ を満たすならば $\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)$ が成り立つ.

証明. (1)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{\|A^n\|}{n!} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{\|A\|^n}{n!} = \exp(\|A\|) < \infty$$

であるから $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{A^n}{n!}$ は絶対収束する. 正則関数の列 $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ を,

$$f_N : \mathbb{C}\ni z\mapsto \sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}\in\mathbb{C} \quad (\forall N\in\mathbb{N})$$

と定義すると, 定理 9.20 の (1), (2) より,

$$f_N(A) = \sum_{n=0}^{N}\frac{A^n}{n!} \quad (\forall N\in\mathbb{N})$$

であり $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ は,

$$\exp : \mathbb{C}\ni z\mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{z^n}{n!}\in\mathbb{C}$$

にコンパクト一様収束するから, 定理 9.20 の (5) より,

$$\exp(A) = \lim_{N\to\infty} f_N(A) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{A^n}{n!}$$

である.

(2) (1) より,

$$\exp(A+B) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(A+B)^n}{n!},\quad \exp(A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{A^n}{n!},\quad \exp(B) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{B^n}{n!}$$

である. $AB=BA$ より,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}A^kB^{n-k} \quad (\forall n\in\mathbb{N})$$

であるから,

$$\exp(A+B) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}\frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{2N}\sum_{p+q=n}\frac{A^p}{p!}\frac{B^q}{q!} \tag{9.25}$$

であり,

$$\exp(A)\exp(B) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{A^n}{n!}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{B^n}{n!} = \lim_{N\to\infty}\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N}\frac{A^p}{p!}\frac{B^q}{q!} \tag{9.26}$$

である．そして，

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=0}^{2N}\sum_{p+q=n}\frac{A^p}{p!}\frac{B^q}{q!}-\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N}\frac{A^p}{p!}\frac{B^q}{q!}\right\| &\leqslant \sum_{p=0}^{N}\frac{\|A\|^p}{p!}\sum_{q=N+1}^{2N}\frac{\|B\|^q}{q!}+\sum_{p=N+1}^{2N}\frac{\|A\|^p}{p!}\sum_{q=0}^{N}\frac{\|B\|^q}{q!} \\ &\leqslant \exp(\|A\|)\sum_{q=N+1}^{2N}\frac{\|B\|^q}{q!}+\exp(\|B\|)\sum_{p=N+1}^{2N}\frac{\|A\|^p}{p!} \\ &\to 0 \ \ (N\to\infty) \end{aligned} \tag{9.27}$$

であるから，(9.25), (9.26), (9.27) より，

$$\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)$$

である．

□

定義 9.24 (C^*-環の正規元, 自己共役元, ユニタリ元)**.** C^*-環 $\mathcal{A}$ の元 A が正規であるとは $A^*A=AA^*$ が成り立つことを言い，A が自己共役であるとは $A^*=A$ が成り立つことを言う．単位的 C^*-環 $\mathcal{A}$ の元 U がユニタリであるとは $U^*U=1=UU^*$ が成り立つことを言う．明らかに自己共役元, ユニタリ元は正規である．

定理 9.25 (C^*-環の正規元のスペクトル半径)**.** $\mathcal{A}$ を単位的 C^*-環とする．$A\in\mathcal{A}$ が正規ならば $\mathrm{spr}(A)=\|A\|$ が成り立つ．

証明. まず $A\in\mathcal{A}$ が正規であるとき，

$$\|A^{2^n}\|=\|A\|^{2^n}\quad(\forall n\in\mathbb{N}) \tag{9.28}$$

が成り立つことを示す．A が自己共役である場合は C^*-ノルム条件 (定義 3.7 の (3.4)) より，

$$\|A^{2^n}\|=\|A^{2^{n-1}}\|^2=\|A^{2^{n-2}}\|^{2^2}=\cdots=\|A\|^{2^n}\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

であるから成り立つ．$A\in\mathcal{A}$ が一般の正規元の場合, C^*-ノルム条件より，

$$\|A^{2^n}\|^2=\|(A^{2^n})^*A^{2^n}\|=\|(A^*)^{2^n}A^{2^n}\|\quad(\forall n\in\mathbb{N}) \tag{9.29}$$

である．ここで $A^*A=AA^*$ より，

$$(A^{2^n})^*A^{2^n}=(A^*A)^{2^n}\quad(\forall n\in\mathbb{N}) \tag{9.30}$$

であり，A^*A は自己共役であるから，

$$\|(A^*A)^{2^n}\|=\|A^*A\|^{2^n}=(\|A\|^2)^{2^n}=(\|A\|^{2^n})^2\quad(\forall n\in\mathbb{N}) \tag{9.31}$$

である．よって (9.29), (9.30), (9.31) より，

$$\|A^{2^n}\|^2=\|(A^*)^{2^n}A^{2^n}\|=\|(A^*A)^{2^n}\|=(\|A\|^{2^n})^2\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

であるから，(9.28) が成り立つ．よって Gelfand の公式 9.22 より，

$$\mathrm{spr}(A)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{\|A^{2^n}\|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{\|A\|^{2^n}}=\|A\|$$

である． □

定義 9.26 (円環群)**.**

$$\mathbb{T}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$$

とおく．これは $\mathbb{C}$ の乗法によって可換な乗法群をなす．$\mathbb{T}$ を円環群と言う．

定理 9.27 (C^*-環の自己共役元のスペクトルが $\mathbb{R}$ に含まれること)**.** $\mathcal{A}$ を単位的 C^*-環とする．このとき，

(1) $U \in \mathcal{A}$ がユニタリならば $\sigma(U) \subseteq \mathbb{T}$ が成り立つ.
(2) $A \in \mathcal{A}$ が自己共役ならば $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ が成り立つ.

証明. (1) まず C^*-ノルム条件 (3.4) より,

$$\|U\|^2 = \|U^*U\| = 1, \ \ \|U^*\|^2 = \|UU^*\| = 1$$

であることに注意する. 任意の $\lambda \in \sigma(U)$ に対し,

$$|\lambda| \leqslant \mathrm{spr}(U) = \|U\| = 1$$

であり,

$$\frac{1}{\lambda} - U^* = \frac{1}{\lambda}(1 - \lambda U^*) = \frac{1}{\lambda}U^*(U - \lambda) \notin GL(\mathcal{A})$$

[*131]より $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(U^*)$ だから,

$$\frac{1}{|\lambda|} \leqslant \mathrm{spr}(U^*) = \|U^*\| = 1$$

である. よって $|\lambda| = 1$ であるから $\mathrm{spr}(U) \subseteq \mathbb{T}$ である.

(2) $(iA)^* = -iA$ であるから命題 9.23 より,

$$\exp(iA)^* = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(iA)^n}{n!}\right)^* = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-iA)^n}{n!} = \exp(-iA)$$

であり, iA と $-iA$ は可換なので,

$$\begin{aligned}
&\exp(iA)^* \exp(iA) = \exp(-iA)\exp(iA) = 1,\\
&\exp(iA)\exp(iA)^* = \exp(iA)\exp(-iA) = 1
\end{aligned}$$

である. よって $\exp(iA)$ はユニタリであるから (1) より,

$$\sigma(\exp(iA)) \subseteq \mathbb{T} \tag{9.32}$$

である. ここでスペクトル写像定理 (定理 9.20 の (3)) より,

$$\{\exp(it) : t \in \sigma(A)\} = \sigma(\exp(iA)) \tag{9.33}$$

であるから, (9.32), (9.33) より,

$$|\exp(it)| = 1 \ \ (\forall t \in \sigma(A))$$

である. ゆえに $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ である.

□

9.2 Banach 環, C^*-環の単位化

定義 9.28 (多元環, $*$-環の単位化)**.** $\mathcal{A}$ を単位的ではない多元環とする. このとき,

$$\widetilde{\mathcal{A}} := \{(A, \alpha) : A \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

とおき, 任意の $(A, \alpha), (B, \beta) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ と任意の $s \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&(A, \alpha) + (B, \beta) := (A + B, \alpha + \beta),\\
&s(A, \alpha) := (sA, s\alpha),\\
&(A, \alpha)(B, \beta) := (AB + \alpha B + \beta A, \ \alpha\beta)
\end{aligned}$$

[*131] $U \in GL(\mathcal{A})$ より $\lambda \neq 0$ であることに注意.

とおけば, $\widetilde{\mathcal{A}}$ はこれらを加法, スカラー倍, 乗法として多元環をなし, 単位元 $(0,1) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ を持つ. また $\mathcal{A}$ が $*$-環である場合は, さらに任意の $(A,\alpha) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ に対し,

$$(A,\alpha)^* = (A^*, \overline{\alpha})$$

とおけば, $\widetilde{\mathcal{A}}$ はこれを $*$-演算として単位的 $*$-環となる. この単位的多元環 (単位的 $*$-環) $\widetilde{\mathcal{A}}$ を $\mathcal{A}$ の単位化と言う.

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto (A,0) \in \widetilde{\mathcal{A}}$$

は単射準同型写像であるから, しばしば $A \in \mathcal{A}$ と $(A,0) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ を同一視し, $\mathcal{A} \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}$ とみなす.

定義 9.29 (Banach 環, Banach $*$-環の単位化)**.** $\mathcal{A}$ を単位的ではない Banach 環 (resp. Banach $*$-環) とする. 多元環 (resp. $*$-環) としての $\mathcal{A}$ の単位化 $\widetilde{\mathcal{A}}$ (定義 9.28) に対し,

$$\|(A,\alpha)\| := \|A\| + |\alpha| \quad (\forall (A,\alpha) \in \widetilde{\mathcal{A}}) \tag{9.34}$$

とおけば, これは $\widetilde{\mathcal{A}}$ のノルムであり, このノルムにより $\widetilde{\mathcal{A}}$ は Banach 環 (resp. Banach $*$-環) となる (ℓ^1 直和 Banach 空間 (定義 5.153) を参照). そして,

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto (A,0) \in \widetilde{\mathcal{A}}$$

は等長準同型写像となる. そこでこのノルム (9.34) を入れた単位的 Banach 環 (resp. 単位的 Banach $*$-環) $\widetilde{\mathcal{A}}$ を, $\mathcal{A}$ の単位化 Banach 環 (resp. 単位化 Banach $*$-環) と言う. 以後, しばしば $A \in \mathcal{A}$ と $(A,0) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ を同一視し, $\mathcal{A} \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}$ とみなす.

定義 9.30 (単位的ではない Banach 環の元のスペクトル)**.** $\mathcal{A}$ を単位的ではない Banach 環とし, $\mathcal{A}$ の単位化 Banach 環 (定義 9.29) を $\widetilde{\mathcal{A}}$ とする. このとき任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し A のスペクトル $\sigma(A)$ を A を単位化 Banach 環 $\widetilde{\mathcal{A}}$ の元とみなした (つまり $A = (A,0) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ とした) 場合のスペクトルとして定義する.

定理 9.31 (単位化 C^*-環)**.** $\mathcal{A}$ を単位的ではない C^*-環とし, $\widetilde{\mathcal{A}}$ を $\mathcal{A}$ の単位化 $*$-環 (定義 9.28) とする. このとき任意の $(A,\alpha) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ に対し,

$$\|(A,\alpha)\| := \sup\{\|AB + \alpha B\| : B \in \mathcal{A}, \|B\| \leqslant 1\} \tag{9.35}$$

とおけば, これは $\widetilde{\mathcal{A}}$ 上のノルムであり, このノルムによって $\widetilde{\mathcal{A}}$ は単位的 C^*-環となる. そしてこのノルムに関して,

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto (A,0) \in \widetilde{\mathcal{A}} \tag{9.36}$$

は等長準同型写像である.

証明. 任意の $(A,\alpha) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ に対し,

$$\rho_{(A,\alpha)} : \mathcal{A} \ni B \mapsto AB + \alpha B \in \mathcal{A}$$

は有界線型作用素であり, その作用素ノルムは,

$$\|\rho_{(A,\alpha)}\| = \sup\{\|AB + \alpha B\| : B \in \mathcal{A}, \|B\| \leqslant 1\} = \|(A,\alpha)\| \tag{9.37}$$

である. また,

$$(\rho_{(A,\alpha)}B, 0) = (A,\alpha)(B,0) \quad (\forall (A,\alpha) \in \widetilde{\mathcal{A}}, \forall B \in \mathcal{A})$$

であることから,

$$\widetilde{\mathcal{A}} \ni (A,\alpha) \mapsto \rho_{(A,\alpha)} \in B(\mathcal{A})$$

は多元環準同型写像である. よって (9.37) より任意の $(A,\alpha), (A_1,\alpha_1), (A_2,\alpha_2) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ と $s \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\|(A_1,\alpha_1) + (A_2,\alpha_2)\| \leqslant \|(A_1,\alpha_1)\| + \|(A_2,\alpha_2)\|, \\
&\|s(A,\alpha)\| = |s|\|(A,\alpha)\|, \\
&\|(A_1,\alpha_1)(A_2,\alpha_2)\| \leqslant \|(A_1,\alpha_1)\|\|(A_2,\alpha_2)\|
\end{aligned}$$

が成り立つ. 今, (9.35) がノルムであることを示す. そのためには $\|(A,\alpha)\| = 0$ であるとして $(A,\alpha) = 0$ が成り立つことを示せばよい. このとき,

$$AB + \alpha B = 0 \quad (\forall B \in \mathcal{A}) \tag{9.38}$$

であり, 従って,

$$BA^* + \overline{\alpha}B = (AB^* + \alpha B^*)^* = 0 \quad (\forall B \in \mathcal{A}) \tag{9.39}$$

である. もし $\alpha \neq 0$ であるならば (9.38), (9.39) より,

$$B = \left(\frac{-1}{\alpha}A\right)B = B\left(\frac{-1}{\overline{\alpha}}A^*\right) \quad (\forall B \in \mathcal{A})$$

であるから $\frac{-1}{\alpha}A \in \mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ の単位元と言うことになり[*132], $\mathcal{A}$ が単位的ではないことに矛盾する. よって $\alpha = 0$ である. 従って (9.38) より,

$$AB = 0 \quad (\forall B \in \mathcal{A})$$

だから, C^*-ノルム条件 (3.4) より,

$$\|A\|^2 = \|AA^*\| = 0$$

である. よって $(A, \alpha) = 0$ であるから (9.35) は $\widetilde{\mathcal{A}}$ のノルムである. 次に (9.36) が等長であることを示す. 任意の $(A, \alpha) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ に対し,

$$\|(A, \alpha)\| = \sup\{\|AB + \alpha B\| : B \in \mathcal{A}, \|B\| \leqslant 1\} \leqslant \|A\| + |\alpha| \tag{9.40}$$

であるから, 特に,

$$\|(A, 0)\| \leqslant \|A\| \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

である. そして $\|A\| > 0$ のとき C^*-ノルム条件 (3.4) より,

$$\|A\| = \|AA^*\|\frac{1}{\|A\|} = \left\|A\left(\frac{A^*}{\|A\|}\right)\right\| \leqslant \|(A, 0)\|$$

であるから (9.36) は等長である. $\widetilde{\mathcal{A}}$ がノルム (9.35) により Banach 空間であることを示す. (9.36) が等長であることと $\mathcal{A}$ が Banach 空間であることから,

$$(\mathcal{A}, 0) := \{(A, 0) : A \in \mathcal{A}\} \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}$$

は $\widetilde{\mathcal{A}}$ の閉部分空間である. そこで商ノルム空間 $\widetilde{\mathcal{A}}/(\mathcal{A}, 0)$ (定義 3.9) を考え, 商写像を,

$$\pi : \widetilde{\mathcal{A}} \to \widetilde{\mathcal{A}}/(\mathcal{A}, 0)$$

とおく. $((A_n, \alpha_n))_{n\in\mathbb{N}}$ を $\widetilde{\mathcal{A}}$ の Cauchy 列とすると, π が有界線型作用素であることから,

$$(\pi(A_n, \alpha_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha_n\pi(0, 1))_{n\in\mathbb{N}}$$

も Cauchy 列であるので $\pi(0, 1) \neq 0$ より $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{C}$ の Cauchy 列である. そして,

$$(A_n, 0) = (A_n, \alpha_n) - (0, \alpha_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから, (9.36) の等長性より $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{A}$ の Cauchy 列である. よってある $A \in \mathcal{A}$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n - A\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty}|\alpha_n - \alpha| = 0$$

となるので, (9.40) より,

$$\|(A_n, \alpha_n) - (A, \alpha)\| \leqslant \|A_n - A\| + |\alpha_n - \alpha| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる. ゆえに $\widetilde{\mathcal{A}}$ はノルム (9.35) によって Banach 空間である. 後は $\widetilde{\mathcal{A}}$ のノルム (9.35) が C^*-ノルム条件を満たすことを示せばよい. 任意の $(A, \alpha) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ と $\|B\| \leqslant 1$ なる任意の $B \in \mathcal{A}$ に対し, (9.37) より,

$$\begin{aligned}\|AB + \alpha B\|^2 &= \|(AB + \alpha B)^*(AB + \alpha B)\| = \|B^*\rho_{(A^*, \overline{\alpha})}\rho_{(A,\alpha)}B\| \\ &\leqslant \|\rho_{(A,\alpha)^*}\rho_{(A,\alpha)}\| \leqslant \|\rho_{(A,\alpha)^*(A,\alpha)}\| \leqslant \|(A, \alpha)^*(A, \alpha)\|\end{aligned}$$

[*132] $\left(\frac{-1}{\alpha}A\right) = \left(\frac{-1}{\overline{\alpha}}A^*\right)\left(\frac{-1}{\alpha}A\right) = \left(\frac{-1}{\overline{\alpha}}A^*\right)$ に注意.

であるから,

$$\|(A,\alpha)\|^2 \leqslant \|(A,\alpha)^*(A,\alpha)\| \leqslant \|(A,\alpha)^*\|\|(A,\alpha)\| \quad (\forall (A,\alpha)\in\widetilde{\mathcal{A}}) \tag{9.41}$$

が成り立つ. これより特に,

$$\|(A,\alpha)\| \leqslant \|(A,\alpha)^*\| \quad (\forall (A,\alpha)\in\widetilde{\mathcal{A}})$$

であるから,

$$\|(A,\alpha)\| = \|(A,\alpha)^*\| \quad (\forall (A,\alpha)\in\widetilde{\mathcal{A}})$$

である. よって (9.41) より C^*-ノルム条件

$$\|(A,\alpha)\|^2 = \|(A,\alpha)^*(A,\alpha)\| \quad (\forall (A,\alpha)\in\widetilde{\mathcal{A}})$$

が成り立つ. □

定義 9.32 (単位化 C^*-環)**.** $\mathcal{A}$ を単位的ではない C^*-環とする. 定理 9.31 より $\mathcal{A}$ の単位化 $*$-環 $\widetilde{\mathcal{A}}$ は,

$$\|(A,\alpha)\| = \sup\{\|AB+\alpha B\| : B\in\mathcal{A}, \|B\|\leqslant 1\}$$

をノルムとして C^*-環をなし,

$$\mathcal{A}\ni A\mapsto (A,0)\in\widetilde{\mathcal{A}}$$

は等長準同型写像である. そこでこの C^*-環 $\widetilde{\mathcal{A}}$ を $\mathcal{A}$ の単位化 C^*-環と言う. 以後, しばしば $A\in\mathcal{A}$ と $(A,0)\in\widetilde{\mathcal{A}}$ を同一視し, $\mathcal{A}\subseteq\widetilde{\mathcal{A}}$ とみなす.

定義 9.33 (単位的ではない C^*-環の元のスペクトル)**.** $\mathcal{A}$ を単位的ではない C^*-環とし, $\mathcal{A}$ の単位化 C^*-環 (定義 9.32) を $\widetilde{\mathcal{A}}$ とする. このとき任意の $A\in\mathcal{A}$ に対し A のスペクトル $\sigma(A)$ を A を単位化 C^*-環 $\widetilde{\mathcal{A}}$ の元とみなした (つまり $A=(A,0)\in\widetilde{\mathcal{A}}$ とした) 場合のスペクトルとして定義する.

9.3 Gelfand 変換

定義 9.34 (可換 Banach 環の指標, 指標空間)**.** $\mathcal{A}$ を可換 Banach 環とする. $\gamma:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ が次を満たすとき γ を $\mathcal{A}$ の指標と言う.

(1) $\gamma(A)\neq 0$ なる $A\in\mathcal{A}$ が存在する.
(2) 任意の $A,B\in\mathcal{A}$, $\alpha\in\mathbb{C}$ に対し,

$$\gamma(A+B)=\gamma(A)+\gamma(B),\quad \gamma(\alpha A)=\alpha\gamma(A),\quad \gamma(AB)=\gamma(A)\gamma(B).$$

そして $\mathcal{A}$ の指標全体を $\widehat{\mathcal{A}}$ と表し, これを $\mathcal{A}$ の指標空間と言う.

定義 9.35 (極大イデアル)**.** $\mathcal{A}$ を可換な Banach 環とする. $\mathcal{A}$ のイデアル (定義 2.27) で $\mathcal{A}$ 自身ではないもののうち, 集合の包含関係による順序 (定義 1.3) に関して極大なものを $\mathcal{A}$ の極大イデアルと言う.

補題 9.36 (Gelfand-Mazur の定理)**.** $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とする. もし $\mathcal{A}\backslash\{0\}=GL(\mathcal{A})$ ならば $\mathcal{A}=\mathbb{C}1$ が成り立つ.

証明. 任意の $A\in\mathcal{A}$ を取る. 命題 9.8 より $\lambda\in\sigma(A)$ が存在する. スペクトルの定義より $\lambda-A\notin GL(\mathcal{A})$ なので仮定より $\lambda-A=0$ である. よって $A=\lambda 1\in\mathbb{C}1$ であるから $\mathcal{A}=\mathbb{C}1$ である. □

命題 9.37 (可換な単位的 Banach 環の指標と極大イデアルとスペクトルの元の対応)**.** $\mathcal{A}$ を単位的可換 Banach 環とする. このとき次が成り立つ.

(1) 任意の $A\in\mathcal{A}\backslash GL(\mathcal{A})$ に対し A を含む極大イデアル (定義 9.35) が存在する.
(2) $\mathcal{A}$ の任意の極大イデアル $\mathcal{I}$ に対し $\gamma\in\widehat{\mathcal{A}}$ で $\mathcal{I}=\mathrm{Ker}(\gamma)$ を満たすものが存在する.
(3) 任意の $\gamma\in\widehat{\mathcal{A}}$ に対し $\mathrm{Ker}(\gamma)$ は $\mathcal{A}$ の極大イデアルである.
(4) $\gamma_1,\gamma_2\in\widehat{\mathcal{A}}$ が $\mathrm{Ker}(\gamma_1)=\mathrm{Ker}(\gamma_2)$ を満たすならば $\gamma_1=\gamma_2$ である.

(5) 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $\sigma(A) = \{\gamma(A) : \gamma \in \widehat{\mathcal{A}}\}$ である.
(6) 任意の $\gamma \in \widehat{\mathcal{A}}$ に対し $\gamma \in \mathcal{A}^*$ [*133]であり $\|\gamma\| = 1$ である. そして $\widehat{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}^*$ は $\mathcal{A}^*$ の弱 $*$-位相 (定義 3.66) でコンパクトである.

証明. (1) 任意の $A \in \mathcal{A} \backslash GL(\mathcal{A})$ を取る. このとき $A\mathcal{A} = \{AB : B \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{A}$ は A を含む $\mathcal{A}$ のイデアルであり, また $A \notin GL(\mathcal{A})$ より $1 \notin A\mathcal{A}$ である. そこで $\mathcal{A}$ のイデアル $\mathcal{I}$ で, $A \in \mathcal{I}$ かつ $1 \notin \mathcal{I}$ なるもの全体に集合の包含関係による順序を入れたものを考えると, それは帰納的順序集合となるので, Zorn の補題 1.12 より極大元 $\mathcal{I}_{\mathrm{m}}$ が存在する. 極大性より $\mathcal{I}_{\mathrm{m}}$ を真に包含するような $\mathcal{A}$ のイデアルは 1 を含み, 1 を含む $\mathcal{A}$ のイデアルは $\mathcal{A}$ のみである. よって $\mathcal{I}_{\mathrm{m}}$ は A を含む極大イデアルである.

(2) $\mathcal{A}$ の任意の極大イデアル $\mathcal{I}$ を取る. まず $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ が閉であることを示す. $\mathcal{I}$ の閉包 $\overline{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{A}$ も $\mathcal{A}$ のイデアルなので $\mathcal{I}$ の極大性より $\overline{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$ か $\overline{\mathcal{I}} = \mathcal{A}$ である. もし $\overline{\mathcal{I}} = \mathcal{A}$ ならば $1 \in \overline{\mathcal{I}}$ であるから $\|1 - A\| < 1$ なる $A \in \mathcal{I}$ が取れ, 命題 9.2 より, $A = 1 - (1 - A) \in GL(\mathcal{A})$ だから $1 = AA^{-1} \in \mathcal{I}$, 従って $\mathcal{I} = \mathcal{A}$ となるので矛盾する. ゆえに $\overline{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$ であるから $\mathcal{I}$ は閉である. 命題 3.10 より商 Banach 環 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ が定義できる. 商写像を,

$$\pi : \mathcal{A} \ni A \mapsto [A] \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$$

と表す. 可換 Banach 環 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ の任意のイデアル $\mathcal{J}$ に対し, $\pi^{-1}(\mathcal{J})$ は $\mathcal{A}$ のイデアルであり, $\mathcal{I} \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{J})$ であるから, $\mathcal{I}$ の極大性より $\pi^{-1}(\mathcal{J}) = \mathcal{I}$ か $\pi^{-1}(\mathcal{J}) = \mathcal{A}$ である. よって $\mathcal{J} = \{0\}$ か $\mathcal{J} = \mathcal{A}/\mathcal{I}$ である. 任意の $[A] \in (\mathcal{A}/\mathcal{I}) \backslash \{0\}$ に対し, $[A](\mathcal{A}/\mathcal{I}) = \{[A][B] : [B] \in \mathcal{A}/\mathcal{I}\}$ は $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ の $\{0\}$ ではないイデアルなので, $[A](\mathcal{A}/\mathcal{I}) = \mathcal{A}/\mathcal{I}$ である. よって $[A] \in GL(\mathcal{A}/\mathcal{I})$ であるから, Gelfand-Mazur の定理 9.36 より $\mathcal{A}/\mathcal{I} = \mathbb{C}[1]$ が成り立つ. ゆえに,

$$\mathcal{A} = \mathcal{I} \oplus \mathbb{C}1$$

が成り立つ. そこで,

$$\gamma : \mathcal{A} = \mathcal{I} \oplus \mathbb{C}1 \ni A + \alpha 1 \mapsto \alpha \in \mathbb{C}$$

と定義すると, $\gamma \in \widehat{\mathcal{A}}$ であり $\mathrm{Ker}(\gamma) = \mathcal{I}$ である.

(3) 任意の $\gamma \in \widehat{\mathcal{A}}$ を取る. 指標の定義 9.34 の (2) より $\mathrm{Ker}(\gamma)$ は $\mathcal{A}$ のイデアルであり, 指標の定義 9.34 の (1) より $1 \notin \mathrm{Ker}(\gamma)$ である. そして $\gamma(1) = \gamma(1^2) = \gamma(1)^2$ より $\gamma(1) = 1$ である. これより任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $A - \gamma(A)1 \in \mathrm{Ker}(\gamma)$ であるから,

$$\mathcal{A} = \mathrm{Ker}(\gamma) \oplus \mathbb{C}1$$

である. 今, $\mathcal{A}$ のイデアル $\mathcal{I}$ で $\mathrm{Ker}(\gamma)$ を真に含むものを取る.

$$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A} = \mathrm{Ker}(\gamma) \oplus \mathbb{C}1$$

だから, 任意の $A \in \mathcal{I} \backslash \mathrm{Ker}(\gamma)$ に対し $A = B + \alpha 1$ なる $B \in \mathrm{Ker}(\gamma)$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ が取れる. $A \notin \mathrm{Ker}(\gamma)$ なので $\alpha \neq 0$ だから,

$$1 = \frac{1}{\alpha}(A - B) \in \mathcal{I}$$

である. よって $\mathcal{I} = \mathcal{A}$ なので $\mathrm{Ker}(\gamma)$ は極大イデアルである.

(4) $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{\mathcal{A}}$ が $\mathrm{Ker}(\gamma_1) = \mathrm{Ker}(\gamma_2)$ を満たすとする. $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = 1$ だから任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $A - \gamma_1(A)1 \in \mathrm{Ker}(\gamma_1) = \mathrm{Ker}(\gamma_2)$, 従って $\gamma_1(A) = \gamma_2(A)$ である. よって $\gamma_1 = \gamma_2$ である.

(5) 任意の $\lambda \in \sigma(A)$ に対し $\lambda 1 - A \notin GL(\mathcal{A})$ であるから, (1), (2) より, $\gamma \in \widehat{\mathcal{A}}$ で $\lambda 1 - A \in \mathrm{Ker}(\gamma)$ なるものが存在する. $\gamma(1) = 1$ より $\lambda = \gamma(A)$ である. よって $\sigma(A) \subseteq \{\gamma(A) : \gamma \in \widehat{\mathcal{A}}\}$ である. また任意の $\gamma \in \widehat{\mathcal{A}}$ に対し $\gamma(A)1 - A \in \mathrm{Ker}(\gamma)$ であり, $1 \notin \mathrm{Ker}(\gamma)$ であるから, $\gamma(A)1 - A \notin GL(\mathcal{A})$ である. よって $\gamma(A) \in \sigma(A)$ なので $\sigma(A) = \{\gamma(A) : \gamma \in \widehat{\mathcal{A}}\}$ が成り立つ.

(6) 任意の $\gamma \in \widehat{\mathcal{A}}$ に対し (5) と命題 9.10 より,

$$|\gamma(A)| \leqslant \mathrm{spr}(A) \leqslant \|A\| \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

[*133] $\mathcal{A}^*$ は Banach 空間 $\mathcal{A}$ の双対空間.

であり, $\gamma(1) = 1, \|1\| = 1$ であるから, $\gamma \in \mathcal{A}^*, \|\gamma\| = 1$ である. Banach-Alaoglu の定理 3.67 より $(\mathcal{A}^*)_1 = \{\varphi \in \mathcal{A}^* : \|\varphi\| \leqslant 1\}$ は弱 $*$-位相でコンパクトである. $\widehat{\mathcal{A}} \subseteq (\mathcal{A}^*)_1$ なので $\widehat{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}^*$ が弱 $*$-位相でコンパクトであることを示すには, $\widehat{\mathcal{A}}$ が弱 $*$-位相で閉であることを示せば十分である. そのためには任意の $\gamma \in \overline{\widehat{\mathcal{A}}}^{w^*\text{-topology}} \subseteq \mathcal{A}^*$ を取り $\gamma \in \widehat{\mathcal{A}}$ を示せばよい. 命題 1.34 より $\widehat{\mathcal{A}}$ のネット $(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で弱 $*$-位相に関して $\gamma_\lambda \to \gamma$ となるものが取れる. これは,

$$\gamma_\lambda(A) \to \gamma(A) \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

を意味するので, 任意の $A, B \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\gamma(A+B) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \gamma_\lambda(A+B) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \gamma_\lambda(A) + \lim_{\lambda\in\Lambda} \gamma_\lambda(B) = \gamma(A) + \gamma(B),\\
&\gamma(\alpha A) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \gamma_\lambda(\alpha A) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \alpha\gamma_\lambda(A) = \alpha\gamma(A),\\
&\gamma(AB) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \gamma_\lambda(AB) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \gamma_\lambda(A)\gamma_\lambda(B) = \gamma(A)\gamma(B),\\
&\gamma(1) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \gamma_\lambda(1) = 1
\end{aligned}$$

である. よって $\gamma \in \widehat{\mathcal{A}}$ である.

□

命題 9.38. $\mathcal{A}$ を単位的ではない可換 Banach 環 (resp. 単位的ではない可換 C^*-環) とし, $\widetilde{\mathcal{A}}$ を $\mathcal{A}$ の単位化 Banach 環 (定義 9.29) (resp. 単位化 C^*-環 (定義 9.31)) とする. このとき任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し A のスペクトル $\sigma(A)$ は,

$$\sigma(A) = \{\gamma(A) : \gamma \in \widehat{\mathcal{A}}\} \cup \{0\}$$

を満たす. そして,

$$\widehat{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}^*, \quad \|\gamma\| \leqslant 1 \quad (\forall \gamma \in \widehat{\mathcal{A}})$$

であり, $\widehat{\mathcal{A}}$ に $\mathcal{A}^*$ の弱 $*$-位相の相対位相を入れたものは局所コンパクト Hausdorff 空間である.

証明. $\mathcal{A} \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}$ は単位的可換 Banach 環 $\widetilde{\mathcal{A}}$ の極大イデアルだから, 命題 9.37 の (2), (4) より $\delta_0 \in \widehat{\widetilde{\mathcal{A}}}$ で $\mathrm{Ker}(\delta_0) = \mathcal{A}$ を満たすものが唯一つ存在する. また任意の $\delta \in \widehat{\widetilde{\mathcal{A}}}\backslash\{\delta_0\}$ に対し命題 9.37 の (3), (4) より $\mathrm{Ker}(\delta_0) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta)$ は成り立たないから, $\delta(A) \neq 0$ なる $A \in \mathcal{A}$ が存在する. よって任意の $\delta \in \widehat{\widetilde{\mathcal{A}}}\backslash\{\delta_0\}$ に対し δ の $\mathcal{A}$ 上への制限 $\delta|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \ni A \mapsto \delta(A) \in \mathbb{C}$ は $\widehat{\mathcal{A}}$ に属する. また任意の $\gamma \in \widehat{\mathcal{A}}$ に対し,

$$\widetilde{\gamma} : \widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}1 \ni A + \alpha 1 \mapsto \gamma(A) + \alpha \in \mathbb{C} \tag{9.42}$$

とおけば $\widetilde{\gamma} \in \widehat{\widetilde{\mathcal{A}}}\backslash\{\delta_0\}$ であり, $\widetilde{\gamma}|_{\mathcal{A}} = \gamma$ だから,

$$\widehat{\mathcal{A}} \ni \gamma \mapsto \widetilde{\gamma} \in \widehat{\widetilde{\mathcal{A}}}\backslash\{\delta_0\} \tag{9.43}$$

は全単射である. よって命題 9.37 の (5) より,

$$\sigma(A) = \{\delta(A) : \delta \in \widehat{\widetilde{\mathcal{A}}}\} = \{\gamma(A) : \gamma \in \widehat{\mathcal{A}}\} \cup \{0\} \quad (\forall A \in \mathcal{A}) \tag{9.44}$$

が成り立つ. 任意の $\gamma \in \widehat{\mathcal{A}}$ に対し (9.44) と命題 9.10 より,

$$|\gamma(A)| \leqslant \mathrm{spr}(A) \leqslant \|A\| \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

であるから $\gamma \in \mathcal{A}^*, \|\gamma\| \leqslant 1$ である. 今, $\widehat{\mathcal{A}}$ に $\mathcal{A}^*$ の弱 $*$-位相の相対位相を入れ, $\widehat{\widetilde{\mathcal{A}}}\backslash\{\delta_0\}$ に $(\widetilde{\mathcal{A}})^*$ の弱 $*$-位相の相対位相を入れる. 命題 9.37 の (6) より $\widehat{\widetilde{\mathcal{A}}}\backslash\{\delta_0\}$ は局所コンパクト Hausdorff 空間である. そして $\widehat{\mathcal{A}}$ のネット $(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $\gamma \in \widehat{\mathcal{A}}$ に対し, (9.42) より,

$$\gamma_\lambda \to \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_\lambda(A) \to \gamma(A) \ \ (\forall A \in \mathcal{A}) \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{\gamma_\lambda}(A+\alpha 1) \to \widetilde{\gamma}(A+\alpha 1) \ \ (\forall A+\alpha 1 \in \widetilde{\mathcal{A}}) \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{\gamma_\lambda} \to \widetilde{\gamma}$$

であるから, 命題 1.50 より (9.43) は同相写像である. よって $\widehat{\mathcal{A}}$ も局所コンパクト Hausdorff 空間である. □

定義 9.39 (指標空間の位相)**.** $\mathcal{A}$ を可換な Banach 環か可換な C^*-環とする. 命題 9.37 と命題 9.38 より $\mathcal{A}$ の指標空間 $\widehat{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}^*$ の弱 $*$-位相の相対位相により局所コンパクト Hausdorff 空間 (単位的である場合はコンパクト Hausdorff 空間) である. 以後, $\mathcal{A}$ の指標空間 $\widehat{\mathcal{A}}$ には, 断ることなくこの位相が備わっているものとする.

定理 9.40 (可換 Banach 環の Gelfand 変換)**.** $\mathcal{A}$ を可換 Banach 環とする. このとき任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し指標空間 $\widehat{\mathcal{A}}$ 上の関数

$$\Gamma(A) : \widehat{\mathcal{A}} \ni \gamma \mapsto \gamma(A) \in \mathbb{C}$$

を定義すると, $\Gamma(A) \in C_0(\widehat{\mathcal{A}})$ (無限遠で消える連続関数 (定義 5.159)) である. そして,

$$\Gamma : \mathcal{A} \ni A \mapsto \Gamma(A) \in C_0(\widehat{\mathcal{A}}) \tag{9.45}$$

はノルム減少な準同型写像である[*134]. また,

$$\|\Gamma(A)\| = \mathrm{spr}(A) \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

が成り立つ.

証明. 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $\Gamma(A) : \widehat{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ が連続であることは弱 $*$-位相の定義 3.66 より自明である. $\Gamma(A) \in C_0(\widehat{\mathcal{A}})$ を示すには任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し,

$$(|\Gamma(A)| \geqslant \varepsilon) = \left\{\gamma \in \widehat{\mathcal{A}} : |\Gamma(A)(\gamma)| \geqslant \varepsilon\right\}$$

が $\widehat{\mathcal{A}}$ のコンパクト集合であることを示せばよい. そのためには, $\widehat{\mathcal{A}} \subseteq (\mathcal{A}^*)_1 = \{\varphi \in \mathcal{A}^* : \|\varphi\| \leqslant 1\}$ であることと Banach-Alaoglu の定理 3.67 より, $(|\Gamma(A)| \geqslant \varepsilon)$ が $\mathcal{A}^*$ の弱 $*$-位相で閉であることを示せばよい. そこで任意の

$$\gamma \in \overline{(|\Gamma(A)| \geqslant \varepsilon)}^{w^*\text{-topology}} \subseteq \mathcal{A}^*$$

を取り, 弱 $*$-位相で γ に収束する $(|\Gamma(A)| \geqslant \varepsilon)$ のネット $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を取る (命題 1.34). このとき, 任意の $B, C \in \mathcal{A}$ と任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\gamma(B + C) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \gamma_\lambda(B + C) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \gamma_\lambda(B) + \lim_{\lambda \in \Lambda} \gamma_\lambda(C) = \gamma(B) + \gamma(C),\\
&\gamma(\alpha B) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \gamma_\lambda(\alpha B) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \alpha\gamma_\lambda(B) = \alpha\gamma(B),\\
&\gamma(BC) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \gamma_\lambda(BC) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \gamma_\lambda(B)\gamma_\lambda(C) = \gamma(B)\gamma(C),\\
&|\gamma(A)| = \lim_{\lambda \in \Lambda} |\gamma_\lambda(A)| = \lim_{\lambda \in \Lambda} |\Gamma(A)(\gamma_\lambda)| \geqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

である. よって $\gamma \in \widehat{\mathcal{A}}$ であり, $\gamma \in (|\Gamma(A)| \geqslant \varepsilon)$ である. ゆえに $(|\Gamma(A)| \geqslant \varepsilon)$ は $\mathcal{A}^*$ の弱 $*$-位相で閉であるので, $\Gamma(A) \in C_0(\widehat{\mathcal{A}})$ が成り立つ. 任意の $A, B \in \mathcal{A}$, 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\Gamma(A + B)(\gamma) = \gamma(A + B) = \gamma(A) + \gamma(B) = (\Gamma(A) + \Gamma(B))(\gamma) \quad (\forall \gamma \in \widehat{\mathcal{A}}),\\
&\Gamma(\alpha A)(\gamma) = \gamma(\alpha A) = \alpha\gamma(A) = (\alpha\Gamma(A))(\gamma) \quad (\forall \gamma \in \widehat{\mathcal{A}}),\\
&\Gamma(AB)(\gamma) = \gamma(AB) = \gamma(A)\gamma(B) = (\Gamma(A)\Gamma(B))(\gamma) \quad (\forall \gamma \in \widehat{\mathcal{A}})
\end{aligned}$$

であるので, $\Gamma : \mathcal{A} \to C_0(\widehat{\mathcal{A}})$ は多元環準同型写像である. そして命題 9.37 と命題 9.38 より, 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し,

$$\|\Gamma(A)\| = \sup_{\gamma \in \widehat{\mathcal{A}}} |\Gamma(A)(\gamma)| = \sup_{\gamma \in \widehat{\mathcal{A}}} |\gamma(A)| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \mathrm{spr}(A)$$

であるから, 命題 9.10 より,

$$\|\Gamma(A)\| = \mathrm{spr}(A) \leqslant \|A\|$$

である. □

[*134] $C_0(\widehat{\mathcal{A}})$ は各点ごとの演算と sup ノルムにより可換な C^*-環とみなしている (命題 5.160)

定義 9.41 (可換 Banach 環の Gelfand 変換)**.** 可換 Banach 環 $\mathcal{A}$ に対し, 定理 9.40 におけるノルム減少準同型写像 (9.45) を $\mathcal{A}$ の Gelfand 変換と言う.

命題 9.42. 可換 C^*-環 $\mathcal{A}$ の任意の指標 (定義 9.34) $\gamma \in \widehat{\mathcal{A}}$ に対し,

$$\gamma(A^*) = \overline{\gamma(A)} \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

が成り立つ.

証明. 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し,

$$\mathrm{Re}(A) := \frac{1}{2}(A + A^*), \quad \mathrm{Im}(A) := \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

とおけば $\mathrm{Re}(A), \mathrm{Im}(A) \in \mathcal{A}$ はそれぞれ自己共役であり,

$$A = \mathrm{Re}(A) + i\mathrm{Im}(A), \quad A^* = \mathrm{Re}(A) - i\mathrm{Im}(A)$$

である. 定理 9.27 と命題 9.37 と命題 9.38 より,

$$\gamma(\mathrm{Re}(A)) \in \sigma(\mathrm{Re}(A)) \subseteq \mathbb{R}, \quad \gamma(\mathrm{Im}(A)) \in \sigma(\mathrm{Im}(A)) \subseteq \mathbb{R}$$

であるから,

$$\gamma(A^*) = \gamma(\mathrm{Re}(A)) - i\gamma(\mathrm{Im}(A)) = \overline{\gamma(\mathrm{Im}(A)) + i\gamma(\mathrm{Im}(A))} = \overline{\gamma(A)}$$

である. □

定理 9.43 (可換 C^*-環の Gelfand 変換)**.** $\mathcal{A}$ を可換 C^*-環とする. このとき $\mathcal{A}$ の Gelfand 変換

$$\Gamma : \mathcal{A} \to C_0(\widehat{\mathcal{A}})$$

は等長な $*$-環同型写像である.

証明. $\mathcal{A}$ は可換であるから任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し A は正規である. よって定理 9.25 より,

$$\|\Gamma(A)\| = \mathrm{spr}(A) = \|A\| \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

であるから Γ は等長である. また命題 9.42 より任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し,

$$\Gamma(A^*)(\gamma) = \gamma(A^*) = \overline{\gamma(A)} = \overline{\Gamma(A)(\gamma)} \quad (\forall \gamma \in \widehat{\mathcal{A}})$$

であるので Γ は $*$-環準同型写像である. 後は $\Gamma(\mathcal{A}) = C_0(\widehat{\mathcal{A}})$ が成り立つことを示せばよい. Stone-Weierstrass の定理 5.194 を用いる. $\mathcal{A}$ の完備性と Γ の等長性より $\Gamma(\mathcal{A})$ は $C_0(\widehat{\mathcal{A}})$ の閉部分 $*$-環である. そして $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{\mathcal{A}}$ が $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ならば,

$$\Gamma(A)(\gamma_1) = \gamma_1(A) \neq \gamma_2(A) = \Gamma(A)(\gamma_2)$$

なる $A \in \mathcal{A}$ が存在し, 任意の $\gamma \in \widehat{\mathcal{A}}$ に対し 指標の定義 9.34 の (1) より,

$$\Gamma(B)(\gamma) = \gamma(B) \neq 0$$

なる $B \in \mathcal{A}$ が存在する. よって Stone-Weierstrass の定理 5.194 より $C_0(\widehat{\mathcal{A}}) = \overline{\Gamma(A)} = \Gamma(\mathcal{A})$ が成り立つ. □

9.4 C^*-環の連続関数カルキュラス

定義 9.44 (部分 C^*-環)**.** C^*-環 $\mathcal{A}$ の閉部分 $*$-環は $\mathcal{A}$ のノルムによってそれ自体 C^*-環である. そこで C^*-環 $\mathcal{A}$ の閉部分 $*$-環のことを $\mathcal{A}$ の部分 C^*-環と言う.

定義 9.45 (C^*-環の部分集合から生成される部分 C^*-環)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, $\varnothing \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ とする. このとき $\mathcal{E}$ を含む全ての部分 C^*-環の交叉は $\mathcal{E}$ を含む最小の部分 C^*-環である. これを $\mathcal{E}$ から生成される部分 C^*-環と言い, $C^*(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ と表す.

補題 9.46. $\mathcal{A}$ を単位的 C^*-環とし, $A \in \mathcal{A}$ を正規 (定義 9.24) とする．このとき $\mathcal{A}$ の単位元 $1 \in \mathcal{A}$ と A から生成される部分 C^*-環 $C^*(\{1, A\}) \subseteq \mathcal{A}$ は単位的可換 C^*-環であり,

$$C^*(\{1, A\}) = \overline{\mathrm{span}\{A^{*n}A^m : n, m \in \mathbb{Z}_+\}}$$

が成り立つ (ただし span は定義 2.31 の意味).

証明. A が正規であることから, 任意の $n, m, n', m' \in \mathbb{Z}_+$ に対し,

$$(A^{*n}A^m)(A^{*n'}A^{m'}) = A^{*n+n'}A^{m+m'} = (A^{*n'}A^{m'})(A^{*n}A^m)$$

が成り立つ．よって,

$$\mathcal{B} := \overline{\mathrm{span}\{A^{*n}A^m : n, m \in \mathbb{Z}_+\}}$$

は $\mathcal{A}$ の可換な部分 C^*-環である．$1, A \in \mathcal{B}$ なので $C^*(\{1, A\}) \subseteq \mathcal{B}$ であり,

$$A^{*n}A^m \in C^*(\{1, A\}) \quad (\forall n, m \in \mathbb{Z}_+)$$

なので $\mathcal{B} \subseteq C^*(\{1, A\})$ である．よって $C^*(\{1, A\}) = \mathcal{B}$ である． □

補題 9.47. X, Y をコンパクト Hausdorff 空間, $f : X \to Y$ を全単射連続写像とする．このとき f は同相写像である．

証明. f が開写像であることを示せばよい．X の任意の閉集合 E を取る．X はコンパクトなので E はコンパクトであり, f は連続なので $f(E)$ はコンパクトである．Y は Hausdorff 空間なので $f(E)$ は閉集合である (命題 1.44)．よって $f : X \to Y$ は閉集合を閉集合に写す全単射なので開写像である． □

定理 9.48. $\mathcal{A}$ を単位的 C^*-環, $A \in \mathcal{A}$ を正規元とし, 単位的可換 C^*-環 $C^*(\{1, A\})$(補題 9.46 を参照) を考える．また A のスペクトル $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}$[*135]上の連続関数全体のなす単位的可換 C^*-環 $C(\sigma(A))$[*136]を考える．このとき等長 $*$-環同型写像

$$\Phi : C(\sigma(A)) \to C^*(\{1, A\})$$

で,

$$\Phi(1) = 1, \quad \Phi(\mathrm{id}) = A \tag{9.46}$$

(ただし $\mathrm{id} : \sigma(A) \ni \lambda \mapsto \lambda \in \mathbb{C}$) を満たすものが唯一つ存在する．

証明. Stone-Weierstrass の定理 5.194 より,

$$C(\sigma(A)) = \overline{\mathrm{span}\left\{\overline{\mathrm{id}}^n \, \mathrm{id}^m : n, m \in \mathbb{Z}_+\right\}}$$

が成り立つ．よって (9.46) を満たす等長 $*$-環準同型写像 $\Phi : C(\sigma(A)) \to C^*(\{1, A\})$ は一意的である．
存在を示す．まず単位的可換 C^*-環 $C^*(\{1, A\})$ の指標空間 $\widehat{C^*(\{1, A\})}$ (定義 9.39 よりコンパクト Hausdorff 空間) と, $C^*(\{1, A\})$ における $A \in C^*(\{1, A\})$ のスペクトル $\sigma_{C^*(\{1,A\})}(A)$ に対し,

$$\tau : \widehat{C^*(\{1, A\})} \ni \gamma \mapsto \gamma(A) \in \sigma_{C^*(\{1,A\})}(A)$$

なる写像を定義すると, 命題 9.37 より τ は全射連続写像である[*137]．$\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{C^*(\{1, A\})}$ が $\tau(\gamma_1) = \tau(\gamma_2)$ を満たすとする．このとき $\gamma_j(1) = 1, \gamma_j(A^*) = \overline{\gamma_j(A)}$ $(j = 1, 2)$ (命題 9.42) より,

$$\gamma_1\left(A^{*n}A^m\right) = \overline{\gamma_1(A)}^n \gamma_1(A)^m = \overline{\gamma_2(A)}^n \gamma_2(A)^m = \gamma_2\left(A^{*n}A^m\right) \quad (\forall n, m \in \mathbb{Z}_+)$$

[*135] 系 9.11 より $\sigma(A) \neq \emptyset$ はコンパクト Hausdorff 空間.
[*136] 各点ごとの演算と sup ノルムによる (命題 5.160).
[*137] $\widehat{C^*(\{1, A\})}$ の位相は $(C^*(\{1, A\}))^*$ の弱 $*$-位相の相対位相であり, 弱 $*$-位相の定義 3.66 とネットによる連続性の特徴付け (命題 1.50) より τ は明らかに連続である.

であるから, γ_1, γ_2 が有界線型汎関数であることと補題 9.46 より $\gamma_1 = \gamma_2$ である. ゆえに τ は全単射連続写像であるから補題 9.47 より τ は同相写像である. そこで,

$$\Psi : C\left(\sigma_{C^*(\{1,A\})}(A)\right) \ni f \mapsto f \circ \tau \in C\left(\widehat{C^*(\{1,A\})}\right)$$

とおけば Ψ は等長 $*$-環同型写像である. そして単位的可換 C^*-環 $C^*(\{1,A\})$ の Gelfand 変換 (9.43)

$$\Gamma : C^*(\{1,A\}) \to C\left(\widehat{C^*(\{1,A\})}\right)$$

も等長 $*$-環同型写像であるので,

$$\Phi : \Gamma^{-1} \circ \Psi : C\left(\sigma_{C^*(\{1,A\})}(A)\right) \to C^*(\{1,A\})$$

とおくと Φ も等長 $*$-環同型写像である. ここで,

$$\begin{aligned}
&\Psi(\mathrm{id})(\gamma) = \tau(\gamma) = \gamma(A) = \Gamma(A)(\gamma), \\
&\Psi(1)(\gamma) = 1 = \gamma(1) = \Gamma(1)(\gamma) \quad (\forall \gamma \in \widehat{C^*(\{1,A\})})
\end{aligned}$$

より $\Psi(\mathrm{id}) = \Gamma(A), \Psi(1) = \Gamma(1)$ だから,

$$\Phi(\mathrm{id}) = \Gamma^{-1}(\Gamma(A)) = A, \quad \Phi(1) = \Gamma^{-1}(\Gamma(1)) = 1$$

である. これより $C^*(\{1,A\})$ における A のスペクトル $\sigma_{C^*(\{1,A\})}(A)$ と $\mathcal{A}$ における A のスペクトル $\sigma(A)$ に対し,

$$\sigma(A) = \sigma_{C^*(\{1,A\})}(A) \tag{9.47}$$

が成り立つことを示せば証明は終わる. スペクトルの定義より明らかに,

$$\sigma(A) \subseteq \sigma_{C^*(\{1,A\})}(A)$$

である. そこで,

$$\lambda_0 \in \sigma_{C^*(\{1,A\})}(A) \backslash \sigma(A)$$

が存在すると仮定して矛盾を導く. 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し,

$$U_\varepsilon := \{\lambda \in \sigma_{C^*(\{1,A\})}(A) : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$$

とおく. $\sigma(A)$ は $\sigma_{C^*(\{1,A\})}(A)$ の閉集合なので十分小さい $\varepsilon_0 \in (0, \infty)$ を取れば,

$$\lambda_0 \in U_\varepsilon \subseteq \sigma_{C^*(\{1,A\})}(A) \backslash \sigma(A) \quad (\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0])$$

となる. よって Urysohn の補題 5.165 より任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ に対し $f_\varepsilon \in C\left(\sigma_{C^*(\{1,A\})}(A)\right)$ で,

$$f_\varepsilon(\lambda_0) = 1, \quad \mathrm{supp}(f_\varepsilon) \subseteq U_\varepsilon, \quad \|f_\varepsilon\| = 1$$

を満たすものが取れる. このとき,

$$\begin{aligned}
\|(\lambda_0 - A)\Phi(f_\varepsilon)\| &= \|\Phi((\lambda_0 - \mathrm{id})f_\varepsilon)\| = \|(\lambda_0 - \mathrm{id})f_\varepsilon\| \\
&= \sup\{|(\lambda_0 - \lambda)f_\varepsilon(\lambda)| : \lambda \in \sigma_{C^*(\{1,A\})}(A)\} \\
&\leqslant \varepsilon \quad (\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0])
\end{aligned}$$

であり, $\lambda_0 \notin \sigma(A)$ より $(\lambda_0 - A)^{-1} \in \mathcal{A}$ が存在するので,

$$\begin{aligned}
1 &= \|\Phi(f_\varepsilon)\| = \|(\lambda_0 - A)^{-1}(\lambda_0 - A)\Phi(f_\varepsilon)\| \leqslant \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|\|(\lambda_0 - A)\Phi(f_\varepsilon)\| \\
&\leqslant \varepsilon\|(\lambda_0 - A)^{-1}\| \quad (\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0])
\end{aligned}$$

である. よって,

$$\frac{1}{\varepsilon} \leqslant \|(\lambda_0 - A)^{-1}\| \quad (\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0])$$

となり矛盾を得る. ゆえに (9.47) が成り立つので, Φ が求める $C(\sigma(A))$ から $C^*(\{1,A\})$ への等長 $*$-環同型写像である. $\square$

定義 9.49 (連続関数カルキュラス). $\mathcal{A}$ を単位的 C^*-環とし, $A \in \mathcal{A}$ を任意の正規元とする. 定理 9.48 における等長 $*$-環同型写像を,

$$C(\sigma(A)) \ni f \mapsto f(A) \in C^*(\{1, A\})$$

と表す (つまり定理 9.48 における $\Phi : C(\sigma(A)) \to C^*(\{1, A\})$ に対し $f(A) := \Phi(f)$ $(\forall f \in C(\sigma(A)))$ とおく). これを A における連続関数カルキュラスと言う.

系 9.50. $\mathcal{A}$ を単位的 C^*-環とする. このとき任意の正規元 $A \in \mathcal{A}$ に対し A の $C^*(\{1, A\})$ におけるスペクトル $\sigma_{C^*(\{1,A\})}(A)$ と A の $\sigma(A)$ におけるスペクトル $\sigma(A)$ は一致する.

証明. 定理 9.48 の後半で示している. □

定理 9.51. $\mathcal{A}$ を単位的 C^*-環, $A \in \mathcal{A}$ を正規元とし, A における連続関数カルキュラスを,

$$C(\sigma(A)) \ni f \mapsto f(A) \in C^*(\{1, A\})$$

とする. このとき,

(1) A における正則関数カルキュラス (定義 9.17) を,

$$H(\sigma(A)) \ni [f] \mapsto [f](A) \in \mathcal{A}$$

とすると, 任意の $[f] \in H(\sigma(A))$ に対し $[f](A) = f(A)$ が成り立つ.
(2) 任意の $f \in C(\sigma(A))$ に対し $f(\sigma(A)) = \sigma(f(A))$ が成り立つ.
(3) 任意の $f \in C(\sigma(A)), g \in C(\sigma(f(A))) = C(f(\sigma(A)))$ に対し $g(f(A))$ は $(g \circ f)(A)$ が成り立つ.
(4) $f \in C(\sigma(A))$ に対し, $0 \notin \sigma(A)$ か, $0 \in \sigma(A)$ かつ $f(0) = 0$ であると仮定すると, $f(A) \in C^*(\{A\})$ が成り立つ.

証明. (1) $\sigma(A)$ を含む開集合 $U \subseteq \mathbb{C}$ 上で定義された正則関数 $f : U \to \mathbb{C}$ と, $\sigma(A) \preceq c \preceq U$ なるサイクル c (定義 9.13) を取る. 任意の $\lambda \in c^* \subseteq U \backslash \sigma(A)$ に対し連続関数 $(\lambda - \mathrm{id})^{-1} \in C(\sigma(A))$ が定義できて, 連続関数カルキュラスより,

$$(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - \mathrm{id})^{-1}(A) \in C^*(\{1, A\})$$

である. よって,

$$[f](A) = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \in C^*(\{1, A\}) \tag{9.48}$$

である. 単位的可換 C^*-環 $C^*(\{1, A\})$ の Gelfand 変換 (9.43) を,

$$\Gamma : C^*(\{1, A\}) \to C\left(\widehat{C^*(\{1, A\})}\right)$$

とすると, 任意の $\gamma \in \widehat{C^*(\{1, A\})}$ に対し定理 9.48 の証明より,

$$\gamma((\lambda - A)^{-1}) = \Gamma((\lambda - A)^{-1})(\gamma) = \Psi((\lambda - \mathrm{id})^{-1})(\gamma) = (\lambda - \gamma(A))^{-1}$$

であるから, (9.48) より任意の $\gamma \in \widehat{C^*(\{1, A\})}$ に対し,

$$\gamma([f](A)) = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(\lambda)\gamma((\lambda - A)^{-1}) d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(\lambda)(\lambda - \gamma(A))^{-1} d\lambda \tag{9.49}$$

である. ここで $\gamma(A) \in \sigma_{C^*(\{1,A\})}(A) = \sigma(A)$ と $\sigma(A) \preceq c \preceq U$ より $\mathrm{Ind}_c(\gamma(A)) = 1$ である (定義 9.13) から, Cauchy の積分公式 7.27 より,

$$(9.49) \text{ の右辺} = f(\gamma(A))$$

であり, 定理 9.48 の証明より,

$$f(\gamma(A)) = \Psi(f)(\gamma) = \Gamma(f(A))(\gamma) = \gamma(f(A))$$

であるから,

$$\gamma([f](A)) = f(\gamma(A)) = \gamma(f(A))$$

である．よって，

$$\Gamma([f](A))(\gamma) = \gamma([f](A)) = \gamma(f(A)) = \Gamma(f(A))(\gamma) \quad (\forall \gamma \in \widehat{C^*(\{1, A\})})$$

であるから $\Gamma([f](A)) = \Gamma(f(A))$, 従って $[f](A) = f(A)$ である．

(2) 任意の $f \in C(\sigma(A))$ に対し，$f(A), f(A)^* \in C^*(\{1, A\})$ であるから $f(A)$ は正規であり，

$$C^*(\{1, f(A)\}) \subseteq C^*(\{1, A\}) \subseteq \mathcal{A}$$

であるから，系 9.50 より，

$$\sigma(f(A)) \subseteq \sigma_{C^*(\{1,A\})}(f(A)) \subseteq \sigma_{C^*(1,f(A))}(f(A)) = \sigma(f(A)),$$

[*138]従って，

$$\sigma(f(A)) = \sigma_{C^*(\{1,A\})}(f(A)) = \left\{\gamma(f(A)) : \gamma \in \widehat{C^*(\{1, A\})}\right\}$$

である (2 番目の等号は定理 9.37 による)．ここで定理 9.48 の証明より，

$$\gamma(f(A)) = \Gamma(f(A))(\gamma) = \Psi(f)(\gamma) = f(\gamma(A)) \quad (\forall \gamma \in \widehat{C^*(\{1, A\})})$$

であるから，

$$\sigma(f(A)) = \left\{f(\gamma(A)) : \gamma \in \widehat{C^*(\{1, A\})}\right\} = f\left(\sigma_{C^*(\{1,A\})}(A)\right) = f(\sigma(A))$$

である (3 番目の等号は系 9.50 による)．

(3) $f \in C(\sigma(A))$ を取り固定する．

$$\mathcal{B} := \{g \in C(\sigma(f(A))) : g(f(A)) = (g \circ f)(A)\}$$

とおくと，$\mathcal{B}$ は C^*-環 $C(\sigma(f(A)))$ の部分 $*$-環であり $1, \mathrm{id} \in \mathcal{B}$ である．よって Stone-Weierstrass の定理 5.194 より $C(\sigma(f(A))) = \overline{\mathcal{B}}$ である．これより任意の $g \in C(\sigma(f(A)))$ に対し g に一様収束する $\mathcal{B}$ の列 $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が取れて，このとき $C(\sigma(A))$ の列 $(g_n \circ f)_{n \in \mathbb{N}}$ は $g \circ f \in C(\sigma(A))$ に一様収束するので，

$$g(f(A)) = \lim_{n \to \infty} g_n(f(A)) = \lim_{n \to \infty} (g_n \circ f)(A) = (g \circ f)(A)$$

である．ゆえに $g \in \mathcal{B}$ だから $C(\sigma(f(A))) = \mathcal{B}$ である．よって任意の $g \in C(\sigma(f(A)))$ に対し $g(f(A)) = (g \circ f)(A)$ が成り立つ．

(4) 補題 9.46 の証明と全く同様にして，

$$C^*(\{A\}) = \overline{\mathrm{span}\{A^{*n} A^m : n, m \in \mathbb{Z}_+, n + m > 0\}} \tag{9.50}$$

であることが分かる．$0 \notin \sigma(A)$ の場合は $\mathrm{id}^{-1} \in C(\sigma(A))$ だから，

$$A^{-1} f(A) = (\mathrm{id}^{-1} f)(A) \in C^*(\{1, A\}) = \overline{\mathrm{span}\{A^{*n} A^m : n, m \in \mathbb{Z}_+\}},$$

従って，

$$f(A) = A(A^{-1} f(A)) \in \overline{\mathrm{span}\{A^{*n} A^m : n, m \in \mathbb{Z}_+, n + m > 0\}} = C^*(\{A\})$$

である．$0 \in \sigma(A)$ かつ $f(0) = 0$ であるとする．もし $\sigma(A) = \{0\}$ ならば $f = 0$ だから $f(A) = 0 \in C^*(\{A\})$ である．$\sigma(A) \neq \{0\}$ とする．$f(0) = 0$ だから $f \in C(\sigma(A))$ を局所コンパクト Hausdorff 空間 $\sigma(A) \backslash \{0\}$ に制限した連続関数 $f|_{\sigma(A) \backslash \{0\}}$ は $C_0(\sigma(A) \backslash \{0\})$ (無限遠で消える連続関数空間) に属する．また Stone-Weierstrass の定理 5.194 より，

$$\mathrm{span}\{(\overline{\mathrm{id}}^n \, \mathrm{id}^m)|_{\sigma(A) \backslash \{0\}} : n, m \in \mathbb{Z}_+, n + m > 0\} \subseteq C_0(\sigma(A) \backslash \{0\}) \tag{9.51}$$

[*138] $\sigma_{C^*(\{1,A\})}(f(A))$ は $f(A)$ の $C^*(\{1, A\})$ におけるスペクトルである．

は $C_0(\sigma(A)\backslash\{0\})$ において稠密であるから, $f|_{\sigma(A)\backslash\{0\}}$ に一様収束する (9.51) の左辺の列 $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する. よって,

$$\lim_{n\to\infty}\|p_n(A)-f(A)\| = \lim_{n\to\infty}\|p_n-f\| = 0$$

であり, (9.50), (9.51) より $p_n(A)\in C^*(\{A\})$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ であるから,

$$f(A) = \lim_{n\to\infty}p_n(A)\in C^*(\{A\})$$

である.

□

注意 9.52 (スペクトル写像定理)**.** 定理 9.51 の (2) を連続関数カルキュラスに関するスペクトル写像定理と言う.

注意 9.53 (単位的ではない C^*-環の正規元における連続関数カルキュラス)**.** $\mathcal{A}$ を単位的ではない C^*-環, $\widetilde{\mathcal{A}}$ を単位化 C^*-環 (9.31) とし, $A\in\mathcal{A}\subseteq\widetilde{\mathcal{A}}$ を正規とする. このとき $f\in C(\sigma(A))$ で $f(0)=0$[*139]を満たすものに対し, 定理 9.51 の (4) より,

$$f(A)\in C^*(\{A\})\subseteq\mathcal{A}\subseteq\widetilde{\mathcal{A}}$$

である.

9.5 C^*-環の自己共役部分の順序, 近似単位元, 射影と部分等長

定義 9.54 (C^*-環の自己共役部分)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. $\mathcal{A}$ の自己共役元全体を,

$$\mathcal{A}_{\mathrm{sa}} := \{A\in\mathcal{A} : A^* = A\}$$

と表し, これを $\mathcal{A}$ の自己共役部分と言う.

定義 9.55 (C^*-環の非負元と非負部分)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. $A\in\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ で,

$$\sigma(A)\subseteq[0,\infty)$$

を満たすものを $\mathcal{A}$ の非負元と言う. そして $\mathcal{A}$ の非負元全体を,

$$\mathcal{A}_+ := \{A\in\mathcal{A}_{\mathrm{sa}} : \sigma(A)\subseteq[0,\infty)\}$$

と表し, これを $\mathcal{A}$ の非負部分と言う.

命題 9.56 (C^*-環の自己共役元の Jordan 分解)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. このとき任意の $A\in\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ に対し, $A_+, A_-\in\mathcal{A}_+$ で,

$$A = A_+ - A_-,\quad A_+A_- = A_-A_+ = 0,\quad \|A_\pm\|\leqslant\|A\|$$

を満たすものが存在する.

証明. 定理 9.27 より $\sigma(A)\subseteq\mathbb{R}$ である. そこで $\mathrm{id}_\pm\in C(\sigma(A))$ を,

$$\mathrm{id}_\pm := \max\{\pm\,\mathrm{id},0\} : \sigma(A)\ni\lambda\mapsto\max\{\pm\lambda,0\}\in[0,\infty)$$

と定義し, 連続関数カルキュラスにより,

$$A_\pm := \mathrm{id}_\pm(A)\subseteq C^*(\{A\})\subseteq\mathcal{A}$$

(定理 9.51 の (4) と注意 9.53 を参照) と定義する. このときスペクトル写像定理 (定理 9.51 の (2)) より,

$$\sigma(A_\pm) = \{\max\{\pm\lambda,0\} : \lambda\in\sigma(A)\}\subseteq[0,\infty)$$

[*139] $\mathcal{A}$ が単位的ではないことから $0\in\sigma(A)$ であることに注意.

であるから $A_\pm \in \mathcal{A}_+$ であり, 定理 9.25 より,

$$\|A_\pm\| = \mathrm{spr}(A_\pm) \leqslant \mathrm{spr}(A) = \|A\|$$

である. また,

$$A_+A_- = (\mathrm{id}_+\,\mathrm{id}_-)(A) = 0, \quad A_-A_+ = (\mathrm{id}_-\,\mathrm{id}_+)(A) = 0$$

であり,

$$A = \mathrm{id}(A) = (\mathrm{id}_+ - \mathrm{id}_-)(A) = \mathrm{id}_+(A) - \mathrm{id}_-(A) = A_+ - A_-$$

である. □

定義 9.57. 命題 9.56 における C^*-環の自己共役元の非負元の差への分解を Jordan 分解と言う.

注意 9.58 (C^*-環の任意の元 A がノルムが $\|A\|$ 以下の非負元の線型結合で表せること)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し,

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

とおくと,

$$A = A_1 + iA_2, \quad A_1, A_2 \in \mathcal{A}_{\mathrm{sa}}, \quad \|A_1\|, \|A_2\| \leqslant \|A\|$$

である. そして $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ の Jordan 分解 (9.56) を,

$$A_j = A_{j,+} - A_{j,-}, \quad A_{j,+}, A_{j,-} \in \mathcal{A}_+ \quad (j = 1, 2)$$

とすると,

$$A = (A_{1,+} - A_{1,-}) + i(A_{2,+} - A_{2,-}), \quad \|A_{j,\pm}\| \leqslant \|A_j\| \leqslant \|A\| \quad (j = 1, 2)$$

である.

命題 9.59 (C^*-環の非負元の冪乗根)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, $A \in \mathcal{A}_+$ とする. このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $B \in \mathcal{A}_+$ で $B^n = A$ を満たすものが唯一つ存在し, $B \in C^*(\{A\})$ である.

証明. 任意の $A \in \mathcal{A}_+$ に対し,

$$\sqrt[n]{\mathrm{id}} : \sigma(A) \ni \lambda \mapsto \sqrt[n]{\lambda} \in [0, \infty)$$

とおくと $\sqrt[n]{\mathrm{id}} \in C(\sigma(A))$ であり,

$$\sqrt[n]{A} := (\sqrt[n]{\mathrm{id}})(A) \in C^*(\{A\})$$

(定理 9.51 の (4) と注意 9.53 を参照) である. スペクトル写像定理 (定理 9.51 の (2)) より,

$$\sigma(\sqrt[n]{A}) = \{\sqrt[n]{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\} \subseteq [0, \infty)$$

であるから $\sqrt[n]{A} \in \mathcal{A}_+$ であり,

$$(\sqrt[n]{A})^n = (\sqrt[n]{\mathrm{id}})^n(A) = \mathrm{id}(A) = A$$

である. 今, $B \in \mathcal{A}_+$ が $B^n = A$ を満たすとする. このとき連続関数カルキュラスの合成 (定理 9.51 の (3)) より,

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{\mathrm{id}}(A) = (\sqrt[n]{\mathrm{id}})(B^n) = (\sqrt[n]{\mathrm{id}})(\mathrm{id}^n(B)) = (\sqrt[n]{\mathrm{id}} \circ \mathrm{id}^n)(B) = \mathrm{id}(B) = B$$

である. □

補題 9.60. $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ と $\alpha \in [\|A\|, \infty)$ に対し次は互いに同値である.

(1) $\|\alpha 1 - A\| \leqslant \alpha$.
(2) $A \in \mathcal{A}_+$.

証明. (1) ⇒ (2) を示す. (1) が成り立つならば連続関数カルキュラスより任意の $\lambda_0 \in \sigma(A)$ に対し,

$$\alpha - \lambda_0 \leqslant |\alpha - \lambda_0| \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\alpha - \lambda| = \|\alpha 1 - A\| \leqslant \alpha$$

であるから $\lambda_0 \in [0, \infty)$ である. よって (2) が成り立つ.
(2) ⇒ (1) を示す. (2) が成り立つとする. 任意の $\lambda \in \sigma(A)$ に対し $0 \leqslant \lambda \leqslant \|A\| \leqslant \alpha$ であるから,

$$\|\alpha 1 - A\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\alpha - \lambda| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} (\alpha - \lambda) \leqslant \alpha$$

である. よって (1) が成り立つ. □

命題 9.61. $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. $\mathcal{A}$ の非負部分 $\mathcal{A}_+$ に関して次が成り立つ.

(1) 任意の $A \in \mathcal{A}_+$, 任意の $\alpha \in [0, \infty)$ に対し $\alpha A \in \mathcal{A}_+$.
(2) 任意の $A, B \in \mathcal{A}_+$ に対し $A + B \in \mathcal{A}_+$.
(3) $A \in \mathcal{A}_+$ が $-A \in \mathcal{A}_+$ を満たすならば $A = 0$.

証明. (1) スペクトル写像定理 (定理 9.51 の (2)) より $\sigma(\alpha A) = \{\alpha\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} \subseteq [0, \infty)$ であるから $\alpha A \in \mathcal{A}_+$ である.

(2) 補題 9.60 より,

$$\|\|A\|1 - A\| \leqslant \|A\|, \quad \|\|B\|1 - B\| \leqslant \|B\|$$

である. よって $\alpha := \|A\| + \|B\| \geqslant \|A + B\|$ とおけば,

$$\|\alpha 1 - (A + B)\| \leqslant \|\|A\|1 - A\| + \|\|B\|1 - B\| \leqslant \|A\| + \|B\| = \alpha$$

であるから, 再び補題 9.60 より $A + B \in \mathcal{A}_+$ である.

(3) $A \in \mathcal{A}_+$ が $-A \in \mathcal{A}_+$ を満たすならばスペクトル写像定理より $\pm\lambda \geqslant 0$ $(\forall \lambda \in \sigma(A))$ である. よって $\sigma(A) = \{0\}$ だから $A = 0$ である.

□

定義 9.62 (C^*-環の自己共役部分の順序)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. $\mathcal{A}$ の自己共役部分 $\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ における二項関係 $\leqslant$ を,

$$A \leqslant B \quad \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \quad B - A \in \mathcal{A}_+$$

として定義する. このとき命題 9.61 より $\leqslant$ は $\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ における順序である. また,

$$\begin{aligned} A \leqslant B \quad &\Rightarrow \quad A + C \leqslant B + C \quad (\forall C \in \mathcal{A}_{\mathrm{sa}}), \\ A \leqslant B \quad &\Rightarrow \quad \alpha A \leqslant \alpha B \quad (\forall \alpha \in [0, \infty)) \end{aligned}$$

である. 以後, C^*-環 $\mathcal{A}$ の自己共役部分 $\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ には断りなくこの順序が備わっているものとする.

補題 9.63. $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とする. 任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し,

$$\sigma(AB) \backslash \{0\} = \sigma(BA) \backslash \{0\}$$

が成り立つ.

証明. $\lambda \notin \sigma(AB) \backslash \{0\}$ として $\lambda \notin \sigma(BA) \backslash \{0\}$ が成り立つことを示す. $\lambda = 0$ ならば成り立つので $\lambda \neq 0$ とする. このとき $\lambda \notin \sigma(AB)$ であるから $C := (\lambda - AB)^{-1} \in GL(\mathcal{A})$ とおけば,

$$\lambda C = 1 + ABC = 1 + CAB$$

である. よって,

$$\begin{aligned} (\lambda 1 - BA)(1 + BCA) &= \lambda(1 + BCA) - B(1 + ABC)A = \lambda(1 + BCA) - \lambda BCA = \lambda 1, \\ (1 + BCA)(\lambda 1 - BA) &= \lambda(1 + BCA) - B(1 + CAB)A = \lambda(1 + BCA) - \lambda BCA = \lambda 1 \end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{1}{\lambda}(1 + BCA) = (\lambda 1 - BA)^{-1}$$

である. ゆえに $\lambda \notin \sigma(BA)\backslash\{0\}$ である. これより $\sigma(BA)\backslash\{0\} \subseteq \sigma(AB)\backslash\{0\}$ が成り立つ. 全く対称的な議論により逆の包含関係も示せる. □

補題 9.64. $\mathcal{A}$ を C^*-環, $A \in \mathcal{A}$ とする. もし $AA^* \leqslant 0$ ならば $A = 0$ が成り立つ.

証明. 補題 9.63 より,

$$\sigma(A^*A)\backslash\{0\} = \sigma(AA^*)\backslash\{0\} \subseteq (-\infty, 0)$$

であるから $\sigma(A^*A) \subseteq (-\infty, 0]$, 従って $A^*A \leqslant 0$ である.

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*) \in \mathcal{A}_{\mathrm{sa}}, \quad A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*) \in \mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$$

とおくと,

$$A = A_1 + iA_2, \quad A^* = A_1 - iA_2$$

であり, スペクトル写像定理 (定理 9.51 の (2)) より $A_j^2 \geqslant 0$ $(j = 1, 2)$ であるから,

$$A^*A + AA^* = (A_1 - iA_2)(A_1 + iA_2) + (A_1 + iA_2)(A_1 - iA_2) = 2(A_1^2 + A_2^2) \geqslant 0$$

である. よって,

$$0 \leqslant 2(A_1^2 + A_2^2) - AA^* = A^*A \leqslant 0$$

であるから $A^*A = 0$ であり, $\|A\|^2 = \|A^*A\| = 0$ より $A = 0$ である. □

命題 9.65. $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. このとき任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $A^*A \geqslant 0$ が成り立つ.

証明. $A^*A \in \mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ の Jordan 分解 (9.56) を,

$$A^*A = B_+ - B_-, \quad B_+, B_- \geqslant 0, \quad B_+B_- = B_-B_+ = 0$$

とおく. このときスペクトル写像定理 (定理 9.51 の (2)) より $B_-^3 \geqslant 0$ であるから,

$$(AB_-)^*(AB_-) = B_-A^*AB_- = B_-(B_+ - B_-)B_- = -B_-^3 \leqslant 0$$

である. よって補題 9.64 より $AB_- = 0$ であるから,

$$0 = A^*AB_- = (B_+ - B_-)B_- = B_-^2,$$

従って $\|B_-\|^2 = \|B_-^2\| = 0$ であり,

$$A^*A = B_+ - B_- = B_+ \geqslant 0$$

である. □

命題 9.66. $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. $\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ の順序に関して次が成り立つ.

(1) $A, B \in \mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ が $A \leqslant B$ を満たすならば, 任意の $C \in \mathcal{A}$ に対し $C^*AC \leqslant C^*BC$.
(2) 任意の $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ に対し $-\|A\|1 \leqslant A \leqslant \|A\|1$.
(3) $A, B \in \mathcal{A}_+$ が $A \leqslant B$ を満たすならば, $\|A\| \leqslant \|B\|$.
(4) $A, B \in \mathcal{A}_+ \cap GL(\mathcal{A})$ が $A \leqslant B$ を満たすならば, $0 \leqslant B^{-1} \leqslant A^{-1}$.

証明. (1) $B - A \in \mathcal{A}_+$ だから, 命題 9.59 と命題 9.65 より,

$$C^*BC - C^*AC = C^*(B - A)C = C^*\sqrt{B - A}^2 C = (\sqrt{B - A}C)^*(\sqrt{B - A}C) \geqslant 0.$$

よって $C^*AC \leqslant C^*BC$ である.

(2) 任意の $\lambda \in \sigma(A)$ に対し $-\|A\| \leqslant \lambda \leqslant \|A\|$ であるからスペクトル写像定理 (定理 9.51 の (2)) より,

$$\sigma(\|A\|1 \pm A) = \{\|A\| \pm \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} \subseteq [0, \infty)$$

である. よって $\|A\|1 \pm A \geqslant 0$ だから $-\|A\|1 \leqslant A \leqslant \|A\|1$ である.

(3) (2) より $0 \leqslant A \leqslant B \leqslant \|B\|1$ だから, $\|B\|1 - A \geqslant 0$ である. よってスペクトル写像定理より,

$$\|B\| - \lambda \geqslant 0 \ \ (\forall \lambda \in \sigma(A))$$

だから,

$$\|A\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \leqslant \|B\|.$$

(4) $\sigma(A), \sigma(B) \subseteq (0, \infty)$ であるから連続関数カルキュラスにより $A^{-1}, A^{-\frac{1}{2}}, B^{-1}, B^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{A}_+ \cap GL(\mathcal{A})$ が定義できる. (1) より,

$$0 \leqslant B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} \leqslant B^{-\frac{1}{2}} B B^{-\frac{1}{2}} = 1$$

だから (3) より,

$$\|B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}}\| \leqslant 1$$

である. ここで C^*-ノルム条件より,

$$\begin{aligned} 1 &\geqslant \|B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}}\| = \|B^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} B^{-\frac{1}{2}}\| = \|A^{\frac{1}{2}} B^{-\frac{1}{2}}\|^2 \\ &= \|A^{\frac{1}{2}} B^{-\frac{1}{2}} B^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}\| = \|A^{\frac{1}{2}} B^{-1} A^{\frac{1}{2}}\| \end{aligned}$$

であるから (1), (2) より,

$$0 \leqslant A^{\frac{1}{2}} B^{-1} A^{\frac{1}{2}} \leqslant \|A^{\frac{1}{2}} B^{-1} A^{\frac{1}{2}}\| 1 \leqslant 1$$

である. よって (1) より,

$$0 \leqslant B^{-1} = A^{-\frac{1}{2}} (A^{\frac{1}{2}} B^{-1} A^{\frac{1}{2}}) A^{-\frac{1}{2}} \leqslant A^{-\frac{1}{2}} 1 A^{-\frac{1}{2}} = A^{-1}$$

である.

□

定義 9.67 (近似単位元)**.** $\mathcal{A}$ を Banach 環とする. ノルムが 1 以下の $\mathcal{A}$ の元からなるネット $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ で,

$$AU_\lambda \to A, \ \ U_\lambda A \to A \ \ (\forall A \in \mathcal{A})$$

を満たすものを $\mathcal{A}$ の近似単位元と言う.

補題 9.68. $\mathcal{A}$ を単位的ではない C^*-環とし,

$$\Lambda := \{A \in \mathcal{A}_+ : \|A\| < 1\}$$

とおく. このとき任意の $A \in \mathcal{A}_+$ に対し,

$$A(1 + A)^{-1} = 1 - (1 + A)^{-1} \in \Lambda$$

であり, 任意の $A \in \Lambda$ に対し,

$$(1 - A)^{-1} - 1 \in \mathcal{A}_+$$

である. そして,

$$\mathcal{A}_+ \ni A \mapsto A(1 + A)^{-1} \in \Lambda, \tag{9.52}$$

$$\Lambda \ni A \mapsto (1 - A)^{-1} - 1 \in \mathcal{A}_+ \tag{9.53}$$

はそれぞれ順序を保存する全単射であり, 互いに逆写像である.

証明.

$$f : [0,\infty) \ni t \mapsto t(1+t)^{-1} = 1-(1+t)^{-1} \in [0,1),$$
$$g : [0,1) \ni s \mapsto (1-s)^{-1} - 1 \in [0,\infty)$$

はそれぞれ連続関数であり互いに逆写像である．任意の $A \in \mathcal{A}_+$ に対し，スペクトル写像定理 (定理 9.51 の (2)) より $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) \subseteq [0,1)$ であるから，

$$\|f(A)\| = \max f(\sigma(A)) < 1$$

[*140]である．そして $f(0) = 0$ であることと定理 9.51 の (4) より，

$$f(A) = A(1+A)^{-1} \in C^*(\{A\}) \cap \widetilde{\mathcal{A}}_+ \subseteq \mathcal{A}_+$$

であるから，

$$f(A) = A(1+A)^{-1} \in \Lambda$$

である．また任意の $A \in \Lambda$ に対し，$g(0) = 0$ であることと定理 9.51 の (4) より，

$$g(A) = (1-A)^{-1} - 1 \in C^*(\{A\}) \cap \widetilde{\mathcal{A}}_+ \subseteq \mathcal{A}_+$$

である．f, g は互いに逆写像であるから，連続関数カルキュラスの合成 (定理 9.51 の (3)) より，

$$A = g(f(A)) \ \ (\forall A \in \mathcal{A}_+), \ \ A = f(g(A)) \ \ (\forall A \in \Lambda)$$

である．よって (9.52) と (9.53) は互いに逆写像である．そして $A, B \in \mathcal{A}_+$ が $A \leqslant B$ ならば命題 9.66 の (4) より $(1+B)^{-1} \leqslant (1+A)^{-1}$ なので，

$$1-(1+A)^{-1} \leqslant 1-(1+B)^{-1}$$

である．よって (9.52) は順序を保存する．また $A, B \in \Lambda$ が $A \leqslant B$ ならば命題 9.66 の (4) より $(1-A)^{-1} \leqslant (1-B)^{-1}$ なので，

$$(1-A)^{-1} - 1 \leqslant (1-B)^{-1} - 1$$

である．よって (9.53) は順序を保存する． □

補題 9.69 (Dini の定理)**.** X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $C_0(X)$ のネットとする．もし任意の $x \in X$ に対し $(f_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$ が $[0,\infty)$ の単調減少ネットであり $\lim_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x) = 0$ が成り立つならば，$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は 0 に一様収束する．

証明. 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ を取り固定する．$C_0(X)$ の定義 5.159 より各 $\lambda \in \Lambda$ に対し，

$$(f_\lambda \geqslant \varepsilon) = \{x \in X : f_\lambda(x) \geqslant \varepsilon\}$$

はコンパクトである．そして任意の $x \in X$ に対し $\lim_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x) = 0$ であるから，

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} (f_\lambda \geqslant \varepsilon) = \varnothing$$

である．よって有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在し，

$$\bigcap_{j=1}^{n} (f_{\lambda_j} \geqslant \varepsilon) = \varnothing \tag{9.54}$$

が成り立つ．そこで $\lambda_0 \geqslant \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ なる $\lambda_0 \in \Lambda$ を取る．このとき任意の $\lambda \geqslant \lambda_0$, 任意の $x \in X$ に対し，

$$0 \leqslant f_\lambda(x) \leqslant f_{\lambda_0}(x) \leqslant \min\{f_{\lambda_1}(x), \cdots, f_{\lambda_n}(x)\}$$

であるから (9.54) より，

$$0 \leqslant f_\lambda(x) < \varepsilon \ \ (\forall \lambda \geqslant \lambda_0, \forall x \in X)$$

が成り立つ．よって $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は 0 に一様収束する． □

[*140] $\sigma(A)$ がコンパクトであること (系 9.11) に注意．

定理 9.70 (C^*-環の非負元からなる近似単位元の存在)**.** $\mathcal{A}$ を単位的ではない C^*-環とする．このとき，

$$\Lambda := \{A \in \mathcal{A}_+ : \|A\| < 1\}$$

は $\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ の順序により有向集合 (定義 1.19) である．そしてネット $(U)_{U\in\Lambda}$ は $\mathcal{A}$ の近似単位元 (定義 9.67) である．

証明. $\mathcal{A}_+$ は $\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ の順序によって有向集合であるから，補題 9.68 より，Λ も $\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ の順序によって有向集合である．$(U)_{U\in\Lambda}$ が $\mathcal{A}$ の近似単位元であることを示すには，注意 9.58 より，ノルムが 1 以下の $A \in \mathcal{A}_+\backslash\{0\}$ を取り固定し，

$$\lim_{U\in\Lambda} UA = 0 \tag{9.55}$$

が成り立つことを示せば十分である．任意の $U_0 \in \Lambda$ と，$U \geqslant U_0$ なる任意の $U \in \Lambda$ に対し，命題 9.66 の (1) より単位化 C^*-環 $\widetilde{\mathcal{A}}$ において，

$$(1-U)^2 = \sqrt{1-U}(1-U)\sqrt{1-U} \leqslant \sqrt{1-U}^2 = 1-U \leqslant 1-U_0$$

であるから，

$$0 \leqslant A(1-U)^2A \leqslant A(1-U_0)A$$

である．よって C^*-ノルム条件と命題 9.66 の (3) より，

$$\|A-AU\|^2 = \|A(1-U)^2A\| \leqslant \|A(1-U_0)A\| \leqslant \|A-AU_0\|$$

である．これより (9.55) が成り立つことを示すには，任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し，

$$\|A-AU_0\| < \varepsilon \tag{9.56}$$

を満たす $U_0 \in \Lambda$ が存在することを示せばよい．今，可換 C^*-環 $C^*(\{A\})$ の Gelfand 変換 (9.43)

$$\Gamma : C^*(\{A\}) \to C_0(\widehat{C^*(\{A\})})$$

を考え，

$$f := \Gamma(A) \in C_0(\widehat{C^*(\{A\})})$$

とおく．命題 9.59 より $\sqrt{A} \in C^*(\{A\})$ であるから，

$$f = \Gamma(A) = \Gamma(\sqrt{A})^2$$

なので f は非負値である．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $h_n : \widehat{C^*(\{A\})} \to [0,\infty)$ を，

$$h_n(\gamma) := \frac{f(\gamma)}{f(\gamma)+n^{-1}} \quad (\forall \gamma \in \widehat{C^*(\{A\})})$$

とおくと，h_n は $\frac{1}{f+n^{-1}} \in C_b(\widehat{C^*(\{A\})})$ と $f \in C_0(\widehat{C^*(\{A\})})$ の積なので $h_n \in C_0(\widehat{C^*(\{A\})})$ (命題 5.160) である．よって $h_n = \Gamma(V_n)$ なる $V_n \in C^*(\{A\})$ が定まり，h_n が非負値であることから $V_n \in \mathcal{A}_+$ である．また，

$$\|V_n\| = \|h_n\| = \sup_{\gamma\in\widehat{C^*(\{A\})}} \frac{f(\gamma)}{f(\gamma)+n^{-1}} = \sup_{\gamma\in\widehat{C^*(\{A\})}} \left(1 - n^{-1}\frac{1}{f(\gamma)+n^{-1}}\right) < 1$$

であるから $V_n \in \Lambda$ である．今，$C_0(\widehat{C^*(\{A\})})$ の列 $(fh_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考えると，任意の $\gamma \in \widehat{C^*(\{A\})}$ に対し，

$$f(\gamma)h_n(\gamma) \leqslant f(\gamma)h_{n+1}(\gamma) \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n\to\infty} f(\gamma)h_n(\gamma) = f(\gamma)$$

であるから，Dini の定理 9.69 より，

$$\lim_{n\to\infty} \|f - fh_n\| = 0$$

が成り立つ．よって，

$$\lim_{n\to\infty} \|A - AV_n\| = \lim_{n\to\infty} \|\Gamma(A-AV_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|f - fh_n\| = 0$$

が成り立つ．ゆえにある $n_0 \in \mathbb{N}$ に対し $\|A - AV_{n_0}\| < \varepsilon$ となるから $U_0 = V_{n_0} \in \Lambda$ とおけば (9.56) が成り立つ． □

系 9.71 (C^*-環の閉イデアルは自動的に $*$-イデアル)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ を閉イデアル (定義 2.27) とする. このとき $\mathcal{I}$ は $*$-イデアル (定義 2.28) である.

証明. $\mathcal{I}^* := \{A^* : A \in \mathcal{I}\}$ とおき, $\mathcal{B} := \mathcal{I} \cap \mathcal{I}^*$ とおく. このとき $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ の部分 C^*-環であるから, 定理 9.70 より $\mathcal{B}$ は非負元からなる近似単位元 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を持つ. 任意の $A \in \mathcal{I}$ に対し $AA^* \in \mathcal{B}$ であるから,

$$\|A^* - A^*U_\lambda\|^2 = \|(1-U_\lambda)AA^*(1-U_\lambda)\| \leqslant \|AA^* - AA^*U_\lambda\| \to 0$$

*141である. よって,

$$A^* = \lim_{\lambda\in\Lambda} A^*U_\lambda \in \mathcal{I}$$

であるから $\mathcal{I}$ は $*$-イデアルである. □

定理 9.72 (商 C^*-環)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ を閉イデアル*142とする. このとき商 Banach $*$-環 (定義 3.11) $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ は C^*-環である.

証明. $\mathcal{I}$ は $\mathcal{A}$ の部分 C^*-環であるから, 定理 9.70 より $\mathcal{I}$ は非負元からなる近似単位元 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を持つ. 商写像を,

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto [A] \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$$

とする. このとき,

$$\|[A]\| = \lim_{\lambda\in\Lambda}\|A - AU_\lambda\| \quad (\forall A \in \mathcal{A}) \tag{9.57}$$

が成り立つことを示す. 商ノルムの定義 (3.5) より,

$$\|[A]\| = \inf\{\|A-B\| : B \in \mathcal{I}\}$$

であるから, 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し,

$$\|A - B\| < \|[A]\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす $B \in \mathcal{I}$ が取れる. また $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $\mathcal{I}$ の近似単位元だから $\lim_{\lambda\in\Lambda}\|B - BU_\lambda\| = 0$ であるので, $\lambda_0 \in \Lambda$ で,

$$\|B - BU_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall \lambda \geqslant \lambda_0)$$

なるものが取れる. よって任意の $\lambda \geqslant \lambda_0$ に対し,

$$\|[A]\| \leqslant \|A - AU_\lambda\| \leqslant \|(A-B)(1-U_\lambda)\| + \|B - BU_\lambda\| \leqslant \|A-B\| + \|B-BU_\lambda\| < \|[A]\| + \varepsilon$$

となるから $\varepsilon \in (0,\infty)$ の任意性より (9.57) が成り立つ. これより任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し,

$$\begin{aligned}\|[A]\|^2 &= \lim_{\lambda\in\Lambda}\|A - AU_\lambda\|^2 = \lim_{\lambda\in\Lambda}\|A(1-U_\lambda)\|^2 = \lim_{\lambda\in\Lambda}\|(1-U_\lambda)A^*A(1-U_\lambda)\| \\ &\leqslant \lim_{\lambda\in\Lambda}\|A^*A - A^*AU_\lambda\| = \|[A^*A]\| = \|[A]^*[A]\|\end{aligned}$$

であるから,

$$\|[A]\|^2 \leqslant \|[A]^*[A]\| \leqslant \|[A]^*\|\|[A]\| = \|[A]\|^2$$

なので Banach $*$-環 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ は C^*-ノルム条件 (3.4) を満たす. よって $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ は C^*-環である. □

定義 9.73 (C^*-環の射影)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. $P \in \mathcal{A}$ が $P^* = P$ かつ $P^2 = P$ を満たすとき P を $\mathcal{A}$ の射影と言う. また射影 $P, Q \in \mathcal{A}$ に対し $PQ = 0$*143が成り立つとき P と Q は互いに直交すると言う.

命題 9.74 (C^*-環の射影の基本性質)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環とし, $P \in \mathcal{A}$ を射影とする. このとき,

(1) $\sigma(P) \subseteq \{0,1\}$ である.

---

*141 必要ならば単位化 C^*-環を考えて $0 \leqslant 1 - U_\lambda \leqslant 1$ より $\|1 - U_\lambda\| \leqslant 1$ であることに注意.
*142 系 9.71 より $\mathcal{I}$ は自動的に $*$-イデアルである.
*143 $PQ = 0$ ならば $QP = (PQ)^* = 0$ であることに注意.

(2) $0 \leqslant A \leqslant P$ なる任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し, $A = PA = AP = PAP$ が成り立つ.
(3) $0 \leqslant P \leqslant Q$ なる任意の射影 $Q \in \mathcal{A}$ に対し, $Q - P$ は P と直交する射影である.

証明. (1) $P - P^2 = 0$ だからスペクトル写像定理 (定理 9.51 の (2)) より任意の $\lambda \in \sigma(P)$ に対し,

$$\lambda - \lambda^2 \in \sigma(P - P^2) = \sigma(0) = \{0\}$$

である. よって $\lambda \in \{0, 1\}$ である.
(2) 命題 9.66 の (1) より,

$$0 \leqslant (1 - P)A(1 - P) \leqslant (1 - P)P(1 - P) = 0$$

であるから,

$$\|\sqrt{A} - \sqrt{A}P\|^2 = \|(1 - P)A(1 - P)\| = 0$$

である. よって $\sqrt{A} = \sqrt{A}P$ だから $A = AP$ であり, $PA = (AP)^* = A^* = A$, $PAP = PA = A$ である.
(3) (2) より $P = PQ = QP$ であるから,

$$(Q - P)^2 = Q - QP - PQ + P = Q - P - P + P = Q - P$$

である. よって $Q - P$ は射影である. そして,

$$(Q - P)P = QP - P = P - P = 0$$

だから $Q - P$ と P は直交する.

□

命題 9.75 (射影の直交条件)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環とし, $\mathcal{A}$ の有限個の射影 $P_1, \cdots, P_n$ を考える. このとき次は互いに同値である.

(1) $P_1, \cdots, P_n$ は互いに直交する.
(2) $\sum_{j=1}^n P_j$ は射影である.

証明. (1) ⇒ (2) は自明である. (2) ⇒ (1) を示す. (2) が成り立つとし, $P := \sum_{j=1}^n P_j$ とおく. そして任意の $i, j \in \{1, \cdots, n\} : i \neq j$ を取る. このとき命題 9.74 の (2), (3) より $P_i P = P_i$ であり $P - P_j$ は射影である. そして $0 \leqslant P_i \leqslant P - P_j$ だから命題 9.74 の (2) より,

$$P_i = P_i(P - P_j) = P_i P - P_i P_j = P_i - P_i P_j$$

である. よって $P_i P_j = 0$ である. □

定義 9.76 (C^*-環の部分等長)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. $V \in \mathcal{A}$ が部分等長であるとは V^*V が $\mathcal{A}$ の射影であることを言う.

命題 9.77. $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. $V \in \mathcal{A}$ が部分等長であるならば $V = VV^*V$ であり, V^* も部分等長である.

証明. 必要ならば単位化 C^*-環を考えて命題 9.74 の (3) より V^*V と $1 - V^*V$ は互いに直交する. よって C^*-ノルム条件より,

$$\|V - VV^*V\|^2 = \|V(1 - V^*V)\|^2 = \|(1 - V^*V)V^*V(1 - V^*V)\| = 0$$

だから $V = VV^*V$ である. ゆえに $VV^* = VV^*VV^*$ だから VV^* は射影なので V^* は部分等長である. □

9.6 C^*-環上の $*$-環準同型写像の自動的ノルム減少性と自動的ノルム保存性

定理 9.78 (自動的ノルム減少性)**.** $\mathcal{A}$ を Banach $*$-環, $\mathcal{B}$ を C^*-環とし, $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を $*$-環準同型写像とする. このとき π はノルム減少である. すなわち,

$$\|\pi(A)\| \leqslant \|A\| \quad (\forall A \in \mathcal{A}) \tag{9.58}$$

が成り立つ.

証明. (1) $\mathcal{A},\mathcal{B}$ がそれぞれ単位的であり, π が $\mathcal{A}$ の単位元を $\mathcal{B}$ の単位元に写す場合を考える. このとき任意の $A\in\mathcal{A}$ に対し $\sigma(\pi(A))\subseteq\sigma(A)$ であるからスペクトル半径 (定義 9.9) に関して $\mathrm{spr}(\pi(A))\leqslant\mathrm{spr}(A)$ が成り立つ. よって任意の $A\in\mathcal{A}$ に対し C^*-ノルム条件と定理 9.25 と命題 9.10 より,

$$\|\pi(A)\|^2=\|\pi(A^*A)\|=\mathrm{spr}(\pi(A^*A))\leqslant\mathrm{spr}(A^*A)\leqslant\|A^*A\|\leqslant\|A\|^2$$

である. よって (9.58) は成り立つ.

(2) $\mathcal{A}$ が単位的である場合を考える. $\mathcal{B}$ の部分 C^*-環 $\overline{\pi(\mathcal{A})}\subseteq\mathcal{B}$ を考えると $\mathcal{A}$ の単位元 1 に対し $\pi(1)$ は $\overline{\pi(\mathcal{A})}$ の単位元である. よって $*$-環準同型写像 $\pi:\mathcal{A}\ni A\mapsto\pi(A)\in\overline{\pi(\mathcal{A})}$ に対して (1) を適用すれば (9.58) を得る.

(3) $\mathcal{A}$ が単位的ではなく $\mathcal{B}$ が単位的である場合を考える. $\mathcal{A}$ の単位化 Banach $*$-環 (定義 9.29) を $\widetilde{\mathcal{A}}$ とし,

$$\widetilde{\pi}:\widetilde{\mathcal{A}}=\mathcal{A}\oplus\mathbb{C}1\ni A+\alpha1\mapsto\pi(A)+\alpha1\in\mathcal{B}$$

とおくと $\widetilde{\pi}$ は $*$-環準同型写像であり $\mathcal{A}\subseteq\widetilde{\mathcal{A}}$ 上で π と一致する. よって (2) より,

$$\|\pi(A)\|=\|\widetilde{\pi}(A)\|\leqslant\|A\|\quad(\forall A\in\mathcal{A})$$

が成り立つ.

(4) $\mathcal{A},\mathcal{B}$ が共に単位的でない場合を考える. $\widetilde{\mathcal{B}}$ を単位化 C^*-環とすると π は $\mathcal{A}$ から $\widetilde{\mathcal{B}}$ への $*$-環準同型写像とみなせるので (3) より (9.58) が成り立つ.

□

定理 9.79 (自動的ノルム保存性)**.** $\mathcal{A},\mathcal{B}$ を C^*-環とし, $\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ を単射 $*$-環準同型写像とする. このとき π はノルムを保存する. すなわち,

$$\|\pi(A)\|=\|A\|\quad(\forall A\in\mathcal{A})\tag{9.59}$$

が成り立つ.

証明. (1) $\mathcal{A},\mathcal{B}$ がそれぞれ単位的可換 C^*-環であり, π が $\mathcal{A}$ の単位元を $\mathcal{B}$ の単位元に写す場合を考える. $\mathcal{A},\mathcal{B}$ の指標空間 $\widehat{\mathcal{A}},\widehat{\mathcal{B}}$[*144] に対し,

$$\tau:\widehat{\mathcal{B}}\ni\delta\mapsto\delta\circ\pi\in\widehat{\mathcal{A}}$$

なる写像を定義すると弱 $*$-位相の定義 3.66 とネットによる連続性の特徴付け (命題 1.50) より τ は明らかに連続である. 今, τ が全射であることを示す. τ の連続性と $\widehat{\mathcal{B}}$ のコンパクト性より $\tau(\widehat{\mathcal{B}})$ は $\widehat{\mathcal{A}}$ のコンパクト集合, 従って閉集合である. よってもし $\widehat{\mathcal{A}}\neq\tau(\widehat{\mathcal{B}})$ ならば Urysohn の補題 5.165 より $f\in C(\widehat{\mathcal{A}})$ で,

$$\|f\|=1,\quad\mathrm{supp}(f)\subseteq\widehat{\mathcal{A}}\backslash\tau(\widehat{\mathcal{B}})$$

を満たすものが取れる. そこで $\mathcal{A}$ の Gelfand 変換 (9.43) $\Gamma_{\mathcal{A}}:\mathcal{A}\to C(\widehat{\mathcal{A}})$ を考えると $f=\Gamma_{\mathcal{A}}(A)$ なる $A\in\mathcal{A}$ が定まり, $\mathrm{supp}(\Gamma_{\mathcal{A}}(A))=\mathrm{supp}(f)\subseteq\widehat{\mathcal{A}}\backslash\tau(\widehat{\mathcal{B}})$ より,

$$0=\Gamma_{\mathcal{A}}(A)(\tau(\delta))=\delta(\pi(A))\quad(\forall\delta\in\widehat{\mathcal{B}})$$

である. よって $\mathcal{B}$ の Gelfand 変換 $\Gamma_{\mathcal{B}}:\mathcal{B}\to C(\widehat{\mathcal{B}})$ に対し,

$$\|\pi(A)\|=\|\Gamma_{\mathcal{B}}(\pi(A))\|=\sup_{\delta\in\widehat{\mathcal{B}}}|\Gamma_{\mathcal{B}}(\pi(A))(\delta)|=\sup_{\delta\in\widehat{\mathcal{B}}}|\delta(\pi(A))|=0$$

となり, π の単射性より $A=0$ となる. しかしこれは $1=\|f\|=\|\Gamma_{\mathcal{A}}(A)\|=\|A\|$ であることに矛盾する. ゆえに $\tau(\widehat{\mathcal{B}})=\widehat{\mathcal{A}}$ である. これより任意の $A\in\mathcal{A}$ に対し,

$$\|\pi(A)\|=\|\Gamma_{\mathcal{B}}(\pi(A))\|=\sup_{\delta\in\widehat{\mathcal{B}}}|\delta(\pi(A))|=\sup_{\delta\in\widehat{\mathcal{B}}}|\tau(\delta)(A)|=\sup_{\gamma\in\widehat{\mathcal{A}}}|\gamma(A)|=\|\Gamma_{\mathcal{A}}(A)\|=\|A\|$$

である.

[*144] 定義 9.39 より $\mathcal{A}^*,\mathcal{B}^*$ の弱 $*$-位相の相対位相によりコンパクト Hausdorff 空間であることに注意.

(2) $\mathcal{A}$ が単位的可換 C^*-環である場合を考える．このとき $\mathcal{B}$ の部分 C^*-環 $\overline{\pi(\mathcal{A})} \subseteq \mathcal{B}$ は単位的かつ可換であり, $\mathcal{A}$ の単位元 1 に対し $\pi(1)$ は $\overline{\pi(\mathcal{A})}$ の単位元である．よって (1) より (9.59) が成り立つ．

(3) $\mathcal{A}$ が単位的ではない可換 C^*-環で $\mathcal{B}$ が単位的 C^*-環である場合を考える．$\widetilde{\mathcal{A}}$ を $\mathcal{A}$ の単位化 C^*-環とすると $\widetilde{\mathcal{A}}$ は可換であり,

$$\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}1 \ni A + \alpha 1 \mapsto \pi(A) + \alpha 1 \in \mathcal{B}$$

は $*$-環準同型写像である．$\widetilde{\pi}$ が単射であることを示す．そこで $A + \alpha 1 \in \widetilde{\mathcal{A}}$ が $\widetilde{\pi}(A + \alpha 1) = 0$ を満たすとする．このとき $\alpha 1 = \pi(-A)$ である．もし $\alpha \neq 0$ ならば π の単射性より $-\frac{1}{\alpha}A$ は $\mathcal{A}$ の単位元と言うことになり仮定に反する．よって $\alpha = 0$ であり, 従って $\pi(A) = \widetilde{\pi}(A + \alpha 1) = 0$ なので π の単射性より $A = 0$ である．ゆえに $\widetilde{\pi}$ は単射であるから (2) より,

$$\|\pi(A)\| = \|\widetilde{\pi}(A)\| = \|A\| \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

が成り立つ．

(4) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が共に単位的ではなく, $\mathcal{A}$ が可換 C^*-環である場合を考える．$\mathcal{B}$ の単位化 C^*-環 $\widetilde{\mathcal{B}}$ を考えると π は $\mathcal{A}$ から $\widetilde{\mathcal{B}}$ への単射 $*$-環準同型写像とみなせるので (3) より (9.59) が成り立つ．

(5) 一般の場合を考える．任意の $A \in \mathcal{A}$ を取る．可換 C^*-環 $C^*(\{A^*A\})$ 上に π を制限したものは単射 $*$-環準同型写像であるから (2), (3), (4) と C^*-ノルム条件より,

$$\|\pi(A)\|^2 = \|\pi(A^*A)\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$$

である．よって (9.59) が成り立つ．

□

定理 9.80 ($*$-環準同型写像による C^*-環の像の自動的閉性)**.** $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を C^*-環, $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を $*$-環準同型写像とする．このとき $\pi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$ は閉である．すなわち $\pi(\mathcal{A})$ は $\mathcal{B}$ の部分 C^*-環である．

証明. 定理 9.78 より π は自動的にノルム減少であるから,

$$\mathrm{Ker}(\pi) = \{A \in \mathcal{A} : \pi(A) = 0\}$$

は $\mathcal{A}$ の閉 $*$-イデアルである．そこで商 C^*-環 $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\pi)$ (定理 9.72) を考え, 商写像を,

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto [A] \in \mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\pi)$$

とすると,

$$\widehat{\pi} : \mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\pi) \ni [A] \mapsto \pi(A) \in \mathcal{B}$$

は well-defined であり単射 $*$-環準同型写像である．よって定理 9.79 より $\widehat{\pi}$ は等長であるから $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\pi)$ の完備性より,

$$\pi(\mathcal{A}) = \widehat{\pi}(\mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\pi))$$

は閉である．

□

10 Hilbert 空間上の線型作用素論

この節では Hilbert 空間は特に断らない限り $\mathbb{C}$ 上のものとする.

10.1 C^*-環 $B(\mathcal{H})$ の元の作用素としての特徴付け

定義 10.1 (Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素, 有界 (非負) 自己共役作用素, 射影作用素, 部分等長作用素)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. 系 3.53 より $B(\mathcal{H})$ は単位的 C^*-環 (単位元は恒等作用素) である. C^*-環 $B(\mathcal{H})$ の正規元, 自己共役元, 非負元, 射影, 部分等長 (定義 9.24, 定義 9.55, 定義 9.73, 定義 9.76) をそれぞれ $\mathcal{H}$ 上の正規作用素, 有界自己共役作用素, 有界非負自己共役作用素, 射影作用素, 部分等長作用素と言う[*145].

注意 10.2 (C^*-環 $B(\mathcal{H})$ のユニタリ元は $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ とする. このとき命題 5.144 より次は互いに同値である.

(1) U はユニタリ作用素 (内積を保存する線型同型写像) である.
(2) U は等長線型同型写像である.
(3) U は単位的 C^*-環 $B(\mathcal{H})$ のユニタリ ($U^*U = UU^* = 1$) である.

命題 10.3 (C^*-環 $B(\mathcal{H})$ の可逆元の作用素としての特徴付け)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $T \in B(\mathcal{H})$ とする. このとき次は互いに同値である.

(1) T は単位的 C^*-環 $B(\mathcal{H})$ の可逆元 (定義 9.1) である.
(2) $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は全単射である.
(3) ある $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し,
$$\|Tv\| \geqslant \varepsilon\|v\|, \quad \|T^*v\| \geqslant \varepsilon\|v\| \quad (\forall v \in \mathcal{H}) \tag{10.1}$$
が成り立つ.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は自明である. (2) $\Rightarrow$ (1) は開写像定理 3.100 による. (1) が成り立つならば T^* も $B(\mathcal{H})$ の可逆元であり, 任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\|v\| = \|T^{-1}Tv\| \leqslant \|T^{-1}\|\|Tv\|, \quad \|v\| = \|{T^*}^{-1}T^*v\| \leqslant \|{T^{-1}}^*\|\|T^*v\|$$

となる. よって (3) が成り立つ. (3) $\Rightarrow$ (2) を示す. (3) が成り立つとすると明らかに $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*) = \{0\}$ であり, $\mathcal{H}$ の完備性より $\mathrm{Ran}(T), \mathrm{Ran}(T^*)$ は閉である. よって命題 3.39 と命題 3.52 の (6) より,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ran}(T) &= \overline{\mathrm{Ran}(T)} = ((\mathrm{Ran}(T))^\perp)^\perp = (\mathrm{Ker}(T^*))^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}, \\ \mathrm{Ran}(T^*) &= \overline{\mathrm{Ran}(T^*)} = ((\mathrm{Ran}(T^*))^\perp)^\perp = (\mathrm{Ker}(T))^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}\end{aligned}$$

である. よって (2) が成り立つ. □

補題 10.4 (偏極恒等式)**.** X, Z を $\mathbb{C}$ 上の線型空間, $\Phi : X \times X \to Z$ を準双線型写像 (定義 3.45) とする. このとき,

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \Phi(x + i^k y, x + i^k y) \quad (\forall x, y \in X)$$

が成り立つ.

[*145] “有界” 自己共役作用素と言うのは後に扱うように一般に自己共役作用素と言った場合, “非有界” なものを指すからである.

証明. 任意の $x, y \in X$ に対し,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3} i^k \Phi(x+i^k y, x+i^k y) &= (\Phi(x+y, x+y) - \Phi(x-y, x-y)) \\ &\quad + i\,(\Phi(x+iy, x+iy) - \Phi(x-iy, x-iy)) \\ &= 2(\Phi(x,y)+\Phi(y,x)) + 2i(\Phi(x,iy)+\Phi(iy,x)) \\ &= 2(\Phi(x,y)+\Phi(y,x)+2(\Phi(x,y)) - \Phi(y,x)) \\ &= 4\Phi(x,y)\end{aligned}$$

である. よって成り立つ. □

命題 10.5 (Hilbert 空間上の有界 (非負) 自己共役作用素の特徴付け)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $T \in B(\mathcal{H})$ とする. このとき,

(1) T が有界自己共役作用素であるための必要十分条件は $(Tv \mid v) \in \mathbb{R}$ $(\forall v \in \mathcal{H})$ が成り立つことである.
(2) T が有界非負自己共役作用素であるための必要十分条件は $(Tv \mid v) \in [0,\infty)$ $(\forall v \in \mathcal{H})$ が成り立つことである.

証明. (1) T が有界自己共役作用素ならば $T = T^*$ であるから任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(Tv \mid v) = (v \mid T^* v) = (v \mid Tv) = \overline{(Tv \mid v)}$$

である. 逆に $(Tv \mid v)$ $(\forall v \in \mathcal{H})$ ならば偏極恒等式 (10.4) より任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(Tu \mid v) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k (T(u+i^k v) \mid u+i^k v) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k (u+i^k v \mid T(u+i^k v)) = (u \mid Tv)$$

だから $T^* = T$ である.

(2) T が有界非負自己共役作用素ならば命題 9.59 より $T = \sqrt{T}^2$ なる有界非負自己共役作用素 $\sqrt{T}$ が取れるので任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(Tv \mid v) = (\sqrt{T}^2 v \mid v) = (\sqrt{T}v \mid \sqrt{T}v) \geqslant 0$$

である. 逆に $(Tv \mid v) \in [0,\infty)$ $(\forall v \in \mathcal{H})$ であるとして T が有界非負自己共役作用素であることを示す. (1) より T は自己共役なので $\sigma(T) \subseteq [0,\infty)$ であることを示せばよい. 命題 9.27 より $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ である. そこで今, $\lambda \in \sigma(T)$ で $\lambda < 0$ なるものが存在すると仮定して矛盾を導く. $\lambda - T$ が自己共役であり可逆ではないことから命題 10.3 より任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し $v_\varepsilon \in \mathcal{H}$ で,

$$\|(\lambda - T)v_\varepsilon\| < \varepsilon \|v_\varepsilon\|$$

を満たすものが存在する. よって $-\lambda(Tv_\varepsilon \mid v_\varepsilon) \geqslant 0$ より,

$$\varepsilon^2\|v_\varepsilon\|^2 > \|(\lambda - T)v_\varepsilon\|^2 = |\lambda|^2\|v_\varepsilon\|^2 - 2\lambda(Tv_\varepsilon \mid v_\varepsilon) + \|Tv_\varepsilon\|^2 \geqslant |\lambda|^2\|v_\varepsilon\|^2$$

となり $\varepsilon > |\lambda|$ を得る. $\varepsilon \in (0,\infty)$ は任意だからこれは $\lambda = 0$ を意味し $\lambda < 0$ であることに矛盾する. よって $\sigma(T) \subseteq [0,\infty)$ である.

□

命題 10.6 (Hilbert 空間上の射影作用素の特徴付け)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $P \in B(\mathcal{H})$ とする. このとき次は互いに同値である.

(1) P は $\mathcal{H}$ 上の射影作用素である.
(2) $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{K}$ が存在し直交分解 (定理 3.38) $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$ に対し,

$$Pv = v_1 \quad (\forall v = v_1 + v_2 \in \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp = \mathcal{H})$$

が成り立つ.

そして (1), (2) が成り立つとき $\mathcal{K} = \mathrm{Ran}(P)$ である.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとすると $P^* = P, P^2 = P$ より $\mathrm{Ran}(P) = \mathrm{Ker}(1-P)$ であるから $\mathrm{Ran}(P)$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間である. そして $1-P$ も射影作用素である (命題 9.74 の (3)) から $\mathrm{Ran}(1-P) = \mathrm{Ker}(P)$ であり, 命題 3.52 の (6) より,

$$\mathrm{Ran}(P)^\perp = \mathrm{Ker}(P^*) = \mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Ran}(1-P)$$

である. よって任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$v = Pv + (1-P)v \in \mathrm{Ran}(P) \oplus (\mathrm{Ran}(P))^\perp = \mathcal{H}$$

であるから $\mathcal{K} = \mathrm{Ran}(P)$ とおけば (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとする. 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2 \quad (u_1, v_1 \in \mathcal{K}, u_2, v_2 \in \mathcal{K}^\perp)$$

と表すと,

$$(Pu \mid v) = (u_1 \mid v) = (u_1 \mid v_1) = (u \mid v_1) = (u \mid Pv)$$

であるから $P^* = P$ である. また,

$$P^2 v = Pv_1 = v_1 = Pv$$

であるから $P^2 = P$ である. よって P は射影作用素である. そして $\mathrm{Ran}(P) = \mathcal{K}$ である. □

定義 10.7 (Hilbert 空間の閉部分空間の上への射影作用素)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ を閉部分空間とする. 命題 10.6 より直交分解 $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$ に対し,

$$Pv = v_1 \quad (\forall v = v_1 + v_2 \in \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp = \mathcal{H})$$

として射影作用素 $P \in B(\mathcal{H})$ が定まる. この P を閉部分空間 $\mathcal{K}$ の上への射影作用素と言う. 命題 10.6 より任意の射影作用素 $P \in B(\mathcal{H})$ に対し P は閉部分空間 $\mathrm{Ran}(P)$ の上への射影作用素である.

命題 10.8 (Hilbert 空間上の部分等長作用素の特徴付け)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $V \in B(\mathcal{H})$ とする. このとき次は互いに同値である.

(1) V は $\mathcal{H}$ 上の部分等長作用素である.
(2) $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{K}$ が存在し,

$$\|Vv\| = \|v\| \quad (\forall v \in \mathcal{K}), \quad \mathrm{Ker}(V) = \mathcal{K}^\perp$$

が成り立つ.

そして (1), (2) が成り立つとき V^*V は $\mathcal{K}$ の上への射影作用素である.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. $V^*V \in B(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{K} := \mathrm{Ran}(V^*V)$ の上への射影作用素であるから, 任意の $v \in \mathcal{K}$ に対し,

$$\|Vv\|^2 = (Vv \mid Vv) = (V^*Vv \mid v) = (v \mid v) = \|v\|^2$$

であり, 任意の $v \in \mathcal{K}^\perp$ に対し,

$$\|Vv\|^2 = (Vv \mid Vv) = (V^*Vv \mid v) = 0$$

である. よって,

$$\|Vv\| = \|v\|, \quad \mathcal{K}^\perp \subseteq \mathrm{Ker}(V)$$

である. 任意の $v \in \mathrm{Ker}(V)$ に対し,

$$v = v_1 + v_2 \in \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp = \mathcal{H}$$

と直交分解すると, $\|Vv_1\| = \|v_1\|, Vv_2 = 0$ だから,

$$0 = \|Vv\| = \|Vv_1 + Vv_2\| = \|Vv_1\| = \|v_1\|,$$

よって $v = v_2 \in \mathcal{K}^\perp$ だから $\mathrm{Ker}(V) = \mathcal{K}^\perp$ である. ゆえに (2) が成り立つ.
(2) ⇒ (1) を示す. 任意の $v \in \mathcal{K}$ に対し,

$$(v \mid v) = \|v\|^2 = \|Vv\|^2 = (Vv \mid Vv)$$

であるから, 偏極恒等式 (10.4) より, 任意の $u, v \in \mathcal{K}$ に対し,

$$(u \mid v) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k (u + i^k v \mid u + i^k v) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k (V(u + i^k v) \mid V(u + i^k v)) = (Vu \mid Vv)$$

である. よって任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2 \quad (u_1, v_1 \in \mathcal{K}, u_2, v_2 \in \mathcal{K}^\perp)$$

と直交分解すると,

$$(V^*Vu \mid v) = (Vu \mid Vv) = (Vu_1 \mid Vv_1) = (u_1 \mid v_1) = (u_1 \mid v)$$

である. ゆえに $V^*Vu = u_1$ だから V^*V は $\mathcal{K}$ の上への射影作用素であり, V は $\mathcal{H}$ 上の部分等長作用素である. □

10.2 $B(\mathcal{H})$ の WOT (弱作用素位相), SOT (強作用素位相), 射影作用素の直交族の和

定義 10.9 ($B(\mathcal{H})$ の WOT (弱作用素位相) と SOT (位相作用素位相)). $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し線型空間 $B(\mathcal{H})$ 上の線型汎関数 $\varphi_{u,v} : B(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ とセミノルム $p_v : B(\mathcal{H}) \to [0, \infty)$ を,

$$\varphi_{u,v}(T) := (Tu \mid v), \quad p_v(T) := \|Tv\| \quad (\forall T \in B(\mathcal{H}))$$

と定義する. このとき $\{\varphi_{u,v}\}_{u,v\in\mathcal{H}}$, $\{p_v\}_{v\in\mathcal{H}}$ はそれぞれ $B(\mathcal{H})$ 上の線型汎関数の分離族 (定義 3.61), $B(\mathcal{H})$ 上のセミノルムの分離族 (定義 3.56) である. $\{\varphi_{u,v}\}_{u,v\in\mathcal{H}}$ が誘導する $B(\mathcal{H})$ 上の汎弱位相 (定義 3.62) を $B(\mathcal{H})$ 上の WOT (弱作用素位相) と言い, $\{p_v\}_{v\in\mathcal{H}}$ が誘導する $B(\mathcal{H})$ 上のセミノルム位相 (定義 3.57) を $B(\mathcal{H})$ 上の SOT (位相作用素位相) と言う. セミノルム位相, 汎弱位相の基本性質 (命題 3.59, 命題 3.63) より $B(\mathcal{H})$ のネット $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $T \in B(\mathcal{H})$ に対し,

$$\begin{aligned} T_\lambda \to T \ \ (\text{in WOT}) \quad &\Leftrightarrow \quad (T_\lambda u \mid v) \to (Tu \mid v) \ \ (\forall u, v \in \mathcal{H}), \\ T_\lambda \to T \ \ (\text{in SOT}) \quad &\Leftrightarrow \quad \|T_\lambda v - Tv\| \to 0 \ \ (\forall v \in \mathcal{H}) \end{aligned} \tag{10.2}$$

である.

命題 10.10 ($B(\mathcal{H})$ のノルム位相, SOT, WOT の強弱). $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. $B(\mathcal{H})$ 上のノルム位相は SOT より強く, SOT は WOT より強い.

証明. WOT, SOT に関する収束の特徴付け (10.2) と収束による連続性の特徴付け (命題 1.50, 命題 1.60) より明らかである. □

定理 10.11. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $\varphi : B(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ を線型汎関数とする. このとき次は互いに同値でる.

(1) φ は WOT 連続である.
(2) φ は SOT 連続である.
(3) 有限個の $u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n \in \mathcal{H}$ が存在し,

$$\varphi(T) = \sum_{j=1}^{n} (Tu_j \mid v_j) \quad (\forall T \in B(\mathcal{H}))$$

が成り立つ.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は SOT が WOT より強いことによる．また (3) $\Rightarrow$ (1) は定理 3.65 による．(2) $\Rightarrow$ (3) を示す．(2) が成り立つとすると，$\{T \in B(\mathcal{H}) : |\varphi(T)| < 1\}$ は $0 \in B(\mathcal{H})$ の SOT に関する近傍であるから，セミノルム位相の基本性質 (命題 3.59 の (3)) より有限個の $v_1, \cdots, v_n \in \mathcal{H}$ が取れて，

$$\bigcap_{j=1}^{n}\{T \in B(\mathcal{H}) : \|Tv_j\| < 1\} \subseteq \{T \in B(\mathcal{H}) : |\varphi(T)| < 1\}$$

となる．よって，

$$|\varphi(T)| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\|Tv_j\|^2} \quad (\forall T \in B(\mathcal{H}))$$

が成り立つので，直和 Hilbert 空間 $\mathcal{H}^n = \bigoplus^n \mathcal{H}$ の部分空間

$$\mathcal{K} := \{(Tv_j)_{j=1,\cdots,n} \in \mathcal{H}^n : T \in B(\mathcal{H})\}$$

を考えると，

$$\psi : \mathcal{K} \ni (Tv_j)_{j=1,\cdots,n} \mapsto \varphi(T) \in \mathbb{C}$$

は well-defined な有界線型汎関数である．Hahn-Banach の拡張定理 3.71 より ψ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}^n$ 上の有界線型汎関数に拡張できるので，Riesz の表現定理 3.44 より $(u_j)_{j=1,\cdots,n} \in \mathcal{H}^n$ で，

$$\varphi(T) = \psi((Tv_j)_{j=1,\cdots,n}) = ((Tv_j)_{j=1,\cdots,n} \mid (u_j)_{j=1,\cdots,n}) = \sum_{j=1}^{n}(Tv_j \mid u_j) \quad (\forall T \in B(\mathcal{H}))$$

を満たすものが取れる．よって (3) が成り立つ． □

系 10.12. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$\mathcal{C} \subseteq B(\mathcal{H})$ を凸集合とする．このとき次は互いに同値である．

(1) $\mathcal{C}$ は WOT に関して閉．
(2) $\mathcal{C}$ は SOT に関して閉．

証明. 定理 10.11 と Hahn-Banach の分離定理の系 3.79 による． □

命題 10.13 ($B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}, B(\mathcal{H})_+$ は WOT 閉)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．有界自己共役作用素全体 $B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ と有界非負自己共役作用素全体 $B(\mathcal{H})_+$ はそれぞれ WOT 閉である (従って SOT 閉であり，ノルム閉である)．

証明. T を $B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ (resp. $B(\mathcal{H})_+$) の WOT 閉包の元とすると，$B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ (resp. $B(\mathcal{H})_+$) のネット $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で T に WOT 収束するものが取れる (命題 1.34)．命題 10.5 より任意の $v \in \mathcal{H}$，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $(T_\lambda v \mid v) \in \mathbb{R}$ (resp. $(T_\lambda v \mid v) \in [0,\infty)$) であり，$(Tv \mid v) = \lim_{\lambda\in\Lambda}(T_\lambda v \mid v)$ であるから，$(Tv \mid v) \in \mathbb{R}$ (resp. $(Tv \mid v) \in [0,\infty)$) である．よって命題 10.5 より $T \in B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ (resp. $T \in B(\mathcal{H})_+$) であるから $B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$, $B(\mathcal{H})_+$ は WOT 閉である．SOT, ノルム位相は WOT より強いので $B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$, $B(\mathcal{H})_+$ は SOT 閉でありノルム閉である． □

定理 10.14 ($B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ の有界単調増加ネットの上限への SOT 収束)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を順序集合 $B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ (定義 9.62) の単調増加ネットで，ある正実数 M に対し $\|T_\lambda\| \leqslant M$ $(\forall\lambda \in \Lambda)$ とする．このとき $\sup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda \in B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ が存在し，

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda = \text{SOT-}\lim_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$$

が成り立つ．そして $\|\sup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda\| \leqslant M$ である．

証明. 任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し $((T_\lambda v \mid v))_{\lambda\in\Lambda}$ は $\mathbb{R}$ の有界な単調増加ネットであるから命題 1.136 より，

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}(T_\lambda v \mid v) = \lim_{\lambda\in\Lambda}(T_\lambda v \mid v) \quad (\forall v \in \mathcal{H})$$

が成り立つ．偏極恒等式 (10.4) より任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し，

$$(T_\lambda u \mid v) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k(T_\lambda(u + i^k v) \mid u + i^k v) \quad (\forall\lambda \in \Lambda)$$

であるから $\mathbb{C}$ のネット $((T_\lambda u \mid v))_{\lambda\in\Lambda}$ は収束する．そこで，

$$\Phi : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \ni (u,v) \mapsto \Phi(u,v) := \lim_{\lambda\in\Lambda}(T_\lambda u \mid v) \in \mathbb{C}$$

とおくと Φ は準双線型汎関数 (定義 3.45) であり，

$$|\Phi(u,v)| = \lim_{\lambda\in\Lambda}|(T_\lambda u \mid v)| \leqslant M\|u\|\|v\| \quad (\forall u,v\in\mathcal{H})$$

であるから Φ は有界でノルムは $\|\Phi\| \leqslant M$ を満たす．ゆえに定理 3.49 より $T\in B(\mathcal{H})$ で，

$$(Tu \mid v) = \Phi(u,v) \quad (\forall u,v\in\mathcal{H}),\quad \|T\| = \|\Phi\| \leqslant M$$

を満たすものが定まる．

$$(Tv \mid v) = \Phi(v,v) = \lim_{\lambda\in\Lambda}(T_\lambda v \mid v) = \sup_{\lambda\in\Lambda}(T_\lambda v \mid v) \quad (\forall v\in\mathcal{H})$$

であるから命題 10.5 より $T\in B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ であり $T \geqslant T_\lambda$ $(\forall\lambda\in\Lambda)$ である．また $S \geqslant T_\lambda$ $(\forall\lambda\in\Lambda)$ なる任意の $S\in B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ に対し，

$$(Sv \mid v) \geqslant \sup_{\lambda\in\Lambda}(T_\lambda v \mid v) = (Tv \mid v) \quad (\forall v\in\mathcal{H})$$

であるから $S \geqslant T$ である．よって $T = \sup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ である．後は $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が T に SOT 収束することを示せばよい．命題 9.66 より，

$$0 \leqslant T - T_\lambda \leqslant \|T - T_\lambda\|1 \leqslant 2M \quad (\forall\lambda\in\Lambda)$$

であり，

$$(T-T_\lambda)^2 = \sqrt{(T-T_\lambda)}(T-T_\lambda)\sqrt{(T-T_\lambda)} \leqslant 2M(T-T_\lambda) \quad (\forall\lambda\in\Lambda)$$

である．よって任意の $v\in\mathcal{H}$ に対し，

$$\|Tv - T_\lambda v\|^2 = ((T-T_\lambda)^2 v \mid v) \leqslant 2M((T-T_\lambda)v \mid v) = 2M((Tv \mid v) - (T_\lambda v \mid v)) \to 0$$

であるから $T = \text{SOT-}\lim_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ である． □

定理 10.15 (射影作用素からなる単調増加ネットの SOT 極限は射影)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathcal{H}$ 上の射影作用素からなる単調増加ネットとする．このとき $P := \sup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda = \text{SOT-}\lim_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \in B(\mathcal{H})_+$ (定理 10.14 を参照) とおくと P は $\mathcal{H}$ 上の射影作用素である．

証明. $P^2 = P$ が成り立つことを示せばよい．任意の $\lambda_0\in\Lambda$ を取り固定する．任意の $\lambda \geqslant \lambda_0$ に対し $P_\lambda \geqslant P_{\lambda_0}$ であるから命題 9.74 より，

$$P_{\lambda_0} = P_{\lambda_0}P_\lambda \quad (\forall\lambda \geqslant \lambda_0)$$

である．よって $P = \text{SOT-}\lim_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ より，

$$P_{\lambda_0}v = \lim_{\lambda\in\Lambda:\lambda\geqslant\lambda_0} P_{\lambda_0}P_\lambda v = \lim_{\lambda\in\Lambda} P_{\lambda_0}P_\lambda v = P_{\lambda_0}Pv \quad (\forall v\in\mathcal{H})$$

である．$\lambda_0\in\Lambda$ は任意であるから $P_\lambda v = P_\lambda P v$ $(\forall\lambda\in\Lambda, \forall v\in\mathcal{H})$ であるので，再び $P = \text{SOT-}\lim_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ より

$$Pv = \lim_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda P v = P^2 v \quad (\forall v\in\mathcal{H})$$

である．ゆえに $P = P^2$ であるから P は射影作用素である． □

定義 10.16 (射影作用素の直交族の和)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$\mathcal{H}$ 上の射影作用素の族 $(P_j)_{j\in J}$ が直交族であるとは $P_iP_j = 0$ $(\forall i,j\in J : i\neq j)$ が成り立つことを言う．$(P_j)_{j\in J}$ を $\mathcal{H}$ 上の射影作用素の直交族とし，$\mathcal{F}_J$ を J の有限部分集合全体に集合の包含関係による順序を入れた有向集合とする．このとき $(\sum_{j\in F} P_j)_{F\in\mathcal{F}_J}$ は $\mathcal{H}$ 上の射影作用素からなる単調増加ネットであり，定理 10.14 より，

$$\sup_{F\in\mathcal{F}_J}\sum_{j\in F} P_j = \text{SOT-}\lim_{F\in\mathcal{F}_J}\sum_{j\in F} P_j$$

が成り立つ．そこで射影作用素の直交族 $(P_j)_{j\in J}$ の和を，

$$\sum_{j\in J} P_j := \sup_{F\in\mathcal{F}_J}\sum_{j\in F} P_j = \text{SOT-}\lim_{F\in\mathcal{F}_J}\sum_{j\in F} P_j$$

と定義する．定理 10.15 より $\sum_{j\in J} P_j$ は $\mathcal{H}$ 上の射影作用素である．

10.3 Hilbert 空間上の (有界とは限らない) 線型作用素の基本性質

定義 10.17 (Hilbert 空間上の (有界とは限らない) 線型作用素)**.** $\mathcal{H},\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする. T が $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素であると言うとき, T は $\mathcal{H}$ 全体で定義されているとは限らず, $\mathcal{H}$ のある線型部分空間 $D(T) \subseteq \mathcal{H}$ 上で定義され, $\mathcal{K}$ に値を取る線型作用素であることを意味するものとする. $D(T) \subseteq \mathcal{H}$ を T の定義域, $\mathrm{Ran}(T) = T(D(T)) \subseteq \mathcal{K}$ を T の値域と言う. そして直和 Hilbert 空間 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ の線型部分空間

$$G(T) := \{(v, Tv) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{K} : v \in D(T)\}$$

を T のグラフと言う.
Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への線型作用素のことを単に $\mathcal{H}$ 上の線型作用素と言う.
T が Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への "有界" 線型作用素である言うとき, それは $T \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ であること, すなわち $D(T) = \mathcal{H}$ かつ $G(T)$ が閉 (閉グラフ定理 3.102 を参照) を意味するものとする.

定義 10.18 (稠密に定義された線型作用素, 閉線型作用素)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への線型作用素とする. T が稠密に定義されているとは T の定義域 $D(T)$ が $\mathcal{H}$ で稠密であることを言う. また T が閉であるとは T のグラフ $G(T)$ が $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ の閉部分空間であることを言う.

定義 10.19 (線型作用素の包含関係)**.** S, T をそれぞれ Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への線型作用素とする.

$$S \subseteq T \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} G(S) \subseteq G(T)$$

と定義する. これを T は S を包含する (S は T に包含される) と言う. 明らかにこの包含関係は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素全体における順序である.

定義 10.20 (単射線型作用素の逆作用素)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への単射線型作用素とする. このとき線型同型写像 $D(T) \ni v \mapsto Tv \in \mathrm{Ran}(T)$ の逆写像として定義される $\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ への線型作用素を,

$$T^{-1} : D(T^{-1}) := \mathrm{Ran}(T) \ni Tv \mapsto v \in \mathcal{H}$$

と表す.

定義 10.21 (線型作用素の和, スカラー倍, 積)**.** S, T をそれぞれ Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への線型作用素とする. このとき $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素 $S + T$ を,

$$S + T : D(S + T) := D(S) \cap D(T) \ni v \mapsto Sv + Tv \in \mathcal{K}$$

と定義する. また $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素 αT を,

$$\alpha T : D(\alpha T) : = D(T) \ni v \mapsto \alpha Tv \in \mathcal{K} \quad (\alpha \neq 0 \text{ の場合 }),$$
$$\alpha T : D(\alpha T) : = \mathcal{H} \ni v \mapsto 0 \in \mathcal{K} \quad (\alpha = 0 \text{ の場合 })$$

と定義する.
$\mathcal{H},\mathcal{K},\mathcal{L}$ をそれぞれ Hilbert 空間とし, T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素, S を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{L}$ への線型作用素とする. このとき $\mathcal{H}$ から $\mathcal{L}$ への線型作用素 ST を,

$$ST : D(ST) := \{v \in D(T) : Tv \in D(S)\} \ni v \mapsto STv \in \mathcal{L}$$

と定義する.

定義 10.22 (稠密に定義された線型作用素の共役作用素)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素とする. $\mathcal{K}$ の線型部分空間

$$D := \{v \in \mathcal{K} : D(T) \ni u \mapsto (Tu \mid v) \in \mathbb{C} \text{ は有界線型汎関数 }\}$$

を考える．このとき次の命題 10.23 より，任意の $v \in D$ に対し，

$$(Tu \mid v) = (u \mid w) \quad (\forall u \in D(T)) \tag{10.3}$$

を満たす $w \in \mathcal{H}$ が唯一つ存在する．そこで $T^*v := w$ と表し，$\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ への線型作用素

$$T^* : D(T^*) := D \ni v \mapsto T^*v \in \mathcal{H}$$

を定義する．T^* を T の共役作用素と言う．この共役作用素の定義は有界線型作用素 $T \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ の共役作用素 $T^* \in B(\mathcal{K},\mathcal{H})$ の定義 3.51 と矛盾しない．

命題 10.23. 定義 10.22 において，任意の $v \in D$ に対し (10.3) を満たす $w \in \mathcal{H}$ が唯一つ存在する．

証明. Hahn-Banach の拡張定理 3.70 より任意の $v \in D$ に対し有界線型汎関数 $D(T) \ni u \mapsto (Tu \mid v) \in \mathbb{C}$ は $\mathcal{H}$ 上の有界線型汎関数に拡張できる．よって Riesz の表現定理 3.44 より $w \in \mathcal{H}$ で (10.3) を満たすものが存在する．一意性を示す．$w_1, w_2 \in \mathcal{H}$ が

$$(Tu \mid v) = (u \mid w_1) = (u \mid w_2) \quad (\forall u \in D(T))$$

を満たすならば，

$$(u \mid w_1 - w_2) = 0 \quad (\forall u \in D(T))$$

であり，$D(T) \subseteq \mathcal{H}$ は稠密であるから $w_1 - w_2 = 0$ である． □

定義 10.24 (可閉線型作用素とその閉包)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への線型作用素とする．T を包含する $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への閉線型作用素が存在するとき T は可閉であると言う．次の命題 10.25 より T が可閉ならば $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ を満たす閉線型作用素 $\overline{T}$ が存在する．$\overline{T}$ を T の閉包と言う．

命題 10.25. T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への可閉線型作用素とする．

$$\pi : \mathcal{H} \oplus \mathcal{K} \ni (v, w) \mapsto v \in \mathcal{H}$$

に対し，線型部分空間

$$D := \pi(\overline{G(T)}) \subseteq \mathcal{H}$$

を定義する．このとき任意の $v \in D$ に対し $(v, w) \in \overline{G(T)}$ を満たす $w \in \mathcal{K}$ は唯一つである．実際 T が可閉であることから $T \subseteq S$ を満たす閉線型作用素 S が存在し $\overline{G(T)} \subseteq G(S)$ である．よって $(v, w_1), (v, w_2) \in \overline{G(T)} \subseteq G(S)$ ならば $w_1 = Sv = w_2$ である．そこで $\overline{T}v := w$ とおき，線型作用素

$$\overline{T} : D(\overline{T}) := D \ni v \mapsto \overline{T}v \in \mathcal{K}$$

を定義する．このとき D の定義より明らかに $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ である．

定義 10.26 (閉線型作用素の芯)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への閉線型作用素とする．線型部分空間 $D \subseteq D(T)$ で，

$$\overline{(T|_D)} = T$$

を満たすものを T の芯と言う．ただし $T|_D$ は T の D 上への制限である．

命題 10.27 (Hilbert 空間上の線型作用素の基本性質)**.** $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{L}$ をそれぞれ Hilbert 空間とする．

(1) T_1, T_2 を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素とし，S を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{L}$ への線型作用素とすると，

$$S(T_1 + T_2) \supseteq ST_1 + ST_2$$

が成り立つ．

(2) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素とし，S_1, S_2 を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{L}$ への線型作用素とすると，

$$(S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T$$

が成り立つ．

(3) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素, S を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{L}$ への線型作用素とし, $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ とすると,

$$S(\alpha T) = (\alpha S)T = \alpha(ST)$$

が成り立つ.

(4) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への単射線型作用素とし, S を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{L}$ への単射線型作用素とすると, ST は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{L}$ への単射線型作用素であり,

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

が成り立つ.

(5) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素とし, $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ とすると,

$$(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$$

が成り立つ.

(6) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素とすると,

$$(\mathrm{Ran}(T))^{\perp} = \mathrm{Ker}(T^*)$$

が成り立つ.

(7) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素とすると, T^* は $\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ への閉線型作用素である.

(8) S, T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素とし $S \subseteq T$ とすると, $T^* \subseteq S^*$ が成り立つ.

(9) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された可閉線型作用素とすると, $(\overline{T})^* = T^*$ が成り立つ.

(10) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素, S を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{L}$ への稠密に定義された線型作用素とし, ST が $\mathcal{H}$ から $\mathcal{L}$ への稠密に定義された線型作用素であるとすると,

$$(ST)^* \supseteq T^*S^*$$

が成り立つ.

(11) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素, $S \in B(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ とすると,

$$(ST)^* = T^*S^*$$

が成り立つ.

(12) S, T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素とし, $S + T$ も $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素であるとすると,

$$(S + T)^* \supseteq S^* + T^*$$

が成り立つ.

(13) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素, $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ とすると,

$$(S + T)^* = S^* + T^*$$

が成り立つ.

(14) $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ とし, S を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{L}$ への閉線型作用素とすると, ST は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{L}$ への閉線型作用素である.

(15) $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ とし, S を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への閉線型作用素とすると, $S + T$ は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への閉線型作用素である.

証明. (1), (2), (3) は線型作用素の和, 積, スカラー倍の定義 10.21 より明らかである.
(4) は単射線型作用素の逆作用素の定義 10.20 より明らかである.
(5) は稠密に定義された線型作用素の共役作用素の定義 10.22 より明らかである.
(6) を示す. 任意の $v \in (\mathrm{Ran}(T))^{\perp}$ に対し,

$$(Tu \mid v) = 0 \quad (\forall u \in D(T))$$

であるから $v \in D(T^*)$ であり,

$$(u \mid T^*v) = (Tu \mid v) = 0 \quad (\forall u \in D(T))$$

である. よって $D(T) \subseteq \mathcal{H}$ の稠密性より $T^*v = 0$, すなわち $v \in \mathrm{Ker}(T^*)$ である. 逆に $v \in \mathrm{Ker}(T^*)$ ならば,

$$(Tu \mid v) = (u \mid T^*v) = 0 \ \ (\forall u \in D(T))$$

だから $v \in (\mathrm{Ran}(T))^\perp$ である.
(7) を示す. $\mathcal{K} \oplus \mathcal{H}$ において,

$$(v_n, T^*v_n) \to (v, w) \ \ (n \to \infty)$$

であるとすると, 任意の $u \in D(T)$ に対し,

$$(u \mid w) = \lim_{n\to\infty}(u \mid T^*v_n) = \lim_{n\to\infty}(Tu \mid v_n) = (Tu \mid v)$$

であるから $v \in D(T^*)$, $w = T^*v$ である. よって $G(T^*)$ は $\mathcal{K} \oplus \mathcal{H}$ の閉部分空間なので T^* は閉である.
(8) を示す. 任意の $v \in D(T^*)$ を取る. 任意の $u \in D(S)$ に対し $Su = Tu$ であるから,

$$(Su \mid v) = (Tu \mid v) = (u \mid T^*v)$$

である. よって $v \in D(S^*)$ であり $T^*v = S^*v$ である. ゆえに $T^* \subseteq S^*$ である.
(9) を示す. (8) より $(\overline{T})^* \subseteq T^*$ であるから逆の包含関係を示す. 任意の $u \in D(\overline{T})$ と任意の $v \in D(T^*)$ を取る. $(u, \overline{T}u) \in G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ より $D(T)$ の列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$(u_n, Tu_n) \to (u, \overline{T}u) \ \ (n \to \infty)$$

なるものが取れる. これより,

$$(u \mid T^*v) = \lim_{n\to\infty}(u_n \mid T^*v) = \lim_{n\to\infty}(Tu_n \mid v) = (\overline{T}u \mid v)$$

であるから, $v \in D((\overline{T})^*)$ であり $(\overline{T})^*v = T^*v$ である. よって $T^* \subseteq (\overline{T})^*$ である.
(10) を示す. 任意の $v \in D(T^*S^*)$, 任意の $u \in D(ST)$ に対し,

$$(STu \mid v) = (Tu \mid S^*v) = (u \mid T^*S^*v)$$

であるから $v \in D((ST)^*)$ であり $T^*S^*v = (ST)^*v$ である. よって $T^*S^* \subseteq (ST)^*$ である.
(11) を示す. (10) より $T^*S^* \subseteq (ST)^*$ なので $D((ST)^*) \subseteq D(T^*S^*)$ を示せばよい. 任意の $v \in D((ST)^*)$, 任意の $u \in D(T)$ に対し,

$$(Tu \mid S^*v) = (STu \mid v) = (u \mid (ST)^*v)$$

であるから $S^*v \in D(T^*)$, 従って $v \in D(T^*S^*)$ である. よって $D((ST)^*) \subseteq D(T^*S^*)$ である.
(12) を示す. 任意の $v \in D(S^* + T^*) = D(S^*) \cap D(T^*)$, 任意の $u \in D(S + T) = D(S) \cap D(T)$ に対し,

$$((S+T)u \mid v) = (Su \mid v) + (Tu \mid v) = (u \mid S^*v) + (u \mid T^*v) = (u \mid (S^* + T^*)v)$$

であるから, $v \in D((S+T)^*)$ であり $(S+T)^*v = (S^* + T^*)v$ である. よって $S^* + T^* \subseteq (S+T)^*$ である.
(13) を示す. (12) より $S^*+T^* \subseteq (S+T)^*$ なので $D((S+T)^*) \subseteq D(S^*+T^*)$ を示せばよい. 任意の $v \in D((S+T)^*)$, 任意の $u \in D(T)$ に対し,

$$(Tu \mid v) = ((S+T)u \mid v) - (Su \mid v) = (u \mid (S+T)^*v) - (Su \mid v)$$

であるから $v \in D(T^*) = D(S^*) \cap D(T^*) = D(S^* + T^*)$ である. よって $D((S+T)^*) \subseteq D(S^* + T^*)$ である.
(14) を示す. $\mathcal{H} \oplus \mathcal{L}$ において,

$$(v_n, STv_n) \to (v, w) \ \ (n \to \infty)$$

とする. このとき $Tv_n \to Tv$ だから $\mathcal{K} \oplus \mathcal{L}$ において,

$$(Tv_n, STv_n) \to (Tv, w) \ \ (n \to \infty)$$

であり, $G(S) \subseteq \mathcal{K} \oplus \mathcal{L}$ は閉であるから $w = STv$ である．よって $G(ST) \subseteq \mathcal{H} \oplus \mathcal{L}$ は閉であるので ST は閉である．
(15) を示す．$\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ において,

$$(v_n, (S+T)v_n) \to (v, w) \ \ (n \to \infty)$$

とする．このとき $Tv_n \to Tv$ だから,

$$(v_n, Sv_n) = (v_n, (S+T)v_n - Tv_n) \to (v, w - Tv) \ \ (n \to \infty)$$

であり, $G(S) \subseteq \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ は閉であるから $w - Tv = Sv$ である．よって $w = (S+T)v$ なので $G(S+T) \subseteq \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ は閉, すなわち $S+T$ は閉である． □

定理 10.28 (稠密に定義された閉線型作用素の基本性質)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への稠密に定義された閉線型作用素とする．このとき,

(1) $D(T^*T)$ は T の芯であり, $1 + T^*T : D(T^*T) \to \mathcal{H}$ は全単射である．
(2) T^* は $\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ への稠密に定義された閉線型作用素である．
(3) $T = T^{**}$ が成り立つ．
(4) $(T^*T)^* = T^*T$ が成り立つ．

証明. (1) T は閉線型作用素だから $G(T)$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ の閉部分空間である．よって $G(T)$ は ($\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ の内積を受け継いで) Hilbert 空間である．Hilbert 空間 $G(T)$ から Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への有界線型作用素

$$\pi : G(T) \ni (v, Tv) \mapsto v \in \mathcal{H}$$

を考える．π は単射であるから命題 3.52 の (6) より,

$$(\pi^*(\mathcal{H}))^\perp = \mathrm{Ker}(\pi) = \{0\}$$

である．よって命題 3.39 より,

$$\overline{\pi^*(\mathcal{H})} = ((\pi^*(\mathcal{H}))^\perp)^\perp = (\{0\})^\perp = G(T)$$

である．そこで,

$$D := \pi(\pi^*(\mathcal{H})) \subseteq D(T)$$

とおけば $G(T|_D) = \pi^*(\mathcal{H})$ であるから,

$$\overline{G(T|_D)} = \overline{\pi^*(\mathcal{H})} = G(T)$$

である．よって D は T の芯である．今, 任意の $v = \pi(\pi^*(w)) \in \pi(\pi^*(\mathcal{H})) = D$ を取る．このとき $\pi^*(w) = (v, Tv)$ であるから, 任意の $u \in D(T)$ に対し,

$$(u \mid v) + (Tu \mid Tv) = ((u, Tu) \mid (v, Tv)) = ((u, Tu) \mid \pi^*(w)) = (u \mid w)$$

である．よって,

$$(u \mid w - v) = (Tu \mid Tv) \ \ (\forall u \in D(T))$$

であるから $v \in D(T^*T)$, $w = v + T^*Tv$ である．これより $D \subseteq D(T^*T)$ だから $D(T^*T)$ は T の芯であり, また $\mathcal{H} = \mathrm{Ran}(1 + T^*T)$ である．後は $1 + T^*T$ が単射であることを示せばよい．そこで任意の $v \in \mathrm{Ker}(1 + T^*T)$ を取る．

$$0 = ((1 + T^*T)v \mid v) = (v \mid v) + (T^*Tv \mid v) = \|v\|^2 + \|Tv\|^2$$

であるから $v = 0$ である．ゆえに $1 + T^*T$ は単射である．

(2) (1) より $D(T^*T)$ は T の芯であるから任意の $v \in D(T)$ に対し $D(T^*T)$ の列 $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で,

$$(v_n, Tv_n) \to (v, Tv) \ \ (n \to \infty)$$

なるものが取れる．よって,

$$Tv = \lim_{n \to \infty} Tv_n \in \overline{D(T^*)}$$

であるから,

$$\mathrm{Ran}(T) \subseteq \overline{D(T^*)}$$

が成り立つ. これと命題 10.27 の (6) より,

$$(D(T^*))^{\perp} = (\overline{D(T^*)})^{\perp} \subseteq (\mathrm{Ran}(T))^{\perp} = \mathrm{Ker}(T^*) \subseteq D(T^*)$$

であるから $(D(T^*))^{\perp} = \{0\}$ である. ゆえに,

$$\overline{D(T^*)} = ((D(T^*))^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathcal{K}$$

であるから T^* は稠密に定義された線型作用素である. T^* が閉であることは命題 10.27 の (7) による.

(3)

$$(T^*v \mid u) = (v \mid Tu) \quad (\forall v \in D(T^*), \forall u \in D(T))$$

であるから $T \subseteq T^{**}$ である. 同様に $T^* \subseteq T^{***}$ である. ここで $T \subseteq T^{**}$ と命題 10.27 の (8) より $T^{***} \subseteq T^*$ なので $T^* = T^{***}$ である. $T = T^{**}$ を示すには Hilbert 空間 $G(T^{**})$ における閉部分空間 $G(T)$ の直交補空間 $G(T^{**}) \cap G(T)^{\perp}$ が $\{0\}$ であることを示せばよい. そこで任意の $(v, T^{**}v) \in G(T^{**}) \cap G(T)^{\perp}$ を取る.

$$0 = ((u, Tu) \mid (v, T^{**}v)) = (u \mid v) + (Tu \mid T^{**}v) \quad (\forall u \in D(T))$$

であるから $v \in D(T^*T^{**}) = D(T^{***}T^{**})$ であり,

$$0 = (1 + T^*T^{**})v = (1 + T^{***}T^{**})v$$

である. T^{**} は稠密に定義された閉線型作用素であるので (1) より $1 + T^{***}T^{**}$ は単射である. よって $v = 0$, 従って $(v, T^{**}v) = 0$ であるので $G(T^{**}) \cap G(T)^{\perp} = \{0\}$ である. ゆえに $T = T^{**}$ である.

(4) (1) より T^*T は稠密に定義された線型作用素であり,

$$(T^*Tu \mid v) = (Tu \mid Tv) = (u \mid T^*Tv) \quad (\forall u, v \in D(T^*T))$$

だから $T^*T \subseteq (T^*T)^*$ である. $T^*T = (T^*T)^*$ を示すには $D((T^*T)^*) \subseteq D(T^*T)$ を示せばよい. 任意の $w \in D((T^*T)^*) = D((1 + T^*T)^*)$ を取る. (1) より $\mathrm{Ran}(1 + T^*T) = \mathcal{H}$ だから,

$$(1 + T^*T)^*w = (1 + T^*T)v$$

なる $v \in D(T^*T)$ が取れる. $1 + T^*T \subseteq (1 + T^*T)^*$ なので,

$$(1 + T^*T)^*(w - v) = 0$$

である. よって命題 10.27 の (6) より,

$$w - v \in \mathrm{Ker}((1 + T^*T)^*) = (\mathrm{Ran}(1 + T^*T))^{\perp} = \mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$$

である. ゆえに $w = v \in D(T^*T)$ だから $D((T^*T)^*) \subseteq D(T^*T)$ である. よって $T^*T = (T^*T)^*$ である.

□

10.4 対称作用素, 自己共役作用素, Cayley 変換

定義 10.29 (対称作用素, 自己共役作用素)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された線型作用素とする. $T \subseteq T^*$ が成り立つとき T を $\mathcal{H}$ 上の対称作用素と言う. また $T = T^*$ が成り立つとき T を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素と言う.

命題 10.30 (対称作用素の特徴付け)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された線型作用素とする. このとき次は互いに同値である.

(1) T は $\mathcal{H}$ 上の対称作用素 (つまり $T \subseteq T^*$) である.

(2) 任意の $u, v \in D(T)$ に対し $(Tu \mid v) = (u \mid Tv)$ が成り立つ.
(3) 任意の $v \in D(T)$ に対し $(Tv \mid v) \in \mathbb{R}$ が成り立つ.
(4) $G(T) \ni (v, Tv) \mapsto (T \pm i)v \in \mathrm{Ran}(T \pm i)$ は等長線型同型写像である.

証明. (1) ⇔ (2) ⇒ (3) は自明である. (3) ⇒ (2) は偏極恒等式 (10.4) による.

$$\|(T \pm i)v\|^2 = \|Tv\|^2 \pm 2\mathrm{Im}(Tv \mid v) + \|v\|^2 \quad (\forall v \in D(T))$$

より (3) ⇔ (4) が成り立つ. □

命題 10.31 (対称作用素の閉包は対称作用素)**.** T が Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素ならば T は可閉であり, $\overline{T}$ も $\mathcal{H}$ 上の対称作用素である. また,

$$\mathrm{Ran}(\overline{T} \pm i) = \overline{\mathrm{Ran}(T \pm i)}$$

が成り立つ.

証明. 命題 10.27 の (7) より T^* は閉である. よって $T \subseteq T^*$ より T は可閉であり, $\overline{T} \subseteq T^*$ である. また命題 10.27 の (9) より $(\overline{T})^* = T^*$ である. ゆえに $\overline{T} \subseteq (\overline{T})^*$ だから $\overline{T}$ は対称作用素である. 命題 10.30 の (4) より,

$$G(\overline{T}) \ni v \mapsto \overline{T}v \pm iv \in \mathrm{Ran}(\overline{T} \pm i)$$

は等長線型同型写像であり, $G(\overline{T})$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ の閉部分空間なので完備であるから $\mathrm{Ran}(\overline{T} \pm i) \subseteq \mathcal{H}$ は閉である. よって,

$$\overline{\mathrm{Ran}(T \pm i)} \subseteq \mathrm{Ran}(\overline{T} \pm i)$$

である. 逆の包含関係は $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ より明らかである. □

定義 10.32 (対称作用素の Cayley 変換)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする. このとき命題 10.30 の (4) より,

$$C(T) := (T - i)(T + i)^{-1} : \mathrm{Ran}(T + i) \ni (T + i)v \mapsto (T - i)v \in \mathcal{H}$$

なる等長線型作用素が定義できる. $C(T)$ を T の Cayley 変換と言う. $C(T)$ の定義域は $D(C(T)) = \mathrm{Ran}(T + i)$, 値域は $\mathrm{Ran}(C(T)) = \mathrm{Ran}(T - i)$ である.

命題 10.33 (対称作用素の Cayley 変換から対称作用素の再現)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする. T の Cayley 変換 $C(T) = (T - i)(T + i)^{-1}$ に対し $1 - C(T)$ は単射であり, $\mathrm{Ran}(1 - C(T)) = D(T)$ である. そして,

$$T = i(1 + C(T))(1 - C(T))^{-1}$$

が成り立つ.

証明. 任意の $(T + i)v \in \mathrm{Ran}(T + i) = D(C(T))$ に対し,

$$(1 - C(T))(T + i)v = (T + i)v - (T - i)v = 2iv$$

であるから $\mathrm{Ran}(1 - C(T)) = D(T)$ であり, $1 - C(T)$ は単射である. そして任意の $v \in D(T)$ に対し,

$$(1 + C(T))(1 - C(T))^{-1}2iv = (1 + C(T))(T + i)v = (T + i)v + (T - i)v = 2iTv$$

であるから,

$$(1 + C(T))(1 - C(T))^{-1} = T$$

である. □

定理 10.34. T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素, $C(T)$ を T の Cayley 変換とする. このとき次は互いに同値である.

(1) T は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素である.

(2) $C(T)$ は $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素である.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つならば $T = T^*$ だから命題 10.27 の (6) より,

$$(\mathrm{Ran}(T \pm i))^{\perp} = \mathrm{Ker}(T^* \mp i) = \mathrm{Ker}(T \mp i) = \{0\}$$

であり, 命題 10.27 の (7) より $T = T^*$ は閉なので, 命題 10.31 より,

$$\mathrm{Ran}(T \pm i) = \mathrm{Ran}(\overline{T} \pm i) = \overline{\mathrm{Ran}(T \pm i)}$$

である. よって,

$$\mathrm{Ran}(T \pm i) = \overline{\mathrm{Ran}(T \pm i)} = ((\mathrm{Ran}(T \pm i))^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathcal{H}$$

であるから $C(T)$ は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への等長線型同型写像, すなわち $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素である.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つならば $\mathrm{Ran}(T \pm i) = \mathcal{H}$ であるから, 任意の $v \in D(T^*)$ に対し,

$$(T^* + i)v = (T + i)u$$

を満たす $u \in D(T)$ が取れる. $T \subseteq T^*$ より $T + i \subseteq T^* + i$ だから,

$$(T^* + i)(v - u) = 0$$

であり, 命題 10.27 の (6) より,

$$\mathrm{Ker}(T^* + i) = (\mathrm{Ran}(T - i))^{\perp} = \mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$$

だから $v = u \in D(T)$ である. よって $D(T^*) = D(T)$ なので $T = T^*$ である. □

定義 10.35 (対称作用素の自己共役拡張)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする. $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 S で $S \supseteq T$ を満たすものを T の自己共役拡張と言う. そして対称作用素 T が自己共役拡張を持つことを T は自己共役拡張可能であると言う.

定義 10.36 (対称作用素の本質的自己共役性)**.** Hilbert 空間上の対称作用素 T が本質的に自己共役であるとは T の閉包 $\overline{T}$ が自己共役作用素であることを言う. T が本質的に自己共役ならば T の自己共役拡張は $\overline{T}$ のみである. 実際, S を T の自己共役拡張とすると, 命題 10.27 の (7), (8) より,

$$\overline{T} \subseteq S = S^* \subseteq (\overline{T})^* = \overline{T}$$

であるから $S = \overline{T}$ である.

定理 10.37 (対称作用素が自己共役拡張可能であるための条件)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする. このとき次は互いに同値である.

(1) T は自己共役拡張可能である.
(2) $(\mathrm{Ran}(T + i))^{\perp} \to (\mathrm{Ran}(T - i))^{\perp}$ の等長線型同型写像が存在する.

そして (2) が成り立つとき, 各等長線型同型写像 $V : (\mathrm{Ran}(T + i))^{\perp} \to (\mathrm{Ran}(T - i))^{\perp}$ に対し,

$$\begin{aligned} &U := C(\overline{T}) \oplus V : \mathcal{H} = \mathrm{Ran}(\overline{T} + i) \oplus (\mathrm{Ran}(T + i))^{\perp} \to \mathrm{Ran}(\overline{T} - i) \oplus (\mathrm{Ran}(T - i))^{\perp} = \mathcal{H}, \\ &U(u + v) = C(\overline{T})u + Vv \quad (\forall u \in \mathrm{Ran}(\overline{T} + i), \forall v \in (\mathrm{Ran}(T + i))^{\perp}) \end{aligned} \tag{10.4}$$

[*146] として定義されるユニタリ作用素 $U = C(\overline{T}) \oplus V$ を Cayley 変換とする, T の自己共役拡張が存在する.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとし, S を T の自己共役拡張とする. 定理 10.34 より S の Cayley 変換 $C(S) = (S - i)(S + i)^{-1}$ は $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素であり,

$$C(S)^* = C(S)^{-1} = (S + i)(S - i)^{-1}$$

[*146] 命題 10.31 より $\mathrm{Ran}(\overline{T} \pm i) = \overline{\mathrm{Ran}(T \pm i)}$ であることに注意.

である．よって任意の $v \in (\mathrm{Ran}(T+i))^\perp$ と任意の $(T-i)u \in \mathrm{Ran}(T-i)$ に対し，

$$(C(S)v \mid (T-i)u) = (v \mid C(S)^*(S-i)u) = (v \mid (S+i)u) = (v \mid (T+i)u) = 0$$

であるから，

$$C(S)(\mathrm{Ran}(T+i))^\perp \subseteq (\mathrm{Ran}(T-i))^\perp$$

である．また任意の $v \in (\mathrm{Ran}(T-i))^\perp$ と任意の $(T+i)u \in \mathrm{Ran}(T+i)$ に対し，

$$(C(S)^*v \mid (T+i)u) = (v \mid C(S)(S+i)u) = (v \mid (S-i)u) = (v \mid (T-i)u) = 0$$

であるから，

$$C(S)^*(\mathrm{Ran}(T-i))^\perp \subseteq (\mathrm{Ran}(T+i))^\perp,$$

すなわち，

$$(\mathrm{Ran}(T-i))^\perp \subseteq C(S)(\mathrm{Ran}(T+i))^\perp$$

である．よって，

$$(\mathrm{Ran}(T+i))^\perp \ni v \mapsto C(S)v \in (\mathrm{Ran}(T-i))^\perp$$

は等長線型同型写像であるから (2) が成り立つ．

(2) $\Rightarrow$ (1) を示す．(2) が成り立つとする．$V : (\mathrm{Ran}(T+i))^\perp \to (\mathrm{Ran}(T-i))^\perp$ を等長線型同型写像とし，(10.4) におけるユニタリ作用素 $U = C(\overline{T}) \oplus V$ を定義する．まず $1-U$ が単射であることを示す．そこで $(\overline{T}+i)u \in \mathrm{Ran}(\overline{T}+i)$ と $v \in (\mathrm{Ran}(T+i))^\perp$ が $(1-U)((\overline{T}+i)u+v) = 0$ を満たすとする．このとき，

$$0 = (1-U)((\overline{T}+i)u+v) = (\overline{T}+i)u + v - (\overline{T}-i)u - Vv = 2iu + (1-V)v$$

であり，$v \in (\mathrm{Ran}(T+i))^\perp = \mathrm{Ker}(T^*-i)$, $Vv \in (\mathrm{Ran}(T-i))^\perp = \mathrm{Ker}(T^*+i)$ (命題 10.27 の (6)) だから，

$$0 = (T^*+i)(2iu + (1-V)v) = 2i(\overline{T}+i)u + (T^*-i)v + 2iv - (T^*+i)Vv = 2i(\overline{T}+i)u + 2iv$$

である．よって，

$$v = -(\overline{T}+i)u \in \mathrm{Ran}(\overline{T}+i) \cap (\mathrm{Ran}(T+i))^\perp = \{0\}$$

であるから $(\overline{T}+i)u + v = 0$ である．ゆえに $1-U$ は単射である．

$$S := i(1+U)(1-U)^{-1}$$

とおく．$C(\overline{T}) \subseteq U$ であるから，

$$S(1-C(\overline{T})) = i(1+C(\overline{T}))$$

なので，命題 10.33 より，

$$\overline{T} = i(1+C(\overline{T}))(1-C(\overline{T}))^{-1} \subseteq S \tag{10.5}$$

である．任意の $u = (1-U)v \in \mathrm{Ran}(1-U) = D(S)$ に対し，

$$(Su \mid u) = (i(1+U)v \mid (1-U)v) = i\left((Uv \mid v) - (v \mid Uv)\right) \in \mathbb{R}$$

であるから，命題 10.30 の (2) より S は対称作用素である．そして，

$$\begin{aligned}(S+i)(1-U)v &= i(1+U)v + i(1-U)v = 2iv \quad (\forall v \in \mathcal{H}),\\ (S-i)(1-U)v &= i(1+U)v - i(1-U)v = 2iUv \quad (\forall v \in \mathcal{H})\end{aligned}$$

であるから，

$$\mathrm{Ran}(S \pm i) = \mathcal{H}, \quad U(S+i) = S-i$$

である．ゆえに S の Cayley 変換は $C(S) = U = C(\overline{T}) \oplus V$ であり，$C(S)$ はユニタリ作用素なので定理 10.34 より S は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素である．そして (10.5) より S は T の自己共役拡張である． □

系 10.38 (対称作用素が本質的に自己共役であるための条件)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする．このとき次は互いに同値である．

(1) T は本質的に自己共役である．
(2) T の自己共役拡張が唯一つ存在する．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) が成り立つことは定義 10.36 で述べてある．(2) $\Rightarrow$ (1) を示す．(2) が成り立つとする．このとき定理 10.37 より $(\mathrm{Ran}(T+i))^\perp \to (\mathrm{Ran}(T-i))^\perp$ の等長線型同型写像が存在する．もし $(\mathrm{Ran}(T\pm i))^\perp \neq \{0\}$ ならば, $(\mathrm{Ran}(T+i))^\perp \to (\mathrm{Ran}(T-i))^\perp$ の等長線型同型写像で互いに異なるものが非可算無限個存在するので, 定理 10.37 より, 対応する T の自己共役拡張も非可算無限個存在することになり (2) が成り立つと言う仮定に矛盾する．よって $(\mathrm{Ran}(T\pm i))^\perp = \{0\}$ であるから,

$$\mathrm{Ran}(\overline{T}\pm i) = \overline{\mathrm{Ran}(T\pm i)} = ((\mathrm{Ran}(T\pm i))^\perp)^\perp = \mathcal{H}$$

である．ゆえに $C(\overline{T})$ はユニタリ作用素だから定理 10.34 より T は本質的に自己共役である． □

定義 10.39 (Hilbert 空間上の閉線型作用素のスペクトル, レゾルベント集合, 点スペクトル, 固有値, 固有ベクトル)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の閉線型作用素とする．このとき,

$$\rho(T) := \{\lambda\in\mathbb{C} : \lambda - T : D(T)\to\mathcal{H}\ \text{は全単射}\ \}$$

を T のレゾルベント集合と言い,

$$\sigma(T) := \mathbb{C}\backslash\rho(T)$$

を T のスペクトルと言う．また T のスペクトルの部分集合

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T) := \{\lambda\in\mathbb{C} : \mathrm{Ker}(\lambda - T)\neq\{0\}\}$$

を T の点スペクトルと言い, $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ の元を T の固有値と言う．そして T の固有値 $\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ に対し $\mathrm{Ker}(\lambda-T)$ を T の固有値 λ に対する固有空間と言い, $\mathrm{Ker}(\lambda-T)$ の 0 ではない元を T の固有値 λ に対する固有ベクトルと言う．

定義 10.40 (Hilbert 空間上の閉線型作用素のレゾルベント)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の閉線型作用素, $\rho(T)$ を T のレゾルベント集合とする．任意の $\lambda\in\rho(T)$ に対し閉線型作用素 $\lambda-T$ のグラフ $G(\lambda-T)$ と $(\lambda-T)^{-1}$ のグラフ $G((\lambda-T)^{-1})$ は等長線型同型であるから $G((\lambda-T)^{-1})$ は閉なので $(\lambda-T)^{-1}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ は閉線型作用素である．よって閉グラフ定理 3.102 より $(\lambda-T)^{-1}\in B(\mathcal{H})$ である．

$$\rho(T)\ni\lambda\mapsto(\lambda-T)^{-1}\in B(\mathcal{H})$$

を T のレゾルベントと言う．

注意 10.41. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の閉線型作用素のスペクトルとレゾルベント集合の定義 10.39 は C^*-環 $B(\mathcal{H})$ の元のスペクトルとレゾルベント集合の定義 9.5 と矛盾しない．

命題 10.42 (レゾルベント等式)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の閉線型作用素, $\rho(T)$ を T のレゾルベント集合とする．このとき,

(1) 任意の $\lambda_1,\lambda_2\in\rho(T)$ に対し,

$$(\lambda_1-T)^{-1}-(\lambda_2-T)^{-1} = (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-T)^{-1}(\lambda_2-T)^{-1}$$

が成り立つ．

(2) $\rho(T)$ は $\mathbb{C}$ の開集合であり, レゾルベント

$$\rho(T)\ni\lambda\mapsto(\lambda-T)^{-1}\in B(\mathcal{H})$$

は Banach 空間 $B(\mathcal{H})$ 値正則関数である．

証明.　(1) 任意の $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(T)$ に対し,

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - T)^{-1} - (\lambda_2 - T)^{-1} &= (\lambda_1 - T)^{-1}\{(\lambda_2 - T) - (\lambda_1 - T)\}(\lambda_2 - T)^{-1} \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 - T)^{-1}(\lambda_2 - T)^{-1}.\end{aligned}$$

(2) 任意の $\lambda_0 \in \rho(T)$ と $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 - T)^{-1}\|^{-1}$ なる任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ を取る. このとき,

$$\lambda - T = (\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - T) = (\lambda_0 - T)\left\{1 - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}\right\} \tag{10.6}$$

であり, $\|(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}\| < 1$ であるから, 命題 9.2 より $1 - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1} \in B(\mathcal{H})$ は可逆であり,

$$\left\{1 - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}\right\}^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 - T)^{-n} \tag{10.7}$$

が成り立つ. よって (10.6) より $\lambda - T : D(T) \to \mathcal{H}$ は全単射だから $\lambda \in \rho(T)$ であり, (10.6), (10.7) より,

$$\begin{aligned}(\lambda - T)^{-1} &= \left\{1 - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}\right\}^{-1}(\lambda_0 - T)^{-1} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 - T)^{-(n+1)}\end{aligned} \tag{10.8}$$

である. これより任意の $\lambda_0 \in \rho(T)$ に対し λ_0 を中心とする半径 $\|(\lambda_0 - T)^{-1}\|^{-1}$ の $\mathbb{C}$ の開球は $\rho(T)$ に含まれるから $\rho(T)$ は $\mathbb{C}$ の開集合であり, その開球の任意の元 λ に対し (10.8) が成り立つから, 冪級数関数の複素微分可能性 (定理 4.30) より, $\rho(T) \ni \lambda \mapsto (\lambda - T)^{-1} \in B(\mathcal{H})$ は Banach 空間 $B(\mathcal{H})$ 値の正則関数である.

□

系 10.43 (スペクトルは $\mathbb{C}$ の閉集合)**.** Hilbert 空間上の閉線型作用素のスペクトルは $\mathbb{C}$ の閉集合である.

証明. Hilbert 空間上の閉線型作用素のレゾルベント集合は命題 10.42 より $\mathbb{C}$ の開集合であるから, その補集合であるスペクトルは閉集合である. □

命題 10.44 (Hilbert 空間上の自己共役作用素のスペクトルは $\mathbb{R}$ の部分集合)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. このとき T のスペクトル $\sigma(T)$ は $\mathbb{R}$ の部分集合である.

証明. T のレゾルベント集合 $\rho(T) = \mathbb{C} \backslash \sigma(T)$ に対し $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R} \subseteq \rho(T)$ を示せばよい. そこで $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ とし, $\lambda := \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ とおく. このとき $((\alpha - T)v \mid v) \in \mathbb{R}$ $(\forall v \in D(T))$ であることから,

$$\|(\lambda - T)v\|^2 = \|(\alpha - T)v + i\beta v\|^2 = \|(\alpha - T)v\|^2 + \beta^2\|v\|^2 \quad (\forall v \in D(T)), \tag{10.9}$$

$$\|(\overline{\lambda} - T)v\|^2 = \|(\alpha - T)v - i\beta v\|^2 = \|(\alpha - T)v\|^2 + \beta^2\|v\|^2 \quad (\forall v \in D(T)) \tag{10.10}$$

である. よって (10.9) と $\beta \neq 0$ より $\mathrm{Ker}(\lambda - T) = \{0\}$, $\overline{\mathrm{Ran}(\lambda - T)} = \mathrm{Ran}(\lambda - T)$*147である. そして (10.10) より $\mathrm{Ker}(\overline{\lambda} - T) = \{0\}$ であるから, 命題 10.27 の (6) より,

$$\mathrm{Ran}(\lambda - T) = \overline{\mathrm{Ran}(\lambda - T)} = ((\mathrm{Ran}(\lambda - T))^{\perp})^{\perp} = (\mathrm{Ker}(\overline{\lambda} - T))^{\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathcal{H}$$

である. よって $\lambda - T : D(T) \to \mathcal{H}$ は全単射なので $\lambda \in \rho(T)$ である. ゆえに $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R} \subseteq \rho(T)$ だから $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ である. □

定理 10.45 (Hilbert 空間上の自己共役作用素のスペクトルとその Cayley 変換のスペクトルの関係)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. このとき T のスペクトル $\sigma(T)$ は $\mathbb{R}$ の空でない閉集合であり, 同相写像

$$C : \mathbb{R} \ni t \mapsto (t - i)(t + i)^{-1} \in \mathbb{T} \backslash \{1\}$$

*148に対し,

$$C(\sigma(T)) = \sigma(C(T)) \backslash \{1\}$$

が成り立つ. ただし $C(T) = (T - i)(T + i)^{-1}$ (T の Cayley 変換) である.

*147 $\lambda - T$ が閉線型作用素であることに注意

*148 逆写像は $\mathbb{T} \backslash \{1\} \ni \lambda \mapsto i(1 + \lambda)(1 - \lambda) \in \mathbb{R}$ である.

証明. 系 10.43 と命題 10.44 より $\sigma(T)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合である．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\begin{aligned} C(t) - C(T) &= (t-i)(t+i)^{-1} - (T-i)(T+i)^{-1} \\ &= (t+i)^{-1}\left\{(t-i)(T+i) - (t+i)(T-i)\right\}(T+i)^{-1} \\ &= 2i(t+i)^{-1}(t-T)(T+i)^{-1} \end{aligned}$$

だから，$C(t) - C(T) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ が全単射であることと $t - T : D(T) \to \mathcal{H}$ が全単射であることは同値である．よって $t \in \mathbb{R}$ に対し，

$$C(t) \in \sigma(C(T))\backslash\{1\} \quad \Leftrightarrow \quad t \in \sigma(T) \tag{10.11}$$

が成り立つ．$C(T)$ は $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素 (定理 10.34) であるから定理 9.27 より $\sigma(C(T))\backslash\{1\} \subseteq \mathbb{T}\backslash\{1\} = C(\mathbb{R})$ である．よって (10.11) より，

$$C(\sigma(T)) = \sigma(C(T))\backslash\{1\} \tag{10.12}$$

が成り立つ．また $\sigma(C(T)) \neq \varnothing$ である (命題 9.8) から，もし $\sigma(C(T))\backslash\{1\} = \varnothing$ ならば $\sigma(C(T)) = \{1\}$ となり，連続関数カルキュラス (9.49) より $C(T) = 1$ となるので $1 - C(T)$ が単射であること (命題 10.33) に矛盾する．ゆえに $\sigma(C(T))\backslash\{1\} \neq \varnothing$ である．よって (10.12) より $\sigma(T) \neq \varnothing$ である． □

10.5 射影値測度による積分

定義 10.46 (Hilbert 空間上の射影作用素全体)**.** Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の射影作用素全体を $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ と表す．

定義 10.47 (射影値測度)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$(X, \mathfrak{M})$ を可測空間とする．$E : \mathfrak{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ が次を満たすとき E を射影値測度と言う．

(1) $E(X) = 1$.
(2) 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し $E_{u,v} : \mathfrak{M} \ni B \mapsto (E(B)u \mid v) \in \mathbb{C}$ は複素数値測度.

命題 10.48 (射影値測度の基本性質)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$(X, \mathfrak{M})$ を可測空間，$E : \mathfrak{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を射影値測度とする．このとき次が成り立つ．

(1) $E(\varnothing) = 0$.
(2) $A, B \in \mathfrak{M}$ が $A \subseteq B$ を満たすならば $E(A) \leqslant E(B)$.
(3) 任意の $A, B \in \mathfrak{M}$ に対し $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ が成り立つ．特に $A \cap B = \varnothing$ ならば $E(A)$ と $E(B)$ は直交する．
(4) $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathfrak{M}$ の非交叉列ならば $(E(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は射影の直交列であり，

$$E\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(B_n).$$

(射影作用素の直交族の和の定義 10.16 を参照).
(5) $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathfrak{M}$ の単調増加列ならば $(E(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は $B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ の単調増加列であり，

$$E\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \text{SOT-}\lim_{n\to\infty} E(B_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} E(B_n).$$

ただし $\sup_{n\in\mathbb{N}} E(B_n)$ は順序集合 $B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ (定義 9.62) における $\{E(B_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ の上限である．
(6) $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathfrak{M}$ の単調減少列ならば $(E(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は $B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ の単調減少列であり，

$$E\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \text{SOT-}\lim_{n\to\infty} E(B_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} E(B_n).$$

ただし $\inf_{n\in\mathbb{N}} E(B_n)$ は順序集合 $B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ における $\{E(B_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ の下限である．

証明. (1) 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し $(E(\varnothing)u \mid v) = E_{u,v}(\varnothing) = 0$ であるから $E(\varnothing) = 0$ である.

(2) $\mathcal{P}(\mathcal{H}) \subseteq B(\mathcal{H})_+$ であるから任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し $E_{v,v}$ は非負値測度である. よって $A, B \in \mathfrak{M}$ が $A \subseteq B$ を満たすならば,

$$(E(A)v \mid v) = E_{v,v}(A) \leqslant E_{v,v}(B) = (E(B)v \mid v) \quad (\forall v \in \mathcal{H})$$

だから命題 10.5 より $E(A) \leqslant E(B)$ である.

(3) $A, B \in \mathfrak{M}$ が $A \cap B = \varnothing$ を満たすとすると, 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(E(A \cup B)u \mid v) = E_{u,v}(A \cup B) = E_{u,v}(A) + E_{u,v}(B) = ((E(A) + E(B))u \mid v)$$

であるから $E(A) + E(B) = E(A \cup B) \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ である. よって命題 9.75 より $E(A)$ と $E(B)$ は直交するので $E(A \cap B) = E(\varnothing) = 0 = E(A)E(B)$ である.
任意の $A, B \in \mathfrak{M}$ を取る. $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ であり, $(A \backslash B) \cap (A \cap B) = \varnothing$ であるから上段の結果より,

$$E(A) = E(A \backslash B) + E(A \cap B) \tag{10.13}$$

である. そして $(A \backslash B) \cap B = \varnothing$ であるので再び上段の結果より,

$$E(A \backslash B)E(B) = 0 \tag{10.14}$$

である. (2) より $E(A \cap B) \leqslant E(B)$ だから命題 9.74 より,

$$E(A \cap B) = E(A \cap B)E(B) \tag{10.15}$$

なので, (10.13), (10.14), (10.15) より,

$$E(A)E(B) = (E(A \backslash B) + E(A \cap B))E(B) = E(A \backslash B)E(B) + E(A \cap B)E(B) = E(A \cap B)$$

である.

(4) $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathfrak{M}$ の非交叉列ならば (3) より $(E(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は射影作用素の直交列であるから,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} E(B_n) = \text{SOT-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} E(B_n)$$

である (定義 10.16 を参照). よって任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\left(E\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)u \mid v\right) = E_{u,v}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E_{u,v}(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (E(B_n)u \mid v) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} E(B_n)u \mid v\right)$$

であるから $E\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(B_n)$ である.

(5) $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathfrak{M}$ の単調増加列ならば任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し命題 5.87 より,

$$\left(E\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)u \mid v\right) = E_{u,v}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} E_{u,v}(B_n) = \lim_{n\to\infty} (E(B_n)u \mid v) \tag{10.16}$$

である. そして (2) より $(E(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は射影作用素の単調増加列であるから定理 10.15 より,

$$\text{SOT-}\lim_{n\to\infty} E(B_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} E(B_n)$$

である. よって (10.16) より,

$$\left(E\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)u \mid v\right) = \lim_{n\to\infty} (E(B_n)u \mid v) = (\text{SOT-}\lim_{n\to\infty} E(B_n)u \mid v) = (\sup_{n\in\mathbb{N}} E(B_n)u \mid v)$$

であるから,

$$E\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \text{SOT-}\lim_{n\to\infty} E(B_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} E(B_n)$$

である.

(6) $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathfrak{M}$ の単調減少列ならば $(X\backslash B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathfrak{M}$ の単調増加列なので (5) より,

$$E\left(X\backslash\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n\right)=E\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X\backslash B_n)\right)=\text{SOT-}\lim_{n\to\infty}E(X\backslash B_n)=\sup_{n\in\mathbb{N}}E(X\backslash B_n) \tag{10.17}$$

である. ここで (1), (4) より,

$$E\left(X\backslash\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n\right)=1-E\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n\right),\quad E(X\backslash B_n)=1-E(B_n)\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

であるから (10.17) より,

$$1-E\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n\right)=\text{SOT-}\lim_{n\to\infty}(1-E(B_n))=\sup_{n\in\mathbb{N}}(1-E(B_n))$$

なので,

$$E\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n\right)=\text{SOT-}\lim_{n\to\infty}E(B_n)=\inf_{n\in\mathbb{N}}E(B_n)$$

である.

□

命題 10.49. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間とし, $E:\mathfrak{M}\to\mathcal{P}(\mathcal{H})$ を射影値測度とする. また $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,\mathfrak{M})$ を $X\to\mathbb{C}$ の有界可測関数全体に各点ごとの演算と sup ノルムを入れた可換 C^*-環とする. このとき $*$-環準同型写像

$$\Phi_E:\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,\mathfrak{M})\to B(\mathcal{H})$$

で,

$$(\Phi_E(f)u\mid v)=\int_X f(x)dE_{u,v}(x)\quad(\forall f\in\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,\mathfrak{M}),\forall u,v\in\mathcal{H})$$

を満たすものが唯一つ存在する*149.

証明. 一意性は自明である. 存在を示す. まず任意の $u,v\in\mathcal{H}$ に対し複素数値測度 $E_{u,v}:\mathfrak{M}\ni B\mapsto(E(B)u\mid v)\in\mathbb{C}$ の全変動 (定義 5.110) $|E_{u,v}|:\mathfrak{M}\to\mathbb{C}$ が $|E_{u,v}|(X)\leqslant\|u\|\|v\|$ を満たすことを示す. そのためには $\mathfrak{M}$ の有限非交叉列 $B_1,\cdots,B_n$ で $X=\bigcup_{j=1}^n B_j$ なるものを取り,

$$\sum_{j=1}^n|E_{u,v}(B_j)|\leqslant\|u\|\|v\| \tag{10.18}$$

が成り立つことを示せばよい. そこで各 $j\in\{1,\cdots,n\}$ に対し $|E_{u,v}(B_j)|=\alpha_jE_{u,v}(B_j)$, $|\alpha_j|=1$ を満たす $\alpha_j\in\mathbb{C}$ を取る. このとき,

$$\sum_{j=1}^n|E_{u,v}(B_j)|=\sum_{j=1}^n\alpha_jE_{u,v}(B_j)=\sum_{j=1}^n(\alpha_jE(B_j)u\mid v)\leqslant\left\|\sum_{j=1}^n\alpha_jE(B_j)u\right\|\|v\| \tag{10.19}$$

であり, $B_1,\cdots,B_n$ が非交叉であることから $E(B_1)u,\cdots,E(B_n)u$ は互いに直交する (命題 10.48) ので,

$$\left\|\sum_{j=1}^n\alpha_jE(B_j)u\right\|^2=\sum_{j=1}^n\|\alpha_jE(B_j)u\|^2=\sum_{j=1}^n\|E(B_j)u\|^2=\left\|\sum_{j=1}^nE(B_j)u\right\|^2=\|E(X)u\|^2=\|u\|^2 \tag{10.20}$$

である. よって (10.19), (10.20) より (10.18) が成り立つので,

$$|E_{u,v}|(X)\leqslant\|u\|\|v\|\quad(\forall u,v\in\mathcal{H}) \tag{10.21}$$

*149 右辺は複素数値測度 $E_{u,v}:\mathfrak{M}\ni B\mapsto(E(B)u\mid v)\in\mathbb{C}$ による積分 (定義 5.116) である.

が成り立つ. 任意の $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathfrak{M})$ を取り固定する. 命題 5.184 より,

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (u, v) \mapsto \int_X f(x) dE_{u,v}(x) \in \mathbb{C} \tag{10.22}$$

は準双線型汎関数 (定義 3.45) であり, (10.21) より,

$$\left| \int_X f(x) dE_{u,v}(x) \right| \leqslant \|f\| |E_{u,v}|(X) \leqslant \|f\| \|u\| \|v\| \quad (\forall u, v \in \mathcal{H})$$

であるから (10.22) はノルムが $\|f\|$ 以下の有界準双線型汎関数である. よって任意の $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathfrak{M})$ に対し定理 3.49 より $\Phi_E(f) \in B(\mathcal{H})$ で,

$$(\Phi_E(f)u \mid v) = \int_X f(x) dE_{u,v}(x) \quad (\forall u, v \in \mathcal{H}) \tag{10.23}$$

を満たすものが定まり $\|\Phi_E(f)\| \leqslant \|f\|$ である. こうしてノルム減少な有界線型作用素

$$\Phi_E : \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathfrak{M}) \ni f \mapsto \Phi_E(f) \in B(\mathcal{H})$$

が定義される. Φ_E が $*$-環準同型写像であることを示す. 任意の $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathfrak{M})$, $v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(\Phi_E(\overline{f})v \mid v) = \int_X \overline{f(x)} dE_{v,v}(x) = \overline{\int_X f(x) dE_{v,v}(x)} = \overline{(\Phi_E(f)v \mid v)} = (\Phi_E(f)^* v \mid v)$$

であるから, 偏極恒等式 (10.4) より,

$$\Phi_E(\overline{f}) = \Phi_E(f)^* \quad (\forall f \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathfrak{M}))$$

である. よって Φ_E は $*$-演算を保存する. 後は任意の $f, g \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathfrak{M})$ に対し,

$$\Phi_E(fg) = \Phi_E(f)\Phi_E(g) \tag{10.24}$$

が成り立つことを示せばよい. 任意の $B \in \mathfrak{M}$, $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(\Phi_E(\chi_B)u \mid v) = \int_X \chi_B(x) dE_{u,v}(x) = E_{u,v}(B) = (E(B)u \mid v)$$

であるから,

$$\Phi_E(\chi_B) = E(B) \quad (\forall B \in \mathfrak{M})$$

である. よって任意の $A, B \in \mathfrak{M}$ に対し, 命題 10.48 より,

$$\Phi_E(\chi_A \chi_B) = \Phi_E(\chi_{A \cap B}) = E(A \cap B) = E(A)E(B) = \Phi_E(\chi_A)\Phi_E(\chi_B) \tag{10.25}$$

である. (10.25) と Φ_E の線型性より (10.23) は任意の可測単関数 f, g に対して成り立つ. そして系 5.129 より $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathfrak{M})$ の任意の元は可測単関数によって一様近似できるので, Φ_E が有界線型作用素であることから, (10.23) は任意の $f, g \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathfrak{M})$ に対して成り立つ. よって Φ_E は $*$-環準同型写像である. □

定義 10.50 (射影値測度による有界可測関数の積分)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $E : \mathfrak{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を射影値測度とする. 命題 10.49 より $*$-環準同型写像

$$\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathfrak{M}) \ni f \mapsto \int_X f(x) dE(x) \in B(\mathcal{H})$$

で,

$$\left(\int_X f(x) dE(x) u \mid v \right) = \int_X f(x) dE_{u,v}(x) \quad (\forall f \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathfrak{M}), \forall u, v \in \mathcal{H})$$

を満たすものが唯一つ存在する. 任意の有界可測関数 $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathfrak{M})$ に対し,

$$\int_X f(x) dE(x) \in B(\mathcal{H})$$

を f の射影値測度 E による積分と言う.

$$\int_X \chi_B(x) dE(x) = E(B) \quad (\forall B \in \mathfrak{M})$$

が成り立つことに注意.

命題 10.51. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間, $E:\mathfrak{M}\to\mathcal{P}(\mathcal{H})$ を射影値測度, $f:X\to\mathbb{C}$ を任意の可測関数とする. そして,

$$D_E(f) := \left\{ v\in\mathcal{H} : \int_X |f(x)|^2 dE_{v,v}(x) < \infty \right\}$$

とおく. このとき,

(1) $D_E(f)$ は $\mathcal{H}$ の稠密な線型部分空間である. そして任意の $v\in\mathcal{H}$ に対し,

$$v_n := E((|f|\leqslant n))v \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \tag{10.26}$$

とおくと,

$$v_n\in D_E(f) \quad (\forall n\in\mathbb{N}), \quad \lim_{n\to\infty}\|v-v_n\| = 0$$

が成り立つ.

(2) 任意の $u\in D_E(f), v\in\mathcal{H}$ に対し $f\in\mathcal{L}^1(X,\mathfrak{M},E_{u,v})$ であり,

$$\left|\int_X f(x)dE_{u,v}(x)\right| \leqslant \left(\int_X |f(x)|^2 dE_{u,u}(x)\right)^{\frac{1}{2}} \|v\| \quad (\forall v\in\mathcal{H})$$

が成り立つ.

(3)

$$D_E(f)\times\mathcal{H}\ni(u,v)\mapsto\int_X f(x)dE_{u,v}(x)\in\mathbb{C}$$

は準双線型汎関数である.

(4) 線型作用素 $\Phi_E(f):D_E(f)\to\mathcal{H}$ で,

$$(\Phi_E(f)u \mid v) = \int_X f(x)dE_{u,v}(x) \quad (\forall u\in D_E(f), \forall v\in\mathcal{H})$$

を満たすものが唯一つ存在する. そして,

$$\|\Phi_E(f)v\| = \left(\int_X |f(x)|^2 dE_{v,v}(x)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall v\in D_E(f))$$

が成り立つ.

証明. (1) 任意の $v\in D_E(f)$, 任意の $\alpha\in\mathbb{C}$ に対し,

$$E_{\alpha v,\alpha v}(B) = \|E(B)\alpha v\|^2 = |\alpha|^2 E_{v,v}(B) \quad (\forall B\in\mathfrak{M})$$

であるから,

$$\int_X |f(x)|^2 dE_{\alpha v,\alpha v}(x) = |\alpha|^2\int_X |f(x)|^2 dE_{v,v}(x) < \infty$$

である. よって $\alpha v\in D_E(f)$ である. また任意の $u,v\in D_E(f)$ に対し,

$$E_{u+v,u+v}(B) = \|E(B)(u+v)\|^2 \leqslant 2(\|E(B)u\|^2+\|E(B)v\|^2) = 2(E_{u,u}+E_{v,v})(B) \quad (\forall B\in\mathfrak{M})$$

であるから,

$$\int_X |f(x)|^2 dE_{u+v,u+v}(x) \leqslant 2\left(\int_X |f(x)|^2 dE_{u,u}(x) + \int_X |f(x)|^2 dE_{v,v}(x)\right) < \infty$$

である. よって $u+v\in D_E(f)$ なので $D_E(f)$ は $\mathcal{H}$ の線型部分空間である. 任意の $v\in\mathcal{H}$ に対し (10.26) における $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考えると,

$$E_{v_n,v_n}(B) = \|E(B)v_n\|^2 = \|E(B\cap(|f|\leqslant n))v\|^2 = E_{v,v}(B\cap(|f|\leqslant n)) \quad (\forall n\in\mathbb{N}, \forall B\in\mathfrak{M})$$

であるから,

$$\int_X |f(x)|^2 dE_{v_n,v_n}(x) = \int_X |f(x)|^2 \chi_{(|f|\leqslant n)}(x) dE_{v,v}(x) \leqslant n^2\|v\|^2 < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

である. よって $v_n \in D_E(f)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ である. また命題 10.48 より

$$\text{SOT-}\lim_{n\to\infty} E((|f| \leqslant n)) = E(X) = 1$$

であるから,

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} E((|f| \leqslant n))v = v$$

である. よって $D_E(f)$ は $\mathcal{H}$ の稠密部分空間である.

(2)

$$f_n := f\chi_{(|f|\leqslant n)} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{10.27}$$

として有界可測関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定義する. 任意の $u \in D_E(f)$, $v \in \mathcal{H}$ を取り固定する. 複素数値測度 $E_{u,v}$ に対する符号関数 (定義 5.115) を $h \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, |E_{u,v}|)$ とすると, 射影値測度による有界可測関数の積分の定義 10.50 より,

$$\begin{aligned}\int_X |f_n(x)| d|E_{u,v}|(x) &= \int_X |f_n(x)|\overline{h(x)} dE_{u,v}(x) = \left(\int_X |f_n(x)|\overline{h(x)} dE(x)u \mid v\right)\\ &\leqslant \left\|\int_X |f_n(x)|\overline{h(x)} dE(x)u\right\| \|v\| \quad (\forall n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}\left\|\int_X |f_n(x)|\overline{h(x)} dE(x)u\right\|^2 &= \left(\int_X |f_n(x)|\overline{h(x)} dE(x)u \mid \int_X |f_n(x)|\overline{h(x)} dE(x)u\right)\\ &= \left(\int_X |f_n(x)|^2 dE(x)u \mid u\right) = \int_X |f_n(x)|^2 dE_{u,u}(x)\\ &\leqslant \int_X |f(x)|^2 dE_{u,u}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

であるから,

$$\int_X |f_n(x)| d|E_{u,v}|(x) \leqslant \left(\int_X |f(x)|^2 dE_{u,u}(x)\right)^{\frac{1}{2}} \|v\| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ. よって単調収束定理より,

$$\int_X |f(x)| d|E_{u,v}|(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n(x)| d|E_{u,v}|(x) \leqslant \left(\int_X |f(x)|^2 dE_{u,u}(x)\right)^{\frac{1}{2}} \|v\|$$

であるから $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, E_{u,v})$ であり,

$$\left|\int_X f(x) dE_{u,v}(x)\right| \leqslant \int_X |f(x)| d|E_{u,v}|(x) \leqslant \left(\int_X |f(x)|^2 dE_{u,u}(x)\right)^{\frac{1}{2}} \|v\|$$

が成り立つ.

(3) (10.27) における有界可測関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考えると, 命題 5.184 より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$D_E(f) \times \mathcal{H} \ni (u, v) \mapsto \int_X f_n(x) dE_{u,v}(x) \in \mathbb{C}$$

は準双線型汎関数である. そして Lebesgue 優収束定理より,

$$\int_X f(x) dE_{u,v}(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) dE_{u,v}(x) \quad (\forall u \in D_E(f), \forall v \in \mathcal{H})$$

であるから,

$$D_E(f) \times \mathcal{H} \ni (u, v) \mapsto \int_X f(x) dE_{u,v}(x) \in \mathbb{C}$$

は準双線型汎関数である.

(4) 任意の $u \in D_E(f)$ に対し (2), (3) より,

$$\mathcal{H} \ni v \mapsto \int_X f(x)dE_{u,v}(x) \in \mathbb{C}$$

は有界反線型汎関数であるから Riesz の表現定理 3.44 より $\Phi_E(f)u \in \mathcal{H}$ で,

$$(\Phi_E(f)u \mid v) = \int_X f(x)dE_{u,v}(x) \quad (\forall v \in \mathcal{H})$$

を満たすものが一意的に定まる. そして (3) より,

$$\Phi_E(f) : D_E(f) \ni u \mapsto \Phi_E(f)u \in \mathcal{H}$$

は線型作用素であり, (2) より,

$$\|\Phi_E(f)u\| \leqslant \left(\int_X |f(x)|^2 dE_{u,u}(x)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall u \in D_E(f)) \tag{10.28}$$

である. 今, (10.27) における有界可測関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える. このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\begin{aligned}(\Phi_E(f)u - \Phi_E(f_n)u \mid v) &= \int_X f(x)dE_{u,v}(x) - \int_X f_n(x)dE_{u,v}(x) = \int_X f(x) - f_n(x)dE_{u,v}(x)\\ &= (\Phi_E(f - f_n)u \mid v) \quad (\forall u \in D_E(f), \forall v \in \mathcal{H})\end{aligned}$$

であるから,

$$\Phi_E(f)u - \Phi_E(f_n)u = \Phi_E(f - f_n)u \quad (\forall u \in D_E(f))$$

である. よって (10.28) で f を $f - f_n$ に置き換えたものを考えれば,

$$\|\Phi_E(f)u - \Phi_E(f_n)u\| = \|\Phi_E(f - f_n)u\| \leqslant \left(\int_X |f(x) - f_n(x)|^2 dE_{u,u}(x)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall u \in D_E(f)) \tag{10.29}$$

となる. Lebesgue 優収束定理より (10.29) の右辺は $n \to \infty$ で 0 に収束するので,

$$\|\Phi_E(f)u\| = \lim_{n\to\infty} \|\Phi_E(f_n)u\| \quad (\forall u \in D_E(f)) \tag{10.30}$$

が成り立つ. そして射影値測度による有界可測関数の積分の定義 10.50 より,

$$\begin{aligned}\|\Phi_E(f_n)u\|^2 &= \left(\int_X f_n(x)dE(x)u \mid \int_X f_n(x)dE(x)u\right) = \left(\int_X |f_n(x)|^2 dE(x)u \mid u\right)\\ &= \int_X |f_n(x)|^2 dE_{u,u}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N})\end{aligned} \tag{10.31}$$

であるから, (10.30) と (10.31) と単調収束定理より,

$$\|\Phi_E(f)u\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|\Phi_E(f_n)u\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x)|^2 dE_{u,u}(x) = \int_X |f(x)|^2 dE_{u,u}(x) \quad (\forall u \in D_E(f))$$

となる.

□

定義 10.52 (射影値測度による可測関数の積分の定義). $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $E : \mathfrak{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を射影値測度, $f : X \to \mathbb{C}$ を任意の可測関数とする. このとき命題 10.51 より,

$$D_E(f) := \left\{ v \in \mathcal{H} : \int_X |f(x)|^2 dE_{v,v}(x) < \infty \right\},$$

は $\mathcal{H}$ の稠密な線型部分空間であり, 線型作用素

$$\int_X f(x)dE(x) : D_E(f) \ni v \mapsto \int_X f(x)dE(x)v \in \mathcal{H} \tag{10.32}$$

で,

$$\left(\int_X f(x)dE(x)u \mid v\right) = \int_X f(x)dE_{u,v}(x) \quad (\forall u \in D_E(f), \forall v \in \mathcal{H})$$

を満たすものが唯一つ存在する．そして,

$$\left\|\int_X f(x)dE(x)v\right\| = \left(\int_X |f(x)|^2 dE_{v,v}(x)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall v \in D_E(f))$$

が成り立つ．(10.32) を f の射影値測度 E による積分と言う．これは有界可測関数の射影値測度による積分の定義 10.50 の拡張である．

命題 10.53 (射影値測度による積分の基本性質)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $E : \mathfrak{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を射影値測度とする．このとき,

(1) 任意の可測関数 $f, g : X \to \mathbb{C}$ に対し,

$$D\left(\int_X f(x)dE(x) \int_X g(x)dE(x)\right) = D_E(fg) \cap D_E(g), \tag{10.33}$$

$$\int_X f(x)dE(x) \int_X g(x)dE(x) \subseteq \int_X f(x)g(x)dE(x) \tag{10.34}$$

が成り立つ．

(2) 任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\int_X \overline{f(x)}dE(x) = \left(\int_X f(x)dE(x)\right)^*$$

が成り立つ．

(3) 任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\int_X f(x)dE(x) : D_E(f) \to \mathcal{H}$$

は稠密に定義された閉線型作用素である．そして任意の可測関数 $f, g : X \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\overline{\int_X f(x)dE(x) + \int_X g(x)dE(x)} = \int_X (f(x) + g(x))dE(x),$$

$$\overline{\int_X f(x)dE(x) \int_X g(x)dE(x)} = \int_X f(x)g(x)dE(x)$$

が成り立つ．

(4) 任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\left(\int_X f(x)dE(x)\right)^n = \int_X f(x)^n dE(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

$$\left(\int_X f(x)dE(x)\right)^* \left(\int_X f(x)dE(x)\right) = \int_X |f(x)|^2 dE(x)$$

が成り立つ．

(5) 任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\mathrm{Ker}\left(\int_X f(x)dE(x)\right) = \mathrm{Ran}\, E((f = 0))$$

(ただし $(f = 0) = \{x \in X : f(x) = 0\}$) が成り立つ．そして,

$$\int_X f(x)dE(x) : D_E(f) \to \mathcal{H}$$

が単射, すなわち, $E((f=0))=0$ であるとき,

$$f^{-1}(x)=f(x)^{-1}\quad(x\notin(f=0))$$

を満たす可測関数 $f^{-1}:X\to\mathbb{C}$ に対し,

$$\left(\int_X f(x)dE(x)\right)^{-1}=\int_X f^{-1}(x)dE(x)$$

が成り立つ.

証明.　(1)

$$f_n:=f\chi_{(|f|\leqslant n)},\quad g_n:=g\chi_{(|g|\leqslant n)}\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

として有界可測関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定義する. 任意の $v\in D_E(g)$, $n\in\mathbb{N}$, $u\in\mathcal{H}$ に対し, 射影値測度による有界可測関数の積分の定義 10.50 と Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned}&\left(\int_X f_n(x)dE(x)\int_X g(x)dE(x)v\mid u\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\int_X f_n(x)dE(x)\int_X g_m(x)dE(x)v\mid u\right)\\&=\lim_{m\to\infty}\left(\int_X f_n(x)g_m(x)dE(x)v\mid u\right)=\left(\int_X f_n(x)g(x)dE(x)v\mid u\right)\end{aligned}$$

であるから,

$$\int_X f_n(x)dE(x)\int_X g(x)dE(x)v=\int_X f_n(x)g(x)dE(x)v\quad(\forall v\in D_E(g),\forall n\in\mathbb{N})\tag{10.35}$$

である. よって $v\in D_E(g)$ に対し,

$$w:=\int_X g(x)dE(x)v\in\mathcal{H}$$

とおけば,

$$\int_X f_n(x)dE(x)w=\int_X f_n(x)g(x)dE(x)v\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

であるから, ノルムの二乗を取れば,

$$\int_X|f_n(x)|^2dE_{w,w}(x)=\int_X|f_n(x)g(x)|^2dE_{v,v}(x)\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

を得る. ゆえに単調収束定理より,

$$\int_X|f(x)|^2dE_{w,w}(x)=\int_X|f(x)g(x)|^2dE_{v,v}(x)$$

が成り立つので (10.33) が成り立つ. そして任意の $v\in D_E(fg)\cap D_E(g)$, $u\in\mathcal{H}$ に対し Lebesgue 優収束定理と (10.35) より,

$$\begin{aligned}&\left(\int_X f(x)g(x)dE(x)v\mid u\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n(x)g(x)dE(x)v\mid u\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n(x)dE(x)\int_X g(x)dE(x)v\mid u\right)\\&=\left(\int_X f(x)dE(x)\int_X g(x)dE(x)v\mid u\right)\end{aligned}$$

となるので (10.34) が成り立つ.

(2) 有界可測関数の列 $f_n=f\chi_{(|f|\leqslant n)}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ を考える. 任意の $u,v\in D_E(f)=D_E(\overline{f})$ に対し Lebesgue 優収束定理と射影値測度による有界可測関数の積分の定義 10.50 より,

$$\begin{aligned}&\left(\int_X f(x)dE(x)u\mid v\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n(x)dE(x)u\mid v\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(u\mid\int_X\overline{f_n(x)}dE(x)v\right)=\left(u\mid\int_X\overline{f(x)}dE(x)v\right)\end{aligned}$$

となるので,

$$\int_X \overline{f(x)}dE(x) \subseteq \left(\int_X f(x)dE(x)\right)^*$$

が成り立つ. 逆の包含関係を示す. 任意の

$$v \in D\left(\left(\left(\int_X f(x)dE(x)\right)^*\right)\right)$$

を取り, $v \in D_E(\overline{f})$ を示せばよい. まず (1) より,

$$\int_X f_n(x)dE(x) = \left(\int_X f(x)dE(x)\right)E((|f| \leqslant n)) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから, 命題 10.27 の (10) と f_n の有界性より,

$$E((|f| \leqslant n))\left(\int_X f(x)dE(x)\right)^* \subseteq \left(\int_X f_n(x)dE(x)\right)^* = \int_X \overline{f_n(x)}dE(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

である. よって単調収束定理より,

$$\begin{aligned}
&\int_X |\overline{f(x)}|^2 dE_{v,v}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |\overline{f_n(x)}|^2 dE_{v,v}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\int_X \overline{f_n(x)}dE(x)v\right\|^2 \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|E((|f| \leqslant n))\left(\int_X f(x)dE(x)\right)^* v\right\|^2 \leqslant \left\|\left(\int_X f(x)dE(x)\right)^* v\right\|^2 < \infty
\end{aligned}$$

であるから $v \in D_E(\overline{f})$ である.

(3) 任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し (2) より,

$$\int_X f(x)dE(x) = \left(\int_X \overline{f(x)}dE(x)\right)^*$$

であるから命題 10.27 の (7) より任意の可測関数の射影値測度による積分は閉線型作用素である. 任意の可測関数 $f, g : X \to \mathbb{C}$ に対し $D_E(f) \cap D_E(g) \subseteq D_E(f+g)$ であることと射影値測度による積分が閉線型作用素であることから,

$$\overline{\int_X f(x)dE(x) + \int_X g(x)dE(x)} \subseteq \int_X (f(x)+g(x))dE(x) \tag{10.36}$$

である.

$$B_n := (|f| \leqslant n) \cap (|g_n| \leqslant n) \in \mathfrak{M} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおくと SOT-$\lim_{n\to\infty} E(B_n) = 1$ であり, 任意の $v \in D_E(f+g)$ に対し Lebesgue 優収束定理と (1) より,

$$\begin{aligned}
&\int_X (f(x)+g(x))dE(x)v = \lim_{n\to\infty}\int_X (f(x)+g(x))\chi_{B_n}(x)dE(x)v \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_X f(x)\chi_{B_n}(x)dE(x)v + \int_X g(x)\chi_{B_n}(x)dE(x)v\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_X f(x)dE(x) + \int_X g(x)dE(x)\right)E(B_n)v \\
&= \overline{\left(\int_X f(x)dE(x) + \int_X g(x)dE(x)\right)}v
\end{aligned}$$

であるから (10.36) の逆の包含関係が成り立つ. (1) より,

$$\overline{\int_X f(x)dE(x)\int_X g(x)dE(x)} \subseteq \int_X f(x)g(x)dE(x) \tag{10.37}$$

であり, 任意の $v \in D_E(fg)$ に対し Lebesgue 優収束定理と (1) より,

$$\begin{aligned}\int_X f(x)g(x)dE(x)v &= \lim_{n\to\infty}\int_X f(x)g(x)\chi_{B_n}(x)dE(x)v\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_X f(x)dE(x)\int_X g(x)\chi_{B_n}(x)dE(x)v\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_X f(x)dE(x)\int_X g(x)dE(x)E(B_n)v\\ &= \overline{\int_X f(x)dE(x)}\int_X g(x)dE(x)v\end{aligned}$$

(最後の等号で $\int_X f(x)dE(x)$ が閉作用素であることを用いた) であるから (10.37) の逆の包含関係が成り立つ.

(4) 任意の $n \in \mathbb{N}, v \in D_E(f^n)$ に対し $E_{v,v}$ が有限測度であることから Hölder の不等式 5.130 より,

$$|f|^2 \in \mathcal{L}^n(X, \mathfrak{M}, E_{v,v}) \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, E_{v,v})$$

である. よって,

$$D_E(f^n) \subseteq D_E(f)\ (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{10.38}$$

が成り立つ. 今, ある $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\left(\int_X f(x)dE(x)\right)^n = \int_X f(x)^n dE(x) \tag{10.39}$$

が成り立つと仮定すると, (1) と (10.39) より,

$$\left(\int_X f(x)dE(x)\right)^{n+1} = \int_X f(x)^n dE(x)\int_X f(x)dE(x) \subseteq \int_X f(x)^{n+1}dE(x)$$

であり, (1) と (10.38) より,

$$D\left(\left(\int_X f(x)dE(x)\right)^{n+1}\right) = D_E(f^{n+1}) \cap D_E(f) = D_E(f^{n+1})$$

である. よって (10.39) は $n+1$ の場合も成り立つから帰納法より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ. また (1), (2) より,

$$\left(\int_X f(x)dE(x)\right)^*\left(\int_X f(x)dE(x)\right) = \int_X \overline{f(x)}dE(x)\int_X f(x)dE(x) \subseteq \int_X |f(x)|^2 dE(x)$$

であり, (1) と (10.38) より,

$$D\left(\left(\int_X f(x)dE(x)\right)^*\left(\int_X f(x)dE(x)\right)\right) = D_E(|f|^2) \cap D_E(f) = D_E(|f|^2)$$

だから,

$$\left(\int_X f(x)dE(x)\right)^*\left(\int_X f(x)dE(x)\right) = \int_X |f(x)|^2 dE(x)$$

が成り立つ.

(5) 任意の

$$v \in \operatorname{Ker}\left(\int_X f(x)dE(x)\right)$$

に対し,

$$\int_X |f(x)|^2 dE_{v,v}(x) = \left\|\int_X f(x)dE(x)v\right\|^2 = 0$$

であるから命題 5.46 より,

$$E_{v,v}((|f| > 0)) = \|E((|f| > 0))v\| = 0$$

である. よって,

$$v = E((f=0))v + E((|f|>0))v = E((f=0))v \in \operatorname{Ran} E((f=0))$$

であるから,

$$\operatorname{Ker}\left(\int_X f(x)dE(x)\right) \subseteq \operatorname{Ran} E((f=0)) \tag{10.40}$$

である. また (1) より,

$$\int_X f(x)dE(x)E((f=0)) = \int_X f(x)\chi_{(f=0)}(x)dE(x) = 0$$

であるから (10.40) の逆の包含関係も成り立つ. 可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ の E による積分が単射, すなわち $E((f=0)) = 0$ であるとき, (1) より,

$$\int_X f(x)dE(x)\int_X f^{-1}(x)dE(x) \subseteq \int_X f(x)f^{-1}(x)dE(x) = E((f\neq 0)) = E(X) = 1,$$

$$D\left(\int_X f(x)dE(x)\int_X f^{-1}(x)dE(x)\right) = D_E(f^{-1}),$$

であるから,

$$\int_X f(x)dE(x)\int_X f^{-1}(x)dE(x)v = v \quad (\forall v \in D_E(f^{-1}))$$

である. よって,

$$\int_X f^{-1}(x)dE(x) \subseteq \left(\int_X f(x)dE(x)\right)^{-1} \tag{10.41}$$

が成り立つ. また (1) より,

$$\int_X f^{-1}(x)dE(x)\int_X f(x)dE(x) \subseteq \int_X f^{-1}(x)f(x)dE(x) = E((f\neq 0)) = E(X) = 1,$$

$$D\left(\int_X f^{-1}(x)dE(x)\int_X f(x)dE(x)\right) = D_E(f),$$

であるから,

$$\int_X f^{-1}(x)dE(x)\int_X f(x)dE(x)v = v \quad (\forall v \in D_E(f))$$

である. よって (10.41) の逆の包含関係も成り立つ.

□

命題 10.54 (射影値測度のユニタリ作用素による変換)**.** $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ を Hilbert 空間, $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ をユニタリ作用素 (定義 5.143), $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $E : \mathfrak{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を射影値測度とする. このとき,

$$UEU^* : \mathfrak{M} \ni B \mapsto UE(B)U^* \in \mathcal{P}(\mathcal{K}) \tag{10.42}$$

は射影値測度であり, 任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\int_X f(x)d(UEU^*)(x) = U\left(\int_X f(x)dE(x)\right)U^* \tag{10.43}$$

が成り立つ.

証明. (10.42) が射影値測度 (定義 10.47) であることは自明である. (10.43) は $f : X \to \mathbb{C}$ が可測単関数である場合は明らかに成り立ち, 任意の有界可測関数が可測単関数の列により一様近似できる (系 5.129) ことから $f : X \to \mathbb{C}$ が有界可

測関数である場合も成り立つ[*150]. 今, 任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ を取り, 有界可測関数の列 $f_n := f\chi_{(|f|\leqslant n)}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を考えると任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し単調収束定理より,

$$\int_X |f(x)|^2 d(UEU^*)_{v,v}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n(x)|^2 d(UEU^*)_{v,v}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \int_X f_n(x) d(UEU^*)(x) v \right\|^2$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| U \int_X f_n(x) dE(x) U^* v \right\|^2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n(x)|^2 dE_{U^*v,U^*v}(x)$$
$$= \int_X |f(x)|^2 dE_{U^*v,U^*v}(x)$$

であるから,

$$D_{UEU^*}(f) = UD(f)$$

である. そして任意の $u \in D_{UEU^*}(f), v \in \mathcal{H}$ に対し Lebesgue 優収束定理より,

$$\left(\int_X f(x) d(UEU^*)(x) u \mid v \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n(x) d(UEU^*)(x) u \mid v \right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(U \left(\int_X f_n(x) dE(x) \right) U^* u \mid v \right) = \left(U \left(\int_X f(x) dE(x) \right) U^* u \mid v \right)$$

である. よって任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し (10.43) が成り立つ. □

命題 10.55. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $E : \mathfrak{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を射影値測度, $f : X \to \mathbb{C}$ を可測関数とする. このとき $\mathbb{C}$ の開集合 U で $E(f^{-1}(U)) = 0$ を満たすもの全ての合併を U_0 とおけば $E(f^{-1}(U_0)) = 0$ が成り立つ.

証明. 任意の $v \in \mathcal{H}$ を取り, $\mathbb{C}$ 上の有限 Borel 測度

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} \ni B \mapsto E_{v,v}(f^{-1}(B)) \in [0, \infty) \tag{10.44}$$

を考える. $\mathbb{C}$ は第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間であるから定理 5.177 より (10.44) は位相正則測度 (定義 5.168) である. よって,

$$E_{v,v}(f^{-1}(U_0)) = \sup\{(E_{v,v}(f^{-1}(K)) : K \subseteq U_0 \text{ はコンパクト }\} \tag{10.45}$$

が成り立つ. 任意のコンパクト集合 $K \subseteq U_0$ に対し, U_0 の定義より $\mathbb{C}$ の有限個の開集合 $U_1, \cdots, U_n$ で,

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_j, \quad E_{v,v}(f^{-1}(U_j)) = 0 \ (j = 1, \cdots, n)$$

を満たすものが取れる. よって,

$$E_{v,v}(f^{-1}(K)) \leqslant \sum_{j=1}^n E_{v,v}(f^{-1}(U_j)) = 0$$

であるから $E_{v,v}(f^{-1}(K)) = 0$ であり, $K \subseteq U_0$ が任意のコンパクト集合であることと (10.45) より,

$$(E(f^{-1}(U_0))v \mid v) = E_{v,v}(f^{-1}(U_0)) = 0 \ \ (\forall v \in \mathcal{H})$$

である. よって偏極恒等式 (10.4) より $E(f^{-1}(U_0)) = 0$ を得る. □

定義 10.56 (可測関数の射影値測度に関する本質的値域)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $E : \mathfrak{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を射影値測度, $f : X \to \mathbb{C}$ を可測関数とする. 命題 10.55 より $E(f^{-1}(U)) = 0$ を満たす $\mathbb{C}$ の開集合 U のうち最大のもの U_0 が取れる. そこで,

$$\mathrm{ess.Ran}_E(f) := \mathbb{C} \backslash U_0$$

とおき, これを f の E に関する本質的値域と言う. 明らかに $\mathrm{ess.Ran}_E(f)$ は次のように特徴付けられる.

$$\mathrm{ess.Ran.}E(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon \in (0, \infty), \ E((|\lambda - f| < \varepsilon)) > 0\}. \tag{10.46}$$

[*150] 有界可測関数の射影値測度による積分の定義 10.50 を参照.

定理 10.57 (射影値測度による積分のスペクトルと本質的値域)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $(X,\mathfrak{M})$ を可測空間, $E:\mathfrak{M}\to\mathcal{P}(\mathcal{H})$ を射影値測度, $f:X\to\mathbb{C}$ を可測関数とする. このとき,

$$\sigma\left(\int_X f(x)dE(x)\right)=\mathrm{ess.Ran}.E(f)$$

が成り立つ.

証明. 任意の $\lambda\in\mathrm{ess.Ran}_E(f)$ を取る. (10.46) より各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $E\left(\left(|\lambda-f|<\frac{1}{n}\right)\right)>0$ なので, 単位ベクトル

$$v_n\in\mathrm{Ran}\,E\left(|\lambda-f|<\frac{1}{n}\right)$$

が取れる. そして命題 10.53 の (1) より

$$\left(\lambda-\int_X f(x)dE(x)\right)E\left(|\lambda-f|<\frac{1}{n}\right)=\int_X(\lambda-f(x))\chi_{(|\lambda-f|<\frac{1}{n})}(x)dE(x)\in B(\mathcal{H})$$

だから $v_n\in D_E(f)$ であり,

$$\left\|\left(\lambda-\int_X f(x)dE(x)\right)v_n\right\|=\left\|\int_X(\lambda-f(x))\chi_{(|\lambda-f|<\frac{1}{n})}(x)dE(x)v_n\right\|\leqslant\frac{1}{n}$$

である. よってもし $\lambda\notin\sigma\left(\int_X f(x)dE(x)\right)$ ならば, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し,

$$1=\|v_n\|=\left\|\left(\lambda-\int_X f(x)dE(x)\right)^{-1}\left(\lambda-\int_X f(x)dE(x)\right)v_n\right\|\leqslant\frac{1}{n}\left\|\left(\lambda-\int_X f(x)dE(x)\right)^{-1}\right\|$$

となるので矛盾する. ゆえに $\lambda\in\sigma\left(\int_X f(x)dE(x)\right)$ であるから,

$$\mathrm{ess.Ran}_E(f)\subseteq\sigma\left(\int_X f(x)dE(x)\right)\tag{10.47}$$

が成り立つ. 逆の包含関係を示す. そのためには $\lambda\notin\mathrm{ess.Ran}_E(f)$ なる任意の $\lambda\in\mathbb{C}$ を取り, $\lambda\notin\sigma\left(\int_X f(x)dE(x)\right)$ が成り立つことを示せばよい. (10.46) よりある $\varepsilon\in(0,\infty)$ に対し,

$$E\left(|\lambda-f|<\varepsilon\right)=0$$

となる. 特に,

$$E(\lambda-f=0)\leqslant E\left(|\lambda-f|<\varepsilon\right)=0$$

だから命題 10.53 の (5) より,

$$\lambda-\int_X f(x)dE(x)=\int_X\lambda-f(x)dE(x):D_E(f)\to\mathcal{H}\tag{10.48}$$

は単射である. 今, 可測関数 $g:X\to\mathbb{C}$ を,

$$g(x):=\begin{cases}(\lambda-f(x))^{-1} & (|\lambda-f(x)|\geqslant\varepsilon)\\ 0 & (|\lambda-f(x)|<\varepsilon)\end{cases}$$

とおくと g は有界であり, 命題 10.53 の (1) より,

$$\left(\lambda-\int_X f(x)dE(x)\right)\int_X g(x)dE(x)=\int_X(\lambda-f(x))g(x)dE(x)=E((|\lambda-f|)\geqslant\varepsilon)=1$$

であるから (10.48) は全射でもある. ゆえに $\lambda\notin\sigma\left(\int_X f(x)dE(x)\right)$ であるから (10.47) の逆の包含関係が成り立つ. □

系 10.58. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, X を位相空間, $E:\mathcal{B}_X\to\mathcal{P}(\mathcal{H})$ を射影値測度とし, 任意の空でない開集合 $U\subseteq X$ に対し $E(U)>0$ が成り立つと仮定する. このとき任意の連続関数 $f:X\to\mathbb{C}$ に対し,

$$\sigma\left(\int_X f(x)dE(x)\right)=\overline{f(X)}$$

が成り立つ.

証明. $f^{-1}(\mathbb{C}\backslash\overline{f(X)}) = \varnothing$ であるから本質的値域の定義 10.56 より,

$$\mathrm{ess.Ran}_E(f) \subseteq \overline{f(X)} \tag{10.49}$$

である. 逆の包含関係を示す. $\mathrm{ess.Ran}_E(f)$ は閉集合であるので任意の $x_0 \in X$ を取り,

$$f(x_0) \in \mathrm{ess.Ran}_E(f) \tag{10.50}$$

が成り立つことを示せばよい. f の $x_0 \in X$ における連続性より任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し $x_0 \in X$ の開近傍 $U \subseteq X$ が存在し,

$$U \subseteq (|f - f(x_0)| < \varepsilon)$$

が成り立つ. よって仮定より,

$$0 < E(U) \leqslant E(|f - f(x_0)| < \varepsilon)$$

であるから, (10.46) より (10.50) が成り立つ. ゆえに (10.49) の逆の包含関係が成り立つので, 定理 10.57 より,

$$\sigma\left(\int_X f(x)dE(x)\right) = \mathrm{ess.Ran}_E(f) = \overline{f(X)}$$

が成り立つ. □

定義 10.59 (位相正則射影値測度)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, X を局所コンパクト Hausdorff 空間, $E : \mathcal{B}_X \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を射影値測度とする. 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し複素数値 Borel 測度 $E_{u,v} : \mathcal{B}_X \ni B \mapsto (E(B)u \mid v) \in \mathbb{C}$ が位相正則 (定義 5.181) であるとき, E は位相正則であると言う.

定理 10.60 (Riesz-Markov-角谷の表現定理 3)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, X を局所コンパクト Hausdorff 空間,

$$\Phi : C_0(X) \to B(\mathcal{H})$$

を $*$-環準同型写像とし,

$$\Phi(C_0(X))\mathcal{H} := \mathrm{span}\{\Phi(f)v : f \in C_0(X), v \in \mathcal{H}\} \tag{10.51}$$

が $\mathcal{H}$ で稠密であるとする. このとき位相正則射影値測度 $E : \mathcal{B}_X \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ で,

$$\Phi(f) = \int_X f(x)dE(x) \quad (\forall f \in C_0(X))$$

を満たすものが唯一つ存在する.

証明. 定理 9.78 より Φ はノルム減少であるから, 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$C_0(X) \ni f \mapsto (\Phi(f)u \mid v) \in \mathbb{C}$$

はノルムが $\|u\|\|v\|$ 以下の有界線型汎関数である. よって Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.187 より, 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し位相正則な複素数値 Borel 測度 $\nu_{u,v} : \mathcal{B}_X \to \mathbb{C}$ で,

$$\int_X f(x)d\nu_{u,v}(x) = (\Phi(f)u \mid v) \quad (\forall f \in C_0(X)) \tag{10.52}$$

なるものが定まり,

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (u, v) \mapsto \nu_{u,v} \in M(X)$$

[*151]はノルムが 1 以下の有界準双線型写像である. 今, $X \to \mathbb{C}$ の有界 Borel 関数全体に各点ごとの演算と sup ノルムを入れた可換 C^*-環を $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathcal{B}_X)$ とおくと, 任意の $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathcal{B}_X)$ に対し命題 5.184 より,

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (u, v) \mapsto \int_X f(x)d\nu_{u,v}(x) \in \mathbb{C}$$

[*151] $M(X)$ は X 上の複素数値 Borel 測度全体に全変動ノルムを入れた Banach 空間 (定義 5.186).

はノルムが $\|f\|$ 以下の有界準双線型汎関数であるから, 定理 3.49 より $\Psi(f) \in B(\mathcal{H})$ で,

$$\int_X f(x) d\nu_{u,v}(x) = (\Psi(f)u \mid v) \quad (\forall u, v \in \mathcal{H}) \tag{10.53}$$

を満たすものが定まり, $\|\Psi(f)\| \leqslant \|f\|$ である. こうしてノルム減少な線形写像

$$\Psi : \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathcal{B}_X) \ni f \mapsto \Psi(f) \in B(\mathcal{H})$$

が定義できる. (10.52) と (10.53) より,

$$\Psi(f) = \Phi(f) \quad (\forall f \in C_0(X)) \tag{10.54}$$

である. 今, Ψ が $*$-環準同型写像であることを示す. 任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(\Phi(f)v \mid v) \geqslant 0 \quad (\forall f \in C_{c,+}(X))$$

であるから Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.172 より $\nu_{v,v}$ は非負値測度である. よって任意の $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathcal{B}_X)$, 任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(\Psi(\overline{f})v \mid v) = \int_X \overline{f(x)} d\nu_{v,v}(x) = \overline{\int_X f(x) d\nu_{v,v}(x)} = \overline{(\Psi(f)v \mid v)} = (\Psi(f)^* v \mid v)$$

であるから, 偏極恒等式 (10.4) より,

$$\Psi(\overline{f}) = \Psi(f)^* \quad (\forall f \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathcal{B}_X))$$

が成り立つ. ゆえに Ψ は $*$-演算を保存する. Ψ が乗法を保存すること, すなわち,

$$\Psi(fg) = \Psi(f)\Psi(g) \quad (\forall f, g \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathcal{B}_X)) \tag{10.55}$$

が成り立つことを示す. まず, $\Phi : C_0(X) \to B(\mathcal{H})$ は $*$-環準同型写像なので任意の $f, g \in C_0(X)$, $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\int_X f(x)g(x) d\nu_{u,v}(x) = (\Phi(fg)u \mid v) = (\Phi(f)\Phi(g)u \mid v) = \int_X f(x) d\nu_{\Phi(g)u,v}(x)$$

である. よって任意の $g \in C_0(X)$, $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(\nu_{u,v})_g : \mathcal{B}_X \ni B \mapsto \int_B g(x)\nu_{u,v}(x) \in \mathbb{C}$$

なる $(\nu_{u,v})_g \in M(X)$ (位相正則性については命題 5.183 の (4) を参照) を考えれば, 任意の $f \in C_0(X)$ に対し, 定理 5.117 より,

$$\int_X f(x) d(\nu_{u,v})_g(x) = \int_X f(x)g(x) d\nu_{u,v}(x) = \int_X f(x) d\nu_{\Phi(g)u,v}(x)$$

が成り立つ. よって Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.187 より,

$$(\nu_{u,v})_g = \nu_{\Phi(g)u,v} \quad (\forall g \in C_0(X), \forall u, v \in \mathcal{H}) \tag{10.56}$$

が成り立つ. 次に任意の $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, \mathcal{B}_X)$, $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(\nu_{u,v})_f : \mathcal{B}_X \ni B \mapsto \int_B f(x) d\nu_{u,v}(x) \in \mathbb{C}$$

なる $(\nu_{u,v})_f \in M(X)$ (位相正則性については命題 5.183 の (4) を参照) を考えると, 定理 5.117 と (10.56) より, 任意の $g \in C_0(X)$ に対し,

$$\begin{aligned}\int_X g(x) d(\nu_{u,v})_f(x) &= \int_X f(x)g(x) d\nu_{u,v}(x) = \int_X f(x) d(\nu_{u,v})_g(x) = \int_X f(x) d\nu_{\Phi(g)u,v}(x) \\ &= (\Psi(f)\Phi(g)u \mid v) = (\Phi(g)u \mid \Psi(f)^* v) = \int_X g(x) d\nu_{u,\Psi(f)^* v}(x)\end{aligned}$$

が成り立つ. よって Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.187 より,

$$(\nu_{u,v})_f = \nu_{u,\Psi(f)^*v} \quad (\forall f \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,\mathcal{B}_X), \forall u,v \in \mathcal{H})$$

が成り立つ. ゆえに任意の $f,g \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,\mathcal{B}_X)$, $u,v \in \mathcal{H}$ に対し, 定理 5.117 より,

$$\begin{aligned}(\Psi(fg)u \mid v) &= \int_X f(x)g(x)d\nu_{u,v}(x) = \int_X g(x)d(\nu_{u,v})_f(x) = \int_X g(x)d\nu_{u,\Psi(f)^*v}(x)\\ &= (\Psi(g)u \mid \Psi(f)^*v) = (\Psi(f)\Psi(g)u \mid v)\end{aligned}$$

が成り立つので, (10.55) が成り立つ. これより $\Psi : \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,\mathcal{B}_X) \to B(\mathcal{H})$ は $*$-環準同型写像である. そして (10.54) より,

$$\Psi(1)\Phi(f)v = \Psi(1)\Psi(f)v = \Psi(f)v = \Phi(f)v \quad (\forall f \in C_0(X), \forall v \in \mathcal{H})$$

であり, (10.51) は $\mathcal{H}$ で稠密なので $\Psi(1) = 1$ である. よって任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し $E(B) := \Psi(\chi_B)$ とおけば,

$$E(B) := \Psi(\chi_B) \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_X), \quad E(X) = 1$$

であり,

$$(E(B)u \mid v) = (\Psi(\chi_B)u \mid v) = \nu_{u,v}(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_X)$$

である. ゆえに $E : \mathcal{B}_X \ni B \mapsto E(B) \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ は位相正則射影値測度であり, 任意の $f \in C_0(X)$, $u,v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\left(\int_X f(x)dE(x)u \mid v\right) = \int_X f(x)dE_{u,v}(x) = \int_X f(x)d\nu_{u,v}(x) = (\Phi(f)u \mid v)$$

であるので,

$$\int_X f(x)dE(x) = \Phi(f) \quad (\forall f \in C_0(X))$$

が成り立つ. これで存在が示せた. 一意性を示す. $E' : \mathcal{B}_X \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ も位相正則射影値測度であり,

$$\int_X f(x)dE'(x) = \Phi(f) \quad (\forall f \in C_0(X))$$

を満たすならば, 任意の $u,v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\int_X f(x)dE_{u,v}(x) = \left(\int_X f(x)dE(x)u \mid v\right) = \left(\int_X f(x)dE'(x)u \mid v\right) = \int_X f(x)dE'_{u,v}(x) \quad (\forall f \in C_0(X))$$

であるから Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.187 より,

$$(E(B)u \mid v) = E_{u,v}(B) = E'_{u,v}(B) = (E'(B)u \mid v) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_X)$$

である. よって $E = E'$ が成り立つ. □

10.6 スペクトル測度, Borel 関数カルキュラス

定理 10.61 (正規作用素に付随するスペクトル測度). $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし, $T \in B(\mathcal{H})$ を正規作用素とする. このとき射影値測度

$$E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

で,

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_T(\lambda)$$

を満たすものが唯一つ存在する. そして,

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)dE_T(\lambda) \quad (\forall f \in C(\sigma(T)))$$

が成り立つ. ただし左辺は連続関数カルキュラス (9.48) である.

証明. 連続関数カルキュラス

$$C(\sigma(T)) \ni f \mapsto f(T) \in C^*(\{1, T\}) \subseteq B(\mathcal{H})$$

は単位元を単位元に写す $*$-環準同型写像であるから, Riesz-Markov-角谷の表現定理 10.60 より, 射影値測度 $E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ で,

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE_T(\lambda) \ \ (\forall f \in C(\sigma(T)))$$

を満たすものが存在する. 特に,

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_T(\lambda)$$

である. よって存在が示せた. 一意性を示す. 射影値測度 $E, F : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ が,

$$\int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda) = T = \int_{\sigma(T)} \lambda dF(\lambda)$$

を満たすとする. 恒等写像 $\mathrm{id} : \sigma(T) \ni \lambda \mapsto \lambda \in \mathbb{C}$ に対し Stone-Weierstrass の定理 5.194 より,

$$C(\sigma(T)) = \overline{\mathrm{span}\left\{\overline{\mathrm{id}}^n \, \mathrm{id}^m : n, m \in \mathbb{Z}_+\right\}}$$

であるから, 任意の $f \in C(\sigma(T))$ に対し,

$$\int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE(\lambda) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dF(\lambda)$$

が成り立つ. ここで $\sigma(T)$ は第二可算公理を満たすコンパクト Hausdorff 空間であるので定理 5.177 より E, F は自動的に位相正則である. ゆえに Riesz-Markov-角谷の表現定理 10.60 より $E = F$ である. よって一意性が示せた. □

定義 10.62. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素 $T \in B(\mathcal{H})$ に対し, 定理 10.61 における射影値測度 $E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を T に付随するスペクトル測度と言う.

定理 10.63 (自己共役作用素に付随するスペクトル測度)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. このとき射影値測度

$$E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

(定理 10.45 より T のスペクトル $\sigma(T)$ は $\mathbb{R}$ の空でない閉集合であることに注意) で,

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_T(\lambda)$$

を満たすものが唯一つ存在する.

証明.

$$C : \mathbb{R} \ni t \mapsto (t - i)(t + i)^{-1} \in \mathbb{T} \backslash \{1\} \tag{10.57}$$

は同相写像であり, 逆写像は,

$$C^{-1} : \mathbb{T} \backslash \{1\} \ni \lambda \mapsto i(1 + \lambda)(1 - \lambda)^{-1} \in \mathbb{R}$$

である. 定理 10.34 より T の Cayley 変換 $C(T) = (T - i)(T + i)^{-1}$ は $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素であり, 定理 10.45 より,

$$C(\sigma(T)) = \sigma(C(T)) \backslash \{1\} \tag{10.58}$$

が成り立つ. $C(T) \in B(\mathcal{H})$ はユニタリ作用素であるから正規作用素である. そこで $C(T)$ のスペクトル測度 (10.61) を,

$$F : \mathcal{B}_{\sigma(C(T))} \to \mathcal{P}(\mathcal{H}), \ \ C(T) = \int_{\sigma(C(T))} \lambda dF(\lambda)$$

とおく. 命題 10.33 より,

$$1 - C(T) = \int_{\sigma(C(T))} (1 - \lambda) dF(\lambda)$$

は単射であるから, 命題 10.53 より,

$$\{0\} = \mathrm{Ker}(1 - C(T)) = \mathrm{Ran}\, F\left(\{\lambda \in \sigma(C(T)) : 1 - \lambda = 0\}\right) = \mathrm{Ran}\, F(\sigma(C(T)) \cap \{1\})$$

である. よって (10.58) より,

$$F(C(\sigma(T))) = F(\sigma(C(T))\backslash\{1\}) = F(\sigma(C(T))) = 1$$

である. これと (10.57) が同相写像であることから,

$$E : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \ni B \mapsto F(C(B)) \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \tag{10.59}$$

は射影値測度 (定義 10.47) である. 今, 任意の Borel 関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\int_{\sigma(T)} f(t)dE(t) = \int_{\sigma(C(T))\backslash\{1\}} f(C^{-1}(\lambda))dF(\lambda) \tag{10.60}$$

が成り立つことを示す. E の定義 (10.59) より $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ が Borel 単関数である場合は明らかに成り立つ. また任意の有界 Borel 関数は Borel 単関数の列によって一様近似できる (命題 5.129) ので, $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ が有界 Borel 関数の場合も (10.60) は成り立つ. 任意の Borel 関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し, 有界 Borel 関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を,

$$f_n := f\chi_{(|f|\leqslant n)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

として定義すると, 単調収束定理より,

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(T)} |f(t)|^2 dE_{v,v}(t) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\sigma(T)} |f_n(t)|^2 dE_{v,v}(t) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\sigma(C(T))\backslash\{1\}} |f_n(C^{-1}(\lambda))|^2 dF_{v,v}(\lambda)\\ &= \int_{\sigma(C(T))\backslash\{1\}} |f(C^{-1}(\lambda))|^2 dF_{v,v}(\lambda) \quad (\forall v \in \mathcal{H})\end{aligned}$$

となるので,

$$D_E(f) = D_F(f \circ C^{-1})$$

(定義 10.52) であり, 任意の $u \in D_E(f) = D_F(f \circ C^{-1})$ に対し Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned}\left(\int_{\sigma(T)} f(t)dE(t)u \mid v\right) &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\sigma(T)} f_n(t)dE(t)u \mid v\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\sigma(C(T))\backslash\{1\}} f_n(C^{-1}(\lambda))dF(\lambda)u \mid v\right)\\ &= \left(\int_{\sigma(C(T))\backslash\{1\}} f(C^{-1}(\lambda))dF(\lambda)u \mid v\right) \quad (\forall v \in \mathcal{H})\end{aligned}$$

となるので,

$$\int_{\sigma(T)} f(t)dE(t)u = \int_{\sigma(C(T))\backslash\{1\}} f(C^{-1}(\lambda))dF(\lambda)u \quad (\forall u \in D_E(f) = D_F(f \circ C^{-1}))$$

である. よって任意の Borel 関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し (10.60) が成り立つ. 命題 10.33 と命題 10.53 の (1), (5) および (10.60) より,

$$\begin{aligned}T &= i(1 + C(T))(1 - C(T))^{-1} = i\int_{\sigma(C(T))} (1 + \lambda)dF(\lambda) \int_{\sigma(C(T))\backslash\{1\}} (1 - \lambda)^{-1} dF(\lambda)\\ &\subseteq \int_{\sigma(C(T))\backslash\{1\}} i(1 + \lambda)(1 - \lambda)^{-1} dF(\lambda) = \int_{\sigma(C(T))\backslash\{1\}} C^{-1}(\lambda)dF(\lambda) = \int_{\sigma(T)} tdE(t)\end{aligned}$$

であるので, 命題 10.53 の (2) より,

$$T \subseteq \int_{\sigma(T)} tdE(t) = \left(\int_{\sigma(T)} tdE(t)\right)^* \subseteq T^* = T$$

である. ゆえに,

$$T = \int_{\sigma(T)} t dE(t)$$

が成り立つ. これで存在が示せた. 一意性を示す. 射影値測度 $E' : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ も,

$$T = \int_{\sigma(T)} t dE'(t)$$

を満たすとし, $E' = E$ (ただし E は (10.59) によって定義したもの) が成り立つことを示す. 射影値測度

$$F' : \mathcal{B}_{\sigma(C(T))} \ni B \mapsto E'(C^{-1}(B)) \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \tag{10.61}$$

を考えると, (10.60) を示したのと全く同様にして, 任意の Borel 関数 $g : \sigma(C(T)) \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\int_{\sigma(C(T))} g(\lambda) dF'(\lambda) = \int_{\sigma(T)} g(C(t)) dE'(t)$$

が成り立つことが分かる. よって命題 10.53 の (1), (5) より,

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma(C(T))} \lambda dF'(\lambda) &= \int_{\sigma(T)} C(t) dE'(t) = \int_{\sigma(T)} (t-i)(t+i)^{-1} dE'(t) \\
&= \int_{\sigma(T)} (t-i) dE'(t) \int_{\sigma(T)} (t+i)^{-1} dE'(t) \\
&= (T-i)(T+i)^{-1} = C(T)
\end{aligned}$$

となるので, $C(T)$ のスペクトル測度の一意性 (定理 10.61) より $F' = F$ である. ゆえに任意の $B \in \mathcal{B}_{\sigma(T)}$ に対し (10.61), (10.59) より,

$$E'(B) = E'(C^{-1}(C(B))) = F'(C(B)) = F(C(B)) = E(B)$$

である. これで一意性が示せた. □

定義 10.64. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 T に対し, 定理 10.63 における射影値測度 $E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を T に付随するスペクトル測度と言う.

定義 10.65 (Borel 関数カルキュラス)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素か正規作用素とし, $E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を T に付随するスペクトル測度とする. このとき任意の Borel 関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し,

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE_T(\lambda)$$

と表す[*152]. $f \mapsto f(T)$ を T に関する Borel 関数カルキュラスと言う.

命題 10.66. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $E : \mathfrak{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を射影値測度, $f : X \to \mathbb{R}$ を実数値可測関数とし, $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素

$$T := \int_X f(x) dE(x) : D_E(f) \to \mathcal{H}$$

を考える.[*153] このとき任意の Borel 関数 $g : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し,

$$g(T) = \int_X g(f(x)) dE(x)$$

が成り立つ.

[*152] 正規作用素 $T \in B(\mathcal{H})$ に対しては定理 10.61 より連続関数カルキュラスの表記と矛盾しない.
[*153] 自己共役作用素であることは命題 10.53 の (2) による.

証明.

$$F : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \ni B \mapsto E(f^{-1}(B)) \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \tag{10.62}$$

とおく. 定理 10.57 より $\sigma(T) = \mathrm{ess.Ran}_E(f)$ であるから本質的値域の定義 10.56 より,

$$F(\sigma(T)) = E(f^{-1}(\sigma(T))) = E(f^{-1}(\mathrm{ess.Ran}_E(f))) = 1$$

である. よって F は射影値測度である. 任意の Borel 関数 $g : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\int_{\sigma(T)} g(\lambda)dF(\lambda) = \int_X g(f(x))dE(x) \tag{10.63}$$

[*154]が成り立つことを示す. (10.62) より $g : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ が Borel 単関数であるならば明らかに成り立つ. また任意の有界 Borel 関数は Borel 単関数の列によって一様近似できる (命題 5.129) ので, (10.63) は $g : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ が有界 Borel 関数の場合も成り立つ. そこで任意の Borel 関数 $g : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し $\sigma(T)$ 上の有界 Borel 関数の列 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を,

$$g_n := g\chi_{(|g|\leqslant n)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

として定義すると, 単調収束定理より,

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(T)} |g(\lambda)|^2 dF_{v,v}(\lambda) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\sigma(T)} |g_n(\lambda)|^2 dF_{v,v}(\lambda) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |g_n(f(x))|^2 dE_{v,v}(x) \\ &= \int_X |g(f(x))|^2 dE_{v,v}(x) \quad (\forall v \in \mathcal{H})\end{aligned}$$

であるから, $D_F(g) = D_E(g \circ f)$ であり, 任意の $u \in D_F(g) = D_E(g \circ f)$ に対し Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned}\left(\int_{\sigma(T)} g(\lambda)dF(\lambda)u \mid v\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\sigma(T)} g_n(\lambda)dF(\lambda)u \mid v\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_X g_n(f(x))dE(x)u \mid v\right) \\ &= \left(\int_X g(f(x))dE(x)u \mid v\right) \quad (\forall v \in \mathcal{H})\end{aligned}$$

である. ゆえに,

$$\int_{\sigma(T)} g(\lambda)dF(\lambda)u = \int_X g(f(x))dE(x)u \quad (\forall u \in D_F(g) = D_E(g \circ f))$$

であるから, 任意の Borel 関数 $g : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し (10.63) は成り立つ. よって特に,

$$\int_{\sigma(T)} \lambda dF(\lambda) = \int_X f(x)dE(x) = T$$

であるから, 自己共役作用素 T のスペクトル測度の一意性 (定理 10.63) より F は T のスペクトル測度である. よって任意の Borel 関数 $g : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し, (10.63) より,

$$g(T) = \int_X g(f(x))dE(x)$$

が成り立つ. □

定義 10.67 (孤立点)**.** X を位相空間とする. $x \in X$ が X の孤立点であるとは $\{x\}$ が X の開集合であることを言う.

定理 10.68 (スペクトル測度と Borel 関数カルキュラスの基本性質)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素か正規作用素とし, $E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を T に付随するスペクトル測度とする. このとき,

(1) 任意の Borel 関数 $f, g : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\overline{f}(T) = f(T)^*, \quad (f+g)(T) = \overline{f(T) + g(T)}, \quad (fg)(T) = \overline{f(T)g(T)},$$

が成り立つ.

[*154] 右辺の被積分関数の定義域は実際, $f^{-1}(\sigma(T))$ であるが $E_T(f^{-1}(\sigma(T))) = 1$ であるので $f^{-1}(\sigma(T))$ の外での値は気にする必要はない.

(2) 任意の Borel 関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し,

$$f(T)^* f(T) = |f|^2(T), \quad (f(T))^n = f^n(T) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ.

(3) 任意の Borel 関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\mathrm{Ker}(f(T)) = \mathrm{Ran}\, E_T((f=0))$$

が成り立つ. また $f(T)$ が単射, すなわち $E_T((f=0)) = 0$ であるとき,

$$f^{-1}(\lambda) = f(\lambda)^{-1} \quad (\lambda \notin (f=0))$$

を満たす Borel 関数 $f^{-1} : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し

$$f(T)^{-1} = f^{-1}(T)$$

が成り立つ.

(4) $\sigma(T)$ の任意の空でない開集合 U に対し $E_T(U) > 0$ が成り立つ.

(5) T の点スペクトル (定義 10.39) はスペクトル測度 E_T によって,

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : E_T(\{\lambda\}) > 0\}$$

と表せる. また $\sigma(T)$ の任意の孤立点は $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ に属する.

(6) 任意の Borel 関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\sigma(f(T)) = \mathrm{ess.Ran}_{E_T}(f), \quad \sigma_{\mathrm{p}}(f(T)) = \{\lambda \in \sigma(T) : E_T(f^{-1}(\{\lambda\})) > 0\}$$

が成り立つ. また任意の連続関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\sigma(f(T)) = \overline{f(\sigma(T))}$$

が成り立つ.

(7) 任意の実数値 Borel 関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{R}$ と複素数値 Borel 関数 $g : \sigma(f(T)) \to \mathbb{C}$ に対し,

$$g(f(T)) = (g \circ f)(T)$$

が成り立つ.

証明. (1) 命題 10.53 の (1), (2), (3) による.

(2) 命題 10.53 の (4) による.

(3) 命題 10.53 の (5) による.

(4) 恒等写像 $\mathrm{id} : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し定理 10.57 より,

$$\sigma(T) = \sigma\left(\int_{\sigma(T)} \lambda dE_T(\lambda)\right) = \mathrm{ess.Ran}_{E_T}(\mathrm{id}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon \in (0,\infty),\ E_T(|\lambda - \mathrm{id}| < \varepsilon) > 0\}$$

である. $\sigma(T)$ の任意の空でない開集合 U を取り, 任意の $\lambda_0 \in U$ を取る. このとき U が $\sigma(T)$ の開集合であることから, ある $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し,

$$(|\lambda_0 - \mathrm{id}| < \varepsilon) = \{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda_0 - \lambda| < \varepsilon\} \subseteq U$$

となる. よって,

$$E_T(U) \geqslant E_T(|\lambda_0 - \mathrm{id}| < \varepsilon) > 0$$

である.

(5) $\lambda \in \sigma(T)$ に対し命題 10.53 の (5) より,

$$\mathrm{Ker}(\lambda - T) = \mathrm{Ran}\, E_T((\lambda - \mathrm{id} = 0)) = \mathrm{Ran}\, E_T(\{\lambda\})$$

であるから,

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \mathrm{Ker}(\lambda - T) \neq \{0\}\} = \{\lambda \in \sigma(T) : E_T(\{\lambda\}) > 0\}$$

である. また $\lambda \in \sigma(T)$ が $\sigma(T)$ の孤立点ならば $\{\lambda\}$ は $\sigma(T)$ の開集合であるので (4) より $E_T(\{\lambda\}) > 0$, 従って $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ である.

(6) 定理 10.57 より任意の Borel 関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\sigma(f(T)) = \sigma\left(\int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE_T(\lambda)\right) = \mathrm{ess.Ran}_{E_T}(f)$$

である. また命題 10.53 の (5) より,

$$\mathrm{Ker}(\lambda - f(T)) = \mathrm{Ran}\, E_T((\lambda - f = 0)) = \mathrm{Ran}\, E_T(f^{-1}(\{\lambda\})) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C})$$

であるから,

$$\sigma_{\mathrm{p}}(f(T)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : E_T(f^{-1}(\{\lambda\})) > 0\}$$

である. そして (4) と系 10.58 より $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ が連続関数であるならば,

$$\sigma(f(T)) = \sigma\left(\int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE_T(\lambda)\right) = \overline{f(\sigma(T))}$$

である.

(7) 命題 10.66 による.

□

定義 10.69 (非負自己共役作用素)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$ であるとき T を $\mathcal{H}$ 上の非負自己共役作用素と言う.

命題 10.70 (非負自己共役作用素の冪乗根の一意存在)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の非負自己共役作用素とする. このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{H}$ 上の非負自己共役作用素 S で $S^n = T$ を満たすものが唯一つ存在する.

証明. Borel 関数カルキュラスにより,

$$\sqrt[n]{T} = \int_{\sigma(T)} \sqrt[n]{\lambda} dE_T(\lambda)$$

を考えると, 定理 10.68 の (1), (5) より $\sqrt[n]{T}$ は非負自己共役作用素であり, 定理 10.68 の (2) より,

$$(\sqrt[n]{T})^n = \int_{\sigma(T)} (\sqrt[n]{\lambda})^n dE_T(\lambda) = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_T(\lambda) = T$$

である. また非負自己共役作用素 S が $S^n = T$ を満たすとすると, 定理 10.68 の (2), (6) より,

$$\sqrt[n]{T} = \sqrt[n]{S^n} = \int_{\sigma(S)} \sqrt[n]{\lambda^n} dE_S(\lambda) = \int_{\sigma(S)} \lambda dE_S(\lambda) = S$$

である. □

命題 10.71 (非負自己共役作用素の特徴付け)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. このとき次は互いに同値である.

(1) T は $\mathcal{H}$ 上の非負自己共役作用素である.
(2) 任意の $v \in D(T)$ に対し $(Tv \mid v) \geqslant 0$.

証明. (1) ⇒ (2) を示す. (1) が成り立つとすると $T = \sqrt{T}^2$ であるから, 任意の $v \in D(T)$ に対し,

$$(Tv \mid v) = (\sqrt{T}v \mid \sqrt{T}v) = \|\sqrt{T}v\|^2 \geqslant 0.$$

よって (2) が成り立つ.
(2) ⇒ (1) を示す. (2) が成り立つとする. 任意の $\lambda \in \sigma(T)$ を取る. このとき任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し $v_\varepsilon \in D(T)$ で $\|(\lambda - T)v_\varepsilon\| < \varepsilon\|v_\varepsilon\|$ を満たすものが存在する. 実際, もしある $\varepsilon_0 \in (0, \infty)$ に対し,

$$\|(\lambda - T)v\| \geqslant \varepsilon_0\|v\| \quad (\forall v \in D(T))$$

が成り立つとすると, $\mathrm{Ker}(\lambda - T) = \{0\}$ であり, $\lambda - T$ が閉線型作用素であることから $\mathrm{Ran}(\lambda - T)$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間である. よって命題 10.27 の (6) より,

$$\mathrm{Ran}(\lambda - T) = ((\mathrm{Ran}(\lambda - T))^\perp)^\perp = (\mathrm{Ker}(\lambda - T))^\perp = \mathcal{H}$$

であるから $\lambda - T : D(T) \to \mathcal{H}$ は全単射と言うことになり $\lambda \in \sigma(T)$ であることに反する. ゆえに任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し $v_\varepsilon \in D(T)$ で $\|(\lambda - T)v_\varepsilon\| < \varepsilon\|v_\varepsilon\|$ を満たすものが取れる. 今, $\lambda \geqslant 0$ であることを示す. もし $\lambda < 0$ ならば任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し $-\lambda(Tv_\varepsilon \mid v_\varepsilon) \geqslant 0$ より,

$$\varepsilon^2\|v_\varepsilon\|^2 > \|(\lambda - T)v_\varepsilon\|^2 = \lambda^2\|v_\varepsilon\|^2 - 2\lambda(Tv_\varepsilon \mid v_\varepsilon) + \|Tv_\varepsilon\|^2 \geqslant \lambda^2\|v_\varepsilon\|^2$$

となる. よって任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し $\varepsilon > |\lambda|$ となる. これは $\lambda = 0$ を意味するので $\lambda < 0$ であることに矛盾する. ゆえに $\lambda \geqslant 0$ である. こうして任意の $\lambda \in \sigma(T)$ に対し $\lambda \geqslant 0$ であるから $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$ なので T は非負自己共役作用素である. □

10.7 稠密に定義された閉線型作用素の極分解

定義 10.72 (稠密に定義された閉線型作用素の絶対値作用素)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉線型作用素とする. このとき定理 10.28 より T^*T は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素であり, 任意の $v \in D(T^*T)$ に対し,

$$(T^*Tv \mid v) = (Tv \mid Tv) = \|Tv\|^2 \geqslant 0$$

であるから命題 10.71 より T^*T は非負自己共役作用素である. そこで $\mathcal{H}$ 上の非負自己共役作用素

$$|T| := \sqrt{T^*T}$$

を定義する. これを T の絶対値作用素と言う.

定義 10.73 (自己共役作用素の台射影作用素)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\overline{\mathrm{Ran}(T)}$ の上への射影作用素 (定義 10.7) を $S(T)$ と表す. $S(T)$ を T の台射影作用素と言う.

命題 10.74 (台射影作用素の特徴付け)**.** Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 T に対し, T の台射影作用素 $S(T)$ は $\{P \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) : PT = T\}$ の最小元である.

証明. $\mathrm{Ran}(S(T)) = \overline{\mathrm{Ran}(T)}$ なので $S(T)Tv = Tv$ $(\forall v \in d(T))$, よって $S(T)T = T$ である. $PT = T$ なる任意の射影作用素 P に対し,

$$\mathrm{Ran}(S(T)) = \overline{\mathrm{Ran}(T)} \subseteq \mathrm{Ran}(P)$$

だから, $S(T) = PS(T) = S(T)P = PS(T)P \leqslant P$ である. □

定理 10.75 (稠密に定義された閉線型作用素の極分解)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉線型作用素とする. このとき T の絶対値作用素 $|T|$ と $|T|$ の台射影作用素 $S(|T|)$ に対し, $\mathcal{H}$ 上の部分等長作用素 V で,

$$V^*V = S(|T|), \quad T = V|T|$$

を満たすものが唯一つ存在する.

証明. $T^*T = |T|^2$ であるから定理 10.28 の (1) より $D(T^*T) = D(|T|^2)$ は $T, |T|$ の共通の芯である.

$$D := D(T^*T) = D(|T|^2)$$

とおく. 任意の $v \in D$ に対し,

$$\|Tv\|^2 = (Tv \mid Tv) = (T^*Tv \mid v) = (|T|^2 v \mid v) = (|T|v \mid |T|v) = \||T|v\|^2$$

であるから,

$$V_0 : |T|(D) \ni |T|v \mapsto Tv \in \mathcal{H}$$

なる等長線型作用素が定義できる. 命題 3.19 より V_0 は等長線型作用素

$$V_1 : \overline{\mathrm{Ran}(|T|)} = \overline{|T|(D)} \to \mathcal{H}$$

に一意拡張できる ($\overline{\mathrm{Ran}(|T|)} = \overline{|T|(D)}$ は D が $|T|$ の芯であることによる). そこで Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の直交分解

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Ran}(|T|)} \oplus (\mathrm{Ran}(|T|))^{\perp} \tag{10.64}$$

を考えて,

$$V : \mathcal{H} = \overline{\mathrm{Ran}(|T|)} \oplus (\mathrm{Ran}(|T|))^{\perp} \ni v + u \mapsto V_1 v \in \mathcal{H}$$

として $V \in B(\mathcal{H})$ を定義する. このとき,

$$\|Vv\| = \|v\| \ \ (\forall v \in \overline{\mathrm{Ran}(|T|)}), \ \ Vu = 0 \ \ (\forall u \in (\mathrm{Ran}(|T|))^{\perp})$$

であるから命題 10.8 より V は部分等長作用素で V^*V は $\overline{\mathrm{Ran}(|T|)}$ の上への射影作用素, すなわち $V^*V = S(|T|)$ である. そして,

$$V|T|v = V_1|T|v = V_0|T|v = Tv \ \ (\forall v \in D) \tag{10.65}$$

である. 任意の $v \in D(|T|)$ を取る. D は $|T|$ の芯なので D の点列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$(v_n, |T|v_n) \to (v, |T|v) \ \ (n \to \infty)$$

なるものが取れる. (10.65) と V_0 が等長線型作用素であることから,

$$\|Tv_n - Tv_m\| = \|V_0|T|v_n - V_0|T|v_m\| = \||T|v_n - |T|v_m\| \to 0 \ \ (n, m \to \infty)$$

である. よって $(Tv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束するので T が閉であることから,

$$(v_n, Tv_n) \to (v, Tv) \ \ (n \to \infty)$$

が成り立つ. これより,

$$V|T|v = \lim_{n\to\infty} V|T|v_n = \lim_{n\to\infty} Tv_n = Tv$$

であるから $V|T| \subseteq T$ が成り立つ. 逆の包含関係を示す. 任意の $v \in D(T)$ を取り, $v \in D(|T|)$ が成り立つことを示せばよい. D は T の芯なので D の点列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$(v_n, Tv_n) \to (v, Tv) \ \ (n \to \infty)$$

なるものが取れる. (10.65) と V_0 が等長線型作用素であることから,

$$\||T|v_n - |T|v_m\| = \|V_0|T|v_n - V_0|T|v_m\| = \|Tv_n - Tv_m\| \to 0 \ \ (n, m \to \infty)$$

である. よって $(|T|v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束するので $|T|$ が閉であることから,

$$(v_n, |T|v_n) \to (v, |T|v) \ \ (n \to \infty)$$

が成り立つ. これより $v \in D(|T|)$ なので, $V|T| = T$ が成り立つ. 以上で存在が示せた.
一意性を示す. $V, W \in B(\mathcal{H})$ がそれぞれ部分等長作用素であり,

$$V^*V = S(|T|) = W^*W, \ \ V|T| = T = W|T|$$

を満たすとする. 命題 10.8 より,

$$Vu = Wu = 0 \ \ (\forall u \in (\mathrm{Ran}(|T|))^{\perp})$$

である. また,

$$V|T|v = Tv = W|T|v \ \ (\forall v \in \mathcal{H})$$

であるから V と W は $\mathrm{Ran}(|T|)$ 上で一致する. $V, W \in B(\mathcal{H})$ なので V と W は $\overline{\mathrm{Ran}(|T|)}$ 上でも一致するから, (10.64) より $V = W$ である. □

定義 10.76. T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉線型作用素とする. このとき定理 10.75 における T の分解

$$T = V|T| \ \ (V^*V = S(|T|))$$

を T の極分解と言う.

定理 10.77 (稠密に定義された閉線型作用素の共役作用素の極分解)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉線型作用素とし, T の極分解を,

$$T = V|T|, \ \ V^*V = S(|T|)$$

とする. このとき T^* (定理 10.28 の (2) より稠密に定義された閉線型作用素) の極分解は,

$$T^* = V^*|T^*|, \ \ VV^* = S(|T^*|)$$

である.

証明. 定理 10.28 の (3) より $T = T^{**}$ だから,

$$|T^*| = \sqrt{TT^*}$$

である. $V^*V = S(|T|)$ より $V^*V|T| = |T|$ であり, 命題 10.27 の (11) より $T^* = (V|T|)^* = |T|V^*$ であるから,

$$(V|T|V^*)(V|T|V^*) = (V|T|)(V^*V|T|)V^* = T(|T|V^*) = TT^* = |T^*|^2 \tag{10.66}$$

である. そして命題 10.27 の (11) より,

$$(V|T|V^*)^* = (VT^*)^* = T^{**}V^* = TV^* = V|T|V^*$$

であるから $V|T|V^*$ は自己共役作用素であり,

$$(V|T|V^*v \mid v) = (|T|V^*v \mid V^*v) \geqslant 0 \ \ (\forall v \in D(V|T|V^*))$$

であるから命題 10.71 より $V|T|V^*$ は非負自己共役作用素である. よって (10.66) と命題 10.70 より,

$$|T^*| = V|T|V^* \tag{10.67}$$

が成り立つ. これより,

$$V^*|T^*| = V^*(V|T|V^*) = (V^*V|T|)V^* = |T|V^* = T^*$$

であり,

$$VV^*|T^*| = VT^* = V|T|V^* = |T^*| \tag{10.68}$$

である. 命題 9.77 より V^* は部分等長作用素であるので (10.68) と命題 10.74 より,

$$S(|T^*|) \leqslant VV^*$$

が成り立つ. 逆の不等式が成り立つことを示す. (10.68) より,

$$VV^*|T^*| = S(|T^*|)|T^*|$$

であるから, (10.67) より,

$$VV^*V|T|V^* = S(|T^*|)V|T|V^* \tag{10.69}$$

である.

$$|T| = |T|^* = (V^*V|T|)^* = |T|V^*V$$

だから, (10.69) の両辺に右から V を掛ければ,

$$VV^*V|T| = S(|T^*|)V|T|$$

を得る. ゆえに,

$$VV^*VS(|T|) = S(|T^*|)VS(|T|)$$

が成り立つ. $VS(|T|) = VV^*V = V$ (命題 9.77) より,

$$VV^*V = S(|T^*|)V$$

だから,

$$VV^* = S(|T^*|)VV^*$$

である. これより,

$$VV^* = S(|T^*|)VV^* = S(|T^*|)VV^*S(|T^*|) \leqslant S(|T^*|)$$

であるから $VV^* = S(|T^*|)$ が成り立つ. □

命題 10.78 (射影値測度による積分の極分解)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $E : \mathfrak{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を射影値測度, $f : X \to \mathbb{C}$ を可測関数とし, $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉線型作用素

$$T := \int_X f(x)dE(x) : D_E(f) \to \mathcal{H}$$

を考える.[*155] このとき,

$$|T| = \int_X |f(x)|dE(x)$$

である. そして,

$$\omega(x) := \begin{cases} \frac{|f(x)|}{f(x)} & (f(x) \neq 0) \\ 0 & (f(x) = 0) \end{cases}$$

なる有界可測関数 $\omega : X \to \mathbb{C}$ に対し,

$$V := \int_X \omega(x)dE(x) \in B(\mathcal{H})$$

を定義すると,

$$T = V|T|, \quad V^*V = S(|T|)$$

が成り立つ. すなわち $T = V|T|$ が T の極分解 (10.75) である.

証明. 命題 10.53 の (4) より,

$$T^*T = \int_X |f(x)|^2 dE(x)$$

であるから, 命題 10.66 より,

$$|T| = \sqrt{T^*T} = \int_X \sqrt{|f(x)|^2}dE(x) = \int_X |f(x)|dE(x)$$

[*155] 稠密に定義された閉線型作用素であることは命題 10.53 の (3) による.

である．また命題 10.53 の (1) より，

$$V|T| = \int_X \omega(x)|f(x)|dE(x) = \int_X f(x)dE(x) = T$$

であり，

$$V^*V = \int_X |\omega(x)|^2 dE(x) = E((f \neq 0))$$

である．台射影作用素 $S(|T|)$ は閉部分空間 $\overline{\mathrm{Ran}(|T|)}$ の上への射影作用素であるから，$1 - S(|T|)$ は，

$$(\mathrm{Ran}(|T|))^\perp = \mathrm{Ker}(|T|) = \mathrm{Ker}\left(\int_X |f(x)|dE(x)\right) = \mathrm{Ran}\, E((f = 0))$$

[*156]の上への射影作用素である．よって $1 - S(|T|) = E((f = 0))$ であるから，

$$S(|T|) = 1 - E((f = 0)) = E((f \neq 0)).$$

ゆえに $V^*V = S(|T|)$ である． □

系 10.79 (Borel 関数カルキュラスの極分解)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素か正規作用素とする．そして Borel 関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し，

$$\omega(\lambda) := \begin{cases} \frac{|f(\lambda)|}{f(\lambda)} & (f(\lambda) \neq 0) \\ 0 & (f(\lambda) = 0) \end{cases}$$

なる有界 Borel 関数 $\omega : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ を考える．このとき Borel 関数カルキュラス (定義 10.65) $f(T)$ の極分解 (10.75) を $f(T) = V|f(T)|$ とすると，

$$|f(T)| = |f|(T), \quad V = \omega(T)$$

が成り立つ．

10.8 掛け算作用素, 直和 Hilbert 空間上の線型作用素

命題 10.80. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とし，Hilbert 空間 $L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を考える．このとき任意の $B \in \mathfrak{M}$ に対し，

$$E_\mu(B) : L^2(X, \mathfrak{M}, \mu) \ni [f] \mapsto [\chi_B f] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$$

とおくと，$E_\mu(B)$ は Hilbert 空間 $L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上の射影作用素であり，

$$E_\mu : \mathfrak{M} \ni B \mapsto E_\mu(B) \in \mathcal{P}(L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)) \tag{10.70}$$

は射影値測度 (定義 10.47) である．そして任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し，f の E_μ による積分 (定義 10.52) の定義域は，

$$D_{E_\mu}(f) = \left\{[g] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu) : [fg] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)\right\}$$

であり，

$$\int_X f(x)dE_\mu(x)[g] = [fg] \quad (\forall [g] \in D_{E_\mu}(f)) \tag{10.71}$$

が成り立つ．

証明. $E_\mu(X) = 1$, $E_\mu(B) \in \mathcal{P}(L^2(X, \mathfrak{M}, \mu))$ $(\forall B \in \mathfrak{M})$ であることは明らかである．任意の $[f], [g] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に対し Hölder の不等式 5.130 より $[f\overline{g}] \in L^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ であるから命題 5.88 より，

$$E_{\mu,[f],[g]} : \mathfrak{M} \ni B \mapsto (E_\mu(B)[f] \mid [g])_2 = \int_B f(x)\overline{g(x)}d\mu(x) \in \mathbb{C}$$

[*156] 3 番目の等号は命題 10.53 の (5) による．

は複素数値測度である．よって (10.70) は射影値測度である．任意の有界可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し，

$$\int_X f(x)dE_\mu(x)[g] = [fg] \quad (\forall [g] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)) \tag{10.72}$$

が成り立つ．実際, f が可測単関数の場合は (10.72) は明らかに成り立ち，命題 5.129 より，任意の有界可測関数は可測単関数の列によって一様近似できるので，(10.72) は任意の有界可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対して成り立つ．今，任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ を取り，有界可測関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，

$$f_n := f\chi_{(|f|\leqslant n)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

として定義する．任意の $[g] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に対し，

$$\int_X f_n(x)dE_\mu(x)[g] = [f_n g] \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから，単調収束定理より，

$$\begin{aligned}\int_X |f(x)|^2 dE_{\mu,[g],[g]}(x) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n(x)|^2 dE_{\mu,[g],[g]}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \int_X f_n(x)dE_\mu(x)[g] \right\|_2^2 \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n(x)g(x)|^2 d\mu(x) = \int_X |f(x)g(x)|^2 d\mu(x)\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}D_{E_\mu}(f) &= \left\{ [g] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu) : \int_X |f(x)|^2 dE_{\mu,[g],[g]}(x) < \infty \right\} \\ &= \{ [g] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu) : [fg] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu) \}\end{aligned}$$

であり，任意の $[g] \in D_{E_\mu}(f)$, $[h] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に対し Lebesgue 優収束定理より，

$$\begin{aligned}\left(\int_X f(x)dE_\mu(x)[g] \mid [h] \right)_2 &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n(x)dE_\mu(x)[g] \mid [h] \right)_2 = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)g(x)\overline{h(x)}d\mu(x) \\ &= \int_X f(x)g(x)\overline{h(x)}d\mu(x) = ([fg] \mid [h])_2\end{aligned}$$

である．よって (10.71) が成り立つ． □

定義 10.81 (掛け算作用素)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とし，Hilbert 空間 $L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を考える．命題 10.80 より，

$$E_\mu(B) : L^2(X, \mathfrak{M}, \mu) \ni [g] \mapsto [\chi_B g] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu) \quad (\forall B \in \mathfrak{M})$$

として，射影値測度

$$E_\mu : \mathfrak{M} \ni B \mapsto E_\mu(B) \in \mathcal{P}(L^2(X, \mathfrak{M}, \mu))$$

が定義され，任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し f の E_μ による積分の定義域は，

$$D_{E_\mu}(f) := \{ [g] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu) : [fg] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu) \}$$

であり，

$$\int_X f(x)dE_\mu(x)[g] = [fg] \quad (\forall [g] \in D_{E_\mu}(f))$$

である．

$$\int_X f(x)dE_\mu(x) : D_{E_\mu}(f) \ni [g] \mapsto [fg] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$$

を f による $L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上の掛け算作用素と言う．また射影値測度 E_μ を $L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上の掛け算作用素を司る射影値測度と言うことにする．

命題 10.82 ($L^\infty \rightsquigarrow L^2$ の忠実性)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を σ-有限測度空間とし, $E_\mu : \mathfrak{M} \to \mathcal{P}(L^2(X, \mathfrak{M}, \mu))$ を掛け算作用素を司る射影値測度とする. このとき,

$$L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu) \ni [f] \mapsto \int_X f(x) dE_\mu(x) \in B(L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)) \tag{10.73}$$

は等長 $*$-環準同型写像である.

証明. (10.73) が $*$-環準同型写像であることは明らかである. $L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ は C^*-環であるから, 定理 9.79 より (10.73) が単射であることを示せば十分である. $[f] \in L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ の E_μ による積分が 0 であるとし, $[f] = 0$ が成り立つことを示せばよい. σ-有限性より $\mathfrak{M}$ の列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n, \quad \mu(X_n) < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

なるものが存在する. 任意の $n \in \mathbb{N}$, 任意の $B \in \mathfrak{M}$ に対し $[\chi_{B\cap X_n}] \in L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ であるから,

$$0 = \int_X f(x) dE_\mu(x)[\chi_{B\cap X_n}] = [f\chi_{B\cap X_n}] \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall B \in \mathfrak{M})$$

である. よって命題 5.57 より $[f\chi_{X_n}] = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であるから, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ より $[f] = 0$ である. □

命題 10.83. X を位相空間, $\mu : \mathcal{B}_X \to [0, \infty]$ を σ-有限な Borel 測度とし, 任意の空でない開集合 $U \subseteq X$ に対し $\mu(U) > 0$ が成り立つとする. そして $E_\mu : \mathcal{B}_X \to \mathcal{P}(L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu))$ を掛け算作用素を司る射影値測度とする. このとき任意の連続関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\sigma\left(\int_X f(x) dE_\mu(x)\right) = \overline{f(X)} \tag{10.74}$$

が成り立つ.

証明. 任意の空でない開集合 $U \subseteq X$ に対し $\mu(U) > 0$ であるから, 命題 10.82 より,

$$E_\mu(U) = \int_X \chi_U(x) dE_\mu(x) > 0$$

である. よって系 10.58 より (10.74) が成り立つ. □

定義 10.84 (Hilbert 空間上の線型作用素の直和)**.** J を空でない集合とし, 各 $j \in J$ に対し Hilbert 空間 $\mathcal{H}_j$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}_j$ への線型作用素 T_j が与えられているとする. このとき直和 Hilbert 空間 (定義 5.155) $\bigoplus_{j\in J} \mathcal{H}_j$ から直和 Hilbert 空間 $\bigoplus_{j\in J} \mathcal{K}_j$ への線型作用素 $\bigoplus_{j\in J} T_j$ を,

$$D\left(\bigoplus_{j\in J} T_j\right) := \left\{(v_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} \mathcal{H}_j : v_j \in D(T_j)\ (\forall j \in J),\ \ (T_j v_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} \mathcal{K}_j\right\},$$

$$\bigoplus_{j\in J} T_j : D\left(\bigoplus_{j\in J} T_j\right) \ni (v_j)_{j\in J} \mapsto (T_j v_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} \mathcal{K}_j$$

と定義する. $\bigoplus_{j\in J} T_j$ を $(T_j)_{j\in J}$ の直和と言う.

命題 10.85 (Hilbert 空間上の線型作用素の直和の基本性質)**.** J を空でない集合とし, 各 $j \in J$ に対し Hilbert 空間 $\mathcal{H}_j$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}_j$ への線型作用素 T_j, S_j と, Hilbert 空間 $\mathcal{K}_j$ から $\mathcal{L}_j$ への線型作用素 R_j が与えられているとする. このとき,

(1) $(T_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J}^{(\infty)} B(\mathcal{H}_j, \mathcal{K}_j)$[*157]ならば,

$$\bigoplus_{j\in J} T_j \in B\left(\bigoplus_{j\in J} \mathcal{H}_j, \bigoplus_{j\in J} \mathcal{K}_j\right), \quad \left\|\bigoplus_{j\in J} T_j\right\| = \sup_{j\in J} \|T_j\|$$

が成り立つ.

[*157] $\bigoplus_{j\in J}^{(\infty)} B(\mathcal{H}_j, \mathcal{K}_j)$ は $(B(\mathcal{H}_j, \mathcal{K}_j))_{j\in J}$ の ℓ^∞ 直和 Banach 空間 (定義 5.153) である.

(2) 各 $j \in J$ に対し T_j が可閉ならば $\bigoplus_{j\in J} T_j$ も可閉であり,

$$\overline{\bigoplus_{j\in J} T_j} = \bigoplus_{j\in J} \overline{T_j}$$

が成り立つ. そして,

$$D := \operatorname{span} \bigcup_{j\in J} D(T_j) \subseteq \bigoplus_{j\in J} \mathcal{H}_j$$

は $\bigoplus_{j\in J} \overline{T_j}$ の芯である.

(3) 各 $j \in J$ に対し T_j が稠密に定義された線型作用素ならば $\bigoplus_{j\in J} T_j$ も稠密に定義された線型作用素であり,

$$\left(\bigoplus_{j\in J} T_j\right)^* = \bigoplus_{j\in J} T_j^*$$

が成り立つ.

(4)

$$\bigoplus_{j\in J} S_j + \bigoplus_{j\in J} T_j \subseteq \bigoplus_{j\in J} (S_j + T_j)$$

であり, もし各 $j \in J$ に対し $S_j + T_j$ が可閉ならば,

$$\overline{\bigoplus_{j\in J} S_j + \bigoplus_{j\in J} T_j} = \bigoplus_{j\in J} (\overline{S_j + T_j})$$

が成り立つ.

(5)

$$\bigoplus_{j\in J} R_j \bigoplus_{j\in J} T_j \subseteq \bigoplus_{j\in J} R_j T_j$$

であり, もし各 $j \in J$ に対し $R_j T_j$ が可閉ならば,

$$\overline{\bigoplus_{j\in J} R_j \bigoplus_{j\in J} T_j} = \bigoplus_{j\in J} \overline{R_j T_j}$$

が成り立つ.

証明.

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{j\in J} \mathcal{H}_j, \quad \mathcal{K} := \bigoplus_{j\in J} \mathcal{K}_j, \quad \mathcal{L} := \bigoplus_{j\in J} \mathcal{L}$$

とおき, 各 $j \in J$ に対し自然に,

$$\mathcal{H}_j \subseteq \mathcal{H}, \quad \mathcal{K}_j \subseteq \mathcal{K}, \quad \mathcal{L}_j \subseteq \mathcal{L}$$

とみなす.

(1) $T = \bigoplus_{j\in J} T_j$ とおく. 任意の $v = (v_j)_{j\in J} \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\|Tv\|^2 = \sum_{j\in J} \|T_j v_j\|^2 \leqslant (\sup_{j\in J} \|T_j\|)^2 \sum_{j\in J} \|v_j\|^2 = (\sup_{j\in J} \|T_j\|)^2 \|v\|^2$$

であるから $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ であり,

$$\|T\| \leqslant \sup_{j\in J} \|T_j\| \tag{10.75}$$

である. また任意の $j \in J$, $v_j \in \mathcal{H}_j$ に対し,

$$\|T_j v_j\| = \|T v_j\| \leqslant \|T\| \|v_j\|$$

であるから,

$$\|T_j\| \leqslant \|T\| \quad (\forall j \in J)$$

である. よって (10.75) の逆の不等式が成り立つ.

(2)

$$U:\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}\ni((u_j)_{j\in J},(v_j)_{j\in J})\mapsto(u_j,v_j)_{j\in J}\in\bigoplus_{j\in J}(\mathcal{H}_j\oplus\mathcal{K}_j)$$

は明らかにユニタリ作用素である. そして,

$$U\left(G\left(\bigoplus_{j\in J}\overline{T_j}\right)\right)=\bigoplus_{j\in J}G(\overline{T_j})=\bigoplus_{j\in J}\overline{G(T_j)}$$

である. 右辺は $\bigoplus_{j\in J}(\mathcal{H}_j\oplus\mathcal{K}_j)$ の閉部分空間であるから $G\left(\bigoplus_{j\in J}\overline{T_j}\right)$ は $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$ の閉部分空間である. よって $\bigoplus_{j\in J}\overline{T_j}$ は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への閉線型作用素である. また,

$$U\left(\overline{G\left(\bigoplus_{j\in J}T_j\right)}\right)=\overline{\bigoplus_{j\in J}G(T_j)}=\bigoplus_{j\in J}\overline{G(T_j)}=\bigoplus_{j\in J}G(\overline{T_j})=U\left(G\left(\bigoplus_{j\in J}\overline{T_j}\right)\right)$$

であるから,

$$\overline{\bigoplus_{j\in J}T_j}=\bigoplus_{j\in J}\overline{T_j}$$

である. $T=\bigoplus_{j\in J}T_j$ とおく. 任意の $v=(v_j)_{j\in J}\in D(T)$ を取り, $\mathcal{F}_J$ を J の有限部分集合全体とする.

$$v_F:=\sum_{j\in F}v_j\in D=\operatorname{span}\bigcup_{j\in J}D(T_j)\quad(\forall F\in\mathcal{F}_J)$$

とおけば,

$$Tv_F=\sum_{j\in F}T_jv_j\quad(\forall F\in\mathcal{F}_J)$$

なので,

$$(v_F,Tv_F)\to(v,Tv)\quad(F\to J)$$

である. よって $G(T)\subseteq\overline{G(T|_D)}$ であるから,

$$G(\overline{T})=\overline{G(T)}=\overline{G(T|_D)}$$

である. ゆえに D は $\overline{T}=\bigoplus_{j\in J}\overline{T_j}$ の芯である.

(3) $T:=\bigoplus_{j\in J}T_j, T':=\bigoplus_{j\in J}T_j^*$ とおく.

$$\operatorname{span}\bigcup_{j\in J}D(T_j)\subseteq D(T)$$

であり左辺は $\mathcal{H}$ において稠密であるので T は稠密に定義された線型作用素である. 任意の $u=(u_j)_{j\in J}\in D(T)$, $v=(v_j)_{j\in J}\in D(T')$ に対し,

$$(Tu\mid v)=\sum_{j\in J}(T_ju_j\mid v_j)=\sum_{j\in J}(u_j\mid T_j^*v_j)=(u\mid T'v)$$

であるから $T'\subseteq T^*$ である. 逆の包含関係を示す. 任意の $v=(v_j)_{j\in J}\in D(T^*)$ を取り, $v\in D(T')$ を示せばよい.

$$w=(w_j)_{j\in J}=T^*v\in\mathcal{H}$$

とおく. このとき任意の $j\in J$, 任意の $u_j\in D(T_j)$ に対し,

$$(T_ju_j\mid v_j)=(Tu_j\mid v)=(u_j\mid T^*v)=(u_j\mid w_j)$$

であるから $v_j\in D(T_j^*)$ であり, $w_j=T_j^*v_j$ である. よって,

$$(T_j^*v_j)_{j\in J}=(w_j)_{j\in J}=w\in\mathcal{H}$$

であるから $v\in D(T')$ である.

(4)

$$\bigoplus_{j\in J} S_j + \bigoplus_{j\in J} T_j \subseteq \bigoplus_{j\in J}(S_j + T_j)$$

は自明である. 各 $j \in J$ に対し $S_j + T_j$ が可閉であるとすると (2) より $\bigoplus_{j\in J}(\overline{S_j + T_j})$ は閉線型作用素であり,

$$D := \operatorname{span} \bigcup_{j\in J} D(S_j + T_j)$$

は $\bigoplus_{j\in J}(\overline{S_j + T_j})$ の芯である. そして D 上で,

$$\bigoplus_{j\in J} S_j + \bigoplus_{j\in J} T_j = \bigoplus_{j\in J}(\overline{S_j + T_j})$$

であるから,

$$\overline{\bigoplus_{j\in J} S_j + \bigoplus_{j\in J} T_j} = \bigoplus_{j\in J}(\overline{S_j + T_j})$$

が成り立つ.

(5)

$$\bigoplus_{j\in J} R_j \bigoplus_{j\in J} T_j \subseteq \bigoplus_{j\in J} R_j T_j$$

は自明である. 各 $j \in J$ に対し $R_j T_j$ が可閉であるとすると (2) より $\bigoplus_{j\in J} \overline{R_j T_j}$ は閉線型作用素であり,

$$D := \operatorname{span} \bigcup_{j\in J} D(R_j T_j)$$

は $\bigoplus_{j\in J} \overline{R_j T_j}$ の芯である. そして D 上で,

$$\bigoplus_{j\in J} R_j \bigoplus_{j\in J} T_j = \bigoplus_{j\in J} \overline{R_j T_j}$$

であるから,

$$\overline{\bigoplus_{j\in J} R_j \bigoplus_{j\in J} T_j} = \bigoplus_{j\in J} \overline{R_j T_j}$$

が成り立つ.

□

定理 10.86 (射影値測度の直和)**.** $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, J を空でない集合とし, 各 $j \in J$ に対し Hilbert 空間 $\mathcal{H}_j$ と射影値測度 $E_j : \mathfrak{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_j)$ が与えられているとする. このとき,

$$\bigoplus_{j\in J} E_j : \mathfrak{M} \ni B \mapsto \bigoplus_{j\in J} E_j(B) \in \mathcal{P}\left(\bigoplus_{j\in J} \mathcal{H}_j\right)$$

は射影値測度である. そして任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\int_X f(x) d\left(\bigoplus_{j\in J} E_j\right)(x) = \bigoplus_{j\in J} \int_X f(x) dE_j(x) \tag{10.76}$$

が成り立ち, 点スペクトル (定義 10.39) に関して,

$$\sigma_{\mathrm{p}}\left(\int_X f(x) d\left(\bigoplus_{j\in J} E_j\right)(x)\right) = \bigcup_{j\in J} \sigma_{\mathrm{p}}\left(\int_X f(x) dE_j(x)\right), \tag{10.77}$$

スペクトルに関して,

$$\sigma\left(\int_X f(x) d\left(\bigoplus_{j\in J} E_j\right)(x)\right) = \overline{\bigcup_{j\in J} \sigma\left(\int_X f(x) dE_j(x)\right)} \tag{10.78}$$

が成り立つ.

証明. $\mathcal{H} := \bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}$ とおく. 命題 10.85 より任意の $B \in \mathfrak{M}$ に対し $\bigoplus_{j\in J} E_j(B)$ は $\mathcal{H}$ 上の射影作用素である.

$$E := \bigoplus_{j\in J} E_j : \mathfrak{M} \ni B \mapsto \bigoplus_{j\in J} E_j(B) \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

とおく. 明らかに $E(X) = 1$ であり, $\mathfrak{M}$ の任意の非交叉列 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と任意の $v = (v_j)_{j\in J} \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(E(B)v \mid v) = \sum_{j\in J}(E_j(B)v_j \mid v_j) = \sum_{j\in J}\sum_{n\in\mathbb{N}}(E_j(B_n)v_j \mid v_j) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j\in J}(E_j(B_n)v_j \mid v_j) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(E(B_n)v \mid v)$$

であるから, 偏極恒等式 (10.4) より任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$E_{u,v} : \mathfrak{M} \ni B \mapsto (E(B)u \mid v) \in \mathbb{C}$$

は複素数値測度である. よって $E : \mathfrak{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ は射影値測度である. 今, 任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\int_X f(x)dE(x) = \bigoplus_{j\in J}\int_X f(x)dE_j(x) \tag{10.79}$$

が成り立つことを示す. f が可測単関数である場合は明らかに成り立つ. また任意の有界可測関数は可測単関数の列によって一様近似できる (命題 5.129) ので, (10.79) は $f : X \to \mathbb{C}$ が有界可測関数の場合も成り立つ. そこで任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し有界可測関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を,

$$f_n := f\chi_{(|f|\leq n)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

として定義すると, 任意の $v = (v_j)_{j\in J} \in \mathcal{H}$ に対し単調収束定理より,

$$\begin{aligned}
\int_X |f(x)|^2 dE_{v,v}(x) &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_X |f_n(x)|^2 dE_{v,v}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\int_X f_n(x)dE(x)v\right\|^2 \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j\in J}\left\|\int_X f_n(x)dE_j(x)v_j\right\|^2 = \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j\in J}\int_X |f_n(x)|^2 dE_{j,v_j,v_j}(x) \\
&= \sum_{j\in J}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_X |f_n(x)|^2 dE_{j,v_j,v_j}(x) = \sum_{j\in J}\int_X |f(x)|^2 dE_{j,v_j,v_j}(x)
\end{aligned} \tag{10.80}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
D_E(f) &= \left\{v \in \mathcal{H} : \int_X |f(x)|^2 dE_{v,v}(x) < \infty\right\} \\
&= \left\{(v_j)_{j\in J} \in \mathcal{H} : v_j \in D_{E_j}(f)\ (\forall j \in J),\ \sum_{j\in J}\int_X |f(x)|^2 dE_{j,v_j,v_j}(x) < \infty\right\} \\
&= \left\{(v_j)_{j\in J} \in \mathcal{H} : v_j \in D_{E_j}(f)\ (\forall j \in J),\ \sum_{j\in J}\left\|\int_X f(x)dE_j(x)v_j\right\|^2 < \infty\right\} \\
&= D\left(\bigoplus_{j\in J}\int_X f(x)dE_j(x)\right)
\end{aligned}$$

である. そして任意の $v = (v_j)_{j\in J} \in \mathcal{H}$, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し (10.80) で f を $f - f_n$ に置き換えたものを考えると,

$$\int_X |f(x) - f_n(x)|^2 dE_{v,v}(x) = \sum_{j\in J}\int_X |f(x) - f_n(x)|^2 dE_{j,v_j,v_j}(x)$$

であるから, 任意の $v = (v_j)_{j \in J} \in D_E(f) = D\left(\bigoplus_{j\in J}\int_X f(x)dE_j(x)\right)$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_X f(x)dE(x)v - \int_X f_n(x)dE(x)v\right\|^2 = \left\|\int_X (f(x)-f_n(x))dE(x)v\right\|^2 \\
&= \int_X |f(x)-f_n(x)|^2 dE_{v,v}(x) = \sum_{j\in J}\int_X |f(x)-f_n(x)|^2 dE_{j,v_j,v_j}(x) \\
&= \left\|\left(\bigoplus_{j\in J}\int_X (f(x)-f_n(x))dE_j(x)\right)v\right\|^2 \\
&= \left\|\left(\bigoplus_{j\in J}\int_X f(x)dE_j(x)\right)v - \left(\bigoplus_{j\in J}\int_X f_n(x)dE_j(x)\right)v\right\|^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})
\end{aligned} \tag{10.81}$$

であり, Lebesgue 優収束定理より (10.81) の左辺は $n \to \infty$ で 0 に収束するので,

$$\int_X f(x)dE(x)v = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)dE(x)v = \lim_{n\to\infty}\left(\bigoplus_{j\in J}\int_X f_n(x)dE_j(x)\right)v = \left(\bigoplus_{j\in J}\int_X f(x)dE_j(x)\right)v$$

である. よって (10.79) が成り立つ (すなわち (10.76) が成り立つ).
任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ を取る. 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\lambda - \int_X f(x)dE(x) = \int_X (\lambda - f(x))dE(x) = \bigoplus_{j\in J}\int_X (\lambda - f_j(x)dE_j(x) \tag{10.82}$$

であり, 明らかに $\bigoplus_{j\in J}\int_X(\lambda - f_j(x)dE_j(x)$ が単射であることと全ての $j \in J$ に対し $\int_X(\lambda - f(x))dE_j(x)$ が単射であることは同値である. よって (10.82) より (10.77) が成り立つ.
(10.78) が成り立つことを示す. $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し, $\bigoplus_{j\in J}\int_X(\lambda - f_j(x)dE_j(x)$ が単射かつ値域が $\mathcal{H}$ ならば, 明らかに全ての $j \in J$ に対し $\int_X(\lambda - f(x))dE_j(x)$ は単射で値域は $\mathcal{H}_j$ である. よって (10.82) よりレゾルベント集合に関して,

$$\rho\left(\int_X f(x)dE(x)\right) \subseteq \bigcap_{j\in J}\rho\left(\int_X f(x)dE_j(x)\right)$$

が成り立つ. これより,

$$\overline{\bigcup_{j\in J}\sigma\left(\int_X f(x)dE_j(x)\right)} \subseteq \sigma\left(\int_X f(x)dE(x)\right)$$

が成り立つ. 逆の包含関係を示す. 任意の

$$\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\left(\overline{\bigcup_{j\in J}\sigma\left(\int_X f(x)dE_j(x)\right)}\right) \tag{10.83}$$

を取り,

$$\lambda_0 - \int_X f(x)dE(x) = \bigoplus_{j\in J}\int_X (\lambda_0 - f(x))dE_j(x) : D_E(f) \to \mathcal{H} \tag{10.84}$$

が全単射であることを示せばよい. 各 $j \in J$ に対し $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma\left(\int_X f(x)dE_j(x)\right)$ であるから,

$$\lambda_0 - \int_X f(x)dE_j(x) : D_{E_j}(f) \to \mathcal{H}_j$$

は全単射である. よって (10.84) は単射であり, 任意の $u = (u_j)_{j\in J} \in \mathcal{H}$ に対し, $v_j \in D_{E_j}(f)$ $(\forall j \in J)$ で,

$$u_j = \int_X (\lambda_0 - f(x))dE_j(x)v_j \quad (\forall j \in J)$$

なるものが取れる. (10.83) よりある $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し,

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\} \cap \sigma\left(\int_X f(x)dE_j(x)\right) = \varnothing \quad (\forall j \in J)$$

となるから, 定理 10.57 より,

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\} \cap \mathrm{ess.Ran}_{E_j}(f) = \varnothing \quad (\forall j \in J).$$

よって本質的値域の定義 10.56 より,

$$E_j\left((|\lambda_0 - f| < \varepsilon)\right) = 0 \quad (\forall j \in J)$$

であるから,

$$\begin{aligned}\|u_j\|^2 &= \left\|\int_X (\lambda_0 - f(x))dE_j(x)v_j\right\|^2 = \left\|\int_{(|\lambda_0 - f| \geqslant \varepsilon)} (\lambda_0 - f(x))dE_j(x)v_j\right\|^2 \\ &= \int_{(|\lambda_0 - f| \geqslant \varepsilon)} |\lambda_0 - f(x)|^2 dE_{j,v_j,v_j}(x) \geqslant \varepsilon^2\|v_j\|^2 \quad (\forall j \in J).\end{aligned}$$

従って,

$$\sum_{j\in J}\|v_j\|^2 \leqslant \sum_{j\in J}\frac{1}{\varepsilon^2}\|u_j\|^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}\|u\|^2 < \infty$$

である. これより $v := (v_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}_j = \mathcal{H}$ であり,

$$u = (u_j)_{j\in J} = \left(\int_X (\lambda_0 - f(x))dE_j(x)v_j\right)_{j\in J}$$

であるから, $v = (v_j)_{j\in J} \in D\left(\bigoplus_{j\in J}\int_X(\lambda_0 - f(x))dE_j(x)\right) = D_E(f)$ である. よって,

$$u = \left(\int_X (\lambda_0 - f(x))dE_j(x)v_j\right)_{j\in J} = \left(\bigoplus_{j\in J}\int_X (\lambda_0 - f(x))dE_j(x)\right)v = \left(\lambda_0 - \int_X f(x)dE(x)\right)v$$

であり, $u \in \mathcal{H}$ は任意なので (10.84) は全単射である. ゆえに (10.78) が成り立つ. □

定理 10.87 (自己共役作用素の直和と Borel 関数カルキュラス)**.** J を空でない集合とし, 各 $j \in J$ に対し Hilbert 空間 $\mathcal{H}_j$ 上の自己共役作用素 T_j が与えられているとする. このとき直和 Hilbert 空間 $\bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}$ 上の線型作用素

$$T := \bigoplus_{j\in J} T_j$$

は自己共役作用素であり,

$$\sigma(T) = \overline{\bigcup_{j\in J}\sigma(T_j)}$$

が成り立つ. さらに任意の Borel 関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し,

$$f(T) = \bigoplus_{j\in J} f(T_j)$$

であり,

$$\sigma_{\mathrm{p}}(f(T)) = \bigcup_{j\in J}\sigma_{\mathrm{p}}(f(T_j)), \quad \sigma(f(T)) = \overline{\bigcup_{j\in J}\sigma(f(T_j))}$$

が成り立つ.

証明. T が自己共役作用素であることは命題 10.85 による. 各 $j \in J$ に対し自己共役作用素 T_j のスペクトル測度を $E_{T_j} : \mathcal{B}_{\sigma(T_j)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_j)$ とおき, 射影値測度

$$E_j : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \ni B \mapsto E_{T_j}(B \cap \sigma(T_j)) \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_j)$$

を定義する. このとき明らかに任意の Borel 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)dE_j(\lambda) = \int_{\sigma(T_j)} f(\lambda)dE_{T_j}(\lambda) = f(T_j)$$

である. 定理 10.86 により射影値測度

$$E := \bigoplus_{j\in J} E_j : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \ni B \mapsto \bigoplus_{j\in J} E_j(B) \in \mathcal{P}\left(\bigoplus_{j\in J} \mathcal{H}_j\right)$$

を定義すると,

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda) = \bigoplus_{j\in J} \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_j(\lambda) = \bigoplus_{j\in J} T_j = T$$

であり,

$$\sigma(T) = \sigma\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda)\right) = \overline{\bigcup_{j\in J} \sigma\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda dE_j(\lambda)\right)} = \overline{\bigcup_{j\in J} \sigma(T_j)}$$

である. そして定理 10.86 より任意の Borel 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対し

$$f(T) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda) = \bigoplus_{j\in J} \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE_j(\lambda) = \bigoplus_{j\in J} f(T_j)$$

[*158]であり,

$$\sigma_{\mathrm{p}}(f(T)) = \bigcup_{j\in J} \sigma_{\mathrm{p}}(f(T_j)), \quad \sigma(f(T)) = \overline{\bigcup_{j\in J} f(T_j)}$$

である. □

10.9 完備化, テンソル積 Hilbert 空間上の線型作用素

命題 10.88. 任意のノルム空間 X に対し Banach 空間 $\widetilde{X}$ と等長線型写像 $\iota : X \to \widetilde{X}$ で $\iota(X)$ が $\widetilde{X}$ において稠密であるようなものが存在する.

証明. 直積線型空間 $\prod_{n\in\mathbb{N}} X$ の線型部分空間

$$\mathcal{C} := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ は Cauchy 列} \right\}$$

と, $\mathcal{C}$ 上のセミノルム

$$p : \mathcal{C} \ni (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \in [0, \infty)$$

を考える. そして $\mathcal{C}$ の線型部分空間

$$\mathcal{N} := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C} : p((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0\}$$

に対し, 商線型空間 (定義 2.26) $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ を考え, 商写像を,

$$\mathcal{C} \ni z \mapsto [z] \in \mathcal{C}/\mathcal{N}$$

とおく. このとき,

$$\|\cdot\| : \mathcal{C}/\mathcal{N} \ni [z] \mapsto \|[z]\| := p(z) \in [0, \infty) \tag{10.85}$$

は $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ 上のノルムである. このノルムによるノルム空間を $\widetilde{X}$ とおく.

$$\iota : X \ni x \mapsto [(x)_{n\in\mathbb{N}}] \in \widetilde{X}$$

として等長線型写像を定義する. 任意の $z = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \widetilde{X}$, 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し,

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \varepsilon \quad (\forall n, m \geqslant n_0)$$

[*158] 1 番目の等号で命題 10.66 を用いた.

を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ を取ると,

$$\|z - \iota(x_{n_0})\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n_0}\| \leqslant \varepsilon$$

であるから $\iota(X)$ は $\widetilde{X}$ において稠密である. $\widetilde{X}$ の任意の Cauchy 列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し,

$$\|z_n - \iota(x_n)\| < \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たす $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X$ が取れて,

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \|\iota(x_n) - z_n\| + \|z_n - z_m\| + \|z_m - \iota(x_m)\| < \frac{1}{n} + \|z_n - z_m\| + \frac{1}{m} \quad (\forall n, m \in \mathbb{N})$$

であるから $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$ である. そこで $z := [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \widetilde{X}$ とおけば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\|z - z_n\| \leqslant \|z - \iota(x_n)\| + \|\iota(x_n) - z_n\| = \lim_{m\to\infty} \|x_m - x_n\| + \frac{1}{n}$$

であるから $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ である. よって $\widetilde{X}$ は Banach 空間である. □

命題 10.89. 任意の内積空間 X に対し, Hilbert 空間 $\widetilde{X}$ と内積を保存する線型写像 $\iota : X \to \widetilde{X}$ で $\iota(X)$ が $\widetilde{X}$ であるようなものが存在する.

証明. 命題 10.88 の証明における $\mathcal{C}, p, \mathcal{N}, \widetilde{X}, \iota$ をそのまま用いる.

$$[\cdot,\cdot] : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \ni ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}] := \lim_{n\to\infty} (x_n \mid y_n) \in \mathbb{C}$$

は準双線型汎関数 (定義 3.45) であり, 任意の $z, w \in \mathcal{C}$ に対し,

$$\overline{[z,w]} = [w,z], \quad [z,z] = p(z)^2 \geqslant 0 \tag{10.86}$$

$$|[z,w]| \leqslant p(z)p(w) \tag{10.87}$$

である. $[\cdot,\cdot]$ の準双線型性と (10.87) より

$$(\cdot \mid \cdot) : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \ni ([z],[w]) \mapsto ([z] \mid [w]) := [z,w] \in \mathbb{C}$$

は well-defined であり, (10.86) よりこれは $\widetilde{X}$ 上の内積で, この内積が定めるノルムは Banach 空間 $\widetilde{X}$ のノルム (12.48) である. よって $\widetilde{X}$ はこの内積により Hilbert 空間である. そして

$$(\iota(x) \mid \iota(y)) = ([(x)_{n\in\mathbb{N}}] \mid [(y)_{n\in\mathbb{N}}]) = (x \mid y) \quad (\forall x, y \in X)$$

であるから $\iota : X \to \widetilde{X}$ は内積を保存する. □

定義 10.90 (完備化 Banach 空間, 完備化 Hilbert 空間)**.** 命題 10.88 においてノルム空間 X と $\iota(X)$ を同一視し, X を Banach 空間 $\widetilde{X}$ の稠密部分空間とみなす. このとき $\widetilde{X}$ を X の完備化 Banach 空間と言う.
命題 10.89 において内積空間 X と $\iota(X)$ を同一視し, X を Hilbert 空間 $\widetilde{X}$ の稠密部分空間とみなす. このとき $\widetilde{X}$ を X の完備化 Hilbert 空間と言う.

命題 10.91 (内積空間のテンソル積)**.** $\mathcal{H}_1, \cdots, \mathcal{H}_N$ をそれぞれ Hilbert 空間*159 とし,

$$\bigodot_{j=1}^{N} \mathcal{H}_j = \mathcal{H}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{H}_N$$

をテンソル積線型空間 (定義 2.65) とする. このとき $\bigodot_{j=1}^{N} \mathcal{H}_j$ 上の内積で, 任意の $u_j, v_j \in \mathcal{H}_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対し,

$$(u_1 \otimes \cdots \otimes u_N \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) = (u_1 \mid v_1) \cdots (u_N \mid v_N)$$

を満たすものが唯一つ存在する.

*159 この命題においては実際は内積空間でよい.

証明. 一意性はテンソル積線型空間 $\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j$ の任意の元が $v_1\otimes\cdots\otimes v_N$ なる形の元の有限和であることによる. 存在を示す. 任意の $u_j\in\mathcal{H}_j$ $(j=1,\cdots,N)$ に対し,

$$\mathcal{H}_1\times\cdots\times\mathcal{H}_N\ni(v_1,\cdots,v_N)\mapsto(v_1\mid u_1)\cdots(v_N\mid u_N)\in\mathbb{C}$$

は多重線型写像であるから, 定理 2.68 より反線型汎関数 (定義 3.40)

$$u_1\odot\cdots\odot u_N:\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j\ni v_1\otimes\cdots\otimes v_N\mapsto(u_1\mid v_1)\cdots(u_N\mid v_N)\in\mathbb{C}$$

が定まる. そして $\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j$ 上の反線型汎関数全体 $AL\left(\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j,\ \mathbb{C}\right)$ は各点ごとの演算で $\mathbb{C}$ 上の線型空間をなし,

$$\mathcal{H}_1\times\cdots\times\mathcal{H}_N\ni(u_1,\cdots,u_N)\mapsto u_1\odot\cdots\odot u_N\in AL\left(\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j,\ \mathbb{C}\right)$$

は多重線型写像である. よって定理 2.68 より線型写像

$$M:\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j\ni u_1\otimes\cdots\otimes u_N\mapsto u_1\odot\cdots\odot u_N\in AL\left(\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j,\ \mathbb{C}\right)$$

が定まる. そこで準双線型汎関数

$$(\cdot\mid\cdot):\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j\times\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j\to\mathbb{C},\quad(S\mid T):=M(S)(T)\quad\left(S,T\in\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j\right)\tag{10.88}$$

を定義する. このとき任意の $u_j,v_j\in\mathcal{H}_j$ $(j=1,\cdots,N)$ に対し,

$$(u_1\otimes\cdots\otimes u_N\mid v_1\otimes\cdots\otimes v_N)=(u_1\mid v_1)\cdots(u_N\mid v_N)$$

であるので, (10.88) が $\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j$ の内積であることを示せばよい. 明らかに,

$$\overline{(S\mid T)}=\overline{(T\mid S)}\quad\left(\forall S,T\in\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j\right)$$

は成り立つ. 任意の

$$T=\sum_{l=1}^{n}v_{1,l}\otimes\cdots\otimes v_{N,l}\in\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j$$

を取る. 各 $j\in\{1,\cdots,N\}$ に対し $\mathcal{H}_j$ の有限次元部分空間 $\mathrm{span}\{v_{j,1},\cdots,v_{j,n}\}$ の CONS $\{e_{j,1},\cdots,e_{j,m(j)}\}$ を取れば, ある $\alpha_{k_1,\cdots,k_N}\in\mathbb{C}$ $(k_j\in\{1,\cdots,m(j)\},j=1,\cdots,N)$ に対し,

$$T=\sum_{k_1,\cdots,k_N}\alpha_{k_1,\cdots,k_N}e_{1,k_1}\otimes\cdots\otimes e_{N,k_N}$$

と表せる. よって,

$$(T\mid T)=\sum_{k_1,\cdots,k_N}|\alpha_{k_1,\cdots,k_N}|^2\geqslant 0$$

であり, $(T\mid T)=0\Leftrightarrow T=0$ であるから (10.88) は $\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j$ の内積である. □

定義 10.92 (テンソル積 Hilbert 空間). $\mathcal{H}_1,\cdots,\mathcal{H}_N$ をそれぞれ Hilbert 空間とする. 命題 10.91 における内積による内積空間 $\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j$ の完備化 Hilbert 空間 (定義 10.90) を,

$$\bigotimes_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j=\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N=\overline{\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j}$$

と表し, これを $\mathcal{H}_1,\cdots,\mathcal{H}_N$ のテンソル積 Hilbert 空間と言う.

定義 10.93. $\mathcal{H}_1, \cdots, \mathcal{H}_N$ をそれぞれ Hilbert 空間とし, $D_j \subseteq \mathcal{H}_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ を線型部分空間とする．これに対しテンソル積 Hilbert 空間 $\bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}_j$ の線型部分空間

$$\bigodot_{j=1}^N D_j = D_1 \odot \cdots \odot D_N := \mathrm{span}\, \{v_1 \otimes \cdots \otimes v_N : v_1 \in D_1, \cdots, v_N \in D_N\}$$

を定義する．

命題 10.94. $\mathcal{H}_1, \cdots, \mathcal{H}_N$ をそれぞれ Hilbert 空間とする．

(1) $D_1 \subseteq \mathcal{H}_1, \cdots, D_N \subseteq \mathcal{H}_N$ がそれぞれ稠密部分空間であるならば,

$$D_1 \odot \cdots \odot D_N \subseteq \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$$

も稠密部分空間である．

(2) 各 $\mathcal{H}_j$ の CONS を $\{e_{j,i}\}_{i \in I_j}$ とする．このとき,

$$\{e_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes e_{N,i_N} : (i_1, \cdots, i_N) \in I_1 \times \cdots \times I_N\} \tag{10.89}$$

は $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ の CONS である．

証明. (1)

$$\|v_1 \otimes \cdots \otimes v_N\| = \|v_1\| \cdots \|v_N\| \quad (\forall v_1 \in \mathcal{H}_1, \cdots, v_N \in \mathcal{H}_N)$$

であるから,

$$\mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_N \ni (v_1, \cdots, v_N) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \in \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$$

は有界多重線型写像である．よって任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$, 任意の $v_j \in \mathcal{H}_j$ に対し, v_j に収束する D_j の列 $(v_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$ を取れば,

$$v_{1,n} \otimes \cdots \otimes v_{N,n} \to v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ. ゆえに,

$$\mathcal{H}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{H}_N \subseteq \overline{D_1 \odot \cdots \odot D_N}$$

であるから,

$$\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N = \overline{\mathcal{H}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{H}_N} = \overline{D_1 \odot \cdots \odot D_N}$$

である．

(2) (10.89) は明らかに $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ の ONS である． CONS の定義 5.148 より各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し $D_j := \mathrm{span}\{e_{j,i}\}_{i \in I_j}$ は $\mathcal{H}_j$ の稠密部分空間であるから, (1) より

$$D_1 \odot \cdots \odot D_N = \mathrm{span}\{e_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes e_{N,i_N} : (i_1, \cdots, i_N) \in I_1 \times \cdots \times I_N\}$$

は $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ で稠密である．よって (10.89) は $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ の CONS である．

□

命題 10.95. X_j を第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間, $\mu_j : \mathcal{B}_{X_j} \to [0, \infty]$ を位相正則測度とする $(j = 1, \cdots, N)$. $f_j : X_j \to \mathbb{C}$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対し,

$$f_1 \times \cdots \times f_N : X_1 \times \cdots \times X_N \ni (x_1, \cdots, x_N) \mapsto f_1(x_1) \cdots f_N(x_N) \in \mathbb{C}$$

と定義する．このときユニタリ作用素

$$U : \bigotimes_{j=1}^N L^2(X_j, \mu_j) \to L^2(X_1 \times \cdots \times X_N, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N)$$

で,

$$U([f_1] \otimes \cdots \otimes [f_N]) = [f_1 \times \cdots \times f_N] \quad (\forall [f_j] \in L^2(X_j, \mu_j), j = 1, \cdots, N)$$

なるものが唯一つ存在する．

証明. まず各 X_j は第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間であるから補題 5.15 より，

$$X := X_1 \times \cdots \times X_N$$

も第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間であり，命題 5.16 より，

$$\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{X_N}$$

である．また各 X_j は σ-コンパクトである (命題 5.175) ので μ_j は σ-有限であり，直積測度 (5.82)

$$\mu := \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N : \mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{X_N} \to [0, \infty]$$

が定義できる．各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し，

$$\pi_j : X \ni (x_1, \cdots, x_N) \mapsto x_j \in X_j$$

は連続写像であるから任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ に対し $\pi_j(K) \subseteq X_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ はコンパクトであり，

$$K \subseteq \pi_1(K) \times \cdots \times \pi_N(K)$$

だから，

$$\mu(K) \leqslant \mu_1(\pi_1(K)) \cdots \mu_N(\pi_N(K)) < \infty$$

である．よって定理 5.177 より $\mu : \mathcal{B}_X \to [0, \infty]$ は位相正則測度である．今，任意の $[f_j] \in L^2(X_j, \mu_j)$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対し Tonelli の定理 5.84 より，

$$[f_1 \times \cdots \times f_N] \in L^2(X, \mu)$$

であり，

$$\prod_{j=1}^{N} L^2(X_j, \mu_j) \ni ([f_1], \cdots, [f_N]) \mapsto [f_1 \times \cdots \times f_N] \in L^2(X, \mu)$$

は well-defined な多重線型写像である．よって定理 2.68 より線型作用素

$$U_0 : \bigodot_{j=1}^{N} L^2(X_j, \mu_j) \ni [f_1] \otimes \cdots \otimes [f_N] \mapsto [f_1 \times \cdots \times f_N] \in L^2(X, \mu)$$

が定まり，Fubini の定理 5.85 より U_0 は内積を保存する．よって命題 3.19 より U_0 は内積を保存する有界線型作用素

$$U : \bigotimes_{j=1}^{N} L^2(X_j, \mu_j) \to L^2(X, \mu)$$

に一意拡張できる．μ は位相正則測度なので定理 5.179 より，

$$L^2(X, \mu) = \overline{[C_c(X)]}^{\|\cdot\|_2}$$

である．任意の $f \in C_c(X)$ を取る．各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し $\pi_j(\mathrm{supp}(f)) \subseteq X_j$ はコンパクトであるから，定理 1.81 より，閉包がコンパクトな X_j の開集合 $V_j \supseteq \pi_j(\mathrm{supp}(f))$ が取れる．

$$\mathrm{supp}(f) \subseteq \pi_1(\mathrm{supp}(f)) \times \cdots \times \pi_N(\mathrm{supp}(f)) \subseteq V_1 \times \cdots \times V_N$$

より，

$$f \in C_0(V_1 \times \cdots \times V_N)$$

であり，Urysohn の補題 5.165 と Stone-Weierstrass の定理 5.194 より，

$$C_0(V_1 \times \cdots \times V_N) = \overline{\mathrm{span}\{\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_N : \varphi_1 \in C_0(V_1), \cdots, \varphi_N \in C_0(V_N)\}}^{\sup \text{ ノルム}}$$

であるから，

$$\mu(V_1 \times \cdots \times V_N) \subseteq \mu_1(\overline{V_1}) \cdots \mu_N(\overline{V_N}) < \infty$$

[*160]より,

$$[f] \in \overline{U\left(L^2(X_1,\mu_1)\odot\cdots\odot L^2(X_N,\mu_N)\right)}^{\|\cdot\|_2}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} L^2(X,\mu) &= \overline{[C_c(X)]}^{\|\cdot\|_2} = \overline{U\left(L^2(X_1,\mu_1)\odot\cdots\odot L^2(X_N,\mu_N)\right)}^{\|\cdot\|_2} \\ &= U\left(\overline{L^2(X_1,\mu_1)\odot\cdots\odot L^2(X_N,\mu_N)}\right) = U\left(L^2(X_1,\mu_1)\otimes\cdots\otimes L^2(X_N,\mu_N)\right) \end{aligned}$$

であるから U はユニタリ作用素である. □

定義 10.96 (L^2 空間のテンソル積)**.** X_j を第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間とし, $\mu_j : \mathcal{B}_{X_j} \to [0,\infty]$ を位相正則測度とする ($j=1,\cdots,N$). このとき命題 10.95 より, ユニタリ作用素

$$U : \bigotimes_{j=1}^N L^2(X_j,\mu_j) \to L^2(X_1\times\cdots\times X_N, \mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_N)$$

で,

$$U([f_1]\otimes\cdots\otimes[f_N]) = [f_1\times\cdots\times f_N] \quad (\forall [f_j]\in L^2(X_j,\mu_j),\ j=1,\cdots,N)$$

なるものが定まる. そこで以後,

$$[f_1]\otimes\cdots\otimes[f_N] = [f_1\times\cdots\times f_N] \quad (\forall [f_j]\in L^2(X_j,\mu_j),\ j=1,\cdots,N)$$

なる同一視によって,

$$\bigotimes_{j=1}^N L^2(X_j,\mu_j) = L^2(X_1\times\cdots\times X_N, \mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_N)$$

とみなす.

定義 10.97 (Hilbert 空間上の線型作用素のテンソル積)**.** 各 $j\in\{1,\cdots,N\}$ に対し, Hilbert 空間 $\mathcal{H}_j$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}_j$ への線型作用素 T_j が与えられているとする. このとき,

$$\prod_{j=1}^N D(T_j) \ni (v_1,\cdots,v_N) \mapsto T_1v_1\otimes\cdots\otimes T_Nv_N \in \bigotimes_{j=1}^N \mathcal{K}_j$$

は多重線型写像であるから, 定理 2.68 より, 線型作用素

$$T_1\odot\cdots\odot T_N : \bigodot_{j=1}^N D(T_j) \ni v_1\otimes\cdots\otimes v_N \mapsto T_1v_1\otimes\cdots\otimes T_Nv_N \in \bigotimes_{j=1}^N \mathcal{K}_j$$

が定まる. もし $T_1,\cdots,T_N$ がそれぞれ稠密に定義された線型作用素であるならば, 命題 10.94 より, $\bigodot_{j=1}^N D(T_j)$ は $\bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}_j$ において稠密であるから, $T_1\odot\cdots\odot T_N$ は Hilbert 空間 $\bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}_j$ から Hilbert 空間 $\bigotimes_{j=1}^N \mathcal{K}_j$ への稠密に定義された線型作用素である. よって $T_1\odot\cdots\odot T_N$ は共役作用素を持ち, 明らかに,

$$T_1^*\odot\cdots\odot T_N^* \subseteq (T_1\odot\cdots\odot T_N)^*$$

である. これよりもし $T_1,\cdots,T_N$ が稠密に定義された閉線型作用素であるならば, 定理 10.28 より,

$$T_1\odot\cdots\odot T_N = T_1^{**}\odot\cdots\odot T_N^{**} \subseteq (T_1^*\odot\cdots\odot T_N^*)^*$$

であり, 右辺は閉線型作用素である (命題 10.27 の (7)) から $T_1\odot\cdots\odot T_N$ は稠密に定義された可閉線型作用素である. そこで $\mathcal{H}_j$ から $\mathcal{K}_j$ への稠密に定義された閉線型作用素 T_j ($j=1,\cdots,N$) に対し, $\bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}_j$ から $\bigotimes_{j=1}^N \mathcal{K}_j$ への稠密に定義された閉線型作用素 $T_1\otimes\cdots\otimes T_N$ を,

$$T_1\otimes\cdots\otimes T_N := \overline{T_1\odot\cdots\odot T_N}$$

と定義する. $T_1\otimes\cdots\otimes T_N$ を $T_1,\cdots,T_N$ のテンソル積と言う.

[*160] 各 $\overline{V_j}$ がコンパクトであることに注意.

補題 10.98 (Russo-Dye の定理)**.** $\mathcal{A}$ を単位的 C^*-環とし, $A \in \mathcal{A}$ と $n \in \mathbb{N}$ が,

$$\|A\| < 1 - \frac{2}{n}$$

を満たすとする. このとき n 個のユニタリ元 $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{A}$ で,

$$A = \frac{1}{n}(U_1 + \cdots + U_n)$$

を満たすものが取れる. 特に $\mathcal{A}$ の任意の元はユニタリ元の線型結合である.

証明. (1) $A \in GL(\mathcal{A})$ かつ $\|A\| < 1$ を満たす任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し, ユニタリ元 $U_+, U_- \in \mathcal{A}$ で,

$$A = \frac{1}{2}(U_+ + U_-)$$

を満たすものが取れることを示す. $A^*A \in GL(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_+$ であるから連続関数カルキュラス (9.48) より $|A| := \sqrt{A^*A} \in GL(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_+$ である. そこで,

$$W := A|A|^{-1} \in GL(\mathcal{A})$$

とおくと, $W^*W = |A|^{-1}A^*A|A|^{-1} = |A|^{-1}|A|^2|A|^{-1} = 1$ だから W はユニタリであり $A = W|A|$ である. $\||A|\|^2 = \|A^*A\| = \|A\|^2 < 1$ であるから $1 - |A|^2 \in \mathcal{A}_+$ である. そこで,

$$V_\pm := |A| \pm i\sqrt{1 - |A|^2}$$

とおけば連続関数カルキュラスより,

$$V_\pm V_\mp = |A|^2 + (1 - |A|^2) = 1$$

だから $V_\pm$ はユニタリである. そして $|A| = \frac{1}{2}(V_+ + V_-)$ であるから,

$$A = W|A| = \frac{1}{2}(WV_+ + WV_-)$$

である. $U_\pm := WV_\pm$ とおけば $U_\pm$ はユニタリであり, $A = \frac{1}{2}(U_+ + U_-)$ である.

(2) $\|A\| < 1$ を満たす任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し, ユニタリ元 $U, V \in \mathcal{A}$ で,

$$1 + A = U + V$$

を満たすものが取れることを示す. 命題 9.2 より $1 + A \in GL(\mathcal{A})$ であるから,

$$\frac{1}{2}(1 + A) \in GL(\mathcal{A}), \quad \left\|\frac{1}{2}(1 + A)\right\| < 1$$

である. よって (1) よりユニタリ元 $U, V \in \mathcal{A}$ で,

$$\frac{1}{2}(1 + A) = \frac{1}{2}(U + V)$$

なるものが取れる.

(3) $\|A\| < 1$ を満たす任意の $A \in \mathcal{A}$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $n + 1$ 個のユニタリ元 $U_1, \cdots, U_n, V_n \in \mathcal{A}$ で,

$$1 + nA = U_1 + \cdots + U_n + V_n$$

を満たすものが取れることを示す. $n \in \mathbb{N}$ に関する帰納法で示す. $n = 1$ の場合は (2) より成り立つ. ある $n - 1 \in \mathbb{N}$ に対して成り立つと仮定する. すなわち n 個のユニタリ元 $U_1, \cdots, U_{n-1}, V_{n-1} \in \mathcal{A}$ で,

$$1 + (n - 1)A = U_1 + \cdots + U_{n-1} + V_{n-1}$$

を満たすものが取れるとする. このとき $V_{n-1}+A=V_{n-1}(1+V_{n-1}^{*}A)$ であり $\|V_{n-1}^{*}A\|<1$ であるから, (2) よりユニタリ元 $U_n, V_n \in \mathcal{A}$ で,

$$V_{n-1}+A=V_{n-1}(1+V_{n-1}^{*}A)=U_n+V_n$$

なるものが取れる. ゆえに,

$$1+nA=1+(n-1)A+A=U_1+\cdots+U_{n-1}+V_{n-1}+A=U_1+\cdots+U_n+V_n$$

であるから n の場合も成り立つ.

(4) $A\in\mathcal{A}$ と $n\in\mathbb{N}$ が $\|A\|<1-\frac{2}{n}$ を満たすとき, n 個のユニタリ元 $U_1,\cdots,U_n\in\mathcal{A}$ で,

$$A=\frac{1}{n}(U_1+\cdots+U_n)$$

を満たすものが取れることを示す.

$$B:=\frac{1}{n-1}(1-nA)\in\mathcal{A}$$

とおくと,

$$\|B\|\leqslant\frac{1}{n-1}(1+n\|A\|)<\frac{1}{n-1}(1+n-2)=1$$

であるから (3) より n 個のユニタリ元 $U_1,\cdots,U_n$ で,

$$nA=1+(n-1)B=U_1+\cdots+U_n$$

を満たすものが取れる. よって $A=\frac{1}{n}(U_1+\cdots+U_n)$ である.

□

定理 10.99 (有界線型作用素のテンソル積)**.** $\mathcal{H}_j,\mathcal{K}_j$ をそれぞれ Hilbert 空間とし, $T_j\in B(\mathcal{H}_j,\mathcal{K}_j)$ $(j=1,\cdots,N)$ とする. このとき $T_1,\cdots,T_N$ のテンソル積 (定義 10.97) は,

$$T_1\otimes\cdots\otimes T_N\in B\left(\bigotimes_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j,\ \bigotimes_{j=1}^{N}\mathcal{K}_j\right)$$

を満たし, 作用素ノルムに関して,

$$\|T_1\otimes\cdots\otimes T_N\|=\|T_1\|\cdots\|T_N\|$$

が成り立つ.

証明. (1) まず $\mathcal{H}_j=\mathcal{K}_j$ $(j=1,\cdots,N)$ の場合に成り立つことを示す. このとき Russo-Dye の定理 10.98 より各 $j\in\{1,\cdots,N\}$ に対し $T_j\in B(\mathcal{H}_j)$ は $\mathcal{H}_j$ 上のユニタリ作用素の線型結合で表される. ここで $U_j\in B(\mathcal{H}_j)$ $(j=1,\cdots,N)$ をユニタリ作用素とすると,

$$U_1\odot\cdots\odot U_N:\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j\ni v_1\otimes\cdots\otimes v_N\mapsto U_1v_1\otimes\cdots\otimes U_Nv_N\in\bigotimes_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j \tag{10.90}$$

は内積を保存するから等長線型作用素であり,

$$T_1\odot\cdots\odot T_N:\bigodot_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j\ni v_1\otimes\cdots\otimes v_N\mapsto T_1v_1\otimes\cdots\otimes T_Nv_N\in\bigotimes_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j$$

は (10.90) のタイプの等長線型作用素の線型結合なので有界線型作用素である. よって命題 3.19 より,

$$T_1\otimes\cdots\otimes T_N=\overline{T_1\odot\cdots\odot T_N}\in B\left(\bigotimes_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j\right)$$

が成り立つ. 任意の $k\in\{1,\cdots,N\}$ に対し,

$$B(\mathcal{H}_k)\ni T_k\mapsto 1\otimes\cdots\otimes 1\otimes\overset{k\text{ 番目}}{T_k}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1\in B\left(\bigotimes_{j=1}^{N}\mathcal{H}\right)$$

は C^*-環の間の単射な $*$-環準同型写像であるから定理 9.79 より等長である．よって，

$$\|T_1 \otimes \cdots \otimes T_N\| \leqslant \|T_1\| \cdots \|T_N\|$$

が成り立つ．逆の不等式を示す．任意の $v_j \in \mathcal{H}_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対し，

$$\|T_1 v_1\| \cdots \|T_N v_N\| = \|(T_1 \otimes \cdots \otimes T_N)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N)\| \leqslant \|T_1 \otimes \cdots \otimes T_N\| \|v_1\| \cdots \|v_N\|$$

であるから，

$$\|T_1\| \cdots \|T_N\| = \sup\{\|T_1 v_1\| \cdots \|T_N v_N\| : v_j \in \mathcal{H}_j, \|v_j\| \leqslant 1 \ (j = 1, \cdots, N)\} \leqslant \|T_1 \otimes \cdots \otimes T_N\|$$

である．よって $\|T_1 \otimes \cdots \otimes T_N\| = \|T_1\| \cdots \|T_N\|$ が成り立つ．

(2) 一般の場合を示す．$T_j^* T_j \in B(\mathcal{H}_j)$, $\|T_j^* T_j\| = \|T_j\|^2$ $(j = 1, \cdots, N)$ であるから (1) より，

$$\|T_1^* T_1 \otimes \cdots \otimes T_N^* T_N\| = \|T_1^* T_1\| \cdots \|T_N^* T_N\| = (\|T_1\| \cdots \|T_N\|)^2$$

である．よって，

$$T_1 \odot \cdots \odot T_N : \bigodot_{j=1}^N \mathcal{H}_j \ni v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \mapsto T_1 v_1 \otimes \cdots \otimes T_N v_N \in \bigotimes_{j=1}^N \mathcal{K}_j$$

は任意の $v \in \bigodot_{j=1}^N \mathcal{H}_j$ に対し，

$$\|(T_1 \odot \cdots \odot T_N) v\|^2 = |((T_1^* T_1 \odot \cdots \odot T_N^* T_N) v \mid v) \leqslant (\|T_1\| \cdots \|T_N\| \|v\|)^2$$

を満たすので有界線型作用素であり，

$$\|T_1 \odot \cdots \odot T_N\| \leqslant \|T_1\| \cdots \|T_N\|$$

である．ゆえに命題 3.19 より，

$$T_1 \otimes \cdots \otimes T_N = \overline{T_1 \odot \cdots \odot T_N} \in B\left(\bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}_j, \bigotimes_{j=1}^N \mathcal{K}_j\right)$$

であり，

$$\|T_1 \otimes \cdots \otimes T_N\| = \|T_1 \odot \cdots \odot T_N\| \leqslant \|T_1\| \cdots \|T_N\|$$

が成り立つ．逆の不等式が成り立つことは (1) と全く同様にして示せる．

□

定理 10.100 (射影値測度のテンソル積)**.** $\mathcal{H}_j$ を Hilbert 空間, X_j を第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間, $E_j : \mathcal{B}_{X_j} \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_j)$ を射影値測度とする $(j = 1, \cdots, N)$. このとき射影値測度

$$E : \mathcal{B}_{X_1 \times \cdots \times X_N} \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N)$$

で，

$$E(B_1 \times \cdots \times B_N) = E_1(B_1) \otimes \cdots \otimes E_N(B_N) \quad (\forall B_j \in \mathcal{B}_{X_j}, j = 1, \cdots, N) \tag{10.91}$$

を満たすものが唯一つ存在する．

証明.

$$X := X_1 \times \cdots \times X_N, \ \ \mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$$

とおく．$X_1, \cdots, X_N$ は第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間であるから補題 5.15 より X も第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間であり，命題 5.16 より，

$$\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{X_N} = \sigma(\mathcal{C})$$

である．ただし $\mathcal{C}$ は X 上の半集合代数 (定義 5.60)

$$\mathcal{C} := \mathcal{B}_{X_1} \times \cdots \times \mathcal{B}_{X_N} = \{B_1 \times \cdots \times B_N : B_1 \in \mathcal{B}_{X_1}, \cdots, B_N \in \mathcal{B}_{X_n}\}$$

である．定理 10.99 より任意の $B_j \in \mathcal{B}_{X_j}$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対し $E_1(B_1) \otimes \cdots \otimes E_N(B_N) \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ である．今，

$$E^{(0)} : \mathcal{C} \ni B_1 \times \cdots \times B_N \mapsto E_1(B_1) \otimes \cdots \otimes E_N(B_N) \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

とおく．$C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ が互いに交わらないならば射影作用素 $E^{(0)}(C_1)$ と $E^{(0)}(C_2)$ は明らかに互いに直交する (つまり $E^{(0)}(C_1)E^{(0)}(C_2) = 0$)．今，$E^{(0)}$ が σ-加法的であること，すなわち，$\mathcal{C}$ の非交叉列 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathcal{C}$ を満たすものに対し，

$$E^{(0)}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E^{(0)}(C_n) \tag{10.92}$$

(右辺は射影作用素の直交族 $(E^{(0)}(C_n))_{n\in\mathbb{N}}$ の和 (定義 10.16) である) が成り立つことを示す．そのためには $\mathcal{H}$ における

$$\bigodot_{j=1}^{N} \mathcal{H}_j = \mathrm{span}\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_N : v_j \in \mathcal{H}_j \ (j = 1, \cdots, N)\}$$

の稠密性より，任意の $u_j, v_j \in \mathcal{H}_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対し，

$$u := u_1 \otimes \cdots \otimes u_N, \quad v := v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \in \bigodot_{j=1}^{N} \mathcal{H}_j$$

とおいて，

$$\left(E^{(0)}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) u \,\middle|\, v\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(E^{(0)}(C_n) u \,\middle|\, v\right) \tag{10.93}$$

が成り立つことを示せば十分である．しかし任意の $B_j \in \mathcal{B}_{X_j}$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対し，

$$\begin{aligned}(E^{(0)}(B_1 \times \cdots \times B_N)u \mid v) &= (E_1(B_1)u_1 \mid v_1) \cdots (E_N(B_N)u_N \mid v_N) \\ &= E_{1,u_1,v_1}(B_1) \cdots E_{N,u_N,v_N}(B_N)\end{aligned} \tag{10.94}$$

であり，偏極恒等式 (10.4) より各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ について複素数値 Borel 測度 $E_{j,u_j,v_j} : \mathcal{B}_{X_j} \to \mathbb{C}$ は有限 Borel 測度の線型結合であるから，有限 Borel 測度の直積測度 (5.81) を考えることによって，

$$\mathcal{C} \ni B_1 \times \cdots \times B_N \mapsto E_{1,u_1,v_1}(B_1) \cdots E_{N,u_N,v_N}(B_N) \in \mathbb{C}$$

は $\mathcal{B}_X = \sigma(\mathcal{C})$ 上のある複素数値 Borel 測度

$$E^{(0)}_{u,v} : \mathcal{B}_X \to \mathbb{C}$$

に拡張できることが分かる．よって (10.94) より，

$$(E^{(0)}(C)u \mid v) = E^{(0)}_{u,v}(C) \quad (\forall C \in \mathcal{C})$$

であるから，

$$\left(E^{(0)}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) u \,\middle|\, v\right) = E^{(0)}_{u,v}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E^{(0)}_{u,v}(C_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (E^{(0)}(C_n)u \mid v)$$

である．ゆえに (10.93) が成り立つので (10.92) が成り立つ．

これより任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し，

$$\mathcal{C} \ni C \mapsto (E^{(0)}(C)v \mid v) \in [0, \infty) \tag{10.95}$$

は半集合代数 $\mathcal{C}$ 上の σ-加法的有限測度であるから Hopf の拡張定理 5.79 より $\mathcal{B}_X = \sigma(\mathcal{C})$ 上の有限測度に拡張できる．よって偏極恒等式 (10.4) より任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し複素数値 Borel 測度 $\mu_{u,v} : \mathcal{B}_X \to \mathbb{C}$ で，

$$\mu_{u,v}(C) = (E^{(0)}(C)u \mid v) \quad (\forall C \in \mathcal{C}) \tag{10.96}$$

を満たすものが存在する．そして単調族定理 5.70 より (10.96) を満たす複素数値 Borel 測度 $\mu_{u,v} : \mathcal{B}_X \to \mathbb{C}$ は唯一つである[*161]．この一意性より任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し，

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (u, v) \mapsto \mu_{u,v}(B) \in \mathbb{C} \tag{10.97}$$

は準双線型汎関数である．今, 任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し，

$$|\mu_{u,v}(B)| \leqslant \|u\|\|v\| \quad (\forall u, v \in \mathcal{H}) \tag{10.98}$$

が成り立つことを示す．X は第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間であるから定理 5.177 より任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し $\mu_{u,v} : \mathcal{B}_x \to \mathbb{C}$ は複素数値位相正則測度 (定義 5.181) である．よって $B \in \mathcal{B}_X$ を含む開集合の列 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$|\mu_{u,v}(U_n) - \mu_{u,v}(B)| = |\mu_{u,v}(U_n\backslash B)| \leqslant |\mu_{u,v}|(U_n\backslash B) = |\mu_{u,v}|(U_n) - |\mu_{u,v}|(B) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

($|\mu_{u,v}|$ は $\mu_{u,v}$ は全変動 (定義 5.110)) を満たすものが取れるので,

$$|\mu_{u,v}(B)| = \lim_{n\to\infty} |\mu_{u,v}(U_n)|$$

である．これより (10.98) を示すには, 任意の開集合 $U \subseteq X$ に対し，

$$|\mu_{u,v}(U)| \leqslant \|u\|\|v\| \quad (\forall u, v \in \mathcal{H}) \tag{10.99}$$

が成り立つことを示せばよい．補題 5.15 より X の開集合の加算基として $\mathcal{C}$ の元からなるものが取れる．よって U は $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ ($\mathcal{C}$ から生成される有限加法族) の非交叉列の合併で表せる．そして $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ の任意の元は $\mathcal{C}$ の有限非交叉列で表せる (命題 5.65) ので, 結局 U は $\mathcal{C}$ の非交叉列の合併で表せる．そこで $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ を満たす $\mathcal{C}$ の非交叉列とすると, (10.96) と $(E^{(0)}(C_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が射影作用素の直交族であることより，

$$\begin{aligned} |\mu_{u,v}(U)| &= \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_{u,v}(C_n)\right| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} (E^{(0)}(C_n)u \mid v)\right| = \left|\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} E^{(0)}(C_n)u \mid v\right)\right| \\ &\leqslant \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} E^{(0)}(C_n)u\right\| \|v\| \leqslant \|u\|\|v\| \quad (\forall u, v \in \mathcal{H}) \end{aligned}$$

となる．よって任意の開集合 $U \subseteq X$ に対し (10.99) が成り立つので, 任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し (10.98) が成り立つ．これより任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し (10.97) はノルムが 1 以下の有界準双線型汎関数であるから, 定理 3.49 より作用素ノルムが 1 以下の $E(B) \in B(\mathcal{H})$ で,

$$(E(B)u \mid v) = \mu_{u,v}(B) \quad (\forall u, v \in \mathcal{H}) \tag{10.100}$$

を満たすものが一意的に定まる．これにより $E : \mathcal{B}_X \ni B \mapsto E(B) \in B(\mathcal{H})$ を定義する．(10.100) と (10.96) より，

$$E(C) = E^{(0)}(C) \quad (\forall C \in \mathcal{C}) \tag{10.101}$$

であり, 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し，

$$\mathcal{B}_X \ni B \mapsto (E(B)u \mid v) = \mu_{u,v}(B) \in \mathbb{C}$$

は複素数値測度であるから, $E(B) \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ $(\forall B \in \mathcal{B}_X)$ が成り立つことを示せば E は求める射影値測度であると言える．任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し $\mu_{v,v}$ は (10.95) を Hopf の拡張定理によって拡張した非負値測度であるから,

$$(E(B)v \mid v) = \mu_{v,v}(B) \geqslant 0 \quad (\forall B \in \mathcal{B}_X, \forall v \in \mathcal{H})$$

である．よって,

$$E(B)^* = E(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_X)$$

[*161] 命題 5.65 より半集合代数 $\mathcal{C}$ から生成される X 上の有限加法族 $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ の有限非交叉列の合併で表せることに注意.

である. $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ の任意の元は $\mathcal{C}$ の有限非交叉列で表せる (命題 5.65) ので, (10.92) と (10.101) より $E(A) \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ $(\forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{C}))$ であり,

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) \ni A \mapsto E(A) \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

は有限加法的である. よって $A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ が $A \cap B = \varnothing$ ならば $E(A)E(B) = 0$ であり, $A \subseteq B$ ならば $E(A)E(B) = E(A)$ (命題 9.74) である. これより,

$$\begin{aligned} E(A)E(B) &= (E(A \cap B) + E(A \backslash B))\, E(B) = E(A \cap B)E(B) + E(A \backslash B)E(B) \\ &= E(A \cap B) \quad (\forall A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{C})) \end{aligned} \tag{10.102}$$

が成り立つ. 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ を取り固定する. 任意の $A \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ に対し,

$$\mathcal{B}_X \ni B \mapsto (E(A)E(B)u \mid v) = (E(B)u \mid E(A)v) = \mu_{u,E(A)v}(B) \in \mathbb{C}$$

と,

$$\mathcal{B}_X \ni B \mapsto (E(A \cap B)u \mid v) = \mu_{u,v}(A \cap B) \in \mathbb{C}$$

は複素数値測度であり, (10.102) よりこれらは $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 上で一致するので単調族定理 5.70 より $\mathcal{B}_X$ 上でも一致する. よって,

$$(E(A)E(B)u \mid v) = (E(A \cap B)u \mid v) \quad (\forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{C}), \forall B \in \mathcal{B}_X) \tag{10.103}$$

である. 任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し,

$$\mathcal{B}_X \ni A \mapsto (E(A)E(B)u \mid v) = \mu_{E(B)u,v}(A) \in \mathbb{C}$$

と,

$$\mathcal{B}_X \ni A \mapsto (E(A \cap B)u \mid v) = \mu_{u,v}(A \cap B) \in \mathbb{C}$$

は複素数値測度であり, (10.103) よりこれらは $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 上で一致するので単調族定理より $\mathcal{B}_X$ 上でも一致する. ゆえに任意の $u, v \in \mathcal{H}$, 任意の $A, B \in \mathcal{B}_X$ に対し,

$$(E(A)E(B)u \mid v) = (E(A \cap B)u \mid v)$$

が成り立つから, $E(A)E(B) = E(A \cap B)$ $(\forall A, B \in \mathcal{B}_X)$ が成り立つ. 特に $E(B)^2 = E(B)$ $(\forall B \in \mathcal{B}_X)$ であるから $E(B) \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ $(\forall B \in \mathcal{B}_X)$ である. ゆえに $E : \mathcal{B}_X \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ は求める射影値測度である. これで存在が言えた.
一意性を示す. $E, F : \mathcal{B}_X \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ が (10.91) を満たす射影値測度であるならば, 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$E_{u,v}(C) = F_{u,v}(C) \quad (\forall C \in \mathcal{C})$$

従って,

$$E_{u,v}(A) = F_{u,v}(A) \quad (\forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{C}))$$

であるから, 単調族定理より,

$$E_{u,v}(B) = F_{u,v}(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_X)$$

である. よって $E = F$ である. □

定義 10.101 (テンソル積射影値測度)**.** $\mathcal{H}_j$ を Hilbert 空間, X_j を第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間, $E_j : \mathcal{B}_{X_j} \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_j)$ を射影値測度とする $(j = 1, \cdots, N)$. 定理 10.100 より, 射影値測度

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_N : \mathcal{B}_{X_1 \times \cdots \times X_N} \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N)$$

で, 任意の $B_1 \in \mathcal{B}_{X_1}, \cdots, B_N \in \mathcal{B}_{X_N}$ に対し,

$$(E_1 \otimes \cdots \otimes E_N)(B_1 \times \cdots \times B_N) = E_1(B_1) \otimes \cdots \otimes E_N(B_N)$$

を満たすものが唯一つ存在する. $E_1 \otimes \cdots \otimes E_N$ を $E_1, \cdots, E_N$ のテンソル積射影値測度と言う. $E_1 \otimes \cdots \otimes E_N$ は $\bigotimes_{j=1}^N E_j$ とも表す.

定理 10.102 (掛け算作用素のテンソル積は掛け算作用素)**.** X_j を第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間, $\mu_j : \mathcal{B}_{X_j} \to [0, \infty]$ を位相正則測度とする $(j = 1, \cdots, N)$. 各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し $L^2(X_j, \mu_j)$ 上の掛け算作用素 (定義 10.81) を司る射影値測度を,

$$E_{\mu_j} : \mathcal{B}_{X_j} \to \mathcal{P}(L^2(X_j, \mu_j))$$

とおく. このとき,

$$L^2(X_1 \times \cdots \times X_N, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N) = \bigotimes_{j=1}^{N} L^2(X_j, \mu_j) \tag{10.104}$$

(定義 10.96 を参照) 上の掛け算作用素を司る射影値測度

$$E_{\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N} : \mathcal{B}_{X_1 \times \cdots \times X_N} \to \mathcal{P}(L^2(X_1 \times \cdots \times X_N, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N))$$

は, テンソル積射影値測度

$$E_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes E_{\mu_N} : \mathcal{B}_{X_1 \times \cdots \times X_N} \to \mathcal{P}\left(\bigotimes_{j=1}^{N} L^2(X_j, \mu_j)\right)$$

に等しい.

証明. 任意の $B_j \in \mathcal{B}_{X_j}$ $(j = 1, \cdots, N)$ を取り,

$$E_{\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N}(B_1 \times \cdots \times B_N) = E_{\mu_1}(B_1) \otimes \cdots \otimes E_{\mu_N}(B_N) \tag{10.105}$$

が成り立つことを示せばよい. 任意の $[f_j] \in L^2(X_j, \mu_j)$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対し,

$$\begin{aligned} &E_{\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_N}(B_1 \times \cdots \times B_N)([f_1] \otimes \cdots \otimes [f_N]) = [\chi_{B_1} f_1] \otimes \cdots \otimes [\chi_{B_N} f_N] \\ &= E_{\mu_1}(B_1)[f_1] \otimes \cdots \otimes E_{\mu_N}(B_N)[f_N] \\ &= (E_{\mu_1}(B_1) \otimes \cdots \otimes E_{\mu_N}(B_N))([f_1] \otimes \cdots \otimes [f_N]) \end{aligned}$$

である. よって,

$$\bigodot_{j=1}^{N} L^2(X_j, \mu_j) = \mathrm{span}\{[f_1] \otimes \cdots \otimes [f_N] : [f_j] \in L^2(X_j, \mu_j)\ (j = 1, \cdots, N)\}$$

の (10.104) における稠密性より (10.105) が成り立つ. □

定理 10.103 (テンソル積射影値測度による積分)**.** $\mathcal{H}_j$ を Hilbert 空間, X_j を第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間, $E_j : \mathcal{B}_{X_j} \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_j)$ を射影値測度とする $(j = 1, \cdots, N)$. このとき任意の Borel 関数 $f_j : X_j \to \mathbb{C}$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対し,

$$\begin{aligned} &\int_{X_1 \times \cdots \times X_N} f_1(x_1) \cdots f_N(x_N) d(E_1 \otimes \cdots \otimes E_N)(x_1, \cdots, x_N) \\ &= \left(\int_{X_1} f_1(x_1) dE_1(x_1)\right) \otimes \cdots \otimes \left(\int_{X_N} f_N(x_N) dE_N(x_N)\right) \end{aligned} \tag{10.106}$$

が成り立つ.

証明.

$$\mathcal{H} := \bigotimes_{j=1}^{N} \mathcal{H}_j, \quad X := X_1 \times \cdots \times X_N, \quad E := E_1 \otimes \cdots \otimes E_N : \mathcal{B}_X \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

とおく. 各 $f_j : X_j \to \mathbb{C}$ が Borel 単関数である場合に (10.106) が成り立つことは明らかである. また,

$$B(\mathcal{H}_1) \times \cdots \times B(\mathcal{H}_N) \ni (T_1, \cdots, T_N) \mapsto T_1 \otimes \cdots \otimes T_N \in B(\mathcal{H})$$

は有界多重線型写像であり (定理 10.99), 任意の有界 Borel 関数は Borel 単関数の列により一様近似できる (命題 5.129) ので, (10.106) は各 $f_j : X_j \to \mathbb{C}$ が有界 Borel 関数である場合も成り立つ. 各 $f_j : X_j \to \mathbb{C}$ が一般の Borel 関数である場合に (10.106) が成り立つことを示す. 各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ について有界 Borel 関数の列 $(f_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$ を,

$$f_{j,n} := f_j \chi_{(|f_j| \leqslant n)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

と定義する．任意の $v_j \in D_{E_j}(f_j)$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対し Lebesgue 優収束定理より，

$$\int_{X_j} f_j(x_j) dE_j(x_j) v_j = \lim_{n\to\infty} \int_{X_j} f_{j,n}(x_j) dE_j(x_j) v_j \quad (j = 1, \cdots, N)$$

であるから，

$$B_n := (|f_1| \leqslant n) \times \cdots \times (|f_n| \leqslant n) \in \mathcal{B}_X \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおけば，

$$\begin{aligned}
&\left\{ \left(\int_{X_1} f_1(x_1) dE_1(x_1) \right) \otimes \cdots \otimes \left(\int_{X_N} f_N(x_N) dE_N(x_N) \right) \right\} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) \\
&= \left(\int_{X_1} f_1(x_1) dE_1(x_1) \right) v_1 \otimes \cdots \otimes \left(\int_{X_N} f_N(x_N) dE_N(x_N) \right) v_N \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{X_1} f_{1,n}(x_1) dE_1(x_1) \right) v_1 \otimes \cdots \otimes \left(\int_{X_N} f_{N,n}(x_N) dE_N(x_N) \right) v_N \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\int_{X_1} f_{1,n}(x_1) dE_1(x_1) \right) \otimes \cdots \otimes \left(\int_{X_N} f_{N,n}(x_N) dE_N(x_N) \right) \right\} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X f_{1,n}(x_1) \cdots f_{N,n}(x_N) dE(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X f_1(x_1) \cdots f_N(x_N) dE(x_1, \cdots, x_N) E(B_n)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) \\
&= \int_X f_1(x_1) \cdots f_N(x_N) dE(x_1, \cdots, x_N)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N)
\end{aligned}$$

となる．ただし 4 番目の等号で有界 Borel 関数に対して (10.106) が成り立つことを用い，最後の等号で射影値測度による積分が閉線型作用素であることと $\lim_{n\to\infty} E(B_n)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ であることを用いた．よって，

$$\bigotimes_{j=1}^N \int_{X_j} f_j(x_j) dE_j(x_j) = \overline{\bigodot_{j=1}^N \int_{X_j} f_j(x_j) dE_j(x_j)} \subseteq \int_X f_1(x_1) \cdots f_N(x_N) dE(x_1, \cdots, x_N) \tag{10.107}$$

が成り立つ．逆の包含関係を示す．任意の $v \in D_E(f_1 \times \cdots \times f_N)$ を取る．Lebesgue 優収束定理より，

$$\begin{aligned}
&\left(\int_X f_1(x_1) \cdots f_N(x_N) dE(x_1, \cdots, x_N) \right) v \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_{1,n}(x_1) \cdots f_{N,n}(x_N) dE(x_1, \cdots, x_N) \right) v \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\bigotimes_{j=1}^N \int_{X_j} f_{j,n}(x_j) dE_j(x_j) \right) v
\end{aligned} \tag{10.108}$$

である．ただし 2 番目の等号で有界 Borel 関数に対して (10.106) が成り立つことを用いた．今，

$$v_m \in \bigodot_{j=1}^N \mathcal{H}_j \quad (\forall m \in \mathbb{N}), \quad \lim_{m\to\infty} \|v - v_m\| = 0$$

なる点列 $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ を取る．

$$\bigotimes_{j=1}^N \int_{X_j} f_{j,n}(x_j) dE_j(x_j) \in B(\mathcal{H}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \quad E(B_n) v_m \in \bigodot_{j=1}^N D_{E_j}(f_j) \quad (\forall n, m \in \mathbb{N})$$

であるから，

$$\begin{aligned}
&\left(\bigotimes_{j=1}^N \int_{X_j} f_{j,n}(x_j) dE_j(x_j) \right) v = \lim_{m\to\infty} \left(\bigodot_{j=1}^N \int_{X_j} f_{j,n}(x_j) dE_j(x_j) \right) v_m \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\bigodot_{j=1}^N \int_{X_j} f_j(x_j) dE_j(x_j) \right) E(B_n) v_m \quad (\forall n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

である. よって (10.108) より,

$$\left(\int_X f_1(x_1)\cdots f_N(x_N)dE(x_1,\cdots,x_N)\right)v = \lim_{n\to\infty}\left(\bigotimes_{j=1}^N \int_{X_j} f_{j,n}(x_j)dE_j(x_j)\right)v$$
$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left(\bigodot_{j=1}^N \int_{X_j} f_{j,n}(x_j)dE_j(x_j)\right)v_m = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left(\bigodot_{j=1}^N \int_{X_j} f_j(x_j)dE_j(x_j)\right)E(B_n)v_m \tag{10.109}$$

となる. また $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}E(B_n)v_m = v$ であるから, (10.109) より,

$$\left(\int_X f_1(x_1)\cdots f_N(x_N)dE(x_1,\cdots,x_N)\right)v = \left(\overline{\bigodot_{j=1}^N \int_{X_j} f_j(x_j)dE_j(x_j)}\right)v = \left(\bigotimes_{j=1}^N \int_X f_j(x_j)dE_j(x_j)\right)v$$

が成り立つ. ゆえに (10.107) の逆の包含関係が成り立つ. □

定理 10.104 (自己共役作用素のテンソル積と Borel 関数カルキュラス)**.** 各 $j\in\{1,\cdots,N\}$ に対し Hilbert 空間 $\mathcal{H}_j$ 上の自己共役作用素 T_j が与えられているとする. このとき,

$$T_1\otimes\cdots\otimes T_N$$

は $\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N$ 上の自己共役作用素であり,

$$\sigma(T_1\otimes\cdots\otimes T_N) = \overline{\{\lambda_1\cdots\lambda_N : \lambda_1\in\sigma(T_1),\cdots,\lambda_N\in\sigma(T_N)\}}$$

が成り立つ. また T_j のスペクトル測度 (10.63) を $E_{T_j}:\mathcal{B}_{\sigma(T_j)}\to\mathcal{P}(\mathcal{H}_j)$ $(j=1,\cdots,N)$ とすると, 任意の Borel 関数 $f_j:\sigma(T_j)\to\mathbb{C}$ $(j=1,\cdots,N)$ に対し,

$$f_1(T_1)\otimes\cdots\otimes f_N(T_N) = \int_{\sigma(T_1)\times\cdots\times\sigma(T_N)} f_1(\lambda_1)\cdots f_N(\lambda_N)d(E_{T_1}\otimes\cdots\otimes E_{T_N})(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$$

が成り立ち, 任意の Borel 関数 $f:\sigma(T_1\otimes\cdots\otimes T_N)\to\mathbb{C}$ に対し,

$$f(T_1\otimes\cdots\otimes T_N) = \int_{\sigma(T_1)\times\cdots\times\sigma(T_N)} f(\lambda_1\cdots\lambda_N)d(E_{T_1}\otimes\cdots\otimes E_{T_N})(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$$

が成り立つ. さらに連続関数 $f_j:\sigma(T_j)\to\mathbb{C}$ $(j=1,\cdots,N)$ に対し,

$$\sigma(f_1(T_1)\otimes\cdots\otimes f_N(T_N)) = \overline{\{f_1(\lambda_1)\cdots f_N(\lambda_N) : \lambda_1\in\sigma(T_1),\cdots,\lambda_N\in\sigma(T_N)\}}$$

が成り立ち, また連続関数 $f:\sigma(T_1\otimes\cdots\otimes T_N)\to\mathbb{C}$ に対し,

$$\sigma(f(T_1\otimes\cdots\otimes T_N)) = \overline{\{f(\lambda_1\cdots\lambda_N) : \lambda_1\in\sigma(T_1),\cdots,\lambda_N\in\sigma(T_N)\}}$$

が成り立つ.

証明. Borel 関数カルキュラスの定義 10.65 より任意の Borel 関数 $f_j:\sigma(T_j)\to\mathbb{C}$ $(j=1,\cdots,N)$ に対し,

$$f_j(T_j) = \int_{\sigma(T_j)} f_j(\lambda_j)dE_{T_j}(\lambda_j) \quad (j=1,\cdots,N)$$

であるから, テンソル積射影値測度

$$E_{T_1}\otimes\cdots\otimes E_{T_N}:\mathcal{B}_{\sigma(T_1)\times\cdots\times\sigma(T_N)}\to\mathcal{P}(\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N)$$

に対し, 定理 10.103 より,

$$f_1(T_1)\otimes\cdots\otimes f_N(T_N) = \int_{\sigma(T_1)\times\cdots\times\sigma(T_N)} f_1(\lambda_1)\cdots f_N(\lambda_N)d(E_{T_1}\otimes\cdots\otimes E_{T_N})(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$$

が成り立つ. 特に,

$$T_1 \otimes \cdots \otimes T_N = \int_{\sigma(T_1)\times\cdots\times\sigma(T_N)} \lambda_1 \cdots \lambda_N d(E_{T_1} \otimes \cdots \otimes E_{T_N})(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \tag{10.110}$$

であり, (10.110) の右辺の被積分関数は実数値であるので命題 10.53 の (2) より $T_1 \otimes \cdots \otimes T_N$ は $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ 上の自己共役作用素である. そして任意の Borel 関数 $f : \sigma(T_1 \otimes \cdots \otimes T_N) \to \mathbb{C}$ に対し (10.110) と命題 10.66 より,

$$f(T_1 \otimes \cdots \otimes T_N) = \int_{\sigma(T_1)\times\cdots\times\sigma(T_N)} f(\lambda_1 \cdots \lambda_N) d(E_{T_1} \otimes \cdots \otimes E_{T_N})(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$$

が成り立つ. $\sigma(T_1) \times \cdots \times \sigma(T_N)$ の任意の空でない開集合 U に対し,

$$U_1 \times \cdots \times U_N \subseteq U$$

を満たす空でない開集合 $U_j \subseteq \sigma(T_j)$ $(j = 1, \cdots, N)$ が取れる. 定理 10.68 の (4) より $E_{T_j}(U_j) > 0$ であるので定理 10.99 より,

$$\|E_{T_1}(U_1) \otimes \cdots \otimes E_{T_N}(U_N)\| = \|E_{T_1}(U_1)\| \cdots \|E_{T_N}(U_N)\| > 0$$

である. ゆえに,

$$(E_{T_1} \otimes \cdots \otimes E_{T_N})(U) \geqslant (E_{T_1} \otimes \cdots \otimes E_{T_N})(U_1 \times \cdots \times U_N) = E_{T_1}(U_1) \otimes \cdots \otimes E_{T_N}(U_N) > 0$$

である. よって系 10.58 より連続関数 $f_j : \sigma(T_j) \to \mathbb{C}$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対し,

$$\sigma(f_1(T_1) \otimes \cdots \otimes f_N(T_N)) = \overline{\{f_1(\lambda_1) \cdots f_N(\lambda_N) : \lambda_1 \in \sigma(T_1), \cdots, \lambda_N \in \sigma(T_N)\}}$$

が成り立つ. 特に,

$$\sigma(T_1 \otimes \cdots \otimes T_N) = \overline{\{\lambda_1 \cdots \lambda_N : \lambda_1 \in \sigma(T_1), \cdots, \lambda_N \in \sigma(T_N)\}}$$

が成り立つ. また系 10.58 より連続関数 $f : \sigma(T_1 \otimes \cdots \otimes T_N) \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\sigma(f(T_1 \otimes \cdots \otimes T_N)) = \overline{\{f(\lambda_1 \cdots \lambda_N) : \lambda_1 \in \sigma(T_1), \cdots, \lambda_N \in \sigma(T_N)\}}$$

が成り立つ. □

10.10 コンパクト作用素

定義 10.105 (有限階作用素)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. $T \in B(\mathcal{H})$ が有限階作用素であるとは,

$$\dim \mathrm{Ran}(T) < \infty$$

が成り立つことを言う. 有限階作用素全体を $B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})$ と表すこととする.

命題 10.106. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有限階作用素全体 $B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})$ は $B(\mathcal{H})$ の $*$-イデアル (定義 2.28) である.

証明. $B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})$ が $*$-演算で閉じていることのみ示す (それ以外は自明である). 任意の $T \in B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})$ を取る. $\mathrm{Ran}(T)$ は $\mathcal{H}$ の有限次元部分空間なので閉部分空間である (定理 3.25) から,

$$\mathcal{H} = \mathrm{Ran}(T) \oplus (\mathrm{Ran}(T))^{\perp} = \mathrm{Ran}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T^*)$$

と直交分解される. よって,

$$\mathrm{Ran}(T^*) = T^*(\mathcal{H}) = T^*(\mathrm{Ran}(T))$$

であるから $\mathrm{Ran}(T^*)$ は有限次元である. ゆえに $T^* \in B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})$ であるから $B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})$ は $*$-演算で閉じている. □

定義 10.107 (コンパクト作用素)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$\mathcal{H}$ 上の有限階作用素全体 $B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H}) \subseteq B(\mathcal{H})$ の作用素ノルム閉包を，

$$B_0(\mathcal{H}) := \overline{B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|}$$

と表し，$B_0(\mathcal{H})$ の元を $\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素と言う．命題 10.106 より $B_0(\mathcal{H})$ は C^*-環 $B(\mathcal{H})$ の閉 $*$-イデアルである．$B_0(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素環と言う．

命題 10.108. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．次は互いに同値である．

(1) $\mathcal{H}$ は有限次元である．
(2) コンパクト作用素環 $B_0(\mathcal{H})$ が $B(\mathcal{H})$ の単位元 1 (恒等作用素) を含む．

証明. (1) が成り立つならば $B(\mathcal{H}) = B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H}) \subseteq B_0(\mathcal{H}) \subseteq B(\mathcal{H})$ だから (2) が成り立つ．
(2) が成り立つとすると $\|1 - T\| < 1$ を満たす $T \in B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})$ が取れる．よって命題 9.2 より $T = 1 - (1 - T)$ は $B(\mathcal{H})$ の可逆元だから $1 = TT^{-1} \in B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})$ である．ゆえに $\mathcal{H} = \mathrm{Ran}(1)$ は有限次元なので (1) が成り立つ．□

定義 10.109 (Schatten 形式)**.** $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ を Hilbert 空間, $u \in \mathcal{H}, v \in \mathcal{K}$ とする．このとき $u \odot v \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ を，

$$u \odot v : \mathcal{K} \ni w \mapsto (w \mid v)u \in \mathcal{H}$$

と定義する．これを Schatten 形式と言う．

命題 10.110 (Schatten 形式の基本性質)**.** $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．Schatten 形式 (定義 10.109) に関して次が成り立つ．

(1) 任意の $u \in \mathcal{H}, v \in \mathcal{K}$ に対し $\|u \odot v\| = \|u\|\|v\|$.
(2) 任意の $u \in \mathcal{H}, v \in \mathcal{K}$ に対し $(u \odot v)^* = v \odot v$.
(3) $\mathcal{H} \times \mathcal{K} \ni (u, v) \mapsto u \odot v \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ は準双線型写像 (定義 3.45).
(4) 任意の $u \in \mathcal{H}, v \in \mathcal{K}, T \in B(\mathcal{H}), S \in B(\mathcal{K})$ に対し，

$$T(u \odot v) = (Tu) \odot v, \quad (u \odot v)S = u \odot (S^*v).$$

証明. 全て定義から直接的に示せる．□

命題 10.111 (Schatten 形式と射影作用素)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．

(1) 任意の単位ベクトル $e \in \mathcal{H}$ に対し $e \odot e \in B(\mathcal{H})$ は 1 次元部分空間 $\mathbb{C}e \subseteq \mathcal{H}$ の上への射影作用素 (定義 10.7) である．また $e_1, e_2 \in \mathcal{H}$ が互いに直交する単位ベクトルならば $e_1 \odot e_1$ と $e_2 \odot e_2$ は互いに直交する射影作用素である．
(2) $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ を $\{0\}$ でない閉部分空間, $P \in B(\mathcal{H})$ を $\mathcal{K}$ の上への射影作用素 (定義 10.7) とし，$\mathcal{K}$ の CONS を $\{e_j\}_{j \in J}$ とすると，

$$P = \sum_{j \in J} e_j \odot e_j$$

が成り立つ．ただし右辺は射影作用素の直交族 $(e_j \odot e_j)_{j \in J}$ の和 (定義 10.16) である．

証明. (1) は命題 10.110 の (2), (4) より自明である．(2) を示す．(1) より $(e_j \odot e_j)_{j \in J}$ は射影作用素の直交族である．そして $\{e_j\}_{j \in J}$ が $\mathcal{K}$ の CONS であることから定理 5.147 より任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し，

$$Pv = \sum_{j \in J}(Pv \mid e_j)e_j = \sum_{j \in J}(v \mid Pe_j)e_j = \sum_{j \in J}(v \mid e_j)e_j = \sum_{j \in J}(e_j \odot e_j)v = \left(\sum_{j \in J} e_j \odot e_j\right) v$$

が成り立つ ($\sum_{j \in J} e_j \odot e_j$ は SOT 収束すること (定義 10.16 を参照) に注意)．よって $P = \sum_{j \in J} e_j \odot e_j$ である．□

補題 10.112 (Hilbert 空間の単位ノルム閉球の弱コンパクト性)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．このとき単位ノルム閉球 $(\mathcal{H})_1 := \{v \in \mathcal{H} : \|v\| \leqslant 1\}$ は弱位相 (定義 3.74) に関してコンパクトである．

証明. $\mathcal{H}^*$ の単位ノルム閉球を $(\mathcal{H}^*)_1 = \{\varphi \in \mathcal{H}^* : \|\varphi\| \leqslant 1\}$ とする. Riesz の表現定理 3.44 より,

$$\mathcal{H} \ni v \mapsto (\cdot \mid v) \in \mathcal{H}^*, \tag{10.111}$$

$$(\mathcal{H})_1 \ni v \mapsto (\cdot \mid v) \in (\mathcal{H}^*)_1 \tag{10.112}$$

はそれぞれ全単射である. Banach-Alaoglu の定理 3.67 より $(\mathcal{H}^*)_1$ は弱 $*$-位相 (定義 3.66) に関してコンパクトであるから, $(\mathcal{H})_1$ が弱位相に関してコンパクトであることを示すには (10.112) が弱位相と弱 $*$-位相に関して同相写像であることを示せばよい. $(\mathcal{H})_1$ のネット $(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $v \in (\mathcal{H})_1$ を取る. 汎弱位相におけるネットの収束の特徴付け (命題 3.63 の (1)) と (10.111) の全射性より,

$$\begin{aligned} v_\lambda \to v \ \ (\text{w.r.t. 弱位相}) \ &\Leftrightarrow \ \varphi(v_\lambda) \to \varphi(v) \ \ (\forall \varphi \in \mathcal{H}^*) \ \Leftrightarrow \ (v_\lambda \mid u) \to (v \mid u) \ \ (\forall u \in \mathcal{H}) \\ &\Leftrightarrow \ (u \mid v_\lambda) \to (u \mid v) \ \ (\forall u \in \mathcal{H}) \ \Leftrightarrow \ (\cdot \mid v_\lambda) \to (\cdot \mid v) \ \ (\text{w.r.t. 弱 } *\text{-位相}) \end{aligned}$$

である. よってネットの収束による連続性の特徴付け (命題 1.50) より (10.111) は弱位相と弱 $*$-位相に関して同相写像である. □

補題 10.113 (有限階作用素の弱位相-ノルム位相連続性)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $T \in B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})$ とする. このとき $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は弱位相とノルム位相に関して連続である.

証明. 有限次元部分空間 $\mathrm{Ran}(T) \subseteq \mathcal{H}$ の CONS を $\{e_1, \cdots, e_N\}$ とおくと, 命題 10.111 の (2) より,

$$P := \sum_{j=1}^{N} e_j \odot e_j$$

は $\mathrm{Ran}(T)$ の上への射影作用素である. よって,

$$Tv = PTv = \sum_{j=1}^{N} (e_j \odot e_j) Tv = \sum_{j=1}^{N} (Tv \mid e_j) e_j = \sum_{j=1}^{N} (v \mid T^* e_j) e_j \ \ (\forall v \in \mathcal{H})$$

である. $\mathcal{H}$ のネット $(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $v \in \mathcal{H}$ に弱位相で収束するならば,

$$(v_\lambda \mid T^* e_j) \to (v \mid T^* e_j) \ \ (j = 1, \cdots, N)$$

であるから, ノルム位相で,

$$Tv_\lambda = \sum_{j=1}^{N} (v_\lambda \mid T^* e_j) e_j \to \sum_{j=1}^{N} (v \mid T^* e_j) e_j = Tv$$

が成り立つ. よってネットの収束による連続性の特徴付け (命題 1.50) より $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は弱位相とノルム位相に関して連続である. □

定理 10.114 (コンパクト作用素の特徴付け)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $\{e_j\}_{j\in J}$ を $\mathcal{H}$ の CONS, $\mathcal{F}_J$ を J の有限部分集合全体に集合の包含関係による順序を入れた有向集合とし,

$$P_F := \sum_{j\in F} e_j \odot e_j \ \ (\forall F \in \mathcal{F}_J)$$

として射影作用素からなる単調増加ネット $(P_F)_{F\in\mathcal{F}_J}$ を定義する. また $(\mathcal{H})_1 = \{v \in \mathcal{H} : \|v\| \leqslant 1\}$ とおく. このとき $T \in B(\mathcal{H})$ に対し次は互いに同値である.

(1) $T \in B_0(\mathcal{H})$.
(2) $(\mathcal{H})_1 \ni v \mapsto Tv \in \mathcal{H}$ は弱位相とノルム位相に関して連続である.
(3) $T((\mathcal{H})_1) \subseteq \mathcal{H}$ はノルム位相でコンパクトである.
(4) $T((\mathcal{H})_1) \subseteq \mathcal{H}$ はノルム位相でコンパクトな集合に含まれる.
(5) 作用素ノルムで $\lim_{F\to J} P_F T = T$ が成り立つ.

証明. (1) ⇒ (2) を示す. (1) が成り立つとして (2) が成り立つことを示す. ネットによる連続性の特徴付け (命題 1.50) より $(\mathcal{H})_1$ のネット $(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $v \in (\mathcal{H})_1$ に弱位相で収束するとして,

$$\|Tv_\lambda - Tv\| \to 0 \tag{10.113}$$

が成り立つことを示せばよい. 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対しコンパクト作用素の定義 10.107 より,

$$\|T - S\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

を満たす $S \in B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})$ が取れる. そして補題 10.113 より,

$$\|Sv_\lambda - Sv\| < \frac{\varepsilon}{3} \ \ (\forall \lambda \geqslant \lambda_0)$$

を満たす $\lambda_0 \in \Lambda$ が取れる. よって任意の $\lambda \geqslant \lambda_0$ に対し,

$$\|Tv_\lambda - Tv\| \leqslant \|Tv_\lambda - Sv_\lambda\| + \|Sv_\lambda - Sv\| + \|Sv - Tv\| \leqslant 2\|T - S\| + \|Sv_\lambda - Sv\| < \varepsilon$$

が成り立つので (10.113) が成り立つ.
(2) ⇒ (3) は補題 10.112 による. (3) ⇒ (4) は自明である.
(4) ⇒ (5) を示す. (4) が成り立ち, (5) が成り立たないと仮定して矛盾を導く. このときある $\varepsilon \in (0,\infty)$ が存在し, 任意の $F \in \mathcal{F}_J$ に対し $F' \in \mathcal{F}_J$ で,

$$F' \supseteq F, \ \ \|P_{F'}T - T\| > \varepsilon$$

を満たすものが取れる. よって作用素ノルムの定義より任意の $F \in \mathcal{F}_J$ に対し $v_F \in (\mathcal{H})_1$ で,

$$\|P_{F'}Tv_F - Tv_F\| > \varepsilon$$

を満たすものが取れる. $(Tv_F)_{F\in\mathcal{F}_J}$ はノルム位相でコンパクトな集合のネットであるから定理 1.47 よりノルム位相に関する堆積点 (定義 1.38) u を持つ.

$$\begin{aligned}\varepsilon &< \|P_{F'}Tv_F - Tv_F\| = \|(1 - P_{F'})Tv_F\| \leqslant \|(1 - P_{F'})(Tv_F - u)\| + \|(1 - P_{F'})u\| \\ &\leqslant \|Tv_F - u\| + \|u - P_{F'}u\| \ \ (\forall F \in \mathcal{F}_J)\end{aligned} \tag{10.114}$$

であり, $\{e_j\}_{j\in J}$ は $\mathcal{H}$ の CONS なので命題 10.111 より $\lim_{F\to J} P_F u = u$ であるから, 十分大きい $F_0 \in \mathcal{F}_J$ を取れば,

$$\|u - P_{F'}u\| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ (\forall F \in \mathcal{F}_J : F \supseteq F_0)$$

となる. よって (10.114) より,

$$\frac{\varepsilon}{2} < \|Tv_F - u\| \ \ (\forall F \in \mathcal{F}_J : F \supseteq F_0)$$

となる. しかしこれは u が $(Tv_F)_{F\in\mathcal{F}_J}$ のノルム位相に関する堆積点であることに矛盾する. ゆえに (4) ⇒ (5) が成り立つ.
(5) ⇒ (1) は任意の $F \in \mathcal{F}_J$ に対し $P_F T \in B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})$ であることによる. □

命題 10.115. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $T \in B_0(\mathcal{H})$ とする. このとき $\mathrm{Ran}(1 - T)$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間である.

証明. $\mathcal{H}$ の直交分解 $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(1 - T) \oplus (\mathrm{Ker}(1 - T))^\perp$ を考えれば,

$$\mathrm{Ran}(1 - T) = (1 - T)((\mathrm{Ker}(1 - T))^\perp)$$

である. これが $\mathcal{H}$ の閉部分空間であることを示すには, ある $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し,

$$\|(1 - T)v\| \geqslant \varepsilon\|v\| \ \ (\forall v \in (\mathrm{Ker}(1 - T))^\perp)$$

が成り立つことを示せば十分である. そこでこれが成り立たないと仮定して矛盾を導く. このとき $(\mathrm{Ker}(1 - T))^\perp$ の列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\|v_n\| = 1, \ \ \|(1 - T)v_n\| < \frac{1}{n} \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{10.115}$$

を満たすものが取れる．$Tv_n \in T((\mathcal{H})_1)$ であるから定理 10.114 より $(Tv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はノルム位相で収束する部分列 $(Tv_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ を持つ．そこでその収束点を，

$$u = \lim_{n\to\infty} Tv_{k(n)}$$

とおく．(10.115) より $\lim_{n\to\infty}(1-T)v_{k(n)} = 0$ であるから，

$$v_{k(n)} = (1-T)v_{k(n)} + Tv_{k(n)} \to u$$

である．よって，

$$u = \lim_{n\to\infty} v_{k(n)} \in (\mathrm{Ker}(1-T))^{\perp} \tag{10.116}$$

であり，

$$(1-T)u = \lim_{n\to\infty}(1-T)v_{k(n)} = 0$$

である．これより $u \in \mathrm{Ker}(1-T) \cap (\mathrm{Ker}(1-T))^{\perp} = \{0\}$ だから $u = 0$ である．しかし (10.115), (10.116) より，

$$\|u\| = \lim_{n\to\infty}\|v_{k(n)}\| = 1$$

であるから矛盾する．ゆえに $\mathrm{Ran}(1-T)$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間である． □

補題 10.116. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ を ONS とする．このとき弱位相で $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$ が成り立つ．

証明. 定理 5.147 より，

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(v \mid e_n)|^2 \leqslant \|v\|^2 < \infty \quad (\forall v \in \mathcal{H})$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} |(v \mid e_n)| = 0 \quad (\forall v \in \mathcal{H})$$

である．よって Riesz の表現定理 3.44 より弱位相で $\lim_{n\to} e_n = 0$ が成り立つ． □

定理 10.117 (Fredholm の択一性定理)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $T \in B_0(\mathcal{H})$ とする．このとき次は互いに同値である．

(1) $\mathrm{Ran}(1-T) = \mathcal{H}$.
(2) $\mathrm{Ker}(1-T) = \{0\}$.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す．(1) が成り立ち, (2) が成り立たないと仮定して矛盾を導く．

$$\mathcal{K}_n := \mathrm{Ker}((1-T)^n) \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+)$$

(ただし $(1-T)^0 = 1$) とおくと，

$$\mathcal{K}_n \supseteq \mathcal{K}_{n-1} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+)$$

であり, (2) が成り立たないと言う仮定より，

$$\mathcal{K}_1 = \mathrm{Ker}(1-T) \supsetneq \{0\} = \mathcal{K}_0$$

である．今, ある $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{K}_n \supsetneq \mathcal{K}_{n-1}$ が成り立つとすると, (1) が成り立つことから $(1-T)v \in \mathcal{K}_n \backslash \mathcal{K}_{n-1}$ を満たす $v \in \mathcal{K}_{n+1} \backslash \mathcal{K}_n$ が存在する．よって $\mathcal{K}_{n+1} \supsetneq \mathcal{K}_n$ が成り立つので, 帰納法より，

$$\mathcal{K}_n \supsetneq \mathcal{K}_{n-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{10.117}$$

が成り立つ．各 $n \in \mathbb{N}$ について Hilbert 空間 $\mathcal{K}_n$ の直交分解

$$\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n-1} \oplus (\mathcal{K}_n \cap \mathcal{K}_{n-1}^{\perp})$$

を考えると, (10.117) より, 単位ベクトル

$$e_n \in \mathcal{K}_n \cap \mathcal{K}_{n-1}^{\perp} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{10.118}$$

が取れる．このとき $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{H}$ の ONS であるから補題 10.116 より弱位相に関して $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$ が成り立つ．よって定理 10.114 より，

$$\lim_{n\to\infty} \|Te_n\| = 0 \tag{10.119}$$

が成り立つ．しかし (10.118) より，

$$(1-T)e_n \perp e_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから，

$$\|Te_n\|^2 = \|e_n - (1-T)e_n\|^2 = \|e_n\|^2 + \|(1-T)e_n\|^2 \geqslant 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

である．これは (10.119) と矛盾する．よって (1) ⇒ (2) が成り立つ．

(2) ⇒ (1) を示す．(2) が成り立つとする．$T^* \in B_0(\mathcal{H})$ だから命題 10.115 より $\mathrm{Ran}(1-T^*)$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間である．よって，

$$\mathrm{Ran}(1-T^*) = \overline{\mathrm{Ran}(1-T^*)} = (\mathrm{Ker}(1-T))^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$$

であるから上段の結果より $\mathrm{Ker}(1-T^*) = \{0\}$ であり，命題 10.115 より $\mathrm{Ran}(1-T)$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間であるから，

$$\mathrm{Ran}(1-T) = \overline{\mathrm{Ran}(1-T)} = (\mathrm{Ker}(1-T^*))^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$$

である． □

命題 10.118. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$T \in B_0(\mathcal{H})$ とする．このとき，

$$\dim \mathrm{Ker}(1-T) = \dim \mathrm{Ker}(1-T^*) < \infty$$

が成り立つ．

証明. まず $\dim \mathrm{Ker}(1-T) < \infty$ が成り立つことを示す．もし $\dim \mathrm{Ker}(1-T) = \infty$ ならば $\mathrm{Ker}(1-T)$ は可算無限 ONS$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を含む．補題 10.116 より $\mathcal{H}$ の弱位相に関して $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$ が成り立つので定理 10.114 より，

$$1 = \|e_n\| = \|Te_n + (1-T)e_n\| = \|Te_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となり矛盾を得る．よって $\dim \mathrm{Ker}(1-T) < \infty$ が成り立つ．$T^* \in B_0(\mathcal{H})$ だから $\dim \mathrm{Ker}(1-T^*) < \infty$ も成り立つ．

$\dim \mathrm{Ker}(1-T) = \dim \mathrm{Ker}(1-T^*)$ が成り立つことを示す．そこで $\dim \mathrm{Ker}(1-T) < \dim \mathrm{Ker}(1-T^*)$ であると仮定する．このとき等長線型作用素

$$V_1 : \mathrm{Ker}(1-T) \to \mathrm{Ker}(1-T^*)$$

で $\mathrm{Ran}(V_1) \subsetneq \mathrm{Ker}(1-T^*)$ を満たすものが取れる．そこで，

$$V : \mathcal{H} = \mathrm{Ker}(1-T) \oplus (\mathrm{Ker}(1-T))^\perp \ni v_1 + v_2 \mapsto V_1 v_1 \in \mathcal{H}$$

とおくと，V は部分等長作用素であり，

$$(\mathrm{Ker}(1-T))^\perp = \mathrm{Ker}(V), \tag{10.120}$$

$$\mathrm{Ran}(V) = \mathrm{Ran}(V_1) \subsetneq \mathrm{Ker}(1-T^*) = (\mathrm{Ran}(1-T))^\perp \tag{10.121}$$

である．任意の $v \in \mathrm{Ker}(1-(T+V))$ に対し (10.121) より，

$$(1-T)v = Vv \in \mathrm{Ran}(1-T) \cap \mathrm{Ran}(V) \subseteq \mathrm{Ran}(1-T) \cap (\mathrm{Ran}(1-T))^\perp = \{0\}$$

だから，(10.120) より，

$$v \in \mathrm{Ker}(1-T) \cap \mathrm{Ker}(V) = \mathrm{Ker}(1-T) \cap (\mathrm{Ker}(1-T))^\perp = \{0\}$$

である．よって，

$$\mathrm{Ker}(1-(T+V)) = \{0\} \tag{10.122}$$

が成り立つ. (10.121) と $\dim \mathrm{Ker}(1-T^*) < \infty$ より $V \in B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})$, 従って $T+V \in B_0(\mathcal{H})$ であるから, (10.122) と定理 10.117 より,

$$\mathcal{H} = \mathrm{Ran}(1-(T+V)) = \mathrm{Ran}(1-T) + \mathrm{Ran}(V)$$

が成り立つ. しかし (10.121) より,

$$\mathcal{H} = \mathrm{Ran}(1-T) \oplus \mathrm{Ran}(V) \subsetneq \mathrm{Ran}(1-T) \oplus (\mathrm{Ran}(1-T))^{\perp}$$

となるので矛盾する. ゆえに $\dim \mathrm{Ker}(1-T) \geqslant \dim \mathrm{Ker}(1-T^*)$ でなければならない. 全く対称的な議論により逆の不等式も成り立つので $\dim \mathrm{Ker}(1-T) = \dim \mathrm{Ker}(1-T^*)$ が成り立つ. □

命題 10.119 (互いに異なる固有値に対する固有ベクトルの線型独立性)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の線型作用素とし, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ を T の互いに異なる固有値とする. そしてそれぞれの固有値に対する固有ベクトル $v_j \in \mathrm{Ker}(\lambda_j - T)\backslash\{0\}$ $(j = 1, \cdots, n)$ を取る. このとき $v_1, \cdots, v_n$ は線型独立である.

証明. 帰納法よりある $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ に対し $v_1, \cdots, v_k$ が線型独立であるとして $v_1, \cdots, v_{k+1}$ も線型独立であることを示せばよい. そこで $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k+1} \in \mathbb{C}$ が,

$$\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j v_j = 0 \tag{10.123}$$

を満たすとする. (10.123) に T を作用させると,

$$\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \lambda_j v_j = 0 \tag{10.124}$$

となり, (10.123) に λ_{k+1} を掛ければ,

$$\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \lambda_{k+1} v_j = 0 \tag{10.125}$$

となる. そこで (10.124) から (10.125) を引けば,

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_{k+1}) v_j = 0$$

となり, $v_1, \cdots, v_k$ の線型独立性より,

$$\alpha_j(\lambda_j - \lambda_{k+1}) = 0 \ \ (j = 1, \cdots, k)$$

となる. $\lambda_j \neq \lambda_{k+1}$ $(j = 1, \cdots, k)$ であるから $\alpha_j = 0$ $(j = 1, \cdots, k)$ を得る. よって (10.123) より,

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j v_j = 0$$

だから $\alpha_{k+1} = 0$ である. ゆえに $v_1, \cdots, v_{k+1}$ は線型独立である. □

補題 10.120. X を第二可算公理を満たす位相空間とする. このとき X の孤立点 (定義 10.67) からなる任意の部分集合は可算集合である.

証明. $A \subseteq X$ が X の孤立点からなる部分集合であるとする. このとき,

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$$

であり $\{\{x\}\}_{x \in A}$ は A の開被覆である. 命題 1.68 より A は Lindlöf であるから A の開被覆 $\{\{x\}\}_{x \in A}$ から可算部分開被覆が取れる. よって A は可算集合である. □

定義 10.121 (固有値の重複度)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の線型作用素, $\lambda \in \mathbb{C}$ を T の固有値とする. このとき $\dim \mathrm{Ker}(\lambda - T)$ を T の固有値 λ の重複度と言う.

定理 10.122 (コンパクト作用素のスペクトル特性)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $T \in B_0(\mathcal{H})$ とする. このとき,

(1) 任意の $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ に対し λ は T の重複度有限の固有値であり, $\overline{\lambda}$ は T^* の重複度有限の固有値である. そしてこれらの重複度は一致する.

(2) 任意の $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ に対し λ は $\sigma(T)$ の孤立点である. そして $\sigma(T)$ は可算集合である.

(3) T が正規作用素であるとし, $E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を T のスペクトル測度とする. そして任意の $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ に対し λ の重複度を $n(\lambda) \in \mathbb{N}$ とおき, $\mathrm{Ker}(\lambda - T)$ の CONS を $\{e_{\lambda,1}, \cdots, e_{\lambda,n(\lambda)}\}$ とする. このとき,

$$1 = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} E_T(\{\lambda\}),\ \ E_T(\{\lambda\}) = \sum_{j=1}^{n(\lambda)} e_{\lambda,j} \odot e_{\lambda,j}\ \ (\forall\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\})$$

が成り立ち, T の固有ベクトルからなる $\mathcal{H}$ の CONS が存在する. そして,

$$T = \sum_{\lambda\in\sigma(T)\backslash\{0\}} \lambda \sum_{j=1}^{n(\lambda)} e_{\lambda,j} \odot e_{\lambda,j}$$

が成り立つ.

証明. (1) 任意の $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ に対し $\lambda^{-1}T \in B_0(\mathcal{H})$ であり,

$$\mathrm{Ran}(\lambda - T) = \mathrm{Ran}(1 - \lambda^{-1}T),\ \ \mathrm{Ker}(\lambda - T) = \mathrm{Ker}(1 - \lambda^{-1}T)$$

であるから, 定理 10.117 よりもし $\mathrm{Ker}(\lambda - T) = \{0\}$ ならば $\mathrm{Ran}(\lambda - T) = \mathcal{H}$ となり $\lambda \in \sigma(T)$ であることに反する. よって $\mathrm{Ker}(\lambda - T) \neq \{0\}$ であるから λ は T の固有値である. そして命題 10.118 より,

$$\dim \mathrm{Ker}(\lambda - T) = \dim \mathrm{Ker}(1 - \lambda^{-1}T) = \dim \mathrm{Ker}(1 - \overline{\lambda}^{-1}T^*) = \dim \mathrm{Ker}(\overline{\lambda} - T^*) < \infty$$

であるから $\overline{\lambda}$ は T^* の固有値であり, T の固有値 λ, T^* の固有値 $\overline{\lambda}$ の重複度は一致し有限である.

(2) 任意の $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ を取り, λ が $\sigma(T)$ の孤立点ではないと仮定して矛盾を導く. このとき孤立点の定義 10.67 より $\sigma(T)$ の点列 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$0 < |\lambda_{n+1} - \lambda| < |\lambda_n - \lambda| < |\lambda|, \ \frac{1}{n}\ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{10.126}$$

を満たすものが取れる. (1) より各 $n \in \mathbb{N}$ に対し λ_n は T の固有値であるから固有ベクトル $v_n \in \mathrm{Ker}(\lambda_n - T)\backslash\{0\}$ が取れる. また $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は互いに異なるので命題 10.119 より $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は線型独立であり, Schmidt の直交化 (5.151) より ONS$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_n\} = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\}\ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たすものが取れる. このとき,

$$\lambda_n e_n - Te_n \in \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_{n-1}\} = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}\ \ (\forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant 2)$$

であるから $\lambda_n e_n - Te_n$ と $\lambda_n e_n$ は互いに直交する. よって,

$$\|Te_n\|^2 = \|\lambda_n e_n - (\lambda_n e_n - Te_n)\|^2 = |\lambda_n|^2 + \|\lambda_n e_n - Te_n\|^2 \geqslant |\lambda_n|^2\ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{10.127}$$

となる. ここで $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は ONS なので補題 10.116 より弱位相で $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$ であるから, 定理 10.114 より,

$$\lim_{n\to\infty} \|Te_n\| = 0$$

となる. ゆえに (10.127) より,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$$

となるが, (10.126) より,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$$

であるから $\lambda = 0$ が結論され矛盾する. よって任意の $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ に対し λ は $\sigma(T)$ の孤立点である. よって補題 10.120 より $\sigma(T)\backslash\{0\}$ は可算集合なので, $\sigma(T)$ は可算集合である.

(3) T のスペクトル測度を $E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ とする. (2) より $\sigma(T)$ は可算集合であるから,

$$1 = E_T(\sigma(T)) = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} E_T(\{\lambda\})$$

である. 定理 10.68 の (3), (5) より,

$$\mathrm{Ran}\, E_T(\{\lambda\}) = \mathrm{Ker}(\lambda - T) \quad (\forall \lambda \in \sigma(T))$$

であるから, 命題 10.111 より,

$$E_T(\{\lambda\}) = \sum_{j=1}^{n(\lambda)} e_{\lambda,j} \odot e_{\lambda,j} \quad (\forall \lambda \in \sigma(T) \backslash \{0\})$$

である. よって,

$$1 = E_T(\{0\}) + \sum_{\lambda \in \sigma(T) \backslash \{0\}} E_T(\{\lambda\}) = E_T(\{0\}) + \sum_{\lambda \in \sigma(T) \backslash \{0\}} \sum_{j=1}^{n(\lambda)} e_{\lambda,j} \odot e_{\lambda,j} \tag{10.128}$$

が成り立ち,

$$T = TE_T(\{0\}) + \sum_{\lambda \in \sigma(T) \backslash \{0\}} TE_T(\{\lambda\}) = \sum_{\lambda \in \sigma(T) \backslash \{0\}} \lambda E_T(\{\lambda\}) = \sum_{\lambda \in \sigma(T) \backslash \{0\}} \lambda \sum_{j=1}^{n(\lambda)} e_{\lambda,j} \odot e_{\lambda,j}$$

が成り立つ. $E_T(\{0\}) = 0$ (すなわち $\mathrm{Ker}(T) = E_T(\{0\}) = \{0\}$) の場合, (10.128) より,

$$1 = \sum_{\lambda \in \sigma(T) \backslash \{0\}} \sum_{j=1}^{n(\lambda)} e_{\lambda,j} \odot e_{\lambda,j}$$

であるから, $\{e_{\lambda,j} : \lambda \in \sigma(T) \backslash \{0\}, j = 1, \cdots, n(\lambda)\}$ は T の固有ベクトルからなる $\mathcal{H}$ の CONS である. また $E_T(\{0\}) > 0$ の場合, $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ran}\, E_T(\{0\}) \neq \{0\}$ だから 0 は T の固有値であり, $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ran}\, E_T(\{0\})$ の CONS を $\{e_{0,j} : j \in J_0\}$ とおけば, 命題 10.111 より,

$$E_T(\{0\}) = \sum_{j \in J_0} e_{0,j} \odot e_{0,j}$$

である. よって (10.128) より,

$$1 = \sum_{j \in J_0} e_{0,j} \odot e_{0,j} + \sum_{\lambda \in \sigma(T) \backslash \{0\}} \sum_{j=1}^{n(\lambda)} e_{\lambda,j} \odot e_{\lambda,j}$$

であるから, $\{e_{0,j} : j \in J_0\} \cup \{e_{\lambda,j} : \lambda \in \sigma(T) \backslash \{0\}, j = 1, \cdots, n(\lambda)\}$ は T の固有ベクトルからなる $\mathcal{H}$ の CONS である.

□

10.11 自己共役作用素の離散スペクトルと真性スペクトル, min-max 原理, 加藤-Rellich の定理

定義 10.123 (自己共役作用素の離散固有値, 離散スペクトル, 真性スペクトル)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. $\lambda \in \sigma(T)$ が $\sigma(T)$ の孤立点*162であり, 重複度が有限, すなわち,

$$\dim \mathrm{Ker}(\lambda - T) = \dim \mathrm{Ran}\, E_T(\{\lambda\}) < \infty$$

*162 従って命題 10.68 の (5) より λ は T の固有値である.

であるとき, λ を T の離散固有値と言う. そして T の離散固有値全体を,

$$\sigma_{\mathrm{d}}(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \text{ は } T \text{ の離散固有値 }\}$$

と表し, これを T の離散スペクトルと言う. また,

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(T) := \sigma(T) \backslash \sigma_{\mathrm{d}}(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \text{ は } \sigma(T) \text{ の非孤立点であるか, 重複度無限の孤立点 }\}$$

を T の真性スペクトルと言う.

定理 10.124 (自己共役作用素の真性スペクトルの元の特徴付け)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし, $E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を T のスペクトル測度とする. このとき $\lambda \in \sigma(T)$ に対し次は互いに同値である.

(1) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T)$.
(2) $D(T)$ の単位ベクトルの列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty}\|(\lambda - T)u_n\| = 0$ かつ $\mathcal{H}$ の弱位相 (定義 3.74) で $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ を満たすものが存在する.
(3) λ を含む $\sigma(T)$ の任意の開集合 U に対し $\dim \mathrm{Ran}\, E_T(U) = \infty$ である.

証明. 任意の $t \in \sigma(T)$ と $\delta \in (0,\infty)$ に対し $\sigma(T)$ における中心 t, 半径 δ の開球を,

$$B_{\sigma(T)}(t,\delta) := \{s \in \sigma(T) : |s - t| < \delta\}$$

と表す. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. もし λ が $\sigma(T)$ の孤立点ならば $\dim \mathrm{Ker}(\lambda - T) = \infty$ なので可算無限 ONS$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Ker}(\lambda - T)$ が存在する. このとき補題 10.116 より $\mathcal{H}$ の弱位相で $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$ であり, $(\lambda - T)e_n = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であるから (2) が成り立つ. λ が $\sigma(T)$ の孤立点ではないとする. すると孤立点の定義 10.67 より $\sigma(T)$ の点列 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$0 < |\lambda_{n+1} - \lambda| < \frac{1}{3}|\lambda_n - \lambda| \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{10.129}$$

なるものが取れる.

$$\varepsilon_n := \frac{1}{3}|\lambda_n - \lambda| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおく. このとき,

$$B_{\sigma(T)}(\lambda_n, \varepsilon_n) \cap B_{\sigma(T)}(\lambda_m, \varepsilon_m) = \varnothing \quad (\forall n, m \in \mathbb{N} : n \neq m) \tag{10.130}$$

が成り立つ. 実際 $n < m$ で, $t \in B_{\sigma(T)}(\lambda_n, \varepsilon_n) \cap B_{\sigma(T)}(\lambda_m, \varepsilon_m)$ が存在するとすると,

$$2\varepsilon_n > |t - \lambda_n| + |t - \lambda_m| \geqslant |\lambda_n - \lambda_m| \geqslant |\lambda_n - \lambda| - |\lambda_m - \lambda| > |\lambda_n - \lambda| - \varepsilon_n = 2\varepsilon_n$$

となり矛盾する. よって (10.130) が成り立つ. 命題 10.68 の (4) より単位ベクトル

$$e_n \in \mathrm{Ran}\, E_T(B_{\sigma(T)}(\lambda_n, \varepsilon_n)) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が取れて, (10.130) より $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は ONS なので補題 10.116 より $\mathcal{H}$ の弱位相で $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$ である. そして (10.129) より,

$$\begin{aligned}
\|(\lambda - T)e_n\| &\leqslant \|(\lambda - T)E_T(B_{\sigma(T)}(\lambda_n, \varepsilon_n))\| \leqslant \sup_{t \in B_{\sigma(T)}(\lambda_n, \varepsilon_n)} |\lambda - t| \leqslant |\lambda - \lambda_n| + \varepsilon_n \\
&= \frac{4}{3}|\lambda - \lambda_n| < \frac{4}{3^n}|\lambda - \lambda_1| \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

である. よって (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (3) を示す. (2) が成り立つとし, (2) の条件を満たす単位ベクトルの列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取る. 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し,

$$\begin{aligned}
\|(\lambda - T)u_n\|^2 &= \int_{\sigma(T)} |\lambda - t|^2 dE_{T,u_n,u_n}(t) \geqslant \int_{\sigma(T)\backslash B_{\sigma(T)}(\lambda,\varepsilon)} |\lambda - t|^2 dE_{T,u_n,u_n}(t) \\
&\geqslant \varepsilon^2 \left\| E_T\left(\sigma(T)\backslash B_{\sigma(T)}(\lambda,\varepsilon)\right) u_n \right\|^2 \\
&= \varepsilon^2 \left\| u_n - E_T\left(B_{\sigma(T)}(\lambda,\varepsilon)\right) u_n \right\|^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

であるから, $\lim_{n\to\infty}\|(\lambda-T)u_n\|=0$ より,

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-E_T\left(B_{\sigma(T)}(\lambda,\varepsilon)\right)u_n\|=0 \quad (\forall\varepsilon\in(0,\infty)) \tag{10.131}$$

である. もしある $\varepsilon_0\in(0,\infty)$ に対し $\dim\operatorname{Ran}E_T\left(B_{\sigma(T)}(\lambda,\varepsilon_0)\right)<\infty$ が成り立つならば, $E_T\left(B_{\sigma(T)}(\lambda,\varepsilon_0)\right)$ は有限階作用素なので, $\mathcal{H}$ の弱位相で $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ であることと補題 10.113 より,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|E_T\left(B_{\sigma(T)}(\lambda,\varepsilon_0)\right)u_n\right\|=0$$

が成り立つ. これを (10.131) と合わせると,

$$1=\|u_n\|\leqslant\|u_n-E_T\left(B_{\sigma(T)}(\lambda,\varepsilon_0)\right)u_n\|+\left\|E_T\left(B_{\sigma(T)}(\lambda,\varepsilon_0)\right)u_n\right\|\to 0 \quad (n\to\infty)$$

となり矛盾する. よって任意の $\varepsilon\in(0,\infty)$ に対し $\dim\operatorname{Ran}E_T\left(B_{\sigma(T)}(\lambda,\varepsilon)\right)=\infty$ であるから (3) が成り立つ.
(3) $\Rightarrow$ (1) は離散固有値の定義 10.123 より自明である. □

定義 10.125 (純粋に離散的なスペクトルを持つ自己共役作用素)**.** T を Hilbert 空間上の自己共役作用素とする. T のスペクトル $\sigma(T)$ が T の離散スペクトル $\sigma_{\mathrm{d}}(T)$ (定義 10.123) と一致するとき, T のスペクトルは純粋に離散的であると言う.

命題 10.126. T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素で純粋に離散的なスペクトルを持つとする. このとき各 $\lambda\in\sigma(T)=\sigma_{\mathrm{d}}(T)$ に対し $\operatorname{Ker}(\lambda-T)$ の CONS を $\{e_{\lambda,1},\cdots,e_{\lambda,n(\lambda)}\}$ とおけば,

$$1=\sum_{\lambda\in\sigma(T)}\sum_{j=1}^{n(\lambda)}e_{\lambda,j}\odot e_{\lambda,j}$$

が成り立つ. すなわち $\{e_{\lambda,j}:\lambda\in\sigma(T),j=1,\cdots,n(\lambda)\}$ は $\mathcal{H}$ の CONS である.

証明. $E_T:\mathcal{B}_{\sigma(T)}\to\mathcal{P}(\mathcal{H})$ を T のスペクトル測度とする. $\sigma(T)$ は孤立点のみからなるので補題 10.120 より $\sigma(T)$ は可算集合である. よって,

$$1=E_T(\sigma(T))=\sum_{\lambda\in\sigma(T)}E_T(\{\lambda\})$$

が成り立つ. そして定理 10.68 の (3), (5) より,

$$\operatorname{Ran}E_T(\{\lambda\})=\operatorname{Ker}(\lambda-T) \quad (\forall\lambda\in\sigma(T))$$

であるから命題 10.111 より,

$$E_T(\{\lambda\})=\sum_{j=1}^{n(\lambda)}e_{\lambda,j}\odot e_{\lambda,j} \quad (\forall\lambda\in\sigma(T))$$

である. よって,

$$1=\sum_{\lambda\in\sigma(T)}E_T(\{\lambda\})=\sum_{\lambda\in\sigma(T)}\sum_{j=1}^{n(\lambda)}e_{\lambda,j}\odot e_{\lambda,j}$$

が成り立つ. □

命題 10.127 (自己共役作用素のスペクトルが純粋に離散的であるための十分条件)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする.

(1) ある $\lambda_0\in\rho(T)$ に対し $(\lambda_0-T)^{-1}\in B_0(\mathcal{H})$ ならば T のスペクトルは純粋に離散的である.
(2) ある $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し $e^{\alpha T}\in B_0(\mathcal{H})$ ならば T のスペクトルは純粋に離散的である.

証明. (1) $\lambda\in\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ が存在すると仮定し矛盾を導く. このとき定理 10.124 より $D(T)$ の単位ベクトルの列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty}\|(\lambda-T)u_n\|=0$ かつ $\mathcal{H}$ の弱位相で $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ を満たすものが取れる. $(\lambda_0-T)^{-1}\in B_0(\mathcal{H})$ であるから定理 10.114 より,

$$\lim_{n\to\infty}\|(\lambda_0-T)^{-1}(\lambda-T)u_n\|=0,\quad \lim_{n\to\infty}\|(\lambda_0-T)^{-1}u_n\|=0 \tag{10.132}$$

である．ここで,

$$(\lambda_0 - T)u_n = (\lambda_0 - \lambda)u_n + (\lambda - T)u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから,

$$u_n = (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}u_n + (\lambda_0 - T)^{-1}(\lambda - T)u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

である．よって (10.132) より,

$$1 = \|u_n\| \leqslant |\lambda_0 - \lambda|\|(\lambda_0 - T)^{-1}u_n\| + \|(\lambda_0 - T)^{-1}(\lambda - T)u_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となり矛盾する．ゆえに $\sigma_{\mathrm{ess}}(T) = \varnothing$ なので $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{d}}(T)$ である．

(2) 任意の $\lambda \in \sigma(T)$ を取る．定理 10.68 の (6) より,

$$e^{\alpha\lambda} \in \sigma\left(e^{\alpha T}\right) \backslash \{0\}$$

であり $e^{\alpha T} \in B_0(\mathcal{H})$ であるから, 定理 10.122 の (2) より $e^{\alpha\lambda}$ は $\sigma(e^{\alpha T})$ の孤立点である．よって十分小さい $\varepsilon \in (0, \infty)$ を取れば,

$$\lambda' \in \sigma(T),\ |\lambda' - \lambda| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad e^{\alpha\lambda'} = e^{\alpha\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda' = \lambda$$

となるので λ は $\sigma(T)$ の孤立点である．$E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を T のスペクトル測度とする．定理 10.68 の (3) より,

$$\mathrm{Ker}(\lambda - T) = \mathrm{Ran}\, E_T(\{\lambda\}) = \mathrm{Ran}\, E_T(\{t \in \sigma(T) : e^{\alpha\lambda} - e^{\alpha t} = 0\}) = \mathrm{Ker}\left(e^{\alpha\lambda} - e^{\alpha T}\right)$$

であるから, 定理 10.122 の (1) より,

$$\dim \mathrm{Ker}(\lambda - T) = \dim \mathrm{Ker}\left(e^{\alpha\lambda} - e^{\alpha T}\right) < \infty$$

である．よって λ は T の離散固有値である．ゆえに $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{d}}(T)$ である．

□

命題 10.128 (有限次元の場合の min-max 原理)**.** $\mathcal{H}$ を有限次元 Hilbert 空間, $N = \dim(\mathcal{H})$ とし, T を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする．このとき T の固有値を下から重複度を込めて並べたものを $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ (重複度だけ同じ値が続く) とおくと,

$$\lambda_1 = \inf\{(Tu \mid u) : u \in \mathcal{H}, \|u\| = 1\},$$

$$\lambda_n = \sup_{v_1, \cdots, v_{n-1} \in \mathcal{H}} \inf\{(Tu \mid u) : u \in \{v_1, \cdots, v_{n-1}\}^{\perp}, \|u\| = 1\} \quad (n = 2, \cdots, N)$$

が成り立つ．

証明.

$$\mu_1(T) := \inf\{(Tu \mid u) : u \in \mathcal{H}, \|u\| = 1\},$$

$$\mu_n(T) := \sup_{v_1, \cdots, v_{n-1} \in \mathcal{H}} \inf\{(Tu \mid u) : u \in \{v_1, \cdots, v_{n-1}\}^{\perp}, \|u\| = 1\} \quad (n = 2, \cdots, N)$$

とおく．定理 10.122 より T の固有ベクトルからなる $\mathcal{H}$ の CONS $(e_1, \cdots, e_N)$ で,

$$Te_j = \lambda_j e_j \quad (j = 1, \cdots, N)$$

なるものが取れる．

$$\lambda_1 = (Te_1 \mid e_1) \geqslant \mu_1(T)$$

であり, 任意の単位ベクトル

$$u = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j \in \mathcal{H}$$

に対し,

$$(Tu \mid u) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j |\alpha_j|^2 \geqslant \lambda_1 \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j| = \lambda_1 \|u\| = \lambda_1$$

であるから $\mu_1(T) \geqslant \lambda_1$, よって $\lambda_1 = \mu_1(T)$ である. 任意の $n \in \{2, \cdots, N\}$ を取る. 任意の単位ベクトル

$$u = \sum_{j=n}^{N} \alpha_j e_j \in \{e_1, \cdots, e_{n-1}\}^{\perp}$$

に対し,

$$(Tu \mid u) = \sum_{j=n}^{N} \lambda_j |\alpha_j|^2 \geqslant \lambda_n \sum_{j=n}^{N} |\alpha_j|^2 \geqslant \lambda_n \|u\| = \lambda_n$$

であるから $\mu_n(T) \geqslant \lambda_n$ である. また任意の $v_1, \cdots, v_{n-1} \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\dim(\mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_{n-1}, e_{n+1}, \cdots, e_N\}) \leqslant N - 1 < \dim(\mathcal{H})$$

であるから単位ベクトル

$$u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \in \{v_1, \cdots, v_{N-1}, e_{n+1}, \cdots, e_N\}^{\perp}$$

が取れ,

$$(Tu \mid u) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\alpha_j|^2 \leqslant \lambda_n \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 = \lambda_n \|u\| = \lambda_n$$

であるから $\mu_n(T) \leqslant \lambda_n$, よって $\lambda_n = \mu_n(T)$ である. □

定義 10.129 (下に有界な対称作用素)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする.

$$\inf\{(Tu \mid u) : u \in D(T), \|u\| = 1\} > -\infty$$

であるとき T は下に有界であると言う.

命題 10.130. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. このとき次は互いに同値である.

(1) T は下に有界である.
(2) T のスペクトル $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ は下に有界である.

また (1), (2) が成り立つとき,

$$\inf\{(Tu \mid u) : u \in D(T), \|u\| = 1\} = \min(\sigma(T))$$

が成り立つ.

証明. $E : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を T のスペクトル測度とする. (2) が成り立つならば $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ は閉集合であることから最小値 $\min(\sigma(T)) \in \mathbb{R}$ が存在し, 任意の単位ベクトル $u \in D(T)$ に対し,

$$(Tu \mid u) = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_{u,u}(\lambda) \geqslant \min(\sigma(T)) E_{T,u,u}(\sigma(T)) = \min(\sigma(T))$$

である. よって (1) が成り立ち,

$$\inf\{(Tu \mid u) : u \in D(T), \|u\| = 1\} \geqslant \min(\sigma(T)) \tag{10.133}$$

である. 逆に (1) が成り立つとし,

$$\lambda_0 := \inf\{(Tu \mid u) : u \in D(T), \|u\| = 1\} > -\infty$$

とおけば, 任意の単位ベクトル $u \in D(T)$ に対し,

$$((T - \lambda_0)u \mid u) = (Tu \mid u) - \lambda_0 \geqslant 0$$

であるから $T-\lambda_0$ は非負自己共役作用素である (命題 10.71). よって定理 10.68 の (6) より,

$$\{\lambda-\lambda_0 : \lambda \in \sigma(T)\} = \sigma(T-\lambda_0) \subseteq [0,\infty)$$

であるから (2) が成り立ち,

$$\min(\sigma(T)) \geqslant \lambda_0 = \inf\{(Tu \mid u) : u \in D(T), \|u\| = 1\} \tag{10.134}$$

である. ゆえに (1) ⇔ (2) であり, (10.133), (10.134) より,

$$\min(\sigma(T)) = \inf\{(Tu \mid u) : u \in D(T), \|u\| = 1\}$$

が成り立つ. □

命題 10.131. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $D \subseteq \mathcal{H}$ を部分空間とし, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\dim(D) > n$ であるとする. このとき任意の n 個の $v_1, \cdots, v_n \in \mathcal{H}$ に対し,

$$D \cap \{v_1, \cdots, v_n\}^{\perp} \neq \{0\}$$

が成り立つ.

証明. $\mathcal{H}$ の部分空間 $\operatorname{span}\{v_1, \cdots, v_n\}$ の上への射影作用素を $P \in B(\mathcal{H})$ とおく. もし,

$$D \ni v \mapsto Pv \in \operatorname{span}\{v_1, \cdots, v_n\} \tag{10.135}$$

が単射ならば $\dim(D) \leqslant \dim \operatorname{span}\{v_1, \cdots, v_n\} \leqslant n$ となるので (10.135) は単射ではない. よって $v \in D\backslash\{0\}$ で $Pv = 0$ を満たすものが存在する. $Pv = 0$ は $v \in \{v_1, \cdots, v_n\}^{\perp}$ であることと同値であるので,

$$v \in \left(D \cap \{v_1, \cdots, v_n\}^{\perp}\right) \backslash \{0\}$$

である. □

定義 10.132 (下に有界な自己共役作用素の特性レベル)**.** $\mathcal{H}$ を無限次元 Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の下に有界な自己共役作用素 (定義 10.129) とする.

$$\mu_1(T) := \inf\{(Tu \mid u) : u \in D(T), \|u\| = 1\} = \min(\sigma(T))$$

(命題 10.130 を参照) とおき, 2 以上の任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\mu_n(T) := \sup_{v_1, \cdots, v_{n-1} \in \mathcal{H}} \inf\{(Tu \mid u) : u \in D(T) \cap \{v_1, \cdots, v_{n-1}\}^{\perp}, \|u\| = 1\}$$

(命題 10.131 を参照) とおく. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mu_n(T)$ を T の n 番目の特性レベルと言う.

補題 10.133. $\mathcal{H}$ を無限次元 Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の下に有界な自己共役作用素, $(\mu_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ を T の特性レベル, $E : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を T のスペクトル測度とする. このとき,

(1) $(\mu_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加列である.

(2) $\alpha \in \mathbb{R}$ と $n \in \mathbb{N}$ が $\alpha < \mu_n(T)$ を満たすならば,

$$\dim \operatorname{Ran}(E((-\infty, \alpha] \cap \sigma(T))) \leqslant n-1$$

が成り立つ.

(3) $\alpha \in \mathbb{R}$ と $n \in \mathbb{N}$ が $\mu_n(T) < \alpha$ を満たすならば,

$$\dim \operatorname{Ran}(E((-\infty, \alpha] \cap \sigma(T))) \geqslant n$$

が成り立つ.

(4) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mu_n(T) < \infty$ である.

(5) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mu_n(T) \in \sigma(T)$ である.

証明. (1)

$$\mu_1(T) = \inf\{(Tu \mid u) : u \in D(T) \cap \{0\}^\perp, \|u\| = 1\} \leqslant \mu_2(T)$$

であり, 2 以上の任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $v_1, \cdots, v_{n-1} \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\inf\{(Tu \mid u) : u \in D(T) \cap \{v_1, \cdots, v_{n-1}\}^\perp, \|u\| = 1\}\\ &= \inf\{(Tu \mid u) : u \in D(T) \cap \{v_1, \cdots, v_{n-1}, 0\}^\perp, \|u\| = 1\} \leqslant \mu_{n+1}(T)\end{aligned}$$

であるから $\mu_n(T) \leqslant \mu_{n+1}(T)$ である.

(2) 対偶を示す. もし,

$$\dim \operatorname{Ran} E((-\infty, \alpha] \cap \sigma(T)) > n - 1$$

ならば, 任意の $v_1, \cdots, v_{n-1} \in \mathcal{H}$ に対し, 補題 10.131 より, 単位ベクトル

$$u_0 \in \operatorname{Ran} E((-\infty, \alpha] \cap \sigma(T)) \cap \{v_1, \cdots, v_{n-1}\}^\perp$$

が取れる. $(-\infty, \alpha] \cap \sigma(T)$ は有界である*163から $u_0 \in D(T) \cap \{v_1, \cdots, v_{n-1}\}^\perp$ であり,

$$\inf\{(Tu \mid u) : u \in D(T) \cap \{v_1, \cdots, v_{n-1}\}^\perp\} \leqslant (Tu_0 \mid u_0) = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_{u_0,u_0}(\lambda) \leqslant \alpha$$

である. $v_1, \cdots, v_{n-1} \in \mathcal{H}$ は任意であるので $\mu_n(T) \leqslant \alpha$ である. よって待遇が成り立つ.

(3) 対偶を示す. もし,

$$\dim \operatorname{Ran} E((-\infty, \alpha] \cap \sigma(T)) < n$$

ならば, ある $v_1, \cdots, v_{n-1} \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\operatorname{Ran} E((-\infty, \alpha] \cap \sigma(T)) = \operatorname{span}\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$$

と表せる. このとき,

$$\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}^\perp = \operatorname{Ran} E((\alpha, \infty) \cap \sigma(T))$$

であるから, 任意の単位ベクトル

$$u \in D(T) \cap \{v_1, \cdots, v_{n-1}\}^\perp = D(T) \cap \operatorname{Ran} E((\alpha, \infty) \cap \sigma(T))$$

に対し,

$$(Tu \mid u) = \int_{\sigma(T) \cap (\alpha, \infty)} \lambda dE_{u,u}(\lambda) \geqslant \alpha$$

である. よって $\mu_n(T) \geqslant \alpha$ であるので対偶が成り立つ.

(4) 背理法で示す. もしある $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mu_n(T) = \infty$ ならば, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し $m < \mu_n(T)$ であるから, (2) より,

$$\dim \operatorname{Ran} E((-\infty, m] \cap \sigma(T)) \leqslant n - 1 \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$

である. これより十分大きい $m_0 \in \mathbb{N}$ を取れば,

$$\operatorname{Ran} E((-\infty, m] \cap \sigma(T)) = \operatorname{Ran} E((-\infty, m_0] \cap \sigma(T)) \quad (\forall m \geqslant m_0)$$

が成り立つので,

$$E((-\infty, m] \cap \sigma(T)) = E((-\infty, m_0] \cap \sigma(T)) \quad (\forall m \geqslant m_0)$$

が成り立つ. よって,

$$E((-\infty, m_0] \cap \sigma(T)) = \lim_{m \to \infty} E((-\infty, m] \cap \sigma(T)) = E(\sigma(T)) = 1$$

であるから,

$$\operatorname{Ran} E((-\infty, m_0] \cap \sigma(T)) = \mathcal{H}$$

を得るが, 左辺は有限次元で右辺は無限次元であるので矛盾する. よって任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mu_n(T) < \infty$ が成り立つ.

*163 命題 10.130 より $\sigma(T)$ は下に有界であるから $(-\infty, \alpha] \cap \sigma(T)$ は上下に有界である.

(5) 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の正数 ε を取る. (4) より $\mu_n(T) - \varepsilon < \mu_n(T) < \mu_n(T) + \varepsilon$ であるから (2) より,

$$\dim \operatorname{Ran} E((-\infty, \mu_n(T) - \varepsilon) \cap \sigma(T)) \leqslant n - 1,$$

(3) より,

$$\dim \operatorname{Ran} E((-\infty, \mu_n(T) + \varepsilon) \cap \sigma(T)) \geqslant n$$

である. よって,

$$\begin{aligned}
&\dim \operatorname{Ran} E((\mu_n(T) - \varepsilon, \mu_n(T) + \varepsilon) \cap \sigma(T)) \\
&= \dim \operatorname{Ran} E((-\infty, \mu_n(T) + \varepsilon) \cap \sigma(T)) - \dim \operatorname{Ran} E((-\infty, \mu_n(T) - \varepsilon) \cap \sigma(T)) \\
&\geqslant n - (n-1) = 1
\end{aligned}$$

であるから,

$$E((\mu_n(T) - \varepsilon, \mu_n(T) + \varepsilon) \cap \sigma(T)) > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0),$$

従って,

$$\mu_n(T) \in \operatorname{ess.Ran}_E(\mathrm{id}) = \sigma(T) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

(定理 10.57 を参照) である.

□

定理 10.134 (min-max 原理)**.** $\mathcal{H}$ を無限次元 Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の下に有界な自己共役作用素, $(\mu_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ を T の特性レベル (定義 10.132) とする. そして,

$$s := \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(T)$$

とおく. このとき,

(1)
$$\{\lambda \in \sigma(T) : \lambda < s\} = \{\lambda \in \sigma_{\mathrm{d}}(T) : \lambda < s\} = \{\mu_n(T) : \mu_n(T) < s\}$$

($\sigma_{\mathrm{d}}(T)$ は T の離散スペクトル (定義 10.123)) が成り立つ.

(2) $s = \infty$ ならば T のスペクトルは純粋に離散的 (定義 10.125) である. また $s < \infty$ ならば s は T の真性スペクトルの最小値である.

(3) もし任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mu_n(T) < s$ ならば, $(\mu_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ は s より小さい T の離散固有値を重複度を込めて下から並べたもの (重複度の数だけ同じ値が続く) である. また s より小さい T の離散固有値は無限個存在する.

証明. (1) $\lambda \in \sigma(T)$ が $\lambda < s$ を満たすならば, ある $n \in \mathbb{N}$ と正数 ε が存在し,

$$\lambda < \lambda + \varepsilon < \mu_n(T)$$

となる. よって補題 10.133 の (2) より,

$$\dim \operatorname{Ran} E((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \cap \sigma(T)) \leqslant n - 1 < \infty$$

であるから, 定理 10.124 より $\lambda \in \sigma_{\mathrm{d}}(T)$ である. よって,

$$\{\lambda \in \sigma(T) : \lambda < s\} = \{\lambda \in \sigma_{\mathrm{d}}(T) : \lambda < s\} \tag{10.136}$$

が成り立つ. $\lambda < s$ なる任意の $\lambda \in \sigma_{\mathrm{d}}(T)$ を取る. 命題 10.130 より,

$$\mu_1(T) = \min(\sigma(T)) \leqslant \lambda < s = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(T)$$

であるから,

$$\mu_{n_0}(T) \leqslant \lambda < \mu_{n_0+1}(T) \tag{10.137}$$

を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する. 補題 10.133 の (5) と (10.136) より,

$$\mu_{n_0}(T) \in \sigma_{\mathrm{d}}(T)$$

であるから $\mu_{n_0}(T)$ は $\sigma(T)$ の孤立点である. よってある正数 δ が存在し,

$$(-\infty, \mu_{n_0}(T)] \cap \sigma(T) = (-\infty, \mu_{n_0}(T) + \delta) \cap \sigma(T)$$

となるので, 補題 10.133 の (3) より,

$$\begin{aligned} n_0 &\leqslant \dim \operatorname{Ran} E((-\infty, \mu_{n_0}(T) + \delta) \cap \sigma(T)) \\ &= \dim \operatorname{Ran} E((-\infty, \mu_{n_0}(T)] \cap \sigma(T)) \end{aligned}$$

であり, (10.137) と補題 10.133 の (2) より,

$$\dim \operatorname{Ran} E((-\infty, \lambda] \cap \sigma(T)) \leqslant n_0$$

であるから,

$$n_0 \leqslant \dim \operatorname{Ran} E((-\infty, \mu_{n_0}(T)] \cap \sigma(T)) \leqslant \dim \operatorname{Ran} E((-\infty, \lambda] \cap \sigma(T)) \leqslant n_0$$

である. よって,

$$\operatorname{Ran} E((-\infty, \mu_{n_0}(T)] \cap \sigma(T)) = \operatorname{Ran} E((-\infty, \lambda] \cap \sigma(T))$$

であるから,

$$E((\mu_{n_0}(T), \lambda] \cap \sigma(T)) = 0$$

である. もし $\mu_{n_0}(T) < \lambda$ ならば, $\lambda \in (\mu_{n_0}(T), \lambda]$ であり, $\lambda \in \sigma_{\mathrm{d}}(T)$ であるから,

$$0 < E(\{\lambda\}) \leqslant E((\mu_{n_0}(T), \lambda] \cap \sigma(T)) = 0$$

となり矛盾する. よって $\mu_{n_0}(T) = \lambda$ である. これより,

$$\{\lambda \in \sigma_{\mathrm{d}}(T) : \lambda < s\} \subseteq \{\mu_n(T) : \mu_n(T) < s\}$$

が成り立つ. ゆえに補題 10.133 の (5) と (10.136) より,

$$\{\lambda \in \sigma(T) : \lambda < s\} = \{\lambda \in \sigma_{\mathrm{d}}(T) : \lambda < s\} = \{\mu_n(T) : \mu_n(T) < s\}$$

が成り立つ.

(2) $s = \infty$ ならば, (1) より $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{d}}(T)$ であるから T のスペクトルは純粋に離散的である. $s < \infty$ であるとする. $\sigma(T)$ が閉であることと補題 10.133 の (5) より $s = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(T) \in \sigma(T)$ である. 任意の正数 ε を取る.

$$\mu_n(T) < s + \varepsilon \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから, 補題 10.133 の (3) より,

$$\dim \operatorname{Ran} E((-\infty, s + \varepsilon) \cap \sigma(T)) = \infty$$

である. また,

$$s - \varepsilon < \mu_{n_0}(T) \leqslant s$$

なる $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在するので補題 10.133 の (2) より,

$$\dim \operatorname{Ran} E((-\infty, s - \varepsilon] \cap \sigma(T)) \leqslant n_0 - 1 < \infty$$

である. よって,

$$\dim \operatorname{Ran} E((s - \varepsilon, s + \varepsilon) \cap \sigma(T)) = \infty \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

であるから, 定理 10.124 より $s \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T) = \sigma(T) \backslash \sigma_{\mathrm{d}}(T)$ である. (1) より,

$$\{\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T) : \lambda < s\} \subseteq \sigma_{\mathrm{ess}}(T) \cap \sigma_{\mathrm{d}}(T) = \varnothing$$

であるので $s = \min(\sigma_{\mathrm{ess}}(T))$ である.

(3) 補題 10.133 の (1) より $(\mu_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加であり，$\mu_n(T) < s$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であるから，s の定義より，$(\mu_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $(\mu_{k(n)}(T))_{n\in\mathbb{N}}$ で，

$$\mu_{k(n)}(T) < \mu_{k(n+1)}(T) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}), \ \ \{\mu_n(T) : n \in \mathbb{N}\} = \{\mu_{k(n)}(T) : n \in \mathbb{N}\} \tag{10.138}$$

を満たすものが取れる．ただし (10.138) を満たす $(k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ は，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\sum_{j=1}^{n} k(j)$ が最小となるように選んでいるとする．(1) より，

$$\{\lambda \in \sigma_{\mathrm{d}}(T) : \lambda < s\} = \{\mu_n(T) : \mu_n(T) < s\} = \{\mu_n(T) : n \in \mathbb{N}\} = \{\mu_{k(n)}(T) : n \in \mathbb{N}\}$$

であるから，s より小さい T の離散固有値は無限個存在する．$(\mu_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ が s より小さい T の離散固有値を重複度を込めて下から並べたものであることを示すには，

$$\dim \operatorname{Ran} E(\{\mu_{k(n)}(T)\}) = k(n+1) - k(n) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{10.139}$$

が成り立つことを示せばよい．任意の $n \in \mathbb{N}$ を取る．

$$\mu_{k(n)}(T) = \mu_{k(n+1)-1}(T) < \mu_{k(n+1)}(T)$$

であることと，$\mu_{k(n)}(T) = \mu_{k(n+1)-1}(T) \in \sigma_{\mathrm{d}}(T)$ が $\sigma(T)$ の孤立点であることに注意して，補題 10.133 の (2), (3) を用いれば，

$$\dim \operatorname{Ran} E((-\infty, \mu_{k(n)}(T)] \cap \sigma(T)) = k(n+1) - 1$$

が成り立つことが分かる．ここで，

$$(-\infty, \mu_{k(n)}(T)] \cap \sigma(T) = \bigcup_{j=1}^{n} \{\mu_{k(j)}(T)\}$$

であるから，

$$E((-\infty, \mu_{k(n)}(T)] \cap \sigma(T)) = \sum_{j=1}^{n} E(\{\mu_{k(j)}(T)\})$$

なので，

$$\sum_{j=1}^{n} \dim \operatorname{Ran} E(\{\mu_{k(j)}(T)\}) = \dim \operatorname{Ran} E((-\infty, \mu_{k(n)}(T)] \cap \sigma(T)) = k(n+1) - 1$$

である．よって，

$$\dim \operatorname{Ran} E(\{\mu_{k(1)}(T)\}) = k(2) - 1 = k(2) - k(1)$$

であり，任意の $n \geqslant 2$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\dim \operatorname{Ran} E(\{\mu_{k(n)}(T)\}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \dim \operatorname{Ran} E(\{\mu_{k(j)}(T)\}) - \sum_{j=1}^{n-1} \dim \operatorname{Ran} E(\{\mu_{k(j)}(T)\}) \\
&= (k(n+1) - 1) - (k(n) - 1) = k(n+1) - k(n)
\end{aligned}$$

であるから，(10.139) が成り立つ．

□

定理 10.135 (Reyleigh-Ritz の原理)**.** $\mathcal{H}$ を無限次元 Hilbert 空間，T を $\mathcal{H}$ 上の下に有界な自己共役作用素，$(\mu_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ を T の特性レベルとする．任意の $N \in \mathbb{N}$ と $D(T)$ の任意の N 次元部分空間 $\mathcal{K}$ に対し，$\mathcal{K}$ の上への射影作用素を $P_{\mathcal{K}} \in B(\mathcal{H})$ として，

$$T_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \ni v \mapsto P_{\mathcal{K}} T v \in \mathcal{K}$$

なる $\mathcal{K}$ 上の自己共役作用素を定義する．そして $T_{\mathcal{K}}$ の固有値を重複を込めて下から並べたものを $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ (重複度の数だけ同じ値が続く) とする．このとき，

$$\mu_n(T) \leqslant \lambda_n \ \ (n = 1, \cdots, N)$$

が成り立つ．

証明. 命題 10.128 より,

$$\begin{aligned}\mu_1(T) &= \inf\{(Tu \mid u) : u \in D(T), \|u\| = 1\} \leqslant \inf\{(Tu \mid u) : u \in \mathcal{K}, \|u\| = 1\} \\ &= \inf\{(T_{\mathcal{K}}u \mid u) : u \in \mathcal{K}, \|u\| = 1\} = \lambda_1\end{aligned}$$

であり, 任意の $n \in \{2, \cdots, N\}$, 任意の $v_1, \cdots, v_{n-1} \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\inf\{(Tu \mid u) : u \in D(T) \cap \{v_1, \cdots, v_{n-1}\}^\perp, \|u\| = 1\} \\ &\leqslant \inf\{(Tu \mid u) : u \in \mathcal{K} \cap \{v_1, \cdots, v_{n-1}\}^\perp, \|u\| = 1\} \\ &= \inf\{(T_{\mathcal{K}}u \mid u) : u \in \mathcal{K} \cap \{P_{\mathcal{K}}v_1, \cdots, P_{\mathcal{K}}v_{n-1}\}^\perp, \|u\| = 1\} \leqslant \lambda_n\end{aligned}$$

であるから, $\mu_n(T) \leqslant \lambda_n$ である. □

定理 10.136 (加藤-Rellich の定理)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素, S を $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする. そして $D(T) \subseteq D(S)$ であり, ある $a \in [0, 1)$, $b \in [0, \infty)$ に対し,

$$\|Sv\| \leqslant a\|Tv\| + b\|v\| \quad (\forall v \in D(T)) \tag{10.140}$$

が成り立つとする. このとき次が成り立つ.

(1) $T + S : D(T) \to \mathcal{H}$ は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素である.
(2) T の芯は $T + S$ の芯である.
(3) T が下に有界 (定義 10.129) ならば $T + S$ も下に有界であり,

$$\min(\sigma(T+S)) \geqslant \min(\sigma(T)) - \max\left(\frac{b}{1-a},\ a|\gamma| + b\right)$$

が成り立つ.

証明. (1) $E : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を T のスペクトル測度とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\begin{aligned}\|T(T \pm in)^{-1}\| &= \left\|\int_{\sigma(T)} \frac{t}{t \pm in} dE(t)\right\| \leqslant \sup_{t \in \sigma(T)} \left|\frac{t}{t \pm in}\right| \leqslant 1, \\ \|(T \pm in)^{-1}\| &= \left\|\int_{\sigma(T)} \frac{1}{t \pm in} dE(t)\right\| \leqslant \sup_{t \in \sigma(T)} \left|\frac{1}{t \pm in}\right| \leqslant \frac{1}{n}\end{aligned}$$

である. そこで,

$$a + \frac{b}{n_0} < 1$$

を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ を取れば, (10.140) より,

$$\|S(T \pm in_0)^{-1}\| \leqslant a\|T(T \pm in_0)^{-1}\| + b\|(T \pm in_0)^{-1}\| \leqslant a + \frac{b}{n_0} < 1$$

であるから, 命題 9.2 より,

$$(T + S \pm in_0)(T \pm in_0)^{-1} = 1 + S(T \pm in_0)^{-1} \in GL(B(\mathcal{H}))$$

である. 特に,

$$\mathrm{Ran}(T + S \pm in_0) = \mathcal{H}$$

であり, $T + S$ は対称作用素であるので, 定理 10.34 より, $T + S$ は自己共役作用素である.

(2) $D \subseteq D(T)$ が T の芯であるとすると, 任意の $v \in D(T) = D(T + S)$ に対し, D の点列 $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{n \to \infty} \|v - v_n\| = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \|Tv_n - Tv\| = 0$$

を満たすものが取れる. (10.140) より,

$$\|Sv - Sv_n\| \leqslant a\|Tv - Tv_n\| + b\|v - v_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから,

$$\|(S+T)v - (S+T)v_n\| \leqslant \|Sv - Sv_n\| + \|Tv - Tv_n\| \to 0$$

である. よって D は $S+T$ の芯である.

(3) $\gamma := \min(\sigma(T)) > -\infty$ とおく. 任意の $\lambda \in (-\infty, \gamma)$ に対し,

$$\begin{aligned} \|T(T-\lambda)^{-1}\| &= \left\| \int_{\sigma(T)} \frac{t}{t-\lambda} dE(t) \right\| \leqslant \sup_{t\in[\gamma,\infty)} \left| \frac{t}{t-\lambda} \right| \\ &= \sup_{t\in[\gamma,\infty)} \left| 1 + \frac{\lambda}{t-\lambda} \right| \leqslant \begin{cases} 1 & (\lambda < 0) \\ 1 + \frac{\lambda}{\gamma-\lambda} & (\lambda \geqslant 0) \end{cases} \\ &\leqslant \max\left(1, \frac{|\gamma|}{\gamma-\lambda}\right), \end{aligned}$$

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| = \left\| \int_{\sigma(T)} \frac{1}{t-\lambda} dE(t) \right\| \leqslant \sup_{t\in[\gamma,\infty)} \frac{1}{t-\lambda} \leqslant \frac{1}{\gamma-\lambda}$$

であるから (10.140) より,

$$\begin{aligned} \|S(T-\lambda)^{-1}\| &\leqslant a\|T(T-\lambda)^{-1}\| + b\|(T-\lambda)^{-1}\| \\ &\leqslant \max\left(a + \frac{b}{\gamma-\lambda}, \frac{a|\gamma|+b}{\gamma-\lambda}\right) \end{aligned}$$

である. よって,

$$\lambda < \gamma - \max\left(\frac{b}{1-a}, a|\gamma|+b\right)$$

を満たす任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し $\|S(T-\lambda)^{-1}\| < 1$ であるから, 命題 9.2 より,

$$(T+S-\lambda)(T-\lambda)^{-1} = 1 + S(T-\lambda)^{-1} \in GL(B(\mathcal{H})),$$

従って $\lambda \in \rho(T+S) = \mathbb{C}\backslash\sigma(T+S)$ である. ゆえに $\lambda \in \sigma(T+S)$ ならば $\lambda \geqslant \gamma - \max\left(\frac{b}{1-a}, a|\gamma|+b\right)$ であるから,

$$\min(\sigma(T+S)) \geqslant \gamma - \max\left(\frac{b}{1-a}, a|\gamma|+b\right)$$

が成り立つ.

□

定義 10.137 (自己共役作用素に対して無限小な対称作用素)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素, S を $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする. もし $D(T) \subseteq D(S)$ であり, 任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対し $\delta \in (0,\infty)$ で,

$$\|Sv\| \leqslant \varepsilon\|Tv\| + \delta\|v\| \quad (\forall v \in D(T))$$

を満たすものが存在するならば, S は T に対して無限小であると言う.

系 10.138. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素, S を T に対して無限小な $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする. このとき $T+S : D(T) \to \mathcal{H}$ は自己共役作用素であり, T の芯は $T+S$ の芯であり, T が下に有界ならば $T+S$ も下に有界である.

証明. 加藤-Rellich の定理 10.136 より明らかである. □

定義 10.139 (自己共役作用素に対して相対コンパクトな対称作用素)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素, S を $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする. もし $D(T) \subseteq D(S)$ であり, ある $\lambda_0 \in \rho(T)$ に対し,

$$S(T-\lambda_0)^{-1} \in B_0(\mathcal{H})$$

が成り立つならば S は T に対して相対コンパクトであると言う.

注意 10.140. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素, S を T に対して相対コンパクトな対称作用素とする. このとき任意の $\lambda \in \rho(T)$ に対し,

$$S(T-\lambda)^{-1} \in B_0(\mathcal{H})$$

が成り立つ. 実際, 定義 10.139 より $S(T-\lambda_0)^{-1} \in B_0(\mathcal{H})$ なる $\lambda_0 \in \rho(T)$ が取れ, $B_0(\mathcal{H})$ は $B(\mathcal{H})$ のイデアルなので,

$$S(T-\lambda)^{-1} = S(T-\lambda_0)^{-1} + (\lambda-\lambda_0)S(T-\lambda)^{-1}(T-\lambda_0)^{-1} \in B_0(\mathcal{H})$$

である.

補題 10.141. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素, S を T に対して相対コンパクトな $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする. このとき,

$$\lim_{n\to\infty} \|S(T+in)^{-1}\| = 0$$

が成り立つ.

証明. T は自己共役作用素なので $in \in \rho(T)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であるから, 注意 10.140 より $S(T+in)^{-1} \in B_0(\mathcal{H})$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ である. $E : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を T のスペクトル測度とする. 今,

$$A := S(T+i)^{-1} \in B_0(\mathcal{H}),$$
$$B_n := (T+i)(T+in)^{-1} = \int_{\sigma(T)} \frac{t+i}{t+in} dE(t) \in B(\mathcal{H}) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおく. このとき,

$$S(T+in)^{-1} = AB_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

である. そして,

$$\|B_n\| \leqslant \sup_{t\in\sigma(T)} \left|\frac{t+i}{t+in}\right| \leqslant 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{10.141}$$

であり, 任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し Lebesgue 優収束定理より,

$$\|B_n^* v\|^2 = \int_{\sigma(T)} \left|\frac{t-i}{t-in}\right| dE_{v,v}(t) \to 0 \quad (n\to\infty) \tag{10.142}$$

である. 任意の正数 ε に対し, コンパクト作用素の定義 10.107 より有限階作用素 A_0 で,

$$\|A - A_0\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{10.143}$$

を満たすものが取れる. 有限次元空間 $\mathrm{Ran}(A_0) \subseteq \mathcal{H}$ の CONS を $(e_1, \cdots, e_n)$ とおけば, 命題 10.111 より,

$$A_0 = \left(\sum_{j=1}^n e_j \odot e_j\right) A_0 = \sum_{j=1}^n e_j \odot A_0^* e_j$$

($\odot$ は Schatten 形式) であるから, (10.142) と命題 10.110 より作用素ノルムで,

$$A_0 B_n = \left(\sum_{j=1}^n e_j \odot A_0^* e_j\right) B_n = \sum_{j=1}^n e_j \odot B_n^* A_0^* e_j \to 0 \quad (n\to\infty)$$

となる. よって十分大きい $n_0 \in \mathbb{N}$ を取れば,

$$\|A_0 B_n\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n \geqslant n_0)$$

となるので, (10.141), (10.143) より, 任意の $n \geqslant n_0$ に対し,

$$\begin{aligned}\|S(T+in)^{-1}\| &= \|AB_n\| \leqslant \|(A-A_0)B_n\| + \|A_0B_n\| \\ &< \|A-A_0\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

となる. ゆえに $\lim_{n\to\infty}\|S(T+in)^{-1}\| = 0$ が成り立つ. □

定理 10.142 (自己共役作用素の真性スペクトルの相対コンパクトな対称作用素に対する安定性)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素, S を T に対して相対コンパクトな対称作用素 (定義 10.139) とする. このとき,

(1) S は T に対して無限小 (定義 10.137) である (従って系 10.138 より $T+S : D(T) \to \mathcal{H}$ は自己共役作用素である). さらに S は $T+S$ に対しても相対コンパクトである.
(2) 自己共役作用素 $T+S$ と T の真性スペクトル (定義 10.123) は一致する.

証明. (1) 補題 10.141 より任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対し,

$$\|S(T+in_0)^{-1}\| \leqslant \varepsilon$$

なる $n_0 \in \mathbb{N}$ が取れる. よって任意の $v \in D(T)$ に対し,

$$\|Sv\| = \|S(T+in_0)^{-1}(T+in_0)v\| \leqslant \|S(T+in_0)^{-1}Tv\| + \|in_0S(T+in_0)^{-1}v\| \leqslant \varepsilon\|Tv\| + n_0\varepsilon\|v\|$$

であるので S は T に対して無限小である.
S が $T+S$ に対しても相対コンパクトであることを示す.

$$S(T+S+in)^{-1} - S(T\pm in)^{-1} = -S(T+S+in)^{-1}S(T+in)^{-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから,

$$S(T+S+in)^{-1}\left(1+S(T+in)^{-1}\right) = S(T+in)^{-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{10.144}$$

である. 補題 10.141 より十分大きい $n_1 \in \mathbb{N}$ を取れば,

$$\|S(T+in_1)^{-1}\| < 1$$

となるので, 命題 9.2 より,

$$1+S(T+in_1)^{-1} \in GL(B(\mathcal{H}))$$

である. よって (10.144) より,

$$S(T+S+in_1)^{-1} = S(T+in_1)^{-1}\left(1+S(T+in)^{-1}\right)^{-1} \in B_0(\mathcal{H})$$

であるから, S は $T+S$ に対して相対コンパクトである.

(2) 任意の $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ を取る. 定理 10.124 より $D(T)$ の単位ベクトルの列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty}\|(T-\lambda)u_n\| = 0$ かつ $\mathcal{H}$ の弱位相で $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ となるものが取れる.

$$\begin{aligned}(\lambda-(T+S))u_n &= (\lambda-T)u_n - S(T-i)^{-1}(T-i)u_n \\ &= (\lambda-T)u_n - S(T-i)^{-1}((T-\lambda)u_n + (\lambda-i)u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

であり, S は T に対して相対コンパクトであるので $S(T-i)^{-1} \in B_0(\mathcal{H})$ であるから, 定理 10.114 より,

$$\lim_{n\to\infty}\|S(T-i)^{-1}u_n\| = 0$$

である. よって,

$$\lim_{n\to\infty}\|(\lambda-(T+S))u_n\| = 0$$

が成り立つので, 定理 10.124 より $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T+S)$ である. ゆえに,

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(T) \subseteq \sigma_{\mathrm{ess}}(T+S)$$

が成り立つ. (1) より $-S$ は $T+S$ に対して相対コンパクトであるので, 上の結果より,

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(T+S) \subseteq \sigma_{\mathrm{ess}}(T+S-S) = \sigma_{\mathrm{ess}}(T)$$

も成り立つ. よって $\sigma_{\mathrm{ess}}(T+S) = \sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ が成り立つ.

□

10.12 トレースクラス, Hilbert-Schmidt クラス

命題 10.143. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $\{e_j\}_{j\in J}, \{f_i\}_{i\in I}$ をそれぞれ $\mathcal{H}$ の CONS とする. このとき,

(1) 任意の $T \in B(\mathcal{H})$ に対し,

$$\sum_{j\in J}(T^*Te_j \mid e_j) = \sum_{j\in J}(TT^*e_j \mid e_j)$$

が成り立つ.

(2) 任意の非負有界自己共役作用素 $T \in B(\mathcal{H})_+$ に対し,

$$\sum_{j\in J}(Te_j \mid e_j) = \sum_{i\in I}(Tf_i \mid f_i)$$

が成り立つ.

証明. (1) $\mathcal{F}_J$ を J の有限部分集合全体とする. また任意の $j, j' \in J$ に対し,

$$\alpha_{j,j'} := (Te_j \mid e_{j'})(e_{j'} \mid Te_j) = (T^*e_{j'} \mid e_j)(e_j \mid T^*e_{j'}) \geqslant 0$$

とおく. すると,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}(T^*Te_j \mid e_j) &= \sum_{j\in J}(Te_j \mid Te_j) = \sum_{j\in J}\sum_{j'\in J}(Te_j \mid e_{j'})(e_{j'} \mid Te_j) = \sum_{j\in J}\sum_{j'\in J}\alpha_{j,j'} \\ &= \sup_{F\in\mathcal{F}_J}\sum_{j\in F}\sup_{F'\in\mathcal{F}_J}\sum_{j'\in F'}\alpha_{j,j'} = \sup_{F,F'\in\mathcal{F}_J}\sum_{j\in F}\sum_{j'\in F'}\alpha_{j,j'},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j'\in J}(TT^*e_{j'} \mid e_{j'}) &= \sum_{j'\in J}(T^*e_{j'} \mid T^*e_{j'}) = \sum_{j'\in J}\sum_{j\in J}(T^*e_{j'} \mid e_j)(e_j \mid T^*e_{j'}) = \sum_{j'\in J}\sum_{j\in J}\alpha_{j,j'} \\ &= \sup_{F'\in\mathcal{F}_J}\sum_{j'\in F'}\sup_{F\in\mathcal{F}_J}\sum_{j\in F}\alpha_{j,j'} = \sup_{F',F\in\mathcal{F}_J}\sum_{j'\in F'}\sum_{j\in F}\alpha_{j,j'}\end{aligned}$$

となる. よって,

$$\sum_{j\in J}(T^*Te_j \mid e_j) = \sup_{F,F'\in\mathcal{F}_J}\sum_{j\in F}\sum_{j'\in F'}\alpha_{j,j'} = \sup_{F',F\in\mathcal{F}_J}\sum_{j'\in F'}\sum_{j\in F}\alpha_{j,j'} = \sum_{j'\in J}(TT^*e_{j'} \mid e_{j'})$$

である.

(2) 定理 5.150 より全単射 $\gamma : J \to I$ が取れ, 定理 5.147 より $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素 U で,

$$Ue_j = f_{\gamma(j)} \quad (\forall j \in J)$$

を満たすものが取れる. 任意の $T \in B(\mathcal{H})_+$ に対し,

$$\sum_{i\in I}(Tf_i \mid f_i) = \sum_{j\in J}(Tf_{\gamma(j)} \mid f_{\gamma(j)}) = \sum_{j\in J}(U^*TUe_j \mid e_j)$$

であり, $U^*TU = (\sqrt{T}U)^*(\sqrt{T}U)$ であることと (1) より,

$$\sum_{j\in J}(U^*TUe_j \mid e_j) = \sum_{j\in J}\left((\sqrt{T}U)^*(\sqrt{T}U)e_j \mid e_j\right) = \sum_{j\in J}\left((\sqrt{T}U)(\sqrt{T}U)^*e_j \mid e_j\right) = \sum_{j\in J}(Te_j \mid e_j)$$

だから，

$$\sum_{i\in I}(Tf_i \mid f_i) = \sum_{j\in J}(U^*TUe_j \mid e_j) = \sum_{j\in J}(Te_j \mid e_j)$$

である．

□

定義 10.144 ($B(\mathcal{H})_+$ 上のトレース)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$\mathcal{H}$ 上の非負有界自己共役作用素に対するトレース

$$\mathrm{Tr} : B(\mathcal{H})_+ \ni T \mapsto \mathrm{Tr}(T) \in [0,\infty]$$

を，$\mathcal{H}$ の CONS$\{e_j\}_{j\in J}$ に対し，

$$\mathrm{Tr}(T) := \sum_{j\in J}(Te_j \mid e_j) \in [0,\infty]$$

として定義する．命題 10.143 の (2) よりこの定義は $\mathcal{H}$ の CONS の取り方によらない．

命題 10.145. トレース $\mathrm{Tr} : B(\mathcal{H})_+ \to [0,\infty]$ に対し次が成り立つ．

(1) $S,T \in B(\mathcal{H})_+$ が $S \leqslant T$ ならば $\mathrm{Tr}(S) \leqslant \mathrm{Tr}(T)$.
(2) 任意の $S,T \in B(\mathcal{H})_+$ に対し $\mathrm{Tr}(S+T) = \mathrm{Tr}(S) + \mathrm{Tr}(T)$.
(3) 任意の $T \in B(\mathcal{H})_+, \alpha \in [0,\infty)$ に対し $\mathrm{Tr}(\alpha T) = \alpha \mathrm{Tr}(T)$.
(4) 任意の $T \in B(\mathcal{H})_+, V \in B(\mathcal{H})$ に対し $\mathrm{Tr}(V^*TV) \leqslant \|V\|^2\mathrm{Tr}(T)$.
(5) 任意の $T \in B(\mathcal{H})$ に対し $\|T\| \leqslant \mathrm{Tr}(|T|)$.

証明. (1), (2), (3) は自明である．(4) を示す．$\mathcal{H}$ の CONS$\{e_j\}_{j\in J}$ に対し命題 10.143 の (1) より，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(V^*TV) = \mathrm{Tr}((\sqrt{T}V)(\sqrt{T}V)^*) = \mathrm{Tr}(\sqrt{T}VV^*\sqrt{T}) &= \sum_{j\in J}(\sqrt{T}VV^*\sqrt{T}e_j \mid e_j) \\ = \sum_{j\in J}\|V^*\sqrt{T}e_j\|^2 \leqslant \|V\|^2\sum_{j\in J}\|\sqrt{T}e_j\|^2 = \|V\|^2\sum_{j\in J}&(Te_j \mid e_j) = \|V\|^2\mathrm{Tr}(T)\end{aligned}$$

である．(5) を示す．

$$\|T\|^2 = \|T^*T\| = \||T|^2\| = \||T|\|^2$$

より，

$$\|T\| = \||T|\| = \|\sqrt{|T|}^2\| = \|\sqrt{|T|}\|^2$$

である．そして，

$$\|\sqrt{|T|}\|^2 = \sup\{\|\sqrt{T}e\|^2 : e \in \mathcal{H}, \|e\| = 1\} = \sup\{(|T|e \mid e) : e \in \mathcal{H}, \|e\| = 1\}$$

であるから，

$$\|T\| = \sup\{(|T|e \mid e) : e \in \mathcal{H}, \|e\| = 1\} \tag{10.145}$$

が成り立つ．任意の単位ベクトル $e \in \mathcal{H}$ に対し命題 5.149 より e を含む $\mathcal{H}$ の CONS が存在するので，

$$(|T|e \mid e) \leqslant \mathrm{Tr}(|T|)$$

が成り立つ．よって (10.145) より $\|T\| \leqslant \mathrm{Tr}(|T|)$ が成り立つ． □

定義 10.146 (トレースクラス, Hilbert-Schmidt クラス)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．

$$B^1(\mathcal{H}) := \{T \in B(\mathcal{H}) : \mathrm{Tr}(|T|) < \infty\}$$

を $\mathcal{H}$ 上のトレースクラス，

$$B^2(\mathcal{H}) := \{T \in B(\mathcal{H}) : \mathrm{Tr}(T^*T) < \infty\}$$

を $\mathcal{H}$ 上の Hilbert-Scmidt クラスと言う．

命題 10.147. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のトレースクラス $B^1(\mathcal{H})$ に対し,

$$B^1(\mathcal{H}) = \mathrm{span}(B^1(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})_+) = \mathrm{span}\{T \in B(\mathcal{H})_+ : \mathrm{Tr}(T) < \infty\}$$

と表せる. また $B^1(\mathcal{H})$ は $B(\mathcal{H})$ の $*$-イデアル (定義 2.28) である.

証明.

$$\mathcal{T} := \mathrm{span}(B^1(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})_+) = \mathrm{span}\{T \in B(\mathcal{H})_+ : \mathrm{Tr}(T) < \infty\}$$

とおく. まず $\mathcal{T}$ が $B(\mathcal{H})$ の $*$-イデアルであることを示す. 任意の $T \in B^1(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})_+$, 任意の $S \in B(\mathcal{H})$ に対し偏極恒等式 (10.4) と命題 10.145 の (4) より,

$$\begin{aligned} ST = (\sqrt{T}S^*)^*\sqrt{T} &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \left(\sqrt{T} + i^k\sqrt{T}S^*\right)^* \left(\sqrt{T} + i^k\sqrt{T}S^*\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k (1 + i^k S^*)T(1 + i^k S^*) \in \mathrm{span}(B^1(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})_+) = \mathcal{T}, \end{aligned}$$

よって,

$$ST \in \mathcal{T} \quad (\forall S \in B(\mathcal{H}), \forall T \in \mathcal{T})$$

が成り立つ. また $\mathcal{T}$ は明らかに $*$-演算で閉じているので,

$$TS = (S^*T^*)^* \in \mathcal{T} \quad (\forall S \in B(\mathcal{H}), \forall T \in \mathcal{T})$$

も成り立つ. これより $\mathcal{T}$ は $B(\mathcal{H})$ の $*$-イデアルである. 次に $B^1(\mathcal{H}) = \mathcal{T}$ が成り立つことを示す. 任意の $T \in B^1(\mathcal{H})$ に対し $T = V|T|$ を T の極分解 (10.75) とすると $|T| \in \mathcal{T}$ であり, $\mathcal{T}$ はイデアルであるから $T = V|T| \in \mathcal{T}$ である. よって $B^1(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{T}$ である. 任意の $T \in \mathcal{T}$ に対し $T = V|T|$ を T の極分解とすると, $|T| = V^*V|T| = V^*T$ であり $\mathcal{T}$ はイデアルであるから $|T| = V^*T \in \mathcal{T}$ である. よって $\mathrm{Tr}(|T|) < \infty$ であるから $T \in B^1(\mathcal{H})$ である. ゆえに $B^1(\mathcal{H}) = \mathcal{T}$ が成り立つ. □

命題 10.148. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の Hilbert-Schmidt クラス $B^2(\mathcal{H})$ は $B(\mathcal{H})$ の $*$-イデアルである.

証明. 任意の $T \in B^2(\mathcal{H})$ に対し命題 10.143 の (1) より $\mathrm{Tr}(TT^*) = \mathrm{Tr}(T^*T) < \infty$ であるから $T^* \in B^2(\mathcal{H})$ である. 任意の $T \in B^2(\mathcal{H}), S \in B(\mathcal{H})$ に対し, 命題 10.145 の (4) より,

$$\mathrm{Tr}((TS)^*TS) = \mathrm{Tr}(S^*T^*TS) \leqslant \|S\|^2\mathrm{Tr}(T^*T) < \infty$$

であるから $TS \in B^2(\mathcal{H})$ が成り立ち, $B^2(\mathcal{H})$ は $*$-演算で閉じているから $ST = (T^*S^*)^* \in B^2(\mathcal{H})$ も成り立つ. 任意の $T \in B^2(\mathcal{H})$, 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\mathrm{Tr}((\alpha T)^*\alpha T) = \mathrm{Tr}(|\alpha|^2T^*T) = |\alpha|^2\mathrm{Tr}(T^*T) < \infty,$$

であるから $\alpha T \in B^2(\mathcal{H})$ であり, 任意の $S, T \in B^2(\mathcal{H})$ に対し,

$$(S+T)^*(S+T) \leqslant (S+T)^*(S+T) + (S-T)^*(S-T) = 2(S^*S + T^*T)$$

であることと命題 10.145 の (1), (2) より,

$$\mathrm{Tr}((S+T)^*(S+T)) \leqslant 2(\mathrm{Tr}(S^*S) + \mathrm{Tr}(T^*T)) < \infty$$

であるから $S + T \in B^2(\mathcal{H})$ である. ゆえに $B^2(\mathcal{H})$ は $B(\mathcal{H})$ の $*$-イデアルである. □

命題 10.149. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. このとき次が成り立つ.

(1) $B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H}) \subseteq B^1(\mathcal{H}) \subseteq B^2(\mathcal{H}) \subseteq B_0(\mathcal{H})$.
(2) 任意の $S, T \in B^2(\mathcal{H})$ に対し $ST \in B^1(\mathcal{H})$.

証明.　(1) $B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H}) \subseteq B^1(\mathcal{H})$ を示す. 任意の $T \in B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})$ を取る. 有限次元部分空間 $\mathrm{Ran}(T) \subseteq \mathcal{H}$ の上への射影作用素を $P \in B(\mathcal{H})_+$ とおき, $\mathrm{Ran}(T)$ の CONS を $\{e_1, \cdots, e_n\}$ とおく. 命題 5.149 より $\{e_1, \cdots, e_n\}$ を含む $\mathcal{H}$ の CONS が取れるので,

$$\mathrm{Tr}(P) = \sum_{j=1}^{n} (Pe_j \mid e_j) < \infty$$

である. よって $P \in B^1(\mathcal{H})$ であり, $B^1(\mathcal{H}) \subseteq B(\mathcal{H})$ はイデアル (命題 10.147) だから $T = PT \in B^1(\mathcal{H})$ である. ゆえに $B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H}) \subseteq B^1(\mathcal{H})$ である.

$B^1(\mathcal{H}) \subseteq B^2(\mathcal{H})$ を示す. 任意の $T \in B^1(\mathcal{H})$ を取り, $T = V|T|$ を T の極分解 (10.75) とする. このとき,

$$\mathrm{Tr}(\sqrt{|T|}^2) = \mathrm{Tr}(|T|) < \infty$$

だから $\sqrt{|T|} \in B^2(\mathcal{H})$ であり, $B^2(\mathcal{H}) \subseteq B(\mathcal{H})$ はイデアル (命題 10.148) だから $T = V\sqrt{|T|}\sqrt{|T|} \in B^2(\mathcal{H})$ である. ゆえに $B^1(\mathcal{H}) \subseteq B^2(\mathcal{H})$ である.

$B^2(\mathcal{H}) \subseteq B_0(\mathcal{H})$ を示す. $\{e_j\}_{j\in J}$ を $\mathcal{H}$ の CONS とし, $\mathcal{F}_J$ を J の有限部分集合全体とする. そして,

$$P_F := \sum_{j\in F} e_j \odot e_j \quad (\forall F \in \mathcal{F}_J)$$

とおく. 命題 10.145 の (5) より任意の $F \in \mathcal{F}_J$ に対し,

$$\begin{aligned}\|T - TP_F\|^2 &= \|(1-P_F)T^*T(1-P_F)\| \leqslant \mathrm{Tr}((1-P_F)T^*T(1-P_F)) \\ &= \sum_{j\in J}((1-P_F)T^*T(1-P_F)e_j \mid e_j) \\ &= \mathrm{Tr}(T^*T) - \sum_{j\in F}(T^*Te_j \mid e_j)\end{aligned}$$

であり, 右辺は $F \to J$ で 0 に収束するから $\lim_{F\to J}\|T - TP_F\| = 0$ が成り立つ. よって,

$$T = \lim_{F\to J} TP_F \in \overline{B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|} = B_0(\mathcal{H})$$

である. ゆえに $B^2(\mathcal{H}) \subseteq B_0(\mathcal{H})$ である.

(2) 任意の $S, T \in B^2(\mathcal{H})$ に対し, 偏極恒等式 (10.4) より,

$$ST = S^{**}T = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k (T + i^k S^*)^*(T + i^k S^*)$$

であり, 命題 10.148 より,

$$\mathrm{Tr}\left((T + i^kS^*)^*(T + i^kS^*)\right) < \infty \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

だから $ST \in B^1(\mathcal{H})$ である.

□

定義 10.150 ($B^1(\mathcal{H})$ 上のトレース)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. 任意の $T \in B^1(\mathcal{H})$ に対し, 命題 10.147 より,

$$T = T_{1,+} - T_{1,-} + i(T_{2,+} - T_{2,-})$$

を満たす $T_{1,\pm}, T_{2,\pm} \in B^1(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})_+$ が取れる. そこで T のトレースを,

$$\mathrm{Tr}(T) := \mathrm{Tr}(T_{1,+}) - \mathrm{Tr}(T_{1,-}) + i(\mathrm{Tr}(T_{2,+}) - \mathrm{Tr}(T_{2,-}))$$

として定義する. 次の命題よりこの定義は well-defined である.

命題 10.151. $T_{j,\pm}, S_{j,\pm} \in B^1(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})_+$ $(j = 1, 2)$ が,

$$T_{1,+} - T_{1,-} + i(T_{2,+} - T_{2,-}) = S_{1,+} - S_{1,-} + i(S_{2,+} - S_{2,-})$$

を満たすならば,

$$\mathrm{Tr}(T_{1,+}) - \mathrm{Tr}(T_{1,-}) + i(\mathrm{Tr}(T_{2,+}) - \mathrm{Tr}(T_{2,-})) = \mathrm{Tr}(S_{1,+}) - \mathrm{Tr}(S_{1,-}) + i(\mathrm{Tr}(S_{2,+}) - \mathrm{Tr}(S_{2,-})) \tag{10.146}$$

が成り立つ.

証明.

$$T = T_{1,+} - T_{1,-} + i(T_{2,+} - T_{2,-}) = S_{1,+} - S_{1,-} + i(S_{2,+} - S_{2,-})$$

とおくと,

$$T_{1,+} - T_{1,-} = \frac{1}{2}(T + T^*) = S_{1,+} - S_{1,-},$$
$$T_{2,+} - T_{2,-} = \frac{1}{2i}(T - T^*) = S_{2,+} - S_{2,-}$$

である. よって,

$$T_{j,+} + S_{j,-} = T_{j,-} + S_{j,+} \quad (j = 1, 2)$$

だから,

$$\mathrm{Tr}(T_{j,+}) + \mathrm{Tr}(S_{j,-}) = \mathrm{Tr}(T_{j,-}) + \mathrm{Tr}(S_{j,-}) \quad (j = 1, 2)$$

である. ゆえに (10.146) が成り立つ. □

命題 10.152 ($B^1(\mathcal{H})$ 上のトレースの基本性質)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. $B^1(\mathcal{H})$ 上のトレース (定義 10.150) $\mathrm{Tr} : B^1(\mathcal{H}) \ni T \mapsto \mathrm{Tr}(T) \in \mathbb{C}$ について次が成り立つ.

(1) $\mathcal{H}$ の任意の CONS$\{e_j\}_{j\in J}$ に対し $\mathrm{Tr}(T) = \sum_{j\in J}(Te_j \mid e_j)$.
(2) $\mathrm{Tr} : B^1(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ は線型汎関数.
(3) 任意の $S, T \in B^2(\mathcal{H})$ に対し $\mathrm{Tr}(ST) = \mathrm{Tr}(TS)$.
(4) 任意の $S \in B(\mathcal{H}), T \in B^1(\mathcal{H})$ に対し $\mathrm{Tr}(ST) = \mathrm{Tr}(TS)$.

証明. (1) 定義 10.150 より $T_1, T_2, T_3, T_4 \in B^1(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})_+$ で $T = \sum_{k=0}^{3} i^k T_k$ なるものに対し, $\mathrm{Tr}(T) = \sum_{k=0}^{3} i^k \mathrm{Tr}(T_k)$ だから,

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{k=0}^{3} i^k \mathrm{Tr}(T_k) = \sum_{k=0}^{3} i^k \sum_{j\in J}(T_k e_j \mid e_j) = \sum_{j\in J}\sum_{k=0}^{3} i^k (T_k e_j \mid e_j) = \sum_{j\in J}(Te_j \mid e_j).$$

(2) (1) より明らかである.
(3) 命題 10.149 より任意の $S, T \in B^2(\mathcal{H})$ に対し $ST \in B^1(\mathcal{H})$ である. (2) と偏極恒等式 (10.4), および命題 10.143 の (1) より,

$$\mathrm{Tr}(ST) = \mathrm{Tr}(S^{**}T) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{Tr}((T + i^k S^*)^*(T + i^k S^*)) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{Tr}((T + i^k S^*)(T + i^k S^*)^*)$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{Tr}((i^k T^* + S)^*(i^k T^* + S)^*) = \mathrm{Tr}(T^{**}S) = \mathrm{Tr}(TS).$$

(4) $T \in B^1(\mathcal{H})$ の極分解 (10.75) を $T = V|T|$ とおくと, $\sqrt{|T|} \in B^2(\mathcal{H})$ であるから, $B^2(\mathcal{H})$ がイデアルであること (命題 10.148) と (3) より,

$$\mathrm{Tr}(ST) = \mathrm{Tr}(SV\sqrt{|T|}\sqrt{|T|}) = \mathrm{Tr}(\sqrt{|T|}SV\sqrt{|T|}) = \mathrm{Tr}(V\sqrt{|T|}\sqrt{|T|}S) = \mathrm{Tr}(TS).$$

□

定義 10.153 (Hilbert-Schmidt クラスの内積)**.** Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の Hilbert-Schmidt クラス $B^2(\mathcal{H})$ に対し, 命題 10.152 より,

$$(S \mid T)_{\mathrm{HS}} := \mathrm{Tr}(T^*S) \quad (\forall S, T \in B^2(\mathcal{H}))$$

として準双線型汎関数 (定義 3.45)

$$(\cdot \mid \cdot)_{\mathrm{HS}} : B^2(\mathcal{H}) \times B^2(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$$

が定義できる. 命題 10.145 の (5) より,

$$(T \mid T)_{\mathrm{HS}} = \mathrm{Tr}(T^*T) \geqslant \|T^*T\| = \|T\|^2 \quad (\forall T \in B^2(\mathcal{H})) \tag{10.147}$$

であるから $(\cdot \mid \cdot)_{\mathrm{HS}}$ は $B^2(\mathcal{H})$ の内積である. この内積を Hilbert-Schmidt 内積と呼び, Hilbert-Schmidt 内積の定めるノルム

$$\|T\|_{\mathrm{HS}} := \sqrt{(T \mid T)_{\mathrm{HS}}} = \sqrt{\mathrm{Tr}(T^*T)} \quad (\forall T \in B^2(\mathcal{H}))$$

を Hilbert-Schmidt ノルムと言う. Hilbert-Schmidt クラスにはこの Hilbert-Schmidt 内積が標準的に備わっているものとする. 次の命題 10.154 で見るように Hilbert-Schmidt クラスは Hilbert 空間である.

命題 10.154 (Hilbert-Schmidt クラスは Hilbert 空間)**.** Hilbert-Schmidt クラスは Hilbert-Schmidt 内積 (定義 10.153) によって Hilbert 空間である.

証明. $B^2(\mathcal{H})$ の任意の Cauchy 列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取る. (10.147) より $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $B(\mathcal{H})$ の (作用素ノルムに関する) Cauchy 列であるから, $\lim_{n\to\infty}\|T - T_n\| = 0$ を満たす $T \in B(\mathcal{H})$ が存在する. $\{e_j\}_{j\in J}$ を $\mathcal{H}$ の CONS とし, $\mathcal{F}_J$ を J の有限部分集合全体とする. このとき任意の $m \in \mathbb{N}$, 任意の $F \in \mathcal{F}_J$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in F}((T-T_m)^*(T-T_m)e_j \mid e_j) = \sum_{j\in F}\|(T-T_m)e_j\|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in F}\|(T_n-T_m)e_j\|^2\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in F}((T_n-T_m)^*(T_n-T_m)e_j \mid e_j) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}\sum_{j\in F}((T_k-T_m)^*(T_k-T_m)e_j \mid e_j)\\
&\leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}\sum_{j\in J}((T_k-T_m)^*(T_k-T_m)e_j \mid e_j) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}\|T_k-T_m\|_{\mathrm{HS}}^2
\end{aligned}$$

であるから,

$$\mathrm{Tr}((T-T_m)^*(T-T_m)) \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}\|T_k-T_m\|_{\mathrm{HS}}^2 \quad (\forall m \in \mathbb{N}) \tag{10.148}$$

が成り立つ. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $B^2(\mathcal{H})$ の Cauchy 列であるから, 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し,

$$\|T_n - T_m\|_{\mathrm{HS}} \leqslant \varepsilon \quad (\forall n, m \geqslant n_0)$$

を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が取れるので, (10.148) より任意の $m \geqslant n_0$ に対し,

$$\mathrm{Tr}((T-T_m)^*(T-T_m)) \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}\|T_k-T_m\|_{\mathrm{HS}}^2 \leqslant \sup_{k\geqslant n_0}\|T_k-T_m\|_{\mathrm{HS}}^2 \leqslant \varepsilon^2$$

となる. よって $T = (T - T_m) + T_m \in B^2(\mathcal{H})$ であり,

$$\|T - T_m\|_{\mathrm{HS}} \leqslant \varepsilon \quad (\forall m \geqslant n_0)$$

である. ゆえに $B^2(\mathcal{H})$ は Hilbert 空間である. □

命題 10.155. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. 次が成り立つ.

(1) 任意の $S \in B(\mathcal{H}), T \in B^1(\mathcal{H})$ に対し $|\mathrm{Tr}(ST)| \leqslant \|S\|\mathrm{Tr}(|T|)$.
(2) $B^1(\mathcal{H}) \ni T \mapsto \mathrm{Tr}(|T|) \in [0,\infty)$ は $B^1(\mathcal{H})$ 上のノルムである.

証明. (1) T の極分解 (10.75) を $T = V|T|$ とおくと, $\sqrt{|T|} \in B^2(\mathcal{H}), SV\sqrt{|T|} \in B^2(\mathcal{H})$ であるから, Hilbert-Schmidt 内積に関する Schwarz の不等式 (3.32) と命題 10.145 の (4) より,

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Tr}(ST)|^2 &= |\mathrm{Tr}(SV\sqrt{|T|}\sqrt{|T|})|^2 = (\sqrt{|T|} \mid (SV\sqrt{|T|})^*)_{\mathrm{HS}}^2 \leqslant \|\sqrt{|T|}\|_{\mathrm{HS}}^2\|(SV\sqrt{|T|})^*\|_{\mathrm{HS}}^2\\
&= \mathrm{Tr}(|T|)\mathrm{Tr}(SV|T|V^*S^*) \leqslant \|SV\|^2\mathrm{Tr}(|T|)^2 \leqslant \|S\|^2\mathrm{Tr}(|T|)^2
\end{aligned}$$

である. よって $|\mathrm{Tr}(ST)| \leqslant \|S\|\mathrm{Tr}(|T|)$ が成り立つ.

(2) 任意の $T \in B^1(\mathcal{H}), \alpha \in \mathbb{C}$ に対し $|\alpha T| = \sqrt{(\alpha T)^*(\alpha T)} = \sqrt{|\alpha|^2 T^* T} = |\alpha||T|$ であるから,

$$\mathrm{Tr}(|\alpha T|) = \mathrm{Tr}(|\alpha||T|) = |\alpha|\mathrm{Tr}(|T|) \quad (\forall T \in B^1(\mathcal{H}), \forall \alpha \in \mathbb{C})$$

である. また命題 10.145 の (5) より $\|T\| \leqslant \mathrm{Tr}(|T|)$ であるから, $T \in B^1(\mathcal{H})$ が $\mathrm{Tr}(|T|) = 0$ を満たすならば $T = 0$ である. 任意の $S, T \in B^1(\mathcal{H})$ に対し, $S + T \in B^1(\mathcal{H})$ の極分解 (10.75) を $S + T = W|S + T|$ とおくと, $|S + T| = W^*(S + T) = W^*S + W^*T$ だから (1) より,

$$\mathrm{Tr}(|S + T|) = \mathrm{Tr}(W^*S) + \mathrm{Tr}(W^*T) \leqslant \|W^*\|\mathrm{Tr}(|S|) + \|W^*\|\mathrm{Tr}(|T|) \leqslant \mathrm{Tr}(|S|) + \mathrm{Tr}(|T|)$$

となる. よって $B^1(\mathcal{H}) \ni T \mapsto \mathrm{Tr}(|T|) \in [0, \infty)$ はノルムである.

□

定義 10.156 (トレースクラスのノルム). Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のトレースクラス $B^1(\mathcal{H})$ に対し, 命題 10.155 より,

$$\|T\|_{\mathrm{Tr}} := \mathrm{Tr}(|T|) \quad (\forall T \in B^1(\mathcal{H}))$$

とおけば, $\|\cdot\|_{\mathrm{Tr}} : B^1(\mathcal{H}) \to [0, \infty)$ はノルムである. これをトレースノルムと言う. トレースクラスにはこのトレースノルムが標準的に備わっているものとする. 次の命題 10.157 で見るようにトレースクラスはトレースノルムにより Banach 空間である.

命題 10.157 (トレースクラスは Banach 空間). トレースクラスはトレースノルム (定義 10.156) により Banach 空間である.

証明. $B^1(\mathcal{H})$ の任意の Cauchy 列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取る. 命題 10.145 の (5) より,

$$\|T_n - T_m\| \leqslant \|T_n - T_m\|_{\mathrm{Tr}} \quad (\forall n, m \in \mathbb{N})$$

であるから $\lim_{n\to\infty}\|T - T_n\| = 0$ を満たす $T \in B(\mathcal{H})$ が存在する. $\mathcal{H}$ の CONS$\{e_j\}_{j\in J}$ に対し $\mathcal{F}_J$ を J の有限部分集合全体とし,

$$P_F := \sum_{j\in F} e_j \odot e_j \quad (\forall F \in \mathcal{F}_J)$$

とおく. 任意の $m \in \mathbb{N}$, 任意の $F \in \mathcal{F}_J$ を取る. $T - T_m$ の極分解 (10.75) を $T - T_m = V_m|T - T_m|$ (従って $|T - T_m| = V_m^*(T - T_m)$) とすると, 命題 10.155 の (1) より,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in F}(|T - T_m|e_j \mid e_j) &= \sum_{j\in F}((T - T_m)e_j \mid V_m e_j) = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{j\in F}((T_n - T_m)e_j \mid V_m e_j)\right| \\
&= \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}\left|\sum_{j\in F}((T_k - T_m)e_j \mid V_m e_j)\right| = \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}\left|\sum_{j\in J}((T_k - T_m)e_j \mid V_m P_F e_j)\right| \\
&= \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}|\mathrm{Tr}(P_F V_m^*(T_k - T_m))| \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}\|T_k - T_m\|_{\mathrm{Tr}}
\end{aligned}$$

となるから,

$$\mathrm{Tr}(|T - T_m|) \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}\|T_k - T_m\|_{\mathrm{Tr}} \quad (\forall m \in \mathbb{N}) \tag{10.149}$$

が成り立つ. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $B^1(\mathcal{H})$ の Cauchy 列であるから, 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し,

$$\|T_n - T_m\|_{\mathrm{Tr}} \leqslant \varepsilon \quad (\forall n, m \geqslant n_0)$$

を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が取れるので, (10.149) より任意の $m \geqslant n_0$ に対し,

$$\mathrm{Tr}(|T - T_m|) \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n}\|T_k - T_m\|_{\mathrm{Tr}} \leqslant \sup_{k\geqslant n_0}\|T_k - T_m\|_{\mathrm{Tr}} \leqslant \varepsilon$$

となる. よって $T = (T - T_m) + T_m \in B^1(\mathcal{H})$ であり,

$$\|T - T_m\|_{\mathrm{Tr}} \leqslant \varepsilon \quad (\forall m \geqslant n_0)$$

である. ゆえに $B^1(\mathcal{H})$ は Banach 空間である. □

定理 10.158 (Schatten 形式とトレース)**.** Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の Schatten 形式 (定義 10.109)

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (u, v) \mapsto u \odot v \in B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})$$

とトレースについて,

(1) 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し $\mathrm{Tr}(u \odot v) = (u \mid v)$ が成り立つ.

(2) 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し $\|u \odot v\|_{\mathrm{Tr}} = \|u \odot v\| = \|u\|\|v\|$ が成り立つ.

(3) 空でない任意の集合 J と任意の $(u_j)_{j\in J}, (v_j)_{j\in J} \bigoplus_{j\in J} \mathcal{H}$ に対し $\sum_{j\in J} u_j \odot v_j$ は Banach 空間 $B^1(\mathcal{H})$ において絶対収束 (定義 3.29) する.

(4) $B^1(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})_+ = \{\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \odot v_n : (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}\}$ が成り立つ.

(5) $B^1(\mathcal{H}) = \{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \odot v_n : (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}\}$ が成り立つ.

(6) 任意の $A \in B(\mathcal{H})$ に対し $\varphi_A : B^1(\mathcal{H}) \ni T \mapsto \mathrm{Tr}(AT) \in \mathbb{C}$ は Banach 空間 $B^1(\mathcal{H})$ 上の有界線型汎関数であり,

$$B(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \varphi_A \in B^1(\mathcal{H})^* \tag{10.150}$$

は等長線型同型写像である.

(7) $\mathcal{H}$ の CONS$\{e_j\}_{j\in J}$ に対し, $\{e_i \odot e_j\}_{(i,j)\in J\times J}$ は Hilbert-Schmidt クラス $B^2(\mathcal{H})$ の CONS である.

証明. (1) $v = \|v\|e$ を満たす単位ベクトル $e \in \mathcal{H}$ を取る. e を含む CONS(命題 5.149) に関してトレースを考えれば,

$$\mathrm{Tr}(u \odot v) = ((u \odot v)e \mid e) = \|v\|(u \mid e) = (u \mid v).$$

(2) 命題 10.145 の (5) より $\|u \odot v\| \leqslant \|u \odot v\|_{\mathrm{Tr}}$ である. 逆の不等式を示す. $u \odot v = V|u \odot v|$ を $u \odot v$ の極分解 (10.75) とすれば,

$$|u \odot v| = V^*(u \odot v) = (V^*u) \odot v$$

であるから (1) より,

$$\|u \odot v\|_{\mathrm{Tr}} = \mathrm{Tr}(|u \odot v|) = \mathrm{Tr}((V^*u) \odot v) = |(V^*u \mid v)| \leqslant \|u\|\|v\| = \|u \odot v\|.$$

(3) 任意の $(u_j)_{j\in J}, (v_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} \mathcal{H}$ に対し (2) と Hölder の不等式より,

$$\sum_{j\in J} \|u_j \odot v_j\|_{\mathrm{Tr}} = \sum_{j\in J} \|u_j\|\|v_j\| \leqslant \|(u_j)_{j\in J}\|\|(v_j)_{j\in J}\| < \infty$$

だから $\sum_{j\in J} u_j \odot v_j$ は Banach 空間 $B^1(\mathcal{H})$ において絶対収束する.

(4) 任意の $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ に対し (3) より $T := \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \odot v_n \in B^1(\mathcal{H})$ であり, 任意の $u \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(Tu \mid u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} ((v_n \odot v_n)u \mid u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u \mid v_n)(v_n \mid u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(u \mid v_n)|^2 \geqslant 0$$

であるから命題 10.5 より $T \in B^1(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})_+$ である. また, 任意の $T \in B^1(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})_+$ に対し命題 10.149 より $T \in B_0(\mathcal{H})$ であるから定理 10.122 の (3) より T の固有ベクトルからなる $\mathcal{H}$ の CONS$\{e_j\}_{j\in J}$ が取れる. そこで $Te_j = \lambda_j e_j \ \ (\forall j \in J)$ とおくと,

$$\{\lambda_j\}_{j\in J} \subseteq \sigma_{\mathrm{p}}(T) \subseteq \sigma(T) \subseteq [0, \infty), \quad \sum_{j\in J} \lambda_j = \sum_{j\in J} (Te_j \mid e_j) = \mathrm{Tr}(T) < \infty$$

である. よって $v_j := \sqrt{\lambda_j} e_j \ (\forall j \in J)$ とおけば $\sum_{j\in J} \|v_j\|^2 = \sum_{j\in J} \lambda_j < \infty$ だから (3) より $\sum_{j\in J} v_j \odot v_j \in B^1(\mathcal{H})$ であり, $\{e_j\}_{j\in J}$ は $\mathcal{H}$ の CONS なので命題 10.111 より $1 = \sum_{j\in J} e_j \odot e_j$ (SOT 収束) だから,

$$T = T\left(\sum_{j\in J} e_j \odot e_j\right) = \sum_{j\in J} Te_j \odot e_j = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j \odot e_j = \sum_{j\in J} v_j \odot v_j$$

である. ここで命題 3.27 より,

$$J_0 := \{j \in J : \|v_j \odot v_j\|_{\mathrm{Tr}} > 0\} = \{j \in J : \|v_j\|^2 > 0\}$$

は可算集合であり,

$$T = \sum_{j \in J} v_j \odot v_j = \sum_{j \in J_0} v_j \odot v_j$$

である. よってある $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ に対し $T = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \odot v_n$ と表せる.

(5) 任意の $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ に対し (3) より $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \odot v_n \in B^1(\mathcal{H})$ である. 任意の $T \in B^1(\mathcal{H})$ に対し T の極分解 (10.75) を $T = V|T|$ とすると $|T| \in B^1(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})_+$ であるから (4) より $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ で $|T| = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \odot v_n$ なるものが取れる. $u_n := Vv_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ とおけば $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ であり,

$$T = V|T| = V \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \odot v_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} Vv_n \odot v_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \odot v_n.$$

(6) 命題 10.152 の (1), (4) と命題 10.155 の (1) より任意の $A \in B(\mathcal{H})$ に対し $\varphi_A \in (B^1(\mathcal{H}))^*$ であり, (10.150) はノルム減少な線型写像である. $A_1, A_2 \in B(\mathcal{H})$ が $\varphi_{A_1} = \varphi_{A_2}$ を満たすならば任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し (1) より,

$$(A_1 u \mid v) = \mathrm{Tr}(A_1(u \odot v)) = \varphi_{A_1}(u \odot v) = \varphi_{A_2}(u \odot v) = \mathrm{Tr}(A_2(u \odot v)) = (A_2 u \mid v)$$

であるから $A_1 = A_2$ である. よって (10.150) は単射である. (10.150) が全射かつ等長であることを示す. 任意の $\varphi \in B^1(\mathcal{H})^*$ に対し (2) より,

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (u, v) \mapsto \varphi(u \odot v) \in \mathbb{C}$$

はノルムが $\|\varphi\|$ 以下の有界準双線型汎関数である. よって定理 3.49 より $A \in B(\mathcal{H})$ で,

$$\varphi(u \odot v) = (Au \mid v) \quad (\forall u, v \in \mathcal{H}) \tag{10.151}$$

を満たすものが定まり $\|A\| \leqslant \|\varphi\|$ である. (1) より (10.151) は

$$\varphi(u \odot v) = \mathrm{Tr}(A(u \odot v)) = \varphi_A(u \odot v) \quad (\forall u, v \in \mathcal{H})$$

を意味し, (5) よりこれは $\varphi = \varphi_A$ を意味する. そして,

$$\|A\| \leqslant \|\varphi\| = \|\varphi_A\| \leqslant \|A\|$$

だから (10.150) は全射かつ等長である.

(7) 任意の $(i, j), (i', j') \in J \times J$ に対し (1) より,

$$\begin{aligned}(e_i \odot e_j \mid e_{i'} \odot e_{j'})_{\mathrm{HS}} &= \mathrm{Tr}((e_{i'} \odot e_{j'})^*(e_i \odot e_j)) = \mathrm{Tr}((e_{j'} \odot e_{i'})(e_i \odot e_j)) \\ &= (e_i \mid e_{i'})\mathrm{Tr}(e_{j'} \odot e_j) = (e_i \mid e_{i'})(e_{j'} \mid e_j)\end{aligned}$$

だから $\{e_i \odot e_j : (i, j) \in J \times J\}$ は $B^2(\mathcal{H})$ の ONS である. $\{e_i \odot e_j : (i, j) \in J \times J\} \subseteq B^2(\mathcal{H})$ の直交補空間の元 $T \in B^2(\mathcal{H})$ を取ると (1) より,

$$(Te_j \mid e_i) = \mathrm{Tr}(T(e_j \odot e_i)) = \mathrm{Tr}((e_i \odot e_j)^* T) = (T \mid e_i \odot e_j)_{\mathrm{HS}} = 0 \quad (\forall i, j \in J)$$

であるから, 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(Tu \mid v) = \sum_{i \in J} (Tu \mid (v \mid e_i) e_i) = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} (e_i \mid v)(u \mid e_j)(Te_j \mid e_i) = 0$$

である. よって $T = 0$ だから $\{e_i \odot e_j : (i, j) \in J \times J\}$ は $B^2(\mathcal{H})$ の CONS である.

□

10.13 Hlibert-Schmidt 積分作用素, 加藤の定理

定理 10.159 (Hilbert-Schmidt 積分作用素)**.** X を第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間, $\mu : \mathcal{B}_X \to [0,\infty]$ を位相正則測度とする. このとき,

$$(\widehat{K}[f] \mid [g])_2 = \int_{X\times X} K(x,y)f(y)\overline{g(x)}d(\mu\otimes\mu)(x,y) \quad (\forall [f],[g] \in L^2(X,\mu))$$

によってユニタリ作用素

$$L^2(X\times X, \mu\otimes\mu) \ni K \mapsto \widehat{K} \in B^2(L^2(X,\mu))$$

が定まる.

証明. 任意の $K \in L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)$ に対し Hölder の不等式 5.130 と Fubini の定理 5.85 より,

$$L^2(X,\mu)\times L^2(X,\mu) \ni ([f],[g]) \mapsto \int_{X\times X} K(x,y)f(y)\overline{g(x)}d(\mu\otimes\mu)(x,y) \in \mathbb{C}$$

はノルムが $\|K\|_2$ 以下の有界準双線型汎関数であるから, 定理 3.49 より,

$$(\widehat{K}[f] \mid [g])_2 = \int_{X\times X} K(x,y)f(y)\overline{g(x)}d(\mu\otimes\mu)(x,y) \quad (\forall [f],[g] \in L^2(X,\mu))$$

によってノルム減少線型作用素

$$L^2(X\times X,\mu\otimes\mu) \ni K \mapsto \widehat{K} \in B(L^2(X,\mu)) \tag{10.152}$$

が定まる. 今, 定義 10.96 により $L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)$ をテンソル積 Hilbert 空間

$$L^2(X\times X,\mu\otimes\mu) = L^2(X,\mu)\otimes L^2(X,\mu) = \overline{\mathrm{span}\{[f]\otimes[g] : [f],[g] \in L^2(X,\mu)\}}$$

とみなす. 任意の $[f],[g] \in L^2(X,\mu)$ に対し, Fubini の定理 5.85 より,

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\widehat{[f]\otimes[\overline{g}]}\right)[h_1] \mid [h_2]\right)_2 = \int_{X\times X} f(x)\overline{g(y)}h_1(y)\overline{h_2(x)}d(\mu\otimes\mu)(x,y)\\
&= \int_X h_1(y)\overline{g(y)}d\mu(y)\int_X f(x)\overline{h_2(x)}d\mu(x) = ([h_1]\mid[g])([f]\mid[h_2])\\
&= (([f]\odot[g])[h_1]\mid[h_2])_2 \quad (\forall [h_1],[h_2] \in L^2(X,\mu))
\end{aligned}$$

[*164]であるから,

$$\widehat{[f]\otimes[\overline{g}]} = [f]\odot[g] \quad (\forall [f],[g] \in L^2(X,\mu))$$

が成り立つ. よって任意の $[f_1],[g_1],[f_2],[g_2] \in L^2(X,\mu)$ に対し定理 10.158 の (1) より,

$$\begin{aligned}
&\left(\widehat{[f_1]\otimes[\overline{g_1}]} \mid \widehat{[f_2]\otimes[\overline{g_2}]}\right)_{\mathrm{HS}} = ([f_1]\odot[g_1] \mid [f_2]\odot[g_2])_{\mathrm{HS}} = \mathrm{Tr}\left(([g_2]\odot[f_2])([f_1]\odot[g_1])\right)\\
&= ([f_1]\mid[f_2])\mathrm{Tr}([g_2]\odot[g_1]) = ([f_1]\mid[f_2])_2([g_2]\mid[g_1])_2 = ([f_1]\otimes[\overline{g_1}] \mid [f_2]\otimes[\overline{g_2}])_2
\end{aligned}$$

であるから,

$$\mathrm{span}\{[f]\otimes[g] : [f],[g] \in L^2(X,\mu)\} \ni K \mapsto \widehat{K} \in B^2(L^2(X,\mu)) \tag{10.153}$$

は内積を保存する線型作用素であり, その値域

$$\mathrm{span}\{[f]\odot[g] : [f],[g] \in L^2(X,\mu)\} \subseteq B^2(L(X,\mu))$$

は定理 10.158 の (7) より $B^2(L^2(X,\mu))$ において稠密である. よって (10.153) を $L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)$ 上に一意拡張 (命題 3.19) したもの

$$U : L^2(X\times X,\mu\otimes\mu) \to B^2(L^2(X,\mu))$$

*164 $\odot$ は Schatten 形式 (定義 10.109).

はユニタリ作用素である．後は任意の $K \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ を取り，$\widehat{K} = UK$ が成り立つことを示せばよい．そこで $\mathrm{span}\{[f] \otimes [g] : [f], [g] \in L^2(X, \mu)\}$ の列 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty}\|K - K_n\|_2 = 0$ を満たすものを取る．すると (10.152) がノルム減少線型作用素であることから，

$$\|\widehat{K} - \widehat{K_n}\| \leqslant \|K - K_n\|_2 \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

が成り立ち，作用素ノルムが Hilbert-Schmidt ノルム以下であること (10.147) から，

$$\|UK - \widehat{K_n}\| \leqslant \|UK - \widehat{K_n}\|_{\mathrm{HS}} = \|K - K_n\|_2 \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

が成り立つ．よって，

$$\|\widehat{K} - UK\| \leqslant \|\widehat{K} - \widehat{K_n}\| + \|\widehat{K_n} - UK\| \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

であるから $\widehat{K} = UK$ が成り立つ． □

定義 10.160 (Hilbert-Schmidt 積分作用素とその積分核)**.** X を第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間，$\mu : \mathcal{B}_X \to [0, \infty]$ を位相正則測度とする．任意の $K \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ に対し，

$$(\widehat{K}[f] \mid [g]) = \int_{X\times X} K(x, y)f(y)\overline{g(x)}d(\mu \otimes \mu)(x, y) \ \ (\forall [f], [g] \in L^2(X, \mu))$$

によって定まる $\widehat{K} \in B^2(L^2(X, \mu))$ (定理 10.159 を参照) を K を積分核とする Hilbert-Schmidt 積分作用素と言う．定理 10.159 より，

$$L^2(X \times X, \mu \otimes \mu) \ni K \mapsto \widehat{K} \in B^2(L^2(X, \mu))$$

はユニタリ作用素である．

注意 10.161. Plancherel の定理 8.71 より Fourier 変換 $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ は Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上のユニタリ作用素である．そして命題 8.133 と命題 8.70 より，

$$\begin{aligned} H^2(\mathbb{R}^N) &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : (1 + |\mathrm{id}|^2)\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^N)\} = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : |\mathrm{id}|^2\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^N)\} \\ &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : -\mathcal{F}\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^N)\} = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : -\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^N)\} \end{aligned}$$

である．

命題 10.162 ($L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の Laplacian の Fourier 変換による対角化)**.** Laplacian

$$-\Delta : H^2(\mathbb{R}^N) \ni u \mapsto -\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

は Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の自己共役作用素であり，Fourier 変換 $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ に対し，

$$-\Delta = \mathcal{F}^{-1}|\mathrm{id}|^2\mathcal{F} \tag{10.154}$$

と表される．ただし右辺の $|\mathrm{id}|^2$ は連続関数 $|\mathrm{id}|^2 : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto |x|^2 \in [0, \infty)$ による $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の掛け算作用素 (定義 10.81) である．そして $-\Delta$ のスペクトル $\sigma(-\Delta)$ と点スペクトル (固有値全体) $\sigma_{\mathrm{p}}(-\Delta)$ は，

$$\sigma(-\Delta) = [0, \infty), \ \ \sigma_{\mathrm{p}}(-\Delta) = \varnothing$$

であり，任意の Borel 関数 $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ に対し，

$$f(-\Delta) = \mathcal{F}^{-1}f(|\mathrm{id}|^2)\mathcal{F} \tag{10.155}$$

が成り立つ．ただし $f(-\Delta)$ は自己共役作用素 $-\Delta$ に関する Borel 関数カルキュラス (定義 10.65) であり，$f(|\mathrm{id}|^2)$ は Borel 関数 $f(|\mathrm{id}|^2) : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto f(|x|^2) \in \mathbb{C}$ による掛け算作用素である．

証明. 上の注意で述べたように,

$$H^2(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : -\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

であり, 命題 8.70 より,

$$\mathcal{F}(-\Delta) = |\mathrm{id}|^2\mathcal{F}$$

であるから, 両辺に $\mathcal{F}^{-1}$ を作用させれば (10.154) を得る. よって $-\Delta$ は自己共役作用素である. 命題 10.83 より $\sigma(|\mathrm{id}|^2) = [0,\infty)$ であるから (10.154) より $\sigma(-\Delta) = \sigma(|\mathrm{id}|^2) = [0,\infty)$ である. 今, $E : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to \mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}^N))$ を $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の掛け算作用素を司る射影値測度 (定義 10.81) とする. (10.154) より,

$$-\Delta = \mathcal{F}^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 dE(x)\right)\mathcal{F}$$

であるから, 命題 10.54 より, 射影値測度 $\mathcal{F}^{-1}E\mathcal{F} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \ni B \mapsto \mathcal{F}^{-1}E(B)\mathcal{F} \in \mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}^N))$ に対し,

$$-\Delta = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 d(\mathcal{F}^{-1}E\mathcal{F})(x)$$

が成り立つ. よって命題 10.66 と命題 10.54 より,

$$f(-\Delta) = \int_{\mathbb{R}^N} f(|x|^2) d(\mathcal{F}^{-1}E\mathcal{F})(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(|x|^2) dE(x)\right)\mathcal{F}$$

であるから, (10.155) が成り立つ. 後は $\sigma_{\mathrm{p}}(-\Delta) = \varnothing$ であることを示せばよく, そのためには (10.154) より $\sigma_{\mathrm{p}}(|\mathrm{id}|^2) = \varnothing$ であることを示せばよい. そこで $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(|\mathrm{id}|^2)$ が存在すると仮定して矛盾を導く. $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の掛け算作用素 $|\mathrm{id}|^2$ の固有値 λ に対する固有ベクトル $[f] \in L^2(\mathbb{R}^N)$ を取る (固有ベクトルなので $[f] \neq 0$ である). このとき,

$$0 = \|(\lambda - |\mathrm{id}|^2)[f]\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |(\lambda - |x|^2)f(x)|^2 dx$$

であるから,

$$(\lambda - |x|^2)f(x) = 0 \quad (\text{Lebesgue 測度に関して a.e. } x \in \mathbb{R}^N) \tag{10.156}$$

である. ここで,

$$\{x \in \mathbb{R}^N : \lambda - |x|^2 = 0\} \tag{10.157}$$

は $\lambda = 0$ の場合は $\{0\}$ であり, $\lambda > 0$ の場合は定理 6.36 より $\mathbb{R}^N$ 内の $N-1$ 次元多様体なので, 命題 6.87 より (10.157) の Lebesgue 測度は 0 である. ゆえに Lebesgue 測度に関して a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ で $|x|^2 \neq \lambda$ であるから, (10.156) より, Lebesgue 測度に関して a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ で $f(x) = 0$ である. これは $[f] \in L^2(\mathbb{R}^N)$ が 0 であることを意味するので矛盾する. ゆえに $\sigma_{\mathrm{p}}(|\mathrm{id}|^2) = \varnothing$ であるから,

$$\sigma_{\mathrm{p}}(-\Delta) = \sigma_{\mathrm{p}}(|\mathrm{id}|^2) = \varnothing$$

である. □

補題 10.163. 任意の $V \in L^2(\mathbb{R}^3)$ に対し,

$$V(-\Delta + 1)^{-1}f \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad (\forall f \in L^2(\mathbb{R}^3))$$

であり,

$$L^2(\mathbb{R}^3) \ni f \mapsto V(-\Delta + 1)^{-1}f \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

は Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の Hilbert-Schmidt クラス $B^2(L^2(\mathbb{R}^3))$ に属する. 特に $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上のコンパクト作用素である.[*165]

[*165] 命題 10.149 を参照.

証明. Fourier 変換 $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$ に対し, 命題 10.162 より,

$$-\Delta = \mathcal{F}^{-1}|\mathrm{id}|^2\mathcal{F}$$

であり,

$$(-\Delta + 1)^{-1} = \mathcal{F}^{-1}(|\mathrm{id}|^2 + 1)^{-1}\mathcal{F}$$

である. $(|\mathrm{id}|^2 + 1)^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ であるから, Hölder の不等式 5.130 より,

$$(|\mathrm{id}|^2 + 1)^{-1}\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^3) \quad (\forall f \in L^2(\mathbb{R}^3))$$

であり, $\mathcal{F}^{-1}(L^1(\mathbb{R}^3)) \subseteq C_0(\mathbb{R}^3)$ (命題 8.62 の (6)) なので,

$$(-\Delta + 1)^{-1}f = \mathcal{F}^{-1}(|\mathrm{id}|^2 + 1)^{-1}\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}^3) \quad (\forall f \in L^2(\mathbb{R}^3))$$

である. 今, 急減少関数空間 $\mathcal{S}_3$ の列 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty}\|V - V_n\|_2 = 0$ なるものを取る. すると Young の不等式 8.104 と定理 8.90 より $L^2(\mathbb{R}^3)$ において,

$$\begin{aligned}
V(-\Delta + 1)^{-1}f &= \lim_{n\to\infty} V_n(-\Delta + 1)^{-1}f = \lim_{n\to\infty}(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}V_n)\mathcal{F}^{-1}(|\mathrm{id}|^2 + 1)^{-1}\mathcal{F}f \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^{-1}\left(\left((|\mathrm{id}|^2 + 1)^{-1}\mathcal{F}f\right) * \mathcal{F}V_n\right) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left(\left((|\mathrm{id}|^2 + 1)^{-1}\mathcal{F}f\right) * \mathcal{F}V\right) \quad (\forall f \in L^2(\mathbb{R}^3))
\end{aligned}$$

となる. そこで $K \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ を,

$$K(x, y) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\mathcal{F}V(x - y)}{|y|^2 + 1} \quad (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$$

と定義し, K を積分核とする Hilbert-Schmidt 積分作用素 (定義 10.160) を $\widehat{K} \in B^2(L^2(\mathbb{R}^3))$ とおけば,

$$V(-\Delta + 1)^{-1}f = \mathcal{F}^{-1}\left(\left((|\mathrm{id}|^2 + 1)^{-1}\mathcal{F}f\right) * \mathcal{F}V\right) = \mathcal{F}^{-1}\widehat{K}\mathcal{F}f \quad (\forall f \in L^2(\mathbb{R}^3))$$

である. Hilbert-Schmidt クラス $B^2(L^2(\mathbb{R}^3))$ は $B(L^2(\mathbb{R}^3))$ のイデアル (命題 10.148) であるから,

$$\mathcal{F}^{-1}\widehat{K}\mathcal{F} \in B^2(L^2(\mathbb{R}^3))$$

である. よって,

$$L^2(\mathbb{R}^3) \ni f \mapsto V(-\Delta + 1)^{-1}f \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

は Hilbert-Schmidt クラス $B^2(L^2(\mathbb{R}^3))$ に属する. □

定理 10.164 (加藤の定理)**.** 実数値の $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ (定義 8.20) に対し, $L^2(\mathbb{R}^3)$ の列 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$V - V_n \in L^\infty(\mathbb{R}^3) \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n\to\infty}\|V - V_n\|_\infty = 0$$

を満たすものが取れるとする. このとき V による $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の掛け算作用素 (定義 10.81) は, Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の自己共役作用素 $-\Delta$ (命題 10.162) に対して相対コンパクトな対称作用素 (定義 10.139) である.

証明. 補題 10.163 より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$V_n(-\Delta + 1)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^3) \ni f \mapsto V_n(-\Delta + 1)^{-1}f \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

は $B^2(L^2(\mathbb{R}^3)) \subseteq B_0(L^2(\mathbb{R}^3))$ に属する. コンパクト作用素環 $B_0(L^2(\mathbb{R}^3))$ は作用素ノルムで閉 (定義 10.107 を参照) であり,

$$\|V(-\Delta + 1)^{-1} - V_n(-\Delta + 1)^{-1}\| \leqslant \|V - V_n\|_\infty\|(-\Delta + 1)^{-1}\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから,

$$V(-\Delta + 1)^{-1} = \lim_{n\to\infty} V_n(-\Delta + 1)^{-1} \in B_0(L^2(\mathbb{R}^3))$$

である. よって V は $-\Delta$ に対して相対コンパクトな対称作用素である. □

定理 10.165 (加藤の定理)**.** $\alpha \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ と $k \in (0, \infty)$ に対し,

$$V(x) := -\frac{k}{|x|^\alpha} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$$

として $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ を定義する. そして Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の自己共役作用素 $-\Delta$ (命題 10.162) に対して,

$$H_V := -\Delta + V : H^2(\mathbb{R}^3) \ni f \mapsto -\Delta f + Vf \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

とおく. このとき,

(1) V による $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の掛け算作用素 (定義 10.81) は $-\Delta$ に対して相対コンパクトな対称作用素である. そして H_V は下に有界な自己共役作用素であり, $-\Delta$ の芯は H_V の芯でもあり, また H_V の真性スペクトル (定義 10.123) は $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_V) = [0, \infty)$ である.

(2) H_V は無限個の離散固有値 (定義 10.123) を持つ. そしてこれらを下から並べたものを $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とおくと, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = 0$ が成り立つ.

証明. (1) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し V_n を,

$$V_n := \begin{cases} V(x) & (|x| \leqslant n) \\ 0 & (n < |x|) \end{cases}$$

とおくと, 極座標変換 (定理 6.99) と $2\alpha < 3$ より,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |V_n(x)|^2 dx = \mu_{S_2}(S_2) \int_0^n r^2 \frac{k^2}{r^{2\alpha}} dr = \mu_{S_2}(S_2) \frac{k^2}{3 - 2\alpha} n^{3-2\alpha} < \infty$$

であるから $V_n \in L^2(\mathbb{R}^3)$ であり, $0 < \alpha$ より,

$$\|V - V_n\|_\infty \leqslant \frac{k}{n^\alpha} \to 0 \;\; (n \to \infty)$$

である. よって定理 10.164 より V は掛け算作用素として $-\Delta$ に対して相対コンパクトである. ここで命題 10.162 より $-\Delta$ は下に有界な自己共役作用素で $\sigma_{\mathrm{ess}}(-\Delta) = \sigma(-\Delta) = [0, \infty)$ である. よって定理 10.142 と定理 10.136 より H_V も下に有界な自己共役作用素であり, $-\Delta$ の芯は H_V の芯でもあり, $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_V) = \sigma_{\mathrm{ess}}(-\Delta) = [0, \infty)$ である.

(2) (1) より H_V は下に有界な自己共役作用素である. そこで H_V の特性レベル (定義 10.132) を $(\mu_n(H_V))_{n\in\mathbb{N}}$ とおく. (1) より $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_V) = [0, \infty)$ であるから定理 10.134 の (2) より,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(H_V) = \min(\sigma_{\mathrm{ess}}(H_V)) = 0$$

である. よって定理 10.134 の (3) より,

$$\mu_n(H_V) < 0 \;\; (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{10.158}$$

が成り立つことを示せばよい. 非負値の $\psi \in D(\mathbb{R}^3)$ で,

$$\|\psi\|_2 = 1, \;\; \mathrm{supp}(\psi) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 : 1 < |x| < 2\}$$

を満たすものを取る. そして任意の $R \in (0, \infty)$ に対し $\psi_R \in D(\mathbb{R}^3)$ を,

$$\psi_R(x) := R^{-\frac{3}{2}} \psi(R^{-1}x) \;\; (\forall x \in \mathbb{R}^3)$$

として定義する. このとき変数変換より,

$$\|\Psi_R\|_2 = 1, \;\; \mathrm{supp}(\psi_R) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 : R < |x| < 2R\} \;\; (\forall R \in (0, \infty)) \tag{10.159}$$

であり,

$$(-\Delta\psi_R \mid \psi_R)_2 = R^{-2}(\Delta\psi \mid \psi)_2, \;\; (V\psi_R \mid \psi_R)_2 = R^{-\alpha}(V\psi \mid \psi)_2 \;\; (\forall R \in (0, \infty)) \tag{10.160}$$

である.

$$2-\alpha>0,\ \ (V\psi\mid\psi)_2<0$$

であるから, (10.160) より, 十分大きい $R_0\in(0,\infty)$ を取れば,

$$\begin{aligned}(H_V\psi_R\mid\psi_R)_2&=(-\Delta\psi_R\mid\psi_R)_2+(V\psi_R\mid\psi_R)_2=R^{-2}(-\Delta\psi\mid\psi)_2+R^{-\alpha}(V\psi\mid\psi)_2\\&=R^{-2}\left((-\Delta\psi\mid\psi)_2+R^{2-\alpha}(V\psi\mid\psi)_2\right)<0\ \ (\forall R\in[R_0,\infty))\end{aligned}\tag{10.161}$$

となる. そこで,

$$\varphi_n:=\psi_{2^nR_0}\in D(\mathbb{R}^3)\ \ (\forall n\in\mathbb{N})$$

とおくと, (10.159) と (10.161) より,

$$\|\varphi_n\|_2=1,\ \ \mathrm{supp}(\varphi_n),\ \mathrm{supp}(H_V\varphi_n)\subseteq\{x\in\mathbb{R}^3:2^nR_0<|x|<2^{n+1}R_0\}\ \ (\forall n\in\mathbb{N}),\tag{10.162}$$

$$(H_V\varphi_n\mid\varphi_n)_2<0\ \ (\forall n\in\mathbb{N})\tag{10.163}$$

が成り立つ. (10.162) より特に $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ の ONS である. 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ によって張られる $L^2(\mathbb{R}^3)$ の n 次元部分空間の上への射影作用素を,

$$P_n:=\varphi_1\odot\varphi_1+\cdots+\varphi_n\odot\varphi_n$$

(命題 10.111 を参照) とおき,

$$H_{V,n}:\mathrm{Ran}(P_n)\ni f\mapsto P_nH_Vf\in\mathrm{Ran}(P_n)$$

なる $\mathrm{Ran}(P_n)$ 上の自己共役作用素を定義する. このとき (10.162) より $\varphi_1,\cdots,\varphi_n\in\mathrm{Ran}(P_n)$ は $H_{V,n}$ の単位固有ベクトルである. よって Reyleigh-Ritz の原理 10.135 と (10.163) より,

$$\mu_n(H_V)\leqslant\mu_n(H_{V_n})=\max\{(H_V\varphi_j\mid\varphi_j)_2:j=1,\cdots,n\}<0$$

である. よって (10.158) が成り立つ.

□

定理 10.166 (加藤の定理)**.** $\alpha\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$, $k_j,K_{j,k}\in(0,\infty)$ $(\forall j,k\in\{1,\cdots,N\}:j\neq k)$ とし,

$$V(x_1,\cdots,x_N):=-\sum_{j=1}^N\frac{k_j}{|x_j|^\alpha}-\sum_{j\neq k}\frac{K_{j,k}}{|x_j-x_k|^\alpha}$$

として $V\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{3N})$ を定義する. このとき V による $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ 上の掛け算作用素は $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ 上の自己共役作用素 $-\Delta:H^2(\mathbb{R}^{3N})\to L^2(\mathbb{R}^{3N})$ (命題 10.162) に対して無限小 (定義 10.137) である. 従って,

$$H_V:=-\Delta+V:H^2(\mathbb{R}^{3N})\ni f\mapsto-\Delta f+Vf\in L^2(\mathbb{R}^{3N})$$

は $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ 上の下に有界な自己共役作用素であり, $-\Delta$ の芯は H_V の芯である (加藤-Rellich の定理 10.138 を参照).

証明. 任意の $j,k\in\{1,\cdots,N\}(j\neq k)$ に対し $V_j,V_{j,k}\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{3N})$ を,

$$V_j(x_1,\cdots,x_N):=-\frac{k_j}{|x_j|^\alpha},\ \ V_{j,k}(x_1,\cdots,x_N):=-\frac{K_{j,k}}{|x_j-x_k|^\alpha}$$

と定義する. 掛け算作用素 $V_j,V_{j,k}$ がそれぞれ $-\Delta$ に対して無限小であることを示せば十分である.

(1) 各 $j\in\{1,\cdots,N\}$ に対し V_j が $-\Delta$ に対して無限小であることを示す. 定理 10.165 より $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の掛け算作用素 $-\frac{k_j}{|\mathrm{id}|^\alpha}$ は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の自己共役作用素 $-\Delta$ に対して相対コンパクトであるので特に無限小 (定理 10.142) である. よって任意の $\varepsilon\in(0,1)$ に対し $b_\varepsilon\in[0,\infty)$ が存在し, 任意の $\varphi\in D(\mathbb{R}^{3N})$ に対し,

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\mathbb{R}^3}|V_j(x_1,\cdots,x_N)\varphi(x_1,\cdots,x_N)|^2dx_j\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta_{x_j}\varphi(x_1,\cdots,x_N)|^2dx_j\right)^{\frac{1}{2}}+b_\varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi(x_1,\cdots,x_N)|^2dx_j\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

が成り立つ. よって Minkowski の不等式 5.122 と Tonelli の定理 5.84 より,

$$\|V_j\varphi\|_2 \leqslant \varepsilon\|-\Delta_{x_j}\varphi\|_2 + b_\varepsilon\|\varphi\|_2 \quad (\forall\varphi \in D(\mathbb{R}^{3N})) \tag{10.164}$$

が成り立つ. 命題 10.162 より,

$$-\Delta_{x_j} = \mathcal{F}^{-1}|\mathrm{id}_j|^2\mathcal{F}, \quad -\Delta = \mathcal{F}^{-1}|\mathrm{id}|^2\mathcal{F}$$

であるから,

$$\|-\Delta_{x_j}\varphi\|_2 = \||\mathrm{id}_j|^2\mathcal{F}\varphi\|_2 \leqslant \||\mathrm{id}|^2\mathcal{F}\varphi\|_2 = \|-\Delta\varphi\|_2 \quad (\forall\varphi \in D(\mathbb{R}^{3N})) \tag{10.165}$$

である. よって (10.164) と (10.165) より,

$$\|V_j\varphi\|_2 \leqslant \varepsilon\|-\Delta\varphi\|_2 + b_\varepsilon\|\varphi\|_2 \quad (\forall\varphi \in D(\mathbb{R}^{3N})) \tag{10.166}$$

が成り立つ. ここで $D(\mathbb{R}^{3N})$ は $-\Delta : H^2(\mathbb{R}^{3N}) \to L^2(\mathbb{R}^{3N})$ の芯であり (定理 8.110 を参照), 掛け算作用素 V_j は閉作用素であるから, (10.166) より,

$$\|V_j f\|_2 \leqslant \varepsilon\|-\Delta f\|_2 + b_\varepsilon\|f\|_2 \quad (\forall f \in H^2(\mathbb{R}^{3N}))$$

が成り立つ. よって V_j は $-\Delta$ に対して無限小である.

(2) 各 $j,k \in \{1,\cdots,N\}(j \neq k)$ に対し $V_{j,k}$ が $-\Delta$ に対して無限小であることを示す. 定理 10.165 より $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の掛け算作用素 $-\frac{K_{j,k}}{|\mathrm{id}|^\alpha}$ は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の自己共役作用素 $-\Delta$ に対して相対コンパクトであるので特に無限小 (定理 10.142) である. よって任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対し $b_\varepsilon \in [0,\infty)$ が存在し, 任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^{3N})$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^3}|V_{j,k}(x_1,\cdots,x_N)\varphi(x_1,\cdots,x_N)|^2dx_j\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{K_{j,k}}{|x_j|^\alpha}\varphi(x_1,\cdots,x_j+x_k,\cdots,x_N)\right|^2dx_j\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta_{x_j}\varphi(x_1,\cdots,x_j+x_k,\cdots,x_N)|^2dx_j\right)^{\frac{1}{2}} + b_\varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi(x_1,\cdots,x_j+x_k,\cdots,x_N)|^2dx_j\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta_{x_j}\varphi(x_1,\cdots,x_N)|^2dx_j\right)^{\frac{1}{2}} + b_\varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi(x_1,\cdots,x_N)|^2dx_j\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって Minkowski の不等式 5.122 と Tonelli の定理 5.84 より,

$$\|V_{j,k}\varphi\|_2 \leqslant \varepsilon\|-\Delta_{x_j}\varphi\|_2 + b_\varepsilon\|\varphi\|_2 \quad (\forall\varphi \in D(\mathbb{R}^{3N}))$$

であるから, 後は (1) と同様にすれば $V_{j,k}$ が $-\Delta$ に対して無限小であることが分かる.

□

10.14 σ-WOT, σ-SOT, von Neumann 環, 二重可換子環定理

定義 10.167 ($B(\mathcal{H})$ の σ-WOT と σ-SOT)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. 任意の $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}$ に対し線型空間 $B(\mathcal{H})$ 上の線型汎関数 $\varphi_{u,v} : B(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ とセミノルム $p_v : B(\mathcal{H}) \to [0,\infty)$ を,

$$\varphi_{u,v}(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}}(Au_n \mid v_n), \quad p_v(A) := \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}}\|Av_n\|^2} = \|(Av_n)_{n\in\mathbb{N}}\| \quad (\forall A \in B(\mathcal{H}))$$

として定義する. このとき $\{\varphi_{u,v} : u,v \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}\}$, $\{p_v : v \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}\}$ はそれぞれ $B(\mathcal{H})$ 上の線型汎関数の分離族 (定義 3.61), $B(\mathcal{H})$ 上のセミノルムの分離族 (定義 3.56) である. $\{\varphi_{u,v} : u,v \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}\}$ が誘導する $B(\mathcal{H})$ 上の汎弱位相 (定義 3.62) を $B(\mathcal{H})$ 上の σ-WOT と言い, $\{p_v : v \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}\}$ が誘導する $B(\mathcal{H})$ 上のセミノルム位相 (定義 3.57) を $B(\mathcal{H})$ 上の σ-SOT と言う. セミノルム位相, 汎弱位相の基本性質 (命題 3.59, 命題 3.63) より $B(\mathcal{H})$ のネット $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$

と $A \in B(\mathcal{H})$ に対し,

$$\begin{aligned} A_\lambda \to A \ \ (\text{in } \sigma\text{-WOT}) \ &\Leftrightarrow \ \sum_{n\in\mathbb{N}}(A_\lambda u_n \mid v_n) \to \sum_{n\in\mathbb{N}}(Au_n \mid v_n) \ \ \left(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}\right), \\ A_\lambda \to A \ \ (\text{in } \sigma\text{-SOT}) \ &\Leftrightarrow \ \|((A_\lambda - A)v_n)_{n\in\mathbb{N}}\| \to 0 \ \ \left(\forall (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}\right) \end{aligned} \tag{10.167}$$

である.

注意 10.168 (σ-WOT, σ-SOT とトレース)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. 定理 10.158 の (5) より,

$$B^1(\mathcal{H}) = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \odot v_n : (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H} \right\}$$

であり, 任意の $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ に対し $T = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \odot v_n \in B^1(\mathcal{H})$ とおけば, 定理 10.158 の (1) より,

$$\mathrm{Tr}(AT) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Tr}(A(u_n \odot v_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (Au_n \mid v_n) = \varphi_{u,v}(A) \ \ (\forall A \in B(\mathcal{H}))$$

である. よって $B(\mathcal{H})$ 上の σ-WOT は $B(\mathcal{H})$ 上の線型汎関数の分離族 $\{\mathrm{Tr}(\,\cdot\,T) : T \in B^1(\mathcal{H})\}$ が誘導する汎弱位相であり, $B(\mathcal{H})$ のネット $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $A \in B(\mathcal{H})$ に対し,

$$A_\lambda \to A \ \ (\text{in } \sigma\text{-WOT}) \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Tr}(A_\lambda T) \to \mathrm{Tr}(AT) \ \ (\forall T \in B^1(\mathcal{H})) \tag{10.168}$$

である. そして $\{\mathrm{Tr}(\,\cdot\,T) : T \in B^1(\mathcal{H})\}$ は各点ごとの演算で線型空間であるから, 定理 3.65 より,

$$\{B(\mathcal{H}) \text{ 上の } \sigma\text{-WOT 連続な線型汎関数}\} = \{\mathrm{Tr}(\,\cdot\,T) : T \in B^1(\mathcal{H})\} \tag{10.169}$$

が成り立つ.
定理 10.158 の (4) より,

$$B^1(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})_+ = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \odot v_n : (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H} \right\}$$

であり, 任意の $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}$ に対し $T = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \odot v_n \in B^1(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})_+$ とおけば,

$$\mathrm{Tr}(A^*AT) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Tr}(A^*A(v_n \odot v_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (A^*Av_n \mid v_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Av_n\|^2 \ \ (\forall A \in B(\mathcal{H}))$$

である. よって $B(\mathcal{H})$ のネット $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $T \in B(\mathcal{H})$ に対し,

$$\begin{aligned} A_\lambda \to A \ \ (\text{in } \sigma\text{-SOT}) \ &\Leftrightarrow \ \mathrm{Tr}((A_\lambda - A)^*(A_{\lambda - A})T) \to 0 \ \ (\forall T \in B^1(\mathcal{H})) \\ &\Leftrightarrow \ (A_\lambda - A)^*(A_\lambda - A) \to 0 \ \ (\text{in } \sigma\text{-WOT}) \end{aligned} \tag{10.170}$$

が成り立つ[*166].

命題 10.169 (弱 $*$-位相としての σ-WOT)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. このとき,

$$B(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \mathrm{Tr}(A\,\cdot\,) \in B^1(\mathcal{H})^* \tag{10.171}$$

は等長線型同型写像であり, かつ σ-WOT と弱 $*$-位相に関して同相写像である. そして $B(\mathcal{H})$ の単位ノルム閉球 $(B(\mathcal{H}))_1 = \{A \in B(\mathcal{H}) : \|A\| \leqslant 1\}$ は σ-WOT コンパクトである.

[*166] 命題 10.147 より $B^1(\mathcal{H}) = \mathrm{span}(B^1(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})_+)$ であることに注意

証明. 定理 10.158 の (6) より (10.171) は等長線型同型写像であり，$B(\mathcal{H})$ のネット $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $A \in B(\mathcal{H})$ に対し，(10.168) より，

$$\begin{aligned} A_\lambda \to A \ \ (\text{in } \sigma\text{-WOT}) \ &\Leftrightarrow \ \operatorname{Tr}(A_\lambda T) \to \operatorname{Tr}(AT) \ \ (\forall T \in B^1(\mathcal{H})) \\ &\Leftrightarrow \ \operatorname{Tr}(A_\lambda\,\cdot\,) \to \operatorname{Tr}(A\,\cdot\,) \ \ (\text{in weak } *\text{-topology}) \end{aligned}$$

である．よってネットの収束による連続性の特徴付け (命題 1.50) より (10.171) は σ-WOT と弱 $*$-位相に関して同相写像である．Banach-Alaoglu の定理 3.67 より，

$$(B^1(\mathcal{H})^*)_1 = \{\varphi \in B^1(\mathcal{H})^* : \|\varphi\| \leqslant 1\} = \{\operatorname{Tr}(A\,\cdot\,) : A \in (B(\mathcal{H}))_1\}$$

は弱 $*$-位相でコンパクトであるので $(B(\mathcal{H}))_1$ は σ-WOT でコンパクトである．□

命題 10.170 ($B(\mathcal{H})$ の位相の強弱)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$B(\mathcal{H})$ の WOT, SOT, σ-WOT, σ-SOT, 作用素ノルム位相に関して，

(1) 作用素ノルムは σ-SOT より強く，σ-SOT は σ-WOT より強い．
(2) σ-SOT は SOT より強く，σ-WOT は WOT より強い．
(3) $B(\mathcal{H})$ の単位ノルム閉球 $(B(\mathcal{H}))_1 = \{A \in B(\mathcal{H}) : \|A\| \leqslant 1\}$ における WOT (resp. SOT) の相対位相と σ-WOT (resp. σ-SOT) の相対位相は一致する．

証明. (1) 任意 $A \in B(\mathcal{H})$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ に対し，

$$\|(Av_n)_{n\in\mathbb{N}}\| \leqslant \|A\|\|(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\|$$

であるから (10.167) と点列の収束による連続性の特徴付け (命題 1.60) より作用素ノルムは σ-SOT より強いことが分かる．任意の $A \in B(\mathcal{H})$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ に対し，

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} (Au_n \mid v_n)\right| = |((Au_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (v_n)_{n\in\mathbb{N}})| \leqslant \|(Au_n)_{n\in\mathbb{N}}\|\|(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\|$$

であるから (10.167) とネットの収束による連続性の特徴付け (命題 1.50) より σ-SOT は σ-WOT より強いことが分かる．

(2) 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} := (u, 0, 0, \cdots) \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} := (v, 0, 0, \cdots) \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ とおくと，

$$\|Av\| = \|(Av_n)_{n\in\mathbb{N}}\|, \ \ (Au \mid v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (Au_n \mid v_n) \ \ (\forall A \in B(\mathcal{H}))$$

である．よって (10.2), (10.167) とネットの収束による連続性の特徴付け (命題 1.50) より σ-WOT は WOT より強く，σ-SOT は SOT より強いことが分かる．

(3) 任意の $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ を取る．$(B(\mathcal{H}))_1$ のネット $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $A \in (B(\mathcal{H}))_1$ に対し，

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} ((A_\lambda - A)u_n \mid v_n)\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{N} ((A_\lambda - A)u_n \mid v_n)\right| + \sum_{n>N} 2\|u_n\|\|v_n\| \ \ (\forall N \in \mathbb{N})$$

であるからネットの収束による連続性の特徴付け (命題 1.50) より $(B(\mathcal{H}))_1 \ni A \mapsto (B(\mathcal{H}))_1$ は WOT と σ-WOT に関して連続写像 (従って (2) より同相写像) である．また，

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|(A_\lambda - A)v_n\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \|(A_\lambda - A)v_n\|^2 + \sum_{n\geqslant N} 4\|v_n\|^2 \ \ (\forall N \in \mathbb{N})$$

であるからネットの収束による連続性の特徴付け (命題 1.50) より $(B(\mathcal{H}))_1 \ni A \mapsto (B(\mathcal{H}))_1$ は SOT と σ-SOT に関して連続写像 (従って (2) より同相写像) である．

□

補題 10.171 (σ-SOT に関する $0 \in B(\mathcal{H})$ の基本近傍系)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．任意の $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ に対し $p_v : B(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \|(Av_n)_{n\in\mathbb{N}}\| \in [0, \infty)$ とおき，$(p_v < 1) = \{A \in B(\mathcal{H}) : p_v(A) < 1\}$ とおく．このとき $\{(p_v < 1) : v \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}\}$ は σ-SOT に関する $0 \in B(\mathcal{H})$ の基本近傍系である．

証明. 有限個の $v^j = (v_n^j)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ $(j = 1, \cdots, m)$ に対し，

$$v := (v_1^1, \cdots, v_1^m, v_2^1, \cdots, v_2^m, v_3^1, \cdots, v_3^m, \cdots) \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$$

とおけば $(p_v < 1) \subseteq \bigcap_{j=1}^m (p_{v^j} < 1)$ となることとセミノルム位相の基本性質 (命題 3.59 の (3)) による． □

定理 10.172. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$\varphi : B(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ を線型汎関数とする．このとき次は互いに同値である．

(1) φ は σ-WOT 連続である．
(2) φ は σ-SOT 連続である．
(3) $T \in B^1(\mathcal{H})$ が存在し $\varphi(A) = \mathrm{Tr}(AT)$ $(\forall A \in B(\mathcal{H}))$ が成り立つ．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は σ-SOT が σ-WOT より強い (命題 10.170) ことにより，(3) $\Rightarrow$ (1) は注意 10.168 による．(2) $\Rightarrow$ (3) を示す．(2) が成り立つとする．このとき $\{A \in B(\mathcal{H}) : |\varphi(A)| < 1\}$ は $0 \in B(\mathcal{H})$ の σ-SOT に関する近傍であるから補題 10.171 より $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ で，

$$\{A \in B(\mathcal{H}) : p_v(A) < 1\} \subseteq \{A \in B(\mathcal{H}) : |\varphi(A)| < 1\}$$

を満たすものが取れる．よって，

$$|\varphi(A)| \leqslant p_v(A) = \|(Av_n)_{n\in\mathbb{N}}\| \quad (\forall A \in B(\mathcal{H}))$$

が成り立つ．これより Hilbert 空間 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ の部分空間

$$\mathcal{K} := \{(Av_n)_{n\in\mathbb{N}} : A \in B(\mathcal{H})\}$$

を考えると，

$$\psi : \mathcal{K} \ni (Av_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \varphi(A) \in \mathbb{C}$$

は well-defined な (ノルムが 1 以下の) 有界線型汎関数であるので，Hahn-Banach の拡張定理 3.71 と Riesz の表現定理 3.44 より $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ が取れて，

$$\varphi(A) = \psi((Av_n)_{n\in\mathbb{N}}) = ((Av_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (Av_n \mid u_n) \quad (\forall A \in B(\mathcal{H}))$$

となる．よって，

$$T := \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \odot v_n \in B^1(\mathcal{H})$$

とおけば，

$$\mathrm{Tr}(AT) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (Au_n \mid v_n) \quad (\forall A \in B(\mathcal{H}))$$

となる (定理 10.158 を参照)． □

補題 10.173 (Krein-Smulian の定理)**.** X を $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間，$C \subseteq X^*$ を凸集合とする．そして，

$$(X^*)_r := \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| \leqslant r\} \quad (\forall r \in (0, \infty))$$

とおく．このとき次は互いに同値である．

(1) C は弱 $*$-位相に関して閉である．
(2) 任意の $r \in (0, \infty)$ に対し $C \cap (X^*)_r$ は弱 $*$-位相に関してコンパクトである．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は Banach-Alaoglu の定理 3.67 による. (2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとする. まず C はノルム位相で閉である. 実際任意の $\varphi \in \overline{C}^{\|\cdot\|}$ に対し $\lim_{n\to\infty}\|\varphi-\varphi_n\| = 0$ なる $\varphi_n \in C$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を取ると $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C \cap (X^*)_r$ なる $r \in (0,\infty)$ が取れて $C \cap (X^*)_r$ はノルム位相で閉 (ノルム位相は弱 $*$-位相より強いことによる) であるから $\varphi \in C \cap (X^*)_r \subseteq C$ である. ゆえに C はノルム位相で閉である.
C が弱 $*$-位相で閉であることを示すには任意の $\varphi_0 \in X^*\backslash C$ を取り $\varphi_0 \in X^*\backslash\overline{C}^{w^*}$ が成り立つことを示せばよい. C はノルム位相で閉だからある $r_0 \in (0,\infty)$ が存在し,

$$(\varphi_0 + (X^*)_{r_0}) \cap C = \varnothing$$

となる. ゆえに,

$$C_0 := \frac{1}{r_0}(C-\varphi_0)$$

とおけば C_0 は凸集合であり,

$$(X^*)_1 \cap C_0 = \varnothing \tag{10.172}$$

である. また $\overline{C_0}^{w^*} = \frac{1}{r_0}(\overline{C}^{w^*}-\varphi_0)$ であるから, $\varphi_0 \in X^*\backslash\overline{C}^{w^*}$ を示すには,

$$0 \in X^*\backslash\overline{C_0}^{w^*} \tag{10.173}$$

を示せばよい.
まず任意の $r \in (0,\infty)$ に対し $C_0 \cap (X^*)_r$ が弱 $*$-位相でコンパクトであることを示す. そのためには Banach-Alaoglu の定理 3.67 より $C_0 \cap (X^*)_r$ が弱 $*$-位相で閉であることを示せばよい. 任意の $\varphi \in \overline{C_0 \cap (X^*)_r}^{w^*} \subseteq (X^*)_r$ を取り, 弱 $*$-位相で φ に収束する $C_0 \cap (X^*)_r$ のネット $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を取る (命題 1.34). このとき,

$$r_0\varphi_\lambda + \varphi_0 \in C \cap (X^*)_{r_0 r+\|\varphi_0\|} \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

であるから (2) が成り立つという仮定より,

$$r_0\varphi + \varphi_0 = w^*\text{-}\lim_{\lambda\in\Lambda}(r_0\varphi_\lambda + \varphi_0) \in C \cap (X^*)_{r_0 r+\|\varphi_0\|}$$

である. よって $\varphi \in C_0 \cap (X^*)_r$ であるから $C_0 \cap (X^*)_r$ は弱 $*$-位相でコンパクトである. 今, 任意の空でない $E \subseteq X$ に対し,

$$\mathrm{Pol}(E) := \{\varphi \in X^* : \forall x \in E,\ \mathrm{Re}(\varphi(x)) \geqslant -1\}$$

とおく. このとき命題 1.34 より $\mathrm{Pol}(E)$ は弱 $*$-位相で閉である. そして E が絶対凸集合 (定義 3.58) ならば,

$$\mathrm{Pol}(E) = \{\varphi \in X^* : \forall x \in E,\ |\varphi(x)| \leqslant 1\}$$

であるから,

$$(X)_r := \{x \in X : \|x\| \leqslant r\} \quad (\forall r \in (0,\infty))$$

とおけば,

$$\mathrm{Pol}((X)_{r^{-1}}) = \{\varphi \in X^* : \forall x \in X_{r^{-1}},\ |\varphi(x)| \leqslant 1\} = (X^*)_r \quad (\forall r \in (0,\infty))$$

である. (10.172) より,

$$\varnothing = C_0 \cap (X^*)_1 = C_0 \cap \mathrm{Pol}((X)_1) = C_0 \cap \bigcap_{x\in X}\mathrm{Pol}(\{x\})$$

であるから,

$$\varnothing = C_0 \cap \bigcap_{x\in X}\mathrm{Pol}(\{x\}) \cap (X^*)_2$$

である. 上段で示したように $C_0 \cap (X^*)_2$ は弱 $*$-位相でコンパクトであり, 各 $\mathrm{Pol}(\{x\})$ は弱 $*$-位相で閉であるから, 有限集合 $F_1 \subseteq (X)_1$ が存在し,

$$\varnothing = C_0 \cap \bigcap_{x\in F_1}\mathrm{Pol}(\{x\}) \cap (X^*)_2 = C_0 \cap \mathrm{Pol}(F_1) \cap (X^*)_2$$

が成り立つ. これより,

$$\varnothing = C_0 \cap \mathrm{Pol}(F_1) \cap (X^*)_2 = C_0 \cap \mathrm{Pol}(F_1) \cap \mathrm{Pol}((X)_{2^{-1}}) = C_0 \cap \mathrm{Pol}(F_1) \cap \bigcap_{x \in (X)_{2^{-1}}} \mathrm{Pol}(\{x\})$$

だから,

$$\varnothing = C_0 \cap \mathrm{Pol}(F_1) \cap \bigcap_{x \in (X)_{2^{-1}}} \mathrm{Pol}(\{x\}) \cap (X^*)_3$$

である. $C_0 \cap (X^*)_3$ は弱 $*$-位相でコンパクトであるから, 有限集合 $F_2 \subseteq (X)_{2^{-1}}$ が存在し,

$$\varnothing = C_0 \cap \mathrm{Pol}(F_1) \cap \bigcap_{x \in F_2} \mathrm{Pol}(\{x\}) \cap (X^*)_3 = C_0 \cap \mathrm{Pol}(F_1) \cap \mathrm{Pol}(F_2) \cap (X^*)_3$$

が成り立つ. 同様の操作を繰り返し, 有限集合の列 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$F_n \subseteq (X)_{n^{-1}}, \quad C_0 \cap \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Pol}(F_k) \cap (X^*)_{n+1} = \varnothing \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{10.174}$$

を満たすものを構成する. $F_n = \{x_{n,1}, \cdots, x_{n,m(n)}\}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ とおき, X の点列

$$x_{1,1}, \cdots, x_{1,m(1)}, x_{2,1}, \cdots, x_{2,m(2)}, x_{3,1}, \cdots, x_{3,m(3)}, \cdots$$

を改めて $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とおくと, $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 0$ が成り立つ. そこで $c_0(\mathbb{N})$ を 0 に収束する $\mathbb{C}$ の点列全体に各点ごとの演算と sup ノルムを入れた Banach 空間とし,

$$T : X^* \to c_0(\mathbb{N}), \quad T(\varphi) := (\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \quad (\forall \varphi \in X^*)$$

なる線型作用素を定義する. Banach 空間 $c_0(\mathbb{N})$ の 0 を中心とする半径 1 の球を,

$$B := \{(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N}) : \|(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |t_n| < 1\}$$

とおく. このとき,

$$T(C_0) \cap B = \varnothing \tag{10.175}$$

が成り立つ. 実際, 任意の $\varphi \in C_0$ に対し $\|\varphi\| \leqslant n+1$ なる $n \in \mathbb{N}$ を取れば, (10.174) より,

$$\varphi \notin \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Pol}(F_k)$$

であるから, ある $m \in \mathbb{N}$ に対し $\mathrm{Re}(\varphi(x_m)) < -1$ となるので,

$$\|T(\varphi)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi(x_n)| > 1$$

である. ゆえに (10.175) が成り立つ. $T(C_0)$ と B はそれぞれ Banach 空間 $c_0(\mathbb{N})$ の凸集合であり B は開集合であるから, Hahn-Banach の分離定理 3.77 より $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}) = (c_0(\mathbb{N}))^*$ (Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.187) と $t \in \mathbb{R}$ で,

$$0 = T(0) < t \leqslant \mathrm{Re} \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \varphi(x_n) = \mathrm{Re} \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(s_n x_n) \quad (\forall \varphi \in C_0)$$

を満たすものが取れる. ここで,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|s_n x_n\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \sum_{n\in\mathbb{N}} |s_n| < \infty$$

であり X は Banach 空間であるから $\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n x_n \in X$ はノルムで収束し,

$$0 < t \leqslant \mathrm{Re} \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(s_n x_n) = \mathrm{Re}\varphi\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n x_n\right) \quad (\forall \varphi \in C_0)$$

となる. よってもし $0 \in \overline{C_0}^{w^*}$ ならば弱 $*$-位相で 0 に収束する C_0 のネット $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が取れる (命題 1.34) ので,

$$0 < t \leqslant \lim_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Re}\varphi_\lambda\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n x_n\right) = 0$$

となり矛盾する. ゆえに (10.173) が成り立つ. □

定理 10.174. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $\mathcal{C} \subseteq B(\mathcal{H})$ を凸集合とする.

$$(B(\mathcal{H}))_r := \{A \in B(\mathcal{H}) : \|A\| \leqslant r\} \quad (\forall r \in (0,\infty))$$

とおく. このとき次は互いに同値である.

(1) $\mathcal{C}$ は σ-WOT 閉である.
(2) $\mathcal{C}$ は σ-SOT 閉である.
(3) 任意の $r \in (0,\infty)$ に対し $\mathcal{C} \cap (B(\mathcal{H}))_r$ は σ-WOT でコンパクトである.
(4) 任意の $r \in (0,\infty)$ に対し $\mathcal{C} \cap (B(\mathcal{H}))_r$ は WOT でコンパクトである.
(5) 任意の $r \in (0,\infty)$ に対し $\mathcal{C} \cap (B(\mathcal{H}))_r$ は SOT で閉である.

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2) は定理 10.172 と Hahn-Banach の分離定理の系 3.79 による.
(1) $\Leftrightarrow$ (3) は命題 10.169 と Krein-Smulian の定理 10.173 による.
(3) $\Leftrightarrow$ (4) は命題 10.170 の (3) により, (4) $\Leftrightarrow$ (5) は系 10.12 による. □

定義 10.175 (可換子環)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $\varnothing \neq \mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ とする.

$$\mathcal{M}' := \{A \in B(\mathcal{H}) : \forall B \in \mathcal{M},\ AB = BA\}$$

を $\mathcal{M}$ の可換子環と言う.

命題 10.176 (可換子環の基本性質)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $\varnothing \neq \mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ とする. このとき次が成り立つ.

(1) $\mathcal{M}'$ は $B(\mathcal{H})$ の単位元を含む部分多元環であり, WOT, SOT, σ-WOT, σ-SOT, ノルム位相全てに関して閉である.
(2) $\mathcal{M}$ が $*$-演算で閉じているならば $\mathcal{M}'$ も $*$-演算で閉じている.
(3) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}''$ である.
(4) もし $\mathcal{M}$ が $B(\mathcal{H})$ の部分 $*$-環であり $\mathcal{M}\mathcal{H} = \mathrm{span}\{Au : A \in \mathcal{M}, u \in \mathcal{H}\}$ が $\mathcal{H}$ で稠密ならば, 任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し $\mathcal{M}''v \subseteq \overline{\mathcal{M}v}$ が成り立つ.

証明. (1) $\mathcal{M}'$ が $B(\mathcal{H})$ の単位元を含む部分多元環であることは自明である. 任意の $A \in \overline{\mathcal{M}'}^{\mathrm{WOT}}$ に対し WOT で A に収束する $\mathcal{M}'$ のネット $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が取れる (命題 1.34). 任意の $B \in \mathcal{M}$, 任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(ABu \mid v) = \lim_{\lambda \in \Lambda}(A_\lambda Bu \mid v) = \lim_{\lambda \in \Lambda}(BA_\lambda u \mid v) = \lim_{\lambda \in \Lambda}(BAu \mid v)$$

であるから $A \in \mathcal{M}'$ である. よって $\mathcal{M}'$ は WOT 閉である. SOT, σ-WOT, σ-SOT, ノルム位相はいずれも WOT より強い (命題 10.170) ので $\mathcal{M}'$ は SOT, σ-WOT, σ-SOT, ノルム位相それぞれに関して閉である.

(2) $\mathcal{M}$ が $*$-演算で閉じているならば, 任意の $A \in \mathcal{M}'$, 任意の $B \in \mathcal{M}$ に対し $A^*B = (B^*A)^* = (AB^*)^* = BA^*$ だから $A^* \in \mathcal{M}'$ である.

(3) 自明である.

(4) 任意の $v \in \mathcal{H}$ を取り, 閉部分空間 $\overline{\mathcal{M}v}$ の上への射影作用素を $P_v \in B(\mathcal{H})$ とおく. すると,

$$A\overline{\mathcal{M}v} \subseteq \overline{\mathcal{M}v} = \mathrm{Ran}(P_v) \quad (\forall A \in \mathcal{M})$$

であるから,

$$AP_v = P_vAP_v \quad (\forall A \in \mathcal{M})$$

である. よって,

$$AP_v = P_vAP_v = (P_vA^*P_v)^* = (A^*P_v)^* = P_vA \quad (\forall A \in \mathcal{M})$$

であるから $P_v \in \mathcal{M}'$ である. 任意の $A \in \mathcal{M}, u \in \mathcal{H}$ に対し,

$$((1-P_v)v \mid Au) = ((1-P_v)A^*v \mid u) = (A^*v - A^*v \mid u) = 0$$

であり, $\mathcal{M}\mathcal{H} = \mathrm{span}\{Au : A \in \mathcal{M}, u \in \mathcal{H}\}$ は $\mathcal{H}$ で稠密だから $(1-P_v)v = 0$, 従って $v = P_vv$ である. よって,

$$\mathcal{M}''v = \mathcal{M}''P_vv = P_v\mathcal{M}''v \subseteq \mathrm{Ran}(P_v) = \overline{\mathcal{M}v}$$

である.

□

補題 10.177. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし, 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し,

$$P_j : \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H} \ni (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto v_j \in \mathcal{H},$$
$$Q_j : \mathcal{H} \ni v \mapsto (0, \cdots, 0, \overset{j\text{ 番目}}{v}, 0, \cdots) \in \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}$$

とおく. そして任意の $T \in B(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H})$ に対し,

$$T_{i,j} := P_i T Q_j \in B(\mathcal{H}) \ \ (\forall i, j \in \mathbb{N})$$

とおく. このとき $S, T \in B(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H})$ が $S_{i,j} = T_{i,j}$ $(\forall i, j \in \mathbb{N})$ を満たすならば $S = T$ が成り立つ.

証明. 任意の $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}$, 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対し,

$$P_i T v = P_i T \sum_{j \in J} Q_j v_j = \sum_{j \in \mathbb{N}} P_i T Q_j v_j = \sum_{j \in \mathbb{N}} T_{i,j} v_j,$$
$$P_i S v = P_i S \sum_{j \in J} Q_j v_j = \sum_{j \in J} P_i S Q_j v_j = \sum_{j \in J} S_{i,j} v_j$$

だから $T_{i,j} = S_{i,j}$ $(\forall i, j \in \mathbb{N})$ ならば $Tv = (P_i T v)_{i \in \mathbb{N}} = (P_i S v)_{i \in \mathbb{N}} = Sv$ である. よって $T = S$ である. □

定理 10.178 (二重可換子環定理)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし, $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を部分 $*$-環で,

$$\mathcal{M}\mathcal{H} = \mathrm{span}\{Av : A \in \mathcal{M}, v \in \mathcal{H}\}$$

が $\mathcal{H}$ で稠密であるものとする. このとき,

$$\mathcal{M}'' = \overline{\mathcal{M}}^{\sigma\text{-SOT}} = \overline{\mathcal{M}}^{\sigma\text{-WOT}} = \overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{SOT}} = \overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{WOT}}$$

が成り立つ.

証明.

$$\overline{\mathcal{M}}^{\sigma\text{-SOT}} = \overline{\mathcal{M}}^{\sigma\text{-WOT}} \subseteq \overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{SOT}} = \overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{WOT}} \subseteq \mathcal{M}''$$

は成り立つ (1 番目の等号は定理 10.174 の (1) $\Leftrightarrow$ (2), 2 番目の等号は系 10.12, 1 番目の包含関係は σ-WOT (resp. σ-SOT) が WOT (resp. SOT) より強いこと (命題 10.170), 2 番目の包含関係は命題 10.176 の (1), (3) による). よって,

$$\mathcal{M}'' \subseteq \overline{\mathcal{M}}^{\sigma\text{-SOT}} \tag{10.176}$$

を示せばよい. そのためには補題 10.171 における σ-SOT に関する $0 \in B(\mathcal{H})$ の基本近傍系 $\{(p_v < 1) : v \in \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}\}$ を考え, 任意の $A \in \mathcal{M}''$ と $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}$ に対し,

$$(A + (p_v < 1)) \cap \mathcal{M} \neq \varnothing \tag{10.177}$$

が成り立つことを示せばよい. 今, $\pi : B(\mathcal{H}) \to B(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H})$ を,

$$\pi(A)(v_n)_{n \in \mathbb{N}} := (Av_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \left(\forall A \in B(\mathcal{H}),\ \forall (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}\right)$$

として定義する. すると π は $*$-環準同型写像であるから $\pi(\mathcal{M})$ は $B(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H})$ の部分 $*$-環である. そして $\mathcal{M}\mathcal{H}$ が $\mathcal{H}$ で稠密であることから,

$$\pi(\mathcal{M}) \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H} = \mathrm{span}\left\{(Av_n)_{n \in \mathbb{N}} : A \in \mathcal{M},\ (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}\right\}$$

は $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}$ で稠密である．よって命題 10.176 の (4) より，

$$\pi(\mathcal{M})''v \subseteq \overline{\pi(\mathcal{M})v} \quad \left(\forall v \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}\right) \tag{10.178}$$

が成り立つ．今，

$$\pi(\mathcal{M}'') \subseteq \pi(\mathcal{M})'' \tag{10.179}$$

が成り立つことを示す．$R \in B(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H})$ に対し，補題 10.177 より，

$$\begin{aligned} R \in \pi(\mathcal{M})' \quad &\Leftrightarrow \quad R\pi(A) = \pi(A)R \ \ (\forall A \in \mathcal{M}) \\ &\Leftrightarrow \quad R_{i,j}A = AR_{i,j} \ \ (\forall i,j \in \mathbb{N}, \forall A \in \mathcal{M}) \\ &\Leftrightarrow \quad R_{i,j} \in \mathcal{M}' \ \ (\forall i,j \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

であるから，任意の $A \in \mathcal{M}''$，任意の $R \in \pi(\mathcal{M})'$ に対し，

$$AR_{i,j} = R_{i,j}A \ \ (\forall i,j \in \mathbb{N}),$$

従って補題 10.177 より $\pi(A)R = R\pi(A)$ である．よって (10.179) が成り立つので，(10.178) より，

$$\pi(\mathcal{M}'')v \subseteq \pi(\mathcal{M})''v \subseteq \overline{\pi(\mathcal{M})v} \quad \left(\forall v \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}\right)$$

であるから，任意の $A \in \mathcal{M}''$，任意の $v \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}$ に対し，$B \in \mathcal{M}$ で，

$$1 > \|\pi(A)v - \pi(B)v\| = p_v(A-B)$$

を満たすものが存在する．

$$B \in (A + (p_v < 1)) \cap \mathcal{M}$$

であるから，(10.177) が成り立つ．よって (10.176) が成り立つ． □

定義 10.179 (von Neumann 環)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$B(\mathcal{H})$ の単位元を含む部分 $*$-環 $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ で $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ を満たすものを $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環と言う．二重可換子環定理 10.178 より $B(\mathcal{H})$ の単位元を含む部分 $*$-環 $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ が von Neumann 環であるための必要十分条件は $\mathcal{M}$ が WOT, SOT, σ-WOT, σ-SOT のいずれかで閉であることである．

注意 10.180. WOT, SOT, σ-WOT, σ-SOT はノルム位相より弱い (命題 10.170) ので von Neumann 環 $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ はノルム位相でも閉，従って $B(\mathcal{H})$ の部分 C^*-環である．

定義 10.181 (von Neumann 環にアフィリエイトする線型作用素)**.** Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環 $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を考える．$\mathcal{H}$ 上の線型作用素 T が $\mathcal{M}$ にアフィリエイトするとは，

$$ST \subseteq TS \ \ (\forall S \in \mathcal{M}')$$

が成り立つことを言う．$\mathcal{M}$ にアフィリエイトする線型作用素全体を $\widetilde{\mathcal{M}}$ と表す．

命題 10.182 (von Neumann 環にアフィリエイトする線型作用素全体の基本性質)**.** Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環 $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ にアフィリエイトする線型作用素全体 $\widetilde{\mathcal{M}}$ について次が成り立つ．

(1) $\widetilde{\mathcal{M}} \cap B(\mathcal{H}) = \mathcal{M}$.
(2) 任意の $T, T_1, T_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}$，任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し $\alpha T, T_1 + T_2, T_1T_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}$.
(3) $T \in \widetilde{\mathcal{M}}$ が稠密に定義されているならば $T^* \in \widetilde{\mathcal{M}}$.
(4) $T \in \widetilde{\mathcal{M}}$ が可閉ならば $\overline{T} \in \widetilde{\mathcal{M}}$.
(5) $T \in \widetilde{\mathcal{M}}$ が単射ならば $T^{-1} \in \widetilde{\mathcal{M}}$.

証明. (1) $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ (von Neumann 環の定義 10.179) であることと $\widetilde{\mathcal{M}}$ の元の定義 10.181 より明らかである．

(2) 任意の $T, T_1, T_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $S \in \mathcal{M}'$ に対し,

$$S(\alpha T) = \alpha ST \subseteq \alpha TS = (\alpha T)S,$$

$$S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2 \subseteq T_1 S + T_2 S = (T_1 + T_2)S,$$

$$S(T_1 T_2) \subseteq T_1(ST_2) \subseteq (T_1 T_2)S$$

であるから成り立つ.

(3) 任意の $S \in \mathcal{M}'$, $u \in D(T)$, $v \in D(T^*)$ を取る. $S^*Tu = TS^*u$ より,

$$(u \mid ST^*v) = (S^*u \mid T^*v) = (TS^*u \mid v) = (S^*Tu \mid v) = (Tu \mid Sv).$$

よって $Sv \in D(T^*)$, $ST^*v = T^*Sv$ であるから $ST^* \subseteq T^*S$ である. ゆえに $T^* \in \widetilde{\mathcal{M}}$ である.

(4) 任意の $S \in \mathcal{M}'$, $v \in D(\overline{T})$ を取る. $D(T)$ の点列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty}(v_n, Tv_n) = (v, \overline{T}v)$ を満たすものを取ると,

$$Sv = \lim_{n\to\infty} Sv_n, \quad S\overline{T}v = \lim_{n\to\infty} STv_n = \lim_{n\to\infty} TSv_n$$

だから $S\overline{T}v = \overline{T}Sv$ である. よって $S\overline{T} \subseteq \overline{T}S$ である.

(5) 任意の $S \in \mathcal{M}'$ を取る. 任意の $v \in D(T^{-1}) = \mathrm{Ran}(T)$ に対し, $u = T^{-1}v \in D(T)$ とおけば $STu = TSu$ だから,

$$ST^{-1}v = Su = T^{-1}TSu = T^{-1}STu = T^{-1}Sv$$

である. よって $ST^{-1} \subseteq T^{-1}S$ だから $T^{-1} \in \widetilde{\mathcal{M}}$ である.

□

定理 10.183 (von Neumann 環と Borel 関数カルキュラス*[167]). Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環 $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ にアフィリエイトする線型作用素全体 $\widetilde{\mathcal{M}}$ について次が成り立つ.

(1) $T \in \mathcal{M}$ が正規作用素ならば任意の Borel 関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し $f(T) \in \widetilde{\mathcal{M}}$.
(2) $T \in \widetilde{\mathcal{M}}$ が自己共役作用素ならば任意の Borel 関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し $f(T) \in \widetilde{\mathcal{M}}$.
(3) $T \in \widetilde{\mathcal{M}}$ が稠密に定義された閉線型作用素で $T = V|T|$ が T の極分解 (10.75) ならば $V \in \mathcal{M}$, $|T| \in \widetilde{\mathcal{M}}$.

証明. (1) T のスペクトル測度を $E : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ とする. 任意の連続関数 $f \in C(\sigma(T))$ に対し,

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE(\lambda) \in C^*(\{1, T\}) \subseteq \mathcal{M}$$

*[168]だから, 任意の $S \in \mathcal{M}'$, $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE_{u,S^*v}(\lambda) = (f(T)u \mid S^*v) = (f(T)Su \mid v) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE_{Su,v}(\lambda) \quad (\forall f \in C(\sigma(T))).$$

よって Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.187 より,

$$(E(B)u \mid S^*v) = E_{u,S^*v}(B) = E_{Su,v}(B) = (E(B)Su \mid v) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\sigma(T)})$$

であるから,

$$E(B) \in \mathcal{M}'' = \mathcal{M} \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\sigma(T)})$$

が成り立つ. これより任意の Borel 単関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し,

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE(\lambda) \in \mathcal{M} \tag{10.180}$$

*[167] Borel 関数カルキュラスの定義 10.65 を参照.
*[168] 定理 10.61 を参照.

が成り立つ．有界 Borel 関数は Borel 単関数の列によって一様近似できる (命題 5.129) ので (10.180) は $f:\sigma(T)\to\mathbb{C}$ が有界 Borel 関数の場合も成り立つ．任意の Borel 関数 $f:\sigma(T)\to\mathbb{C}$ に対し有界 Borel 関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$f_n := f\chi_{(|f|\leqslant n)} \quad (\forall n\in\mathbb{N})$$

として定義すると，$f_n(T)\in\mathcal{M}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ であり，任意の $v\in D_E(f)=D(f(T))$ に対し，

$$\|f(T)v-f_n(T)v\|^2=\int_{\sigma(T)}|f(\lambda)-f_n(\lambda)|^2dE_{v,v}(\lambda)\to 0 \quad (n\to\infty)$$

であるから，任意の $S\in\mathcal{M}'$ に対し，

$$Sf(T)v=\lim_{n\to\infty}Sf_n(T)v=\lim_{n\to\infty}f_n(T)Sv=\lim_{n\to\infty}f(T)E((|f|\leqslant n))Sv=f(T)Sv$$

である．ただし最後の等号で $f(T)$ が閉線型作用素であることと $\lim_{n\to\infty}E((|f|\leqslant n))Sv=Sv$ であることを用いた．よって任意の $S\in\mathcal{M}'$ に対し $Sf(T)\subseteq f(T)S$ なので $f(T)\in\widetilde{\mathcal{M}}$ である．

(2) T の Cayley 変換 $C(T)=(T-i)(T+i)^{-1}$ はユニタリ作用素 (定理 10.34) であり，命題 10.182 より $C(T)\in\mathcal{M}$ である．そして $C(T)$ のスペクトル測度を F とすると，定理 10.63 の証明より任意の Borel 関数 $f:\sigma(T)\to\mathbb{C}$ に対し，

$$f(T)=\int_{\sigma(C(T))\setminus\{1\}}f(i(1+\lambda)(1-\lambda)^{-1})dF(\lambda)$$

であるから (1) より $f(T)\in\widetilde{\mathcal{M}}$ が成り立つ．

(3) 命題 10.182 より $T^*T\in\widetilde{\mathcal{M}}$ だから (2) より $|T|=\sqrt{T^*T}\in\widetilde{\mathcal{M}}$ である．よって任意の $S\in\mathcal{M}'$ に対し，

$$S|T|v=|T|Sv \quad (\forall v\in D(|T|))$$

だから，

$$S(\overline{\mathrm{Ran}(|T|)})\subseteq\overline{\mathrm{Ran}(|T|)}$$

であり，V^*V は $\overline{\mathrm{Ran}(|T|)}$ の上への射影作用素であるから，

$$SV^*V=V^*VSV^*V \quad (\forall S\in\mathcal{M}').$$

これより，

$$SV^*V=(V^*VS^*V^*V)^*=(S^*V^*V)^*=V^*VS \quad (\forall S\in\mathcal{M}')$$

だから $V^*V\in\mathcal{M}''=\mathcal{M}$ が成り立つ．また任意の $S\in\mathcal{M}'$ に対し，

$$SV|T|v=STv=TSv=V|T|Sv=VS|T|v \quad (\forall v\in D(|T|))$$

であるから $\mathrm{Ran}(V^*V)=\overline{\mathrm{Ran}(|T|)}$ 上で $SV=VS$ が成り立つので，

$$SV=SVV^*V=VSV^*V=VV^*VS=VS$$

である．$V\in\mathcal{M}''=\mathcal{M}$ が成り立つ．

□

定義 10.184 (von Neumann 環の射影全体)**.** von Neumann 環 $\mathcal{M}$ の射影全体を $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ と表す．

定義 10.185 (非負値係数の線型結合全体)**.** 線型空間 V の空でない部分集合 D に対し，

$$\mathrm{span}_+(D):=\left\{\sum_{j=1}^n\alpha_jv_j : n\in\mathbb{N},\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in[0,\infty),v_1,\cdots,v_n\in D\right\}\subseteq V$$

と定義する．

定理 10.186 (von Neumann 環の射影による生成)**.** $\mathcal{M}\subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環とする．このとき次が成り立つ．

(1) $\mathcal{M}_+ = \overline{\mathrm{span}_+\,\mathcal{P}(\mathcal{M})}^{\|\cdot\|}$.
(2) 任意の $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ に対し $P\mathcal{M}_+P = \overline{\mathrm{span}_+\{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) : Q \leqslant P\}}^{\|\cdot\|}$.

証明. (1) 任意の $T \in \mathcal{M}_+$ を取る. $\mathrm{id} : \sigma(T) \ni \lambda \mapsto \lambda \in [0,\infty)$ は非負値有界 Borel 関数なので命題 5.29 より $\sigma(T)$ 上の非負値 Borel 単関数の列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\mathrm{id} : \sigma(T) \to [0,\infty)$ に一様収束するものが取れる. 定理 10.183 より,

$$s_n(T) \in \mathrm{span}_+(\mathcal{P}(\mathcal{M})) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であり,

$$\|T - s_n(T)\| \leqslant \sup_{\lambda\in\sigma(T)} \|\lambda - s_n(\lambda)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから $T = \lim_{n\to\infty} s_n(T) \in \overline{\mathrm{span}_+(\mathcal{P}(\mathcal{M}))}^{\|\cdot\|}$ である.

(2) $P = 0$ ならば自明なので $P > 0$ とする. 閉部分空間 $\mathcal{K} := \mathrm{Ran}(P) \subseteq \mathcal{H}$ を定義する. そして任意の $T \in B(\mathcal{H})$ に対し $T_{\mathcal{K}} \in B(\mathcal{K})$ を,

$$T_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \ni v \mapsto PTv \in \mathcal{K}$$

として定義する. すると,

$$\|T_{\mathcal{K}}\| = \|PTP\| \quad (\forall T \in B(\mathcal{H}))$$

であるから,

$$\Phi : PB(\mathcal{H})P \ni PTP \mapsto T_{\mathcal{K}} \in B(\mathcal{K})$$

は well-defined であり, 等長 $*$-環同型写像である. そしてネットによる連続性の議論 (命題 1.50) により Φ は $PB(\mathcal{H})P(\subseteq B(\mathcal{H}))$ の WOT と $B(\mathcal{K})$ の WOT に関して同相写像であることが分かる. $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ だから $P\mathcal{M}P$ は $PB(\mathcal{H})P$ の WOT 閉部分 $*$-環なので, $\Phi(P\mathcal{M}P)$ は $B(\mathcal{K})$ の WOT 閉部分 $*$-環である. また $\Phi(P)$ は $B(\mathcal{K})$ の恒等写像なので $\Phi(P\mathcal{M}P)$ は $\mathcal{K}$ の von Neumann 環 (定義 10.179) である. そして Φ が $*$-環同型写像であることから,

$$\Phi(P\mathcal{M}_+P) = \Phi((P\mathcal{M}P)_+) = \Phi(P\mathcal{M}P)_+$$

であり,

$$\mathcal{P}(\Phi(P\mathcal{M}P)) = \{\Phi(Q) : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), Q \leqslant P\}$$

なので, (1) より,

$$\Phi(P\mathcal{M}_+P) = \overline{\mathrm{span}_+\{\Phi(Q) : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), Q \leqslant P\}}^{\|\cdot\|}$$

である. よって Φ の等長同型性より,

$$P\mathcal{M}_+P = \overline{\mathrm{span}_+\{Q : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), Q \leqslant P\}}^{\|\cdot\|}$$

が成り立つ.

□

10.15 Hilbert 空間上の (有界とは限らない) 反線型作用素の基本性質

定義 10.187 (Hilbert 空間上の (有界とは限らない) 反線型作用素)**.** $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする. T が $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への反線型作用素であると言うとき, T は $\mathcal{H}$ 全体で定義されているとは限らず, $\mathcal{H}$ のある線型部分空間 $D(T) \subseteq \mathcal{H}$ 上で定義され, $\mathcal{K}$ に値を取る反線型作用素 (定義 3.40) であることを意味するものとする. $D(T) \subseteq \mathcal{H}$ を T の定義域, $\mathrm{Ran}(T) = T(D(T)) \subseteq \mathcal{K}$ を T の値域と言う. そして直和 Hilbert 空間 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ の部分集合

$$G(T) := \{(v, Tv) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{K} : v \in D(T)\}$$

を T のグラフと言う.
Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への反線型作用素のことを単に $\mathcal{H}$ 上の反線型作用素と言う.

定義 10.188 (稠密に定義された反線型作用素, 閉反線型作用素)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への反線型作用素とする. T が稠密に定義されているとは T の定義域 $D(T)$ が $\mathcal{H}$ で稠密であることを言う. また T が閉であるとは T のグラフ $G(T)$ が $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ の閉部分集合であることを言う.

定義 10.189 (反線型作用素の包含関係)**.** S, T をそれぞれ Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への反線型作用素とする.

$$S \subseteq T \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} G(S) \subseteq G(T)$$

と定義する. これを T は S を包含する (S は T に包含される) と言う. 明らかにこの包含関係は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への反線型作用素全体における順序である.

定義 10.190 (単射反線型作用素の逆作用素)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への単射反線型作用素とする. このとき $D(T) \ni v \mapsto Tv \in \mathrm{Ran}(T)$ の逆写像として定義される $\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ への反線型作用素を,

$$T^{-1} : D(T^{-1}) := \mathrm{Ran}(T) \ni Tv \mapsto v \in \mathcal{H}$$

と表す.

定義 10.191 (反線型作用素の和, スカラー倍, 積)**.** S, T をそれぞれ Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への反線型作用素とする. このとき $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への反線型作用素 $S + T$ を,

$$S + T : D(S+T) := D(S) \cap D(T) \ni v \mapsto Sv + Tv \in \mathcal{K}$$

と定義する. また $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への反線型作用素 αT を,

$$\alpha T : D(\alpha T) := D(T) \ni v \mapsto \alpha T v \in \mathcal{K} \quad (\alpha \neq 0 \text{ の場合 }),$$
$$\alpha T : D(\alpha T) := \mathcal{H} \ni v \mapsto 0 \in \mathcal{K} \quad (\alpha = 0 \text{ の場合 })$$

と定義する.
$\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{L}$ をそれぞれ Hilbert 空間とし, T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への (反) 線型作用素, S を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{L}$ への (反) 線型作用素とする. このとき $\mathcal{H}$ から $\mathcal{L}$ への (反) 線型作用素 ST を,

$$ST : D(ST) := \{v \in D(T) : Tv \in D(S)\} \ni v \mapsto STv \in \mathcal{L}$$

と定義する (S, T が共に反線型作用素ならば ST は線型作用素であり, S, T のうちの一方が反線型作用素で一方が線型作用素ならば ST は反線型作用素である).

定義 10.192 (稠密に定義された反線型作用素の共役作用素)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への稠密に定義された反線型作用素とする. $\mathcal{K}$ の線型部分空間

$$D := \{v \in \mathcal{K} : D(T) \ni u \mapsto (Tu \mid v) \in \mathbb{C} \text{ は有界反線型汎関数 }\}$$

を考える. このとき次の命題 10.193 より, 任意の $v \in D$ に対し,

$$(Tu \mid v) = (w \mid u) \quad (\forall u \in D(T)) \tag{10.181}$$

を満たす $w \in \mathcal{H}$ が唯一つ存在する. そこで $T^* v := w$ と表し, $\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ への反線型作用素

$$T^* : D(T^*) := D \ni v \mapsto T^* v \in \mathcal{H}$$

を定義する. T^* を T の共役作用素と言う.

命題 10.193. 定義 10.192 において, 任意の $v \in D$ に対し (10.181) を満たす $w \in \mathcal{H}$ が唯一つ存在する.

証明. Hahn-Banach の拡張定理 3.70 より任意の $v \in D$ に対し有界線型汎関数 $D(T) \ni u \mapsto (v \mid Tu) \in \mathbb{C}$ は $\mathcal{H}$ 上の有界線型汎関数に拡張できる. よって Riesz の表現定理 3.44 より $w \in \mathcal{H}$ で (10.181) を満たすものが存在する. 一意性を示す. $w_1, w_2 \in \mathcal{H}$ が

$$(Tu \mid v) = (w_1 \mid u) = (w_2 \mid u) \quad (\forall u \in D(T))$$

を満たすならば,

$$(w_1 - w_2 \mid u) = 0 \ \ (\forall u \in D(T))$$

であり, $D(T) \subseteq \mathcal{H}$ は稠密であるから $w_1 - w_2 = 0$ である. □

定義 10.194 (可閉反線型作用素とその閉包)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への反線型作用素とする. T を包含する $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への閉反線型作用素が存在するとき T は可閉であると言う. 次の命題 10.195 より T が可閉ならば $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ を満たす閉反線型作用素 $\overline{T}$ が存在する. $\overline{T}$ を T の閉包と言う.

命題 10.195. T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への可閉反線型作用素とする.

$$\pi : \mathcal{H} \oplus \mathcal{K} \ni (v, w) \mapsto v \in \mathcal{H}$$

に対し, 線型部分空間

$$D := \pi(\overline{G(T)}) \subseteq \mathcal{H}$$

を定義する. このとき任意の $v \in D$ に対し $(v, w) \in \overline{G(T)}$ を満たす $w \in \mathcal{K}$ は唯一つである. 実際 T が可閉であることから $T \subseteq S$ を満たす閉反線型作用素 S が存在し $\overline{G(T)} \subseteq G(S)$ である. よって $(v, w_1), (v, w_2) \in \overline{G(T)} \subseteq G(S)$ ならば $w_1 = Sv = w_2$ である. そこで $\overline{T}v := w$ とおき, 反線型作用素

$$\overline{T} : D(\overline{T}) := D \ni v \mapsto \overline{T}v \in \mathcal{K}$$

を定義する. このとき D の定義より明らかに $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ である.

定義 10.196 (閉反線型作用素の芯)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への閉反線型作用素とする. 線型部分空間 $D \subseteq D(T)$ で,

$$\overline{(T|_D)} = T$$

を満たすものを T の芯と言う. ただし $T|_D$ は T の D 上への制限である.

命題 10.197 (Hilbert 空間上の反線型作用素の基本性質)**.** $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{L}$ をそれぞれ Hilbert 空間とする.

(1) T_1, T_2 を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への (反) 線型作用素とし, S を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{L}$ への (反) 線型作用素とすると,

$$S(T_1 + T_2) \supseteq ST_1 + ST_2$$

が成り立つ.

(2) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への (反) 線型作用素とし, S_1, S_2 を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{L}$ への (反) 線型作用素とすると,

$$(S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T$$

が成り立つ.

(3) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への (反) 線型作用素, S を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{L}$ への反線型作用素とし, $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ とすると,

$$S(\alpha T) = (\overline{\alpha}S)T = \overline{\alpha}(ST)$$

が成り立つ.

(4) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への単射 (反) 線型作用素とし, S を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{L}$ への単射 (反) 線型作用素とすると, ST は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{L}$ への単射 (反) 線型作用素であり,

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

が成り立つ.

(5) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された反線型作用素とし, $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ とすると,

$$(\alpha T)^* = \alpha T^*$$

が成り立つ.

(6) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された反線型作用素とすると,

$$(\mathrm{Ran}(T))^{\perp} = \mathrm{Ker}(T^*)$$

が成り立つ.
(7) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された反線型作用素とすると, T^* は $\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ への閉反線型作用素である.
(8) S, T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された反線型作用素とし $S \subseteq T$ とすると, $T^* \subseteq S^*$ が成り立つ.
(9) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された可閉反線型作用素とすると, $(\overline{T})^* = T^*$ が成り立つ.
(10) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された (反) 線型作用素, S を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{L}$ への稠密に定義された (反) 線型作用素とし, ST が $\mathcal{H}$ から $\mathcal{L}$ への稠密に定義された (反) 線型作用素であるとすると,

$$(ST)^* \supseteq T^*S^*$$

が成り立つ.
(11) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された (反) 線型作用素, $S : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ を有界 (反) 線型作用素とすると,

$$(ST)^* = T^*S^*$$

が成り立つ.
(12) S, T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された反線型作用素とし, $S + T$ も $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された反線型作用素であるとすると,

$$(S + T)^* \supseteq S^* + T^*$$

が成り立つ.
(13) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された反線型作用素, $S : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ を有界反線型作用素とすると,

$$(S + T)^* = S^* + T^*$$

が成り立つ.
(14) $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ を有界 (反) 線型作用素とし, S を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{L}$ への閉 (反) 線型作用素とすると, ST は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{L}$ への閉 (反) 線型作用素である.
(15) $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ を有界反線型作用素とし, S を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への閉反線型作用素とすると, $S + T$ は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への閉反線型作用素である.

証明. 命題 10.27 と全く同様にして証明できる. □

定義 10.198 (実化 Hilbert 空間)**.** $\mathcal{H}$ を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間とする. $\mathcal{H}$ を $\mathbb{R}$ 上の線型空間とみなしたものを $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ と表すと,

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \ni (u, v) \mapsto \mathrm{Re}(u \mid v) \in \mathbb{R}$$

は $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 上の内積であり, この内積により $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}$ 上の Hilbert 空間となる. この $\mathbb{R}$ 上の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{H}$ の実化 Hilbert 空間と言う. 任意の空でない $E \subseteq \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ に対し, E の実化 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ における直交補空間を,

$$E_{\mathbb{R}}^{\perp} := \{v \in \mathcal{H} : \mathrm{Re}(v \mid u) = 0 \ (\forall u \in E)\}$$

と表す.

定理 10.199 (稠密に定義された閉反線型作用素の基本性質)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への稠密に定義された閉反線型作用素とする. このとき,

(1) $D(T^*T)$ は T の芯であり, $1 + T^*T : D(T^*T) \to \mathcal{H}$ は全単射である.
(2) T^* は $\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ への稠密に定義された閉反線型作用素である.
(3) $T = T^{**}$ が成り立つ.
(4) $(T^*T)^* = T^*T$ が成り立つ.

証明. (1) $G(T)$ は実化 Hilbert 空間 $(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K})_{\mathbb{R}}$ の閉部分空間なので $(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K})_{\mathbb{R}}$ の内積を受け継いで $\mathbb{R}$ 上の Hilbert 空間である. $\mathbb{R}$ 上の Hilbert 空間 $G(T)$ から $\mathbb{R}$ 上の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ への有界線型作用素

$$\pi : G(T) \ni (v, Tv) \mapsto v \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$$

を考える. π は単射であるから命題 3.52 の (6) より,

$$(\pi^*(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}))^{\perp}_{\mathbb{R}} = \mathrm{Ker}(\pi) = \{0\}$$

である. よって命題 3.39 より,

$$\overline{\pi^*(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})} = ((\pi^*(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}))^{\perp}_{\mathbb{R}})^{\perp}_{\mathbb{R}} = \{0\}^{\perp}_{\mathbb{R}} = G(T)$$

である. そこで,

$$D := \pi(\pi^*(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})) \subseteq D(T)$$

とおけば $G(T|_D) = \pi^*(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ であるから,

$$\overline{G(T|_D)} = \overline{\pi^*(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})} = G(T)$$

である. よって D は T の芯である. 今, 任意の $v = \pi(\pi^*(w)) \in \pi(\pi^*(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})) = D$ を取る. このとき $\pi^*(w) = (v, Tv)$ であるから, 任意の $u \in D(T)$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(u \mid v) + \mathrm{Re}(Tu \mid Tv) &= \mathrm{Re}((u, Tu) \mid (v, Tv)) = \mathrm{Re}((u, Tu) \mid \pi^*(w)) \\ &= \mathrm{Re}(\pi(u, Tu) \mid w) = \mathrm{Re}(u \mid w)\end{aligned} \tag{10.182}$$

である. そして T の反線型性より任意の $u \in D(T)$ に対し (10.182) において u を $-iu \in D(T)$ に置き換えたものを考えれば,

$$\mathrm{Im}(u \mid v) - \mathrm{Im}(Tu \mid Tv) = \mathrm{Im}(u \mid w) \tag{10.183}$$

を得る. よって (10.182), (10.183) を合わせて,

$$(u \mid v) + (Tv \mid Tu) = (u \mid w) \ \ (\forall u \in D(T))$$

を得る. これより $v \in D(T^*T)$, $w = v + T^*Tv$ である. よって $D \subseteq D(T^*T)$ だから $D(T^*T)$ は T の芯であり, また $\mathcal{H} = \mathrm{Ran}(1 + T^*T)$ である. 任意の $v \in \mathrm{Ker}(1 + T^*T)$ に対し,

$$0 = ((1 + T^*T)v \mid v) = (v \mid v) + (T^*Tv \mid v) = \|v\|^2 + \|Tv\|^2$$

であるから $v = 0$, ゆえに $1 + T^*T$ は単射である.

(2) (1) より $D(T^*T)$ は T の芯であるから任意の $v \in D(T)$ に対し $D(T^*T)$ の列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$(v_n, Tv_n) \to (v, Tv) \ \ (n \to \infty)$$

なるものが取れる. よって,

$$Tv = \lim_{n\to\infty} Tv_n \in \overline{D(T^*)}$$

であるから,

$$\mathrm{Ran}(T) \subseteq \overline{D(T^*)}$$

が成り立つ. これと命題 10.197 の (6) より,

$$(D(T^*))^{\perp} = (\overline{D(T^*)})^{\perp} \subseteq (\mathrm{Ran}(T))^{\perp} = \mathrm{Ker}(T^*) \subseteq D(T^*)$$

であるから $(D(T^*))^{\perp} = \{0\}$ である. ゆえに,

$$\overline{D(T^*)} = ((D(T^*))^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathcal{K}$$

であるから T^* は稠密に定義された反線型作用素である. T^* が閉であることは命題 10.197 の (7) による.

(3)
$$(T^*v \mid u) = (Tu \mid v) \quad (\forall v \in D(T^*), \forall u \in D(T))$$
であるから $T \subseteq T^{**}$ である．同様に $T^* \subseteq T^{***}$ である．ここで $T \subseteq T^{**}$ と命題 10.197 の (8) より $T^{***} \subseteq T^*$ なので $T^* = T^{***}$ である．$T = T^{**}$ を示すには $\mathbb{R}$ 上の Hilbert 空間 $G(T^{**}) \subseteq (\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})_{\mathbb{R}}$ の閉部分空間 $G(T)$ の直交補空間 $G(T^{**}) \cap G(T)^{\perp}_{\mathbb{R}}$ が $\{0\}$ であることを示せばよい．そこで任意の $(v, T^{**}v) \in G(T^{**}) \cap G(T)^{\perp}_{\mathbb{R}}$ を取る．
$$0 = \mathrm{Re}((u, Tu) \mid (v, T^{**}v)) = \mathrm{Re}(u \mid v) + \mathrm{Re}(Tu \mid T^{**}v) \quad (\forall u \in D(T))$$
であり，T の反線型性より，
$$0 = \mathrm{Im}(u \mid v) - \mathrm{Im}(Tu \mid T^{**}v) \quad (\forall u \in D(T))$$
であるから，
$$0 = (u \mid v) + (Tv \mid Tu) \quad (\forall u \in D(T))$$
である．よって $v \in D(T^*T^{**}) = D(T^{***}T^{**})$ であり，
$$0 = (1 + T^*T^{**})v = (1 + T^{***}T^{**})v$$
である．T^{**} は稠密に定義された閉反線型作用素であるので (1) より $1 + T^{***}T^{**}$ は単射である．よって $v = 0$, 従って $(v, T^{**}v) = 0$ であるので $G(T^{**}) \cap G(T)^{\perp}_{\mathbb{R}} = \{0\}$ である．ゆえに $T = T^{**}$ である．

(4) (1) より T^*T は稠密に定義された線型作用素であり，
$$(T^*Tu \mid v) = (Tv \mid Tu) = (u \mid T^*Tv) \quad (\forall u, v \in D(T^*T))$$
だから $T^*T \subseteq (T^*T)^*$ である．$T^*T = (T^*T)^*$ を示すには $D((T^*T)^*) \subseteq D(T^*T)$ を示せばよい．任意の $w \in D((T^*T)^*) = D((1 + T^*T)^*)$ を取る．(1) より $\mathrm{Ran}(1 + T^*T) = \mathcal{H}$ だから，
$$(1 + T^*T)^*w = (1 + T^*T)v$$
なる $v \in D(T^*T)$ が取れる．$1 + T^*T \subseteq (1 + T^*T)^*$ なので，
$$(1 + T^*T)^*(w - v) = 0$$
である．よって命題 10.197 の (6) より，
$$w - v \in \mathrm{Ker}((1 + T^*T)^*) = (\mathrm{Ran}(1 + T^*T))^{\perp} = \mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$$
である．ゆえに $w = v \in D(T^*T)$ だから $D((T^*T)^*) \subseteq D(T^*T)$ である．よって $T^*T = (T^*T)^*$ である．

□

定義 10.200 (稠密に定義された閉反線型作用素の絶対値作用素)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉反線型作用素とする．このとき定理 10.199 より T^*T は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素であり，
$$(T^*Tv \mid v) = \|Tv\|^2 \geqslant 0 \quad (\forall v \in D(T^*T))$$
であるから命題 10.71 より T^*T は非負自己共役作用素である．そこで $\mathcal{H}$ 上の非負自己共役作用素
$$|T| := \sqrt{T^*T}$$
を定義する．これを T の絶対値作用素と言う．

定義 10.201 (反線型部分等長作用素, 反線型ユニタリ作用素, 共役子)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．有界反線型作用素 $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ で V^*V が $\mathcal{H}$ 上の射影作用素であるものを $\mathcal{H}$ 上の反線型部分等長作用素と言う．
有界反線型作用素 $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ で $U^*U = UU^* = 1$ を満たすものを $\mathcal{H}$ 上の反線型ユニタリ作用素と言う．
有界反線型作用素 $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ で $J^* = J, J^2 = 1$ を満たすものを $\mathcal{H}$ 上の共役子と言う．

命題 10.202 (反線型部分等長作用素の基本性質)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を反線型部分等長作用素とする. このとき $V = VV^*V$ が成り立ち, $V^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ も反線型部分等長作用素である.

証明. まず任意の有界反線型作用素 $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ に対し,

$$\|T\|^2 = \sup\{|(Tv \mid Tv) : v \in \mathcal{H}, \|v\| \leqslant 1\} = \sup\{|(T^*Tv \mid v) : v \in \mathcal{H}, \|v\| \leqslant 1\} \leqslant \|T^*T\| \leqslant \|T\|^2$$

だから $\|T\|^2 = \|T^*T\|$ が成り立つ. よって,

$$\|V(1 - V^*V)\|^2 = \|(1 - V^*V)V^*V(1 - V^*V)\| = 0$$

であるから $V = VV^*V$ であり, $VV^* = (VV^*)^2$ だから VV^* は射影作用素である. よって V^* は反線型部分等長作用素である. □

命題 10.203 (反線型部分等長作用素の特徴付け)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を有界反線型作用素とする. このとき次は互いに同値である.

(1) V は反線型部分等長作用素である.
(2) $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{K}$ が存在し,

$$\|Vv\| = \|v\| \quad (\forall v \in \mathcal{K}), \quad \mathrm{Ker}(V) = \mathcal{K}^\perp$$

が成り立つ.

そして (1), (2) が成り立つとき V^*V は $\mathcal{K}$ の上への射影作用素である.

証明. (1) ⇒ (2) を示す. (1) が成り立つとする. $V^*V \in B(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{K} := \mathrm{Ran}(V^*V)$ の上への射影作用素であるから, 任意の $v \in \mathcal{K}$ に対し,

$$\|Vv\|^2 = (Vv \mid Vv) = (V^*Vv \mid v) = (v \mid v) = \|v\|^2$$

であり, 任意の $v \in \mathcal{K}^\perp$ に対し,

$$\|Vv\|^2 = (Vv \mid Vv) = (V^*Vv \mid v) = 0$$

である. よって,

$$\|Vv\| = \|v\|, \quad \mathcal{K}^\perp \subseteq \mathrm{Ker}(V)$$

である. 任意の $v \in \mathrm{Ker}(V)$ に対し,

$$v = v_1 + v_2 \in \mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}^\perp = \mathcal{H}$$

と直交分解すると, $\|Vv_1\| = \|v_1\|, Vv_2 = 0$ だから,

$$0 = \|Vv\| = \|Vv_1 + Vv_2\| = \|Vv_1\| = \|v_1\|,$$

よって $v = v_2 \in \mathcal{K}^\perp$ だから $\mathrm{Ker}(V) = \mathcal{K}^\perp$ である. ゆえに (2) が成り立つ.
(2) ⇒ (1) を示す. (2) が成り立つとする. 任意の $v \in \mathcal{K}$ に対し,

$$(v \mid v) = \|v\|^2 = \|Vv\|^2 = (Vv \mid Vv)$$

であるから, 偏極恒等式 (10.4) より, 任意の $u, v \in \mathcal{K}$ に対し,

$$(u \mid v) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k(u + i^kv \mid u + i^kv) = (Vv \mid Vu)$$

である. よって任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2 \quad (u_1, v_1 \in \mathcal{K}, u_2, v_2 \in \mathcal{K}^\perp)$$

と直交分解すると,

$$(V^*Vu \mid v) = (Vv \mid Vu) = (Vv_1 \mid Vu_1) = (u_1 \mid v_1) = (u_1 \mid v)$$

である. ゆえに $V^*Vu = u_1$ だから V^*V は $\mathcal{K}$ の上への射影作用素であり, V は $\mathcal{H}$ 上の反線型部分等長作用素である. □

定理 10.204 (稠密に定義された閉反線型作用素の極分解)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉反線型作用素とする．このとき T の絶対値作用素 $|T|$ (定義 10.200) と $|T|$ の台射影作用素 $S(|T|)$ (定義 10.73) に対し, $\mathcal{H}$ 上の反線型部分等長作用素 V で,

$$V^*V = S(|T|), \ \ T = V|T|$$

を満たすものが唯一つ存在する．

証明. $T^*T = |T|^2$ であるから定理 10.199 の (1) と定理 10.28 の (1) より $D(T^*T) = D(|T|^2)$ は $T, |T|$ の共通の芯である．

$$D := D(T^*T) = D(|T|^2)$$

とおく．任意の $v \in D$ に対し,

$$\|Tv\|^2 = (Tv \mid Tv) = (T^*Tv \mid v) = (|T|^2 v \mid v) = (|T|v \mid |T|v) = \||T|v\|^2$$

であるから,

$$V_0 : |T|(D) \ni |T|v \mapsto Tv \in \mathcal{H}$$

なる等長反線型作用素が定義できる．よって V_0 は等長反線型作用素

$$V_1 : \overline{\mathrm{Ran}(|T|)} = \overline{|T|(D)} \to \mathcal{H}$$

に一意拡張できる ($\overline{\mathrm{Ran}(|T|)} = \overline{|T|(D)}$ は D が $|T|$ の芯であることによる)．そこで Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の直交分解

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Ran}(|T|)} \oplus (\mathrm{Ran}(|T|))^{\perp} \tag{10.184}$$

を考えて,

$$V : \mathcal{H} = \overline{\mathrm{Ran}(|T|)} \oplus (\mathrm{Ran}(|T|))^{\perp} \ni v + u \mapsto V_1 v \in \mathcal{H}$$

として有界反線型作用素 V を定義する．このとき,

$$\|Vv\| = \|v\| \ \ (\forall v \in \overline{\mathrm{Ran}(|T|)}), \ \ Vu = 0 \ \ (\forall u \in (\mathrm{Ran}(|T|))^{\perp})$$

であるから命題 10.203 より V は反線型部分等長作用素で V^*V は $\overline{\mathrm{Ran}(|T|)}$ の上への射影作用素, すなわち $V^*V = S(|T|)$ である．そして,

$$V|T|v = V_1|T|v = V_0|T|v = Tv \ \ (\forall v \in D) \tag{10.185}$$

である．任意の $v \in D(|T|)$ を取る．D は $|T|$ の芯なので D の点列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$(v_n, |T|v_n) \to (v, |T|v) \ \ (n \to \infty)$$

なるものが取れる．(10.185) と V_0 が等長反線型作用素であることから,

$$\|Tv_n - Tv_m\| = \|V_0|T|v_n - V_0|T|v_m\| = \||T|v_n - |T|v_m\| \to 0 \ \ (n, m \to \infty)$$

である．よって $(Tv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束するので T が閉であることから,

$$(v_n, Tv_n) \to (v, Tv) \ \ (n \to \infty)$$

が成り立つ．これより,

$$V|T|v = \lim_{n\to\infty} V|T|v_n = \lim_{n\to\infty} Tv_n = Tv$$

であるから $V|T| \subseteq T$ が成り立つ．逆の包含関係を示す．任意の $v \in D(T)$ を取り, $v \in D(|T|)$ が成り立つことを示せばよい．D は T の芯なので D の点列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$(v_n, Tv_n) \to (v, Tv) \ \ (n \to \infty)$$

なるものが取れる．(10.185) と V_0 が等長反線型作用素であることから,

$$\||T|v_n - |T|v_m\| = \|V_0|T|v_n - V_0|T|v_m\| = \|Tv_n - Tv_m\| \to 0 \ \ (n, m \to \infty)$$

である．よって $(|T|v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束するので $|T|$ が閉であることから，

$$(v_n, |T|v_n) \to (v, |T|v) \ \ (n\to\infty)$$

が成り立つ．これより $v \in D(|T|)$ なので, $V|T| = T$ が成り立つ．以上で存在が示せた．
一意性を示す．$V, W : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ がそれぞれ反線型部分等長作用素であり，

$$V^*V = S(|T|) = W^*W, \ \ V|T| = T = W|T|$$

を満たすとする．命題 10.203 より，

$$Vu = Wu = 0 \ \ (\forall u \in (\mathrm{Ran}(|T|))^{\perp})$$

である．また，

$$V|T|v = Tv = W|T|v \ \ (\forall v \in \mathcal{H})$$

であるから V と W は $\mathrm{Ran}(|T|)$ 上で一致する．V, W の有界性より V と W は $\overline{\mathrm{Ran}(|T|)}$ 上でも一致するから, (10.184) より $V = W$ である． □

定義 10.205. T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉反線型作用素とする．このとき定理 10.204 における T の分解

$$T = V|T| \ \ (V^*V = S(|T|))$$

を T の極分解と言う．

定理 10.206 (稠密に定義された閉反線型作用素の共役作用素の極分解)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉反線型作用素とし, T の極分解を，

$$T = V|T|, \ \ V^*V = S(|T|)$$

とする．このとき T^* (定理 10.199 の (2) より稠密に定義された閉反線型作用素) の極分解は，

$$T^* = V^*|T^*|, \ \ VV^* = S(|T^*|)$$

である．

証明. 定理 10.199 の (3) より $T = T^{**}$ だから，

$$|T^*| = \sqrt{TT^*}$$

である．$V^*V = S(|T|)$ より $V^*V|T| = |T|$ であり, 命題 10.197 の (11) より $T^* = (V|T|)^* = |T|V^*$ であるから，

$$(V|T|V^*)(V|T|V^*) = (V|T|)(V^*V|T|)V^* = T(|T|V^*) = TT^* = |T^*|^2 \tag{10.186}$$

である．そして命題 10.197 の (11) より，

$$(V|T|V^*)^* = (VT^*)^* = T^{**}V^* = TV^* = V|T|V^*$$

であるから $V|T|V^*$ は自己共役作用素であり，

$$(V|T|V^*v \mid v) = (|T|V^*v \mid V^*v) \geqslant 0 \ \ (\forall v \in D(V|T|V^*))$$

であるから命題 10.71 より $V|T|V^*$ は非負自己共役作用素である．よって (10.186) と命題 10.70 より，

$$|T^*| = V|T|V^* \tag{10.187}$$

が成り立つ．これより，

$$V^*|T^*| = V^*(V|T|V^*) = (V^*V|T|)V^* = |T|V^* = T^*$$

であり，

$$VV^*|T^*| = VT^* = V|T|V^* = |T^*| \tag{10.188}$$

である. 命題 10.202 より V^* は反線型部分等長作用素であるので (10.188) と命題 10.74 より,

$$S(|T^*|) \leqslant VV^*$$

が成り立つ. 逆の不等式が成り立つことを示す. (10.188) より,

$$VV^*|T^*| = S(|T^*|)|T^*|$$

であるから, (10.187) より,

$$VV^*V|T|V^* = S(|T^*|)V|T|V^* \tag{10.189}$$

である.

$$|T| = |T|^* = (V^*V|T|)^* = |T|V^*V$$

だから, (10.189) の両辺に右から V を掛ければ,

$$VV^*V|T| = S(|T^*|)V|T|$$

を得る. ゆえに,

$$VV^*VS(|T|) = S(|T^*|)VS(|T|)$$

が成り立つ. $VS(|T|) = VV^*V = V$ (命題 10.202) より,

$$VV^*V = S(|T^*|)V$$

だから,

$$VV^* = S(|T^*|)VV^*$$

である. これより,

$$VV^* = S(|T^*|)VV^* = S(|T^*|)VV^*S(|T^*|) \leqslant S(|T^*|)$$

であるから $VV^* = S(|T^*|)$ が成り立つ. □

命題 10.207 (射影値測度の反線型ユニタリ作用素による変換)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を反線型ユニタリ作用素 (定義 10.201), $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間, $E : \mathfrak{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を射影値測度とする. このとき,

$$UEU^* : \mathfrak{M} \ni B \mapsto UE(B)U^* \in \mathcal{P}(\mathcal{K}) \tag{10.190}$$

は射影値測度であり, 任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\int_X f(x)d(UEU^*)(x) = U\left(\int_X \overline{f(x)}dE(x)\right)U^* \tag{10.191}$$

が成り立つ.

証明. (10.190) が射影値測度 (定義 10.47) であることは自明である. (10.191) は $f : X \to \mathbb{C}$ が可測単関数である場合は明らかに成り立ち, 任意の有界可測関数が可測単関数の列により一様近似できる (系 5.129) ことから $f : X \to \mathbb{C}$ が有界可測関数である場合も成り立つ. 今, 任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ を取り, 有界可測関数の列 $f_n := f\chi_{(|f|\leqslant n)}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を考えると任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し単調収束定理より,

$$\begin{aligned}\int_X |f(x)|^2 d(UEU^*)_{v,v}(x) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n(x)|^2 d(UEU^*)_{v,v}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\int_X f_n(x)d(UEU^*)(x)v\right\|^2 \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|U\int_X f_n(x)dE(x)U^*v\right\|^2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n(x)|^2 dE_{U^*v,U^*v}(x) \\ &= \int_X |f(x)|^2 dE_{U^*v,U^*v}(x)\end{aligned}$$

であるから,

$$D_{UEU^*}(f) = UD(f)$$

である．そして任意の $u \in D_{UEU^*}(f), v \in \mathcal{H}$ に対し Lebesgue 優収束定理より，

$$
\begin{aligned}
\left(\int_X f(x)d(UEU^*)(x)u \mid v\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n(x)d(UEU^*)(x)u \mid v\right) \\
= \lim_{n\to\infty}\left(U\left(\int_X \overline{f_n(x)}dE(x)\right)U^*u \mid v\right) &= \left(U\left(\int_X \overline{f(x)}dE(x)\right)U^*u \mid v\right)
\end{aligned}
$$

である．よって任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し (10.191) が成り立つ． □

定義 10.208 (共役子に関して実な線型作用素)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を共役子 (定義 10.201) とする．$\mathcal{H}$ 上の線型作用素 T が J に関して実であるとは，

$$JT \subseteq TJ \tag{10.192}$$

が成り立つことを言う．$J^2 = 1$ であるから (10.192) は $JT = TJ, JTJ = T$ と同値である．

命題 10.209 (共役子に関して実な線型作用素の基本性質)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を共役子とする．

(1) T_1, T_2 が J に関して実な線型作用素ならば $T_1 + T_2, T_1T_2$ も J に関して実である．
(2) T が J に関して実な線型作用素ならば任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し αT も J に関して実である．
(3) T が J に関して実な稠密に定義された線型作用素ならば T^* も J に関して実である．
(4) T が J に関して実な可閉線型作用素ならば $\overline{T}$ も J に関して実である．
(5) T が J に関して実な単射線型作用素ならば T^{-1} も J に関して実である．

証明. 命題 10.182 の証明と全く同様にして示せる． □

定理 10.210 (共役子に関して実な対称作用素の自己共役拡張可能性)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を共役子, T を J に関して実な対称作用素とする．このとき T は J に関して実な自己共役拡張 (定義 10.35) を持つ．

証明. 任意の $v_\pm \in (\mathrm{Ran}(T \pm i))^\perp$ に対し，

$$(Jv_\pm \mid (T \mp i)u) = (J(T \mp i)u \mid v_\pm) = ((T \pm i)Ju \mid v_\pm) = 0 \quad (\forall u \in D(T))$$

であるから，

$$J(\mathrm{Ran}(T + i))^\perp = (\mathrm{Ran}(T - i))^\perp$$

である．これより $(\mathrm{Ran}(T + i))^\perp$ の CONS を $\{e_k\}_{k\in K}$ とすれば $\{Je_k\}_{k\in K}$ は $(\mathrm{Ran}(T - i))^\perp$ の CONS なので，ユニタリ作用素

$$V : (\mathrm{Ran}(T + i))^\perp \to (\mathrm{Ran}(T - i))^\perp, \quad Ve_k = Je_k \quad (\forall k \in K)$$

が存在する．よって定理 10.37 より T は自己共役拡張可能であり，T の自己共役拡張 S で Cayley 変換 $C(S)$ が，

$$C(S) = C(\overline{T}) \oplus V : \mathrm{Ran}(\overline{T} + i) \oplus (\mathrm{Ran}(T + i))^\perp \to \mathrm{Ran}(\overline{T} - i) \oplus (\mathrm{Ran}(T - i))^\perp$$

であるようなものが取れる．今, S が J に関して実であることを示す．まず，

$$JV^*Je_k = Je_k = Ve_k \quad (\forall k \in K)$$

であるから，

$$JV^*J = V$$

である．また Hilbert 空間 $\mathrm{Ran}(\overline{T} + i)$ から Hilbert 空間 $\mathrm{Ran}(\overline{T} - i)$ へのユニタリ作用素

$$C(\overline{T}) = (\overline{T} - i)(\overline{T} + i)^{-1} : \mathrm{Ran}(\overline{T} + i) \to \mathrm{Ran}(\overline{T} - i)$$

の共役作用素

$$C(\overline{T})^* = (\overline{T} + i)(\overline{T} - i)^{-1} : \mathrm{Ran}(\overline{T} - i) \to \mathrm{Ran}(\overline{T} + i)$$

に対し, 命題 10.209 より,

$$JC(\overline{T})^*J = J(\overline{T}+i)(\overline{T}-i)^{-1}J = (\overline{T}-i)(\overline{T}+i)^{-1} = C(\overline{T})$$

である．よって,

$$JC(S)^*J = (JC(\overline{T})^*J) \oplus (JV^*J) = C(\overline{T}) \oplus V = C(S)$$

が成り立つ．ここで S のスペクトル測度を $E_S : \mathcal{B}_{\sigma(S)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ とすると, 命題 10.207 より,

$$C(S) = JC(S)^*J = J\left(\int_{\sigma(S)} (\lambda+i)(\lambda-i)^{-1} dE_S(\lambda)\right) J = \int_{\sigma(S)} (\lambda-i)(\lambda+i)^{-1} d(JE_SJ)(\lambda)$$

であり, 右辺は自己共役作用素

$$\int_{\sigma(S)} \lambda d(JE_SJ)(\lambda) = J\left(\int_{\sigma(S)} \lambda dE_S(\lambda)\right) J = JSJ$$

の Cayley 変換 $C(JSJ)$ である．よって $C(S) = C(JSJ)$ なので命題 10.33 より $S = JSJ$ である．ゆえに S は J に関して実である． □

10.16 対称作用素の解析ベクトル, Nelson の解析ベクトル定理

定義 10.211 (対称作用素の解析ベクトル, 全解析ベクトル)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする．$v \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(T^n)$ に対し $\mathcal{H}$ の列 $(\frac{1}{n!}T^n v)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を係数とする冪級数の収束半径 (定義 4.26) を,

$$R_T(v) := \frac{1}{\inf_{n\in\mathbb{Z}_+} \sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}\|T^k v\|}} \in [0,\infty]$$

とおく．$R_T(v) > 0$ であるとき v を T の解析ベクトルと言う．また $R_T(v) = \infty$ であるとき v を T の全解析ベクトルと言う．

命題 10.212 (対称作用素の解析ベクトルの基本性質)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする．次が成り立つ．

(1) 任意の $u, v \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(T^n)$ に対し $\min(R_T(u), R_T(v)) \leqslant R_T(u+v)$.
(2) 任意の $v \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(T^n)$, 任意の $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ に対し $R_T(\alpha v) = R_T(v)$.
(3) 任意の $v \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(T^n)$, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $R_T(T^k v) = R_T(v)$.
(4) T の解析ベクトル全体, T の全解析ベクトル全体は T の作用に対して不変な $\mathcal{H}$ の線型部分空間である．

証明. (1) $|z| < \min(R_T(u), R_T(v))$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し命題 4.27 の (1) より,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!}\|T^n(u+v)\||z|^n \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!}\|T^n u\||z|^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!}\|T^n v\||z|^n < \infty$$

であるから, 命題 4.27 の (2) より $|z| \leqslant R_T(u+v)$ である．よって $\min(R_T(u), R_T(v)) \leqslant R_T(u+v)$ が成り立つ．

(2) $|z| < R_T(v)$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し命題 4.27 の (1) より,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!}\|T^n \alpha v\||z|^n = |\alpha| \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!}\|T^n v\||z|^n < \infty$$

であるから $|z| \leqslant R_T(\alpha v)$ である．よって $R_T(v) \leqslant R_T(\alpha v)$ が成り立つ．またこれより $R_T(\alpha v) \leqslant R_T(\alpha^{-1}\alpha v) = R_T(v)$ も成り立つので $R_T(\alpha v) = R_T(v)$ が成り立つ．

(3) 命題 4.29 より $\mathcal{H}$ の列 $(\frac{1}{n!}T^n v)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を係数とする冪級数の収束半径 $R_T(v)$ は $((n+1)\frac{1}{(n+1)!}T^{n+1}v)_{n\in\mathbb{Z}_+} = (\frac{1}{n!}T^{n+1}v)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を係数とする冪級数の収束半径 $R_T(Tv)$ と等しい．よって

$$R_T(v) = R_T(Tv) = R_T(T^2 v) = \cdots$$

であるから任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $R_T(v) = R_T(T^k v)$ が成り立つ．

(4) T の解析ベクトル全体を,

$$\mathcal{A}_T := \left\{ v \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(T^n) : R_T(v) > 0 \right\}$$

とおく. 任意の $u, v \in \mathcal{A}_T$, 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し (1), (2), (3) より,

$$R_T(u+v) \geqslant \min(R_T(u), R_T(v)) > 0, \quad R_T(\alpha v) \geqslant R_T(v) > 0, \quad R_T(Tv) = R_T(v) > 0$$

であるから $u+v, \alpha v, Tv \in \mathcal{A}_T$ である. よって $\mathcal{A}_T$ は T の作用に対して不変な $\mathcal{H}$ の線型部分空間である. また T の全解析ベクトル全体を,

$$\mathcal{T}\mathcal{A}_T := \left\{ v \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(T^n) : R_T(v) = \infty \right\}$$

とおくと, 任意の $u, v \in \mathcal{T}\mathcal{A}_T$, 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し (1), (2), (3) より,

$$R_T(u+v) \geqslant \min(R_T(u), R_T(v)) = \infty, \quad R_T(\alpha v) \geqslant R_T(v) = \infty, \quad R_T(Tv) = R_T(v) = \infty$$

であるから $u+v, \alpha v, Tv \in \mathcal{T}\mathcal{A}_T$ である. よって $\mathcal{T}\mathcal{A}_T$ は T の作用に対して不変な $\mathcal{H}$ の線型部分空間である.

□

補題 10.213. T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. このとき,

$$D(T) = \left\{ v \in \mathcal{H} : \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{itT} - 1)v \in \mathcal{H} \right\}, \quad Tv = \lim_{t\to 0} \frac{1}{it}(e^{itT} - 1)v \quad (\forall v \in D(T))$$

が成り立つ.

証明.

$$D := \left\{ v \in \mathcal{H} : \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{itT} - 1)v \in \mathcal{H} \right\}, \quad Sv := \lim_{t\to 0} \frac{1}{it}(e^{itT} - 1)v \quad (\forall v \in D)$$

とおく. このとき S は $\mathcal{H}$ 上の線型作用素であり, $(e^{itT})^* = e^{-itT}$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ (定理 10.68 の (1)) より任意の $u, v \in D$ に対し,

$$(Su \mid v) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{it}(e^{itT} - 1)u \mid v \right) = \lim_{t\to 0} \left(u \mid \frac{1}{-it}(e^{-itT} - 1)v \right) = (u \mid Sv)$$

であるので, S は $\mathcal{H}$ 上の対称作用素である. $E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を T のスペクトル測度とすると, 任意の $v \in D(T)$ に対し微積分学の基本定理と Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{it}(e^{itT} - 1)v - Tv \right\|^2 &= \int_{\sigma(T)} \left| \frac{1}{it}(e^{it\lambda} - 1) - \lambda \right|^2 dE_{T,v,v}(\lambda) \\ &= \int_{\sigma(T)} \left| \lambda \int_0^1 (e^{i\theta t\lambda} - 1) d\theta \right|^2 dE_{T,v,v}(\lambda) \to 0 \quad (t \to 0) \end{aligned}$$

となるから $v \in D$ であり $Tv = Sv$ である. よって $T \subseteq S$ であり T が自己共役作用素で S が対称作用素であることから $T \subseteq S \subseteq S^* \subseteq T^* = T$ である. ゆえに $T = S$ が成り立つ. □

定理 10.214 (自己共役作用素の解析ベクトルの基本性質)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. このとき次が成り立つ.

(1) T の全解析ベクトル全体は T の芯である.

(2) v が T の解析ベクトルならば,

$$e^{zT}v = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!}(zT)^n v \quad \left(\forall z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{R_T(v)}{2} \right) \tag{10.193}$$

が成り立つ.

(3) $v \in \mathcal{H}$ に対し, v が T の全解析ベクトルであることと,

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{itT}v \in \mathcal{H}$$

が Banach 空間 $\mathcal{H}$ 値整関数に拡張できることは同値である. またその整関数としての拡張は,

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto e^{izT}v \in \mathcal{H}$$

である.

(4) v が T の全解析ベクトルならば任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し $e^{izT}v$ も T の全解析ベクトルであり,

$$e^{iwT}e^{izT}v = e^{i(z+w)T}v \quad (\forall z, w \in \mathbb{C})$$

が成り立つ.

証明. (1) 命題 10.212 の (4) より T の全解析ベクトル全体は $D(T)$ の線型部分空間である. T のスペクトル測度 $E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ と任意の $v \in D(T)$ に対し,

$$v_m := E_T\left([-m, m] \cap \sigma(T)\right) v \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D(T^n) \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$

とおくと, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!}\|T^n v_m\||z|^n \leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!} m^n \|v\||z|^n < \infty \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

であるから, 命題 4.27 の (2) より $(\frac{1}{n!}T^n v_m)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ を係数とする冪級数の収束半径は ∞ なので v_m は T の全解析ベクトルである. そして $v_m = E_T([-m, m] \cap \sigma(T))v \to v$ $(m \to \infty)$ であり, Lebesgue 優収束定理より,

$$\|Tv - Tv_m\|^2 = \int_{\sigma(T)} |\lambda - \lambda\chi_{(|\mathrm{id}| \leqslant m)}(\lambda)|^2 dE_{T,v,v}(\lambda) \to 0 \quad (m \to \infty)$$

であるから $(v, T) = \lim_{m \to \infty}(v_m, Tv_m)$ が成り立つ. よって T の全解析ベクトル全体は T の芯である.

(2) $|z| < \frac{R_T(v)}{2}$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し Hölder の不等式 (5.120) より,

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma(T)} |e^{z\lambda}|^2 dE_{T,v,v}(\lambda) &\leqslant \int_{\sigma(T)} e^{2|z\lambda|} dE_{T,v,v}(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{(2|z|)^n}{n!} \int_{\sigma(T)} |\lambda|^n dE_{T,v,v}(\lambda) \\
&\leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{(2|z|)^n}{n!} \left(\int_{\sigma(T)} |\lambda^n|^2 dE_{T,v,v}(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\sigma(T)} 1 dE_{T,v,v}(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{(2|z|)^n}{n!} \|T^n v\|\|v\| < \infty
\end{aligned}$$

となるから $v \in D(e^{zT})$ であり, Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned}
\left\| e^{zT}v - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}(zT)^n v \right\|^2 &= \left\| \left(\int_{\sigma(T)} \left(e^{z\lambda} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}(z\lambda)^n \right) dE_T(\lambda) \right) v \right\|^2 \\
&= \int_{\sigma(T)} \left| e^{z\lambda} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}(z\lambda)^n \right|^2 dE_{T,v,v}(\lambda) \to 0 \quad (N \to \infty).
\end{aligned}$$

よって (10.193) が成り立つ.

(3) v が T の全解析ベクトルならば (2) より $e^{zT}v = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!}(zT)^n v$ $(\forall z \in \mathbb{C})$ であるから, 冪級数関数の複素微分可能性 (定理 4.30) より $\mathbb{C} \ni z \mapsto e^{zT}v$ は Banach 空間値整関数である. 逆に $v \in \mathcal{H}$ に対し $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{itT}v \in \mathcal{H}$ が Banach 空間値整関数 $U : \mathbb{C} \ni z \mapsto U(z) \in \mathcal{H}$ に拡張できるとし, v が T の全解析ベクトルであることを示す.

$$e^{isT}U(t) = e^{isT}e^{itT}v = e^{i(s+t)T}v = U(s+t) \quad (\forall s, t \in \mathbb{R})$$

であるから, 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対し Banach 空間値整関数

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto e^{isT}U(z) \in \mathcal{H}, \ \ \mathbb{C} \ni z \mapsto U(s+z) \in \mathcal{H}$$

は $\mathbb{R}$ 上で一致する. よって一致の原理 (7.38) より,

$$e^{isT}U(z) = U(s+z) \ \ (\forall s \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C})$$

が成り立つ. 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し補題 10.213 より,

$$\frac{d}{dz}U(z) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}(U(s+z) - U(z)) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}(e^{isT} - 1)U(z) = iTU(z)$$

が成り立つ. 今, ある $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\frac{d^n}{dz^n}U(z) = (iT)^n U(z) \ \ (\forall z \in \mathbb{C}) \tag{10.194}$$

が成り立つと仮定する. このとき任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し $(iT)^n = \int_{\sigma(T)} (i\lambda)^n dE_T(\lambda)$ が閉線型作用素であることと補題 10.213 より,

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}U(z) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}(iT)^n(U(s+z) - U(z)) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}(iT)^n(e^{isT} - 1)U(z) = (iT)^{n+1}U(z)$$

となるので, 帰納法より (10.194) は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ. よって定理 7.37 より,

$$U(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n}{dz^n} U(z) \right) \Big|_{z=0} z^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!} (izT)^n v \ \ (\forall z \in \mathbb{C}) \tag{10.195}$$

が成り立つので, 命題 4.27 の (2) より $(\frac{1}{n!}T^n v)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ を係数とする冪級数の収束半径 $R_T(v)$ は ∞ だから v は T の全解析ベクトルであり, (10.195) と (2) より,

$$U(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!}(izT)^n v = e^{izT}v \ \ (\forall z \in \mathbb{C})$$

が成り立つ.

(4) v が T の全解析ベクトルならば (3) より任意の $s \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto e^{isT}e^{izT}v \in \mathcal{H}, \ \ \mathbb{C} \ni z \mapsto e^{i(s+z)T}v \in \mathcal{H}$$

はそれぞれ Banach 空間値整関数である. そしてこれらは $\mathbb{R}$ 上で一致するので一致の原理 (7.38) より,

$$e^{isT}e^{izT}v = e^{i(s+z)T}v \ \ (\forall s \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C})$$

が成り立つ. よって任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し $\mathbb{R} \ni s \mapsto e^{isT}e^{izT}v \in \mathcal{H}$ は Banach 空間値整関数 $\mathbb{C} \ni w \mapsto e^{i(w+z)T}v \in \mathcal{H}$ に拡張できるので (3) より $e^{izT}v$ は T の全解析ベクトルであり, 任意の $w \in \mathbb{C}$ に対し $e^{iwT}e^{izT}v = e^{i(w+z)T}v$ が成り立つ.

□

補題 10.215. T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とし, $v \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D(T^n)$ を 0 ではない T の解析ベクトルとする.

$$D_T(v) := \mathrm{span}\{T^n v\}_{n \in \mathbb{Z}_+}, \ \ \mathcal{H}_T(v) := \overline{D_T(v)}$$

とおき, Hilbert 空間 $\mathcal{H}_T(v)$ 上の対称作用素

$$T_v : D_T(v) :\ni u \mapsto Tu \in \mathcal{H}_T(v)$$

を定義する. このとき T_v は本質的に自己共役 (定義 10.36) である.

証明. T は対称作用素で $v \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(T^n)$ であるから，

$$(T^n v \mid T^m v) = (T^m v \mid T^n v) \quad (\forall n, m \in \mathbb{Z}_+)$$

が成り立つ．よって，

$$J_0 : D_T(v) \ni \sum_{n=0}^{N} \alpha_n T^n v \mapsto \sum_{n=0}^{N} \overline{\alpha_n} T^n v \in \mathcal{H}_T(v)$$

は well-defined な等長反線型作用素であり，

$$(J_0 u \mid J_0 w) = (w \mid u), \quad (J_0 u \mid w) = (J_0 w \mid u) \quad (\forall u, w \in D_T(v))$$

が成り立つ．J_0 の $\mathcal{H}_T(v) = \overline{D_T(v)}$ 上の等長反線型作用素への一意拡張を $J : \mathcal{H}_T(v) \to \mathcal{H}_T(v)$ とおくと，

$$(Ju \mid Jw) = (w \mid u), \quad (Ju \mid w) = (Jw \mid u) \quad (\forall u, w \in \mathcal{H}_T(v))$$

より $J^* = J$, $J^2 = 1$ であるから J は $\mathcal{H}_T(v)$ 上の共役子 (定義 10.201) である．T_v は明らかに J に関して実 (定義 10.208) であるから定理 10.210 より T_v は自己共役拡張を持つ．T_v が本質的に自己共役であることを示すには系 10.38 より T_v の自己共役拡張が唯一つであることを示せばよい．そこで S_1, S_2 をそれぞれ T_v の自己共役拡張とし，$S_1 = S_2$ が成り立つことを示す．任意の $u \in D_T(v) = D(T_v) \subseteq D(S_1) \cap D(S_2)$ に対し，

$$S_j^n u = T_v^n u = T^n u \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+, j = 1, 2)$$

であることと命題 10.212 より，

$$R_{S_j}(u) = R_T(u) \geqslant R_T(v) > 0 \quad (j = 1, 2)$$

であるから，定理 10.214 の (2) より，

$$e^{itS_j} u = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!}(itS_j)^n u = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!}(itT)^n u \quad \left(\forall t \in \left(-\frac{R_T(v)}{2}, \frac{R_T(v)}{2}\right), j = 1, 2\right).$$

よって，

$$e^{itS_1} u = e^{itS_2} u \quad \left(\forall u \in D_T(v), \forall t \in \left(-\frac{R_T(v)}{2}, \frac{R_T(v)}{2}\right)\right) \tag{10.196}$$

が成り立つ．$t \in \mathbb{R}$ に対し e^{itS_1}, e^{itS_2} は $\mathcal{H}_T(v)$ 上のユニタリ作用素であり，$D_T(v)$ は $\mathcal{H}_T(v)$ の稠密部分空間であるから，(10.196) より，

$$e^{itS_1} = e^{itS_2} \quad \left(\forall t \in \left(-\frac{R_T(v)}{2}, \frac{R_T(v)}{2}\right)\right)$$

が成り立つ．よって補題 10.213 より，任意の $u \in D(S_1)$ に対し，

$$S_1 u = \lim_{t\to 0} \frac{1}{it}(e^{itS_1} - 1)u = \lim_{t\to 0} \frac{1}{it}(e^{itS_2} - 1)u = S_2 u$$

となるので $S_1 \subseteq S_2$ が成り立ち，従って $S_1 = S_2$ が成り立つ．ゆえに T_v は本質的に自己共役である． □

定理 10.216 (Nelson の解析ベクトル定理)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする．もし T の解析ベクトル全体が $\mathcal{H}$ で稠密ならば T は本質的に自己共役である．

証明. 命題 10.31 と定理 10.34 より $\mathrm{Ran}(T \pm i)$ が $\mathcal{H}$ で稠密であることを示せばよい．0 ではない任意の $u \in \mathcal{H}$ と任意の $\varepsilon \in (0, 2\|u\|)$ を取る．仮定より T の解析ベクトル v で，

$$\|u - v\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{10.197}$$

なるものが取れる．$\varepsilon < 2\|u\|$ より $v \neq 0$ である．よって補題 10.215 より，

$$D_T(v) = \mathrm{span}\{T^n v\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \quad \mathcal{H}_T(v) = \overline{D_T(v)}$$

に対し,

$$T_v : D_T(v) \ni w \mapsto Tw \in \mathcal{H}_T(v)$$

は Hilbert 空間 $\mathcal{H}_T(v)$ 上の本質的に自己共役な対称作用素である. ゆえに命題 10.31 と定理 10.34 より,

$$\mathcal{H}_T(v) = \mathrm{Ran}(\overline{T_v} \pm i) = \overline{\mathrm{Ran}(T_v \pm i)}$$

であるから, $v \in \mathcal{H}_T(v)$ に対し $w_\pm \in D_T(v)$ で,

$$\|v - (T_v \pm i)w_\pm\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{10.198}$$

を満たすものが取れる. よって (10.197), (10.198) より,

$$\|u - (T \pm i)w_\pm\| \leqslant \|u - v\| + \|v - (T_v \pm i)w_\pm\| < \varepsilon$$

であるから, $\mathrm{Ran}(T \pm i)$ は $\mathcal{H}$ で稠密である. □

定理 10.217 (Nelson の解析ベクトル定理)**.** T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とし, $D \subseteq D(T)$ が次を満たすとする.

(1) D は稠密な線型部分空間である.
(2) D は T の作用に対して不変 (すなわち $T(D) \subseteq D$) である.
(3) D の任意の元は T の解析ベクトルである.

このとき T は本質的に自己共役であり, D は $\overline{T}$ の芯である.

証明. (1) より $T|_D : D \ni v \mapsto Tv \in \mathcal{H}$ は $\mathcal{H}$ 上の対称作用素であり, (2) より,

$$(T|_D)^n v = T^n v \quad (\forall v \in D, \forall n \in \mathbb{Z}_+) \tag{10.199}$$

である. (10.199) と (3) より,

$$R_{T|_D}(v) = R_T(v) > 0 \quad (\forall v \in D)$$

(定義 10.211 を参照) であるから, D の任意の元は $T|_D$ の解析ベクトルである. よって Nelson の解析ベクトル定理 10.216 より $T|_D$ は本質的に自己共役である. ゆえに,

$$\overline{T|_D} \subseteq \overline{T} \subseteq T^* \subseteq \overline{T|_D}^* = \overline{T|_D}$$

だから $\overline{T} = \overline{T|_D}$ である. よって T は本質的に自己共役であり, D は $\overline{T}$ の芯である. □

11 微分方程式

11.1 常微分方程式の初期値問題の解の一意存在, 解の初期値に対する滑らかさ

定義 11.1 (常微分方程式の初期値問題)**.** $J \subseteq \mathbb{R}$ を開区間, $D \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合,

$$f(t,x) : J \times D \ni (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}^N$$

を連続関数とする. J に含まれるある区間 I 上で定義された C^1 級関数 $x(t) : I \ni t \mapsto x(t) \in D$ で,

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t,x(t)) \quad (\forall t \in I)$$

を満たすものを常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{11.1}$$

の解と言う. また与えられた $(\tau,\xi) \in J \times D$ に対し, 常微分方程式 (11.1) の解 $x(t) : I \ni t \mapsto x(t) \in D$ で $\tau \in I, x(\tau) = \xi$ を満たすものを常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(\tau) = \xi$$

の解と言う.

定義 11.2 (Lipschitz 連続, 局所 Lipschitz 連続)**.** $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ の任意の元を $(t,x) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ と表す. $U \subseteq \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ 上で定義された連続関数 $f(t,x) : U \ni (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}^N$ が x に関して Lipschitz 連続であるとは, ある $L \in [0,\infty)$ が存在し,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L|x-y| \quad (\forall (t,x),(t,y) \in U)$$

が成り立つことを言う.
$U \subseteq \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ を開集合とする. 連続関数 $f(t,x) : U \ni (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}^N$ が x に関して局所 Lipschitz 連続であるとは, 任意の $(t_0,x_0) \in U$ に対し (t_0,x_0) の近傍 $U_0 \subseteq U$ が存在し, f の U_0 上への制限 $U_0 \ni (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}^N$ が x に関して Lipschitz 連続であることを言う.

命題 11.3 (局所 Lipschitz 連続の典型例)**.** $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ の任意の元を $(t,x) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ と表す. 開集合 $U \subseteq \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ 上で定義された連続関数 $f(t,x) : U \ni (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}^N$ が x に関して 1 階の偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) : U \ni (t,x) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(t,x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(t,x) \right) \in M_{N \times N}(\mathbb{R}) \tag{11.2}$$

を持ち, これが連続であるとする. このとき $f(t,x) \ni (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}^N$ は x に関して局所 Lipschitz 連続である.

証明. 任意の $(t_0,x_0) \in U$ を取り, (t_0,x_0) を中心とし U に含まれる閉方体 (有界閉区間の直積) K を取る. K はコンパクトであり (11.2) は連続であるから,

$$L := \max_{(t,x) \in K} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right\| \in [0,\infty)$$

が存在する. 任意の $(t,x),(t,y) \in K$ に対し, 微積分学の基本定理 5.206 より,

$$f(t,y) - f(t,x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, x + \theta(y-x)) \right) (y-x) d\theta$$

であり, $(t, x+\theta(y-x)) \in K$ $(\forall \theta \in [0,1])$ であるから,

$$\begin{aligned} |f(t,y) - f(t,x)| &\leqslant \int_0^1 \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, x + \theta(y-x)) \right) (y-x) \right| d\theta \\ &\leqslant \int_0^1 \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x+\theta(y-x)) \right\| |y-x| d\theta \\ &\leqslant L|y-x| \end{aligned}$$

が成り立つ. よって $f(t,x) : U \ni (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}^N$ は x に関して局所 Lipschitz 連続である. □

命題 11.4 (Gronwall の不等式)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ を区間, $u(t) : I \to [0,\infty)$ を連続関数とし, ある $C, L \in [0,\infty)$ と $\tau \in I$ に対し,

$$u(t) \leqslant C + L\left|\int_\tau^t u(s)ds\right| \quad (\forall t \in I)$$

が成り立つと仮定する. このとき,

$$u(t) \leqslant Ce^{L|t-\tau|} \quad (\forall t \in I)$$

が成り立つ.

証明. 連続関数 $v(t) : I \to [0,\infty)$ を,

$$v(t) := C + L\left|\int_\tau^t u(s)ds\right| \quad (\forall t \in I)$$

として定義すると, $u(t) \leqslant v(t)$ $(\forall t \in I)$ であり,

$$\frac{d}{dt}v(t) = Lu(t) \leqslant Lv(t) \quad (\tau < t)$$
$$\frac{d}{dt}v(t) = -Lu(t) \geqslant -Lv(t) \quad (t < \tau)$$

である. よって連続関数 $w(t) : I \to [0,\infty)$ を,

$$w(t) := v(t)e^{-L|t-\tau|} \quad (\forall t \in I)$$

として定義すると,

$$\frac{d}{dt}w(t) = (Lu(t) - Lv(t))e^{-L(t-\tau)} \leqslant 0 \quad (\tau < t)$$
$$\frac{d}{dt}w(t) = (-Lu(t) + Lv(t))e^{L(t-\tau)} \geqslant 0 \quad (t < \tau)$$

であるから平均値の定理 4.9 より $w(t) : I \to [0,\infty)$ は $I \cap (-\infty,\tau]$ において単調増加であり, $I \cap [\tau,\infty)$ において単調減少である. ゆえに,

$$v(t)e^{-L|t-\tau|} = w(t) \leqslant w(\tau) = v(\tau) = C \quad (\forall t \in I)$$

であるから,

$$u(t) \leqslant v(t) \leqslant Ce^{L|t-\tau|} \quad (\forall t \in I)$$

が成り立つ. □

補題 11.5. $J \subseteq \mathbb{R}$ を開区間, $D \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とし, 連続関数 $f(t,x) : J \times D \ni (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}^N$ が x に関して局所 Lipschitz 連続 (定義 11.2) であるとする. このとき任意の $(\tau,\xi) \in J \times D$ に対し, 常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(\tau) = \xi \tag{11.3}$$

の解 (定義 11.1) で τ を定義域の区間の内部に含むものが存在する. また τ を定義域の区間の内部に含む (11.3) の任意の 2 つの解は τ を内部に含むある区間上で一致する.

証明. $f(t,x) : J \times D \ni (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}^N$ は x に関して局所 Lipschitz 連続であるから, 十分小さい $\delta \in (0,\infty)$ を取れば, ある $L \in [0,\infty)$ に対し,

$$[\tau-\delta,\tau+\delta] \subseteq J, \quad CB(\xi,\delta) := \{x \in \mathbb{R}^N : |x-\xi| \leqslant \delta\} \subseteq D,$$
$$|f(t,y) - f(t,x)| \leqslant L|x-y| \quad (\forall (t,x) \in [\tau-\delta,\tau+\delta] \times CB(\xi,\delta)) \tag{11.4}$$

が成り立つ. また $[\tau-\delta,\tau+\delta] \times CB(\xi,\delta)$ はコンパクトであり, f は連続関数であるから, ある $M \in (0,\infty)$ に対し,

$$|f(t,x)| \leqslant M \quad (\forall (t,x) \in [\tau-\delta,\tau+\delta] \times CB(\xi,\delta)) \tag{11.5}$$

が成り立つ.

$$\rho := \min\left(\delta,\ \frac{\delta}{M}\right),\quad I := [\tau-\rho, \tau+\rho] \subseteq [\tau-\delta, \tau+\delta] \subseteq I \tag{11.6}$$

とおく. そして,

$$x_0(t) : I \ni t \mapsto CB(\xi, \delta),\quad x_0(t) := \xi \ \ (\forall t \in I)$$

と定義する. 今, ある $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し連続関数 $x_n(t) : I \to CB(\xi, \delta)$ が定義されたとする. このとき連続関数

$$x_{n+1}(t) : I \ni t \mapsto \xi + \int_\tau^t f(s, x_n(s))ds \in \mathbb{R}^N$$

を定義すれば, (11.5), (11.6) より $x_{n+1}(t) \in CB(\xi, \delta)$ $(\forall t \in I)$ である. よって帰納法により $I \to CB(\xi, \delta)$ の連続関数の列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で

$$x_{n+1}(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x_n(s))ds \ \ (\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{Z}_+) \tag{11.7}$$

を満たすものが定義される. (11.4) より,

$$\begin{aligned}|x_{n+1}(t) - x_n(t)| &\leqslant \left|\int_\tau^t |f(s, x_n(s)) - f(s, x_{n-1}(s)|ds\right| \\ &\leqslant L\left|\int_\tau^t |x_n(s) - x_{n-1}(s)|ds\right| \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I)\end{aligned}$$

であり,

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leqslant M|t-\tau| \ \ (\forall t \in I)$$

であるから, 帰納法より,

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leqslant \frac{M}{L}\frac{(L|t-\tau|)^n}{n!} \leqslant \frac{M}{L}\frac{(L\rho)^n}{n!} \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I)$$

が成り立つことが分かる. よって sup ノルムに関して,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{M}{L}\frac{(L\rho)^n}{n!} = \frac{M}{L}e^{L\rho} < \infty$$

となるから連続関数の列 $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ は一様 Cauchy 条件を満たすので, ある連続関数 $x(t) : I \to CB(\tau, \delta)$ に一様収束する.[*169] そして (11.4) より,

$$|f(t, x(t)) - f(t, x_n(t))| \leqslant L|x(t) - x_n(t)| \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I)$$

であるから,

$$\int_\tau^t f(s, x(s))ds = \lim_{n\to\infty} \int_\tau^t f(s, x_n(s))ds \ \ (\forall t \in I)$$

が成り立つ. よって (11.7) で $n \to \infty$ とすれば,

$$x(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))ds \ \ (\forall t \in I)$$

を得る. $I \ni s \mapsto f(s, x(s)) \in \mathbb{R}^N$ の連続性より $x(t) : I \to CB(\xi, \delta) \subseteq D$ は C^1 級であり,

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)) \ \ (\forall t \in I),\quad x(\tau) = \xi$$

であるから, $x(t) : I \to D$ は常微分方程式の初期値問題 (11.3) の解である.
今, $y_j : I_j \to D$ $(j = 1, 2)$ が常微分方程式の初期値問題 (11.3) の解で τ が I_1, I_2 の内部に属するものとする. このとき

[*169] 定理 1.127, 定理 1.125 を参照.

y_1 と y_2 が τ を含むある区間上で一致することを示す. τ を内部に含む十分小さい区間 $I_0 \subseteq I_1 \cap I_2$ を取れば, y_1, y_2 の連続性より,

$$I_0 \subseteq [\tau - \delta, \tau + \delta], \quad y_1(t), y_2(t) \in CB(\xi, \delta) \quad (\forall t \in I_0) \tag{11.8}$$

となる. 微積分学の基本定理 5.206 より,

$$y_j(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, y_j(s))ds \quad (\forall t \in I_0, j = 1, 2)$$

であるから (11.8) と (11.5) より,

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leqslant \left| \int_\tau^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \right| \leqslant L \left| \int_\tau^t |y_1(s) - y_2(s)| ds \right| \quad (\forall t \in I_0)$$

となる. よって Gronwall の不等式 (11.4) より $y_1(t) = y_2(t)$ $(\forall t \in I_0)$ が成り立つ. □

定理 11.6 (常微分方程式の初期値問題の解の存在と一意性)**.** $J \subseteq \mathbb{R}$ を開区間, $D \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とし, 連続関数 $f(t, x) : J \times D \ni (t, x) \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}^N$ が x に関して局所 Lipschitz 連続 (定義 11.2) であるとする. このとき任意の $(\tau, \xi) \in J \times D$ に対し, 常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi \tag{11.9}$$

は解 (定義 11.1) を持つ. そして (11.9) の解 $x_m(t) : I_m \to D$ で, (11.9) の任意の解の拡張となっているものが存在する.

証明. 補題 11.5 より (11.9) は解を持ち, また (11.9) の任意の解は定義域が開区間の解に拡張できる. そこで (11.9) の解で定義域が開区間であるもの全てからなる集合を Λ とおく. そして $x_1, x_2 \in \Lambda$ に対し x_2 が x_1 の拡張となっているとき $x_1 \leqslant x_2$ と表すこととする. このとき $\leqslant$ により Λ は帰納的順序集合であることが容易に分かる. よって Zorn の補題 1.12 より極大元 $x_m \in \Lambda$ が存在する. この x_m が Λ の最大元であることを示せばよい. 任意の $x \in \Lambda$ を取り, $x \leqslant x_m$ が成り立つことを示す. $x_m : (\alpha, \beta) \to D$, $x : (a, b) \to D$ とする.

$$s := \sup\{t \in [\tau, \min(\beta, b)) : x_m \text{ と } x \text{ は } [\tau, t] \text{ 上で一致する }\}$$

とおくと, 補題 11.5 より $\tau < s$ であり, s の定義より x_m と x は $[\tau, s)$ 上で一致する. もし $s < \min(\beta, b)$ ならば連続性より $x_m(s) = x(s)$ であり, 補題 11.5 より x_m と x は s を含む開区間上で一致することになるので s の定義に矛盾する. よって $s = \min(\beta, b)$ でなければならない. もし $\beta < b$ ならば,

$$\widetilde{x_m}(t) := \begin{cases} x_m(t) & (t \in (\alpha, \beta)) \\ x(t) & (t \in [\beta, b)) \end{cases}$$

とおけば, x_m と x が $[\tau, \beta)$ 上で一致することから, $\widetilde{x_m} \in \Lambda$ であり $x_m < \widetilde{x_m}$ である. しかしこれは x_m の極大性に反する. よって $b \leqslant \beta$ であり, x_m と x は $[\tau, b)$ 上で一致する. 全く同様の議論により $\alpha \leqslant a$ であることと x_m と x が $(a, \tau]$ 上で一致することが示せる. よって $x \leqslant x_m$ である. □

定義 11.7 (常微分方程式の初期値問題の大域解)**.** $J \subseteq \mathbb{R}$ を開区間, $D \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とし, 連続関数 $f(t, x) : J \times D \ni (t, x) \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}^N$ が x に関して局所 Lipschitz 連続 (定義 11.2) であるとする. このとき任意の $(\tau, \xi) \in J \times D$ に対し, 常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi \tag{11.10}$$

は解を持つ. そして (11.10) の解 $x_m(t) : I_m(t) \to D$ で, (11.10) の任意の解の拡張となっているものが存在する. $x_m(t) : I_m(t) \to D$ を (11.10) の大域解と言う.

定理 11.8 (線型常微分方程式の初期値問題の大域解の定義域)**.** $J \subseteq \mathbb{R}$ を開区間, $A(t) : J \to M_{N \times N}(\mathbb{R})$, $B(t) : J \to \mathbb{R}^N$ をそれぞれ連続関数とする. このとき,

$$J \times \mathbb{R}^N \ni (t, x) \mapsto A(t)x + B(t) \in \mathbb{R}^N \tag{11.11}$$

は x に関して局所 Lipschitz 連続な連続関数 (定義 11.2) である. そして任意の $(\tau, \xi) \in J \times \mathbb{R}^N$ に対し, 常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t), \quad x(\tau) = \xi \tag{11.12}$$

の大域解 (定義 11.7) の定義域は J である.

証明. (11.11) が連続関数であることは自明であり, x に関して局所 Lipschitz 連続であることは命題 11.3 による. $J = (\alpha, \beta)$ とおく. $x(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^N$ が (11.12) の大域解であるとする. このとき微積分学の基本定理 5.206 より,

$$x(t) = \xi + \int_\tau^t (A(s)x(s) + B(s))ds \quad (\forall t \in (a, b)) \tag{11.13}$$

である. $b = \beta$ を示すため, $b < \beta$ と仮定して矛盾を導く. このとき $[\tau, b] \subseteq J$ であり, $A(t), B(t)$ は有界閉区間 $[\tau, b]$ 上で連続だから,

$$M_1 = \max_{t \in [\tau, b]} \|A(t)\|, \quad M_2 := \max_{t \in [\tau, b]} |B(t)|$$

が存在する. (11.13) より,

$$|x(t)| \leqslant |\xi| + M_2(b - \tau) + M_1 \int_\tau^t |x(s)|ds \quad (\forall t \in [\tau, b))$$

であるから, Gronwall の不等式 11.4 より,

$$|x(t)| \leqslant (|\xi| + M_2(b - \tau)) \exp(M_1(b - \tau)) \leqslant \quad (\forall t \in [\tau, b))$$

が成り立つ. よって $x(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^N$ は $[\tau, b)$ 上で有界である. ゆえに,

$$\eta := \xi + \int_\tau^b (A(s)x(s) + B(s))ds \in \mathbb{R}^N$$

が存在する. そこで常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t), \quad y(b) = \eta$$

の解 $y(t) : (b - \delta, b + \delta) \to \mathbb{R}^N$ を考え,

$$\widetilde{x}(t) := \begin{cases} x(t) & (t \in (a, b)) \\ y(t) & (t \in [b, b + \delta)) \end{cases}$$

とおけば $\widetilde{x}(t) : (a, b + \delta) \to \mathbb{R}^N$ は (11.12) の解である. しかしこれは $x(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^N$ が (11.12) の大域解であることに矛盾する. よって $b = \beta$ が成り立つ. 全く同様にして $a = \alpha$ が成り立つことも示せる. □

定理 11.9 (初期値とパラメータに関する解の連続性)**.** $J \subseteq \mathbb{R}$ を開区間, $D \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^M$ を開集合とし,

$$f(t, x, \lambda) : J \times D \times \Lambda \ni (t, x, \lambda) \mapsto f(t, x, \lambda) \in D$$

を x に関して局所 Lipschitz 連続な連続関数 (定義 11.2) とする. 任意の $(\tau, \xi, \lambda) \in J \times D \times \Lambda$ に対し, 常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda), \quad x(\tau) = \xi$$

の大域解 (定義 11.7) を,

$$x(\cdot, \tau, \xi, \lambda) : I_{\tau, \xi, \lambda} \ni t \mapsto x(t, \tau, \xi, \lambda) \in D$$

と表す. また,

$$\Omega := \{(t, \tau, \xi, \lambda) \in J \times J \times D \times \Lambda : t \in I_{\tau, \xi, \lambda}\}$$

とおく. このとき Ω は $J \times J \times D \times \Lambda$ の開集合であり,

$$\Omega \ni (t, \tau, \xi, \lambda) \mapsto x(t, \tau, \xi, \lambda) \in D$$

は連続である.

証明. 任意の $(t_0, \tau_0, \xi_0, \lambda_0) \in \Omega$ を取り固定する. そして,

$$t_0, \tau_0 \in (a, b) \subseteq [a, b] \subseteq I_{\tau_0, \xi_0, \lambda_0}$$

を満たす有界閉区間 $I = [a, b]$ を取り,

$$x_0(t) : I = [a, b] \ni t \mapsto x(t, \tau_0, \xi_0, \lambda_0) \in D$$

とおく. また任意の $\gamma \in (0, \infty)$ に対し $(\tau_0, \xi_0, \lambda_0) \in J \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ の近傍

$$U_\gamma := \{(\tau, \xi, \lambda) \in J \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M : \tau \in I, |\xi - x_0(\tau)| \leqslant \gamma, |\lambda - \lambda_0| \leqslant \gamma\} \tag{11.14}$$

を定義する. 今, 十分小さい $\gamma \in (0, \infty)$ を取れば $U_\gamma \subseteq J \times D \times \Lambda$ となり, $f(t, x, \lambda)$ が U_γ 上で x に関して Lipschitz 連続 (定義 11.2) となることを示す. $f(t, x, \lambda)$ は x に関して局所 Lipschitz 連続であることから, 各 $\tau \in [a, b]$ に対し正実数 γ_τ, L_τ が存在し,

$$[\tau - \gamma_\tau, \tau + \gamma_\tau] \times CB(x_0(\tau), \gamma_\tau) \times CB(\lambda_0, \gamma_\tau) \subseteq J \times D \times \Lambda,$$

$$\begin{aligned}&|f(t, x, \lambda) - f(t, y, \lambda)| \leqslant L_\tau |x - y| \\ &(\forall (t, x, \lambda), (t, y, \lambda) \in [\tau - \gamma_\tau, \tau + \gamma_\tau] \times CB(x_0(\tau), \gamma_\tau) \times CB(\lambda_0, \gamma_\tau))\end{aligned}$$

が成り立つ.[*170]

$$G := \{(\tau, x_0(\tau), \lambda_0) : \tau \in I\}$$

はコンパクトであるから, 有限個の $\tau_1, \cdots, \tau_n \in I$ が取れて,

$$G \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (\tau_j - \gamma_{\tau_j}, \tau_j + \gamma_{\tau_j}) \times B\left(x_0(\tau_j), \frac{\gamma_{\tau_j}}{2}\right) \times B\left(\lambda_0, \gamma_{\tau_j}\right)$$

となる. よって,

$$\gamma := \min\left\{\frac{\gamma_{\tau_1}}{2}, \cdots, \frac{\gamma_{\tau_n}}{2}\right\}, \quad L := \max\{L_{\tau_1}, \cdots, L_{\tau_n}\}$$

とおけば,

$$U_\gamma \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} [\tau_j - \gamma_{\tau_j}, \tau_j + \gamma_{\tau_j}] \times CB\left(x_0(\tau_j), \gamma_{\tau_j}\right) \times CB\left(\lambda_0, \gamma_{\tau_j}\right) \subseteq J \times D \times \Lambda, \tag{11.15}$$

$$|f(t, x, \lambda) - f(t, y, \lambda)| \leqslant L|x - y| \quad (\forall (t, x, \lambda), (t, y, \lambda) \in U_\gamma) \tag{11.16}$$

が成り立つ. この正実数 γ と L を固定する. 正実数 δ に対し,

$$M_\delta := \delta + \frac{1}{L} \sup_{t \in I, |\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta} |f(t, x_0(t), \lambda) - f(t, x_0(t), \lambda_0)| \tag{11.17}$$

とおけばコンパクト距離空間上の連続関数の一様連続性 (定理 1.123) より $\lim_{\delta \to +0} M_\delta = 0$ であるから, 十分小さい正実数 δ を取れば,

$$M_\delta e^{L(b-a)} \leqslant \gamma \tag{11.18}$$

となる. この δ を固定する. このとき (11.17), (11.18) より $\delta < \gamma$ であるから, (11.14), (11.15) より,

$$U_\delta \subseteq U_\gamma \subseteq J \times D \times \Lambda$$

であり, U_δ は $(\tau_0, \xi_0, \lambda_0) \in J \times D \times \Lambda$ の近傍である. 今,

$$\begin{aligned}&y_0(t, \tau, \xi, \lambda) : I \times U_\delta \to CB(0, \gamma), \\ &y_0(t, \tau, \xi, \lambda) := \xi - x_0(\tau)\end{aligned}$$

[*170] ただし $B(x, \gamma) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y - x| < \gamma\}$, $CB(x, \gamma) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y - x| \leqslant \gamma\}$.

とおき,

$$y_1(t,\tau,\xi,\lambda) : I \times U_\delta \to \mathbb{R}^N,$$
$$y_1(t,\tau,\xi,\lambda) := \xi - x_0(\tau) + \int_\tau^t f(s, x_0(s) + y_0(s,\tau,\xi,\lambda),\lambda) - f(s,x_0(s),\lambda_0)ds$$

とおく. Lebesgue 優収束定理より y_1 は連続関数であり, (11.16), (11.17) より,

$$\begin{aligned}
&|y_1(t,\tau,\xi,\lambda) - y_0(t,\tau,\xi,\lambda)| = \left|\int_\tau^t f(s,x_0(s)+y_0(s,\tau,\xi,\lambda),\lambda) - f(s,x_0(s),\lambda_0)ds\right| \\
&\leqslant \left|\int_\tau^t f(s,x_0(s)+y_0(s,\tau,\xi,\lambda),\lambda) - f(s,x_0(s),\lambda)ds\right| + \left|\int_\tau^t f(s,x_0(s),\lambda) - f(s,x_0(s),\lambda_0)ds\right| \\
&\leqslant L|t-\tau|\left(|\xi - x_0(\tau)| + \frac{1}{L}\sup_{s\in I, |\lambda-\lambda_0|\leqslant\delta}|f(s,x_0(s),\lambda) - f(s,x_0(s),\lambda_0)|\right) \\
&\leqslant M_\delta L|t-\tau| \quad (\forall (t,\tau,\xi,\lambda) \in I \times U_\delta)
\end{aligned}$$

である. よって (11.17), (11.18) より,

$$\begin{aligned}
|y_1(t,\tau,\xi,\lambda)| &\leqslant |y_0(t,\tau,\xi,\lambda)| + M_\delta L|t-\tau| \leqslant M_\delta(1 + L|t-\tau|) \leqslant M_\delta e^{L|t-\tau|} \\
&\leqslant M_\delta e^{L(b-a)} \leqslant \gamma \quad (\forall (t,\tau,\xi,\lambda) \in I \times U_\delta)
\end{aligned}$$

であるから y_1 の値域は $CB(0,\gamma)$ に含まれる. そこで今, ある $n \in \mathbb{N}$ に対し連続関数 $y_0, y_1, \cdots, y_n : I \times U_\delta \to CB(0,\gamma)$ が定義されており,

$$\begin{aligned}
&y_k(t,\tau,\xi,\lambda) = \xi - x_0(\tau) + \int_\tau^t f(s,x_0(s)+y_{k-1}(s,\tau,\xi,\lambda),\lambda) - f(s,x_0(s),\lambda_0)ds \\
&(k = 1,2,\cdots,n, \forall (t,\tau,\xi,\lambda) \in I \times U_\delta)
\end{aligned} \tag{11.19}$$

$$|y_k(t,\tau,\xi,\lambda) - y_{k-1}(t,\tau,\xi,\lambda)| \leqslant M_\delta \frac{(L|t-\tau|)^k}{k!} \quad (k = 1,2,\cdots,n, \forall (t,\tau,\xi,\lambda) \in I \times U_\delta) \tag{11.20}$$

が成り立つとする. このとき,

$$y_{n+1}(t,\tau,\xi,\lambda) : I \times U_\delta \to \mathbb{R}^N,$$
$$y_{n+1}(t,\tau,\xi,\lambda) = \xi - x_0(\tau) + \int_\tau^t f(s,x_0(s)+y_n(s,\tau,\xi,\lambda),\lambda) - f(s,x_0(s),\lambda_0)ds$$

とおけば Lebesgue 優収束定理より y_{n+1} は連続関数である. そして (11.19), (11.16), (11.20) より,

$$\begin{aligned}
|y_{n+1}(t,\tau,\xi,\lambda) - y_n(t,\tau,\xi,\lambda)| &= \left|\int_\tau^t f(s,x_0(s)+y_n(s,\tau,\xi,\lambda),\lambda) - f(s,x_0(s)+y_{n-1}(s,\tau,\xi,\lambda),\lambda)ds\right| \\
&\leqslant L\left|\int_\tau^t |y_n(s,\tau,\xi,\lambda) - y_{n-1}(s,\tau,\xi,\lambda)|ds\right| \leqslant L\left|\int_\tau^t M_\delta\frac{(L|s-\tau|)^n}{n!}ds\right| \\
&= M_\delta\frac{(L|t-\tau|)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (\forall (t,\tau,\xi,\lambda) \in I \times U_\delta)
\end{aligned}$$

であり, (11.17), (11.18) より,

$$\begin{aligned}
|y_{n+1}(t,\tau,\xi,\lambda)| &\leqslant \sum_{k=1}^{n+1}|y_k(t,\tau,\xi,\lambda) - y_{k-1}(t,\tau,\xi,\lambda)| + |y_0(t,\tau,\xi,\lambda)| \\
&\leqslant M_\delta\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(L|t-\tau|)^k}{k!} + \delta \leqslant M_\delta e^{L|t-\tau|} \\
&\leqslant M_\delta e^{L(b-a)} \leqslant \gamma \quad (\forall (t,\tau,\xi,\lambda) \in I \times U_\delta)
\end{aligned}$$

であるから y_{n+1} の値域は $CB(0,\gamma)$ に含まれる. よって帰納法より $I\times U_\delta\to CB(0,\gamma)$ の連続関数の列 $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ で,

$$y_n(t,\tau,\xi,\lambda)=\xi-x_0(\tau)+\int_\tau^t f(s,x_0(s)+y_{n-1}(s,\tau,\xi,\lambda),\lambda)-f(s,x_0(s),\lambda_0)ds,$$
$$|y_n(t,\tau,\xi,\lambda)-y_{n-1}(t,\tau,\xi,\lambda)|\leqslant M_\delta\frac{(L|t-\tau|)^n}{n!}\quad(\forall n\in\mathbb{N},\forall(t,\tau,\xi,\lambda)\in I\times U_\delta)$$

を満たすものが定義できる.

$$\|y_n-y_{n-1}\|=\sup_{(t,\tau,\xi,\lambda)\in I\times U_\delta}|y_n(t,\tau,\xi,\lambda)-y_{n-1}(t,\tau,\xi,\lambda)|\leqslant M_\delta\frac{(L(b-a))^n}{n!}\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

より,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\|y_n-y_{n-1}\|\leqslant\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}M_\delta\frac{(L(b-a))^n}{n!}=M_\delta e^{L(b-a)}<\infty$$

であるから $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様 Cauchy 条件を満たす. ゆえに $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ はある連続関数 $y(t,\tau,\xi,\lambda):I\times U_\delta\to CB(0,\gamma)$ に一様収束する. (11.16) より,

$$\begin{aligned}&\sup_{(t,\tau,\xi,\lambda)\in I\times U_\delta}|f(t,x_0(t)+y(t,\tau,\xi,\lambda),\lambda)-f_n(t,x_0(t)+y_n(t,\tau,\xi,\lambda),\lambda)|\\&\leqslant L\sup_{(t,\tau,\xi,\lambda)\in I\times U_\delta}|y(t,\tau,\xi,\lambda)-y_n(t,\tau,\xi,\lambda)|\to 0\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

であるから,

$$y_n(t,\tau,\xi,\lambda)=\xi-x_0(\tau)+\int_\tau^t f(s,x_0(s)+y_{n-1}(s,\tau,\xi,\lambda),\lambda)-f(s,x_0(s),\lambda_0)ds\quad(\forall(t,\tau,\xi,\lambda)\in I\times U_\delta)$$

の両辺について $n\to\infty$ とすれば,

$$y(t,\tau,\xi,\lambda)=\xi-x_0(\tau)+\int_\tau^t f(s,x_0(s)+y(s,\tau,\xi,\lambda),\lambda)-f(s,x_0(s),\lambda_0)ds\quad(\forall(t,\tau,\xi,\lambda)\in I\times U_\delta)\tag{11.21}$$

を得る. ここで微積分学の基本定理より,

$$x_0(t)=x_0(\tau)+\int_\tau^t f(s,x_0(s),\lambda_0)ds$$

であるから (11.21) は,

$$x_0(t)+y(t,\tau,\xi,\lambda)=\xi+\int_\tau^t f(s,x_0(s)+y(s,\tau,\xi,\lambda),\lambda)ds\quad(\forall(t,\tau,\xi,\lambda)\in I\times U_\delta)$$

となる. よって $(\tau,\xi,\lambda)\in U_\delta$ に対し,

$$I\ni t\mapsto x_0(t)+y(t,\tau,\xi,\lambda)\in D$$

は常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,\lambda),\quad x(\tau)=\xi$$

の解である. ゆえに定理 11.6 より $I\times U_\delta\subseteq\Omega$ であり,

$$x(t,\tau,\xi,\lambda)=x_0(t)+y(t,\tau,\xi,\lambda)\quad(\forall(t,\tau,\xi,\lambda)\in\Omega)$$

である. $I\times U_\delta\subseteq\Omega$ は $(t_0,\tau_0,\xi_0,\lambda_0)\in\Omega$ の近傍であり,

$$I\times U_\delta\ni(t,\tau,\xi,\lambda)\mapsto x(t,\tau,\xi,\lambda)=x_0(t)+y(t,\tau,\xi,\lambda)\in D$$

は連続であるから, $(t_0,\tau_0,\xi_0,\lambda_0)\in\Omega$ の任意性より, Ω は開集合であり $\Omega\ni(t,\tau,\xi,\lambda)\mapsto x(t,\tau,\xi,\lambda)\in D$ は連続関数である. □

定理 11.10 (初期値に関する解の微分可能性)**.** $J \subseteq \mathbb{R}$ を開区間, $D \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合,

$$f(t,x) : J \times D \ni (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}^N$$

を連続関数で x に関して 1 階の偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) : J \times D \ni (t,x) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(t,x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(t,x) \right) \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$$

を持ち, これが連続であるとする (従って命題 11.3 より $f(t,x) : J \times D \to \mathbb{R}^N$ は x に関して局所 Lipschitz 連続である). 任意の $(\tau, \xi) \in J \times D$ に対し常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(\tau) = \xi$$

の大域解 (定義 11.7) を,

$$x(\cdot, \tau, \xi) : I_{\tau,\xi} \ni t \mapsto x(t, \tau, \xi) \in D$$

とおき,

$$\Omega := \{(t, \tau, \xi) \in J \times J \times D : t \in I_{\tau,\xi}\}$$

とおく. このとき Ω は開集合であり,

$$\Omega \ni (t, \tau, \xi) \mapsto x(t, \tau, \xi) \in D \tag{11.22}$$

は ξ に関して 1 階の偏導関数

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \tau, \xi) : \Omega \ni (t, \tau, \xi) \mapsto \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}(t, \tau, \xi), \cdots, \frac{\partial x}{\partial \xi_N}(t, \tau, \xi) \right) \in M_{N \times N}(\mathbb{R}) \tag{11.23}$$

を持ち, (11.23) は t に関する偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \tau, \xi) : \Omega \ni (t, \tau, \xi) \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \xi_1}(t, \tau, \xi), \cdots, \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \xi_N}(t, \tau, \xi) \right) \in M_{N \times N}(\mathbb{R}) \tag{11.24}$$

を持つ. そして (11.22), (11.23), (11.24) はそれぞれ連続である. さらに,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \tau, \xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \tau, \xi))\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \tau, \xi) \quad (\forall (t, \tau, \xi) \in \Omega) \tag{11.25}$$

が成り立つ.

証明. 定理 11.9 より Ω は開集合であり (11.22) は連続である. 任意の $(t_0, \tau_0, \xi_0) \in \Omega$ を取り固定し,

$$t_0, \tau_0 \in (a,b) \subseteq [a,b] \subseteq I_{\tau_0,\xi_0}$$

なる有界閉区間 $I = [a,b]$ を取る.

$$\{(t, x(t, \tau_0, \xi_0)) : t \in I\}$$

は開集合 $J \times D$ に含まれるコンパクト集合であるから命題 8.6 の (4) より十分小さい $\gamma \in (0, \infty)$ を取れば,

$$U_\gamma := \{(t, \xi) \in J \times \mathbb{R}^N : t \in I, |\xi - x(t, \tau_0, \xi_0)| \leqslant \gamma\} \subseteq J \times D \tag{11.26}$$

となる. また,

$$I \times \{\tau_0\} \times \{\xi_0\}$$

は開集合 Ω に含まれるコンパクト集合であるから命題 8.6 の (4) より十分小さい $\delta \in (0, \infty)$ を取れば,

$$I \times (\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta) \times B(\xi_0, 2\delta)) \subseteq \Omega \tag{11.27}$$

[*171]となる．そして (11.22) の連続性とコンパクト距離空間上の連続関数の一様連続性 (定理 1.123) より $\delta \in (0,\infty)$ をさらに十分小さく取っておけば,

$$|x(t,\tau,\xi) - x(t,\tau_0,\xi_0)| \leqslant \gamma \quad (\forall (t,\tau,\xi) \in I \times (\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta) \times B(\xi_0, 2\delta))$$

となる．よってこの $\delta \in (0,\infty)$ に対し (11.26) より,

$$(t, x(t,\tau,\xi)) \in U_\gamma \subseteq J \times D \quad (\forall (t,\tau,\xi) \in I \times (\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta) \times B(\xi_0, 2\delta)) \tag{11.28}$$

が成り立つ．今, 任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し,

$$\begin{aligned} &\varphi_j(t,\tau,\xi,h) : (a,b) \times (\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta) \times B(\xi_0, \delta) \times ((-\delta,\delta)\backslash\{0\}) \to \mathbb{R}^N, \\ &\varphi_j(t,\tau,\xi,h) := \frac{1}{h}(x(t,\tau,\xi + he_j) - x(t,\tau,\xi)) \end{aligned} \tag{11.29}$$

なる関数を定義する．このとき,

$$\varphi_j(\tau,\tau,\xi,h) = e_j \quad (\forall (\tau,\xi,h) \in (\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta) \times B(\xi_0, \delta) \times ((-\delta,\delta)\backslash\{0\})) \tag{11.30}$$

である．そして任意の $(t,\tau,\xi,h) \in (a,b) \times (\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta) \times B(\xi_0, \delta) \times ((-\delta,\delta)\backslash\{0\})$ に対し (11.28) より,

$$(t,\ x(t,\tau,\xi) + \theta\,(x(t,\tau,\xi + he_j) - x(t,\tau,\xi))) \in U_\gamma \subseteq J \times D \quad (\forall \theta \in [0,1])$$

であることに注意して, 微積分学の基本定理 5.206 より,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(t,\tau,\xi,h) = \frac{1}{h}(f(t, x(t,\tau,\xi + he_j)) - f(t, x(t,\tau,\xi))) \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\,(t,\ x(t,\tau,\xi) + \theta\,(x(t,\tau,\xi + he_j) - x(t,\tau,\xi)))\,d\theta\right) \varphi_j(t,\tau,\xi,h) \end{aligned}$$

となる．よって連続関数

$$\begin{aligned} &A(t,\tau,\xi,h) : \tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta) \times B(\xi_0, \delta) \times (-\delta,\delta) \to M_{N\times N}(\mathbb{R}), \\ &A(t,\tau,\xi,h) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\,(t,\ x(t,\tau,\xi) + \theta\,(x(t,\tau,\xi + he_j) - x(t,\tau,\xi)))\,d\theta \end{aligned}$$

に対し,

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(t,\tau,\xi,h) = A(t,\tau,\xi,h)\varphi_j(t,\tau,\xi,h) \quad (\forall (\tau,\xi,h) \in (\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta) \times B(\xi_0, \delta) \times ((-\delta,\delta)\backslash\{0\})) \tag{11.31}$$

が成り立つ．そこで常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy_j}{dt} = A(t,\tau,\xi,h)y_j, \quad y_j(\tau) = e_j \tag{11.32}$$

の大域解を $y_j(\cdot,\tau,\xi,h)$ とおく．定理 11.8 より $y_j(\cdot,\tau,\xi,h)$ は (a,b) 上で定義され, 初期値とパラメータに関する解の連続性 (定理 11.9) より,

$$y_j(t,\tau,\xi,h) : (a,b) \times (\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta) \times B(\xi_0, \delta) \times (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}^N \tag{11.33}$$

は連続関数である．そして (11.30) と (11.31) より,

$$y_j(t,\tau,\xi,h) = \varphi_j(t,\tau,\xi,h) \quad (\forall (t,\tau,\xi,h) \in (a,b) \times (\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta) \times B(\xi_0, \delta) \times ((-\delta,\delta)\backslash\{0\}))$$

であり, (11.33) の連続性と (11.30) より, 任意のに対し,

$$y_j(t,\tau,\xi,0) = \lim_{h\to 0} \varphi_j(t,\tau,\xi,h) = \frac{\partial x}{\partial \xi_j}(t,\tau,\xi) \quad ((t,\tau,\xi) \in (a,b) \times (\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta) \times B(\xi_0, \delta)) \tag{11.34}$$

[*171] $B(\xi_0, 2\delta) = \{\xi \in \mathbb{R}^N : |\xi - \xi_0| < 2\delta\}$.

である．よって (t_0,τ_0,ξ_0) の開近傍 $(a,b)\times(\tau_0-\delta,\tau_0+\delta)\times B(\xi_0,\delta)\subseteq\Omega$ 上で,

$$\frac{\partial x}{\partial\xi_j}(t,\tau,\xi):(a,b)\times(\tau_0-\delta,\tau_0+\delta)\times B(\xi_0,\delta)\to\mathbb{R}^N$$

が定義でき, (11.34) よりこれは連続である．そして (11.32) より任意の $(t,\tau,\xi)\in(a,b)\times(\tau_0-\delta,\tau_0+\delta)\times B(\xi_0,\delta)$ に対し,

$$\frac{\partial y_j}{\partial t}(t,\tau,\xi,h)=A(t,\tau,\xi,0)y_j(t,\tau,\xi,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t,\tau,\xi))y_j(t,\tau,\xi,0)$$

であるから (11.34) より,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial\xi_j}(t,\tau,\xi)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t,\tau,\xi))\frac{\partial x}{\partial\xi_j}(t,\tau,\xi)\quad(\forall(t,\tau,\xi)\in(a,b)\times(\tau_0-\delta,\tau_0+\delta)\times B(\xi_0,\delta))$$

が成り立つ．よって $(t_0,\tau_0,\xi_0)\in\Omega$ と $j\in\{1,\cdots,N\}$ の任意性より (11.23), (11.24) は連続関数であり, (11.25) が成り立つ． □

定理 11.11 (初期値に関する解の微分可能性)**.** $J\subseteq\mathbb{R}$ を開区間, $D\subseteq\mathbb{R}^N$ を開集合, $k\in\mathbb{N}$ とする．そして連続関数

$$f(t,x):J\times D\ni(t,x)\mapsto f(t,x)\in\mathbb{R}^N$$

が x に関して k 階までの偏導関数を持ち, それらが全て連続であるとする (特に命題 11.3 より $f(t,x):J\times D\to\mathbb{R}^N$ は x に関して局所 Lipschitz 連続である)．そして任意の $(\tau,\xi)\in J\times D$ に対し常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\quad x(\tau)=\xi$$

の大域解 (定義 11.7) を,

$$x(\cdot,\tau,\xi):I_{\tau,\xi}\ni t\mapsto x(t,\tau,\xi)\in D$$

とおき,

$$\Omega:=\{(t,\tau,\xi)\in J\times J\times D:t\in I_{\tau,\xi}\}$$

とおく．このとき Ω は開集合であり,

$$\Omega\ni(t,\tau,\xi)\mapsto x(t,\tau,\xi)\in D$$

は ξ に関して k 階までの偏導関数を持ち, それらは全て Ω 上で連続である．

証明. $k\in\mathbb{N}$ に関する帰納法で示す．$k=1$ の場合は定理 11.10 より成り立つ．$k-1\in\mathbb{N}$ に対して成り立つと仮定して k の場合も成り立つことを示す．

$$\begin{aligned}&F:J\times D\times(\mathbb{R}^N)^N\to\mathbb{R}^N\times(\mathbb{R}^N)^N,\\&F(t,x,y_1,\cdots,y_N)=\left(f(t,x),\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)y_1,\cdots,\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)y_N\right)\in\mathbb{R}^N\times(\mathbb{R}^N)^N\end{aligned}$$

と定義すると, F は $z:=(x,y_1,\cdots,y_N)$ に関して $k-1$ 階までの偏導関数を持ち, それらは全て連続である．そして定理 11.10 より任意の $(\tau,\xi)\in J\times D$ に対し, 常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dz}{dt}=F(t,z),\quad z(\tau)=(\xi,e_1,\cdots,e_N)$$

の大域解は,

$$I_{\tau,\xi}\ni t\mapsto\left(x(t,\tau,\xi),\frac{\partial x}{\partial\xi_1}(t,\tau,\xi),\cdots,\frac{\partial x}{\partial\xi_N}(t,\tau,\xi)\right)\in\mathbb{R}^N\times(\mathbb{R}^N)^N$$

である．よって帰納法の仮定より,

$$\Omega\ni(t,\tau,\xi)\mapsto\left(x(t,\tau,\xi),\frac{\partial x}{\partial\xi_1}(t,\tau,\xi),\cdots,\frac{\partial x}{\partial\xi_N}(t,\tau,\xi)\right)\in\mathbb{R}^N\times(\mathbb{R}^N)^N$$

は ξ に関して $k-1$ 階までの偏導関数を持ち, それらは全て Ω 上で連続である．ゆえに,

$$\Omega\ni(t,\tau,\xi)\mapsto x(t,\tau,\xi)\in D$$

は ξ に関して k 階までの偏導関数を持ち, それらは全て連続である． □

定理 11.12 (線型常微分方程式の解空間)**.** $J \subseteq \mathbb{R}$ を開区間, $A(t) : J \to M_{N\times N}(\mathbb{R})$ を連続関数とする. このとき,

$$\left\{x \in C^1(J, \mathbb{R}^N) : \frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t)\ (\forall t \in J)\right\} \tag{11.35}$$

は各点ごとの演算で $\mathbb{R}$ 上の N 次元線型空間である. そして任意の $\tau \in J$, 任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x(\tau) = e_j$$

の大域解 (定義 11.7) を,

$$\varphi_j(\cdot, \tau) : J \ni t \mapsto \varphi_j(t, \tau) \in \mathbb{R}^N$$

[*172]とおけば, $\varphi_1(\cdot, \tau), \cdots, \varphi_N(\cdot, \tau)$ は (11.35) の基底である.

証明. (11.35) が各点ごとの演算で $\mathbb{R}$ 上の線型空間であることは自明である. 任意の $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$J \ni t \mapsto \sum_{j=1}^{N} \xi_j \varphi_j(t, \tau) \in \mathbb{R}^N$$

は常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x(\tau) = \xi$$

の大域解である. よって (11.35) の任意の元は $\varphi_1(\cdot, \tau), \cdots, \varphi_N(\cdot, \tau)$ の線型結合で表せる. また $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ が,

$$\sum_{j=1}^{N} \xi_j \varphi_j(\cdot, \tau) = 0$$

を満たすならば,

$$\xi = \sum_{j=1}^{N} \xi_j \varphi_j(\tau, \tau) = 0$$

であるから $\varphi_1(\cdot, \tau), \cdots, \varphi_N(\cdot, \tau)$ は線型独立である. よって $\varphi_1(\cdot, \tau), \cdots, \varphi_N(\cdot, \tau)$ は (11.35) の基底である. □

注意 11.13. $J \subseteq \mathbb{R}$ を開区間, $A(t) : J \to M_{N\times N}(\mathbb{R})$ を連続関数とする. 常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

の解 $x(t) : J \to \mathbb{R}^N$ で $0 \in \mathbb{R}^N$ を通過する (ある $\tau \in J$ に対し $x(\tau) = 0$ となる) ものは, 常微分方程式の初期値問題の解の一意性 (定理 11.6) より $x(t) = 0\ (\forall t \in J)$ を満たすものに限られる.

定理 11.14 (N 階線型常微分方程式)**.** $N \in \mathbb{N}$, $J \subseteq \mathbb{R}$ を開区間, $a_0(t), a_1(t), \cdots, a_{N-1}(t) : J \to \mathbb{R}$ をそれぞれ連続関数とし,

$$V := \left\{x(t) \in C^N(J, \mathbb{R}) : \sum_{k=0}^{N-1} a_k(t)x^{(k)}(t) + x^{(N)}(t) = 0\right\}$$

(ただし $x^{(k)}(t) = \frac{d^k x}{dt^k}(t)$, $x^{(0)}(t) = x(t)$) とおく. このとき, V は各点ごとの演算で $\mathbb{R}$ 上の N 次元線型空間であり, 任意の $\tau \in J$, 任意の $\xi = (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ に対し $x(t) \in V$ で,

$$(x^{(0)}(\tau), x^{(1)}(\tau), \cdots, x^{(N-1)}(\tau)) = (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{N-1}) \tag{11.36}$$

を満たすものが唯一つ存在する. そして $x_1(t), \cdots, x_N(t) \in V$ が線型独立であるための必要十分条件は, ある一点 $\tau \in J$ に対し, $\mathbb{R}^N$ の N 本のベクトル

$$(x_j^{(0)}(\tau), x_j^{(1)}(\tau), \cdots, x_j^{(N-1)}(\tau)) \in \mathbb{R}^N \quad (j = 1, \cdots, N) \tag{11.37}$$

が線型独立であることである.

[*172] 大域解 φ_j の定義域が J であることについては定理 11.8 を参照.

証明. V が各点ごとの演算で $\mathbb{R}$ 上の線型空間であることは自明である.

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & a_{N-1}(t) \end{pmatrix} \in M_{N\times N}(\mathbb{R}) \ \ (\forall t \in J)$$

とおけば $A(t) : J \to M_{N\times N}(\mathbb{R})$ は連続関数である. そこで $\mathbb{R}$ 上の N 次元線型空間 (定理 11.12)

$$W := \left\{ y(t) \in C^1(J, \mathbb{R}^N) : \frac{dy}{dt}(t) = A(t)y(t) \ (\forall t \in J) \right\}$$

を考える. 任意の $y(t) = (y_0(t), y_1(t) \cdots, y_{N-1}(t))$ に対し $x(t) = y_0(t) : J \to \mathbb{R}$ とおけば,

$$x^{(1)}(t) = \frac{dy_0}{dt}(t) = y_1(t), \cdots, x^{(N-1)}(t) = \frac{dy_{N-2}}{dt}(t) = y_{N-1}(t) \ \ (\forall t \in J)$$

であり,

$$x^{(N)}(t) = \frac{dy_{N-1}}{dt}(t) = -\sum_{k=0}^{N-1} a_k(t)y_k(t) \ \ (\forall t \in J)$$

であるから $x(t) \in V$ である. 逆に任意の $x(t) \in V$ に対し,

$$y(t) = (y_0(t), y_1(t) \cdots, y_{N-1}(t)) = (x^{(0)}(t), x^{(1)}(t), \cdots, x^{(N-1)}(t)) \ \ (\forall t \in J)$$

とおけば $y(t) \in W$ である. よって線型写像

$$W \ni (y_0(t), y_1(t) \cdots, y_{N-1}(t)) \mapsto y_0(t) \in V \tag{11.38}$$

と線型写像

$$V \ni x(t) \mapsto (x^{(0)}(t), x^{(1)}(t), \cdots, x^{(N-1)}(t)) \in W \tag{11.39}$$

が定義でき, これらは互いに逆写像である. ゆえに W と V は線型同型なので V は N 次元である. 定理 11.12 より任意の $\tau \in J, \xi = (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ に対し, C^1 級関数 $y(t) = (y_0(t), y_1(t), \cdots, y_{N-1}(t)) : J \to \mathbb{R}^N$ で,

$$\frac{dy}{dt}(t) = A(t)y(t), \quad y(\tau) = \xi$$

を満たすものが唯一つ存在する. よって (11.38), (11.39) の一対一対応より任意の $\tau \in J, \xi = (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ に対し, $x(t) \in V$ で,

$$(x^{(0)}(\tau), x^{(1)}(\tau), \cdots, x^{(N-1)}(\tau)) = (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{N-1})$$

を満たすものが唯一つ存在する. また注意 11.13 より $y_1(t), \cdots, y_N(t) \in W$ が線型独立であることはある一点 $\tau \in J$ に対し $y_1(\tau), \cdots, y_N(\tau) \in \mathbb{R}^N$ が線型独立であることと同値である. よって $x_1(t), \cdots, x_N(t) \in V$ が線型独立であることは, ある一点 $\tau \in J$ に対し (11.37) が線型独立であることと同値である. □

定理 11.15 (非斉次線型常微分方程式の解). $J \subseteq \mathbb{R}$ を開区間, $A(t) : J \to M_{N\times N}(\mathbb{R}), b(t) : J \to \mathbb{R}^N$ をそれぞれ連続関数とする. 任意の $\tau \in J, j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し, 常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x(\tau) = e_j$$

の大域解を $\varphi_j(\cdot, \tau) : J \ni t \mapsto \varphi_j(t, \tau) \in \mathbb{R}^N$ とおき, 行列の列ベクトル表記 (定義 2.49) により,

$$\Phi(t, \tau) := (\varphi_1(t, \tau), \cdots, \varphi_N(t, \tau)) \in M_{N\times N}(\mathbb{R}) \ \ (\forall t \in J)$$

とおく. このとき任意の $(\tau, \xi) \in J \times \mathbb{R}^N$ に対し, 常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t), \quad x(\tau) = \xi \tag{11.40}$$

の大域解 (定義 11.7) は,

$$x(t) = \Phi(t,\tau)\xi + \int_\tau^t \Phi(t,s)b(s)ds \quad (\forall t \in J) \tag{11.41}$$

である.

証明. 常微分方程式の大域解の初期値に関する連続性 (定理 11.9) より,

$$J \times J \ni (t,\tau) \mapsto \Phi(t,\tau) = (\varphi_1(t,\tau), \cdots, \varphi_N(t,\tau)) \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$$

は連続である. また,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\tau) = A(t)\Phi(t,\tau) \quad (\forall (t,\tau) \in J \times J),$$
$$\Phi(\tau,\tau) = (e_1, \cdots, e_N) = 1 \quad (\forall \tau \in J)$$

である. よって任意の $\tau \in J$ を取り固定し,

$$x_0(t) := \int_\tau^t \Phi(t,s)b(s)ds \quad (\forall t \in J)$$

とおくと, Lebesgue 優収束定理より任意の $t \in J$ に対し,

$$\begin{aligned}\frac{x_0(t+h) - x_0(t)}{h} &= \int_\tau^{t+h} \frac{\Phi(t+h,s)b(s) - \Phi(t,s)b(s)}{h} ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \Phi(t,s)b(s)ds \\ &\to \int_\tau^t A(t)\Phi(t,s)b(s)ds + \Phi(t,t)b(t) = A(t)x_0(t) + b(t) \quad (h \to 0)\end{aligned}$$

となるので,

$$\frac{d}{dt}x_0(t) = A(t)x_0(t) + b(t) \quad (\forall t \in J)$$

が成り立つ. そこで任意の $\xi \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$x(t) := \Phi(t,\tau)\xi + x_0(t) \quad (\forall t \in J)$$

とおけば,

$$x(\tau) = \Phi(\tau,\tau)\xi + x_0(\tau) = \xi$$

であり,

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)\Phi(t,\tau)\xi + A(t)x_0(t) + b(t) = A(t)x(t) + b(t) \quad (\forall t \in J)$$

である. ゆえに (11.41) は (11.40) の大域解である. □

11.2 Gauss の発散定理の Sobolev 空間版

定義 11.16 (基本的な微分作用その記号)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とする. 勾配 (定義 6.70), 発散 (定義 6.75), Laplacian (定義 6.76) を Ω 上の超関数に対して作用するように拡張する. すなわち任意の $u \in D'(\Omega)$ に対し,

$$\mathrm{grad}(u) := (\partial_1 u, \cdots, \partial u_N) \in (D'(\Omega))^N,$$
$$\Delta u := \partial_1^2 u + \cdots + \partial_N^2 u \in D'(\Omega)$$

と定義し, 任意の $u = (u_1, \cdots, u_N) \in (D'(\Omega))^N$ に対し,

$$\mathrm{div}(u) := \partial_1 u_1 + \cdots + \partial_N u_N$$

と定義する. 以後しばしば勾配は,

$$\nabla u = \mathrm{grad}(u)$$

と表す.

注意 11.17.

$$\mathrm{div}(\nabla u) = \partial_1^2 u + \cdots + \partial_N^2 u = \Delta u \ \ (\forall u \in D'(\Omega)).$$

定義 11.18 (外向き法線微分)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を滑らかでコンパクトな境界を持つ開集合とし, $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_N) : \partial\Omega \to \mathbb{R}^N$ を外向き単位法線ベクトル場 (定義 6.116), $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$ をトレース作用素 (定義 8.129) とする. 任意の $u = (u_1, \cdots, u_N) \in (H^1(\Omega))^N$ に対し,

$$\gamma(u) := (\gamma(u_1), \cdots, \gamma(u_N)) \in (L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega}))^N \tag{11.42}$$

と定義する. また任意の $u \in H^2(\Omega)$, $\nabla u = (\partial_1 u, \cdots, \partial_N u) \in (H^1(\Omega))^N$ に対し,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \gamma(\nabla u) \cdot \nu = \gamma(\partial u_1)\nu_1 + \cdots + \gamma(\partial u_N)\nu_N \in L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega}) \tag{11.43}$$

と定義する. (11.43) を $u \in H^2(\Omega)$ の外向き法線微分と言う.

定理 11.19 (Gauss の発散定理の Sobolev 空間版)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を滑らかな境界を持つ有界開集合とし, $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^N$ を外向き単位法線ベクトル場 (定義 6.116), $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$ をトレース作用素 (定義 8.129) とする. このとき,

(1) 任意の $u = (u_1, \cdots, u_N) \in (H^1(\Omega))^N$ に対し,

$$\int_\Omega \mathrm{div}(u)(x)dx = \int_{\partial\Omega} \gamma(u)(x) \cdot \nu(x) d\mu_{\partial\Omega}(x)$$

が成り立つ.

(2) 任意の $u = (u_1, \cdots, u_N) \in (H^1(\Omega))^N$, $v \in H^1(\Omega)$ に対し,

$$\int_\Omega \mathrm{div}(u)(x)v(x) + u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\partial\Omega} (\gamma(u)(x) \cdot \nu(x))\ \gamma(v)(x) d\mu_{\partial\Omega}(x)$$

が成り立つ.

(3) 任意の $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ に対し,

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\gamma(v)(x) d\mu_{\partial\Omega}(x)$$

が成り立つ.

(4) 任意の $u, v \in H^2(\Omega)$ に対し,

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x) - u(x)\Delta v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\gamma(v)(x) - \gamma(u)(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) \right) d\mu_{\partial\Omega}(x)$$

が成り立つ.

証明. (1) 任意の $u = (u_1, \cdots, u_N) \in (H^1(\Omega))^N$ に対し, Sobolev 空間の拡張作用素の存在定理の系 8.123 より $(D(\mathbb{R}^N)|_\Omega)^N$ の列 $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u^{(n)}\|_{2,1} = 0$$

を満たすものが取れる[*173]. このとき,

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathrm{div}(u) - \mathrm{div}(u^{(n)})\|_2 = 0 \tag{11.44}$$

であり, トレース作用素 $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ が有界線型作用素であることから,

$$\lim_{n\to\infty} \|\gamma(u) \cdot \nu - u^{(n)} \cdot \nu\|_2 = 0 \tag{11.45}$$

[*173] ただし $v = (v_1, \cdots, v_N) \in (H^1(\Omega))^N$ に対し $\|v\|_{2,1} = \sqrt{\sum_{j=1}^N \|v_j\|_{2,1}^2}$.

である. ここで Ω は有界なので Ω 上の Lebesgue 測度は有限測度であるから, (11.44) と Hölder の不等式 (5.130) より,

$$\int_\Omega \mathrm{div}(u)(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \mathrm{div}(u^{(n)})(x)dx \tag{11.46}$$

が成り立つ. また $\mu_{\partial\Omega}$ も有限測度[*174]であるから, (11.45) と Hölder の不等式より,

$$\int_{\partial\Omega}\gamma(u)(x)\cdot\nu(x)d\mu_{\partial\Omega}(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega}u^{(n)}(x)\cdot\nu(x)d\mu_{\partial\Omega}(x) \tag{11.47}$$

が成り立つ. $u^{(n)}\in D(\mathbb{R}^N)|_\Omega$ に対して Gauss の発散定理 6.122 を適用すれば,

$$\int_\Omega \mathrm{div}(u^{(n)})(x)dx = \int_{\partial\Omega}u^{(n)}(x)\cdot\nu(x)d\mu_{\partial\Omega}(x) \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \tag{11.48}$$

となるから, (11.46), (11.47), (11.48) より,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathrm{div}(u)(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \mathrm{div}(u^{(n)})(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega}u^{(n)}(x)\cdot\nu(x)d\mu_{\partial\Omega}(x)\\ &= \int_{\partial\Omega}\gamma(u)(x)\cdot\nu(x)d\mu_{\partial\Omega}(x)\end{aligned}$$

を得る.

(2) 任意の $u=(u_1,\cdots,u_N)\in(H^1(\Omega))^N$, $v\in H^1(\Omega)$ に対し, Sobolev 空間の拡張作用素の存在定理の系 8.123 より $(D(\mathbb{R}^N)|_\Omega)^N$ の列 $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ と $D(\mathbb{R}^N)|_\Omega$ の列 $(v^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{n\to\infty}\|u-u^{(n)}\|_{2,1}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\|v-v^{(n)}\|_{2,1}=0$$

を満たすものが取れ, Hölder の不等式 (5.130) より,

$$\int_\Omega \mathrm{div}(u)(x)v(x)+u(x)\cdot\nabla v(x)dx == \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \mathrm{div}(u^{(n)})(x)v^{(n)}(x)+u^{(n)}(x)\cdot\nabla v^{(n)}(x)dx \tag{11.49}$$

が成り立つ. またトレース作用素 $\gamma: H^1(\Omega)\to L^2(\partial\Omega,\mu_{\partial\Omega})$ が有界線型作用素であることから,

$$\lim_{n\to\infty}\|\gamma(u)\cdot\nu-u^{(n)}\cdot\nu\|_2=0,\quad \lim_{n\to\infty}\|\gamma(v)-v^{(n)}\|_2=0$$

となるので, Hölder の不等式より,

$$\int_{\partial\Omega}(\gamma(u)(x)\cdot\nu(x))\,\gamma(v)(x)d\mu_{\partial\Omega}(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega}(u^{(n)}(x)\cdot\nu(x))\,v^{(n)}(x)d\mu_{\partial\Omega}(x) \tag{11.50}$$

が成り立つ. そして $u^{(n)}v^{(n)}\in(D(\mathbb{R}^N)|_\Omega)^N$ に対して Gauss の発散定理 6.122 を適用すれば,

$$\int_\Omega \mathrm{div}(u^{(n)})(x)v^{(n)}(x)+u^{(n)}(x)\cdot\nabla v^{(n)}(x)dx = \int_{\partial\Omega}(u^{(n)}(x)\cdot\nu(x))\,v^{(n)}(x)d\mu_{\partial\Omega}(x) \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \tag{11.51}$$

となるので, (11.49), (11.50), (11.51) より,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mathrm{div}(u)(x)v(x)+u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \mathrm{div}(u^{(n)})(x)v^{(n)}(x)+u^{(n)}(x)\cdot\nabla v^{(n)}(x)dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega}(u^{(n)}(x)\cdot\nu(x))\,v^{(n)}(x)d\mu_{\partial\Omega}(x) = \int_{\partial\Omega}(\gamma(u)(x)\cdot\nu(x))\,\gamma(v)(x)d\mu_{\partial\Omega}(x)\end{aligned}$$

を得る.

(3) 任意の $u\in H^2(\Omega)$ に対し $\nabla u=(\partial_1 u,\cdots,\partial_N u)\in(H^1(\Omega))^N$ であるから, $\nabla u=(\partial_1 u,\cdots,\partial_N u)\in(H^1(\Omega))^N$ と任意の $v\in H^1(\Omega)$ に対し (2) を適用すれば,

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)+\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\gamma(v)(x)d\mu_{\partial\Omega}(x)$$

を得る.

[*174] $\partial\Omega$ がコンパクトであることと Riemann-Lebesgue 測度 $\mu_{\partial\Omega}$ の位相正則性 (定理 6.88) による.

(4) 任意の $u, v \in H^2(\Omega)$ に対し (3) より,

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\gamma(v)(x)d\mu_{\partial\Omega}(x),$$
$$\int_\Omega \Delta v(x)u(x) + \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu}(x)\gamma(u)(x)d\mu_{\partial\Omega}(x)$$

であるから, 上の等式から下の等式を引けば,

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x) - u(x)\Delta v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\gamma(v)(x) - \gamma(u)(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) \right) d\mu_{\partial\Omega}(x)$$

を得る.

□

定理 11.20 (Gauss の発散定理の Sobolev 空間版 2)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を滑らかでコンパクトな境界を持つ開集合で, $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ が有界であるものとする (従って Ω は有界ではない). そして $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^N$ を外向き単位法線ベクトル場 (定義 6.116), $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$ をトレース作用素 (定義 8.129) とする. このとき,

(1) 任意の $u = (u_1, \cdots, u_N) \in (H^1(\Omega))^N$, $v \in H^1(\Omega)$ に対し,

$$\int_\Omega \mathrm{div}(u)(x)v(x) + u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \left(\gamma(u)(x) \cdot \nu(x)\right) \gamma(v)(x)d\mu_{\partial\Omega}(x)$$

が成り立つ.

(2) 任意の $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ に対し,

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\gamma(v)(x)d\mu_{\partial\Omega}(x)$$

が成り立つ.

(3) 任意の $u, v \in H^2(\Omega)$ に対し,

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x) - u(x)\Delta v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\gamma(v)(x) - \gamma(u)(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) \right) d\mu_{\partial\Omega}(x)$$

が成り立つ.

証明. (1) 任意の $u = (u_1, \cdots, u_N) \in (H^1(\Omega))^N$, $v \in H^1(\Omega)$ に対し, Sobolev 空間の拡張作用素の存在定理の系 8.123 より $(D(\mathbb{R}^N)|_\Omega)^N$ の列 $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ と $D(\mathbb{R}^N)|_\Omega$ の列 $(v^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u^{(n)}\|_{2,1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|v - v^{(n)}\|_{2,1} = 0$$

を満たすものが取れ, Hölder の不等式 (5.130) より,

$$\int_\Omega \mathrm{div}(u)(x)v(x) + u(x) \cdot \nabla v(x) dx == \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \mathrm{div}(u^{(n)})(x)v^{(n)}(x) + u^{(n)}(x) \cdot \nabla v^{(n)}(x) dx \tag{11.52}$$

が成り立つ. またトレース作用素 $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$ が有界線型作用素であることから,

$$\lim_{n\to\infty} \|\gamma(u) \cdot \nu - u^{(n)} \cdot \nu\|_2 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|\gamma(v) - v^{(n)}\|_2 = 0$$

となるので, Hölder の不等式より,

$$\int_{\partial\Omega} \left(\gamma(u)(x) \cdot \nu(x)\right) \gamma(v)(x)d\mu_{\partial\Omega}(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \left(u^{(n)}(x) \cdot \nu(x)\right) v^{(n)}(x)d\mu_{\partial\Omega}(x) \tag{11.53}$$

が成り立つ. 今, 任意の $n \in \mathbb{N}$ を取り固定する. $u^{(n)}v^{(n)} \in (D(\mathbb{R}^N)|_\Omega)^N$ の台と $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ はいずれも有界だから, 十分大きい $R \in (0, \infty)$ を取れば,

$$\mathrm{supp}\left(u^{(n)}v^{(n)}\right), \ \mathbb{R}^N \backslash \Omega \subseteq B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$$

となり, $\Omega \cap B(0,R)$ は滑らかな境界を持つ有界開集合 (定義 6.113) でその境界は,

$$\partial(\Omega \cap B(0,R)) = \partial\Omega \cup \partial B(0,R)$$

である. そこで $u^{(n)}v^{(n)} \in (D(\mathbb{R}^N)|_\Omega)^N$ に対して Gauss の発散定理 6.122 を適用すれば,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathrm{div}(u^{(n)})(x)v^{(n)}(x) + u^{(n)}(x)\cdot\nabla v^{(n)}(x)dx \\
&= \int_\Omega \mathrm{div}\left(u^{(n)}v^{(n)}\right)(x)dx = \int_{\Omega\cap B(0,R)} \mathrm{div}\left(u^{(n)}v^{(n)}\right)(x)dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(u^{(n)}(x)\cdot\nu(x)\right) v^{(n)}(x)d\mu_{\partial\Omega}(x) + \int_{\partial B(0,R)} \left(u^{(n)}(x)\cdot\nu(x)\right) v^{(n)}(x)d\mu_{\partial B(0,R)}(x) \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(u^{(n)}(x)\cdot\nu(x)\right) v^{(n)}(x)d\mu_{\partial\Omega}(x)
\end{aligned}$$

を得る. ゆえに,

$$\int_\Omega \mathrm{div}(u^{(n)})(x)v^{(n)}(x) + u^{(n)}(x)\cdot\nabla v^{(n)}(x)dx = \int_{\partial\Omega} \left(u^{(n)}(x)\cdot\nu(x)\right) v^{(n)}(x)d\mu_{\partial\Omega}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{11.54}$$

が成り立つ. (11.52), (11.53), (11.54) より,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathrm{div}(u)(x)v(x) + u(x)\cdot\nabla v(x)dx == \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \mathrm{div}(u^{(n)})(x)v^{(n)}(x) + u^{(n)}(x)\cdot\nabla v^{(n)}(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega} \left(u^{(n)}(x)\cdot\nu(x)\right) v^{(n)}(x)d\mu_{\partial\Omega}(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\gamma(u)(x)\cdot\nu(x)\right)\gamma(v)(x)d\mu_{\partial\Omega}(x)
\end{aligned}$$

を得る.

(2) 任意の $u \in H^2(\Omega)$ に対し $\nabla u = (\partial_1 u, \cdots, \partial_N u) \in (H^1(\Omega))^N$ であるから, $\nabla u = (\partial_1 u, \cdots, \partial_N u) \in (H^1(\Omega))^N$ と任意の $v \in H^1(\Omega)$ に対し (1) を適用すれば,

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x) + \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\gamma(v)(x)d\mu_{\partial\Omega}(x)$$

を得る.

(3) 任意の $u, v \in H^2(\Omega)$ に対し (2) より,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta u(x)v(x) + \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\gamma(v)(x)d\mu_{\partial\Omega}(x), \\
\int_\Omega \Delta v(x)u(x) + \nabla v(x)\cdot\nabla u(x)dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial\nu}(x)\gamma(u)(x)d\mu_{\partial\Omega}(x)
\end{aligned}$$

であるから, 上の等式から下の等式を引けば,

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x) - u(x)\Delta v(x)dx = \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\gamma(v)(x) - \gamma(u)(x)\frac{\partial v}{\partial\nu}(x)\right)d\mu_{\partial\Omega}(x)$$

を得る.

□

11.3 境界条件付き一様楕円型微分作用素, 楕円型正則性

定義 11.21 (一様楕円型微分作用素)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とし, $a_{i,j}, b \in C^\infty(\Omega)$ $(i,j = 1,\cdots,N)$ を全ての偏導関数が有界な関数とする. そして,

$$b(x) \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in \Omega) \tag{11.55}$$

であり, ある正実数 C に対し,

$$\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x)\xi_j\overline{\xi_i} \geqslant C\sum_{j=1}^N |\xi_j|^2 = |\xi|^2 \quad (\forall \xi = (\xi_1,\cdots,\xi_N) \in \mathbb{C}^N, \forall x \in \Omega), \tag{11.56}$$

が成り立つとする．このとき，

$$\mathcal{A} : D'(\Omega) \ni u \mapsto -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j(a_{i,j}\partial_j u) + bu \in D'(\Omega) \tag{11.57}$$

と表される微分作用素は Ω 上の 2 階の一様楕円型微分作用素と呼ばれるものの一種であり, (11.56) を一様楕円性条件と言う．以後, Ω 上の一様楕円型微分作用素と言えば上の条件 (11.55) と (11.56) を満たす (11.57) を指すこととする．

例 11.22 (Laplacian)**.** 開集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 上の Laplacian $-\Delta : D'(\Omega) \to D'(\Omega)$ は Ω 上の一様楕円型微分作用素である．実際, 定義 11.21 において $a_{i,j}(x) = \delta_{i,j}, b(x) = 0$ $(\forall i, j \in \{1, \cdots, N\}, \forall x \in \Omega)$ として得られる $\mathcal{A}$ は $-\Delta$ である．

補題 11.23 (Poincare の不等式)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とし, ある正実数 C に対し,

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N-1} \times [-C, C]$$

が成り立つとする．このとき,

$$\|u\|_2 \leqslant 2C\|\partial_N u\|_2 \ \ (\forall u \in H_0^1(\Omega)) \tag{11.58}$$

が成り立つ．

証明. 任意の $u \in D(\Omega) \subseteq D(\mathbb{R}^N)$ [*175] に対し, 微積分学の基本定理 5.206 と Hölder の不等式 (5.120) より，

$$|u(x)|^2 = \left|\int_{-C}^{x_N} \partial_N u(x_1, \cdots, x_{N-1}, t)dt\right|^2 \leqslant 2C \int_{\mathbb{R}} |\partial_N u(x_1, \cdots, x_{N-1}, t)|^2 dt \ \ (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

が成り立つので, 任意の $(x_1, \cdots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$ に対し,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |u(x_1, \cdots, x_{N-1}, x_N)|^2 dx_N &= \int_{-C}^{C} |u(x_1, \cdots, x_{N-1}, x_N)|^2 dx_N \\
&\leqslant 2C \int_{-C}^{C} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_N u(x_1, \cdots, x_{N-1}, t)|^2 dt \right) dx_N \\
&= (2C)^2 \int_{\mathbb{R}} |\partial_N u(x_1, \cdots, x_{N-1}, t)|^2 dt \\
&= (2C)^2 \int_{\mathbb{R}} |\partial_N u(x_1, \cdots, x_{N-1}, x_N)|^2 dx_N.
\end{aligned}$$

よって Tonelli の定理 5.84 より,

$$\begin{aligned}
\|u\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x_1, \cdots, x_{N-1}, x_N)|^2 dx_N \right) dx_1 \cdots dx_{N-1} \\
&\leqslant (2C)^2 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_N u(x_1, \cdots, x_{N-1}, x_N)|^2 dx_N \right) dx_1 \cdots dx_{N-1} \\
&= (2C)^2 \|\partial_N u\|_2^2
\end{aligned}$$

となる．ゆえに,

$$\|u\|_2 \leqslant 2C\|\partial_N u\|_2 \ \ (\forall u \in D(\Omega))$$

が成り立つ．任意の $u \in H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{2,1}} \subseteq H^1(\Omega)$ に対し $D(\Omega)$ の列 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty}\|u - u_n\|_{2,1} = 0$ を満たすものが取れるので,

$$\|u\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_2 \leqslant \lim_{n\to\infty} 2C\|\partial_N u_n\|_2 = 2C\|\partial_N u\|_2.$$

よって (11.58) が成り立つ． □

*175 定義 8.31 を参照

定理 11.24 (Lax-Milgram)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合,

$$\mathcal{A} : D'(\Omega) \ni u \mapsto -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j(a_{i,j}\partial_j u) + bu \in D'(\Omega)$$

を一様楕円型微分作用素 (定義 11.21),

$$p_{\mathcal{A}}(u,v) := \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\overline{\partial_i v(x)}dx + \int_{\Omega} b(x)u(x)\overline{v(x)}dx \quad (\forall u, v \in H^1(\Omega))$$

とおく. そして $H_0^1(\Omega) \subseteq \mathcal{V} \subseteq H^1(\Omega)$ なる $H^1(\Omega)$ の閉部分空間 $\mathcal{V}$ に対し,

$$D(A) := \{u \in \mathcal{V} : \mathcal{A}u \in L^2(\Omega),\ p_{\mathcal{A}}(u,v) = (\mathcal{A}u \mid v)_2\ (\forall v \in \mathcal{V})\},$$
$$A : D(A) \ni u \mapsto \mathcal{A}u \in L^2(\Omega)$$

とおく. また,

$$\lambda_0 := \inf_{x\in\Omega} b(x) \in \mathbb{R}$$

とおく. このとき,

(1) $A : D(A) \to L^2(\Omega)$ は Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の自己共役作用素であり, $\sigma(A) \subseteq [\lambda_0, \infty)$ が成り立つ. また任意の $\lambda \in (-\infty, \lambda_0)$ に対し,

$$(A-\lambda)^{-1} \in B(L^2(\Omega), \mathcal{V}) \subseteq B(L^2(\Omega))$$

が成り立つ.

(2) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ が有界で $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$ ならば $\sigma(A) \subseteq (\lambda_0, \infty)$ であり,

$$(A-\lambda_0)^{-1} \in B(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega)) \subseteq B(L^2(\Omega))$$

が成り立つ.

(3) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ が滑らかな境界を持つ有界開集合ならば, Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の自己共役作用素 $A : D(A) \to L^2(\Omega)$ のスペクトルは純粋に離散的 (定義 10.125) である.

(4) $\lambda_0 \geqslant 0$ ならば $A : D(A) \to L^2(\Omega)$ は Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の非負自己共役作用素 (定義 10.69) であり,

$$\mathcal{V} = D(\sqrt{A}), \quad p_{\mathcal{A}}(u,v) = (\sqrt{A}u \mid \sqrt{A}v)_2 \quad (\forall u, v \in \mathcal{V})$$

が成り立つ.

証明.　(1) 任意の $\lambda \in (-\infty, \lambda_0)$ を取り固定する.

$$p_{\mathcal{A}-\lambda}(u,v) := p_{\mathcal{A}}(u,v) - \lambda(u \mid v)_2 \quad (\forall u, v \in \mathcal{V})$$

とおくと, 一様楕円性条件 (11.56) より, ある正実数 C が存在し,

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{A}-\lambda}(u,u) &= \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\overline{\partial_i u(x)}dx + \int_{\Omega} (b(x)-\lambda)|u(x)|^2 dx \\ &\geqslant C\sum_{j=1}^{N} \|\partial_j u\|_2^2 + (\lambda_0 - \lambda)\|u\|_2^2 \geqslant C'\|u\|_{2,1}^2 \quad (\forall u \in \mathcal{V}) \end{aligned} \tag{11.59}$$

(ただし $C' = \min\{C, \lambda_0 - \lambda\} > 0$) が成り立つ. また $a_{i,j}, b$ の有界性 (定義 11.21) より,

$$p_{\mathcal{A}-\lambda} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (u,v) \mapsto p_{\mathcal{A}-\lambda}(u,v) \in \mathbb{C}$$

は Hilbert 空間 $(\mathcal{V}, (\cdot \mid \cdot)_{2,1})$ 上の有界準双線型汎関数であるから, 定理 3.49 より $T \in B(\mathcal{V})$ で,

$$p_{\mathcal{A}-\lambda}(u,v) = (Tu \mid v)_{2,1} \quad (\forall u, v \in \mathcal{V}) \tag{11.60}$$

を満たすものが定まる. (11.59) と命題 10.5, 命題 10.3 より $T^{-1} \in B(\mathcal{V})$ が存在し, $T, T^{-1} \in B(\mathcal{V})$ は $\mathcal{V}$ 上の有界非負自己共役作用素である. 今, 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対し,

$$\mathcal{V} \ni u \mapsto (u \mid f)_2 \in \mathbb{C}$$

は Hilbert 空間 $(\mathcal{V}, (\cdot \mid \cdot)_{2,1})$ 上の有界線型汎関数であるから Riesz の表現定理 3.44 より $Rf \in \mathcal{V}$ で,

$$(u \mid f)_2 = (u \mid Rf)_{2,1} \quad (\forall u \in \mathcal{V})$$

を満たすものが定まる. こうして線型作用素 $R : L^2(\Omega) \ni f \mapsto Rf \in \mathcal{V}$ で,

$$(u \mid f)_2 = (u \mid Rf)_{2,1} \quad (\forall u \in \mathcal{V}, \forall f \in L^2(\Omega)) \tag{11.61}$$

なるものが定義でき,

$$\|Rf\|_{2,1}^2 = (Rf \mid Rf)_{2,1} = (Rf \mid f)_2 \leqslant \|Rf\|_2\|f\| \leqslant \|Rf\|_{2,1}\|f\|_2 \quad (\forall f \in L^2(\Omega))$$

より $R \in B(L^2(\Omega), \mathcal{V})$ である. 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対し (11.60) より,

$$(f \mid v)_2 = (Rf \mid v)_{2,1} = (TT^{-1}Rf \mid v)_{2,1} = p_{\mathcal{A}-\lambda}(T^{-1}Rf, v) \quad (\forall f \in L^2(\Omega), \forall v \in \mathcal{V}) \tag{11.62}$$

であり, $D(\Omega) \subseteq H_0^1(\Omega) \subseteq \mathcal{V}$ であるから $D'(\Omega)$ において,

$$f = (\mathcal{A} - \lambda)T^{-1}Rf \quad (\forall f \in L^2(\Omega))$$

が成り立つ. よって,

$$\mathcal{A}T^{-1}Rf = f + \lambda T^{-1}Rf \in L^2(\Omega) \quad (\forall f \in L^2(\Omega))$$

であり, (11.62) より,

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}T^{-1}Rf \mid v)_2 &= (f \mid v)_2 + \lambda(T^{-1}Rf \mid v)_2 = p_{\mathcal{A}-\lambda}(T^{-1}Rf, v) + \lambda(T^{-1}Rf \mid v)_2 \\ &= p_{\mathcal{A}}(T^{-1}Rf, v) \quad (\forall f \in L^2(\Omega), \forall v \in \mathcal{V})\end{aligned}$$

であるから $T^{-1}Rf \in D(A)$ が成り立ち,

$$(A - \lambda)T^{-1}Rf = (\mathcal{A} - \lambda)T^{-1}Rf = f \quad (\forall f \in L^2(\Omega)) \tag{11.63}$$

である. また任意の $u \in D(A)$ に対し, (11.61), (11.60) より,

$$\begin{aligned}p_{\mathcal{A}-\lambda}(u, v) &= p_{\mathcal{A}}(u, v) - \lambda(u \mid v)_2 = (Au \mid v)_2 - \lambda(u \mid v)_2 = ((A - \lambda)u \mid v)_2 \\ &= (R(A - \lambda)u \mid v)_{2,1} = (TT^{-1}R(A - \lambda)u \mid v)_{2,1} \\ &= p_{\mathcal{A}-\lambda}(T^{-1}R(A - \lambda)u, v) \quad (\forall v \in \mathcal{V})\end{aligned}$$

であるから, (11.60) より,

$$(Tu \mid v)_{2,1} = p_{\mathcal{A}-\lambda}(u, v) = p_{\mathcal{A}-\lambda}(T^{-1}R(A - \lambda)u, v) = (R(A - \lambda)u \mid v)_{2,1} \quad (\forall v \in \mathcal{V}).$$

ゆえに,

$$u = T^{-1}R(A - \lambda)u \quad (\forall u \in D(A)) \tag{11.64}$$

である. (11.63), (11.64) より, $A - \lambda : D(A) \to L^2(\Omega)$ は全単射であり,

$$(A - \lambda)^{-1} = T^{-1}R \in B(L^2(\Omega), \mathcal{V}) \subseteq B(L^2(\Omega))$$

が成り立つ. $T^{-1} \in B(\mathcal{V})$ は $\mathcal{V}$ 上の有界非負自己共役作用素であるから (11.61) と命題 10.5 より,

$$((A - \lambda)^{-1}f \mid f)_2 = (T^{-1}Rf \mid f)_2 = (T^{-1}Rf \mid Rf)_{2,1} \geqslant 0 \quad (\forall f \in L^2(\Omega)).$$

よって命題 10.5 より $(A - \lambda)^{-1} \in B(L^2(\Omega))$ は Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の有界非負自己共役作用素である. ゆえに Borel 関数カルキュラス (定理 10.68) より $A - \lambda : D(A) \to L^2(\Omega)$ も Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の非負自己共役作用素である. 以上より $A : D(A) \to L^2(\Omega)$ は Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の自己共役作用素で $\sigma(A) \subseteq [\lambda_0, \infty)$ を満たし, 任意の $\lambda \in (-\infty, \lambda_0)$ に対し $(A - \lambda)^{-1} \in B(L^2(\Omega), \mathcal{V}) \subseteq B(L^2(\Omega))$ が成り立つ.

(2)

$$p_{\mathcal{A}-\lambda_0}(u,v) := p_{\mathcal{A}}(u,v) - \lambda_0(u \mid v)_2 \quad (\forall u,v \in H_0^1(\Omega))$$

とおくと, 一様楕円性条件 (11.56) より, ある正実数 C が存在し,

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{A}-\lambda_0}(u,u) &= \sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\overline{\partial_i u(x)}dx + \int_\Omega (b(x)-\lambda_0)|u(x)|^2dx \\ &\geqslant \sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\overline{\partial_i u(x)}dx \geqslant C\sum_{j=1}^{N}\|\partial_j u\|_2^2 \quad (\forall u \in H_0^1(\Omega)) \end{aligned} \tag{11.65}$$

が成り立つ. ここで Poincare の不等式 (補題 11.23) より, ある正実数 C' が存在し,

$$C\sum_{j=1}^{N}\|\partial_j u\|_2^2 \geqslant C'\left(\sum_{j=1}^{N}\|\partial_j u\|_2^2 + \|u\|_2^2\right) = C'\|u\|_{2,1}^2 \quad (\forall u \in H_0^1(\Omega))$$

となるから, (11.65) より,

$$p_{\mathcal{A}-\lambda_0}(u,u) \geqslant C'\|u\|_{2,1}^2 \quad (\forall u \in H_0^1(\Omega))$$

が成り立つ. 後は (1) と同様にして $A-\lambda_0 : D(A) \to L^2(\Omega)$ が全単射であり $(A-\lambda_0)^{-1} \in B(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))$ が成り立つことが示せる.

(3) 任意の $\lambda \in (-\infty, \lambda_0)$ を取る. (1) より $(A-\lambda)^{-1} \in B(L^2(\Omega), H^1(\Omega))$ であるから,

$$(L^2(\Omega))_1 := \{u \in L^2(\Omega) : \|u\|_2 \leqslant 1\}$$

の任意の列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し $((A-\lambda)^{-1}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $H^1(\Omega)$ の有界列である. よって Rellich-Kondrachov の定理 8.139 より $((A-\lambda)^{-1}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^2(\Omega)$ のノルムで収束する部分列を持つ. ゆえに $(A-\lambda)^{-1}((L^2(\Omega))_1)$ は $L^2(\Omega)$ のノルムで (点列) コンパクトであるから, 定理 10.114 より $(A-\lambda)^{-1} \in B(L^2(\Omega))$ は $L^2(\Omega)$ 上のコンパクト作用素である. ゆえに命題 10.127 の (1) より, Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の自己共役作用素 $A : D(A) \to L^2(\Omega)$ のスペクトルは純粋に離散的である.

(4) (1) より $\sigma(A) \subseteq [\lambda_0,\infty) \subseteq [0,\infty)$ であるから $A : D(A) \to L^2(\Omega)$ は Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の非負自己共役作用素である. (1) における $T \in B(\mathcal{V})$ と $R \in B(L^2(\Omega),\mathcal{V})$ を考えると,

$$D(A) = \mathrm{Ran}((A-\lambda)^{-1}) = T^{-1}R(L^2(\Omega)) \tag{11.66}$$

である. (11.61) より,

$$(u \mid Rf)_{2,1} = (u \mid f)_2 \quad (\forall u \in \mathcal{V}, \forall f \in L^2(\Omega))$$

であるから, $R(L^2(\Omega)) \subseteq \mathcal{V}$ の Hilbert 空間 $(\mathcal{V}, (\cdot \mid \cdot)_{2,1})$ における直交補空間は $\{0\}$ である. よって $R(L^2(\Omega))$ は $(\mathcal{V}, (\cdot \mid \cdot)_{2,1})$ において稠密であるから, $T^{-1} \in B(\mathcal{V})$ であることと (11.66) より $D(A)$ は $(\mathcal{V}, (\cdot \mid \cdot)_{2,1})$ において稠密である. ゆえに任意の $u,v \in \mathcal{V}$ に対し $D(A)$ の列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|_{2,1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\|v-v_n\|_{2,1} = 0 \tag{11.67}$$

を満たすものが取れる. $p_{\mathcal{A}} : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathbb{C}$ は Hilbert 空間 $(\mathcal{V}, (\cdot \mid \cdot)_{2,1})$ 上の有界準双線型汎関数であるから (11.67) より,

$$\|\sqrt{A}u_n - \sqrt{A}u_m\|_2^2 = (A(u_n-u_m) \mid u_n-u_m)_2 = p_{\mathcal{A}}(u_n-u_m, u_n-u_m) \to 0 \quad (n,m\to\infty)$$

となり, $\sqrt{A}$ が Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の閉線型作用素であることから,

$$u \in D(\sqrt{A}), \quad \lim_{n\to\infty}\|\sqrt{A}u_n - \sqrt{A}u\|_2 = 0$$

が成り立つ. 同様に,

$$v \in D(\sqrt{A}), \quad \lim_{n\to\infty}\|\sqrt{A}u_n - \sqrt{A}u\|_2 = 0$$

が成り立つので, (11.67) と $p_{\mathcal{A}}:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{C}$ の有界準双線型性より,

$$p_{\mathcal{A}}(u,v)=\lim_{n\to\infty}p_{\mathcal{A}}(u_n,v_n)=\lim_{n\to\infty}(Au_n\mid v_n)_2=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{A}u_n\mid\sqrt{A}v_n)_2=(\sqrt{A}u\mid\sqrt{A}v)_2$$

が成り立つ. 以上で,

$$\mathcal{V}\subseteq D(\sqrt{A}),\ \ p_{\mathcal{A}}(u,v)=(\sqrt{A}u\mid\sqrt{A}v)_2$$

が示された. 後は $D(\sqrt{A})\subseteq\mathcal{V}$ を示せばよい. 任意の $u\in D(\sqrt{A})$ を取る. 定理 10.28 より $D(A)$ は $\sqrt{A}$ の芯であるから, $D(A)$ の点列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|_2=0,\ \ \lim_{n\to\infty}\|\sqrt{A}u-\sqrt{A}u_n\|_2=0$$

を満たすものが取れる. ここで一様楕円性条件 (11.56) より, ある正実数 C に対し,

$$\|\sqrt{A}u_n-\sqrt{A}u_m\|_2^2=p_{\mathcal{A}}(u_n-u_m,u_n-u_m)\geqslant C\|\nabla(u_n-u_m\|_2^2\ \ (\forall n,m\in\mathbb{N})$$

となるので,

$$\|u_n-u_m\|_{2,1}^2=\|u_n-u_m\|_2^2+\|\nabla(u_n-u_m)\|_2^2\to 0\ \ (n,m\to\infty)$$

が成り立つ. よって $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Hilbert 空間 $(\mathcal{V},(\cdot\mid\cdot)_{2,1})$ において収束するので $u\in\mathcal{V}$ である. ゆえに $D(\sqrt{A})\subseteq\mathcal{V}$ が成り立つ.

□

定義 11.25. 任意の $h\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $j\in\{1,\cdots,N\}$, $u:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ に対し,

$$\tau_{j,h}u:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C},\ \ \partial_{j,h}u:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$$

を,

$$\tau_{j,h}u(x):=u(x+he_j),\ \ \partial_{j,h}u(x):=\frac{1}{h}(u(x+he_j)-u(x))\ \ (\forall x\in\mathbb{R}^N)$$

と定義する (ただし $(e_1,\cdots,e_N)$ は $\mathbb{R}^N$ の標準基底である). また任意の多重指数 $\alpha\in\mathbb{Z}_+^N$ と任意の $h\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $u:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ に対し,

$$\tau_h^\alpha u:=\tau_{1,h}^{\alpha_1}\cdots\tau_{N,h}^{\alpha_N}u,\ \ \partial_h^\alpha u:=\partial_{1,h}^{\alpha_1}\cdots\partial_{N,h}^{\alpha_N}u$$

と定義する.

命題 11.26. 任意の $u,v:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$, 任意の多重指数 $\alpha\in\mathbb{Z}_+^N$, 任意の $h\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し,

$$\partial_h^\alpha(uv)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(\partial_h^\beta u)(\tau_h^\beta\partial_h^{\alpha-\beta}v)$$

が成り立つ.

証明. 任意の $j\in\{1,\cdots,N\}$ を取り固定する. 任意の $n\in\mathbb{Z}_+$ に対し,

$$\partial_{j,h}^n(uv)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}=(\partial_{j,h}^k u)(\tau_{j,h}^k\partial_{j,h}^{n-k}v)\tag{11.68}$$

が成り立つことを帰納法により示す. $n=0,1$ の場合に成り立つことは明らかである. ある $n\in\mathbb{N}$ に対して (11.68) が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned}\partial_{j,h}^{n+1}(uv)&=\partial_{j,h}\partial_{j,h}^n(uv)=\partial_{j,h}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(\partial_{j,h}^k u)(\tau_{j,h}^k\partial_{j,h}^{n-k}v)\\&=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(\partial_{j,h}^{k+1}u)(\tau_{j,h}^{k+1}\partial_{j,h}^{n-k}v)+\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(\partial_{j,h}^k u)(\tau_{j,h}^k\partial_{j,h}^{n+1-k}v)\\&=(\partial_{j,h}^{n+1}u)(\tau_{j,h}^{n+1}v)+u(\partial_{j,h}^{n+1}v)+\sum_{k=1}^n\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)(\partial_{j,h}^k u)(\tau_{j,h}^k\partial_{j,h}^{n+1-k}v)\\&=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(\partial_{j,h}^k u)(\tau_{j,h}^k\partial_{j,h}^{n+1-k}v)\end{aligned}$$

であるから, (11.68) は $n+1$ に対しても成り立つ. よって (11.68) は任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して成り立つ. ゆえに,

$$\begin{aligned}\partial_h^\alpha(uv) &= \partial_{1,h}^{\alpha_1}\cdots\partial_{N,h}^{\alpha_N}(uv) = \partial_{1,h}^{\alpha_1}\cdots\partial_{N-1,h}^{\alpha_{N-1}}\sum_{\beta_N\leqslant\alpha_N}\binom{\alpha_N}{\beta_N}(\partial_{N,h}^{\beta_N}u)(\tau_{N,h}^{\beta_N}\partial_{N,h}^{\alpha_N-\beta_N}v)\\ &= \cdots = \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(\partial_h^\beta u)(\tau_h^\beta\partial_h^{\alpha-\beta}v)\end{aligned}$$

が成り立つ. □

補題 11.27. 任意の $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, 任意の $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, 任意の $j \in \{1,\cdots,N\}$ に対し,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\partial_{j,h}u(x)v(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^N}u(x)\partial_{j,-h}v(x)dx$$

が成り立つ.

証明. Lebesgue 測度の平行移動不変性より,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\partial_{j,h}u(x)v(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{u(x+he_j)-u(x)}{h}v(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N}u(x)\frac{u(x-he_j)-u(x)}{h}dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^N}u(x)\partial_{j,-h}v(x)dx.\end{aligned}$$

□

補題 11.28. $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ とする.

(1) ある $m \in \mathbb{N}$ に対し $u \in H^m(\mathbb{R}^N)$ ならば, $|\alpha| \leqslant m$ なる任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$\|\partial_h^\alpha u\|_2 \leqslant \|\partial^\alpha u\| \quad (\forall h \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$$

が成り立つ.

(2) ある多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し, $C \in [0,\infty)$ と $\delta \in (0,\infty)$ が存在し,

$$\|\partial_h^\alpha u\|_2 \leqslant C \quad (\forall h \in \mathbb{R} : 0 < |h| < \delta)$$

が成り立つならば, $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ であり,

$$\|\partial^\alpha u\|_2 \leqslant C$$

が成り立つ.

証明. (1) $|\alpha| \leqslant m$ なる任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ を取り,

$$\partial^\alpha = \partial_{j_1}\cdots\partial_{j_{|\alpha|}}$$

なる $j_1,\cdots,j_{|\alpha|} \in \{1,\cdots,N\}$ を取る. このとき任意の $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, 任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ に対し, 微積分学の基本定理 5.206 より,

$$\partial_{-h}^\alpha\varphi(x) = \partial_{j_1,-h}\cdots\partial_{j_{|\alpha|},-h}\varphi(x) = \int_{[0,1]^{|\alpha|}}\partial^\alpha\varphi\left(x-\sum_{k=1}^{|\alpha|}t_khe_{j_k}\right)dt_1\cdots dt_{|\alpha|} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N) \tag{11.69}$$

と表せるから, 補題 11.27 と Fubini の定理 5.85 より,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N} \partial_h^\alpha u(x)\varphi(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\partial_{-h}^\alpha \varphi(x)dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\left(\int_{[0,1]^{|\alpha|}} \partial^\alpha\varphi\left(x-\sum_{k=1}^{|\alpha|} t_k h e_{j_k}\right)dt_1\cdots dt_{|\alpha|}\right)dx\right| \\
&= \left|\int_{[0,1]^{|\alpha|}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\partial^\alpha\varphi\left(x-\sum_{k=1}^{|\alpha|} t_k h e_{j_k}\right)dx\right)dt_1\cdots dt_{|\alpha|}\right| \\
&= \left|\int_{[0,1]^{|\alpha|}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha u(x)\varphi\left(x-\sum_{k=1}^{|\alpha|} t_k h e_{j_k}\right)dx\right)dt_1\cdots dt_{|\alpha|}\right| \\
&\leqslant \|\partial^\alpha u\|_2\|\varphi\|_2 \quad (\forall h\in\mathbb{R}\backslash\{0\}, \forall\varphi\in D(\mathbb{R}^N))
\end{aligned} \tag{11.70}$$

となる. そして Riesz の表現定理 3.44 と $L^2(\mathbb{R}^N)$ における $D(\mathbb{R}^N)$ の稠密性 (定理 6.88) より任意の $h\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し,

$$\|\partial_h^\alpha u\|_2 = \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}^N}\partial_h^\alpha u(x)\varphi(x)dx\right| : \varphi\in D(\mathbb{R}^N), \|\varphi\|_2\leqslant 1\right\}$$

であるから (11.70) より,

$$\|\partial_h^\alpha u\|_2 = \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}^N}\partial_h^\alpha u(x)\varphi(x)dx\right| : \varphi\in D(\mathbb{R}^N), \|\varphi\|_2\leqslant 1\right\} \leqslant \|\partial^\alpha u\|_2$$

が成り立つ.

(2) 任意の $\varphi\in D(\mathbb{R}^N)$ に対し, 補題 11.27 と (11.69) と Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N} \partial_h^\alpha u(x)\varphi(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\partial_{-h}^\alpha \varphi(x)dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\left(\int_{[0,1]^{|\alpha|}} \partial^\alpha\varphi\left(x-\sum_{k=1}^{|\alpha|} t_k h e_{j_k}\right)dt_1\cdots dt_{|\alpha|}\right)dx\right| \\
&\to \left|\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx\right| \quad (|h|\to +0)
\end{aligned}$$

となる. よって仮定より,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx\right| = \lim_{|h|\to+0}\left|\int_{\mathbb{R}^N}\partial_h^\alpha u(x)\varphi(x)dx\right| \leqslant C\|\varphi\|_2 \quad (\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^N))$$

であるから,

$$(D(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_2)\ni\varphi\mapsto(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^N}u(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx\in\mathbb{C}$$

はノルムが C 以下の有界線型汎関数である. $D(\mathbb{R}^N)$ の $L^2(\mathbb{R}^N)$ における稠密性 (定理 6.88) よりこれは Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上のノルムが C 以下の有界線型汎関数に拡張できるので Riesz の表現定理 3.44 より $f\in L^2(\mathbb{R}^N)$ で,

$$(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^N}u(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N}f(x)\varphi(x)dx \quad (\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^N)), \quad \|f\|_2\leqslant C$$

を満たすものが存在する. よって $\partial^\alpha u = f\in L^2(\mathbb{R}^N)$ であり $\|\partial^\alpha u\|_2\leqslant C$ である.

□

定理 11.29 (全空間上の一様楕円型微分作用素の基本性質)**.** $\mathbb{R}^N$ 上の一様楕円型微分作用素 (定義 11.21)

$$\mathcal{A}: D'(\mathbb{R}^N)\ni u\mapsto -\sum_{i,j=1}^N \partial_i(a_{i,j}\partial_j u) + bu\in D'(\mathbb{R}^N)$$

に対し,

$$p_{\mathcal{A}}(u,v) := \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N} a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\overline{\partial_i v(x)}dx + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)u(x)\overline{v(x)}dx \ \ (\forall u,v \in H^1(\mathbb{R}^N))$$

とおき,

$$D(A) := \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \mathcal{A}u \in L^2(\mathbb{R}^N),\ (\mathcal{A}u \mid v)_2 = p_{\mathcal{A}}(u,v)\ (\forall v \in H^1(\mathbb{R}^N))\right\},$$
$$A : D(A) \ni u \mapsto \mathcal{A}u \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

とおく. また,

$$\lambda_0 := \inf_{x\in\mathbb{R}^N} b(x) \in \mathbb{R}$$

とおく. このとき,

(1) A は Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の自己共役作用素であり, $\sigma(A) \subseteq [\lambda_0,\infty)$ が成り立つ. また任意の $\lambda \in (-\infty,\lambda_0)$ に対し,
$$(A-\lambda)^{-1} \in B(L^2(\mathbb{R}^N), H^1(\mathbb{R}^N)) \subseteq B(L^2(\mathbb{R}^N))$$
が成り立つ.

(2) $\lambda_0 \geqslant 0$ の場合は A は Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の非負自己共役作用素であり,
$$D(\sqrt{A}) = H^1(\mathbb{R}^N),\ \ p_{\mathcal{A}}(u,v) = (\sqrt{A}u \mid \sqrt{A}v)_2 \ \ (\forall u,v \in H^1(\mathbb{R}^N))$$
が成り立つ.

(3) $u \in D(A)$ がある $m \in \mathbb{Z}_+$ に対し $Au \in H^m(\mathbb{R}^N)$ を満たすならば $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$ が成り立つ. さらに A, m のみによる正実数 C が存在し,
$$\|u\|_{2,m+2} \leqslant C(\|Au\|_{2,m} + \|u\|)$$
が成り立つ.

(4) $D(A) = H^2(\mathbb{R}^N)$ が成り立つ.

証明. (1), (2) は定理 11.24 による. (3) を示す. $m \in \mathbb{Z}_+$ に関する帰納法より $u \in D(A)$ がある $m \in \mathbb{Z}_+$ に対し,

$$Au \in H^m(\mathbb{R}^N),\ \ u \in H^{m+1}(\mathbb{R}^N)$$

を満たすと仮定して, $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$ であることと $a_{i,j}, b, m$ のみによる正実数 C で,

$$\|u\|_{2,m+2} \leqslant C(\|Au\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1}) \tag{11.71}$$

を満たすものが存在することを示せば十分である[*176].

$$p(v,w) := \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N} a_{i,j}(x)\partial_j v(x)\overline{\partial_i w(x)}dx \ \ (\forall v,w \in H^1(\mathbb{R}^N))$$

とおく. $|\alpha| \leqslant m+1$ なる任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ を取り固定する. 任意の $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ と任意の $v \in D(\mathbb{R}^N)$ に対し, 補題 11.27 と命題 11.26 より,

$$p(\partial_h^\alpha u, v) = \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N} \partial_h^\alpha\partial_j u(x)a_{i,j}(x)\partial_i\overline{v}(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}\partial_j u(x)\partial_{-h}^\alpha(a_{i,j}\partial_i\overline{v})(x)dx$$
$$= (-1)^{|\alpha|}p(u,\partial_{-h}^\alpha v) + (-1)^{|\alpha|}\sum_{0<\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}\partial_j u(x)\partial_{-h}^\beta a_{i,j}(x)\partial_{-h}^{\alpha-\beta}\tau_{-h}^\beta\partial_i\overline{v}(x)dx$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^N}(Au-bu)(x)\partial_{-h}^\alpha\partial_i\overline{v}(x)dx + \sum_{0<\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(-1)^{|\beta|}\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}\partial_h^{\alpha-\beta}(\partial_j u\partial_{-h}^\beta a_{i,j})(x)\tau_{-h}^\beta\partial_i\overline{v}(x)dx$$

[*176] 一様楕円性条件 (11.56) よりある正実数 C_0 が存在し任意の $u \in D(A)$ に対し $\|u\|_{2,1} \leqslant C_0(\|Au\|_2 + \|u\|_2)$ が成り立つことに注意.

となるから, 補題 11.27 と補題 11.28 の (1) より $a_{i,j}, b, \alpha$ のみによる正実数 C_1 が存在し,

$$|p(\partial_h^\alpha u, v)| \leqslant C_1(\|Au\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1})\|v\|_{2,1} \quad (\forall h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \forall v \in D(\mathbb{R}^N)) \tag{11.72}$$

が成り立つことが分かる. そして $\partial_h^\alpha u \in H^1(\mathbb{R}^N) = \overline{D(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{2,1}}$ (定理 8.110) であるから (11.72) より,

$$p(\partial_h^\alpha u, \partial_h^\alpha u) \leqslant C_1(\|Au\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1})\|\partial_h^\alpha u\|_{2,1} \quad (\forall h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}) \tag{11.73}$$

が成り立つ. また補題 11.28 の (1) より,

$$(\partial_h^\alpha u \mid \partial_h^\alpha u)_2 = \|\partial_h^\alpha u\|_2^2 \leqslant \|\partial^\alpha u\|_2 |\partial_h^\alpha u\|_2 \leqslant \|u\|_{2,m+1} |\partial_h^\alpha u\|_{2,1} \quad (\forall h \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$$

であるから, (11.73) より $a_{i,j}, b, \alpha$ のみによる正実数 C_2 が存在し,

$$p(\partial_h^\alpha u, \partial_h^\alpha u) + (\partial_h^\alpha u \mid \partial_h^\alpha u)_2 \leqslant C_2(\|Au\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1})\|\partial_h^\alpha u\|_{2,1} \quad (\forall h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}) \tag{11.74}$$

が成り立つ. 一様楕円性条件 (11.56) より $a_{i,j}$ のみによる正実数 C_3 が存在し,

$$C_3\|\partial_h^\alpha u\|_{2,1}^2 \leqslant p(\partial_h^\alpha u, \partial_h^\alpha u) + (\partial_h^\alpha u \mid \partial_h^\alpha u)_2$$

が成り立つので, (11.74) より, $a_{i,j}, b, \alpha$ のみによる正実数 C_4 が存在し,

$$\|\partial_h^\alpha u\|_{2,1} \leqslant C_4(\|Au\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1}) \quad (\forall h \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$$

が成り立つ. これより,

$$\|\partial_h^\alpha \partial_j u\|_2 \leqslant C_4(\|Au\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1}) \quad (\forall h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \forall j \in \{1, \cdots, N\})$$

であるから, 補題 11.28 の (2) より $\partial^\alpha \partial_j u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ $(j = 1, \cdots, N)$ であり,

$$\|\partial^\alpha \partial_j u\|_2 \leqslant C_4(\|Au\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1}) \quad (\forall j \in \{1, \cdots, N\})$$

が成り立つ. よって α の任意性より $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$ であり, $a_{i,j}, b, \alpha$ のみによる正実数 C が存在し (11.71) が成り立つ.

(4) を示す. (3) より $D(A) \subseteq H^2(\mathbb{R}^N)$ である. 逆に $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ ならば,

$$\mathcal{A}u = -\sum_{i,j=1}^N \partial_i(a_{i,j}\partial_j u) + bu \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

であり, 任意の $v \in D(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{A}}(u, v) &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\partial_i \overline{v}(x)dx + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)u(x)\overline{v}(x)dx \\ &= -\sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i(a_{i,j}\partial_j u)(x)\overline{v}(x)dx + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)u(x)\overline{v}(x)dx \\ &= (\mathcal{A}u \mid v)_2 \end{aligned}$$

であるから $H^1(\mathbb{R}^N) = \overline{D(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{2,1}}$ (定理 8.110) より,

$$p_{\mathcal{A}}(u, v) = (\mathcal{A}u \mid v)_2 \quad (\forall v \in H^1(\mathbb{R}^N))$$

が成り立つ. ゆえに $u \in D(A)$ だから $D(A) = H^2(\mathbb{R}^N)$ である. □

補題 11.30 (内部正則性)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とし, Ω 上の一様楕円型微分作用素 (定義 11.21)

$$\mathcal{A}: D'(\Omega) \ni u \mapsto -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(a_{i,j}\partial_j u) + bu \in D'(\Omega)$$

を考える. そしてある $m \in \mathbb{Z}_+$ に対し,

$$u \in H^{m+1}(\Omega), \quad \mathcal{A}u \in H^m(\Omega)$$

が成り立つと仮定する. このとき,

$$d(\Omega_0, \mathbb{R}^N \backslash \Omega) > 0$$

*177を満たす任意の開集合 $\Omega_0 \subseteq \Omega$ に対し, u の Ω_0 上への制限 $u|_{\Omega_0}$ は,

$$u|_{\Omega_0} \in H^{m+2}(\Omega_0)$$

を満たし, $a_{i,j}, b, \Omega_0$ のみによる正実数 C が存在し,

$$\|u|_{\Omega_0}\|_{2,m+2} \leqslant C(\|\mathcal{A}u\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1})$$

が成り立つ.

証明.

$$r := d(\Omega_0, \mathbb{R}^N \backslash \Omega) > 0$$

とおき,

$$0 := r_0 < r_1 < r_2 < r_3 \leqslant r, \quad \Omega_k := \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, \Omega_0) < r_k\} \ \ (k = 1, 2, 3),$$

$$\delta := \frac{1}{m+1}\min\{r_1 - r_0, r_2 - r_1, r_3 - r_2\} > 0 \tag{11.75}$$

とおく. このとき各 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ は開集合であり (命題 8.6),

$$\Omega_0 \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \Omega_3 \subseteq \Omega,$$

$$d(\Omega_{k-1}, \mathbb{R}^N \backslash \Omega_k) \geqslant r_k - r_{k-1} > 0 \ \ (k = 1, 2, 3) \tag{11.76}$$

である. (11.76) と補題 8.112 より全ての偏導関数が有界な C^∞ 級関数 $\rho : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$ で,

$$\rho|_{\Omega_0} = 1, \quad \mathrm{supp}(\rho) \subseteq \Omega_1 \tag{11.77}$$

を満たすものが取れる. $\rho u \in H^{m+1}(\Omega)$ に対し $\mathrm{supp}(\rho u) \subseteq \mathrm{supp}(\rho) \subseteq \Omega_1$ より,

$$d(\mathrm{supp}(\rho u), \mathbb{R}^N \backslash \Omega) \geqslant d(\Omega_1, \mathbb{R}^N \backslash \Omega) > 0$$

であるから, 定理 8.113 の (2) より ρu の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張を w とおくと,

$$w \in H^m(\mathbb{R}^N), \quad \mathrm{supp}(w) = \mathrm{supp}(\rho u) \subseteq \mathrm{supp}(\rho) \subseteq \Omega_1, \quad \|w\|_{2,m+1} = \|\rho u\|_{2,m+1} \tag{11.78}$$

が成り立つ. 今,

$$p(v_1, v_2) := \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x)\partial_j v_1(x)\partial_i \overline{v_2}(x)dx \ \ (\forall v_1, v_2 \in H^1(\Omega))$$

とおき, $a_{i,j} : \Omega \to \mathbb{C}$ の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張を $\widetilde{a_{i,j}} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ とおく. そして $|\alpha| \leqslant m+1$ を満たす任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ を取り固定する. $0 < |h| < \delta$ を満たす任意の $h \in \mathbb{R}$ と任意の $v \in D(\Omega) \subseteq D(\mathbb{R}^N)$ に対し, 補題 11.27 と命題

*177 距離空間の部分集合間の距離の定義 8.5 を参照.

11.26 より,

$$\begin{aligned}
p\left((\partial_h^\alpha w)|_\Omega, v\right) &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{a_{i,j}}(x)\partial_h^\alpha \partial_j w(x)\partial_i \overline{v}(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \partial_j w(x)\partial_{-h}^\alpha(\widetilde{a_{i,j}}\partial_i\overline{v})(x)dx \\
&= (-1)^{|\alpha|}\sum_{i,j=1}^N \left(\int_{\mathbb{R}^N}\partial_j w(x)\widetilde{a_{i,j}}(x)\partial_{-h}^\alpha\partial_i\overline{v}(x)dx + \sum_{0<\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\int_{\mathbb{R}^N}\partial_j w(x)\partial_{-h}^\beta\widetilde{a_{i,j}}(x)\partial_{-h}^{\alpha-\beta}\tau_{-h}^\beta\partial_i\overline{v}(x)dx\right) \\
&= (-1)^{|\alpha|}p(\rho u, \partial_{-h}^\alpha v) + \sum_{i,j=1}^N\sum_{0<\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(-1)^{|\beta|}\int_{\mathbb{R}^N}\partial_h^{\alpha-\beta}(\partial_j w\partial_{-h}^\beta\widetilde{a_{i,j}})(x)\tau_{-h}^\beta\partial_i\overline{v}(x)dx \qquad (11.79)
\end{aligned}$$

となる．(11.79) の右辺の第二項の評価を考える．(11.78) より $\mathrm{supp}(w) \subseteq \Omega_1$ であるから, $0 < |h| < \delta$ であることと (11.75), (11.76) より $0 < \beta \leqslant \alpha$ なる任意の $\beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $\partial_h^{\alpha-\beta}(\partial_j w\partial_{-h}^\beta\widetilde{a_{i,j}})$ の台は Ω_2 に含まれるので, 命題 11.26 と補題 11.28 の (1) より,

$$\begin{aligned}
&\|\partial_h^{\alpha-\beta}(\partial_j w\partial_{-h}^\beta\widetilde{a_{i,j}})\|_2 = \|(\partial_h^{\alpha-\beta}(\partial_j w\partial_{-h}^\beta\widetilde{a_{i,j}}))_{\Omega_2}\|_2 \leqslant \sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta}\binom{\alpha-\beta}{\gamma}\|(\partial_h^{\alpha-\beta-\gamma}\partial_j w)|_{\Omega_2}(\partial_h^\gamma\partial_{-h}^\beta\widetilde{a_{i,j}})|_{\Omega_2}\|_2 \\
&\leqslant \sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta}\binom{\alpha-\beta}{\gamma}\|(\partial_h^{\alpha-\beta-\gamma}\partial_j w)|_{\Omega_2}\|_2\|(\partial_h^\gamma\partial_{-h}^\beta\widetilde{a_{i,j}})|_{\Omega_2}\|_\infty \leqslant \sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta}\binom{\alpha-\beta}{\gamma}\|\partial^{\alpha-\beta-\gamma}\partial_j w\|_2\|(\partial^\gamma\partial^\beta a_{i,j})|_{\Omega_3}\|_\infty \\
&\leqslant \sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta}\binom{\alpha-\beta}{\gamma}\|w\|_{2,m+1}\|\partial^\gamma\partial^\beta a_{i,j}\|_\infty = \sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta}\binom{\alpha-\beta}{\gamma}\|\rho u\|_{2,m+1}\|\partial^\gamma\partial^\beta a_{i,j}\|_\infty
\end{aligned}$$

となる．よって $\rho, a_{i,j}, \alpha$ のみによる正実数 C_1 が存在し,

$$\begin{aligned}
&|p\left((\partial_h^\alpha w)|_\Omega, v\right) - (-1)^{|\alpha|}p(\rho u, \partial_{-h}^\alpha v)| = |((11.79)\ \text{の右辺の第二項})| \\
&\leqslant C_1\|u\|_{2,m+1}\|\|v\|_{2,1} \quad (\forall h \in \mathbb{R} : 0 < |h| < \delta, \forall v \in D(\Omega)) \qquad (11.80)
\end{aligned}$$

が成り立つ．今,

$$\begin{aligned}
p\left((\partial_h^\alpha w)|_\Omega, v\right) &= \{p\left((\partial_h^\alpha w)|_\Omega, v\right) - (-1)^{|\alpha|}p(\rho u, \partial_{-h}^\alpha v)\} \\
&\quad + (-1)^{|\alpha|}(p(\rho u, \partial_{-h}^\alpha v) - p(u, \rho\partial_{-h}^\alpha v)) \\
&\quad + (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (\mathcal{A}u - bu)(x)\rho(x)\partial_{-h}^\alpha\overline{v}(x)dx \\
&\quad (\forall h \in \mathbb{R} : 0 < |h| < \delta, \forall v \in D(\Omega)) \qquad (11.81)
\end{aligned}$$

[*178]であり, (11.80) は (11.81) の右辺の第一項の評価を与えている．(11.81) の右辺の第三項の評価を考える．$(\mathcal{A}u - bu)\rho \in H^m(\Omega)$ であり, (11.77) より,

$$d(\mathrm{supp}((\mathcal{A}u - bu)\rho), \mathbb{R}^N\backslash\Omega) \geqslant d(\mathrm{supp}(\rho), \mathbb{R}^N\backslash\Omega) > 0$$

であるから, 定理 8.113 の (2) より $(\mathcal{A}u - bu)\rho \in H^m(\Omega)$ の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張 $(\widetilde{\mathcal{A}u - bu})\rho$ は,

$$(\widetilde{\mathcal{A}u - bu})\rho \in H^m(\mathbb{R}^N), \quad \|(\widetilde{\mathcal{A}u - bu})\rho\|_{2,m} = \|(\mathcal{A}u - bu)\rho\|_{2,m}$$

を満たす．よって補題 11.27 と補題 11.28 の (1) より,

$$\begin{aligned}
&|((11.81)\ \text{の右辺の第三項})| = \left|\int_\Omega(\mathcal{A}u - bu)(x)\rho(x)\partial_{-h}^\alpha\overline{v}(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^N}(\widetilde{\mathcal{A}u - bu})\rho)(x)\partial_{-h}^\alpha\overline{v}(x)dx\right| \\
&\leqslant \|(\widetilde{\mathcal{A}u - bu})\rho)\|_{2,m}\|v\|_{2,1} = \|(\mathcal{A}u - bu)\rho\|_{2,m}\|v\|_{2,1} \leqslant C_3(\|\mathcal{A}u\|_{2,m} + \|u\|_{2,m})\|v\|_{2,1} \qquad (11.82)
\end{aligned}$$

[*178] ρ は滑らかで $\mathrm{supp}(\rho) \subseteq \Omega$ だから $\rho\partial_{-h}^\alpha\overline{v} \in D(\Omega)$ $(\forall h \in \mathbb{R} : 0 < |h| < \delta, \forall v \in D(\Omega))$ であることと, 任意の $\varphi \in D(\Omega)$ に対し $p(u, \varphi) = \int_\Omega(\mathcal{A}u - bu)(x)\varphi(x)dx$ であることに注意.

(ただし C_3 は ρ, b, m のみによる正実数である) と評価できる. (11.81) の右辺の第二項の評価を考える.

$$
\begin{aligned}
&|((11.81)\text{ の右辺の第二項 })| = |p(\rho u, \partial_{-h}^{\alpha} v) - p(u, \rho\partial_{-h}^{\alpha} v)| \\
&= \left|\sum_{i,j=1}^{N}\left(\int_{\Omega} a_{i,j}(x)\partial_j(\rho u)(x)\partial_{-h}^{\alpha}\partial_i\overline{v}(x)dx - \int_{\Omega} a_{i,j}(x)\partial_j u(x)(\partial_i(\rho\partial_{-h}^{\alpha}\overline{v})(x)dx\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i,j=1}^{N}\left(\int_{\Omega} a_{i,j}(x)u(x)(\partial_j\rho)(x)\partial_{-h}^{\alpha}\partial_i\overline{v}(x)dx - \int_{\Omega} a_{i,j}(x)\partial_j u(x)(\partial_i\rho(x))\partial_{-h}^{\alpha}\overline{v}(x)dx\right)\right| \qquad (11.83)
\end{aligned}
$$

であり, (11.77) より,

$$
\begin{aligned}
&a_{i,j}u\partial_j\rho \in H^{m+1}(\Omega), \quad d(\mathrm{supp}(a_{i,j}u\partial_j\rho), \mathbb{R}^N\backslash\Omega) \geqslant d(\mathrm{supp}(\rho), \mathbb{R}^N\backslash\Omega) > 0, \\
&a_{i,j}\partial_j u\partial_i\rho \in H^{m}(\Omega), \quad d(\mathrm{supp}(a_{i,j}\partial_j u\partial_i\rho), \mathbb{R}^N\backslash\Omega) \geqslant d(\mathrm{supp}(\rho), \mathbb{R}^N\backslash\Omega) > 0
\end{aligned}
$$

であるから $a_{i,j}u\partial_j\rho \in H^{m+1}(\Omega)$ の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張 $\widetilde{a_{i,j}u}\partial_j\rho$ と $a_{i,j}\partial_j u\partial_i\rho \in H^m(\Omega)$ の $\mathbb{R}^N$ 上への 0 拡張 $\widetilde{a_{i,j}\partial_j}u\partial_i\rho$ は, 定理 8.113 の (2) より,

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{a_{i,j}u}\partial_j\rho \in H^{m+1}(\mathbb{R}^N), \quad \|\widetilde{a_{i,j}u}\partial_j\rho\|_{2,m+1} = \|a_{i,j}u\partial_j\rho\|_{2,m+1}, \\
&\widetilde{a_{i,j}\partial_j}u\partial_i\rho \in H^{m}(\mathbb{R}^N), \quad \|\widetilde{a_{i,j}\partial_j}u\partial_i\rho\|_{2,m} = \|a_{i,j}\partial_j u\partial_i\rho\|_{2,m}
\end{aligned}
$$

を満たす. よって (11.83) の右辺は補題 11.27 と補題 11.28 の (1) より,

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{i,j=1}^{N}\left(\int_{\Omega} a_{i,j}(x)u(x)(\partial_j\rho)(x)\partial_{-h}^{\alpha}\partial_i\overline{v}(x)dx - \int_{\Omega} a_{i,j}(x)\partial_j u(x)(\partial_i\rho(x))\partial_{-h}^{\alpha}\overline{v}(x)dx\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i,j=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{a_{i,j}u}(x)(\partial_j\rho)(x)\partial_{-h}^{\alpha}\partial_i\overline{v}(x)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{a_{i,j}\partial_j}u(x)(\partial_i\rho(x))\partial_{-h}^{\alpha}\overline{v}(x)dx\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{i,j=1}^{N}\left(\|\widetilde{a_{i,j}u}\partial_j\rho\|_{2,m+1} + \|\widetilde{a_{i,j}\partial_j}u\partial_i\rho\|_{2,m}\right)\|v\|_{2,1} \\
&= \sum_{i,j=1}^{N}\left(\|a_{i,j}u\partial_j\rho\|_{2,m+1} + \|a_{i,j}\partial_j u\partial_i\rho\|_{2,m}\right)\|v\|_{2,1} \\
&\leqslant C_2\|u\|_{2,m+1}\|v\|_{2,1}
\end{aligned}
$$

(ただし C_2 は $a_{i,j}, \rho, m$ のみによる正実数である) となるので,

$$
|((11.81)\text{ の右辺の第二項 })| \leqslant C_2\|u\|_{2,m+1}\|v\|_{2,1} \qquad (11.84)
$$

と評価できる. こうして (11.81) の右辺の第一項, 第二項, 第三項はそれぞれ $a_{i,j}, b, \rho, \alpha, m$ のみによる正実数 C_1, C_2, C_3 により (11.80), (11.84), (11.82) によって評価されるので, $a_{i,j}, b, \rho, \alpha, m$ のみによる正実数 C_4 が存在し,

$$
|p\left((\partial_h^{\alpha}w)|_{\Omega}, v\right)| \leqslant C_4(\|\mathcal{A}u\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1})\|v\|_{2,1} \quad (\forall h \in \mathbb{R} : 0 < |h| < \delta, \forall v \in D(\Omega)) \qquad (11.85)
$$

が成り立つ. ここで $\mathrm{supp}(w) \subseteq \Omega_1$ であることと (11.75) より,

$$
d(\mathrm{supp}(\partial_h^{\alpha}w), \mathbb{R}^N\backslash\Omega) \geqslant d(\Omega_2, \mathbb{R}^N\backslash\Omega) > 0 \quad (\forall h \in \mathbb{R} : 0 < |h| < \delta)
$$

であるので, 定理 8.113 の (2) より,

$$
(\partial_h^{\alpha}w)|_{\Omega} \in H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{2,1}} \subseteq H^1(\Omega), \quad \|\partial_h^{\alpha}w\|_{2,1} = \|(\partial_h^{\alpha}w)|_{\Omega}\|_{2,1} \quad (\forall h \in \mathbb{R} : 0 < |h| < \delta) \qquad (11.86)
$$

が成り立つ. よって (11.85) と (11.86) の左の式より,

$$
p\left((\partial_h^{\alpha}w)|_{\Omega}, (\partial_h^{\alpha}w)|_{\Omega}\right) \leqslant C_4(\|\mathcal{A}u\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1})\|(\partial_h^{\alpha}w)|_{\Omega}\|_{2,1} \quad (\forall h \in \mathbb{R} : 0 < |h| < \delta)
$$

が成り立つので, 一様楕円性条件 (11.56) より, $a_{i,j}, b, \rho, \alpha, m$ のみによる正実数 C_5 が存在し,

$$\|(\partial_h^\alpha w)|_\Omega\|_{2,1}^2 \leqslant C_5(\|\mathcal{A}u\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1})\|(\partial_h^\alpha w)|_\Omega\|_{2,1} \quad (\forall h \in \mathbb{R} : 0 < |h| < \delta)$$

が成り立つ. よって (11.86) の右の式より,

$$\|\partial_h^\alpha w\|_{2,1} \leqslant C_5(\|\mathcal{A}u\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1}) \quad (\forall h \in \mathbb{R} : 0 < |h| < \delta)$$

が成り立つ. これより,

$$\|\partial_h^\alpha \partial_j w\|_2 \leqslant C_5(\|\mathcal{A}u\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1}) \quad (\forall h \in \mathbb{R} : 0 < |h| < \delta, \forall j \in \{1, \cdots, N\})$$

であるから, 補題 11.28 の (2) より $\partial^\alpha \partial_j w \in L^2(\mathbb{R}^N)$ $(j = 1, \cdots, N)$ であり,

$$\|\partial^\alpha \partial_j w\|_2 \leqslant C_5(\|\mathcal{A}u\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1}) \quad (j = 1, \cdots, N)$$

が成り立つ. よって α の任意性より $w \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$ であり, $a_{i,j}, b, \rho, m$ のみによる正実数 C が存在し,

$$\|w\|_{2,m+2} \leqslant C(\|\mathcal{A}u\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1})$$

が成り立つ. (11.77) より $u|_{\Omega_0} = w|_{\Omega_0}$ であるから,

$$u|_{\Omega_0} = w|_{\Omega_0} \in H^{m+2}(\Omega_0), \quad \|u|_{\Omega_0}\|_{2,m+2} \leqslant \|w\|_{2,m+2} \leqslant C(\|\mathcal{A}u\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1})$$

が成り立つ. □

定義 11.31 (内部正則性)**.** 一様楕円型微分作用素 $\mathcal{A}$ が満たす補題 11.30 の性質を $\mathcal{A}$ の内部正則性と言う.

定義 11.32. $Q, Q_+ \subseteq \mathbb{R}^N$ を,

$$Q := (-1,1)^N, \quad Q_+ := (-1,1)^{N-1} \times (0,1)$$

と定義する. また $\varepsilon \in (0,1)$ に対し $Q_\varepsilon, Q_{\varepsilon,+} \subseteq \mathbb{R}^N$ を,

$$Q := (-\varepsilon,\varepsilon)^N, \quad Q_{\varepsilon,+} := (-\varepsilon,\varepsilon)^{N-1} \times (0,\varepsilon)$$

と定義する.

補題 11.33. $Q_+ \subseteq \mathbb{R}_+^N = \mathbb{R}^{N-1} \times (0,\infty)$ 上の一様楕円型微分作用素 (定義 11.21)

$$\mathcal{A} : D'(Q_+) \ni u \mapsto -\sum_{i,j=1}^N \partial_i(a_{i,j}\partial_j u) \in D'(Q_+)$$

を考え,

$$p(u,v) := \sum_{i,j=1}^N \int_{Q_+} a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\overline{\partial_i v(x)}dx \quad (\forall u, v \in H^1(Q_+))$$

とおく. そしてある $m \in \mathbb{Z}_+$ に対し,

$$u \in H^{m+1}(Q_+), \quad \mathcal{A}u \in H^m(Q_+)$$

が成り立つとし, さらに次のうちのいずれかが成り立つと仮定する.

(1) 任意の $\rho \in D(Q)|_{Q_+}$ に対し $\rho u \in H_0^1(Q_+)$.
(2) 任意の $v \in D(Q)|_{Q_+}$ に対し $p(u,v) = (\mathcal{A}u \mid v)_2$.

このとき任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対し $u|_{Q_{\varepsilon,+}} \in H^{m+2}(Q_{\varepsilon,+})$ が成り立ち, $\varepsilon, a_{i,j}, m$ のみによる正実数 C が存在し,

$$\|u|_{Q_{\varepsilon,+}}\|_{2,m+2} \leqslant C(\|\mathcal{A}u\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1})$$

が成り立つ.

証明. 任意の $\varepsilon \in (0,1)$ を取り固定する.

$$\varepsilon := \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 \leqslant 1$$

とおき,

$$\delta := \frac{1}{m+1}\min\{\varepsilon_1 - \varepsilon_0, \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \varepsilon_3 - \varepsilon_2\} > 0 \tag{11.87}$$

とおく. Urysohn の補題 6.43 より非負値の $\rho \in D(\mathbb{R}^N)$ で,

$$\rho|_{Q_\varepsilon} = 1, \ \ \mathrm{supp}(\rho) \subseteq Q_{\varepsilon_1} \tag{11.88}$$

を満たすものが取れる. $\rho u \in H^{m+1}(Q_+)$ に対し,

$$\mathrm{supp}(\rho u) \subseteq \mathrm{supp}(\rho) \cap \mathbb{R}^N_+ \subseteq Q_{\varepsilon_1,+}$$

だから,

$$d(\mathrm{supp}(\rho u), \mathbb{R}^N_+ \backslash Q_+) \geqslant d(Q_{\varepsilon_1,+}, \mathbb{R}^N_+ \backslash Q_+) \geqslant 1 - \varepsilon_1 > 0$$

であるので, 定理 8.113 の (2) より $\rho u \in H^{m+1}(Q_+)$ の $\mathbb{R}^N_+$ 上への 0 拡張を w とおくと,

$$w \in H^{m+1}(\mathbb{R}^N_+), \ \ \mathrm{supp}(w) = \mathrm{supp}(\rho u) \subseteq Q_{\varepsilon_1,+}, \ \ \|w\|_{2,m+1} = \|\rho u\|_{2,m+1} \tag{11.89}$$

が成り立つ. 今,

$$|\alpha| \leqslant m+1, \ \ \alpha_N = 0 \tag{11.90}$$

を満たす多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}^N_+$ を取り固定する. $a_{i,j} : Q_+ \to \mathbb{C}$ の $\mathbb{R}^N_+$ 上への 0 拡張を $\widetilde{a_{i,j}} : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{C}$ とおく. $0 < |h| < \delta$ を満たす任意の $h \in \mathbb{R}$ と任意の $v \in D(Q)|_{Q_+}$ に対し, 補題 11.27 と命題 11.26 より,

$$\begin{aligned}
p((\partial_h^\alpha w)|_{Q_+}, v) &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N_+} \widetilde{a_{i,j}}(x)\partial_h^\alpha \partial_j w(x) \partial_i \overline{v}(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N_+} \partial_j w(x) \partial_{-h}^\alpha(\widetilde{a_{i,j}}\partial_i\overline{v})(x)dx \\
&= (-1)^{|\alpha|}\sum_{i,j=1}^N \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} \partial_j w(x)\widetilde{a_{i,j}}(x)\partial_{-h}^\alpha \partial_i \overline{v}(x) + \sum_{0<\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\int_{\mathbb{R}^N_+} \partial_j w(x) \partial_{-h}^\beta \widetilde{a_{i,j}}(x) \partial_{-h}^{\alpha-\beta}\tau_{-h}^\beta \partial_i \overline{v}(x)dx \right) \\
&= (-1)^{|\alpha|} p(\rho u, \partial_{-h}^\alpha v) + \sum_{i,j=1}^N \sum_{0<\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(-1)^{|\beta|}\int_{\mathbb{R}^N_+} \partial_h^{\alpha-\beta}(\partial_j w \partial_{-h}^\beta \widetilde{a_{i,j}})(x)\tau_{-h}^\beta \partial_i\overline{v}(x)dx
\end{aligned} \tag{11.91}$$

となる. (11.91) の右辺の第二項の評価を考える. (11.89) より $\mathrm{supp}(w) \subseteq Q_{\varepsilon_1,+}$ であるから (11.87), (11.90) より $0 < \beta \leqslant \alpha$ なる任意の $\beta \in \mathbb{Z}^N_+$ に対し $\partial_h^{\alpha-\beta}(\partial_j w \partial_{-h}^\beta \widetilde{a_{i,j}})$ の台は $Q_{\varepsilon_2,+}$ に含まれるので, 命題 11.26 と補題 11.28 の (1) より,

$$\begin{aligned}
&\|\partial_h^{\alpha-\beta}(\partial_j w \partial_{-h}^\beta \widetilde{a_{i,j}})\|_2 = \|(\partial_h^{\alpha-\beta}(\partial_j w \partial_{-h}^\beta \widetilde{a_{i,j}}))|_{Q_{\varepsilon_2,+}}\|_2 \\
&\leqslant \sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta}\binom{\alpha-\beta}{\gamma}\left\|(\partial_h^{\alpha-\beta-\gamma}\partial_j w)|_{Q_{\varepsilon_2,+}}(\partial_h^\gamma \partial_{-h}^\beta \widetilde{a_{i,j}})|_{Q_{\varepsilon_2,+}}\right\|_2 \\
&\leqslant \sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta}\binom{\alpha-\beta}{\gamma}\left\|(\partial_h^{\alpha-\beta-\gamma}\partial_j w)|_{Q_{\varepsilon_2,+}}\right\|_2 \left\|(\partial_h^\gamma \partial_{-h}^\beta \widetilde{a_{i,j}})|_{Q_{\varepsilon_2,+}}\right\|_\infty \\
&\leqslant \sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta}\binom{\alpha-\beta}{\gamma}\left\|\partial^{\alpha-\beta-\gamma}\partial_j w\right\|_2 \left\|(\partial^\gamma \partial^\beta a_{i,j})|_{Q_{\varepsilon_3,+}}\right\|_\infty \\
&\leqslant \sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta}\binom{\alpha-\beta}{\gamma}\|w\|_{2,m+1}\|\partial^\gamma\partial^\beta a_{i,j}\|_\infty = \sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta}\binom{\alpha-\beta}{\gamma}\|\rho u\|_{2,m+1}\|\partial^\gamma\partial^\beta a_{i,j}\|_\infty
\end{aligned}$$

となる. よって $\rho, a_{i,j}, \alpha$ のみによる正実数 C_1 が存在し,

$$\begin{aligned}
&|p((\partial_h^\alpha w)|_{Q_+}, v) - (-1)^{|\alpha|}p(\rho u, \partial_{-h}^\alpha v)| = |((11.91)\ \text{の右辺の第二項}\ )| \\
&\leqslant C_1\|u\|_{2,m+1}\|v\|_{2,1} \ \ (\forall h \in \mathbb{R} : 0 < |h| < \delta, \forall v \in D(Q)|_{Q_+})
\end{aligned} \tag{11.92}$$

が成り立つ. 今, (1) が成り立つ場合は任意の $v_1 \in D(Q_+)$ を取り, (2) が成り立つ場合は任意の $v_2 \in D(Q)|_{Q_+}$ を取る. このとき,

$$\begin{aligned} p\left((\partial_h^\alpha w)|_\Omega, v_k\right) &= \{p\left((\partial_h^\alpha w)|_\Omega, v_k\right) - (-1)^{|\alpha|} p(\rho u, \partial_{-h}^\alpha v_k)\} \\ &\quad + (-1)^{|\alpha|}(p(\rho u, \partial_{-h}^\alpha v_k) - p(u, \rho\partial_{-h}^\alpha v_k)) \\ &\quad + (-1)^{|\alpha|} \int_{Q_+} \mathcal{A}u(x)\rho(x)\partial_{-h}^\alpha \overline{v_k}(x)dx \\ &\quad (\forall h \in \mathbb{R} : 0 < |h| < \delta, k = 1, 2) \end{aligned} \tag{11.93}$$

[*179]であり, (11.92) は (11.93) の右辺の第一項の評価を与えている. (11.93) の右辺の第三項を考える. $\mathcal{A}u\rho \in H^m(Q_+)$ であり, (11.88) より,

$$d(\mathrm{supp}(\mathcal{A}u\rho), \mathbb{R}_+^N \backslash Q_+) \geqslant d(Q_{\varepsilon_1,+}, \mathbb{R}_+^N \backslash Q_+) \geqslant 1 - \varepsilon_1 > 0$$

であるから, 定理 8.113 の (2) より $\mathcal{A}u\rho \in H^m(Q_+)$ の $\mathbb{R}_+^N$ 上への 0 拡張 $\widetilde{\mathcal{A}u\rho}$ は,

$$\widetilde{\mathcal{A}u\rho} \in H^m(\mathbb{R}_+^N), \quad \|\widetilde{\mathcal{A}u\rho}\|_{2,m} = \|\mathcal{A}u\rho\|_{2,m}$$

を満たす. よって (11.90) と補題 11.27 と補題 11.28 の (1) より,

$$\begin{aligned} &|((11.93) \text{ の右辺の第三項 })| = \left|\int_{Q_+} \mathcal{A}u(x)\rho(x)\partial_{-h}^\alpha \overline{v_k}(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}_+^N} \widetilde{\mathcal{A}u}(x)\rho(x)\partial_{-h}^\alpha \overline{v_k}(x)dx\right| \\ &\leqslant \|\widetilde{\mathcal{A}u\rho}\|_{2,m}\|v_k\|_{2,1} = \|\mathcal{A}u\rho\|_{2,m}\|v_k\|_{2,1} \leqslant C_3\|\mathcal{A}u\|_{2,m}\|v_k\|_{2,1} \end{aligned} \tag{11.94}$$

(ただし C_3 は ρ, m のみによる正実数である) と評価できる. (11.93) の右辺の第二項の評価を考える.

$$\begin{aligned} &|((11.93) \text{ の右辺の第二項 })| = |p(\rho u, \partial_{-h}^\alpha v_k) - p(u, \rho\partial_{-h}^\alpha v_k)| \\ &= \left|\sum_{i,j=1}^N \left(\int_{Q_+} a_{i,j}(x)\partial_j(\rho u)(x)\partial_{-h}^\alpha\partial_i\overline{v_k}(x)dx - \int_{Q_+} a_{i,j}(x)\partial_j u(x)(\partial_i(\rho\partial_{-h}^\alpha\overline{v_k})(x)dx\right)\right| \\ &= \left|\sum_{i,j=1}^N \left(\int_{Q_+} a_{i,j}(x)u(x)(\partial_j\rho)(x)\partial_{-h}^\alpha\partial_i\overline{v_k}(x)dx - \int_{Q_+} a_{i,j}(x)\partial_j u(x)(\partial_i\rho(x))\partial_{-h}^\alpha\overline{v_k}(x)dx\right)\right| \end{aligned} \tag{11.95}$$

であり, (11.88) より,

$$\begin{aligned} &a_{i,j}u\partial_j\rho \in H^{m+1}(Q_+), \quad d\left(\mathrm{supp}(a_{i,j}u\partial_j\rho), \mathbb{R}_+^N\backslash Q_+\right) \geqslant d(Q_{\varepsilon_1,+}, \mathbb{R}_+^N\backslash Q_+) \geqslant 1 - \varepsilon_1 > 0, \\ &a_{i,j}\partial_j u\partial_i\rho \in H^m(Q_+), \quad d\left(\mathrm{supp}(a_{i,j}\partial_j u\partial_i\rho), \mathbb{R}_+^N\backslash Q_+\right) \geqslant d(Q_{\varepsilon_1,+}, \mathbb{R}_+^N\backslash Q_+) \geqslant 1 - \varepsilon_1 > 0 \end{aligned}$$

であるから $a_{i,j}u\partial_j\rho \in H^{m+1}(Q_+)$ の $\mathbb{R}_+^N$ 上への 0 拡張 $\widetilde{a_{i,j}u\partial_j}\rho$ と $a_{i,j}\partial_j u\partial_i\rho \in H^m(Q_+)$ の $\mathbb{R}_+^N$ 上への 0 拡張 $\widetilde{a_{i,j}\partial_j u}\partial_i\rho$ は定理 8.113 の (2) より,

$$\begin{aligned} &\widetilde{a_{i,j}u}\partial_j\rho \in H^{m+1}(\mathbb{R}_+^N), \quad \|\widetilde{a_{i,j}u}\partial_j\rho\|_{2,m+1} = \|a_{i,j}u\partial_j\rho\|_{2,m+1}, \\ &\widetilde{a_{i,j}\partial_j u}\partial_i\rho \in H^m(\mathbb{R}_+^N), \quad \|\widetilde{a_{i,j}\partial_j u}\partial_i\rho\|_{2,m} = \|a_{i,j}\partial_j u\partial_i\rho\|_{2,m} \end{aligned}$$

[*179] $k = 1$ の場合, (11.90) より $\rho\partial_{-h}^\alpha v_k \in D(Q_+)$ であることに注意.

を満たす．よって (11.95) の右辺は (11.90) と補題 11.27 と補題 11.28 の (1) より，

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i,j=1}^{N}\left(\int_{Q_+} a_{i,j}(x)u(x)(\partial_j\rho)(x)\partial_{-h}^{\alpha}\partial_i\overline{v_k}(x)dx-\int_{Q_+} a_{i,j}(x)\partial_j u(x)(\partial_i\rho(x))\partial_{-h}^{\alpha}\overline{v_k}(x)dx\right)\right|\\
&=\left|\sum_{i,j=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}_+^N} \widetilde{a_{i,j}u}(x)(\partial_j\rho)(x)\partial_{-h}^{\alpha}\partial_i\overline{v_k}(x)dx-\int_{\mathbb{R}_+^N} \widetilde{a_{i,j}\partial_j u}(x)(\partial_i\rho(x))\partial_{-h}^{\alpha}\overline{v_k}(x)dx\right)\right|\\
&\leqslant \sum_{i,j=1}^{N}\left(\|\widetilde{a_{i,j}u}\partial_j\rho\|_{2,m+1}+\|\widetilde{a_{i,j}\partial_j u}\partial_i\rho\|_{2,m}\right)\|v_k\|_{2,1}\\
&=\sum_{i,j=1}^{N}\left(\|a_{i,j}u\partial_j\rho\|_{2,m+1}+\|a_{i,j}\partial_j u\partial_i\rho\|_{2,m}\right)\|v_k\|_{2,1}\\
&\leqslant C_2\|u\|_{2,m+1}\|v_k\|_{2,1}
\end{aligned}$$

(ただし C_2 は $a_{i,j},\rho,m$ のみによる正実数である) となるので，

$$|((11.93)\text{ の右辺の第二項 })|\leqslant C_2\|u\|_{2,m+1}\|v_k\|_{2,1} \tag{11.96}$$

と評価できる．こうして (11.93) の右辺の第一項, 第二項, 第三項はそれぞれ $a_{i,j},\rho,\alpha,m$ のみによる正実数 C_1,C_2,C_3 により (11.92), (11.84), (11.94) によって評価されるので, $a_{i,j},\rho,\alpha,m$ のみによる正実数 C_4 が存在し，

$$|p\left((\partial_h^{\alpha}w)|_{\Omega},v_k\right)|\leqslant C_4(\|\mathcal{A}u\|_{2,m}+\|u\|_{2,m+1})\|v_k\|_{2,1}\quad (\forall h\in\mathbb{R}:0<|h|<\delta,k=1,2) \tag{11.97}$$

が成り立つ．ここで (11.87) と (11.89) と (11.90) より $0<|h|<\delta$ なる任意の $h\in\mathbb{R}$ に対し, $\partial_h^{\alpha}w\in H^{m+1}(\mathbb{R}_+^N)$ の台は $Q_{\varepsilon_2,+}$ に含まれる．そこで Urysohn の補題 6.43 より $\varphi\in D(Q)$ で $\varphi|_{Q_{\varepsilon_2}}=1$ なるものを取ると, (1) が成り立つ場合は $w\in H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$ (定理 8.113 の (1)) より $\partial_h^{\alpha}w\in H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$ だから，

$$(\partial_h^{\alpha}w)|_{Q_+}=(\varphi\partial_h^{\alpha}w)|_{Q_+}\in H_0^1(Q_+)$$

が成り立ち, (2) が成り立つ場合は命題 8.115 より $\partial_h^{\alpha}w\in H^1(\mathbb{R}_+^N)=H^1(\mathbb{R}^N)|_{\mathbb{R}_+^N}$ だから，

$$(\partial_h^{\alpha}w)|_{Q_+}=(\varphi\partial_h^{\alpha}w)|_{Q_+}\in\overline{D(Q)|_{Q_+}}^{\|\cdot\|_{2,1}}$$

が成り立つ．よって $v_1\in D(Q_+)$, $v_2\in D(Q)|_{Q_+}$ であることに注意して (11.97) より，

$$p\left((\partial_h^{\alpha}w)|_{Q_+},(\partial_h^{\alpha}w)|_{Q_+}\right)\leqslant C_4(\|\mathcal{A}u\|_{2,m}+\|u\|_{2,m+1})\|(\partial_h^{\alpha}w)|_{Q_+}\|_{2,1}\quad (\forall h\in\mathbb{R}:0<|h|<\delta)$$

が成り立つ．よって一様楕円性条件 (11.56) より $a_{i,j},\rho,\alpha,m$ のみによる正実数 C_5 が存在し，

$$\|\partial_h^{\alpha}w\|_{2,1}=\|(\partial_h^{\alpha}w)|_{Q_+}\|_{2,1}\leqslant C_5(\|\mathcal{A}u\|_{2,m}+\|u\|_{2,m+1})\quad (\forall h\in\mathbb{R}:0<|h|<\delta)$$

が成り立つ．これより，

$$\|\partial_h^{\alpha}\partial_j w\|_2\leqslant C_5(\|\mathcal{A}u\|_{2,m}+\|u\|_{2,m+1})\quad (\forall h\in\mathbb{R}:0<|h|<\delta,\forall j\in\{1,\cdots,N\})$$

が成り立つので, (11.90) と補題 11.28 の (2) より $\partial^{\alpha}\partial_j w\in L^2(\mathbb{R}_+^N)$ $(j=1,\cdots,N)$ であり，

$$\|\partial^{\alpha}\partial_j w\|_2\leqslant C_5(\|\mathcal{A}u\|_{2,m}+\|u\|_{2,m+1})\quad (j=1,\cdots,N)$$

が成り立つ．(11.88) より，

$$\partial^{\alpha}\partial_j u|_{Q_{\varepsilon,+}}=\partial^{\alpha}\partial_j w|_{Q_{\varepsilon,+}}\in L^2(Q_{\varepsilon,+})\quad (j=1,\cdots,N)$$

であるから，

$$\|\partial^{\alpha}\partial_j u|_{Q_{\varepsilon,+}}\|_2\leqslant\|\partial^{\alpha}\partial_j w\|_2\leqslant C_5(\|\mathcal{A}u\|_{2,m}+\|u\|_{2,m+1})\quad (j=1,\cdots,N) \tag{11.98}$$

が成り立つ．ここで $\alpha\in\mathbb{Z}_+^N$ は (11.90) を満たす範囲で任意であるので, (11.98) より，

$$|\alpha|\leqslant m+2,\quad \alpha_N\leqslant 1$$

を満たす任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $\partial^\alpha u|_{Q_{\varepsilon,+}} \in L^2(Q_{\varepsilon,+})$ であり, $\varepsilon, a_{i,j}, \alpha, m$ のみによる正実数 $C^{(1)}$ が存在し,

$$\|\partial^\alpha u|_{Q_{\varepsilon,+}}\|_2 \leqslant C^{(1)}(\|\mathcal{A}u\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1})$$

が成り立つ.
今, ある $k \in \{1, \cdots, m+1\}$ について,

$$|\alpha| \leqslant m+2, \quad \alpha_N \leqslant k$$

を満たす任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $\partial^\alpha u|_{Q_{\varepsilon,+}} \in L^2(Q_{\varepsilon,+})$ であり, $\varepsilon, a_{i,j}, \alpha, m$ のみによる正実数 $C^{(k)}$ が存在し,

$$\|\partial^\alpha u|_{Q_{\varepsilon,+}}\|_2 \leqslant C^{(k)}(\|\mathcal{A}u\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1})$$

が成り立つと仮定する. 一様楕円性条件 (11.56) よりある正実数 c が存在し,

$$a_{N,N}(x) \geqslant c \quad (\forall x \in Q_+)$$

が成り立つから, $\frac{1}{a_{N,N}} : Q_+ \to \mathbb{R}$ は全ての偏導関数が有界な C^∞ 級関数である. そして $D'(Q_+)$ において,

$$\alpha_N^2 u = -\frac{1}{a_{N,N}}\left(\mathcal{A}u + \sum_{(i,j)\neq(N,N)} \partial_i(a_{i,j}\partial_j u) + (\partial_N a_{N,N})\partial_N u\right)$$

であるから, 仮定より,

$$|\beta| \leqslant m, \quad \beta_N \leqslant k-1$$

を満たす任意の多重指数 $\beta \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し,

$$\partial^\beta \partial_N^2 u|_{Q_{\varepsilon,+}} \in L^2(Q_{\varepsilon,+})$$

が成り立ち, $\varepsilon, a_{i,j}, \beta, m$ のみによる正実数 $C'^{(k)}$ が存在し,

$$\|\partial^\beta \partial_N^2 u|_{Q_{\varepsilon,+}}\|_2 \leqslant C'^{(k)}(\|\mathcal{A}u\|_{2,m} + \|u\|_{2,m})$$

が成り立つ. よって,

$$|\alpha| \leqslant m+2, \quad \alpha_N \leqslant k+1$$

を満たす任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し $\partial^\alpha u|_{Q_{\varepsilon,+}} \in L^2(Q_{\varepsilon,+})$ であり, $\varepsilon, a_{i,j}, \alpha, m$ のみによる正実数 $C^{(k+1)}$ が存在し,

$$\|\partial^\alpha u|_{Q_{\varepsilon,+}}\|_2 \leqslant C^{(k+1)}(\|\mathcal{A}u\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1})$$

が成り立つので, 帰納法より, $u|_{Q_{\varepsilon,+}} \in H^{m+2}(Q_{\varepsilon,+})$ であり, $\varepsilon, a_{i,j}, m$ のみによる正実数 C が存在し,

$$\|\partial^\alpha u|_{Q_{\varepsilon,+}}\|_2 \leqslant C(\|\mathcal{A}u\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1}) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| \leqslant m+2)$$

が成り立つ. □

定義 11.34 (Dirichlet-Neumann 境界条件付き一様楕円型微分作用素)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を滑らかでコンパクトな境界を持つ開集合で, Ω か $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ のうちのいずれか一方が有界であるものとする. そして, $\partial\Omega$ は互いに交わらないコンパクト集合 $\partial\Omega_{\mathrm{d}}$ と $\partial\Omega_{\mathrm{n}}$ の合併 (どちらかが空であってもよい) であるとする.

$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$$

をトレース作用素 (定義 8.129) とし,

$$\mathcal{V} := \{u \in H^1(\Omega) : \gamma(u)|_{\partial\Omega_{\mathrm{d}}} = 0\}$$

とおく. 定理 8.130 より $H_0^1(\Omega) \subseteq \mathcal{V} \subseteq H^1(\Omega)$ であり, γ が有界線型作用素であることから $\mathcal{V}$ は $H^1(\Omega)$ の閉部分空間である. 今, Ω 上の一様楕円型微分作用素 (定義 11.21)

$$\mathcal{A} : D'(\Omega) \ni u \mapsto -\sum_{i,j=1}^N \partial_i(a_{i,j}\partial_j u) + bu \in D'(\Omega)$$

に対し,

$$p_{\mathcal{A}}(u,v) := \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\overline{\partial_i v(x)}dx + \int_{\Omega} b(x)u(x)\overline{v(x)}dx \quad (\forall u,v \in \mathcal{V})$$

とおき,

$$D(A) := \{u \in \mathcal{V} : \mathcal{A}u \in L^2(\Omega),\ p_{\mathcal{A}}(u,v) = (\mathcal{A}u \mid v)_2\ (\forall v \in \mathcal{V})\},$$

$$A : D(A) \ni u \mapsto \mathcal{A}u \in L^2(\Omega)$$

とおく. このとき定理 11.24 より A は Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の自己共役作用素である. A を (Dirichlet-Neumann) 境界条件付き一様楕円型微分作用素と言う. 特に $\partial\Omega = \partial\Omega_{\mathrm{d}}$ (定理 8.130 より $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$ と同値) であるとき, A を Dirichlet 境界条件付き一様楕円型微分作用素と言い, $\partial\Omega = \partial\Omega_{\mathrm{n}}$ (すなわち $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$) であるとき, A を Neumann 境界条件付き一様楕円型微分作用素と言う.

定理 11.35 (境界条件付き一様楕円型微分作用素の基本性質)**.** 定義 11.34 における境界条件付き一様楕円型微分作用素 $A : D(A) \to L^2(\Omega)$ を考える. $\lambda_0 := \inf_{x\in\Omega} b(x) \in \mathbb{R}$ とおく. このとき,

(1) A は Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の自己共役作用素であり, $\sigma(A) \subseteq [\lambda_0, \infty)$ が成り立つ. また任意の $\lambda \in (-\infty, \lambda_0)$ に対し,

$$(A-\lambda)^{-1} \in B(L^2(\Omega), \mathcal{V}) \subseteq B(L^2(\Omega))$$

が成り立つ.

(2) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ が有界で A が Dirichlet 境界条件付き一様楕円型微分作用素ならば $\sigma(A) \subseteq (\lambda_0, \infty)$ であり,

$$(A-\lambda_0)^{-1} \in B(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega)) \subseteq B(L^2(\Omega))$$

が成り立つ.

(3) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ が有界ならば Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の自己共役作用素 A のスペクトルは純粋に離散的 (定義 10.125) である.

(4) $\lambda_0 \geqslant 0$ ならば A は Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の非負自己共役作用素であり,

$$\mathcal{V} = D(\sqrt{A}), \quad p_{\mathcal{A}}(u,v) = (\sqrt{A}u \mid \sqrt{A}v)_2 \quad (\forall u,v \in \mathcal{V})$$

が成り立つ.

(5) $u \in D(A)$ がある $m \in \mathbb{Z}_+$ に対し $Au \in H^m(\Omega)$ を満たすならば $u \in H^{m+2}(\Omega)$ が成り立つ. さらに A と m のみによる正実数 C が存在し,

$$\|u\|_{2,m+2} \leqslant C(\|Au\|_{2,m} + \|u\|_2)$$

が成り立つ.

(6) $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_N) : \partial\Omega \to \mathbb{R}^N$ を外向き単位法線ベクトル場 (定義 6.116) とすると,

$$D(A) = \left\{ u \in H^2(\Omega) : \gamma(u)|_{\partial\Omega_{\mathrm{d}}} = 0,\ \left(\sum_{i,j=1}^{N} \gamma(a_{i,j}\partial_j u)\nu_i \right)\Big|_{\partial\Omega_{\mathrm{n}}} = 0 \right\}$$

が成り立つ. 特に $\mathcal{A} = -\Delta$ (Laplacian) の場合は,

$$D(A) = \left\{ u \in H^2(\Omega) : \gamma(u)|_{\partial\Omega_{\mathrm{d}}} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega_{\mathrm{n}}} = 0 \right\}$$

が成り立つ. ただし $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ は外向き法線微分 (定義 11.18) である.

(7) $u \in D(A)$ が A の固有ベクトルならば,

$$u \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} H^m(\Omega)$$

が成り立つ. また u は全ての偏導関数が有界な C^∞ 級関数である.

証明. (1) $\sim$ (4) は定理 11.24 による.
(5) を示す. $m \in \mathbb{Z}_+$ に関する帰納法より $u \in D(A)$ がある $m \in \mathbb{Z}_+$ に対して,

$$Au \in H^m(\Omega), \quad u \in H^{m+1}(\Omega)$$

を満たすと仮定して, $u \in H^{m+2}(\Omega)$ が成り立つことと, A, m のみによる正実数 C で,

$$\|u\|_{2,m+2} \leqslant C(\|Au\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1}) \tag{11.99}$$

を満たすものが存在することを示せば十分である.[*180] 滑らかな境界を持つ開集合の定義 6.113 と $\partial\Omega$ のコンパクト性より, 有限個の $\mathbb{R}^N$ の局所座標 $((U_i, \Phi_i))_{i=1,\cdots,\ell}$ で次を満たすものが取れる.

(a) $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$.
(b) 各 $i \in \{1, \cdots, \ell\}$ に対し,

$$\Phi_i(U_i) = Q, \quad \Phi_i(U_i \cap \Omega) = Q_+,$$
$$\Phi_i(U_i \cap \partial\Omega) = (-1, 1)^{N-1} \times \{0\}.$$

(c) 各 $i \in \{1, \cdots, \ell\}$ に対し Φ_i, Φ_i^{-1} の全ての偏導関数は有界.

(a) の左辺は $\mathbb{R}^N$ のコンパクト集合, 右辺は開集合であるから閉包がコンパクトな $\mathbb{R}^N$ の開集合 D で,

$$\partial\Omega \subseteq D \subseteq \overline{D} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$$

を満たすものが取れる (定理 1.81 など). よって 1 の分割 (定理 6.44) より $h_i \in D(U_i)$ $(i = 1, \cdots, \ell)$ で,

$$\sum_{i=1}^{\ell} h_i(x) = 1 \quad (\forall x \in D)$$

を満たすものが取れる.

$$h_0 := 1 - \sum_{i=1}^{\ell} h_i \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{11.100}$$

とおく. $\partial\Omega$ は開集合 D に含まれるコンパクト集合なので命題 8.6 の (4) より $d(\mathbb{R}^N \backslash D, \partial\Omega) > 0$ であるから,

$$d(\mathrm{supp}(h_0), \partial\Omega) \geqslant d(\mathbb{R}^N \backslash D, \partial\Omega) > 0$$

である. よって補題 8.120 より,

$$d(\mathrm{supp}(h_0), \mathbb{R}^N \backslash \Omega) = d(\mathrm{supp}(h_0), \partial\Omega) > 0$$

であるから, 補題 11.30 より $h_0 u \in H^{m+2}(\Omega)$ であり, $h_0, a_{i,j}, b, m$ のみによる正実数 C_0 が存在して,

$$\|h_0 u\|_{2,m+2} \leqslant C_0(\|Au\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1}) \tag{11.101}$$

が成り立つ. 任意の $i \in \{1, \cdots, \ell\}$ を取り固定する. 以後, しばらく Φ_i, U_i, h_i などは Φ, U, h と表す. $\Psi : U \cap \Omega \to Q_+$ を Φ の $U \cap \Omega$ 上への制限とし, (c) と命題 8.111 に注意して,

$$u^* := u \circ \Psi^{-1} \in H^{m+1}(Q_+),$$

$$c_{k,l} := \left(\sum_{i,j} (a_{i,j} \partial_j \Psi_l \partial_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} \right) |\det \Psi^{-1\prime}| \in C^\infty(Q_+) \quad (\forall k, l \in \{1, \cdots, N\}),$$

$$f := (Au - bu) \circ \Psi^{-1} |\det \Psi^{-1\prime}| \in H^m(Q_+)$$

[*180] 一様楕円性条件 (11.56) よりある正実数 C_0 が存在し任意の $u \in D(A)$ に対し $\|u\|_{2,1} \leqslant C_0(\|Au\|_2 + \|u\|_2)$ が成り立つことに注意.

と定義する. このとき $c_{k,l}$ は全ての偏導関数が有界な C^∞ 級関数であり,

$$\mathcal{B}: D'(Q_+) \ni v \mapsto -\sum_{k,l} \partial_k(c_{k,l}\partial_l v) \in D'(Q_+)$$

は一様楕円型微分作用素 (定義 11.21) である.

$$q(v,w) := \sum_{k,l}\int_{Q_+} c_{k,l}\partial_l v(x)\partial_k \overline{w}(x)dx \quad (\forall v, w \in H^1(Q_+))$$

とおく. U が $\partial\Omega_{\mathrm{d}}$ と交わらない場合. 任意の $v \in D(Q)|_{Q_+}$ に対し $v\circ\Psi \in D(U)|_\Omega \subseteq \mathcal{V}$ ($D(U) \subseteq D(\mathbb{R}^N)$ に注意) であるから, 変数変換公式 (定理 5.229) より,

$$\begin{aligned} q(u^*, v) &= \sum_{i,j}\int_{U\cap\Omega} a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\partial_i(\overline{v}\circ\Psi)(x)dx = \sum_{i,j}\int_\Omega a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\partial_i(\overline{v}\circ\Psi)(x)dx \\ &= p_{\mathcal{A}-b}(u, v\circ\Psi) = \int_\Omega (Au - bu)(x)\overline{v}\circ\Psi(x)dx = \int_{Q_+} f(x)\overline{v}(x)dx \end{aligned}$$

となる. よってこのとき u^* は補題 11.33 の条件 (2) を満たす. 一方, U が $\partial\Omega_{\mathrm{d}}$ と交わる場合. 任意の $\rho \in D(U) \subseteq D(\mathbb{R}^N)$ に対し $\gamma(\rho u) = \rho\gamma(u) = 0$ であるので定理 8.130 より $\rho u \in H_0^1(\Omega)$ であり, ρu は $(\rho u)|_{U\cap\Omega}$ の Ω 上への 0 拡張で,

$$d(\mathrm{supp}(\rho u), \Omega\backslash(U\cap\Omega)) \geqslant d(\mathrm{supp}(\rho)\cap\Omega, \Omega\backslash U) \geqslant d(\mathrm{supp}(\rho), \mathbb{R}^N\backslash U) > 0$$

であるから定理 8.113 の (2) より $(\rho u)|_{U\cap\Omega} \in H_0^1(U\cap\Omega)$ である. よって任意の $\rho^* \in D(Q)$ に対し $\rho^* u^* \in H_0^1(Q_+)$ であるから u^* は補題 11.33 の条件 (1) を満たす. $\mathrm{supp}(h) \subseteq U$ のコンパクト性よりある $\varepsilon \in (0,1)$ に対し $\mathrm{supp}(h\circ\Psi^{-1}) \subseteq Q_{\varepsilon,+}$ となるから, 補題 11.33 より $(h\circ\Psi^{-1})u^* \in H^{m+2}(Q_+)$ であり, $h, \Psi, c_{k,l}, m$ のみによるある正実数 C が存在して,

$$\|(h\circ\Psi^{-1})u^*\|_{2,m+2} \leqslant C(\|f\|_{2,m} + \|u^*\|_{2,m+1})$$

が成り立つ. よって命題 8.111 より $hu \in H^{m+2}(U\cap\Omega)$ であり, $h, \Psi, a_{i,j}, m$ のみによる正実数 C' が存在し,

$$\|(hu)|_{U\cap\Omega}\|_{2,m+2} \leqslant C'(\|Au\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1})$$

が成り立つ. $\mathrm{supp}(h) \subseteq U$ のコンパクト性より,

$$d(\mathrm{supp}((hu)|_{U\cap\Omega}),\ \Omega\backslash(U\cap\Omega)) \geqslant d(\mathrm{supp}(h), \mathbb{R}^N\backslash U_i) > 0$$

であるから定理 8.113 の (2) より $(hu)|_{U\cap\Omega}$ の Ω 上への 0 拡張である hu は $H^{m+2}(\Omega)$ に属し,

$$\|hu\|_{2,m+2} = \|(hu)|_{U\cap\Omega}\|_{2,m+2} \leqslant C'(\|Au\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1})$$

が成り立つ. よって任意の $i \in \{1,\cdots,\ell\}$ に対し $h_i u \in H^{m+2}(\Omega)$ であり, $h_i, \Phi, a_{i,j}, m$ のみによる正実数 C_i が存在し,

$$\|h_i u\|_{2,m+2} \leqslant C_i(\|Au\|_{2,m} + \|u\|_{2,m+1}) \tag{11.102}$$

が成り立つ. 以上より $h_0 u, h_1 u, \cdots, h_\ell u \in H^{m+2}(\Omega)$ であるから (11.100) より,

$$u = \sum_{i=0}^{\ell} h_i u \in H^{m+2}(\Omega)$$

であり, (11.101), 11.102) より, $\Omega, a_{i,j}, b, m$ のみによる正実数 C が存在し (11.99) が成り立つ.
(6) を示す. (5) より $D(A) \subseteq H^2(\Omega)$ であるから,

$$\begin{aligned} D(A) &= \{u \in \mathcal{V} : \mathcal{A}u \in L^2(\Omega),\ p(u,v) = (\mathcal{A}u \mid v)_2\ (\forall v \in \mathcal{V})\} \\ &= \left\{u \in H^2(\Omega) : \gamma(u)|_{\partial\Omega_{\mathrm{d}}} = 0,\ \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\overline{\partial_i v(x)} + \partial_i(a_{i,j}\partial_j u)(x)\overline{v(x)}dx = 0\ (\forall v \in \mathcal{V})\right\} \end{aligned}$$

である．ここで任意の $u \in H^2(\Omega), v \in H^1(\Omega)$ に対し, Gauss の発散定理の Sobolev 空間版 (定理 11.19 の (2), 定理 11.20 の (1) *181) より,

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} a_{i,j}(x)\partial_j u(x)\overline{\partial_i v(x)} + \partial_i(a_{i,j}\partial_j u)(x)\overline{v(x)}dx = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\partial\Omega} \gamma(a_{i,j}\partial_j u)(x)\nu_i(x)\gamma(\overline{v})(x)d\mu_{\partial\Omega}(x)$$

であるから,

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ u \in H^2(\Omega) : \gamma(u)|_{\partial\Omega_{\mathrm{d}}} = 0,\ \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\partial\Omega} \gamma(a_{i,j}\partial_j u)(x)\nu_i(x)\gamma(\overline{v})(x)d\mu_{\partial\Omega}(x) = 0\ (\forall v \in \mathcal{V}) \right\} \\ &= \left\{ u \in H^2(\Omega) : \gamma(u)|_{\partial\Omega_{\mathrm{d}}} = 0,\ \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\partial\Omega_{\mathrm{n}}} \gamma(a_{i,j}\partial_j u)(x)\nu_i(x)\gamma(\overline{v})(x)d\mu_{\partial\Omega}(x) = 0\ (\forall v \in \mathcal{V}) \right\} \end{aligned}$$

である．$\partial\Omega_{\mathrm{n}}$ と $\partial\Omega_{\mathrm{d}}$ は互いに交わらないコンパクト集合であるから, Urysohn の補題 6.43 より,

$$\{\gamma(v)|_{\partial\Omega_{\mathrm{n}}} : v \in \mathcal{V}\}$$

は $\partial\Omega_{\mathrm{n}}$ 上の全ての多項式を含む．よって Stone-Weierstrass の定理 5.194 と $L^2(\partial\Omega_{\mathrm{n}}, \mu_{\partial\Omega})$ における $C(\partial\Omega_{\mathrm{n}})$ の稠密性 (定理 6.88) より,

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ u \in H^2(\Omega) : \gamma(u)|_{\partial\Omega_{\mathrm{d}}} = 0,\ \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\partial\Omega_{\mathrm{n}}} \gamma(a_{i,j}\partial_j u)(x)\nu_i(x)\gamma(\overline{v})(x)d\mu_{\partial\Omega}(x) = 0\ (\forall v \in \mathcal{V}) \right\} \\ &= \left\{ u \in H^2(\Omega) : \gamma(u)|_{\partial\Omega_{\mathrm{d}}} = 0,\ \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\partial\Omega_{\mathrm{n}}} \gamma(a_{i,j}\partial_j u)(x)\nu_i(x)f(x)d\mu_{\partial\Omega}(x) = 0\ (\forall f \in C(\partial\Omega_{\mathrm{n}})) \right\} \\ &= \left\{ u \in H^2(\Omega) : \gamma(u)|_{\partial\Omega_{\mathrm{d}}} = 0,\ \left(\sum_{i,j=1}^{N} \gamma(a_{i,j}\partial_j u)\nu_i \right)\Bigg|_{\partial\Omega_{\mathrm{n}}} = 0 \right\} \end{aligned}$$

を得る．$\mathcal{A} = -\Delta$ の場合は $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ だから,

$$\sum_{i,j=1}^{N} \gamma(a_{i,j}\partial_j u)\nu_i = \sum_{j=1}^{N} \gamma(\partial_j u)\nu_j = \gamma(\nabla u) \cdot \nu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

であるので,

$$D(A) = \left\{ u \in H^2(\Omega) : \gamma(u)|_{\partial\Omega_{\mathrm{d}}} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega_{\mathrm{n}}} = 0 \right\}$$

である．

(7) を示す．$u \in D(A)$ が固有値 λ の固有ベクトルならば (5) より,

$$Au = \lambda u \in D(A) \subseteq H^2(\Omega)$$

だから, 再び (5) より $u \in H^4(\Omega)$ を得る．さらに (5) より $u \in H^6(\Omega)$ を得る．同様に (5) を繰り返し適用すれば,

$$u \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} H^m(\Omega)$$

を得る．Sobolev の埋め込み定理 8.135 より u は全ての偏導関数が有界な C^∞ 級関数である． □

定義 11.36 (楕円型正則性)**.** 定理 11.29 の (3), 定理 11.35 の (5) の性質を一様楕円型微分作用素の楕円型正則性と言う．

*181 $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ が有界の場合は定理 11.20 の (1) を用いる．

11.4 球面平均と調和関数, 調和関数に対する最大値の原理, Liouville の定理

定義 11.37 (球面平均と球平均)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $u : \Omega \to \mathbb{C}$ を連続関数とする. $x \in \Omega$ と $r \in (0, \infty)$ で,

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y-x| < r\} \subseteq \{y \in \mathbb{R}^N : |y-x| \leqslant r\} \subseteq \Omega$$

を満たすものに対し,

$$S(u,x,r) := \frac{1}{\mu_{\partial B(x,r)}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\mu_{\partial B(x,r)}(y) \tag{11.103}$$

($\mu_{\partial B(x,r)}$ は球面 $\partial B(x,r)$ 上の面積測度 (定義 6.85)) を u の球面 $\partial B(x,r)$ における球面平均と言う. また,

$$K(u,x,r) := \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u(y) dy \tag{11.104}$$

(m は $B(x,r)$ の Lebesgue 測度) を u の球 $B(x,r)$ における球平均と言う.

命題 11.38 (球面平均と球平均の基本性質)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $u : \Omega \to \mathbb{C}$ を連続関数とし, $x \in \Omega$ と $R \in (0, \infty)$ を $\{y \in \mathbb{R}^N : |y-x| \leqslant R\} \subseteq \Omega$ なるものとする. このとき,

(1) 任意の $r \in (0, R]$ に対し,

$$K(u,x,r) = \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u(y) dy = \frac{1}{m(B(0,1))} \int_{B(0,1)} u(x+ry) dy, \tag{11.105}$$

$$\begin{aligned} S(u,x,r) &= \frac{1}{\mu_{\partial B(x,r)}(\partial B(x,r))} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\mu_{\partial B(x,r)}(y) \\ &= \frac{1}{\mu_{\partial B(0,1)}(\partial B(0,1))} \int_{\partial B(0,1)} u(x+ry) d\mu_{\partial B(0,1)}(y) \end{aligned} \tag{11.106}$$

が成り立つ. また $(0,R] \ni r \mapsto S(u,x,r) \in \mathbb{C}$, $(0,R] \ni r \mapsto K(u,x,r) \in \mathbb{C}$ は連続関数であり,

$$\lim_{r \to +0} S(u,x,r) = u(x), \quad \lim_{r \to +0} K(u,x,r) = u(x) \tag{11.107}$$

が成り立つ.

(2) 任意の $r_0 \in (0, R]$ に対し,

$$K(u,x,r_0) = \frac{N}{r_0^N} \int_0^{r_0} r^{N-1} S(u,x,r) dr,$$

が成り立つ. また,

$$\frac{d}{dr} K(u,x,r) = \frac{N}{r} (S(u,x,r) - K(u,x,r)) \quad (\forall r \in (0,R])$$

が成り立つ.

(3) $u \in C^1(\Omega)$ ならば, 任意の $r \in (0, R]$ に対し,

$$\frac{d}{dr} S(u,x,r) = \frac{1}{\mu_{\partial B(x,r)}(\partial B(x,r))} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} d\mu_{\partial B(0,1)}(y) \tag{11.108}$$

が成り立つ.

(4) $u \in C^2(\Omega)$ ならば,

$$\frac{d}{dr} S(u,x,r) = \frac{r}{N} K(\Delta u, x, r) \quad (\forall r \in (0,R]) \tag{11.109}$$

が成り立つ.

証明. (1) (11.105) は C^∞ 級同相写像

$$B(0,1) \ni y \mapsto x + ry \in B(x,r)$$

に対して変数変換公式 (定理 5.229) を用いれば得られ, (11.106) は C^∞ 級同相写像

$$\partial B(0,1) \ni y \mapsto x + ry \in \partial B(x,r)$$

[*182]に対して (多様体上の) 変数変換公式 (定理 6.94) を用いれば得られる. そして (11.105), (11.106) と Lebesgue 優収束定理より, $(0,R] \ni r \mapsto K(u,x,r) \in \mathbb{C}$, $(0,R] \ni r \mapsto S(u,x,r) \in \mathbb{C}$ が連続であることと, (11.107) が成り立つことが分かる.

(2) 任意の $r_0 \in (0,R]$ に対し極座標変換 (定理 6.99) より,

$$m(B(x,r_0)) = m(B(0,r_0)) = \int_0^{r_0} \int_{\partial B(0,1)} r^{N-1} d\mu_{\partial B(0,1)}(y) dr = \frac{r_0^N}{N} \mu_{\partial B(0,1)}(\partial B(0,1)) \tag{11.110}$$

であるので, 極座標変換と (11.106) より,

$$\begin{aligned} K(u,x,r_0) &= \frac{1}{m(B(x,r_0))} \int_0^{r_0} \int_{\partial B(0,1)} r^{N-1} u(x+ry) d\mu_{\partial B(0,1)}(y) dr \\ &= \frac{N}{r_0^N} \int_0^{r_0} \frac{1}{\mu_{\partial B(0,1)}(\partial B(0,1))} \int_{\partial B(0,1)} r^{N-1} u(x+ry) d\mu_{\partial B(0,1)}(y) dr \\ &= \frac{N}{r_0^N} \int_0^{r_0} r^{N-1} S(u,x,r) dr. \end{aligned}$$

右辺の被積分関数 $(0,R] \ni r \mapsto r^{N-1} S(u,x,r) \in \mathbb{C}$ は (1) より連続なので,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} K(u,x,r_0) &= \frac{N}{r_0^N} (r_0^{N-1} S(u,x,r_0)) - \frac{N^2}{r_0^{N+1}} \int_0^{r_0} r^{N-1} S(u,x,r) dr \\ &= \frac{N}{r_0} (S(u,x,r_0) - K(u,x,r_0)). \end{aligned}$$

(3) (11.106) と Lebesgue 優収束定理より,

$$\frac{d}{dr} S(u,x,r) = \frac{1}{\mu_{\partial B(0,1)}(\partial B(0,1))} \int_{\partial B(0,1)} (\nabla u(x+ry) \cdot y) d\mu_{\partial B(0,1)}(y) \tag{11.111}$$

であり, C^∞ 級同相写像

$$\partial B(x,r) \ni y \mapsto \frac{y-x}{r} \in \partial B(0,1)$$

[*183]に対して変数変換公式 (定理 6.94) を用いれば,

$$(11.111) \text{ の右辺} = \frac{1}{\mu_{\partial B(x,r)}(\partial B(x,r))} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} d\mu_{\partial B(x,r)}(y)$$

となるから (11.108) が成り立つ.

(4)

$$\partial B(x,r) \ni y \mapsto \frac{y-x}{r} \in \mathbb{R}^N$$

は $B(x,r)$ の境界上の外向き単位法線ベクトル場 (定理 6.117 を参照) であるから, Gauss の発散定理 (定理 6.122 か定理 11.19 の (1)) と (11.108) より,

$$\begin{aligned} K(\Delta u,x,r) &= \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy = \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} d\mu_{\partial B(x,r)}(y) \\ &= \frac{1}{m(B(x,r))} \mu_{\partial B(x,r)}(\partial B(x,r)) \frac{d}{dr} S(u,x,r) \end{aligned} \tag{11.112}$$

[*182] Jacobian(定義 6.91) は r^{N-1}. 球面の局所座標に関しては命題 6.97 の (3), (4) を参照.

[*183] Jacobian は $\frac{1}{r^{N-1}}$.

となる. 変数変換公式 (定理 6.94) より,

$$\mu_{\partial B(x,r)}(\partial B(x,r)) = r^{N-1}\mu_{\partial B(0,1)}(\partial B(0,1))$$

であるから, (11.110) より,

$$\frac{1}{m(B(x,r))}\mu_{\partial B(x,r)}(\partial B(x,r)) = \frac{N}{r^N}r^{N-1} = \frac{N}{r}$$

である. よって (11.112) より,

$$K(\Delta u, x, r) = \frac{N}{r}\frac{d}{dr}S(u,x,r)$$

であるから (11.109) が成り立つ.

□

定義 11.39 (調和関数)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合とする. $u \in C^\infty(\Omega)$ で $\Delta u = 0$ を満たすものを Ω 上の調和関数と言う.

命題 11.40 (正則関数は調和関数)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を開集合, $u : \Omega \to \mathbb{C}$ を正則関数とする. $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ とみなし, u を $\mathbb{R}^2$ の開集合 Ω 上の関数とみなしたもの $u(x,y)$ $(\forall (x,y) = x+iy \in \Omega)$ とみなしたものは調和関数である.

証明. 正則関数は何回でも複素微分可能 (定理 7.15) であるので $u \in C^\infty(\Omega)$ である. Cauchy-Riemann の関係式 (定理 4.24)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{\partial u_x}{\partial y}$$

より,

$$\begin{aligned}
\Delta u_x &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u_y - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}u_y = 0, \\
\Delta u_y &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u_x + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}u_x = 0.
\end{aligned}$$

よって $\Delta u = 0$ が成り立つので u は調和関数である. □

定理 11.41 (調和関数の球面平均による特徴付け)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $u : \Omega \to \mathbb{C}$ を連続関数とする. このとき次は互いに同値である.

(1) $\{y \in \mathbb{R}^N : |y-x| \leqslant r\} \subseteq \Omega$ なる任意の $x \in \Omega$ と $r \in (0,\infty)$ に対し $u(x) = S(u,x,r)$ (定義 11.37) が成り立つ.
(2) $\{y \in \mathbb{R}^N : |y-x| \leqslant r\} \subseteq \Omega$ なる任意の $x \in \Omega$ と $r \in (0,\infty)$ に対し $u(x) = K(u,x,r)$ (定義 11.37) が成り立つ.
(3) u は Ω 上の調和関数 (定義 11.39) である.
(4) Ω 上の超関数 ($D'(\Omega)$ の元) として $\Delta u = 0$ が成り立つ.

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2) を示す. $\{y \in \mathbb{R}^N : |y-x| \leqslant r_0\} \subseteq \Omega$ を満たす任意の $r_0 \in (0,\infty)$ を取る. (1) が成り立つならば, 命題 11.38 の (2) の上の式より,

$$K(u,x,r_0) = \frac{N}{r_0^N}\int_0^{r_0} r^{N-1}S(u,x,r)dr = \frac{N}{r_0^N}\int_0^{r_0} r^{N-1}u(x)dr = u(x)$$

であるから (2) が成り立つ. 逆に (2) が成り立つならば, 命題 11.38 の (2) の下の式より,

$$0 = \frac{d}{dr}K(u,x,r_0) = \frac{N}{r_0}(S(u,x,r_0) - K(u,x,r_0)) = \frac{N}{r_0}(S(u,x,r_0) - u(x))$$

であるから (1) が成り立つ.
(1) $\Rightarrow$ (3) を示す. (1) が成り立つとする.

$$B(x_0,r_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x-x_0| < r_0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^N : |x-x_0| \leqslant r_0 + \varepsilon_0\} \subseteq \Omega \tag{11.113}$$

なる任意の $x_0 \in \Omega$ と $r_0, \varepsilon_0 \in (0,\infty)$ を取り固定する. (3) が成り立つことを示すには $B(x_0,r_0)$ 上で u が C^∞ 級であることと $\Delta u(x_0) = 0$ が成り立つことを示せば十分である. Urysohn の補題 6.43 より連続関数 $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ で,

$$v(x) = u(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N : |x-x_0| \leqslant r_0 + \varepsilon_0) \tag{11.114}$$

を満たすものが取れる. $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ を Friedrichs の軟化子 (定義 8.92) とし,

$$\rho(r) := \psi_{\varepsilon_0}(r\omega) \quad (\forall r \in [0,\infty), \forall \omega \in \partial B(0,1))$$

と表すことにすると, 任意の $x \in B(x_0, r_0)$ に対し, 極座標変換 (定理 6.99) より,

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{\frac{N}{2}}(\psi_{\varepsilon_0} * v)(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi_{\varepsilon_0}(y)v(x-y)dy = \int_{|y|\leqslant\varepsilon_0} \psi_{\varepsilon_0}(y)u(x-y)dy \\
&= \int_0^{\varepsilon_0} r^{N-1}\rho(r)\int_{\partial B(0,1)} u(x-r\omega)d\mu_{\partial B(0,1)}(\omega)dr \\
&= \int_0^{\varepsilon_0} r^{N-1}\rho(r)u(x)\mu_{\partial B(0,1)}(\partial B(0,1))dr \\
&= \int_0^{\varepsilon_0} r^{N-1}u(x)\int_{\partial B(0,1)} \psi_{\varepsilon_0}(r\omega)d\mu_{\partial B(0,1)}(\omega)dr \\
&= \int_{|y|\leqslant\varepsilon_0} \psi_{\varepsilon_0}(y)u(x)dy = (2\pi)^{\frac{N}{2}}u(x)
\end{aligned}$$

となる. ここで 4 番目の等号において (1) が成り立つことを用いた. よって,

$$u(x) = (\psi_{\varepsilon_0} * v)(x) \quad (\forall x \in B(x_0, r_0))$$

であり, $\psi_{\varepsilon_0} * v \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (命題 8.81) であるから, u は $B(x_0, r_0)$ 上で C^∞ 級である. (1) が成り立つことと命題 11.38 の (4) より,

$$0 = \frac{d}{dr}S(u, x_0, r) = \frac{r}{N}K(\Delta u, x_0, r) \quad (\forall r \in (0, r_0))$$

であるから, 命題 11.38 の (1) より,

$$\Delta u(x_0) = \lim_{r\to+0} K(\Delta u, x_0, r) = 0.$$

ゆえに (3) が成り立つ.

(3) $\Rightarrow$ (4) は自明である.

(4) $\Rightarrow$ (1) を示す. (4) が成り立つとする. (11.113) を満たす任意の $x_0 \in \Omega$ と $r_0, \varepsilon_0 \in (0,\infty)$ を取り,

$$u(x_0) = S(u, x_0, r_0)$$

が成り立つことを示せばよい. (11.114) を満たす連続関数 $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ を取り, $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ を Friedrichs の軟化子とする. 命題 8.85 より,

$$\mathrm{supp}(\psi_\varepsilon * \varphi) \subseteq \mathrm{supp}(\psi_\varepsilon) + \mathrm{supp}(\varphi) \subseteq B(x_0, r_0 + \varepsilon_0) \quad (\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \forall \varphi \in D(B(x_0, r_0)))$$

であるから, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, 任意の $\varphi \in D(B(x_0, r_0))$ に対し $v, \psi_\varepsilon * v$ を超関数とみなして,

$$\begin{aligned}
&\Delta(\psi_\varepsilon * v)(\varphi) = (\psi_\varepsilon * v)(\Delta\varphi) = v(\psi_\varepsilon * \Delta\varphi) = v(\Delta(\psi_\varepsilon * \varphi)) \\
&= u(\Delta(\psi_\varepsilon * \varphi) = \Delta u(\psi_\varepsilon * \varphi) = 0
\end{aligned}$$

となる (ただし 2 番目の等号で補題 8.94 を用い, 3 番目の等号で命題 8.81 を用いた). よって $\psi_\varepsilon * v \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ は,

$$\Delta(\psi_\varepsilon * v)(x) = 0 \quad (\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \forall x \in B(x_0, r_0))$$

を満たすので, 命題 11.38 の (4) より,

$$\frac{d}{dr}S((\psi_\varepsilon * v), x_0, r) = \frac{r}{N}K(\Delta(\psi_\varepsilon * v), x_0, r) = 0 \quad (\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \forall r \in (0, r_0)).$$

従って命題 11.38 の (1) と平均値の定理より,

$$(\psi_\varepsilon * v)(x_0) = S((\psi_\varepsilon * v), x_0, r_0) \quad (\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0])$$

が成り立つ. そして $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ は連続関数だから命題 8.95 より $\partial B(x_0, r_0)$ 上一様収束で,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (\psi_\varepsilon * v) = v$$

が成り立つので,

$$u(x_0) = v(x_0) = \lim_{\varepsilon \to +0} (\psi_\varepsilon * v)(x_0) = \lim_{\varepsilon \to +0} S((\psi_\varepsilon * v), x_0, r_0) = S(v, x_0, r_0) = S(u, x_0, r_0).$$

よって (1) が成り立つ. □

定理 11.42 (強最大値の原理)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $u : \Omega \to \mathbb{C}$ を調和関数とする. このとき次は互いに同値である.

(1) u は定数関数である.

(2) 実数値調和関数 $\mathrm{Re}(u) : \Omega \ni x \mapsto \mathrm{Re}(u(x)) \in \mathbb{R}$ と $\mathrm{Im}(u) : \Omega \ni x \mapsto \mathrm{Im}(u(x)) \in \mathbb{R}$ がそれぞれ Ω 上で最大値か最小値を取る.

(3) $|u| : \Omega \ni x \mapsto |u(x)| \in [0, \infty)$ が Ω 上で最大値を取る.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (3) は自明である.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. 実数値調和関数 $v : \Omega \to \mathbb{R}$ が Ω 上で最大値を取ると仮定して v が定数関数であることを示せば十分である.

$$M := \max_{x \in \Omega} v(x) \in \mathbb{R}$$

とおき,

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega : v(x) = M\}$$

とおくと Ω_0 は Ω の空でない閉集合である. 任意の $x_0 \in \Omega_0$ を取り, $\{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \leqslant r\} \subseteq \Omega$ を満たす正実数 r を取る. このとき定理 11.41 の (2) より,

$$M = v(x_0) = \frac{1}{m(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} v(x) dx \leqslant \frac{1}{m(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} M dx = M$$

であるから, 非負値連続関数 $B(x_0, r) \ni x \mapsto M - v(x) \in [0, \infty)$ は,

$$\int_{B(x_0, r)} M - v(x) dx = 0$$

を満たす. よって $M - v(x) = 0$ $(\forall x \in B(x_0, r))$ であるから, $B(x_0, r) \subseteq \Omega_0$ である. ゆえに Ω_0 は Ω の閉集合かつ開集合であるから, Ω の連結性より $\Omega = \Omega_0$ である.
(3) $\Rightarrow$ (1) を示す. (3) が成り立つとする.

$$M := \max_{x \in \Omega} |u(x)| \in [0, \infty)$$

とおき,

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega : |u(x)| = M\}$$

とおくと Ω_0 は Ω の空でない閉集合である. 任意の $x_0 \in \Omega_0$ を取り, $\{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \leqslant r\} \subseteq \Omega$ を満たす正実数 r を取る. このとき定理 11.41 の (2) より,

$$M = |u(x_0)| = \frac{1}{m(B(x_0, r))} \left| \int_{B(x_0, r)} u(x) dx \right| \leqslant \frac{1}{m(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} |u(x)| dx \leqslant M$$

であるから, 非負値連続関数 $B(x_0, r) \ni x \mapsto M - |u(x)| \in [0, \infty)$ は,

$$\int_{B(x_0, r)} M - |u(x)| dx = 0$$

を満たす. よって $M - |u(x)| = 0$ $(\forall x \in B(x_0, r))$ であるから, $B(x_0, r) \subseteq \Omega_0$ である. ゆえに Ω_0 は Ω の閉集合かつ開集合であるから, Ω の連結性より $\Omega = \Omega_0$ である. □

命題 11.43. X を位相空間とし, 各 $x \in X$ に対し x を含む全ての連結集合の合併を C_x と表す. このとき,

(1) 各 $x \in X$ に対し C_x は x を含む X の連結集合のうち最大のものである.
(2) $x, y \in X$ に対し, $C_x \cap C_y \neq \varnothing \Leftrightarrow C_x = C_y$ が成り立つ.
(3) 各 $x \in X$ に対し C_x は閉集合である.
(4) もし X の任意の点が連結な開近傍を持つならば, 各 $x \in X$ に対し C_x は開集合である.

証明. (1) 任意の $x \in X$ を取り固定する. $x \in X$ を含む連結集合全体を $\{C_j\}_{j \in J}$ とおくと定義より,

$$C_x = \bigcup_{j \in J} C_j$$

である. C_x が連結集合であることを示せばよい. そこで C_x が非連結であると仮定して矛盾を導く. このとき X の開集合 U, V で,

$$C_x \cap U \neq \varnothing,\ \ C_x \cap V \neq \varnothing,\ \ (C_x \cap U) \cap (C_y \cap V) = \varnothing,\ \ C_x \subseteq U \cup V \tag{11.115}$$

を満たすものが取れる. $x \in U$ であるとすると, 任意の $j \in J$ に対し,

$$x \in C_j \cap U \neq \varnothing,\ \ (C_j \cap U) \cap (C_j \cap V) = \varnothing,\ \ C_j \subseteq U \cup V$$

であり, C_j は連結であるから $C_j \cap V = \varnothing$ である. よって,

$$C_x \cap V = \bigcup_{j \in J} (C_j \cap V) = \varnothing$$

となり, (11.115) と矛盾する. 全く同様に $x \in V$ であるとしても矛盾を得る. よって C_x は連結集合である.

(2) $C_x \cap C_y \neq \varnothing$ であるとすると, 任意の $z \in C_x \cap C_y$ に対し (1) より $C_x \subseteq C_z, C_y \subseteq C_z$ だから $x, y \in C_z$ である. よって (1) より $C_z \subseteq C_x, C_z \subseteq C_y$ であるから $C_x = C_z = C_y$ である.

(3) (1) より任意の連結集合 $C \subseteq X$ に対し $\overline{C}$ も連結集合であることを示せば十分である. そこで $\overline{C}$ が非連結であると仮定して矛盾を導く. このとき X の開集合 U, V で,

$$\overline{C} \cap U \neq \varnothing,\ \ \overline{C} \cap V \neq \varnothing,\ \ (\overline{C} \cap U) \cap (\overline{C} \cap V) = \varnothing,\ \ \overline{C} \subseteq U \cup V \tag{11.116}$$

を満たすものが取れる. U は開集合だから $C \cap U = \varnothing$ は $\overline{C} \cap U = \varnothing$ を意味するので (11.116) より $C \cap U \neq \varnothing$ である. 同様に V は開集合だから $C \cap V \neq \varnothing$ である. よって,

$$C \cap U \neq \varnothing,\ \ C \cap V \neq \varnothing,\ \ (C \cap U) \cap (C \cap V) = \varnothing,\ \ C \subseteq U \cup V$$

となり, C が連結であることに矛盾する. ゆえに $\overline{C}$ は連結である.

(4) 任意の $x \in X$ を取り固定する. 仮定より任意の $y \in C_x$ に対し y の連結な開近傍 $U \subseteq X$ が存在する. (1) と (2) より $y \in U \subseteq C_y = C_x$ であるから C_x は X の開集合である.

□

定義 11.44 (連結成分)**.** X を位相空間とする. X の連結集合 $C \subseteq X$ が X の連結成分であるとは, C を真に含むような X の連結集合が存在しないことを言う. 命題 11.43 より任意の $x \in X$ に対し x を含む連結成分が存在し, 互いに異なる連結成分は交わらない. そして X の連結成分は X の閉集合であり, さらにもし X の各点が連結な開近傍を持つならば X の連結成分は開集合でもある.

定理 11.45 (弱最大値の原理)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を有界開集合とし, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ を連続関数で Ω 上で調和関数であるものとする. このとき,

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| = \max_{x \in \partial\Omega} |u(x)| \tag{11.117}$$

が成り立つ.

証明. $M := \max_{x\in\overline{\Omega}}|u(x)|$ とおく. もし $|u(x)| = M$ を満たす $x \in \Omega$ が存在しないならば $|u(x)| = M$ を満たす $x \in \partial\Omega$ が存在するので (11.117) が成り立つ. よって $|u(x_0)| = M$ を満たす $x_0 \in \Omega$ が存在するとして (11.117) が成り立つことを示せばよい. x_0 を含む Ω の連結成分を U とおく. このとき命題 11.43 の (4) より U は連結開集合であり, u は U 上で調和関数であるから強最大値の原理 (定理 11.42) より $|u(x)| = M$ $(\forall x \in U)$ が成り立つ. よって U の $\mathbb{R}^N$ における閉包を $\overline{U} \subseteq \overline{\Omega}$ とおくと, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ の連続性より $|u(x)| = M$ $(\forall x \in \overline{U})$ が成り立つ. これよりもし $\overline{U} \cap \partial\Omega \neq \varnothing$ ならば (11.117) は成り立つ. そこで今, $\overline{U} \cap \partial\Omega = \varnothing$ であると仮定して矛盾を導く. このとき $\overline{U} \subseteq \Omega$ だから命題 11.43 の (3) より $U = \overline{U}$ であり $U = \overline{U}$ はコンパクトである. $U \subseteq \Omega$ で U はコンパクト, Ω は開集合であるから命題 8.6 の (4) と補題 8.120 より,

$$0 < d(U, \mathbb{R}^N \backslash \Omega) = d(U, \partial\Omega) = \inf\{|x-y| : x \in U, y \in \partial\Omega\} \tag{11.118}$$

である. $U \times \partial\Omega \ni (x, y) \mapsto |x-y| \in [0,\infty)$ はコンパクト空間上の連続関数であるから (11.118) の右辺の inf は実際は min であるので,

$$|a-b| = d(U, \mathbb{R}^N \backslash \Omega) > 0$$

を満たす $a \in U, b \in \partial\Omega$ が存在する.

$$L := \{a + t(b-a) : t \in [0,1)\}$$

とおくと, 任意の $x \in L$ に対し $|a-x| < |a-b| = d(U, \mathbb{R}^N\backslash\Omega)$ であるので $x \in \Omega$ である. よって $L \subseteq \Omega$ であり, L は a を含む連結集合で U は a を含む連結成分であるので $L \subseteq \Omega$ である. これより,

$$b \in \overline{L} \subseteq \overline{U} = U \subseteq \Omega$$

となるが, これは $b \in \partial\Omega$ であることに矛盾する. よって $\overline{U} \cap \partial\Omega \neq \varnothing$ であるので (11.117) が成り立つ. □

定理 11.46 (調和関数に対する Liouville の定理)**.** $\mathbb{R}^N$ 上で定義された有界な調和関数は定数関数である.

証明. $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ を有界な調和関数とする. $x_1 \neq x_2$ なる任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ を取り $u(x_1) = u(x_2)$ を示せばよい.

$$M := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x)| < \infty, \quad d := |x_1 - x_2| > 0$$

とおく. $r > d$ なる任意の正実数 r に対し, 定理 11.41 の (2) より,

$$\begin{aligned}
|u(x_1) - u(x_2)| &= \frac{1}{m(B(0,r))}\left|\int_{B(x_1,r)} u(x)dx - \int_{B(x_2,r)} u(x)dx\right| \\
&\leqslant \frac{1}{r^N m(B(0,1))}\left(\int_{B(x_1,r)\backslash B(x_2,r)} |u(x)|dx + \int_{B(x_2,r)\backslash B(x_1,r)} |u(x)|dx\right) \\
&\leqslant \frac{2M}{r^N m(B(0,1))}(r^N - (r-d)^N)m(B(0,1)) = 2M\left(1 - \left(1 - \frac{d}{r}\right)^N\right)
\end{aligned}$$

であり, $r \to \infty$ とすれば右辺は 0 に収束する. よって $u(x_1) = u(x_2)$ が成り立つ. □

11.5 Poisson 方程式の境界値問題の解の一意存在, Green の表現公式, Newton ポテンシャル

定義 11.47 (Laplace 方程式, Poisson 方程式)**.** $\Delta u = 0$ を満たす関数 u を求める微分方程式を Laplace 方程式と言う. また, 与えられた関数 ρ に対し, $\Delta u = \rho$ を満たす関数 u を求める微分方程式を Poisson 方程式と言う.

定義 11.48 ($C^k(\overline{\Omega})$)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を開集合, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ とする. $C^k(\overline{\Omega})$ を $\overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N$ を含むある開集合上で定義された C^k 級関数の $\overline{\Omega}$ 上への制限全体とする.

定理 11.49 (Laplace 方程式の境界値問題の解の存在と一意性)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を滑らかな境界を持つ有界開集合, $m \in \mathbb{N}$ を $m > \frac{N}{2}$ を満たすものとし, $f : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ を $f \in H^m(\mathbb{R}^N) \subseteq C_0(\mathbb{R}^N)$ *[184] の元の $\partial\Omega$ 上への制限であるとする. また

*[184] Sobolev の埋め込み定理 8.134 を参照.

$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$ をトレース作用素 (定義 8.129) とする．このとき $u \in H^2(\Omega)$ で，

$$\Delta u = 0, \quad \gamma(u) = f$$

を満たすものが唯一つ存在する．そして $u \in H^m(\Omega) \subseteq C(\overline{\Omega})$*185が成り立つ (従って $u|_{\partial\Omega} = \gamma(u) = f|_{\partial\Omega}$ である).

証明. $f : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ の $H^m(\mathbb{R}^N)$ の元への拡張をそのまま f で表す．定理 8.110 より $H^m(\mathbb{R}^N) = \overline{D(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{2,m}}$ であるから $D(\mathbb{R}^N)$ の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{2,m} = 0 \tag{11.119}$$

を満たすものが取れる．Sobolev の埋め込み定理 8.134 より $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に一様収束する．定理 11.35 の (2), (6) より，

$$\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : \gamma(u) = 0\} \to L^2(\Omega) \tag{11.120}$$

は全単射であるから，各 $n \in \mathbb{N}$ について $\Delta v_n = \Delta f_n|_\Omega$ を満たす $v_n \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ が取れる．そして，

$$\Delta^k v_n = \Delta^k f_n|_\Omega \in D(\mathbb{R}^N)|_\Omega \subseteq L^2(\Omega) \quad (\forall n, k \in \mathbb{N})$$

であるから，楕円型正則性 (定理 11.35 の (5)) と Sobolev の埋め込み定理 8.135 より，

$$v_n \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} H^k(\Omega) \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\overline{\Omega}) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ．そこで，

$$u_n := f_n - v_n \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\overline{\Omega}) \subseteq C^\infty(\Omega) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおくと，

$$\Delta u_n = \Delta f_n - \Delta v_n = 0, \quad u_n|_{\partial\Omega} = f_n|_{\partial\Omega} - v_n|_{\partial\Omega} = f_n|_{\partial\Omega} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

*186であるから，弱最大値の原理 11.45 より，

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |u_n(x) - u_k(x)| = \max_{x\in\partial\Omega} |u_n(x) - u_k(x)| = \max_{x\in\partial\Omega} |f_n(x) - f_k(x)| \quad (\forall n, k \in \mathbb{N})$$

であり，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に一様収束するので，$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はある連続関数 $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ に一様収束する．よって，

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (\forall x \in \partial\Omega)$$

が成り立ち，$\{y \in \mathbb{R}^N : |y - x| \leqslant r\} \subseteq \Omega$ なる任意の $x \in \Omega, r \in (0, \infty)$ に対し定理 11.41 の (1) より，

$$S(u, x, r) = \lim_{n\to\infty} S(u_n, x, r) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$$

となるので，定理 11.41 の (1) より u は Ω 上で $\Delta u = 0$ を満たす．今，$u \in H^m(\Omega)$ が成り立つことを示す．

$$v_n - v_k \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \Delta(v_n - v_k) = \Delta(f_n - f_k)|_\Omega \quad (\forall n, k \in \mathbb{N})$$

であるから，定理 11.35 の (5) より Ω, m のみによる正実数 C, C' が存在して，

$$\|v_n - v_k\|_{2,m} \leqslant C(\|\Delta(f_n - f_k)\|_{2,m-2} + \|v_n - v_k\|_2) \leqslant C'(\|f_n - f_k\|_{2,m} + \|v_n - v_k\|_\infty) \quad (\forall n, k \in \mathbb{N}) \tag{11.121}$$

が成り立つ．ここで $v_n = f_n - u_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であり，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はそれぞれ一様収束するので $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も一様収束する．よって (11.121) と (11.119) より $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $H^m(\Omega)$ において収束する．そして，

$$\|u_n - u_k\|_{2,m} \leqslant \|v_n - v_k\|_{2,m} + \|f_n - f_k\|_{2,m} \quad (\forall n, k \in \mathbb{N})$$

*185 Sobolev の埋め込み定理 8.135 を参照.

*186 $v_n \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ より $v_n|_{\partial\Omega} = \gamma(v_n) = 0$ であることに注意.

であるから $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も $H^m(\Omega)$ において収束する．ゆえに $u \in H^m(\Omega)$ である．
一意性を示す．$u_1, u_2 \in H^2(\Omega)$ が,

$$\Delta u_k = 0,\ \ \gamma(u_k) = f\ \ (k = 1, 2)$$

を満たすとする．このとき,

$$u_1 - u_2 \in \{u \in H^2(\Omega) : \gamma(u) = 0\}$$

であり, $\Delta(u_1 - u_2) = 0$ であるから, (11.120) の単射性より $u_1 = u_2$ である．□

定理 11.50 (Poisson 方程式の境界値問題の解の存在と一意性)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を滑らかな境界を持つ有界開集合, $m \in \mathbb{N}$ を $m > \frac{N}{2}$ を満たすものとし, $f : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ を $H^m(\mathbb{R}^N) \subseteq C_0(\mathbb{R}^N)$ の元の $\partial\Omega$ 上への制限であるとする．また $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$ をトレース作用素 (定義 8.129) とする．このとき任意の $m' \in \mathbb{Z}_+$, $\rho \in H^{m'}(\Omega)$ に対し, $u \in H^2(\Omega)$ で,

$$\Delta u = \rho,\ \ \gamma(u) = f$$

を満たすものが唯一つ存在する．そして $m'' := \min\{m, m' + 2\}$ に対し $u \in H^{m''}(\Omega) \subseteq C(\overline{\Omega})$ が成り立つ (従って $u|_{\partial\Omega} = \gamma(u) = f|_{\partial\Omega}$ である).

証明. 定理 11.49 より $u_0 \in H^m(\Omega)$ で,

$$\Delta u_0 = 0,\ \ u_0|_{\partial\Omega} = \gamma(u_0) = f$$

を満たすものが取れる．そして定理 11.35 の (2), (6) より,

$$\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : \gamma(u) = 0\} \to L^2(\Omega) \tag{11.122}$$

は全単射であるから $\rho \in H^{m'}(\Omega)$ に対し $\Delta u_1 = \rho$ を満たす $u_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ が取れて, 楕円型正則性 (定理 11.35 の (5)) より $u_1 \in H^{m'+2}(\Omega)$ である．よって $u := u_0 + u_1 \in H^{m''}(\Omega)$ とおけば,

$$\Delta u = \Delta u_1 = \rho,\ \ u|_{\partial\Omega} = \gamma(u) = \gamma(u_0) = f$$

が成り立つ．一意性を示す．$v_1, v_2 \in H^2(\Omega)$ が,

$$\Delta v_k = \rho,\ \ \gamma(v_k) = f\ \ (k = 1, 2)$$

を満たすならば,

$$v_1 - v_2 \in \{u \in H^2(\Omega) : \gamma(u) = 0\}$$

であり, $\Delta(v_1 - v_2) = 0$ であるから, (11.122) の単射性より $v_1 = v_2$ である．□

定義 11.51 (Laplacian の基本解)**.** N を 2 以上の自然数とし, $S_{N-1} \subseteq \mathbb{R}^N$ を $N-1$ 次元単位球面 (定義 6.95), $\mu_{S_{N-1}}$ を S_{N-1} の面積測度 (定義 6.85) とする．$\mathbb{R}^N$ 上の関数 $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ を, $N \geqslant 3$ の場合,

$$G(x) = \frac{1}{\mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})}\frac{|x|^{2-N}}{2-N}\ \ (\forall x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}),$$

$N = 2$ の場合,

$$G(x) = \frac{1}{\mu_{S_1}(S_1)}\log(|x|) = \frac{1}{2\pi}\log(|x|)\ \ (\forall x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\})$$

として定義する．G を $\mathbb{R}^N$ 上の Laplacian の基本解と言う．$G(x)$ を $G(|x|)$ とも表す．

命題 11.52 (Laplacian の基本解の基本性質)**.** $\mathbb{R}^N$ 上の Laplacian の基本解 G (定義 11.51) に対し次が成り立つ．

(1) G の勾配は,

$$\nabla G(x) = \frac{1}{\mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})}\frac{x}{|x|^N}\ \ (\forall x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\})$$

を満たし, G の Laplacian は,

$$\Delta G(x) = 0\ \ (\forall x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\})$$

を満たす．

(2) $G, |\nabla G| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ であり,

$$\int_{|x|\leqslant R} |\nabla G(x)|dx = R \quad (\forall R \in (0,\infty))$$

が成り立つ.

証明. (1) G は $0 \in \mathbb{R}^N$ 中心の極座標 (定義 6.98) $(r, \theta_1, \cdots, \theta_{N-1})$ の r のみによることと, 極座標は直交座標である (命題 6.97 の (3)) ことに注意して, 命題 6.71 より,

$$\nabla G(x) = \frac{\partial}{\partial r}G(r)\frac{\partial}{\partial r}x = \frac{1}{\mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})}\frac{1}{r^{N-1}}\frac{x}{r} = \frac{1}{\mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})}\frac{x}{|x|^N} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\})$$

であり, 定理 6.78 より,

$$\Delta G(x) = \frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}\frac{\partial}{\partial r}G\right)(x) = \frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}\frac{1}{\mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})}\frac{1}{r^{N-1}}\right)(x) = 0$$

である.

(2) $G, |\nabla G|$ は $\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ 上で連続だから, $G, |\nabla G|$ が $\mathbb{R}^N$ 上の局所可積分関数であることを示すには, $0 \in \mathbb{R}^N$ を中心とする任意の球 $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant R\}$ 上で $G, |\nabla G|$ が可積分であることを示せば十分である. 極座標変換 (定理 6.99) より,

$$\int_{|x|\leqslant R} |G(x)|dx = \mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})\int_0^R r^{N-1}|G(r)|dr = \begin{cases} \frac{1}{N-2}\int_0^R rdr < \infty & (N \geqslant 3) \\ \int_0^R |r\log(r)|dr < \infty & (N = 2) \end{cases}$$

であり,

$$\int_{|x|\leqslant R} |\nabla G(x)|dx = \mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})\int_0^R r^{N-1}|\nabla G(r)|dr = \int_0^R r^{N-1}\frac{1}{r^{N-1}}dr = R < \infty$$

である.

□

定理 11.53 (Green の表現公式)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を滑らかな境界を持つ有界開集合, G を $\mathbb{R}^N$ 上の Laplacian の基本解 (定義 11.51), $u \in C^2(\overline{\Omega})$ する. このとき任意の $x \in \Omega$ に対し,

$$u(x) = \int_\Omega \Delta(y)G(x-y)dy + \int_{\partial\Omega}\left(u(y)\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)G(x-y)\right)d\mu_{\partial\Omega}(y) \tag{11.123}$$

が成り立つ. ただし $\frac{\partial}{\partial \nu}$ は Ω の境界 $\partial\Omega$ 上の外向き法線微分 (定義 11.18) である.

証明. 任意の $x \in \Omega$ を取り固定する. 十分小さい $\varepsilon \in (0,\infty)$ を取り,

$$CB(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y-x| \leqslant \varepsilon\} \subseteq \Omega$$

となるようにする. このとき $\Omega\backslash CB(x,\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 $\partial\Omega \cup \partial B(x,\varepsilon)$ を持つ開集合であり, その境界上の外向き単位法線ベクトル場 (定義 6.116) $\tilde{\nu} : \partial\Omega \cup \partial B(x,\varepsilon) \to \mathbb{R}^N$ は, Ω の境界上の外向き単位法線ベクトル場 $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^N$ に対し,

$$\tilde{\nu}(y) = \nu(y) \quad (\forall y \in \partial\Omega), \quad \tilde{\nu}(y) = -\frac{y-x}{\varepsilon}$$

である.*[187] 命題 11.52 の (1) より任意の $y \in \partial B(x,\varepsilon)$ に対し,

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \tilde{\nu}_y}(x-y) &= -\frac{y-x}{\varepsilon}\cdot\nabla_y G(x-y) = -\frac{1}{\mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})}\frac{y-x}{\varepsilon}\cdot\frac{y-x}{\varepsilon^N} \\ &= -\frac{1}{\mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})}\frac{1}{\varepsilon^{N-1}} = -\frac{1}{\mu_{\partial B(x,\varepsilon)}(\partial B(x,\varepsilon))}\end{aligned}$$

*[187] $\partial B(x,\varepsilon)$ 上の外向き単位法線ベクトル場はレベル多様体上の単位法線ベクトル場の表現定理 6.117 を参照.

であることと, $\Omega\backslash CB(x,\varepsilon) \ni y \mapsto G(x-y) \in \mathbb{R}$ は調和関数であることに注意して, Gauss の発散定理 (定理 11.19 の (4)) を用いると,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\backslash CB(x,\varepsilon)} \Delta u(y)G(x-y)dy &= \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)G(x-y) - u(y)\frac{\partial G}{\partial\nu_y}(x-y)\right)d\mu_{\partial B(x,\varepsilon)}(y)\\ &\quad - \int_{\partial B(x,\varepsilon)}\left(\nabla u(y)\cdot\frac{y-x}{\varepsilon}\right)G(x-y)d\mu_{\partial B(x,\varepsilon)}(y)\\ &\quad + \frac{1}{\mu_{\partial B(x,\varepsilon)}(\partial B(x,\varepsilon))}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)d\mu_{\partial B(x,\varepsilon)}(y)\end{aligned} \tag{11.124}$$

となる. ここで命題 11.52 の (2) より $G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ であるから, Lebesgue 優収束定理より,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\Omega\backslash CB(x,\varepsilon)} \Delta u(y)G(x-y)dy = \int_{\Omega}\Delta u(y)G(x-y)dy \tag{11.125}$$

が成り立ち, 命題 11.38 の (1) より,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\mu_{\partial B(x,\varepsilon)}(\partial B(x,\varepsilon))}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)d\mu_{\partial B(x,\varepsilon)}(y) = u(x) \tag{11.126}$$

が成り立つ. そして,

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\partial B(x,\varepsilon)}\left(\nabla u(y)\cdot\frac{y-x}{\varepsilon}\right)G(x-y)d\mu_{\partial B(x,\varepsilon)}(y)\right|\\ &\leqslant \max_{x\in\overline{\Omega}}|\nabla u(x)|\begin{cases}\frac{1}{\mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})}\int_{\partial B(x,\varepsilon)}\frac{\varepsilon^{2-N}}{N-2}d\mu_{\partial B(x,\varepsilon)}(y) & (N\geqslant 3)\\ \frac{1}{\mu_{S_1}(S_1)}\int_{\partial B(x,\varepsilon)}|\log(\varepsilon)|d\mu_{\partial B(x,\varepsilon)}(x) & (N=2)\end{cases}\\ &= \max_{x\in\overline{\Omega}}|\nabla u(x)|\begin{cases}\frac{\varepsilon}{N-2} & (N\geqslant 3)\\ \varepsilon|\log(\varepsilon)| & (N=2)\end{cases}\\ &\to 0\quad(\varepsilon\to+0)\end{aligned} \tag{11.127}$$

である. よって (11.124) の両辺について $\varepsilon\to+0$ とすれば, (11.125), (11.126), (11.127) より,

$$\int_{\Omega}\Delta u(y)G(x-y)dy = \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)G(x-y) - u(y)\frac{\partial G}{\partial\nu_y}(x-y)\right)d\mu_{\partial B(x,\varepsilon)}(y) + u(x)$$

となる. これより (11.123) が成り立つ. □

命題 11.54. $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ を滑らかな境界を持つ有界開集合, $\gamma : H^1(\Omega)\to L^2(\partial\Omega,\mu_{\partial\Omega})$ をトレース作用素 (定義 8.129), G を $\mathbb{R}^N$ 上の Laplacian の基本解 (定義 11.51) とする. このとき任意の $x\in\Omega$ に対し $h_x\in H^2(\Omega)$ で,

$$\Delta h_x = 0,\quad \gamma(h_x)(y) = G(x-y)\quad(\forall y\in\partial\Omega) \tag{11.128}$$

を満たすものが唯一つ存在する. そして,

$$h_x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} H^m(\Omega) \subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C^m(\overline{\Omega}) \tag{11.129}$$

(従って特に $h_x(y) = G(x-y)$ $(\forall y\in\partial\Omega)$) が成り立ち, 任意の $u\in C^2(\overline{\Omega})$ に対し,

$$\int_{\Omega}\Delta u(y)h_x(y)dy = \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)G(x-y) - u(y)\frac{\partial h_x}{\partial\nu}(y)\right)d\mu_{\partial\Omega}(y) \tag{11.130}$$

(ただし $\frac{\partial}{\partial\nu}$ は外向き法線微分 (定義 11.18)) が成り立つ.

証明. 任意の $x \in \Omega$ に対し, $\partial\Omega \ni y \mapsto G(x-y) \in \mathbb{R}$ は Urysohn の補題 6.43 より $D(\mathbb{R}^N) \subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N}} H^m(\mathbb{R}^N)$ の元に拡張できるので, 定理 11.49 より (11.128) を満たす $h_x \in H^2(\Omega)$ が唯一つ存在し, (11.129) が成り立つ. 任意の $u \in C^2(\overline{\Omega})$ に対し, Gauss の発散定理 (定理 11.19 の (4)) より,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta u(y)h_x(y)dy &= \int_\Omega (\Delta u(y)h_x(y) - u(y)\Delta h_x(y))dy = \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)h_x(y) - u(y)\frac{\partial h_x}{\partial\nu}(y)\right)d\mu_{\partial\Omega}(y)\\ &= \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)G(x-y) - u(y)\frac{\partial h_x}{\partial\nu}(y)\right)d\mu_{\partial\Omega}(y)\end{aligned}$$

であるから (11.130) が成り立つ. □

定義 11.55 (滑らかな境界を持つ有界開集合における Laplacian の Green 関数)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を滑らかな境界を持つ有界開集合, G を $\mathbb{R}^N$ 上の Laplacian の基本解 (定義 11.51) とする. 任意の $x \in \Omega$ に対し (11.128) によって一意的に定まる $h_x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} H^m(\Omega) \subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C^m(\Omega)$ を考え,

$$G_\Omega(x,y) := G(x-y) - h_x(y) \quad (\forall y \in \overline{\Omega})$$

とおく. $G_\Omega(x,y)$ を Ω における Laplacian の Green 関数と言う.

定理 11.56 (Poisson 方程式の境界値問題の一意解の Green 関数による表現)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を滑らかな境界を持つ有界開集合, $m \in \mathbb{N}$ を $m > \frac{N}{2} + 2$ を満たすものとし, $f : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ を $H^m(\mathbb{R}^N)$ の元の $\partial\Omega$ 上への制限, また $\rho \in H^{m-2}(\Omega)$ とする. このとき Poisson 方程式の境界値問題

$$u \in H^2(\Omega), \quad \Delta u = \rho, \quad \gamma(u) = f$$

の一意解 (定理 11.50) $u \in H^m(\Omega)$ は, Ω 上の Laplacian の Green 関数 $G_\Omega(x,y)$ $(x \in \Omega, y \in \overline{\Omega})$ を用いて,

$$u(x) = \int_\Omega \rho(y)G_\Omega(x,y)dy + \int_{\partial\Omega} f(y)\frac{\partial G_\Omega}{\partial\nu_y}(x,y)d\mu_{\partial\Omega}(y) \quad (\forall x \in \Omega)$$

と表される.

証明. Sobolev の埋め込み定理 8.135 より $u \in H^m(\Omega) \subseteq C^2(\overline{\Omega})$ であるから, Green の表現公式 (定理 11.53) より, 任意の $x \in \Omega$ に対し,

$$u(x) = \int_\Omega \rho(y)G(x-y)dy + \int_{\partial\Omega}\left(f(y)\frac{\partial G}{\partial\nu_y}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial\nu}(y)G(x-y)\right)d\mu_{\partial\Omega}(y) \tag{11.131}$$

($\Delta u = \rho, u|_{\partial\Omega} = f$ に注意) が成り立つ. また命題 11.54 より,

$$0 = -\int_\Omega \rho(y)h_x(y)dy + \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)G(x-y) - f(y)\frac{\partial h_x}{\partial\nu}(y)\right)d\mu_{\partial\Omega}(y) \tag{11.132}$$

であるから, (11.131) と (11.132) を足せば,

$$u(x) = \int_\Omega \rho(y)G_\Omega(x,y)dy + \int_{\partial\Omega} f(y)\frac{\partial G_\Omega}{\partial\nu_y}(x,y)d\mu_{\partial\Omega}(y)$$

を得る. □

定理 11.57 (Laplacian の基本解の本義)**.** G を $\mathbb{R}^N$ 上の Laplacian の基本解 (定義 11.51) とし, δ_0 を $\{0\}$ を台とする Dirac のデルタ超関数 (定義 8.77) とする. このとき,

(1) $G \in D'(\mathbb{R}^N)$ として $\Delta G = \delta_0$ が成り立つ.
(2) 任意の $v \in \mathcal{E}'_N$[*188]に対し $(2\pi)^{\frac{N}{2}}\Delta(v * G) = v$ が成り立つ[*189].

---

*188 $\mathcal{E}'_N$ は台がコンパクトな超関数全体 (定義 8.74) である.
*189 $\mathcal{E}'_N$ の元と $D'(\mathbb{R}^N)$ の元の合成積の定義 8.96 を参照.

証明.　(1) 任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ に対し, $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq B(0,R) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ を満たす $R \in (0,\infty)$ を取れば, Green の表現公式 (定理 11.53) より,

$$\begin{aligned}\delta_0(\varphi) = \varphi(0) &= \int_{B(0,R)} G(y)\Delta\varphi(y)dy + \int_{\partial B(0,R)} \left(\varphi(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(y)G(y)\right) d\mu_{\partial B(0,R)}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} G(y)\Delta\varphi(y)dy = \Delta G(\varphi)\end{aligned}$$

となる. よって $\Delta G = \delta_0$ が成り立つ.

(2) (1) と定理 8.100 の (4) と命題 8.98 より,

$$\Delta(v * G) = v * \Delta G = v * \delta_0 = \delta_0 * v = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} v.$$

□

定義 11.58 (Newton ポテンシャル)**.** G を $\mathbb{R}^N$ 上の Laplacian の基本解 (定義 11.51), $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ を $\mathrm{supp}(\rho)$ がコンパクトであるものとする. 命題 11.52 の (2) より $G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ だから任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対し $\mathbb{R}^N \ni y \mapsto \rho(y)G(x-y) \in \mathbb{C}$ は可積分である. よって $\mathbb{R}^N$ 上の関数

$$u : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} \rho(y)G(x-y)dy \in \mathbb{C}$$

が定義できる. u を ρ を密度関数とする Newton ポテンシャルと言う.

定理 11.59 (Newton ポテンシャルと Poisson 方程式)**.** G を $\mathbb{R}^N$ 上の Laplacian の基本解 (定義 11.51), $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ を $\mathrm{supp}(\rho)$ がコンパクトであるものとする. そして $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ を ρ を密度関数とする Newton ポテンシャルとする. このとき,

(1) $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ であり,

$$\nabla u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(y)\nabla G(x-y)dy \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N) \tag{11.133}$$

が成り立つ.

(2) $N \geqslant 3$ の場合, $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ が成り立つ.

(3) $\Delta u = \rho$ が成り立つ. そして $N \geqslant 3$ の場合, $\Delta w = \rho$ を満たす任意の有界連続関数 $w : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ に対し $u - w$ は定数関数である.

証明.　(1)

$$v(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \rho(y)\nabla G(x-y)dy \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

とおく. まず $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}^N$ が連続であることを示す. 任意の $a \in \mathbb{R}^N$ を取り a において v が連続であることを示せばよい. 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ を取り, $B(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x-a| < \varepsilon\}$,

$$\begin{aligned}v_1(x) &:= \int_{B(a,\varepsilon)} u(y)\nabla G(x-y)dy, \\ v_2(x) &:= \int_{\mathrm{supp}(u)\setminus B(a,\varepsilon)} u(y)\nabla G(x-y)dy \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)\end{aligned} \tag{11.134}$$

とおく. $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^N)$ である. 任意の $x \in B(a,\varepsilon)$ に対し, 変数変換公式 (定理 5.229) と命題 11.52 の (2) より,

$$|v_1(x)| \leqslant \|\rho\|_\infty \int_{B(a,\varepsilon)} |\nabla G(x-y)|dy \leqslant \|\rho\|_\infty \int_{B(0,2\varepsilon)} |\nabla G(y)|dy = 2\|\rho\|_\infty \varepsilon, \tag{11.135}$$

であり,

$$|v_1(a)| \leqslant \|\rho\|_\infty \int_{B(a,\varepsilon)} |\nabla G(a-y)|dy = \|\rho\|_\infty \int_{B(0,\varepsilon)} |\nabla G(y)|dy = \|\rho\|_\infty \varepsilon$$

であるから,

$$|v_1(x) - v_1(a)| \leqslant |v_1(x)| + |v_1(a)| \leqslant 3\|\rho\|_\infty \quad (\forall x \in B(a,\varepsilon))$$

となる. また Lebesgue 優収束定理より $B(a,\varepsilon) \ni x \mapsto v_2(y) \in \mathbb{C}^N$ は連続であるので, 十分小さい $\delta \in (0,\varepsilon)$ を取れば,

$$|v_2(x) - v_2(a)| < \varepsilon \quad (\forall x \in B(a,\delta))$$

となる. よって任意の $x \in B(a,\delta)$ に対し,

$$|v(x) - v(a)| \leqslant |v_1(x) - v_1(a)| + |v_2(x) - v_2(a)| \leqslant (3\|\rho\|_\infty + 1)\varepsilon$$

となり, $\varepsilon \in (0,\infty)$ は任意なので, $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}^N$ は連続である.
次に u が $a \in \mathbb{R}^N$ において微分可能であることと, $\nabla u(a) = v(a)$ が成り立つことを示す. 再び任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ を取り,

$$\begin{aligned}
u_1(x) &:= \int_{B(a,\varepsilon)} u(y)G(x-y)dy, \\
u_2(x) &:= \int_{\mathrm{supp}(u)\setminus B(a,\varepsilon)} u(y)G(x-y)dy \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)
\end{aligned}$$

とおく. $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^N)$ である. $0 < |h| < \varepsilon$ なる任意の $h \in \mathbb{R}^N$ に対し, 線分

$$L = \{a + \theta h : \theta \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{R}^N$$

の Lebesgue 測度が 0 であることに注意して微積分学の基本定理 5.206 を用いると,

$$\begin{aligned}
u_1(a+h) - u_1(a) &= \int_{B(a,\varepsilon)\setminus L} u(y)(G(a+h-y) - G(a-y))dy \\
&= h \cdot \int_{B(a,\varepsilon)\setminus L} u(y)\left(\int_0^1 \nabla G(a+\theta h - y)d\theta\right)dy
\end{aligned}$$

となる. よって (11.134) の v_1 に対し Fubini の定理 5.85 より,

$$\begin{aligned}
u_1(a+h) - u_1(a) - h\cdot v_1(a) &= h \cdot \int_{B(a,\varepsilon)} u(y)\left(\int_0^1 \nabla G(a+\theta h - y) - \nabla G(a-y)d\theta\right)dy \\
&= h \cdot \int_0^1 \left(\int_{B(a,\varepsilon)} \nabla G(a+\theta h - y) - \nabla G(a-y)dy\right)d\theta
\end{aligned}$$

となるので, (11.135) と同様の評価により,

$$\frac{|u_1(a+h) - u_1(a) - h\cdot v_1(a)|}{|h|} \leqslant 3\|\rho\|_\infty \varepsilon \quad (\forall h \in \mathbb{R}^N : 0 < |h| < \varepsilon)$$

を得る. また Lebesgue 優収束定理より $B(a,\varepsilon) \ni x \mapsto u_2(x) \in \mathbb{C}$ は微分可能であり, (11.134) の v_2 に対し,

$$\nabla u_2(x) = v_2(x) \quad (\forall x \in B(a,\varepsilon))$$

であるから, 十分小さい $\delta \in (0,\varepsilon)$ を取れば,

$$\frac{|u_2(a+h) - u_2(a) - h\cdot v_2(a)|}{|h|} < \varepsilon \quad (\forall h \in \mathbb{R}^N : 0 < |h| < \delta)$$

となる. よって

$$\frac{|u(a+h) - u(a) - h\cdot v(a)|}{|h|} < (3\|\rho\|_\infty + 1)\varepsilon \quad (\forall h \in \mathbb{R}^N : 0 < |h| < \delta)$$

が成り立つ. $\varepsilon \in (0,\infty)$ は任意なので u は a において微分可能であり $\nabla u(a) = v(a)$ が成り立つ. $a \in \mathbb{R}^N$ は任意なので (11.133) が成り立ち, 前段より $v = \nabla u$ は連続だから $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ が成り立つ.

(2) Laplacian の基本解 G の定義 11.51 より $N \geqslant 3$ の場合,

$$u(x) = \frac{1}{\mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})}\frac{1}{2-N}\int_{\mathbb{R}^N}\rho(y)\frac{1}{|x-y|^{N-2}}dy \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

であるから, $\mathrm{supp}(\rho) \subseteq \{y \in \mathbb{R}^N : |y| \leqslant R\}$ なる $R \in (0,\infty)$ と $|x| > R$ なる任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$|u(x)| \leqslant \|\rho\|_\infty \frac{1}{\mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})}\frac{1}{N-2}\int_{\mathrm{supp}(\rho)}\frac{1}{(|x|-R)^{N-2}}dy$$

となる. よって $\lim_{|x|\to\infty}|u(x)| = 0$ が成り立つ.

(3) $\rho \in \mathcal{E}'_N$ (台がコンパクトな超関数 (定義 8.74)) であり, 任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ に対し, Fubini の定理 5.85 より,

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\rho(y)G(x-y)dy\right)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\rho(x-y)G(y)\varphi(x)dy\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\rho_{-1}(y-x)dx\right)G(y)dy = (2\pi)^{\frac{N}{2}}G(\varphi * \rho_{-1}*) = (2\pi)^{\frac{N}{2}}(\rho * G)(\varphi) \end{aligned}$$

(台がコンパクトな超関数と超関数の合成積の定義 8.96 を参照) であるから,

$$u = (2\pi)^{\frac{N}{2}}(\rho * G)$$

が成り立つ. よって定理 11.57 の (2) より,

$$\Delta u = \rho$$

が成り立つ. $w : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ が有界連続関数で $\Delta w = \rho$ を満たすとする. (1) より $u - w : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ は連続関数であり $\Delta(u-w) = \rho - \rho = 0$ であるから, 定理 11.41 の (4) より $u - w$ は調和関数である. $N \geqslant 3$ の場合 (2) より $u - w$ は $\mathbb{R}^N$ 上の有界調和関数であるから, Liouville の定理 11.46 より $u - w$ は定数関数である.

□

11.6 境界条件込みの波動方程式の初期値問題の一意解

定義 11.60 (Laplacian の設定)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ を,

全空間 : $\Omega = \mathbb{R}^N$.
内部領域 : Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界開集合.
外部領域 : Ω は滑らかでコンパクトな境界 $\partial\Omega$ を持つ開集合で, $\mathbb{R}^N\backslash\Omega$ は有界.

のうちのいずれかとし, $\partial\Omega$ は互いに交わらないコンパクト集合 $\partial\Omega_{\mathrm{d}}$ と $\partial\Omega_{\mathrm{n}}$ (どちらかが空であってもよい) であるとする. そして定理 11.29 の (4), 定理 11.35 の (6) により Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の非負自己共役作用素としての Laplacian

$$D(-\Delta) := \left\{u \in H^2(\Omega) : \gamma(u)|_{\partial\Omega_{\mathrm{d}}} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega_{\mathrm{n}}} = 0\right\},$$

$$-\Delta : D(-\Delta) \ni u \mapsto -\Delta u \in L^2(\Omega)$$

*190 を考える. 定理 11.29 の (2), 定理 11.35 の (4) より,

$$D(\sqrt{-\Delta}) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma(u)|_{\partial\Omega_{\mathrm{d}}} = 0\}$$

*191であり,

$$(\sqrt{-\Delta}u \mid \sqrt{-\Delta}v)_2 = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\overline{v}(x)dx = (u \mid v)_{2,1} - (u \mid v)_2 \quad (\forall u, v \in D(\sqrt{-\Delta})) \tag{11.136}$$

が成り立つ. Ω が内部領域である場合は定理 11.35 の (3) より, Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の自己共役作用素 $-\Delta$ のスペクトルは純粋に離散的 (定義 10.125) である.

*190 ただし, $\Omega = \mathbb{R}^N$ の場合は $D(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^N)$ であり, 内部領域, 外部領域の場合は $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \mu_{\partial\Omega})$ はトレース作用素 (定義 8.129), $\frac{\partial}{\partial\nu}$ を Ω の境界 $\partial\Omega$ 上の外向き法線微分 (定義 11.18) を表す.

*191 ただし $\Omega = \mathbb{R}^N$ の場合は $D(\sqrt{-\Delta}) = H^1(\mathbb{R}^N)$.

定理 11.61 (波動方程式の初期値問題の一意解). $-\Delta : D(-\Delta) \to L^2(\Omega)$ を定義 11.60 における Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の非負自己共役作用素とする. $I \subseteq \mathbb{R}$ を 0 を含む区間とし, $f(t) : I \to D(\sqrt{-\Delta})$ を $H^1(\Omega)$ のノルムで連続な関数とする. そして c を正実数, $u \in D(-\Delta), v \in D(\sqrt{-\Delta})$ とする. このとき, 次を満たす $u(t) : I \to D(-\Delta)$ が唯一つ存在する.

(1) $u(t) : I \to D(-\Delta)$ は $L^2(\Omega)$ のノルムで C^2 級, $H^1(\Omega)$ のノルムで C^1 級.
(2) $\frac{du}{dt}(t) \in D(\sqrt{-\Delta})$ $(\forall t \in I)$.
(3) $\frac{d^2u}{dt^2}(t) = c^2\Delta u(t) + f(t)$ $(\forall t \in I)$.
(4) $u(0) = u$, $\frac{du}{dt}(0) = v$.

そしてこれは,

$$\frac{c^2}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_2^2 = \frac{c^2}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|v\|_2^2 + \int_0^t \mathrm{Re}\left(f(s) \mid \frac{du}{dt}(s)\right)_2 ds \quad (\forall t \in I) \tag{11.137}$$

を満たし,

$$u(t) = \cos(ct\sqrt{-\Delta})u + \frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}v + \int_0^t \frac{\sin(c(t-s)\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}f(s)ds \quad (\forall t \in I) \tag{11.138}$$

によって表される. ただし $\cos(ct\sqrt{-\Delta})$, $\frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}$ は Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ 上の非負自己共役作用素 $-\Delta$ に関する Borel 関数カルキュラス (定義 10.65) である. すなわち, $-\Delta$ のスペクトル測度 (10.63) を $E : \mathcal{B}_{\sigma(-\Delta)} \to \mathcal{P}(L^2(\Omega))$ として,

$$\cos(ct\sqrt{-\Delta}) = \int_{\sigma(-\Delta)} \cos(ct\sqrt{\lambda})dE(\lambda), \quad \frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}} = \int_{\sigma(-\Delta)} \frac{\sin(ct\sqrt{\lambda})}{c\sqrt{\lambda}}dE(\lambda) \quad (\forall t \in I)$$

である (射影値測度による積分の定義とその基本的性質については定義 10.52 と命題 10.53 を参照).

証明.

- $u(t) : I \to D(-\Delta)$ が (1) ~ (4) を満たすとき, (11.137) が成り立つことを示す. まず (1), (2) より,

$$\left\|\frac{1}{h}(\nabla u(t+h) - \nabla u(t)) - \nabla\frac{du}{dt}(t)\right\|_2^2 \leqslant \left\|\frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) - \frac{du}{dt}(t)\right\|_{2,1}^2 \to 0 \quad (h \to 0)$$

であるから,

$$\frac{d}{dt}\nabla u(t) = \nabla\frac{du}{dt}(t) \quad (\forall t \in I)$$

が成り立つ. これと (11.136) より,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2\right) &= \mathrm{Re}\left(\nabla u(t) \mid \frac{d}{dt}\nabla u(t)\right)_2 = \mathrm{Re}\left(\nabla u(t) \mid \nabla\frac{du}{dt}(t)\right)_2 \\ &= \mathrm{Re}\left(\sqrt{-\Delta}u(t) \mid \sqrt{-\Delta}\frac{du}{dt}(t)\right)_2 = \mathrm{Re}\left(-\Delta u(t) \mid \frac{du}{dt}(t)\right)_2 \quad (\forall t \in I)\end{aligned}$$

だから, (3) より,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_2^2\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{d^2u}{dt^2}(t) \mid \frac{du}{dt}(t)\right)_2 = -c^2\mathrm{Re}\left(-\Delta u(t) \mid \frac{du}{dt}(t)\right)_2 + \mathrm{Re}\left(f(t) \mid \frac{du}{dt}(t)\right)_2 \\ &= -c^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2\right) + \mathrm{Re}\left(f(t) \mid \frac{du}{dt}(t)\right)_2 \quad (\forall t \in I)\end{aligned}$$

となる. よって,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{c^2}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_2^2\right) = \mathrm{Re}\left(f(t) \mid \frac{du}{dt}(t)\right)_2 \quad (\forall t \in I)$$

が成り立つので, これを積分すれば (4) より (11.137) を得る.

- 次に (1) ~ (4) を満たす $u(t) : I \to D(-\Delta)$ の一意性を示す. $u_1, u_2 : I \to D(-\Delta)$ が共に (1) ~ (4) を満たすとすると,

$$u(t) : I \ni t \mapsto u_1(t) - u_2(t) \in D(-\Delta)$$

は $u=0, v=0, f(t)=0\ (\forall t\in I)$ とした場合の (1) ∼ (4) を満たす. よって前段の結果から,

$$\frac{c^2}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_2^2=0\ \ (\forall t\in I)$$

が成り立つので, 特に,

$$\frac{du}{dt}(t)=0\ \ (\forall t\in I)$$

である. よって微積分学の基本定理 5.206 より $u(t)=u(0)=0\ (\forall t\in I)$ だから, $u_1(t)=u_2(t)$ が成り立つ. これで一意性が示せた.

- 後は (11.138) が (1) ∼ (4) を満たすことを示せばよい.[*192] そのために,

$$u_1(t):=\frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}v,\ \ u_2(t):=\cos(ct\sqrt{-\Delta})u,\ \ u_3(t):=\int_0^t\frac{\sin(c(t-s)\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}f(s)ds\ \ (\forall t\in I) \tag{11.139}$$

と分解して考える. $u_1(t)$ について考える. Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{h}(u_1(t+h)-u_1(t))-\cos(ct\sqrt{-\Delta})v\right\|_2^2\\&=\left\|\frac{1}{h}\left(\frac{\sin(c(t+h)\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}v-\frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}\right)v-\cos(ct\sqrt{-\Delta})v\right\|_2^2\\&=\int_{\sigma(-\Delta)}\left|\frac{\sin(c(t+h)\sqrt{\lambda})-\sin(ct\sqrt{\lambda})}{ch\sqrt{\lambda}}-\cos(ct\sqrt{\lambda})\right|^2dE_{v,v}(\lambda)\\&\to 0\ \ (h\to 0,\forall t\in I)\end{aligned} \tag{11.140}$$

であるから,

$$\frac{du_1}{dt}(t)=\cos(ct\sqrt{-\Delta})v\ \ (\forall t\in I \text{ w.r.t. } \|\cdot\|_2) \tag{11.141}$$

である. そして $v\in D(\sqrt{-\Delta})=D_E(\sqrt{\lambda})$ より,

$$\frac{du_1}{dt}(t)=\cos(ct\sqrt{-\Delta})v\in D(\sqrt{-\Delta})$$

であり, Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{h}\left(\frac{du_1}{dt}(t+h)-\frac{du_1}{dt}(t)\right)-(-c\sqrt{-\Delta}\sin(ct\sqrt{-\Delta}))v\right\|_2^2\\&=\left\|\frac{1}{h}\left(\cos(c(t+h)\sqrt{-\Delta})-\cos(ct\sqrt{-\Delta})\right)v-(-c\sqrt{-\Delta}\sin(ct\sqrt{-\Delta}))v\right\|_2^2\\&=\int_{\sigma(-\Delta)}\left|\frac{\cos(c(t+h)\sqrt{\lambda})-\cos(ct\sqrt{\lambda})}{h}-(-c\sqrt{\lambda}\sin(ct\sqrt{-\lambda}))\right|^2dE_{v,v}(\lambda)\\&\to 0\ \ (h\to 0,\forall t\in I).\end{aligned} \tag{11.142}$$

であるから,

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}(t)=-c\sqrt{-\Delta}\sin(ct\sqrt{-\Delta})v=c^2\Delta u_1(t)\ \ (\forall t\in I \text{ w.r.t. } \|\cdot\|_2) \tag{11.143}$$

が成り立つ. さらに Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d^2u_1}{dt^2}(t+h)-\frac{d^2u_1}{dt^2}(t)\right\|_2&=\left\|\sqrt{-\Delta}\sin(c(t+h)\sqrt{-\Delta})v-\sqrt{-\Delta}\sin(ct\sqrt{-\Delta})v\right\|_2^2\\&=\int_{\sigma(-\Delta)}\left|\sqrt{\lambda}\sin(c(t+h)\sqrt{\lambda})-\sqrt{\lambda}\sin(ct\sqrt{\lambda})\right|^2dE_{v,v}(\lambda)\\&\to 0\ \ (h\to 0,\forall t\in I)\end{aligned}$$

[*192] 以後の議論は長くなっているが Lebesgue 優収束定理による単純な議論である.

であるから,

$$I \ni t \mapsto \frac{d^2u_1}{dt^2}(t) \in L^2(\Omega)$$

は $L^2(\Omega)$ のノルムで連続である．ゆえに $u_1(t) : I \to D(-\Delta)$ は $L^2(\Omega)$ のノルムで C^2 級である．また $v \in D(\sqrt{-\Delta}) = D_E(\sqrt{\lambda})$ であることと Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{h}\left(\sqrt{-\Delta}u_1(t+h) - \sqrt{-\Delta}u_1(t)\right) - \sqrt{-\Delta}\cos(ct\sqrt{-\Delta})v \right\|_2^2 \\
&= \left\| \frac{\sin(c(t+h)\sqrt{-\Delta}) - \sin(ct\sqrt{-\Delta})}{ch} v - \sqrt{-\Delta}\cos(ct\sqrt{-\Delta})v \right\|_2^2 \\
&= \int_{\sigma(-\Delta)} \left| \frac{\sin(c(t+h)\sqrt{\lambda}) - \sin(ct\sqrt{\lambda})}{ch} - \sqrt{\lambda}\cos(ct\sqrt{\lambda}) \right|^2 dE_{v,v}(\lambda) \\
&\to 0 \quad (h \to 0, \forall t \in I)
\end{aligned} \tag{11.144}$$

であるから, (11.141) より,

$$\frac{d}{dt}\sqrt{-\Delta}u_1(t) = \sqrt{-\Delta}\cos(ct\sqrt{-\Delta})v = \sqrt{-\Delta}\frac{du_1}{dt}(t) \quad (\forall t \in I \text{ w.r.t. } \|\cdot\|_2) \tag{11.145}$$

が成り立つ．よって (11.136) より $u_1(t) : I \to D(-\Delta)$ は $H^1(\Omega)$ のノルムで微分可能である．そして Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned}
&\left\| \sqrt{-\Delta}\frac{du_1}{dt}(t+h) - \sqrt{-\Delta}\frac{du_1}{dt}(t) \right\|_2^2 \\
&= \left\| \sqrt{-\Delta}\cos(c(t+h)\sqrt{-\Delta})v - \sqrt{-\Delta}\cos(ct\sqrt{-\Delta})v \right\|_2^2 \\
&= \int_{\sigma(-\Delta)} |\sqrt{\lambda}\cos(c(t+h)\sqrt{\lambda}) - \sqrt{\lambda}\cos(ct\sqrt{\lambda})|^2 dE_{v,v}(\lambda) \to 0 \quad (h \to 0)
\end{aligned}$$

であるから,

$$I \ni t \mapsto \sqrt{-\Delta}\frac{du_1}{dt}(t) \in L^2(\Omega)$$

は $L^2(\Omega)$ のノルムで連続なので, (11.136) より $u_1(t) : I \ni t \mapsto D(-\Delta)$ は $H^1(\Omega)$ のノルムで C^1 級である．全く同様にして $u_2(t) : I \ni t \mapsto D(-\Delta)$ が $L^2(\Omega)$ のノルムで C^2 級, $H^1(\Omega)$ のノルムで C^1 級であり,

$$\frac{du_2}{dt}(t) = -c\sqrt{-\Delta}\sin(ct\sqrt{-\Delta})u \in D(\sqrt{-\Delta}), \quad \frac{d^2u_2}{dt^2}(t) = c^2\Delta u_2(t) \quad (\forall t \in I)$$

が成り立つことが分かる．よって,

$$u_1(t) + u_2(t) : I \to D(-\Delta)$$

は $L^2(\Omega)$ のノルムで C^2 級, $H^1(\Omega)$ のノルムで C^1 級であり,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(u_1+u_2)(t) \in D(\sqrt{-\Delta}), \quad \frac{d^2}{dt^2}(u_1+u_2)(t) = c^2\Delta(u_1+u_2)(t) \quad (\forall t \in I), \\
&(u_1+u_2)(0) = u, \quad \frac{d}{dt}(u_1+u_2)(0) = v
\end{aligned} \tag{11.146}$$

が成り立つ．$u_3(t) : I \to L^2(\Omega)$ について考える．(11.136) より $I \ni t \mapsto \sqrt{-\Delta}f(t) \in L^2(\Omega)$ は連続であり, $\sqrt{-\Delta}, -\Delta$ は閉線型作用素であるから,

$$\begin{aligned}
-\Delta u_3(t) &= \int_0^t \frac{1}{c}\sqrt{-\Delta}\sin(c(t-s)\sqrt{-\Delta})f(s)ds \quad (\forall t \in I), \\
\sqrt{-\Delta}u_3(t) &= \int_0^t \frac{1}{c}\sin(c(t-s)\sqrt{-\Delta})f(s)ds \quad (\forall t \in I)
\end{aligned} \tag{11.147}$$

である．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}(u_3(t+h)-u_3(t))\\
&=\int_0^{t+h}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin(c(t+h-s)\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}-\frac{\sin(c(t-s)\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}\right)f(s)ds\\
&+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\frac{\sin(c(t-s)\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}f(s)ds
\end{aligned}$$

であるから，$u_1(t)=\frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}v$ の微分可能性の議論 (11.140) より，

$$\frac{du_3}{dt}(t)=\int_0^t\cos(c(t-s)\sqrt{-\Delta})f(s)ds \quad (\forall t\in I, \text{w.r.t. } \|\cdot\|_2)$$

が成り立つことが分かる．そして，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\left(\frac{du_3}{dt}(t+h)-\frac{du_3}{dt}(t)\right)\\
&=\int_0^{t+h}\frac{1}{h}\left(\cos(c(t+h-s)\sqrt{-\Delta})-\cos(c(t-s)\sqrt{-\Delta})\right)f(s)ds\\
&+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\cos\left(c(t-s)\sqrt{-\Delta}\right)f(s)ds
\end{aligned}$$

であるから，$\frac{du_1}{dt}(t)=\cos(ct\sqrt{-\Delta})v$ の微分可能性の議論 (11.142) と (11.147) の上の式より，

$$\begin{aligned}
\frac{d^2u_3}{dt^2}(t)&=\int_0^t(-c\sqrt{-\Delta})\sin(c(t-s)\sqrt{-\Delta})f(s)ds+f(t)\\
&=\int_0^t c^2\Delta\frac{\sin(c(t-s)\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}f(s)ds+f(t)\\
&=c^2\Delta u_3(t)+f(t) \quad (\forall t\in I, \text{w.r.t. } \|\cdot\|_2)
\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．Lebesgue 優収束定理より，

$$I\ni t\mapsto\frac{d^2u_3}{dt^2}(t)=\int_0^t(-c\sqrt{-\Delta})\sin(c(t-s)\sqrt{-\Delta})f(s)ds+f(t)\in L^2(\Omega)$$

は $L^2(\Omega)$ のノルムにより連続であるので，$u_3(t):I\to D(-\Delta)$ は $L^2(\Omega)$ のノルムで C^2 級である．また (11.147) の下の式より，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}(\sqrt{-\Delta}u_3(t+h)-\sqrt{-\Delta}u_3(t))\\
&=\int_0^{t+h}\frac{\sin(c(t+h-s)\sqrt{-\Delta})-\sin(c(t-s)\sqrt{-\Delta})}{ch}f(s)ds\\
&+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\frac{\sin(c(t-s)\sqrt{-\Delta})}{c}f(s)ds
\end{aligned}$$

であるから $\sqrt{-\Delta}u_1(t)=\sin(ct\sqrt{-\Delta})v$ の微分可能性の議論 (11.144) より，

$$\frac{d}{dt}\sqrt{-\Delta}u_3(t)=\int_0^t\sqrt{-\Delta}\cos(c(t-s)\sqrt{-\Delta})f(s)ds=\sqrt{-\Delta}\frac{du_3}{dt}(t) \quad (\forall t\in I, \text{w.r.t. } \|\cdot\|_2)$$

が成り立つことが分かる．よって (11.136) より $u_3(t):I\to D(-\Delta)$ は $H^1(\Omega)$ のノルムで微分可能である．そして Lebesgue 優収束定理より，

$$I\ni t\mapsto\sqrt{-\Delta}\frac{du_3}{dt}(t)=\int_0^t\sqrt{-\Delta}\cos(c(t-s)\sqrt{-\Delta})f(s)ds\in L^2(\Omega)$$

は $L^2(\Omega)$ のノルムにより連続であるから, (11.136) より $u_3(t):I\to D(-\Delta)$ は $H^1(\Omega)$ のノルムで C^1 級である. 以上より $u_3(t):I\to D(-\Delta)$ は $L^2(\Omega)$ のノルムで C^2 級, $H^1(\Omega)$ のノルムで C^1 級であり,

$$\frac{du_3}{dt}(t)\in D(\sqrt{-\Delta}),\quad \frac{d^2u_3}{dt^2}(t)=c^2\Delta u_3(t)+f(t)\quad (\forall t\in I)$$

が成り立つ. よって (11.146) と合わせて,

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)+u_3(t):I\to D(-\Delta)$$

は (1) ~ (4) を満たす.

□

注意 11.62 (内部領域における Dirichlet-Neumann 境界条件付き Laplacian の対角化と波動方程式の初期値問題の一意解の形)**.** $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ を定義 11.60 における内部領域とし, Dirichlet-Neumann 境界条件付き Laplacian$-\Delta:D(-\Delta)\to L^2(\Omega)$ を考える. このとき $-\Delta$ のスペクトル $\sigma(-\Delta)$ は定理 11.35 の (3) より純粋に離散的 (定義 10.125) である. そこで,

$$\sigma(-\Delta)=\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

とし, 各離散固有値 $\lambda_n\in\sigma(-\Delta)$ の固有空間の CONS を $\{\varphi_{n,1},\cdots,\varphi_{n,m(n)}\}\subseteq\bigcap_{m\in\mathbb{N}}H^m(\Omega)\subseteq\bigcap_{m\in\mathbb{N}}C^m(\overline{\Omega})$ (定理 11.35 の (7) を参照) とおく. 今, $I\subseteq\mathbb{R}$ を 0 を含む区間, $f(t):I\to D(\sqrt{-\Delta})$ を $H^1(\Omega)$ のノルムに関する連続関数, $c\in(0,\infty)$, $u\in D(-\Delta)$, $v\in D(\sqrt{-\Delta})$ とし, 定理 11.61 における (1) ~ (4) を満たす一意解 $u(t):I\to D(-\Delta)$ を考える. そして任意の $n\in\mathbb{N}$, $k\in\{1,\cdots,m(n)\}$ に対し C^2 級関数

$$u_{n,k}(t):I\ni t\mapsto (u(t)\mid\varphi_{n,k})_2\in\mathbb{C}$$

を定義する. また,

$$u_{n,k}:=(u\mid\varphi_{n,k})_2\in\mathbb{C},\quad v_{n,k}:=(v\mid\varphi_{n,k})_2\in\mathbb{C},\quad f_{n,k}(s):I\ni s\mapsto (f(s)\mid\varphi_{n,k})_2\in\mathbb{C}$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned}\frac{d^2u_{n,k}}{dt^2}(t)&=\left(\frac{d^2u}{dt^2}(t)\mid\varphi_{n,k}\right)_2=\left(c^2\Delta u(t)\mid\varphi_{n,k}\right)_2+(f(t)\mid\varphi_{n,k})_2\\&=c^2(u(t)\mid\Delta\varphi_{n,k})_2+(f(t)\mid\varphi_{n,k})_2=c^2\lambda_{n,k}u_{n,k}(t)+f_{n,k}(t)\quad(\forall t\in I)\end{aligned}$$

であり, $u_{n,k}(0)=u_{n,k}$, $\frac{du_{n,k}}{dt}(0)=v_{n,k}$ であるから, $u_{n,k}$ は常微分方程式の初期値問題

$$\frac{d^2u_{n,k}}{dt^2}(t)=c^2\lambda_n u_{n,k}(t)+f(t),\quad u_{n,k}(0)=u_{n,k},\quad \frac{du_{n,k}}{dt}(0)=v_{n,k}$$

の一意解である. $E:\mathcal{B}_{\sigma(-\Delta)}\to\mathcal{P}(L^2(\Omega))$ を $-\Delta$ のスペクトル測度 (定義 10.63) とすると, 定理 10.68 より,

$$\mathrm{Ran}\,E(\{\lambda_n\})=\mathrm{Ker}(\lambda_n+\Delta)=\mathrm{span}\{\varphi_{n,1},\cdots,\varphi_{n,m(n)}\}$$

であるから, (11.138) より, $u_{n,k}(t):I\to\mathbb{C}$ は,

$$\begin{aligned}u_{n,k}(t)&=\left(\cos(ct\sqrt{-\Delta})u\mid\varphi_{n,k}\right)_2+\left(\frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}v\mid\varphi_{n,k}\right)_2+\int_0^t\left(\frac{\sin(c(t-s)\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}f(s)\mid\varphi_{n,k}\right)_2ds\\&=\cos(ct\sqrt{\lambda_n})(u\mid\varphi_{n,k})_2+\frac{\sin(ct\sqrt{\lambda_n})}{c\sqrt{\lambda_n}}(v\mid\varphi_{n,k})_2+\int_0^t\frac{\sin(c(t-s)\sqrt{\lambda_n})}{c\sqrt{\lambda_n}}(f(s)\mid\varphi_{n,k})_2ds\\&=\cos(ct\sqrt{\lambda_n})u_{n,k}+\frac{\sin(ct\sqrt{\lambda_n})}{c\sqrt{\lambda_n}}v_{n,k}+\int_0^t\frac{\sin(c(t-s)\sqrt{\lambda_n})}{c\sqrt{\lambda_n}}f_{n,k}(s)ds\quad(\forall t\in I)\end{aligned}$$

と表すことができる. 命題 10.126 より,

$$\{\varphi_{n,1},\cdots,\varphi_{n,m(n)}:n\in\mathbb{N},k=1,\cdots,m(n)\}$$

は $L^2(\Omega)$ の CONS であるから,

$$u(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{m(n)} (u(t) \mid \varphi_{n,k})_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{m(n)} u_{n,k}(t)\varphi_{n,k} \quad (\forall t \in I)$$

となる. よって $u(t)$ は波 $u_{n,k}(t)\varphi_{n,k}(x) \in C^2(I) \otimes C^\infty(\Omega)$ $(n \in \mathbb{N}, k = 1, \cdots, m(n))$ の重ね合わせである.

補題 11.63. Laplacian $-\Delta : H^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$ と任意の $u \in H^2(\mathbb{R}^3) \subseteq C_0(\mathbb{R}^3)$*193, $c \in (0, \infty)$ に対し,

$$\left(\frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}u\right)(x) = tS(u, x, c|t|) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. ただし右辺の $S(u, x, c|t|)$ は中心 $x \in \mathbb{R}^3$, 半径 $c|t|$ の球面 $\{y \in \mathbb{R}^3 : |y - x| = c|t|\}$ における $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ の球面平均 (定義 11.37) である.

証明. $t \in \mathbb{R}$ は固定する. まず $u \in D(\mathbb{R}^3)$ の場合を示す. 命題 10.162 と合成積の Fourier 変換の性質 (定理 8.90) より,

$$\frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}u = \mathcal{F}^{-1}\frac{\sin(ct|\mathrm{id}|)}{c|\mathrm{id}|}\mathcal{F}u = u * \left(\mathcal{F}^{-1}\frac{\sin(ct|\mathrm{id}|)}{c|\mathrm{id}|}\right) = u * v \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \tag{11.148}$$

となる. ただし,

$$v := \mathcal{F}^{-1}\frac{\sin(ct|\mathrm{id}|)}{c|\mathrm{id}|} \in \mathcal{S}_3'$$

とおいた.

$$v_n(y) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{|x|<n}\frac{\sin(ct|x|)}{c|x|}e^{ix\cdot y}dx \quad (\forall y \in \mathbb{R}^3, \forall n \in \mathbb{N})$$

とおけば, 任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^3)$ に対し Fubini の定理 5.85 と Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(y)v_n(y)dy &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{|x|<n}\varphi(y)\frac{\sin(ct|x|)}{c|x|}e^{ix\cdot y}dydx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{|x|<n}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(y)\frac{\sin(ct|x|)}{c|x|}e^{ix\cdot y}dxdy \\
&= \int_{|x|<n}(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(x)\frac{\sin(ct|x|)}{c|x|}dx \\
&\to \int_{\mathbb{R}^N}(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(x)\frac{\sin(ct|x|)}{c|x|}dx = v(\varphi) \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

となるから, 超関数空間 $D'(\mathbb{R}^3)$ の位相 (定義 8.18) で $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ が成り立つ. よって $u \in D(\mathbb{R}^3)$ より,

$$(u * v_n)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}v_n(T_x u_{-1}) \to \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}v(T_x u_{-1}) = (u * v)(x) \quad (n \to \infty, \forall x \in \mathbb{R}^3) \tag{11.149}$$

が成り立つ. 任意の $n \in \mathbb{N}$, 任意の $y \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ を取る. $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 e_1, e_2, e_3 で $y = |y|e_1$ を満たすものを取り,

$$(0, n) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \ni (r, \theta, \theta') \mapsto r\cos(\theta)e_1 + r\sin(\theta)\cos(\theta') + r\sin(\theta)\sin(\theta') \in \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < n\}$$

*193 $2 > \frac{3}{2}$ であることと Sobolev の埋め込み定理 8.134 に注意.

なる極座標変換 (定理 6.99) を考えれば,

$$\begin{aligned}
v_n(y) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{|x|<n}\frac{\sin(ct|x|)}{c|x|}e^{ix\cdot y}dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_0^n\int_0^\pi 2\pi r^2\sin(\theta)\frac{\sin(ctr)}{cr}e^{ir|y|\cos(\theta)}d\theta dr \\
&= \frac{1}{c(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_0^n\int_0^\pi r\sin(\theta)\sin(ctr)e^{ir|y|\cos(\theta)}d\theta dr = \frac{1}{c(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_0^n r\int_{-1}^1\sin(ctr)e^{i|y|rs}dsdr \\
&= \frac{1}{c|y|(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_0^n 2\sin(ctr)\frac{e^{i|y|r}-e^{-i|y|r}}{2i}dr = \frac{1}{c|y|(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_0^n 2\sin(ctr)\sin(|y|r)dr \\
&= \frac{1}{c|y|(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_0^n\{\cos((ct-|y|)r)-\cos((ct+|y|)r)\}\,dr \\
&= \frac{1}{2c|y|(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-n}^n\{\cos((ct-|y|)r)-\cos((ct+|y|)r)\}\,dr
\end{aligned}$$

となる. よって $u \in D(\mathbb{R}^3)$ であることに注意して, 任意の $x \in \mathbb{R}^3$ に対し, 極座標変換 (定理 6.99) より,

$$\begin{aligned}
(u*v_n)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}u(x-y)v_n(y)dy \\
&= \frac{1}{2c(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{-n}^n\frac{u(x-y)}{|y|}\{\cos((ct-|y|)r)-\cos((ct+|y|)r)\}\,drdy \\
&= \frac{1}{2c(2\pi)^2}\int_0^\infty\int_{S_2}\int_{-n}^n u(x-\rho\omega)\rho\{\cos((ct-\rho)r)-\cos((ct+\rho)r)\}\,dr d\mu_{S_2}(\omega)d\rho \\
&= \frac{1}{4c(2\pi)^2}\int_{-\infty}^\infty\int_{S_2}\int_{-n}^n u(x-\rho\omega)\rho\{\cos((ct-\rho)r)-\cos((ct+\rho)r)\}\,dr d\mu_{S_2}(\omega)d\rho \\
&= \frac{1}{4c(2\pi)^2}\int_{-n}^n\int_{-\infty}^\infty\int_{S_2} u(x+\rho\omega)\rho\{\cos((ct-\rho)r)-\cos((ct+\rho)r)\}\,d\mu_{S_2}(\omega)d\rho dr \\
&= \frac{1}{4c\pi}\left\{\int_{-n}^n\int_{-\infty}^\infty S(u,x,|\rho+ct|)(\rho+ct)\cos(\rho r)d\rho dr - \int_{-n}^n\int_{-\infty}^\infty S(u,x,|\rho-ct|)(\rho-ct)\cos(\rho r)d\rho dr\right\} \\
&\to \frac{1}{2c}\left(S(u,x,c|t|)ct + S(u,x,c|t|)ct\right) = tS(u,x,c|t|)\quad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

となる. 最後は Fourier 変換と Fourier 逆変換による ($\cos(\rho r) = \frac{e^{i\rho r}+e^{-i\rho r}}{2}$ に注意). ゆえに,

$$\lim_{n\to\infty}(u*v_n)(x) = tS(u,x,c|t|)\quad (\forall u \in D(\mathbb{R}^3), \forall x \in \mathbb{R}^3) \tag{11.150}$$

が成り立つ. (11.148), (11.149), (11.150) より,

$$\left(\frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}u\right)(x) = (u*v)(x) = \lim_{n\to\infty}(u*v_n)(x) = tS(u,x,c|t|)\quad (\forall u \in D(\mathbb{R}^3), \forall x \in \mathbb{R}^3) \tag{11.151}$$

を得る. 任意の $u \in H^2(\mathbb{R}^3) \subseteq C_0(\mathbb{R}^3)$ を取る. 定理 8.110 より $D(\mathbb{R}^3)$ の列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|_{2,2} = 0$ なるものが取れて, Sobolev の埋め込み定理 8.134 より $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は u に一様収束する. よって (11.151) より,

$$tS(u,x,c|t|) = \lim_{n\to\infty}tS(u_n,x,c|t|) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}u_n\right)(x)\quad (\forall x \in \mathbb{R}^3) \tag{11.152}$$

が成り立つ. 一方, L^2 ノルムで,

$$\left(\frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}u\right) = \mathcal{F}^{-1}\frac{\sin(ct|\mathrm{id}|)}{c|\mathrm{id}|}\mathcal{F}u = \lim_{n\to\infty}\mathcal{F}^{-1}\frac{\sin(ct|\mathrm{id}|)}{c|\mathrm{id}|}\mathcal{F}u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}u_n\right)$$

であるから, $(\left(\frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}u_n\right))_{n\in\mathbb{N}}$ のある部分列は a.e. $x \in \mathbb{R}^3$ で $\left(\frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}u\right)(x)$ に収束する (定理 5.127 の証明を参照). よって (11.152) より,

$$\left(\frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}u\right)(x) = tS(u,x,c|t|)\quad (\forall x \in \mathbb{R}^3)$$

が成り立つ. □

補題 11.64. $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$ を Fourier 変換とする．このとき，

(1) 任意の $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$ に対し，$\frac{1}{|\mathrm{id}|}\mathcal{F}v \in L^1(\mathbb{R}^3)$ が成り立つ．
(2) 任意の $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ に対し，$\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ が成り立つ．

証明. (1) 命題 8.133 より $(1+|\mathrm{id}|^2)^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}v \in L^2(\mathbb{R}^3)$ である．また極座標変換 (定理 6.99) より，

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|^2(1+|x|^2)}dx = 4\pi\int_0^\infty \frac{1}{1+r^2}dr \leqslant 4\pi\left(\int_0^1 \frac{1}{1+r^2}dr + \int_1^\infty \frac{1}{r^2}dr\right) < \infty$$

だから，

$$\frac{1}{|\mathrm{id}|(1+|\mathrm{id}|^2)^{\frac{1}{2}}} \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

よって Hölder の不等式より，

$$\frac{1}{|\mathrm{id}|}\mathcal{F}v = \frac{1}{|\mathrm{id}|(1+|\mathrm{id}|^2)^{\frac{1}{2}}}(1+|\mathrm{id}|^2)^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}v \in L^1(\mathbb{R}^3)$$

が成り立つ．

(2) 命題 8.133 より $(1+|\mathrm{id}|^2)\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ である．また極座標変換 (定理 6.99) より，

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+|x|^2)^2}dx = 4\pi\int_0^\infty \frac{r^2}{(1+r^2)^2}dr \leqslant 4\pi\left(\int_0^1 \frac{1}{(1+r^2)^2}dr + \int_1^\infty \frac{1}{r^2}dr\right) < \infty$$

だから，

$$\frac{1}{1+|\mathrm{id}|^2} \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

よって Hölder の不等式より，

$$\mathcal{F}u = \frac{1}{(1+|\mathrm{id}|^2)}(1+|\mathrm{id}|^2)\mathcal{F}u \in L^1(\mathbb{R}^3)$$

が成り立つ．

□

定理 11.65 (全空間における 3 次元波動方程式の初期値問題の一意解の形)**.** $f(t): \mathbb{R} \to H^2(\mathbb{R}^3)$ を $H^2(\mathbb{R}^3)$ のノルムで連続な関数，$c \in (0,\infty)$，$u \in H^2(\mathbb{R}^3)$，$v \in H^1(\mathbb{R}^3)$ とする．そして定理 11.61 で $\Omega = \mathbb{R}^3$ とした場合の (1) ∼ (4) を満たす一意解を $u(t): \mathbb{R} \to H^2(\mathbb{R}^3)$ とする．このとき，

$$a := \frac{1}{2}\mathcal{F}u + \frac{1}{2ic|\mathrm{id}|}\mathcal{F}v, \quad b := \frac{1}{2}\mathcal{F}u - \frac{1}{2ic|\mathrm{id}|}\mathcal{F}v$$

とおけば $a, b \in L^1(\mathbb{R}^3)$ であり，

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3} a(k)e^{i(k\cdot x + ct|k|)}dk + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3} b(k)e^{i(k\cdot x - ct|k|)}dk \\ &+ \frac{1}{4\pi c^2}\int_{|y-x|\leqslant c|t|} \frac{f\left(t \mp \frac{|y-x|}{c}, y\right)}{|y-x|}dy \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $\mp$ は $t > 0$ のときは $-$ で，$t < 0$ のときは $+$ である．

証明. $a, b \in L^1(\mathbb{R}^3)$ であることは補題 11.64 による．

$$u(t) = \cos(ct\sqrt{-\Delta})u + \frac{\sin(ct\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}v + \int_0^t \frac{\sin(c(t-s)\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}f(s)ds \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であるから，命題 10.162 より，

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{F}^{-1}\cos(ct|\mathrm{id}|)\mathcal{F}u + \mathcal{F}^{-1}\frac{\sin(ct|\mathrm{id}|)}{c|\mathrm{id}|}\mathcal{F}v + \int_0^t \frac{\sin(cs\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}f(t-s)ds \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(ae^{ict|\mathrm{id}|} + be^{-ict|\mathrm{id}|}\right) + \int_0^t \frac{\sin(cs\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}f(t-s)ds \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{11.153}$$

となる. $a, b \in L^1(\mathbb{R}^3)$ より (11.153) の右辺の第一項は, 任意の $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left(ae^{ict|\mathrm{id}|} + be^{-ict|\mathrm{id}|}\right)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}\left(a(k)e^{ict|k|} + be^{-ict|k|}\right)e^{ik\cdot x}dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3} a(k)e^{i(k\cdot x + ct|k|)}dk + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3} b(k)e^{i(k\cdot x - ct|k|)}dk \end{aligned} \tag{11.154}$$

と表される. 今, (11.153) の右辺の第二項を考える. 命題 10.162 より,

$$\frac{\sin(cs\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}f(t-s) = \mathcal{F}^{-1}\frac{\sin(cs|\mathrm{id}|)}{c|\mathrm{id}|}\mathcal{F}f(t-s) \quad (\forall s, t \in \mathbb{R}) \tag{11.155}$$

である. $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) \in H^2(\mathbb{R}^3)$ は $H^2(\mathbb{R}^3)$ のノルムで連続なので, 命題 8.133 より,

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (1 + |\mathrm{id}|^2)\mathcal{F}f(t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

は $L^2(\mathbb{R}^3)$ のノルムで連続である. よって任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto (1 + |\mathrm{id}|^2)\frac{\sin(cs|\mathrm{id}|)}{c|\mathrm{id}|}\mathcal{F}f(t-s) = (1 + |\mathrm{id}|^2)\mathcal{F}\frac{\sin(cs\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}f(t-s) \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

は $L^2(\mathbb{R}^3)$ のノルムで連続であるから, 命題 8.133 より (11.155) は $H^2(\mathbb{R}^3)$ に属し,

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto \frac{\sin(cs\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}f(t-s) \in H^2(\mathbb{R}^3) \tag{11.156}$$

は $H^2(\mathbb{R}^3)$ のノルムで連続である. Sobolev の埋め込み定理 8.134 より, (11.156) は sup ノルムによる Banach 空間 $C_0(\mathbb{R}^3)$ 値の連続関数である. よって (11.153) の右辺の第二項は Banach 空間 $C_0(\mathbb{R}^3)$ 値の Bochner 積分 (定義 5.250) とみなせる. 任意の $x \in \mathbb{R}^3$ に対し,

$$\delta_x : C_0(\mathbb{R}^3) \ni h \mapsto h(x) \in \mathbb{C}$$

は $C_0(\mathbb{R}^3)$ 上の連続線型汎関数であるから, Bochner 積分の性質 (定義 5.250) より, 任意の $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$ に対し,

$$\left(\int_0^t \frac{\sin(cs\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}f(t-s)ds\right)(x) = \int_0^t \left(\frac{\sin(cs\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}f(t-s)\right)(x)ds$$

となる. 補題 11.63 より,

$$\left(\frac{\sin(cs\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}f(t-s)\right)(x) = sS(f(t-s,\cdot), x, c|s|) = \frac{s}{4\pi}\int_{S_2} f(t-s, x + cs\omega)d\mu_{S_2}(\omega)$$

だから,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^t \frac{\sin(cs\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}f(t-s)ds\right)(x) &= \int_0^t \left(\frac{\sin(cs\sqrt{-\Delta})}{c\sqrt{-\Delta}}f(t-s)\right)(x)ds \\ = \frac{1}{4\pi}\int_0^t s\int_{S_2} f(t-s, x + cs\omega)d\mu_{S_2}(\omega)ds &= \frac{1}{4\pi c^2}\int_0^{c|t|}\int_{S_2} s^2\frac{f\left(t \mp \frac{s}{c}, x + s\omega\right)}{|s|}d\mu_{S_2}(\omega)ds \\ = \frac{1}{4\pi c^2}\int_{|y-x|\leqslant c|t|}\frac{f\left(t \mp \frac{|y-x|}{c}, y\right)}{|y-x|}dy \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^3)\end{aligned}$$

(4 番目の等号で極座標変換 (6.99) を用いた) となる. よって (11.153), (11.154) より,

$$\begin{aligned}u(t, x) = &\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3} a(k)e^{i(k\cdot x + ct|k|)}dk + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3} b(k)e^{i(k\cdot x - ct|k|)}dk \\ &+ \frac{1}{4\pi c^2}\int_{|y-x|\leqslant c|t|}\frac{f\left(t \mp \frac{|y-x|}{c}, y\right)}{|y-x|}dy \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^3)\end{aligned}$$

が成り立つ. □

12 局所コンパクト群のユニタリ表現

12.1 局所コンパクト群の Haar 測度, モジュラー関数, L^1 群環, 測度群環

定義 12.1 (局所コンパクト群)**.** 群 G が局所コンパクト群であるとは, G が局所コンパクト Hausdorff 空間であり, 群演算

$$G \times G \ni (x, y) \mapsto xy \in G, \quad G \ni x \mapsto x^{-1} \in G$$

が連続であることを言う. 特に離散位相による局所コンパクト群を離散群と言い, コンパクトな局所コンパクト群をコンパクト群と言う. 以後, 局所コンパクト群と言えば, 特に断らない限り, 第二可算公理を満たすものとする.

定義 12.2. G を群とする. $A, B \subseteq G, y \in G$ に対し,

$$A^{-1} := \{x^{-1} : x \in A\}, \quad AB := \{xy : x \in A, y \in B\},$$

$$yA := \{yx : x \in A\}, \quad Ay := \{xy : x \in A\}$$

とおく. $A = A^{-1}$ であるとき A は対称であると言う. G 上で定義された関数 f に対し, G 上で定義された関数 $L_y f, R_y f$ を,

$$L_y f(x) := f(y^{-1}x), \quad R_y f(x) := f(xy) \quad (\forall x \in G)$$

として定義する.

$$L_{y_1} L_{y_2} f = L_{y_1 y_2} f, \quad R_{y_1} R_{y_2} f = R_{y_1 y_2} f \quad (\forall y_1, y_2 \in G)$$

である.

定理 12.3 ($C_0(G)$ の元の一様連続性)**.** G を局所コンパクト群とし, $f \in C_0(G)$ (定義 5.159) とする. このとき,

(1) 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し, 単位元 $1 \in G$ の対称な近傍 V が存在し,

$$yx^{-1} \in V \ \text{ or } \ x^{-1}y \in V \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

(2) $G \ni y \mapsto L_y f \in C_0(G)$ は (sup ノルムに関して) 連続である.

(3) $G \ni y \mapsto R_y f \in C_0(G)$ は (sup ノルムに関して) 連続である.

証明. (1) 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ を取り固定する. $C_0(G)$ の定義 5.159 より $K := \left(|f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$ はコンパクトである. f は連続であるから, 各 $x \in K$ に対し $1 \in G$ の開近傍 U_x で,

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall y \in (U_x)x \cup x(U_x)) \tag{12.1}$$

を満たすものが取れる. $1 \in G$ の対称開近傍 V_x で $V_x V_x \subseteq U_x$ なるものを取る.*194 K はコンパクトであるから, 有限個の $x_1, \cdots, x_n \in K$ が取れて,

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \left((V_{x_j}) \, x_j \cap x_j \, (V_{x_j}) \right) \tag{12.2}$$

となる. $1 \in G$ の対称開近傍

$$V := \bigcap_{j=1}^{n} V_{x_j} \tag{12.3}$$

を考える. 今, $x, y \in G$ が $x^{-1}y \in V$ か $yx^{-1} \in V$ のいずれかを満たすとする. もし $x, y \notin K$ ならば, K の定義より,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| < \varepsilon$$

*194 $G \times G \ni (x, y) \mapsto xy \in G$ の $(1, 1) \in G \times G$ における連続性に注意.

である．またもし $x \in K$ ならば (12.2) より $x \in (V_{x_j})x_j \cap x_j(V_{x_j})$ なる $j \in \{1, \cdots, n\}$ が取れて, (12.3) より,

$$y = (yx^{-1})x = x(x^{-1}y) \in \left(VV_{x_j}\right)x_j \cup x_j\left(V_{x_j}V\right) \subseteq \left(U_{x_j}\right)x_j \cup x_j\left(U_{x_j}\right)$$

となる．よって,

$$x, y \in \left(U_{x_j}\right)x_j \cup x_j\left(U_{x_j}\right)$$

であるから, (12.1) より,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant |f(y) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| < \varepsilon \tag{12.4}$$

が成り立つ．V の対称性より $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} \in V$ か $xy^{-1} = (yx^{-1})^{-1} \in V$ のいずれかが成り立つので, $y \in K$ の場合も同様にして (12.4) が成り立つことが分かる．これより $x, y \in G$ が $x^{-1}y \in V$ か $yx^{-1} \in V$ のいずれかを満たす限り $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つ．

(2) 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ を取る．(1) より $1 \in G$ の近傍 V で,

$$y_1y_2^{-1} \in V \quad \Rightarrow \quad |f(y_1) - f(y_2)| \leqslant \varepsilon$$

を満たすものが取れる．よって任意の $y_0 \in G$ に対し y_0 の近傍 Vy_0 を考えれば, 任意の $y \in y_0V$ に対し,

$$(y_0^{-1}x)(y^{-1}x)^{-1} = y_0^{-1}y \in V \quad (\forall x \in G)$$

であるから,

$$\sup_{x \in G}|L_{y_0}f(x) - L_yf(x)| = \sup_{x \in G}|f(y_0^{-1}x) - f(y^{-1}x)| \leqslant \varepsilon$$

となる．よって $G \ni y \mapsto L_yf \in C_0(G)$ は連続である．

(3) 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ を取る．(1) より $1 \in G$ の近傍 V で,

$$y_1^{-1}y_2 \in V \quad \Rightarrow \quad |f(y_1) - f(y_2)| \leqslant \varepsilon$$

を満たすものが取れる．よって任意の $y_0 \in G$ に対し y_0 の近傍 y_0V を考えれば, 任意の $y \in y_0V$ に対し,

$$(xy_0)^{-1}(xy) = y_0^{-1}y \in V \quad (\forall x \in G)$$

であるから,

$$\sup_{x \in G}|R_{y_0}f(x) - R_yf(x)| = \sup_{x \in G}|f(xy_0) - f(xy)| \leqslant \varepsilon$$

となる．よって $G \ni y \mapsto R_yf \in C_0(G)$ は連続である．

□

定義 12.4 (Haar 測度)**.** G を局所コンパクト群とする．G 上の位相正則測度 $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ が,

$$\mu(G) > 0, \quad \mu(yB) = \mu(B) \quad (\forall y \in G, \forall B \in \mathcal{B}_G)$$

を満たすとき, μ を G の左 Haar 測度と言う．また G 上の位相正則測度 (定義 5.168) $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ が,

$$\mu(G) > 0, \quad \mu(B) = \mu(By) \quad (\forall y \in G, \forall B \in \mathcal{B}_G)$$

を満たすとき, μ を G の右 Haar 測度と言う．以後, 左 Haar 測度のことを単に Haar 測度と言う．

注意 12.5. 局所コンパクト群は第二可算公理を満たすとしているので σ-コンパクト (命題 5.175) だから, 位相正則測度の定義 5.168 より Haar 測度は σ-有限である．

例 12.6. $\mathbb{R}^N$ は加法群として局所コンパクト群であり, $\mathbb{R}^N$ の Lebesgue 測度は $\mathbb{R}^N$ の Haar 測度である．

命題 12.7. G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ を G の Haar 測度とする．このとき任意の非負値 Borel 関数 $f : G \to [0, \infty]$ と $y \in G$ に対し,

$$\int_G L_yf(x)d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x)$$

が成り立つ．

証明. 非負値 Borel 関数の非負値 Borel 単関数の各点単調増加列による近似 (命題 5.29) より, f がある $B \in \mathcal{B}$ の指示関数である ($f = \chi_B$) 場合を示せば十分であるが, Haar 測度の定義より,

$$\int_G L_y \chi_B(x) d\mu(x) = \int_G \chi_B(y^{-1}x) d\mu(x) = \int_G \chi_{yB}(x) d\mu(x) = \mu(yB) = \mu(B) = \int_G \chi_B(x) d\mu(x)$$

である. □

命題 12.8 (空でない開集合の Haar 測度)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ を Haar 測度とする. このとき任意の空でない開集合 $U \subseteq G$ に対し $\mu(U) > 0$ が成り立つ.

証明. 空でない開集合 $U \subseteq G$ で $\mu(U) = 0$ なるものが存在するとして矛盾を導く. 任意のコンパクト集合 $K \subseteq G$ に対し,

$$K \subseteq \bigcup_{x \in G} xU$$

であるから有限個の $x_1, \cdots, x_n \in G$ が取れて,

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} x_j U$$

となる. よって,

$$\mu(K) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mu(x_j U) = \sum_{j=1}^{n} \mu(U) = 0$$

となるので, 位相正則測度の内部正則性 (定義 5.168 の (3)) より,

$$\mu(G) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq G \text{ はコンパクト }\} = 0$$

となる. しかし Haar 測度の定義より $\mu(G) > 0$ であるので矛盾する. □

命題 12.9 (離散群の Haar 測度は数え上げ測度)**.** G を離散群とすると, G の Haar 測度は数え上げ測度の正数倍に限られる.

証明. 離散群 G の数え上げ測度の正数倍が Haar 測度であることは自明である. $\mu : 2^G \to [0, \infty]$ を離散群 G の Haar 測度とする. 任意の $x \in G$ に対し $\{x\}$ は G のコンパクトな開集合であるから $0 < \mu(\{x\}) < \infty$ である.[*195] そして Haar 測度の定義より任意の $x, y \in G$ に対し,

$$\mu(\{x\}) = \mu(xy^{-1}\{y\}) = \mu(\{y\})$$

である. よって,

$$c := \mu(\{x\}) \quad (\forall x \in G)$$

なる $c \in (0, \infty)$ が定まり, μ は数え上げ測度の c 倍である. □

定義 12.10. G を局所コンパクト群とする.

$$C_{c,+}(G) := \{f \in C_c(G) : \forall x \in G, f(x) \geqslant 0\}, \quad C_{c,++}(G) := C_{c,+}(G) \backslash \{0\}$$

とおく. Urysohn の補題 5.165 より $C_{c,++}(G) \neq \varnothing$ である. 今, 任意の $f, g \in C_{c,++}(G)$ に対し,

$$(f, g) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j : \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, \ c_1, \cdots, c_n \in [0, \infty) : \\ \exists x_1, \cdots, x_n \in G \text{ s.t. } \forall x \in G, \ f(x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j} g(x) \end{array} \right\} \tag{12.5}$$

と定義する. ここで (12.5) の右辺の集合は空ではない. 実際, $0 < \|g\| = \sup_{x \in G} g(x)$ より $U := \left(\frac{\|g\|}{2} < g\right)$ は空でない開集合であり, $\mathrm{supp}(f)$ はコンパクトであるから, 有限個の $x_1, \cdots, x_n \in G$ が存在し,

$$\mathrm{supp}(f) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} x_j U$$

[*195] $\mu(\{x\}) > 0$ であることは $\{x\}$ が開集合であることと命題 12.8 により, $\mu(\{x\}) < \infty$ であることは $\{x\}$ がコンパクトであることと位相正則測度の定義 5.168 による.

となる. そこで,

$$c_j := \frac{2\|f\|}{\|g\|} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

とおく. 任意の $x \in \mathrm{supp}(f)$ に対し $x \in x_i U$ なる $i \in \{1, \cdots, n\}$ が取れて,

$$f(x) \leqslant \|f\| = c_i \frac{\|g\|}{2} < c_i g(x_i^{-1}x) = c_i L_{x_i} g(x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j} g(x)$$

となる. よって $\sum_{j=1}^{n} c_j$ は (12.5) の右辺の集合に属する.

命題 12.11. 定義 12.10 における (f, g) $(f, g \in C_{c,++}(G))$ について次が成り立つ.

(1) 任意の $f, g \in C_{c,++}(G)$ に対し, $0 < \frac{\|f\|}{\|g\|} \leqslant (f, g)$.
(2) 任意の $f_1, f_2, g \in C_{c,++}(G)$ に対し, $(f_1 + f_2, g) \leqslant (f_1, g) + (f_2, g)$.
(3) 任意の $f, g \in C_{c,++}(G)$, 任意の $\alpha \in (0, \infty)$ に対し, $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$.
(4) 任意の $f, g \in C_{c,++}(G)$, 任意の $y \in G$ に対し, $(L_y f, g) = (f, g)$.
(5) 任意の $f, g, h \in C_{c,++}(G)$ に対し, $(f, h) \leqslant (f, g)(g, h)$.

証明. (1) $f(x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j} g(x)$ $(\forall x \in G)$ を満たす任意の有限個の $c_1, \cdots, c_n \in [0, \infty)$, $x_1, \cdots, x_n \in G$ を取る. このとき,

$$f(x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j} g(x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j \|g\| \ (\forall x \in G)$$

であるから $\|f\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j \|g\|$ なので, $\frac{\|f\|}{\|g\|} \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j$ である. よって $\frac{\|f\|}{\|g\|} \leqslant (f, g)$ が成り立つ.

(2) 定義 12.10 より明らかである.

(3) 定義 12.10 より明らかである.

(4) 定義 12.10 より明らかである.

(5) $f(x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j} g(x)$ $(\forall x \in G)$ を満たす任意の有限個の $c_1, \cdots, c_n \in [0, \infty)$, $x_1, \cdots, x_n \in G$ と, $g(x) \leqslant \sum_{k=1}^{m} d_k L_{y_k} h(x)$ $(\forall x \in G)$ を満たす任意の有限個の $d_1, \cdots, d_m \in [0, \infty)$, $y_1, \cdots, y_m \in G$ を取る. このとき任意の $x \in G$ に対し,

$$f(x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j} g(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j g(x_j^{-1}x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_j d_k L_{y_k} h(x_j^{-1}x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_j d_k L_{x_j y_k} h(x)$$

であるから $(f, h) \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=1}^{m} d_k$ である. よって $(f, h) \leqslant (f, g)(g, h)$ が成り立つ.

□

定義 12.12. 任意の $f_0 \in C_{c,++}(G)$ を取り固定し, 任意の $\varphi \in C_{c,++}(G)$ に対し $\Lambda_\varphi : C_{c,++}(G) \to (0, \infty)$ を,

$$\Lambda_\varphi(f) := \frac{(f, \varphi)}{(f_0, \varphi)} \quad (\forall f \in C_{c,++}(G))$$

(命題 12.11 の (1) より右辺の分母は正であることに注意) と定義する. 命題 12.11 より $\Lambda_\varphi : C_{c,++}(G) \to (0, \infty)$ は次を満たす.

(1) 任意の $f_1, f_2 \in C_{c,++}(G)$ に対し, $\Lambda_\varphi(f_1 + f_2) \leqslant \Lambda_\varphi(f_1) + \Lambda_\varphi(f_2)$.
(2) 任意の $f \in C_{c,++}(G)$, 任意の $\alpha \in (0, \infty)$ に対し, $\Lambda_\varphi(\alpha f) = \alpha \Lambda_\varphi(f)$.
(3) 任意の $f \in C_{c,++}(G)$, 任意の $y \in G$ に対し, $\Lambda_\varphi(L_y f) = \Lambda_\varphi(f)$.
(4) 任意の $f \in C_{c,++}(G)$ に対し, $\frac{1}{(f_0, f)} \leqslant \Lambda_\varphi(f) \leqslant (f, f_0)$.

補題 12.13. (12.12) で定義したものを考える. 任意の $f_1, f_2 \in C_{c,++}(G)$, 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し, 単位元 $1 \in G$ の開近傍 U が存在し,

$$\Lambda_\varphi(f_1) + \Lambda_\varphi(f_2) \leqslant \Lambda_\varphi(f_1 + f_2) + \varepsilon \quad (\forall \varphi \in C_{c,++}(G) : \mathrm{supp}(\varphi) \subseteq U)$$

が成り立つ.

証明. Urysohn の補題 5.165 により $\mathrm{supp}(f_1+f_2)\subseteq(g>0)$ なる $g\in C_{c,++}(G)$ を取る．そして任意の $\delta\in(0,\infty)$ を取り固定する．

$$h:=f_1+f_2+\delta g\in C_{c,++}(G)$$

とおき，$h_1,h_2:G\to[0,\infty)$ を，

$$h_k(x):=\begin{cases}\frac{f_k(x)}{h(x)} & (x\in(h>0))\\ 0 & (x\notin(h>0))\end{cases}\quad(k=1,2)$$

と定義する．$\mathrm{supp}(f_k)\subseteq\mathrm{supp}(f_1+f_2)\subseteq(g>0)\subseteq(h>0)$ より，

$$G=(h>0)\cup(G\backslash\mathrm{supp}(f_k))\ \ (k=1,2)$$

であり，

$$h_k(x)=0\ \ (\forall x\in G\backslash\mathrm{supp}(f_k))\ \ (k=1,2)$$

であるから $h_1,h_2\in C_{c,+}(G)$ である．また，

$$0\leqslant h_1(x)+h_2(x)\leqslant 1,\ \ f_1(x)=h_1(x)h(x),\ \ f_2(x)=h_2(x)h(x)\ \ (\forall x\in G)\tag{12.6}$$

である．定理 12.3 より $1\in G$ の開近傍 U で，

$$x^{-1}y\in U\ \ \Rightarrow\ \ |h_k(x)-h_k(y)|<\frac{\delta}{2}\ \ (k=1,2)\tag{12.7}$$

を満たすものが取れる．$\mathrm{supp}(\varphi)\subseteq U$ を満たす任意の $\varphi\in C_{c,++}(G)$ を取る．

$$h(x)\leqslant\sum_{j=1}^{n}c_jL_{x_j}\varphi(x)\ \ (\forall x\in G)$$

を満たす任意の有限個の $c_1,\cdots,c_n\in[0,\infty)$ と $x_1,\cdots,x_n\in G$ に対し，$\mathrm{supp}(\varphi)\subseteq U$ と (12.7) より，

$$f_k(x)=h_k(x)h(x)\leqslant\sum_{j=1}^{n}c_jh_k(x)\varphi(x_j^{-1}x)\leqslant\sum_{j=1}^{n}c_j\left(h_k(x_j)+\frac{\delta}{2}\right)L_{x_j}\varphi(x)\ \ (\forall x\in G,k=1,2)$$

であるから，

$$(f_k,\varphi)\leqslant\sum_{j=1}^{n}c_j\left(h_k(x_j)+\frac{\delta}{2}\right)\ \ (k=1,2).$$

よって (12.6) より，

$$(f_1,\varphi)+(f_2,\varphi)\leqslant\sum_{j=1}^{n}c_j(h_1(x_j)+h_2(x_j)+\delta)\leqslant(1+\delta)\sum_{j=1}^{n}c_j.$$

ゆえに，

$$(f_1,\varphi)+(f_2,\varphi)\leqslant(1+\delta)(h,\varphi).$$

従って，

$$\Lambda_\varphi(f_1)+\Lambda_\varphi(f_2)\leqslant(1+\delta)\Lambda_\varphi(h)\tag{12.8}$$

が成り立つ．定義 12.12 における (1) ∼ (4) より，

$$\begin{aligned}(1+\delta)\Lambda_\varphi(h)&=(1+\delta)\Lambda_\varphi(f_1+f_2+\delta g)\leqslant(1+\delta)\Lambda_\varphi(f_1+f_2)+(1+\delta)\delta\Lambda_\varphi(g)\\&\leqslant\Lambda_\varphi(f_1+f_2)+\delta(f_1+f_2,f_0)+(1+\delta)\delta(g,f_0)\end{aligned}\tag{12.9}$$

であるから，

$$\delta(f_1+f_2,f_0)+(1+\delta)\delta(g,f_0)\leqslant\varepsilon$$

となるように δ を取っておけば，(12.8), (12.9) より，

$$\Lambda_\varphi(f_1)+\Lambda_\varphi(f_2)\leqslant\Lambda_\varphi(f_1+f_2)+\varepsilon$$

となる．□

定理 12.14 (Haar 測度の存在)**.** 任意の局所コンパクト群は Haar 測度 (定義 12.4) を持つ.

証明. G を任意の局所コンパクト群とする. 定義 12.11, 定義 12.12 における記号を用いる. 各 $f \in C_{c,++}(G)$ に対し有界閉区間 $[(f_0, f)^{-1}, (f, f_0)]$ はコンパクトであるから, Tychonoff の定理 1.78 より, 直積位相空間

$$X := \prod_{f \in C_{c,++}(G)} [(f_0, f)^{-1}, (f, f_0)]$$

はコンパクトである. 定義 12.12 の (4) より,

$$\Lambda_\varphi = (\Lambda_\varphi(f))_{f \in C_{c,++}(G)} \in X \quad (\forall \varphi \in C_{c,++}(G))$$

である. 単位元 $1 \in G$ の任意の開近傍 U に対し,

$$K(U) := \{\Lambda_\varphi \in X : \varphi \in C_{c,++}(G), \mathrm{supp}(\varphi) \subseteq U\}$$

と定義すると, Urysohn の補題 5.165 より $K(U) \neq \varnothing$ である. $U_1 \subseteq U_2$ ならば $K(U_1) \subseteq K(U_2)$ であるから, X のコンパクト性より,

$$\Lambda \in \bigcap_{U \text{ は } 1 \in G \text{ の開近傍}} \overline{K(U)}$$

が存在する. $1 \in G$ の任意の開近傍 U に対し $\Lambda \in \overline{K(U)}$ であるから, 直積位相の定義 1.75 より, 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ と任意の有限個の $f_1, \cdots, f_n \in C_{c,++}(G)$ に対し, $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq U$ なる $\varphi \in C_{c,++}(G)$ が存在し,

$$|\Lambda(f_j) - \Lambda_\varphi(f_j)| < \varepsilon \quad (j = 1, \cdots, n)$$

が成り立つ. このことと定義 12.12 における (1) ∼ (4) より,

(1) 任意の $f_1, f_2 \in C_{c,++}(G)$ に対し, $\Lambda(f_1 + f_2) \leqslant \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$.
(2) 任意の $f \in C_{c,++}(G)$, 任意の $\alpha \in (0, \infty)$ に対し, $\Lambda(\alpha f) = \alpha \Lambda(f)$.
(3) 任意の $f \in C_{c,++}(G)$, 任意の $y \in G$ に対し, $\Lambda(L_y f) = \Lambda(f)$.
(4) 任意の $f \in C_{c,++}(G)$ に対し, $\Lambda(f) > 0$.

が成り立ち, さらに補題 12.13 より,

(5) 任意の $f_1, f_2 \in C_{c,++}(G)$ に対し, $\Lambda(f_1) + \Lambda(f_2) \leqslant \Lambda(f_1 + f_2)$.

が成り立つ. $\Lambda(0) := 0$ とおいて Λ を $C_{c,+}(G) = C_{c,++}(G) \cup \{0\}$ まで拡張し, さらに任意の $f \in C_{c,\mathbb{R}}(G)$ に対し,

$$\Lambda(f) := \Lambda(f_+) - \Lambda(f_-) \quad (f_\pm = \max(\pm f, 0) \in C_{c,+}(G))$$

として Λ を $C_{c,\mathbb{R}}(G)$ まで拡張すると, (1), (2), (5) より $\Lambda : C_{c,\mathbb{R}}(G) \to \mathbb{R}$ は Radon 汎関数 (定義 5.170) となる. よって Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.172 より位相正則測度 $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ で,

$$\Lambda(f) = \int_G f(x) d\mu(x) \quad (\forall f \in C_{c,\mathbb{R}}(G))$$

を満たすものが唯一つ存在する. (3) と命題 5.169 より任意の $y \in G$ と任意の開集合 $U \subseteq G$ に対し,

$$\mu(yU) = \sup\{\Lambda(f) : f \preceq yU\} = \sup\{\Lambda(L_y f) : f \preceq U\} = \sup\{\Lambda(f) : f \preceq U\} = \mu(U)$$

が成り立つので, μ の外部正則性 (定義 5.168) より, 任意の $y \in G$ と任意の $B \in \mathcal{B}_G$ に対し

$$\mu(yB) = \inf\{\mu(yU) : U \supseteq B \text{ は開集合 }\} = \inf\{\mu(U) : U \supseteq B \text{ は開集合 }\} = \mu(B)$$

が成り立つ. また (4) より $\mu(G) > 0$ である. よって μ は G の Haar 測度である. □

定理 12.15 (Haar 測度の一意性)**.** 局所コンパクト群の Haar 測度は正数倍を除いて一意的である. すなわち $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ がいずれも局所コンパクト群 G の Haar 測度であるならば, ある正数 c が存在し, $\mu_1(B) = c\mu_2(B)$ $(\forall B \in \mathcal{B}_G)$ が成り立つ.

証明. 外部正則性 (定義 5.168) と命題 5.169 の (2) より, ある正数 c に対し,

$$\int_G f(x)d\mu_1(x) = c\int_G f(x)d\mu_2(x) \quad (\forall f \in C_{c,++}(G))$$

が成り立つことを示せば十分である. そのためには任意の $f, g \in C_{c,++}(G)$ に対し,

$$\frac{\int_G f(x)d\mu_1(x)}{\int_G f(y)d\mu_2(y)} = \frac{\int_G g(x)d\mu_1(x)}{\int_G g(y)d\mu_2(y)} \tag{12.10}$$

が成り立つことを示せばよい.[*196] そこで任意の $f, g \in C_{c,++}(G)$ を取り固定する. また単位元 $1 \in G$ のコンパクトな対称近傍 V を取り固定する. このとき,

$$A := V\operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(f)V, \quad B := V\operatorname{supp}(g) \cup \operatorname{supp}(g)V$$

はそれぞれコンパクトであり,

$$\operatorname{supp}(R_y f - L_{y^{-1}}f) \subseteq A, \quad \operatorname{supp}(R_y g - L_{y^{-1}}g) \subseteq B \quad (\forall y \in V) \tag{12.11}$$

が成り立つ. 定理 12.3 より任意の正数 ε に対し, $1 \in G$ の対称近傍 $V_0 \subseteq V$ で,

$$|f(xy) - f(yx)| < \varepsilon, \quad |g(xy) - g(yx)| < \varepsilon \quad (\forall y \in V_0, \forall x \in G) \tag{12.12}$$

を満たすものが取れる. Urysohn の補題 5.165 により $\operatorname{supp}(h_0) \subseteq V_0$ なる $h_0 \in C_{c,++}(G)$ を取り,

$$h(x) := \frac{1}{2}(h_0(x) + h_0(x^{-1})) \quad (\forall x \in G)$$

とおく. このとき $h(x^{-1}) = h(x)$ $(\forall x \in G)$ であり, V_0 の対称性より $\operatorname{supp}(h) \subseteq \operatorname{supp}(h_0) \cup \operatorname{supp}(h_0)^{-1} \subseteq V_0$ である. Haar 測度による積分の性質 (命題 12.7) より

$$\begin{aligned}\left(\int_G f(x)d\mu_1(x)\right)\left(\int_G h(y)d\mu_2(y)\right) &= \int_G\left(\int_G f(x)h(y)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y)\\ &= \int_G\left(\int_G f(yx)h(y)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y)\end{aligned}$$

であり, $h(y^{-1}x) = h((x^{-1}y)^{-1}) = h(x^{-1}y)$ $(\forall x, y \in G)$ であることと Fubini の定理 5.85 より,

$$\begin{aligned}&\left(\int_G h(x)d\mu_1(x)\right)\left(\int_G f(y)d\mu_2(y)\right) = \int_G\left(\int_G h(x)f(y)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y)\\ &= \int_G\left(\int_G h(y^{-1}x)f(y)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y) = \int_G\left(\int_G h(x^{-1}y)f(y)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y)\\ &= \int_G\left(\int_G h(x^{-1}y)f(y)d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x) = \int_G\left(\int_G h(y)f(xy)d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x)\\ &= \int_G\left(\int_G h(y)f(xy)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y)\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}&\left(\int_G f(x)d\mu_1(x)\right)\left(\int_G h(y)d\mu_2(y)\right) - \left(\int_G h(x)d\mu_1(x)\right)\left(\int_G f(y)d\mu_2(y)\right)\\ &= \int_G h(y)\left(\int_G (f(yx) - f(xy))d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y)\end{aligned}$$

[*196] 命題 12.8 より任意の $f \in C_{c,++}(G)$ に対し $\int_G f(x)d\mu_j(x) > 0$ $(j = 1, 2)$ であることに注意.

が成り立つ．よって $\mathrm{supp}(h) \subseteq V_0 \subseteq V$ であることと (12.12), (12.11) より，

$$\begin{aligned}&\left|\left(\int_G f(x)d\mu_1(x)\right)\left(\int_G h(y)d\mu_2(y)\right) - \left(\int_G h(x)d\mu_1(x)\right)\left(\int_G f(y)d\mu_2(y)\right)\right| \\ &\leqslant \int_G h(y)\left(\int_G |f(yx) - f(xy)|d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y) \\ &\leqslant \int_G h(y)\left(\int_G \varepsilon\chi_A(x)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y) = \varepsilon\mu_1(A)\int_G h(y)d\mu_2(y)\end{aligned}$$

であるから，両辺を $\left(\int_G f(y)d\mu_2(y)\right)\left(\int_G h(y)d\mu_2(y)\right)$ で割って，

$$\left|\frac{\int_G f(x)d\mu_1(x)}{\int_G f(y)d\mu_2(y)} - \frac{\int_G h(x)d\mu_1(x)}{\int_G h(y)d\mu_2(y)}\right| \leqslant \left(\frac{\mu_1(A)}{\int_G f(y)d\mu_2(y)}\right)\varepsilon \tag{12.13}$$

を得る．全く同様にして，

$$\left|\frac{\int_G g(x)d\mu_1(x)}{\int_G g(y)d\mu_2(y)} - \frac{\int_G h(x)d\mu_1(x)}{\int_G h(y)d\mu_2(y)}\right| \leqslant \left(\frac{\mu_1(B)}{\int_G g(y)d\mu_2(y)}\right)\varepsilon \tag{12.14}$$

が成り立つことも示せる．よって (12.13), (12.14) より，

$$\left|\frac{\int_G f(x)d\mu_1(x)}{\int_G f(y)d\mu_2(y)} - \frac{\int_G g(x)d\mu_1(x)}{\int_G g(y)d\mu_2(y)}\right| \leqslant \left(\frac{\mu_1(A)}{\int_G f(y)d\mu_2(y)} + \frac{\mu_1(B)}{\int_G g(y)d\mu_2(y)}\right)\varepsilon$$

が成り立つ．ここで ε は f, g, A, B によらない任意の正数だから (12.10) が成り立つ． □

定義 12.16 (局所コンパクト群のモジュラー関数)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ を G の Haar 測度とする．任意の $x \in G$ に対し，

$$\mathcal{B}_G \ni B \mapsto \mu(Bx) \in [0, \infty]$$

も G の Haar 測度であるから，定理 12.15 より，正数 $\Delta(x)$ で，

$$\mu(Bx) = \Delta(x)\mu(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_G, \forall x \in G)$$

を満たすものが定まる．こうして定義される G 上の関数 $\Delta : G \ni x \mapsto \Delta(x) \in (0, \infty)$ を G のモジュラー関数と言う．

注意 12.17. 定理 12.15 より，局所コンパクト群に対しそのモジュラー関数は唯一つである．

定理 12.18 (モジュラー関数の基本性質)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ を G の Haar 測度, $\Delta : G \to (0, \infty)$ を G のモジュラー関数とする．このとき，

(1) 任意の非負値 Borel 関数 $f : G \to [0, \infty]$ と任意の $y \in G$ に対し，

$$\Delta(y)\int_G f(x)d\mu(x) = \int_G f(xy^{-1})d\mu(x)$$

が成り立つ．

(2) $\Delta : G \to (0, \infty)$ は G から乗法群 $(0, \infty)$ への連続な群準同型写像である．

(3) 任意の非負値 Borel 関数 $f : G \to [0, \infty]$ に対し，

$$\int_G f(x)\Delta(x^{-1})d\mu(x) = \int_G f(x^{-1})d\mu(x)$$

が成り立つ．

証明． (1) 非負値 Borel 関数の非負値 Borel 単関数の各点単調増加列による近似 (命題 5.29) より，f がある $B \in \mathcal{B}_G$ の指示関数である ($f = \chi_B$) 場合を示せば十分であるが，

$$\int_G \chi_B(xy^{-1})d\mu(x) = \int_G \chi_{By}(x)d\mu(x) = \mu(By) = \Delta(y)\mu(B) = \Delta(y)\int_G \chi_B(x)d\mu(x)$$

であるから成り立つ．

(2) 閉包がコンパクトな空でない開集合 U を取る.[*197] 命題 12.8 と位相正則測度の定義 5.168 より,

$$0 < \mu(U) \leqslant \mu(\overline{U}) < \infty \tag{12.15}$$

である. 任意の $x, y \in G$ に対し,

$$\Delta(xy)\mu(U) = \mu(Uxy) = \Delta(y)\mu(Ux) = \Delta(x)\Delta(y)\mu(U)$$

であるから (12.15) より $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ である. よって $\Delta : G \to (0, \infty)$ は G から乗法群 $(0, \infty)$ への群準同型写像である. $\Delta : G \to (0, \infty)$ が連続であることを示す. 群準同型性より単位元 $1 \in G$ において連続であることを示せば十分である. 任意の $f \in C_{c,+}(G)\backslash\{0\}$ と, $1 \in G$ の任意のコンパクト近傍 $V_0 \subseteq G$ を取り固定する. 定理 12.3 より, 任意の正数 ε に対し $1 \in G$ の十分小さい近傍 $V \subseteq V_0$ を取れば,

$$y \in V \quad \Rightarrow \quad |f(xy^{-1}) - f(x)| \leqslant \varepsilon \ \ (\forall x \in G)$$

となる.

$$\mathrm{supp}(R_{y^{-1}}f) \subseteq \mathrm{supp}(f)V \subseteq \mathrm{supp}(f)V_0 \ \ (\forall y \in V)$$

であるから,

$$|f(xy^{-1}) - f(x)| \leqslant \varepsilon\chi_{\mathrm{supp}(f)V_0}(x) \ \ (\forall x \in G, \forall y \in V)$$

なので, (1) より任意の $y \in V$ に対し,

$$\begin{aligned} |\Delta(y) - 1| \int_G f(x)d\mu(x) &= \left| \int_G f(xy^{-1}) - f(x)d\mu(x) \right| \\ &\leqslant \int_G |f(xy^{-1}) - f(x)|d\mu(x) \leqslant \varepsilon\mu(\mathrm{supp}(f)V_0) \end{aligned} \tag{12.16}$$

となる. $f \in C_{c,+}(G)\backslash\{0\}$ だから命題 12.8 より $\int_G f(x)d\mu(x) \in (0, \infty)$ である. よって (12.16) より,

$$y \in V \quad \Rightarrow \quad |\Delta(y) - 1| \leqslant \varepsilon\mu(\mathrm{supp}(f)V_0) \left(\int_G f(x)d\mu(x) \right)^{-1}$$

が成り立つ. $\mathrm{supp}(f)V_0$ はコンパクトなので $\mu(\mathrm{supp}(f)V_0) < \infty$ であり, ε は f, V_0 によらない任意の正数なので $\Delta : G \to (0, \infty)$ は $1 \in G$ において連続である.

(3) 非負値 Borel 関数の非負値 Borel 単関数の各点単調増加列による近似 (命題 5.29) より, f がある $B \in \mathcal{B}_G$ の指示関数である ($f = \chi_B$) 場合を示せば十分である. すなわち,

$$\int_G \chi_B(x)\Delta(x^{-1})d\mu(x) = \mu(B^{-1}) \ \ (\forall B \in \mathcal{B}_G)$$

を示せばよい. Borel 測度 $\nu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ を,

$$\nu(B) := \int_G \chi_{B^{-1}}(x)\Delta(x^{-1})d\mu(x) \ \ (\forall B \in \mathcal{B}_G)$$

として定義し $\nu(B) = \mu(B)$ $(\forall B \in \mathcal{B}_G)$ が成り立つことを示せばよい. (2) より $G \ni x \mapsto \Delta(x)^{-1} \in (0, \infty)$ は連続だから任意のコンパクト集合 $K \subseteq G$ に対し,

$$\nu(K) = \int_G \chi_{K^{-1}}(x)\Delta(x^{-1})d\mu(x) < \infty$$

である. よって G の第二可算性と定理 5.177 より $\nu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ は位相正則測度である. $\Delta : G \to (0, \infty)$ の群準同型性と (1) より, 任意の $y \in G, B \in \mathcal{B}_G$ に対し,

$$\begin{aligned} \nu(yB) &= \int_G \chi_{(yB)^{-1}}(x)\Delta(x^{-1})d\mu(x) = \int_G \chi_{B^{-1}}(xy)\Delta(x)^{-1}d\mu(x) \\ &= \Delta(y) \int_G \chi_{B^{-1}}(xy)\Delta(xy)^{-1}d\mu(x) = \int_G \chi_{B^{-1}}(x)\Delta(x)^{-1}d\mu(x) = \nu(B) \end{aligned}$$

[*197] 定理 1.81 よりそのような U は存在する.

であるから ν は G の Haar 測度である. よって定理 12.15 よりある正数 c が存在し $\nu(B) = c\mu(B)$ $(\forall B \in \mathcal{B}_G)$ が成り立つ. $c = 1$ であることを示せばよい. そこで $c \neq 1$ であると仮定して矛盾を導く. このとき $\Delta : G \to (0, \infty)$ の連続性より単位元 $1 \in G$ のコンパクト対称近傍 V で,

$$|\Delta(x^{-1}) - 1| < \frac{1}{2}|c - 1| \quad (\forall x \in V) \tag{12.17}$$

を満たすものが取れる. 命題 12.8 と V のコンパクト性より,

$$0 < \mu(V) < \infty \tag{12.18}$$

であり, V の対称性と (12.17) より,

$$|c-1|\mu(V) = |\nu(V) - \mu(V)| = \left| \int_G \chi_V(x)(\Delta(x^{-1}) - 1) d\mu(x) \right| \leqslant \frac{1}{2}|c-1|\mu(V)$$

である. よって (12.18) より,

$$|c-1| \leqslant \frac{1}{2}|c-1|$$

が結論され, $c \neq 1$ であることに矛盾する. ゆえに $c = 1$ である.

□

定義 12.19 (ユニモジュラー)**.** 局所コンパクト群がユニモジュラーであるとは, そのモジュラー関数が恒等的に 1 であることを言う.

命題 12.20 (ユニモジュラーの典型例)**.** 離散群, 局所コンパクト可換群, コンパクト群はいずれもユニモジュラーである.

証明. 命題 12.9 より離散群の Haar 測度は数え上げ測度の正数倍であるから, 離散群はユニモジュラーである. また局所コンパクト可換群の Haar 測度は, 可換性より右 Haar 測度でもあるから, モジュラー関数の定義 12.16 よりユニモジュラーである. コンパクト群がユニモジュラーであることを示す. G をコンパクト群, $\Delta : G \to (0, \infty)$ を G のモジュラー関数とする. 定理 12.18 の (2) より $\Delta : G \to (0, \infty)$ は連続であるから, G のコンパクト性よりある有界閉区間 $[a, b] \subseteq (0, \infty)$ が存在し,

$$\Delta(x) \in [a, b] \quad (\forall x \in G) \tag{12.19}$$

が成り立つ. 任意の $x \in G$ を取る. 定理 12.18 の (2) より $\Delta : G \to (0, \infty)$ は群準同型写像であるから, (12.19) より,

$$\Delta(x)^n = \Delta(x^n) \in [a, b] \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ. よって $\Delta(x) = 1$ であるから G はユニモジュラーである. □

命題 12.21. G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ を Haar 測度, $p \in [1, \infty)$ とする. このとき任意の $[f] \in L^p(G, \mu)$ に対し,

$$G \ni y \mapsto L_y[f] := [L_y f] \in L^p(G, \mu)$$

は L^p ノルムで連続である.

証明. μ は Haar 測度なので任意の $[f] \in L^p(G, \mu)$ に対し,

$$\|L_y[f]\|_p = \|[f]\|_p \quad (\forall y \in G)$$

である. また μ は位相正則測度なので定理 5.179 より $L^p(G, \mu)$ において $C_c(G)$ は稠密である. よって任意の $f \in C_c(G)$ に対し,

$$G \ni y \mapsto L_y f \in L^p(G, \mu) \tag{12.20}$$

が L^p ノルムで連続であることを示せば十分である. $L_{y_1} L_{y_2} f = L_{y_1 y_2} f$ $(\forall y_1, y_2 \in G)$ であるから, 単位元 $1 \in G$ における連続性を示せば十分である. $1 \in G$ のコンパクト近傍 V_0 を取り固定する. 任意の正数 ε に対し, 定理 12.3 より $1 \in G$ の近傍 $V \subseteq V_0$ で,

$$y \in V \quad \Rightarrow \quad |L_y f(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad (\forall x \in G)$$

なるものが取れる.

$$\mathrm{supp}(L_y f - f) \subseteq V\,\mathrm{supp}(f) \subseteq V_0\,\mathrm{supp}(f) \quad (\forall y \in V)$$

であるから,

$$|L_y f(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \chi_{V_0\,\mathrm{supp}(f)}(x) \quad (\forall y \in V, \forall x \in G)$$

なので, 任意の $y \in V$ に対し,

$$\|L_y f - f\|_p = \left(\int_G |L_y f(x) - f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon \mu(V_0\,\mathrm{supp}(f))^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つ. $V_0\,\mathrm{supp}(f)$ はコンパクトだから $\mu(V_0\,\mathrm{supp}(f))^{\frac{1}{p}} < \infty$ であり, ε は f, V_0 によらない任意の正数なので, (12.20) は $1 \in G$ において L^p ノルムで連続である. □

定義 12.22 (局所コンパクト群における L^1 と L^p の合成積)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ を Haar 測度, $p \in [1, \infty)$ とする. 任意の $[g] \in L^p(G, \mu)$ に対し, 命題 12.21 より,

$$G \ni y \mapsto L_y[g] \in L^p(G, \mu) \tag{12.21}$$

は Banach 空間 $L^p(G, \mu)$ 値の有界連続関数である. G の σ-コンパクト性 (命題 5.175) より, 連続関数 (12.21) の像は可分*[198]であり, μ は σ-有限であるから, 任意の $f \in \mathcal{L}^1(G, \mu)$ に対し, Banach 空間 $L^p(G, \mu)$ 値関数

$$G \ni y \mapsto f(y) L_y[g] \in L^p(G, \mu)$$

は μ に関して Bochner 積分可能 (定義 5.250) である. そこで任意の $[f] \in L^1(G, \mu)$ に対し,

$$[f] * [g] := \int_G f(y) L_y[g] d\mu(y) \in L^p(G, \mu) \tag{12.22}$$

と定義する. これを $[f] \in L^1(G, \mu)$ と $[g] \in L^p(G, \mu)$ の合成積と言う. $\mu(B) < \infty$ なる任意の $B \in \mathcal{B}_G$ に対し Hölder の不等式 (5.130) より,

$$L^p(G, \mu) \ni [h] \mapsto \int_B h(x) d\mu(x) \in \mathbb{C}$$

は Banach 空間 $L^p(G, \mu)$ 上の有界線型汎関数であるから, Bochner 積分の性質 (定義 5.250) と Fubini の定理 5.85 より,

$$\int_B ([f] * [g])(x) d\mu(x) = \int_G \left(\int_B f(y) g(y^{-1}x) d\mu(x)\right) d\mu(y) = \int_B \left(\int_G f(y) g(y^{-1}x) d\mu(y)\right) d\mu(x)$$

となる. よって μ の σ-有限性と命題 5.57 より, $[f] * [g]$ の代表元は μ-a.e. $x \in G$ で,

$$\int_G f(y) g(y^{-1}x) d\mu(y) \in \mathbb{C}$$

である.

定義 12.23 (局所コンパクト群における L^1 と C_0 の合成積)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ を Haar 測度とする. 任意の $g \in C_0(G)$ に対し, 定理 12.3 より,

$$G \ni y \mapsto L_y g \in C_0(G) \tag{12.23}$$

は Banach 空間 $C_0(G)$ 値の有界連続関数である. G の σ-コンパクト性より, 連続関数 (12.23) の像は可分であり, μ は σ-有限であるから, 任意の $f \in \mathcal{L}^1(G, \mu)$ に対し, Banach 空間 $C_0(G)$ 値関数

$$G \ni y \mapsto f(y) L_y g \in C_0(G)$$

*[198] 命題 1.111 より距離空間の σ-コンパクト集合は可分であることに注意.

は μ に関して Bochner 積分可能 (定義 5.250) である．そこで任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し，

$$[f] * g := \int_G f(y) L_y g d\mu(y) \in C_0(G) \tag{12.24}$$

と定義する．これを $[f] \in L^1(G,\mu)$ と $g \in C_0(G)$ の合成積と言う．任意の $x \in G$ に対し，

$$\delta_x : C_0(G) \ni h \mapsto h(x) \in \mathbb{C}$$

は Banach 空間 $C_0(G)$ 上の有界線型汎関数であるから, Bochner 積分の性質 (定義 5.250) より，

$$([f] * g)(x) = \delta_x([f] * g) = \int_G f(y) \delta_x(L_y g) d\mu(y) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) d\mu(y)$$

である．

命題 12.24 (Young の不等式)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を Haar 測度, $p \in [1,\infty)$ とする．このとき，

(1) 任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$, $[g] \in L^p(G,\mu)$ に対し，

$$\|[f] * [g]\|_p \leqslant \|[f]\|_1 \|[g]\|_p$$

が成り立つ．

(2) 任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$, $g \in C_0(G)$ に対し，

$$\|[f] * g\| \leqslant \|[f]\|_1 \|g\|$$

が成り立つ．

証明.　(1) 合成積の定義 12.22 と Bochner 積分の基本性質 (命題 5.251) より，

$$\|[f] * [g]\|_p = \left\| \int_G f(y) L_y[g] d\mu(y) \right\|_p \leqslant \int_G \|f(y) L_y[g]\|_p d\mu(y) = \|[f]\|_1 \|[g]\|_p.$$

(2) 合成積の定義 12.24 と Bochner 積分の基本性質 (命題 5.251) より，

$$\|[f] * g\| = \left\| \int_G f(y) L_y g d\mu(y) \right\| \leqslant \int_G \|f(y) L_y g\| d\mu(y) = \|[f]\|_1 \|g\|.$$

□

定義 12.25 (L^1 群環)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度, $\Delta : G \to (0,\infty)$ を G のモジュラー関数とする．任意の $f : G \to \mathbb{C}$ に対し, $f^* : G \to \mathbb{C}$ を，

$$f^*(x) := \Delta(x^{-1}) \overline{f(x^{-1})} \quad (\forall x \in G)$$

と定義する．$f \in \mathcal{L}^1(G,\mu)$ ならば定理 12.18 の (3) より，

$$\int_G |f^*(x)| d\mu(x) = \int_G |f(x^{-1})| \Delta(x^{-1}) d\mu(x) = \int_G |f(x)| d\mu(x)$$

であるので $f^* \in \mathcal{L}^1(G,\mu)$, $\|f^*\|_1 = \|f\|_1$ である．そこで，

$$L^1(G,\mu) \ni [f] \mapsto [f]^* := [f^*] \in L^1(G,\mu) \tag{12.25}$$

なる等長反線型写像を定義する．このとき Banach 空間 $L^1(G,\mu)$ は, 合成積

$$L^1(G,\mu) \times L^1(G,\mu) \ni ([f],[g]) \mapsto [f] * [g] \in L^1(G,\mu) \tag{12.26}$$

を乗法, (12.25) を $*$-演算として Banach $*$-環をなす (次の命題 12.26)．この Banach $*$-環 $L^1(G,\mu)$ を G の L^1 群環と言う．

命題 12.26. Banach 空間 $L^1(G,\mu)$ は (12.26) を乗法, (12.25) を $*$-演算として Banach $*$-環をなす.

証明. 任意の $x \in G$ と任意の $[f],[g] \in L^1(G,\mu)$ に対し, 合成積の定義 12.22 と Bochner 積分の基本性質 (命題 5.251) より,

$$\begin{aligned} L_x([f]*[g]) &= L_x\left(\int_G f(y)L_y[g]d\mu(y)\right) = \int_G L_x\left(f(y)L_y[g]\right)d\mu(y) = \int_G f(y)L_{xy}[g]d\mu(y) \\ &= \int_G f(x^{-1}y)L_y[g]d\mu(y) = (L_x[f])*[g] \end{aligned} \tag{12.27}$$

[*199]である. (12.26) は合成積の定義 12.22 より明らかに双線型写像であり, Young の不等式 (命題 12.24) より有界 (ノルムは 1 以下) である. よって任意の $[f],[g],[h] \in L^1(G,\mu)$ に対し, Bochner 積分の基本性質 (命題 5.251) より,

$$\begin{aligned} ([f]*[g])*[h] &= \left(\int_G f(y)L_y[g]d\mu(y)\right)*[h] = \int_G \left((f(y)L_y[g])*[h]\right)d\mu(y) \\ &= \int_G f(y)\left((L_y[g])*[h]\right)d\mu(y) = \int_G f(y)L_y([g]*[h])d\mu(y) = [f]*([g]*[h]) \end{aligned}$$

[*200]となる. ただし 4 番目の等号において (12.27) を用いた. これより $L^1(G,\mu)$ は (12.26) を乗法として Banach 環である. 任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し,

$$f^{**}(x) = \Delta(x^{-1})\overline{f^*(x^{-1})} = \Delta(x^{-1})\Delta(x)f(x) = f(x) \quad (\forall x \in G)$$

であるから $[f]^{**} = [f]$ である. また任意の $[f],[g] \in L^1(G,\mu)$ に対し $[f]*[g]$ の代表元 h は μ-a.e. $x \in G$ で,

$$h(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)d\mu(y)$$

(定義 12.22 を参照) であるので, $([f]*[g])^*$ の代表元 h^* は μ-a.e. $x \in G$ で,

$$\begin{aligned} h^*(x) &= \Delta(x^{-1})\overline{h(x^{-1})} = \Delta(x^{-1})\int_G \overline{f(y)g(y^{-1}x^{-1})}d\mu(y) \\ &= \Delta(x^{-1})\int_G \left(\Delta(y^{-1})f^*(y^{-1})\right)\left(\Delta(xy)g^*(xy)\right)d\mu(y) \\ &= \int_G f^*(y^{-1})g^*(xy)d\mu(y) = \int_G g^*(y)f^*(y^{-1}x)d\mu(y) \end{aligned}$$

である. よって $([f]*[g])^*$ の代表元 h^* は $[g]^* * [f]^*$ の代表元と μ-a.e. $x \in G$ で一致するので,

$$([f]*[g])^* = [g]^* * [f]^*$$

が成り立つ. ゆえに $L^1(G,\mu)$ は (12.25) を $*$-演算として Banach $*$-環である. □

定理 12.27 ($L^1(G,\mu)$ の近似単位元の存在)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度とする. このとき $C_{c,+}(G)$ の列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で次を満たすものが存在する.

(1) $\int_G \varphi_n(x)d\mu(x) = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
(2) 単位元 $1 \in G$ の任意の近傍 U に対し $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subseteq U$ $(\forall n \geqslant n_0)$ を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する.
(3) $\varphi_n^* = \varphi_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

そしてこの $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Banach $*$-環 $L^1(G,\mu)$ の近似単位元 (定義 9.67) である.

証明. G は第二可算公理を満たすので第一可算公理を満たす. よって単位元 $1 \in G$ の可算基本近傍系 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$U_n^{-1} = U_n, \quad U_{n+1} \subseteq U_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

[*199] $L^1(G,\mu) \ni [h] \mapsto L_x[h] \in L^1(G,\mu)$ が有界線型作用素であることに注意.
[*200] $L^1(G,\mu) \ni [w] \mapsto [w]*[h] \in L^1(G,\mu)$ が有界線型作用素であることに注意.

を満たすものが取れる. Urysohn の補題 5.165 より各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\psi_n \in C_{c,+}(G)$ で,

$$\mathrm{supp}(\psi_n) \subseteq U_n, \quad \int_G \psi_n(x)d\mu(x) = 1$$

を満たすものが取れる. そこで,

$$\varphi_n := \frac{1}{2}(\psi_n + \psi_n^*) \in C_{c,+}(G) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおくと,

$$\mathrm{supp}(\varphi_n) \subseteq \mathrm{supp}(\psi_n) \cup \mathrm{supp}(\psi_n)^{-1} \subseteq U_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

$$\int_G \varphi_n(x)d\mu(x) = \frac{1}{2}\left(\int_G \psi_n(x)d\mu(x) + \int_G \psi_n^*(x)d\mu(x)\right) = 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

となる. よって $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は (1), (2), (3) を満たす. (1), (2), (3) を満たす $C_{c,+}(G)$ の列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Banach $*$-環 $L^1(G,\mu)$ の近似単位元であることを示す. 任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し, (1) と合成積の定義 12.22 より,

$$[\varphi_n] * [f] - [f] = \int_G \varphi_n(y)(L_y[f] - [f])d\mu(y) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから, Bochner 積分の性質 (命題 5.251) より,

$$\|[\varphi_n] * [f] - [f]\|_1 \leqslant \int_G \varphi_n(y)\|L_y[f] - [f]\|_1 d\mu(y) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であり, 命題 12.21 より $G \ni y \mapsto L_y[f] \in L^1(G,\mu)$ は $1 \in G$ において連続であるから, (1), (2) より,

$$\|[\varphi_n] * [f] - [f]\|_1 \leqslant \int_G \varphi_n(y)\|L_y[f] - [f]\|_1 d\mu(y) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる. よって,

$$\lim_{n\to\infty} [\varphi_n] * [f] = [f] \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

が成り立つ. また (3) より任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し,

$$[f] * [\varphi_n] = ([\varphi_n] * [f]^*)^* \to [f]^{**} = [f] \quad (n \to \infty)$$

となるから, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^1(G,\mu)$ の近似単位元である. □

命題 12.28 (局所コンパクト群が離散群であることと L^1 群環が単位元を持つことの同値性)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度とする. このとき次は互いに同値である.

(1) L^1 群環 $L^1(G,\mu)$ は単位元を持つ.
(2) G は離散群である.

証明. (1) ⇒ (2) を示す. $L^1(G,\mu)$ が単位元を持つとし, それを $[f] \in L^1(G,\mu)$ とする. 定理 12.27 における $L^1(G,\mu)$ の近似単位元 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取ると,

$$[\varphi_n] = [\varphi_n] * [f] \to [f] \quad (n \to \infty) \tag{12.28}$$

となる. 定理 12.27 の条件 (3) より G の単位元 $1 \in G$ の任意の近傍 U に対し $[\chi_U \varphi_n] = [\varphi_n]$ $(\forall n \geqslant n_0)$ なる $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在するので, (12.28) より,

$$[\chi_U f] = \lim_{n\to\infty} [\chi_U \varphi_n] = \lim_{n\to\infty} [\varphi_n] = [f] \tag{12.29}$$

となる. G の単位元 $1 \in G$ の可算基本近傍系 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$U_{n+1} \subseteq U_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たすものを取れば, (12.29) と Lebesgue 優収束定理より,

$$1 = \|f\|_1 = \int_G |f(x)|d\mu(x) = \int_G |f(x)|\chi_{U_n}(x)d\mu(x) \to \int_G |f(x)|\chi_{\{1\}}(x)d\mu(x) = |f(1)|\mu(\{1\}) \quad (n \to \infty)$$

となる．ゆえに $\mu(\{1\}) > 0$ であり，

$$\mu(\{x\}) = \mu(x\{1\}) = \mu(\{1\}) > 0 \quad (\forall x \in G)$$

である．これより $\mu(B) < \infty$ を満たす $B \in \mathcal{B}_G$ は有限集合である．任意の $x_0 \in G$ に対し x_0 の開近傍 U で $\overline{U}$ がコンパクトであるものを取れば $\mu(U) \leqslant \mu(\overline{U}) < \infty$ なので U は有限集合である．そこで $U = \{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$ とおけば，

$$\{x_0\} = U \backslash \{x_1, \cdots, x_m\}$$

であるから $\{x_0\}$ は開集合である．ゆえに任意の一点集合が開集合なので G は離散群である．
(2) ⇒ (1) を示す．G が離散群ならば命題 12.9 より G の Haar 測度 μ は数え上げ測度であり，$L^1(G, \mu) = \ell^1(G)$ である．任意の $f \in \ell^1(G)$, 任意の $x \in G$ に対し，

$$(\chi_{\{1\}} * f)(x) = \sum_{y \in G} \chi_{\{1\}}(y) f(y^{-1}x) = f(x),$$

$$(f * \chi_{\{1\}})(x) = \sum_{y \in G} f(y) \chi_{\{1\}}(y^{-1}x) = f(x)$$

であるから $\chi_{\{1\}}$ は G の L^1 群環 $\ell^1(G)$ の単位元である． □

定義 12.29 (Dirac 測度)**.** G を局所コンパクト群とする．任意の $x \in G$ に対し Borel 測度

$$\delta_x : \mathcal{B}_G \ni B \mapsto \chi_B(x) \in [0, 1]$$

を x における Dirac 測度と言う．

定義 12.30 (測度群環)**.** G を局所コンパクト群, $M(G)$ を G 上の複素数値 Borel 測度[*201]全体に全変動ノルムを入れた Banach 空間[*202]とする．任意の $\nu_1, \nu_2 \in M(G)$ に対し，

$$(\nu_1 * \nu_2)(B) := \int_G \left(\int_G \chi_B(xy) d\nu_1(x) \right) d\nu_2(y) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_G)$$

とおけば Lebesgue 優収束定理より $\nu_1 * \nu_2 \in M(G)$ である．これを $\nu_1, \nu_2 \in M(G)$ の合成積と言う．また任意の $\nu \in M(G)$ に対し $\nu^* \in M(G)$ を，

$$\nu^*(B) := \overline{\nu(B^{-1})} \quad (\forall B \in \mathcal{B}_G)$$

と定義する．このとき次の命題 12.31 より Banach 空間 $M(G)$ は，

$$M(G) \times M(G) \ni (\nu_1, \nu_2) \mapsto \nu_1 * \nu_2 \in M(G) \tag{12.30}$$

を乗法，

$$M(G) \ni \nu \mapsto \nu^* \in M(G) \tag{12.31}$$

を $*$-演算, G の単位元 $1 \in G$ における Dirac 測度

$$\delta_1 : \mathcal{B}_G \ni B \mapsto \chi_B(1) \in [0, 1] \tag{12.32}$$

を単位元として単位的 Banach $*$-環をなす．この単位的 Banach $*$-環 $M(G)$ を G の測度群環と言う．

命題 12.31. $M(G)$ は (12.30) を乗法, (12.31) を $*$-演算として Banach $*$-環をなす．そして G の単位元 $1 \in G$ における Dirac 測度 (12.32) を単位元とする．

[*201] G は第二可算公理を満たすので定理 5.177 より G 上の複素数値 Borel 測度は自動的に位相正則測度であることに注意.
[*202] 定義 5.186 と Riesz-Markov-角谷の表現定理の系 5.188 を参照.

証明. (12.30) がノルムが 1 以下の有界双線型写像であること, (12.31) が全変動ノルムを保存する反線型写像であることは自明である.[*203] また, 任意の $\nu \in M(G)$ に対し,

$$\nu^{**}(B) = \overline{\nu^*(B^{-1})} = \nu(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

であるので $\nu^{**} = \nu$ である. 任意の有界 Borel 関数は Borel 単関数の列によって一様近似できる (命題 5.129) ので, 任意の有界 Borel 関数 $f : G \to \mathbb{C}$ と任意の $\nu_1, \nu_2, \nu \in M(G)$ に対し,

$$\int_G f(x) d(\nu_1 * \nu_2)(x) = \int_G \left(\int_G f(xy) d\nu_1(x) \right) d\nu_2(y), \tag{12.33}$$

$$\int_G f(x) d\nu^*(x) = \overline{\int_G \overline{f(x^{-1})} d\nu(x)} \tag{12.34}$$

が成り立つ. 任意の $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in M(G)$ に対し (12.33) より,

$$\begin{aligned}(\nu_1 * (\nu_2 * \nu_3))(B) &= \int_G \left(\int_G \chi_B(xy) d\nu_1(x) \right) d(\nu_2 * \nu_3)(y) = \int_G \left(\int_G \left(\int_G \chi_B(xyz) d\nu_1(x) \right) d\nu_2(y) \right) d\nu_3(z) \\ &= \int_G \left(\int_G \chi_B(xz) d(\nu_1 * \nu_2)(x) \right) d\nu_3(z) = ((\nu_1 * \nu_2) * \nu_3)(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_G)\end{aligned}$$

が成り立ち, 任意の $\nu_1, \nu_2 \in M(G)$ に対し (12.33), (12.34) と Fubini の定理 5.85 より,

$$\begin{aligned}(\nu_1 * \nu_2)^*(B) &= \overline{(\nu_1 * \nu_2)(B^{-1})} = \overline{\int_G \left(\int_G \chi_{B^{-1}}(xy) d\nu_1(x) \right) d\nu_2(y)} = \overline{\int_G \left(\int_G \chi_B(y^{-1}x^{-1}) d\nu_1(x) \right) d\nu_2(y)} \\ &= \overline{\int_G \overline{\left(\int_G \chi_B(y^{-1}x) d\nu_1^*(x) \right)} d\nu_2(y)} = \int_G \left(\int_G \chi_B(yx) d\nu_1^*(x) \right) d\nu_2^*(y) \\ &= \int_G \left(\int_G \chi_B(yx) d\nu_2^*(y) \right) d\nu_1^*(x) = (\nu_2^* * \nu_1^*)(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_G)\end{aligned}$$

が成り立つ. よって $M(G)$ は (12.30) を乗法, (12.31) を $*$-演算として Banach $*$-環をなす. 任意の $\nu \in M(G)$ に対し,

$$(\delta_1 * \nu)(B) = \int_G \left(\int_G \chi_B(xy) d\delta_1(x) \right) d\nu(y) = \int_G \chi_B(y) d\nu(y) = \nu(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_G),$$

$$(\nu * \delta_1)(B) = \int_G \left(\int_G \chi_B(xy) d\nu(x) \right) d\delta_1(y) = \int_G \chi_B(x) d\nu(x) = \nu(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_G)$$

だから δ_1 は $M(G)$ の単位元である. □

定理 12.32 (L^1 群環の測度群環への埋め込み)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ を G の Haar 測度とする. 任意の $[f] \in L^1(G, \mu)$ に対し $\mu_{[f]} \in M(G)$ を,

$$\mu_{[f]} : \mathcal{B}_G \ni B \mapsto \int_B f(x) d\mu(x) \in \mathbb{C}$$

とすると,

$$L^1(G, \mu) \ni [f] \mapsto \mu_{[f]} \in M(G) \tag{12.35}$$

は等長 $*$-環準同型写像である.

証明. (12.35) が線型写像であることは明らかであり, ノルムを保存することは命題 5.112 による. 定理 12.18 の (3) より任意の $[f] \in L^1(G, \mu)$ に対し,

$$\begin{aligned}\mu_{[f]^*}(B) &= \int_G f^*(x) \chi_B(x) d\mu(x) = \int_G \overline{f(x^{-1})} \Delta(x^{-1}) \chi_B(x) d\mu(x) \\ &= \int_G \overline{f(x)} \chi_{B^{-1}}(x) d\mu(x) = \overline{\mu_{[f]}(B^{-1})} = \mu_{[f]}^*(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_G)\end{aligned}$$

[*203] 複素数値測度による積分の定義 5.116, 全変動の定義 5.110 を参照.

であるから, (12.35) は $*$-演算を保存する. また任意の $[f],[g] \in L^1(G,\mu)$ に対し, Fubini の定理 5.85 より,

$$\begin{aligned}\mu_{[f]*[g]}(B) &= \int_G \chi_B(x)([f]*[g])(x)d\mu(x) = \int_G \left(\int_G \chi_B(x)f(y)g(y^{-1}x)d\mu(x)\right)d\mu(y) \\ &= \int_G \left(\int_G \chi_B(yx)f(y)g(x)d\mu(x)\right)d\mu(y) = \int_G \left(\int_G \chi_B(yx)f(y)g(x)d\mu(y)\right)d\mu(x) \\ &= \int_G \left(\int_G \chi_B(yx)d\mu_{[f]}(y)\right)d\mu_{[g]}(x) = (\mu_{[f]}*\mu_{[g]})(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_G)\end{aligned}$$

であるから, (12.35) は乗法を保存する. □

命題 12.33 (局所コンパクト群が可換であることと L^1 群環 (測度群環) が可換であることの同値性)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度とする. このとき次は互いに同値である.

(1) G は可換群である.
(2) 測度群環 $M(G)$ は可換である.
(3) L^1 群環 $L^1(G,\mu)$ は可換である.

証明. (1) ⇒ (2) を示す. G が可換ならば, 任意の $\nu_1,\nu_2 \in M(G)$ に対し, Fubini の定理 5.85 より,

$$\begin{aligned}(\nu_1*\nu_2)(B) &= \int_G \left(\int_G \chi_B(xy)d\nu_1(x)\right)d\nu_2(y) = \int_G \left(\int_G \chi_B(yx)d\nu_1(x)\right)d\nu_2(y) \\ &= \int_G \left(\int_G \chi_B(yx)d\nu_2(y)\right)d\nu_1(x) = (\nu_2*\nu_1)(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_G)\end{aligned}$$

だから $\nu_1*\nu_2 = \nu_2*\nu_1$ である. よって測度群環 $M(G)$ は可換である.
(2) ⇒ (3) は定理 12.32 による.
(3) ⇒ (1) を示す. $L^1(G,\mu)$ が可換であるとする. 任意の $f,g \in C_c(G)$, 任意の $x \in G$ に対し, 定理 12.18 の (3) より,

$$\begin{aligned}\int_G f(y)g(y^{-1}x)d\mu(y) &= (f*g)(x) = (g*f)(x) = \int_G g(y)f(y^{-1}x)d\mu(y) \\ &= \int_G g(xy)f(y^{-1})d\mu(y) = \int_G f(y)g(xy^{-1})\Delta(y^{-1})d\mu(y)\end{aligned}$$

であるから,

$$\int_G f(y)(g(y^{-1}x) - g(xy^{-1}))\Delta(y^{-1})d\mu(y) = 0$$

である. $C_c(G)$ は $L^1(G,\mu)$ で稠密 (定理 5.179) であることと空でない開集合の Haar 測度は正 (命題 12.8) であることから, 任意の $g \in C_c(G)$, 任意の $x,y \in G$ に対し,

$$g(y^{-1}x) - g(xy^{-1}) = 0 \quad (\forall x,y \in G)$$

が成り立つ. Urysohn の補題 5.165 よりこれは $xy^{-1} = y^{-1}x$ $(\forall x,y \in G)$ を意味するので G は可換である.

□

12.2 局所コンパクト群のユニタリ表現, 正定値関数に対する GNS 表現, Gelfand-Raikov の定理

この節で扱う Hilbert 空間は断ることなく全て $\mathbb{C}$ 上のものとする.

定義 12.34 (局所コンパクト群のユニタリ表現)**.** G を局所コンパクト群, $\mathcal{H} \neq \{0\}$ を Hilbert 空間, $\mathcal{U}(\mathcal{H}) \subseteq B(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素全体のなす乗法群とする. SOT (定義 10.9) に関して連続な群準同型写像 $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ を G の $\mathcal{H}$ 上へのユニタリ表現と言う. そしてこのとき $\mathcal{H}$ を G のユニタリ表現 π の表現空間と言い, $\mathcal{H}_\pi$ と表す. また $\dim(\mathcal{H}_\pi)$ を π の次元と言い, $\dim(\pi)$ とも表す.

例 12.35 (局所コンパクト群の正則表現)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度とする. Hilbert 空間 $L^2(G,\mu)$ を考える.

$$\pi(x)[f] := [L_x f] \ \ (\forall x \in G, \forall [f] \in L^2(G,\mu))$$

とおくと, 明らかに $\pi(x) \in \mathcal{U}(L^2(G,\mu))$ $(\forall x \in G)$ であり, $\pi : G \to \mathcal{U}(L^2(G,\mu))$ は群準同型写像である. そして命題 12.21 より $\pi : G \to \mathcal{U}(L^2(G,\mu))$ は SOT に関して連続である. よって π は G の Hilbert 空間 $L^2(G,\mu)$ 上へのユニタリ表現である. これを G の正則表現と言う.

定義 12.36 (ユニタリ表現の部分表現, 既約性)**.** G を局所コンパクト群, π を G のユニタリ表現とする. $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}_\pi$ が $\pi(x)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ $(\forall x \in G)$ を満たすとき $\mathcal{K}$ は π 不変であると言う. π 不変な $\{0\}$ ではない閉部分空間 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}_\pi$ に対し,

$$\pi|_{\mathcal{K}}(x)v := \pi(x)v \in \mathcal{K} \ \ (\forall x \in G, \forall v \in \mathcal{K})$$

とおくと, $\pi|_{\mathcal{K}}(x) \in \mathcal{U}(\mathcal{K})$ であり,

$$\pi|_{\mathcal{K}} : G \ni x \mapsto \pi|_{\mathcal{K}}(x) \in \mathcal{U}(\mathcal{K})$$

は G の $\mathcal{K}$ 上へのユニタリ表現である[*204]. $\pi|_{\mathcal{K}}$ を π の $\mathcal{K}$ 上への制限と言い, このようなユニタリ表現を π の部分表現と言う. π 不変な閉部分空間が $\{0\}$ と $\mathcal{H}$ のみの場合, π は既約であると言う.

定義 12.37 (ユニタリ表現の巡回ベクトル)**.** G を局所コンパクト群, π を G のユニタリ表現とする. 任意の $v \in \mathcal{H}_\pi$ に対し,

$$\pi(G)v := \mathrm{span}\{\pi(x)v : x \in G\}$$

と定義する. $\pi(G)v$ が $\mathcal{H}_\pi$ で稠密であるとき, v を π の巡回ベクトルと言う.

注意 12.38 (巡回ベクトルを持つ部分表現)**.** G を局所コンパクト群, π を G のユニタリ表現とする. 任意の $v \in \mathcal{H}_\pi \backslash \{0\}$ に対し,

$$\mathcal{K}_v := \overline{\pi(G)v} \subseteq \mathcal{H}_\pi$$

とおけば $\mathcal{K}_v$ は π 不変な $\{0\}$ ではない閉部分空間であり, π の $\mathcal{K}$ 上への制限は $v \in \mathcal{K}$ を巡回ベクトルとして持つ.

注意 12.39 (既約なユニタリ表現と巡回ベクトル)**.** G を局所コンパクト群, π を G の既約なユニタリ表現とする. このとき注意 12.38 より任意の $v \in \mathcal{H}_\pi \backslash \{0\}$ に対し v は π の巡回ベクトルである.

定義 12.40 (繋絡作用素)**.** G を局所コンパクト群, π_1, π_2 を G のユニタリ表現とする. $T \in B(\mathcal{H}_{\pi_1}, \mathcal{H}_{\pi_2})$ が,

$$T\pi_1(x) = \pi_2(x)T \ \ (\forall x \in G)$$

を満たすとき, T を π_1, π_2 の繋絡作用素と言う. π_1, π_2 の繋絡作用素全体を $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ と表す. また $\mathcal{C}(\pi) := \mathcal{C}(\pi, \pi)$ と表す.

命題 12.41 (繋絡作用素全体の基本性質)**.** G を局所コンパクト群, π_1, π_2, π_3 を G のユニタリ表現とする. このとき,

(1) $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ は $B(\mathcal{H}_{\pi_1}, \mathcal{H}_{\pi_2})$ の線型部分空間である.
(2) 任意の $T \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$, $S \in \mathcal{C}(\pi_2, \pi_3)$ に対し $ST \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_3)$ が成り立つ.
(3) 任意の $T \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ に対し $T^* \in \mathcal{C}(\pi_2, \pi_1)$ が成り立つ.

証明. 全て容易に示せる. □

定義 12.42 (ユニタリ表現のユニタリ同値)**.** G を局所コンパクト群, π_1, π_2 を G のユニタリ表現とする. $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ がユニタリ作用素 (定義 5.143) を含むとき, π_1, π_2 はユニタリ同値であると言い, $\pi_1 \sim \pi_2$ と表す. 命題 12.41 よりこの $\sim$ は G のユニタリ表現全体における同値関係 (定義 2.21) である.

定理 12.43 (Schur の補題)**.** G を局所コンパクト群, π を G のユニタリ表現とする. このとき次は互いに同値である.

[*204] $\mathcal{K}$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間なので $\mathcal{H}$ の内積により Hilbert 空間である.

(1) π は既約.
(2) $\mathcal{C}(\pi) = \mathbb{C}1$.

証明. $\mathcal{C}(\pi) \subseteq B(\mathcal{H}_\pi)$ は $\pi(G) \subseteq B(\mathcal{H}_\pi)$ の可換子環 (定義 10.175) $\pi(G)'$ に他ならない. そして $\pi(G)' \subseteq B(\mathcal{H}_\pi)$ は von Neumann 環 (定義 10.179) であるから, 定理 10.186 の (1) より,

$$\mathcal{C}(\pi) = \pi(G)' = \overline{\mathcal{P}(\pi(G)')}^{\|\cdot\|} \tag{12.36}$$

である. ただし $\mathcal{P}(\pi(G)')$ は von Neumann 環 $\pi(G)'$ の射影全体である. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. 任意の $P \in \mathcal{P}(\pi(G)')$ に対し $\mathrm{Ran}(P) \subseteq \mathcal{H}_\pi$ は π 不変な閉部分空間であるから $\mathrm{Ran}(P)$ は $\mathcal{H}_\pi$ か $\{0\}$ である. よって P は 1 か 0 なので (12.36) より $\mathcal{C}(\pi) = \mathbb{C}1$ である.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとする. $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}_\pi$ を π 不変な閉部分空間とし, $\mathcal{K}$ の上への射影作用素 (定義 10.7) を $P \in B(\mathcal{H}_\pi)$ とおくと,

$$\pi(x)P = P\pi(x)P \quad (\forall x \in G)$$

であるから,

$$P\pi(x) = (\pi(x^{-1})P)^* = (P\pi(x^{-1})P)^* = P\pi(x)P = \pi(x)P \quad (\forall x \in G)$$

である. よって $P \in \mathcal{C}(\pi) = \mathbb{C}1$ であるから $P = \alpha 1$ なる $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在し, $P^2 = P$ であることから α は 1 か 0, 従って P は 1 か 0 である. ゆえに $\mathcal{K}$ は $\mathcal{H}_\pi$ か $\{0\}$ であるので π は既約である. □

系 12.44 (Schur の補題の系)**.** G を局所コンパクト群, π_1, π_2 を G の既約なユニタリ表現とする. このとき次は互いに同値である.

(1) π_1, π_2 はユニタリ同値.
(2) $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2) \neq \{0\}$.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) はユニタリ同値の定義より自明である. (2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとし, ノルムが 1 の任意の $T \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ を取る. このとき命題 12.41 より $T^*T \in \mathcal{C}(\pi_1), TT^* \in \mathcal{C}(\pi_2)$ であり, π_1, π_2 は既約なので Schur の補題 12.43 より $T^*T \in \mathbb{C}1, TT^* \in \mathbb{C}1$ である. ここで $\|T^*T\| = \|T\|^2 = 1, \|TT^*\| = \|T^*\| = \|T\| = 1$ であり, $T^*T \in B(\mathcal{H}_{\pi_1}), TT^* \in B(\mathcal{H}_{\pi_2})$ は有界非負自己共役作用素なので $T^*T = 1, TT^* = 1$ である. ゆえに $T : \mathcal{H}_{\pi_1} \to \mathcal{H}_{\pi_2}$ はユニタリ作用素であるから π_1, π_2 はユニタリ同値である. □

定義 12.45 (ユニタリ表現の直和)**.** G を局所コンパクト群, J を空でない集合とし, 各 $j \in J$ に対し G のユニタリ表現 $\pi_j : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_{\pi_j})$ が与えられているとする. このとき,

$$\left(\oplus_{j\in J}\pi_j\right)(x)(v_j)_{j\in J} := (\pi_j(x)v_j)_{j\in J} \quad \left(\forall x \in G, \forall (v_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}_{\pi_j}\right)$$

として, G の直和 Hilbert 空間 $\bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}_j$ 上へのユニタリ表現 $\oplus_{j\in J}\pi_j$ が定義できる. これを $(\pi_j)_{j\in J}$ の直和と言う.

命題 12.46 (巡回ベクトルを持つユニタリ表現の巡回ベクトル込みのユニタリ同値条件)**.** G を局所コンパクト群, $(\pi_1, v_1), (\pi_2, v_2)$ をそれぞれ G のユニタリ表現とその巡回ベクトル (定義 12.37) の組とする. このとき次は互いに同値である.

(1) $(\pi_1(x)v_1 \mid v_1) = (\pi_2(x)v_2 \mid v_2)$ $(\forall x \in G)$.
(2) ユニタリ作用素 $U \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ で $Uv_1 = v_2$ なるものが存在する (特に π_1, π_2 はユニタリ同値).

また (1), (2) が成り立つとき, (2) におけるユニタリ作用素 $U \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ は,

$$U\pi_1(x)v_1 = \pi_2(x)v_2 \quad (\forall x \in G) \tag{12.37}$$

によって特徴付けられる.

証明. (2) が成り立つとすると,

$$(\pi_2(x)v_2 \mid v_2) = (\pi_2(x)Uv_1 \mid Uv_1) = (U^*\pi_2(x)Uv_1 \mid v_1) = (\pi_1(x)v_1 \mid v_1) \quad (\forall x \in G)$$

であるから (1) が成り立つ.
(1) ⇒ (2) を示す. (1) が成り立つとすると,

$$(\pi_1(x)v_1 \mid \pi_1(y)v_1) = (\pi_1(y^{-1}x)v_1 \mid v_1) = (\pi_2(y^{-1}x)v_2 \mid v_2) = (\pi_2(x)v_2 \mid \pi_2(y)v_2) \quad (\forall x, y \in G)$$

であるから, $\pi_1(G)v_1 = \mathrm{span}\{\pi_1(x)v_1 : x \in G\}$ から $\pi_2(G)v_2 = \mathrm{span}\{\pi_2(x)v_2 : x \in G\}$ の上への等長線型同型写像 U_0 で,

$$U_0\pi_1(x)v_1 = \pi_2(x)v_2 \quad (\forall x \in G)$$

を満たすものが定義できる. v_j は π_j の巡回ベクトルなので $\mathcal{H}_{\pi_j} = \overline{\pi_j(G)v_j}$ $(j = 1, 2)$ であるから $U_0 : \pi_1(G)v_1 \to \mathcal{H}_{\pi_2}$ の $\mathcal{H}_{\pi_1}$ への一意拡張 (命題 3.19) $U : \mathcal{H}_{\pi_1} \to \mathcal{H}_{\pi_2}$ はユニタリ作用素である. U は (12.37) を満たすので特に $Uv_1 = v_2$ である. そして,

$$(U\pi_1(x))\pi_1(y)v_1 = U\pi_1(xy)v_1 = \pi_2(xy)v_2 = \pi_2(x)\pi_2(y)v_2 = (\pi_2(x)U)\pi_1(y)v_1 \quad (\forall x, y \in G)$$

であるから, $\mathcal{H}_{\pi_1} = \overline{\pi_1(G)v_1}$ より,

$$U\pi_1(x) = \pi_2(x)U \quad (\forall x \in G)$$

が成り立つ. よって $U \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ であるので (2) が成り立つ. □

定義 12.47 (L^1 群環の表現)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ を G の Haar 測度, $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. Banach $*$-環 $L^1(G, \mu)$ から C^*-環 $B(\mathcal{H})$ への $*$-環準同型写像 $\pi : L^1(G, \mu) \to B(\mathcal{H})$ (定理 9.78 より自動的にノルム減少であることに注意) で,

$$\pi(L^1(G, \mu))\mathcal{H} = \mathrm{span}\left\{\pi([f])v : [f] \in L^1(G, \mu), v \in \mathcal{H}\right\}$$

が $\mathcal{H}$ で稠密であるものを $L^1(G, \mu)$ の $\mathcal{H}$ 上への表現と言う.

命題 12.48 (局所コンパクト群のユニタリ表現の L^1 群環の表現への拡張)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ を G の Haar 測度とし, π を G のユニタリ表現とする. 任意の $[f] \in L^1(G, \mu)$, 任意の $v \in \mathcal{H}_\pi$ に対し,

$$\widetilde{\pi}([f])v := \int_G f(x)\pi(x)v d\mu(x) \in \mathcal{H}_\pi$$

と定義する. ただし右辺は Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\pi$ 値関数 $G \ni x \mapsto f(x)\pi(x)v \in \mathcal{H}_\pi$ の Bochner 積分 (定義 5.250) である.*205 このとき,

$$\widetilde{\pi}([f]) : \mathcal{H}_\pi \ni v \mapsto \widetilde{\pi}([f])v \in \mathcal{H}_\pi \tag{12.38}$$

は有界線型作用素であり,

$$\widetilde{\pi} : L^1(G, \mu) \ni [f] \mapsto \widetilde{\pi}([f]) \in B(\mathcal{H}_\pi) \tag{12.39}$$

は $L^1(G, \mu)$ の表現である.

証明. 任意の $[f] \in L^1(G, \mu)$ に対し Bochner 積分の性質 (命題 5.251) より,

$$\|\widetilde{\pi}([f])v\| = \left\|\int_G f(x)\pi(x)v d\mu(x)\right\| \leqslant \int_G \|f(x)\pi(x)v\| d\mu(x) = \|[f]\|_1\|v\| \quad (\forall v \in \mathcal{H}_\pi)$$

*205 ユニタリ表現の定義 12.34 より $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ は SOT に関して連続であるから, $G \ni x \mapsto \pi(x)v \in \mathcal{H}_\pi$ は連続である. G は第二可算公理を満たすとしているので σ-コンパクト (命題 5.175) であるから連続関数 $G \ni x \mapsto \pi(x)v \in \mathcal{H}_\pi$ の像は σ-コンパクト, 従って可分 (命題 1.111) である.

であるから, (12.38) はノルムが $\|[f]\|_1$ 以下の有界線型作用素である. よって (12.39) はノルム減少な線型写像である. 任意の $x \in G, [f] \in L^1(G,\mu)$ に対し, Bochner 積分の性質 (命題 5.251) より,

$$\begin{aligned}(\pi(x)\widetilde{\pi}([f])u \mid v) &= \left(\pi(x)\left(\int_G f(y)\pi(y)ud\mu(y)\right)u \mid v\right) = \left(\left(\int_G f(y)\pi(xy)ud\mu(y)\right)u \mid v\right)\\ &= \int_G f(y)(\pi(xy)u \mid v)d\mu(y) = \int_G f(x^{-1}y)(\pi(y)u \mid v)d\mu(y)\\ &= \left(\int_G f(x^{-1}y)\pi(y)ud\mu(y) \mid v\right) = (\widetilde{\pi}(L_x[f])u \mid v) \ \ (\forall u, v \in \mathcal{H}_\pi)\end{aligned}$$

であるから,

$$\pi(x)\widetilde{\pi}([f]) = \widetilde{\pi}(L_x[f]) \ \ (\forall x \in G, \forall [f] \in L^1(G,\mu)) \tag{12.40}$$

が成り立つ. よって任意の $[f],[g] \in L^1(G,\mu)$ に対し, 合成積の定義 12.22 と Bochner 積分の性質 (命題 5.251) より,

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}([f]*[g])v &= \widetilde{\pi}\left(\int_G f(y)L_y[g]d\mu(y)\right)v = \int_G f(y)\widetilde{\pi}(L_y[g])vd\mu(y)\\ &= \int_G f(y)\pi(y)\widetilde{\pi}([g])vd\mu(y) = \widetilde{\pi}([f])\widetilde{\pi}([g])v \ \ (\forall v \in \mathcal{H}_\pi)\end{aligned}$$

[*206]が成り立つので, (12.38) は乗法を保存する. さらに任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し, 定理 12.18 の (3) より,

$$\begin{aligned}(\widetilde{\pi}([f]^*)u \mid v) &= \int_G f^*(x)(\pi(x)u \mid v)d\mu(x) = \int_G \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})(\pi(x)u \mid v)d\mu(x)\\ &= \int_G \overline{f(x)}(\pi(x^{-1})u \mid v)d\mu(x) = \int_G (u \mid f(x)\pi(x)v)d\mu(x)\\ &= (u \mid \widetilde{\pi}([f])v) = (\widetilde{\pi}([f])^*u \mid v) \ \ (\forall u, v \in \mathcal{H}_\pi)\end{aligned}$$

であるから (12.38) は $*$-演算を保存する. よって (12.38) は $*$-環準同型写像である. 定理 12.27 における $L^1(G,\mu)$ の近似単位元 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取ると, 任意の $v \in \mathcal{H}_\pi$ に対し,

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\pi}(\varphi_n)v - v\| &= \left\|\int_G \varphi_n(x)\pi(x)vd\mu(x) - \int_G \varphi_n(x)vd\mu(x)\right\|\\ &= \left\|\int_G \varphi_n(x)(\pi(x)v - v)d\mu(x)\right\| \leqslant \int_G \varphi_n(x)\|\pi(x)v - v\|d\mu(x) \to 0 \ \ (n \to \infty)\end{aligned}$$

[*207]であるから,

$$v = \lim_{n\to\infty} \pi(\varphi_n)v \in \overline{\widetilde{\pi}(L^1(G,\mu))\mathcal{H}_\pi} \tag{12.41}$$

が成り立つ. よって,

$$\widetilde{\pi}(L^1(G,\mu))\mathcal{H}_\pi = \mathrm{span}\{\widetilde{\pi}([f])v : [f] \in L^1(G,\mu), \forall v \in \mathcal{H}_\pi\}$$

は $\mathcal{H}_\pi$ で稠密であるので (12.38) は $L^1(G,\mu)$ の $\mathcal{H}_\pi$ 上への表現である. □

命題 12.49 (局所コンパクト群のユニタリ表現とその L^1 群環の表現の一対一対応)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度とし, ρ を L^1 群環 $L^1(G,\mu)$ の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上への表現 (定義 12.47) とする. このとき G の $\mathcal{H}$ 上へのユニタリ表現 π で,

$$\rho([f]) = \widetilde{\pi}([f]) \ \ (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

($\widetilde{\pi}$ は命題 12.48 におけるもの) を満たすものが唯一つ存在する.

証明. 定理 12.27 における $L^1(G,\mu)$ の近似単位元 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取る. まず一意性を示す. π_1, π_2 が G の $\mathcal{H}$ 上へのユニタリ表現であり,

$$\rho([f]) = \widetilde{\pi}_j([f]) \ \ (\forall [f] \in L^1(G,\mu), j = 1, 2)$$

[*206] 2 番目の等号で $L^1(G,\mu) \ni [h] \mapsto \widetilde{\pi}([h])v \in \mathcal{H}_\pi$ が有界線型作用素であることを用い, 3 番目の等号で (12.40) を用いた.
[*207] $G \ni x \mapsto \pi(x)v \in \mathcal{H}_\pi$ の $1 \in G$ における連続性による.

を満たすとする. (12.41) と (12.40) より,

$$\begin{aligned}\pi_1(x)v &= \lim_{n\to\infty}\pi_1(x)\widetilde{\pi_1}(\varphi_n)v = \lim_{n\to\infty}\widetilde{\pi_1}(L_x\varphi_n)v = \lim_{n\to\infty}\widetilde{\pi_2}(L_x\varphi_n)v \\ &= \lim_{n\to\infty}\pi_2(x)\widetilde{\pi_2}(\varphi_n)v = \pi_2(x)v \quad (\forall x \in G, \forall v \in \mathcal{H})\end{aligned}$$

である. よって $\pi_1 = \pi_2$ である.
存在を示す.

$$\mathcal{H}_0 := \rho(L^1(G,\mu))\mathcal{H} = \mathrm{span}\{\rho([f])v : [f] \in L^1(G,\mu), v \in \mathcal{H}\} \tag{12.42}$$

とおく. L^1 群環の表現の定義 12.47 より $\mathcal{H}_0$ は $\mathcal{H}$ の稠密部分空間である. ρ はノルム減少であるから任意の $x \in G$, $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し,

$$\rho(L_x\varphi_n)\rho([f]) = \rho((L_x\varphi_n) * [f]) = \rho(L_x(\varphi_n * [f])) \to \rho(L_x[f]) \ \ (n \to \infty) \tag{12.43}$$

である. よって任意の $x \in G$ に対し線型作用素

$$\pi_0(x) : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0, \quad \pi_0(x)v := \lim_{n\to\infty}\rho(L_x\varphi_n)v \ \ (\forall v \in \mathcal{H}_0) \tag{12.44}$$

が定義できる. ρ がノルム減少であることと $\|L_x\varphi_n\|_1 = \|\varphi_n\|_1 = 1$ $(\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{N})$ であることから,

$$\|\pi_0(x)v\| = \lim_{n\to\infty}\|\rho(L_x\varphi_n)v\| \leqslant \|v\| \ \ (\forall x \in G, \forall v \in \mathcal{H}_0)$$

である. よって任意の $x \in G$ に対し (12.44) はノルムが 1 以下の有界線型作用素であり, (12.44) の $\mathcal{H}$ 上への一意拡張 (命題 3.19) を $\pi(x) \in B(\mathcal{H})$ とおけば $\|\pi(x)\| = \|\pi_0(x)\| \leqslant 1$ である. (12.44), (12.43) より,

$$\begin{aligned}\pi(x)\pi(y)\rho([f])v &= \pi(x)\rho(L_y[f])v = \rho(L_xL_y[f])v = \rho(L_{xy}[f])v \\ &= \pi(xy)\rho([f])v \ \ (\forall x,y \in G, \forall [f] \in L^1(G,\mu), \forall v \in \mathcal{H}),\end{aligned}$$

$$\pi(1)\rho([f])v = \rho(L_1[f])v = \rho([f])v \ \ (\forall [f] \in L^1(G,\mu), \forall v \in \mathcal{H})$$

であるから, (12.42) の稠密性より,

$$\pi(x)\pi(y) = \pi(xy) \ \ (\forall x,y \in G), \quad \pi(1) = 1$$

が成り立つ. よって任意の $x \in G$ に対し $\pi(x) \in B(\mathcal{H})$ は可逆で $\pi(x)^{-1} = \pi(x^{-1})$ であり,

$$\|v\| = \|\pi(x^{-1})\pi(x)v\| \leqslant \|\pi(x)v\| \leqslant \|v\| \ \ (\forall x \in G, \forall v \in \mathcal{H})$$

より,

$$\|\pi(x)v\| = \|v\| \ \ (\forall x \in G, \forall v \in \mathcal{H})$$

であるから $\pi(x) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ $(\forall x \in G)$ である. 任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し, 命題 12.21 より $G \ni x \mapsto L_x[f] \in L^1(G,\mu)$ は連続であるから, $v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$G \ni x \mapsto \pi(x)\rho([f])v = \rho(L_x[f])v \in \mathcal{H}$$

は連続である. よって $\|\pi(x)\| = 1$ $(\forall x \in G)$ と (12.42) の稠密性より, 任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$G \ni x \mapsto \pi(x)v \in \mathcal{H}$$

は連続である. ゆえに $\pi : G \ni x \mapsto \pi(x) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ は SOT 連続な群準同型写像なので π は G の $\mathcal{H}$ 上へのユニタリ表現である. 合成積の定義 12.22 と Bochner 積分の性質 (命題 5.251) より,

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}(f)\rho([g])v &= \int_G f(x)\pi(x)\rho([g])v d\mu(x) = \int_G f(x)\rho(L_x[g])v d\mu(x) \\ &= \rho\left(\int_G f(x)L_x[g]d\mu(x)\right)v = \rho([f]*[g])v \\ &= \rho([f])\rho([g])v \ \ (\forall [f],[g] \in L^1(G,\mu), \forall v \in \mathcal{H})\end{aligned}$$

[208]であるから, (12.42) の稠密性より,

$$\widetilde{\pi}(f) = \rho([f]) \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

である. よって存在が示せた. □

定義 12.50 (局所コンパクト群のユニタリ表現とそれに対応する L^1 群環の表現の同一視)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度とする. G のユニタリ表現と G の L^1 群環 $L^1(G,\mu)$ の表現は命題 12.48, 命題 12.49 により一対一に対応する. そこで以後, G のユニタリ表現 $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ と, それに対応する $L^1(G,\mu)$ の表現 $\widetilde{\pi} : L^1(G,\mu) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ は一々区別せず, 同じ記号で表す.

命題 12.51. G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を Haar 測度とし, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定理 12.27 における $L^1(G,\mu)$ の近似単位元とする. このとき G の任意のユニタリ表現 π と任意の $x \in G$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} \pi(L_x\varphi_n) = \pi(x) \quad (\text{in SOT}) \tag{12.45}$$

が成り立つ.

証明. 命題 12.48 より,

$$\pi(L^1(G,\mu))\mathcal{H}_\pi = \mathrm{span}\left\{\pi([f])v : [f] \in L^1(G,\mu), v \in \mathcal{H}_\pi\right\} \tag{12.46}$$

は $\mathcal{H}_\pi$ で稠密である. 任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$, $v \in \mathcal{H}_\pi$ に対し,

$$\pi(L_x\varphi_n)\pi([f])v = \pi((L_x\varphi_n) * [f])v = \pi(L_x(\varphi_n * [f]))v = \pi(x)\pi(\varphi_n * [f])v \to \pi(x)\pi([f])v$$

[209]であるから,

$$\lim_{n\to\infty} \pi(L_x\varphi_n)v = \pi(x)v \quad (\forall v \in \pi(L^1(G,\mu))\mathcal{H}_\pi)$$

が成り立つ. よって (12.46) の $\mathcal{H}_\pi$ における稠密性と $\|\pi(\varphi_n)\| \leqslant \|\varphi_n\|_1 \leqslant 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であることより,

$$\lim_{n\to\infty} \pi(L_x\varphi_n)v = \pi(x)v \quad (\forall v \in \mathcal{H}_\pi)$$

が成り立つ. ゆえに (12.45) が成り立つ. □

命題 12.52 (局所コンパクト群の正則表現に対応する L^1 群環の表現)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度, $\pi : G \to \mathcal{U}(L^2(G,\mu))$ を G の正則表現 (定義 12.35) とする. このとき,

$$\pi([f])[g] = [f] * [g] \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu), \forall [g] \in L^2(G,\mu))$$

(右辺は $L^1(G,\mu)$ と $L^2(G,\mu)$ の合成積 (定義 12.22)) が成り立つ. また,

$$\pi : L^1(G,\mu) \ni [f] \mapsto \pi([f]) \in B(L^2(G,\mu)) \tag{12.47}$$

は単射である.

証明. 正則表現の定義 12.35 と合成積の定義 12.22 より,

$$\pi([f])[g] = \int_G f(x)\pi(x)[g]d\mu(x) = \int_G f(x)L_x[g]d\mu(x) = [f] * [g] \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu), \forall [g] \in L^2(G,\mu))$$

である. (12.47) が単射であることを示す. $\pi([f]) = 0$ なる $[f] \in L^1(G,\mu)$ を取る. 定理 12.27 における $L^1(G,\mu)$ の近似単位元 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取ると, $\varphi_n \in C_c(G) \subseteq L^2(G,\mu)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ より,

$$0 = \pi([f])[\varphi_n] = [f] * [\varphi_n] \to [f] \quad (n \to \infty)$$

である. よって $[f] = 0$ なので (12.47) は単射である. □

[208] 2 番目の等号において $L^1(G,\mu) \ni [h] \mapsto \rho([h])v \in \mathcal{H}$ が有界線型作用素であることを用いた.
[209] 命題 12.48 より $\pi(x)\pi([g]) = \pi(L_x[g])$ $(\forall x \in G, \forall [g] \in L^1(G,\mu))$ が成り立つことに注意.

定義 12.53 (群 C^*-環). G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度とする.

$$\|[f]\|_* := \sup\{\|\pi([f])\| : \pi \text{ は } G \text{ のユニタリ表現}\} \leqslant \|[f]\|_1 \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

とおく. このとき命題 12.52 の単射性より $\|\cdot\|_* : L^1(G,\mu) \ni [f] \mapsto \|[f]\|_* \in [0,\infty)$ は $L^1(G,\mu)$ のノルムであり, 明らかに,

$$\|[f]*[g]\|_* \leqslant \|[f]\|_*\|[g]\|_*, \quad \|[f]^* * [f]\|_* = \|[f]\|_*^2 \quad (\forall [f],[g] \in L^1(G,\mu))$$

である. よって $L^1(G,\mu)$ の $\|\cdot\|_*$ に関する完備化は C^*-環である (次の命題 12.54 を参照). この C^*-環を $C^*(G,\mu)$ と表し, G の群 C^*-環と言う.

命題 12.54. X をノルム $*$-環 (定義 3.6) で,

$$\|x^*x\| = \|x\|^2 \quad (\forall x \in X)$$

を満たすものとする. このとき C^*-環 $\widetilde{X}$ と等長 $*$-環準同型写像 $\iota : X \to \widetilde{X}$ で $\iota(X)$ が $\widetilde{X}$ において稠密であるようなものが存在する.

証明. 直積 $*$-環 $\prod_{n\in\mathbb{N}} X$ の部分 $*$-環

$$\mathcal{C} := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ は Cauchy 列}\right\}$$

と, $\mathcal{C}$ 上のセミノルム

$$p : \mathcal{C} \ni (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to\infty}\|x_n\| \in [0,\infty)$$

を考える. このとき,

$$p(zw) \leqslant p(z)p(w), \quad p(z^*z) = p(z)^2 \quad (\forall z,w \in \mathcal{C})$$

が成り立つ. $\mathcal{C}$ の $*$-イデアル (定義 2.28)

$$\mathcal{N} := \{z \in \mathcal{C} : p(z) = 0\}$$

に対し, 商 $*$-環 (定義 2.30) $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ を考え, 商写像を,

$$\mathcal{C} \ni z \mapsto [z] \in \mathcal{C}/\mathcal{N}$$

とおく. このとき,

$$\|\cdot\| : \mathcal{C}/\mathcal{N} \ni [z] \mapsto \|[z]\| := p(z) \in [0,\infty) \tag{12.48}$$

は $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ 上のノルムであり,

$$\|[z][w]\| \leqslant \|[z][w]\|, \quad \|[z]^*[z]\| = \|[z]\|^2 \quad (\forall [z],[w] \in \mathcal{C}/\mathcal{N})$$

が成り立つ. このノルムによるノルム $*$-環を $\widetilde{X}$ とおく.

$$\iota : X \ni x \mapsto [(x)_{n\in\mathbb{N}}] \in \widetilde{X}$$

として等長線型写像を定義する. 任意の $z = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \widetilde{X}$, 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し,

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \varepsilon \quad (\forall n,m \geqslant n_0)$$

を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ を取ると,

$$\|z - \iota(x_{n_0})\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - x_{n_0}\| \leqslant \varepsilon$$

であるから $\iota(X)$ は $\widetilde{X}$ において稠密である. $\widetilde{X}$ の任意の Cauchy 列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し,

$$\|z_n - \iota(x_n)\| < \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たす $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X$ が取れて,

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \|\iota(x_n) - z_n\| + \|z_n - z_m\| + \|z_m - \iota(x_m)\| < \frac{1}{n} + \|z_n - z_m\| + \frac{1}{m} \quad (\forall n, m \in \mathbb{N})$$

であるから $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$ である. そこで $z := [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \widetilde{X}$ とおけば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\|z - z_n\| \leqslant \|z - \iota(x_n)\| + \|\iota(x_n) - z_n\| = \lim_{m\to\infty} \|x_m - x_n\| + \frac{1}{n}$$

であるから $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ である. よって $\widetilde{X}$ は C^*-環である. □

定義 12.55 (群 C^*-環の表現)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度, $(C^*(G,\mu), \|\cdot\|_*)$ を G の群 C^*-環, $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. C^*-環 $C^*(G,\mu)$ から C^*-環 $B(\mathcal{H})$ への $*$-環準同型写像 $\pi : C^*(G,\mu) \to B(\mathcal{H})$ (定理 9.78 より自動的にノルム減少であることに注意) で,

$$\pi(C^*(G,\mu))\mathcal{H} = \mathrm{span}\,\{\pi(a)v : a \in C^*(G,\mu), v \in \mathcal{H}\}$$

が $\mathcal{H}$ で稠密であるものを $C^*(G,\mu)$ の $\mathcal{H}$ 上への表現と言う.

命題 12.56 (局所コンパクト群の L^1 群環の表現と群 C^*-環の表現の一対一対応)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度とする. このとき $L^1(G,\mu)$ の任意の表現 $\pi : L^1(G,\mu) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ は群 C^*-環 $(C^*(G,\mu), \|\cdot\|_*)$ の $\mathcal{H}_\pi$ 上への表現に一意拡張できる. また群 C^*-環 $C^*(G,\mu)$ の表現の $L^1(G,\mu)$ 上への制限は $L^1(G,\mu)$ の表現である.

証明. 群 C^*-環のノルムの定義 12.53 より,

$$\|\pi([f])\| \leqslant \|[f]\|_* \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

であるから, 命題 3.19 により π は $C^*(G,\mu) = \overline{L^1(G,\mu)}^{\|\cdot\|_*}$ 上の $*$-環準同型写像 $\widetilde{\pi} : C^*(G,\mu) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ に一意拡張でき,

$$\widetilde{\pi}(C^*(G,\mu))\mathcal{H}_\pi \supseteq \pi(L^1(G,\mu))\mathcal{H}_\pi$$

より $\widetilde{\pi}(C^*(G,\mu))\mathcal{H}_\pi$ は $\mathcal{H}_\pi$ で稠密であるので, $\widetilde{\pi} : C^*(G,\mu) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ は $C^*(G,\mu)$ の $\mathcal{H}_\pi$ 上への表現である. $\rho : C^*(G,\mu) \to B(\mathcal{H}_\rho)$ を $C^*(G,\mu)$ の任意の表現とする. ρ の $L^1(G,\mu)$ 上への制限は $L^1(G,\mu)$ から $B(\mathcal{H}_\pi)$ への $*$-環準同型写像であり,

$$\rho(C^*(G,\mu))\mathcal{H}_\pi \subseteq \overline{\rho(L^1(G,\mu))\mathcal{H}_\rho}$$

であるから $\rho(L^1(G,\mu))\mathcal{H}_\rho$ は $\mathcal{H}_\rho$ で稠密である. よって ρ の $L^1(G,\mu)$ 上への制限は $L^1(G,\mu)$ の $\mathcal{H}_\rho$ への表現である. □

注意 12.57. 命題 12.56 より, 局所コンパクト群の L^1 群環の表現と群 C^*-環の表現は一意拡張と制限により一対一対応であるので, これらは同一視できる.

定義 12.58 (L^1 群環上の有界非負線型汎関数)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度とする. 有界線型汎関数 $\Phi : L^1(G,\mu) \to \mathbb{C}$ で,

$$\Phi([f]^* * [f]) \geqslant 0 \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

を満たすものを $L^1(G,\mu)$ 上の有界非負線型汎関数と言う. $L^1(G,\mu)$ 上の有界非負線型汎関数全体を $(L^1(G,\mu))^*_+ \subseteq (L^1(G,\mu))^*$ と表す.

定義 12.59 (局所コンパクト群上の正定値関数)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度とする. 有界連続関数 $p : G \to \mathbb{C}$ に対し, $\Phi_p \in (L^1(G,\mu))^*$ を,

$$\Phi_p : L^1(G,\mu) \ni [f] \mapsto \int_G f(x)p(x)d\mu(x) \in \mathbb{C}$$

として定義する. $\Phi_p \in (L^1(G,\mu))^*_+$ であるとき p を G 上の正定値関数と言う. G 上の正定値関数全体を $\mathcal{P}(G)$ と表す.

命題 12.60. G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度, $p : G \to \mathbb{C}$ を有界連続関数とする．このとき p が G 上の正定値関数であるための必要十分条件は,

$$\int_G \int_G \overline{f(y)} f(x) p(y^{-1}x) d\mu(x) d\mu(y) \geqslant 0 \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu)) \tag{12.49}$$

が成り立つことである．そして $p : G \to \mathbb{C}$ が正定値関数ならば $\overline{p} : G \ni x \mapsto \overline{p(x)} \in \mathbb{C}$ も正定値関数である．

証明. 任意の $[f],[g] \in L^1(G,\mu)$ に対し, 合成積の定義 12.22 と Fubini の定理 5.85, Haar 測度による積分の性質 (定理 12.18) より,

$$\begin{aligned}
&\int_G ([g]^* * [f])(x) p(x) d\mu(x) = \int_G \left(\int_G g^*(y) f(y^{-1}x) p(x) d\mu(x) \right) d\mu(y) \\
&= \int_G \left(\int_G \overline{g(y^{-1})} \Delta(y^{-1}) f(y^{-1}x) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int_G \left(\int_G \overline{g(y)} f(yx) p(x) d\mu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_G \left(\int_G \overline{g(y)} f(x) p(y^{-1}x) d\mu(x) \right) d\mu(y)
\end{aligned}$$

である．よって p が正定値関数であるための必要十分条件は (12.49) が成り立つことである．また p が正定値関数ならば, 任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し,

$$\int_G \int_G \overline{f(y)} f(x) \overline{p(y^{-1}x)} d\mu(x) d\mu(y) = \overline{\int_G \int_G f(y) \overline{f(x)} p(y^{-1}x) d\mu(x) d\mu(y)} \geqslant 0$$

であるから $\overline{p}$ も正定値関数である． □

命題 12.61 (ユニタリ表現とベクトルから作られる正定値関数)**.** G を局所コンパクト群, π を G のユニタリ表現とする．このとき任意の $v \in \mathcal{H}_\pi$ に対し,

$$p(x) := (\pi(x)v \mid v) \quad (\forall x \in G)$$

とおけば, $p : G \to \mathbb{C}$ は正定値関数である．

証明. ユニタリ表現の定義より $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ は SOT 連続なので p は有界連続関数である．任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し,

$$\Phi_p([f]) = \int_G f(x) p(x) d\mu(x) = \int_G f(x) (\pi(x)v \mid v) d\mu(x) = (\pi([f])v \mid v)$$

であるから,

$$\Phi_p([f]^* * [f]) = (\pi([f]^* * [f])v \mid v) = (\pi([f])^* \pi([f])v \mid v) = \|\pi([f])v\|^2 \geqslant 0 \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

である．よって p は正定値関数である． □

補題 12.62. G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度とする．任意の $f,g \in C_c(G)$ に対し $f*g \in C_c(G)$ が成り立つ．

証明. 任意の $f,g \in C_c(G)$ に対し合成積の定義 12.23 より $f*g \in C_0(G)$ であり,

$$(f*g)(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) d\mu(y) \quad (\forall x \in G)$$

である．$(f*g)(x) \neq 0$ なる任意の $x \in G$ に対し, 上式より, $G \ni y \mapsto g(y^{-1}x) \in \mathbb{C}$ の台 $x\,\mathrm{supp}(g)^{-1}$ と $f : G \to \mathbb{C}$ の台 $\mathrm{supp}(f)$ は交わる．よって $x \in \mathrm{supp}(f)\,\mathrm{supp}(g)$ であり, G の乗法の連続性より $\mathrm{supp}(f)\,\mathrm{supp}(g)$ はコンパクトであるから,

$$\mathrm{supp}(f*g) \subseteq \mathrm{supp}(f)\,\mathrm{supp}(g)$$

である．よって $f*g \in C_c(G)$ である． □

定理 12.63 (台がコンパクトな正定値関数の稠密性)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ を G の Haar 測度とする. このとき,

$$\mathrm{span}(\mathcal{P}(G) \cap C_c(G))$$

は Banach 空間 $C_0(G)$, $L^p(G, \mu)$ $(p \in [1, \infty))$ それぞれにおいて稠密である.

証明. 任意の $f : G \to \mathbb{C}$ に対し $\widetilde{f} : G \to \mathbb{C}$ を $\widetilde{f}(x) := \overline{f(x^{-1})}$ $(\forall x \in G)$ と定義する. また $\pi : G \to \mathcal{U}(L^2(G, \mu))$ を G の正則表現 (定義 12.35) とする. 任意の $f \in C_c(G)$ に対し $\widetilde{f} \in C_c(G)$ なので補題 12.62 より $f * \widetilde{f} \in C_c(G)$ であり,

$$\begin{aligned}(f * \widetilde{f})(x) &= \int_G f(y)\widetilde{f}(y^{-1}x)d\mu(y) = \int_G f(y)\overline{f(x^{-1}y)}d\mu(y) \\ &= (f \mid \pi(x)f)_2 = \overline{(\pi(x)f \mid f)_2} \quad (\forall x \in G)\end{aligned}$$

であるから, 命題 12.60 と命題 12.61 より,

$$f * \widetilde{f} \in \mathcal{P}(G) \cap C_c(G) \quad (\forall f \in C_c(G))$$

が成り立つ.

$$C_c(G) \times C_c(G) \ni (f, g) \mapsto f * \widetilde{g} \in C_c(G)$$

は準双線型写像であるから, 偏極恒等式 10.4 より, 任意の $f, g \in C_c(G)$ に対し,

$$f * \widetilde{g} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k (f + i^k g) * (\widetilde{f + i^k g}) \in \mathrm{span}(\mathcal{P}(G) \cap C_c(G))$$

であり, $g = \widetilde{\widetilde{g}}$ であるから,

$$f * g \in \mathrm{span}(\mathcal{P}(G) \cap C_c(G)) \quad (\forall f, g \in C_c(G))$$

が成り立つ. 今, 定理 12.27 における $L^1(G, \mu)$ の近似単位元 $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を取る. $\varphi_n \in C_c(G)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であるから任意の $f \in C_c(G)$ に対し,

$$\varphi_n * f \in \mathrm{span}(\mathcal{P}(G) \cap C_c(G)) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であり, 合成積の定義 12.23 と定理 12.3 より sup ノルムに関して,

$$\begin{aligned}\|\varphi_n * f - f\| &= \left\| \int_G \varphi_n(y) L_y f d\mu(y) - \int_G \varphi_n(y) f d\mu(y) \right\| \\ &= \left\| \int_G \varphi_n(y)(L_y f - f) d\mu(y) \right\| \leqslant \int_G \varphi_n(y) \|L_y f - f\| d\mu(y) \\ &\to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

よって,

$$C_c(G) \subseteq \overline{\mathrm{span}(C_c(G) \cap \mathcal{P}(G))} \subseteq C_0(G)$$

が成り立つ. ここで命題 5.185 より $C_c(G)$ は $C_0(G)$ において稠密であるので,

$$C_0(G) = \overline{\mathrm{span}(C_c(G) \cap \mathcal{P}(G))}$$

が成り立つ. また任意の $p \in [1, \infty)$, 任意の $f \in C_c(G)$ に対し命題 12.21 より,

$$\begin{aligned}\|\varphi_n * [f] - [f]\|_p &= \left\| \int_G \varphi_n(y) L_y [f] d\mu(y) - \int_G \varphi_n(y)[f] d\mu(y) \right\|_p \\ &= \left\| \int_G \varphi_n(y)(L_y [f] - [f]) d\mu(y) \right\|_p \leqslant \int_G \varphi_n(y) \|L_y [f] - [f]\|_p d\mu(y) \\ &\to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

であるから,

$$C_c(G) \subseteq \overline{\mathrm{span}(C_c(G) \cap \mathcal{P}(G))}^{\|\cdot\|_p} \subseteq L^p(G, \mu)$$

が成り立つ. 定理 5.179 より $C_c(G)$ は $L^p(G,\mu)$ において稠密であるので,

$$L^p(G,\mu) = \overline{\mathrm{span}(C_c(G) \cap \mathcal{P}(G))}^{\|\cdot\|_p}$$

が成り立つ. □

補題 12.64 (忠実性抜きの内積に関する Schwarz の不等式)**.** X を $\mathbb{C}$ 上の線型空間とし,

$$[\cdot,\cdot] : X \times X \ni (x,y) \mapsto [x,y] \in \mathbb{C}$$

が内積の忠実性以外の定義を満たすとする. すなわち,

(1) 任意の $x,y \in X$ に対し $\overline{[x,y]} = [y,x]$.
(2) 任意の $y \in X$ に対し $X \ni x \mapsto [x,y] \in \mathbb{C}$ は線型汎関数.
(3) 任意の $x \in X$ に対し $[x,x] \geqslant 0$.

このとき,

$$|[x,y]|^2 \leqslant [x,x][y,y] \quad (\forall x,y \in X)$$

が成り立つ.

証明. 任意の $x,y \in X$ を取る. 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し,

$$0 \leqslant [x-\alpha y, x-\alpha y] = [x,x] - \alpha[y,x] - \overline{\alpha}[x,y] + |\alpha|^2[y,y] \tag{12.50}$$

である. もし $[y,y] > 0$ ならば, $\alpha = \frac{[x,y]}{[y,y]} \in \mathbb{C}$ を (12.50) に代入すれば,

$$0 \leqslant [x,x] - \frac{|[x,y]|^2}{[y,y]}$$

となるので $|[x,y]|^2 \leqslant [x,x][y,y]$ が成り立つ. またもし $[y,y] = 0$ ならば, 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ を取り, $\alpha = \frac{2}{\varepsilon}[x,y] \in \mathbb{C}$ を (12.50) に代入すれば,

$$0 \leqslant [x,x] - \frac{1}{\varepsilon}|[x,y]|^2$$

となる. よって $|[x,y]|^2 \leqslant \varepsilon[x,x]$ が任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対して成り立つので, $|[x,y]|^2 = 0 = [x,x][y,y]$ である. □

命題 12.65 (L^1 群環上の有界非負線型汎関数に関する Schwarz の不等式)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度, $\Phi \in (L^1(G,\mu))^*_+$ とする. このとき次が成り立つ.

(1) 任意の $[f],[g] \in L^1(G,\mu)$ に対し $\overline{\Phi([g]^* * [f])} = \Phi([f]^* * [g])$.
(2) 任意の $[f],[g] \in L^1(G,\mu)$ に対し $|\Phi([g]^* * [f])|^2 \leqslant \Phi([f]^* * [f])\Phi([g]^* * [g])$.
(3) 任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し $|\Phi([f])|^2 \leqslant \|\Phi\|\Phi([f]^* * [f])$.
(4) 任意の $[f],[g] \in L^1(G,\mu)$ に対し $|\Phi([g]^* * [f] * [g])| \leqslant \Phi([g]^* * [g])\|[f]\|_1$.

証明. (1)

$$L^1(G,\mu) \times L^1(G,\mu) \ni ([f],[g]) \mapsto \Phi([g]^* * [f]) \in \mathbb{C} \tag{12.51}$$

は準双線型汎関数であるから, 偏極恒等式 10.4 より,

$$\Phi([g]^* * [f]) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \Phi\left(([f] + i^k[g])^* * ([f] + i^k[g])\right) \tag{12.52}$$

が成り立ち, 各 $k \in \{0,1,2,3\}$ に対し,

$$\Phi\left(([f] + i^k[g])^* * ([f] + i^k[g])\right) = \Phi\left(\left([g] + \overline{i}^k[f]\right)^* * \left([g] + \overline{i}^k[f]\right)\right)$$

は実数であるから, (12.52) より,

$$\overline{\Phi([g]^* * [f])} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \overline{i}^k \Phi\left(\left([g] + \overline{i}^k[f]\right)^* * \left([g] + \overline{i}^k[f]\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \Phi\left(([g] + i^k[f])^* * ([g] + i^k[f])\right) = \Phi([f]^* * [g]).$$

(2) (12.51) は内積の忠実性以外の条件を満たすので, 補題 12.64 より成り立つ.

(3) $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定理 12.27 における $L^1(G,\mu)$ の近似単位元とする. (2) より任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し,

$$|\Phi(\varphi_n * [f])|^2 \leqslant \Phi(\varphi_n * \varphi_n)\Phi([f]^* * [f]) \leqslant \|\Phi\|\Phi([f]^* * [f]) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから,

$$|\Phi([f])|^2 = \lim_{n\to\infty} |\Phi(\varphi_n * [f])|^2 \leqslant \|\Phi\|\Phi([f]^* * [f]).$$

(4) 任意の $[g] \in L^1(G,\mu)$ を取り固定する.

$$\Psi : L^1(G,\mu) \ni [f] \mapsto \Phi([g]^* * [f] * [g]) \in \mathbb{C}$$

とおくと, $\Psi \in (L^1(G,\mu))^*_+$ である. $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定理 12.27 における $L^1(G,\mu)$ の近似単位元とすると, 任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し (2) より,

$$|\Psi(\varphi_n * [f])|^2 \leqslant \Psi(\varphi_n * \varphi_n)\Psi([f]^* * [f]) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であり,

$$\lim_{n\to\infty} \Psi(\varphi_n * \varphi_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi\left([g]^* * \varphi_n * \varphi_n * [g]\right) = \Phi([g]^* * [g])$$

であるから,

$$|\Psi([f])|^2 = \lim_{n\to\infty} |\Psi(\varphi_n * [f])|^2 \leqslant \Phi([g]^* * [g])\Psi([f]^* * [f])$$

となる. よって,

$$|\Psi([f])|^2 \leqslant \Phi([g]^* * [g])\|\Psi\|\|[f]\|_1^2 \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

であるから,

$$\|\Psi\| \leqslant \Phi([g]^* * [g])$$

が成り立つ. ゆえに任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し,

$$\Phi([g]^* * [f] * [g]) = \Psi([f]) \leqslant \Phi([g]^* * [g])\|[f]\|_1$$

が成り立つ.

□

定理 12.66 (局所コンパクト群上の正定値関数と L^1 群環上の有界非負線型汎関数の一対一対応)**.** G を局所コンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度とする. このとき,

$$\mathcal{P}(G) \ni p \mapsto \Phi_p \in (L^1(G,\mu))^*_+ \tag{12.53}$$

は全単射である. そして任意の $p \in \mathcal{P}(G)\backslash\{0\}$ に対し, 巡回ベクトル $v \in \mathcal{H}_\pi$ を持つ G のユニタリ表現 π で,

$$p(x) = (\pi(x)v \mid v) \quad (\forall x \in G)$$

を満たすものが存在する.

証明. (12.53) が単射であることは, 定理 5.135 より $L^\infty(G,\mu) = (L^1(G,\mu))^*$ であること, および, 空でない開集合の Haar 測度が 0 ではない (命題 12.8) ことによる (正定値関数は連続としていることに注意). 任意の $\Phi \in (L^1(G,\mu))^*_+ \backslash \{0\}$ を取り固定する.

$$\mathcal{N}_\Phi := \{[f] \in L^1(G,\mu) : \Phi([f]^* * [f]) = 0\}$$

とおくと, 命題 12.65 の (2) より $\mathcal{N}_\Phi$ は $L^1(G,\mu)$ の線型部分空間であり, 命題 12.65 の (3) と $\Phi \neq 0$ より $\mathcal{N}_\Phi \neq L^1(G,\mu)$ である. そこで商線型空間 $L^1(G,\mu)/\mathcal{N}_\Phi \neq \{0\}$ を考え, 商写像を,

$$q : L^1(G,\mu) \ni [f] \mapsto q([f]) \in L^1(G,\mu)/\mathcal{N}_\Phi$$

とおく. 命題 12.65 の (1), (2) より,

$$(q([f]) \mid q([g]))_\Phi := \Phi([g]^* * [f]) \quad (\forall [f], [g] \in L^1(G,\mu)) \tag{12.54}$$

として $L^1(G,\mu)/\mathcal{N}_\Phi$ の内積 $(\cdot \mid \cdot)_\Phi$ が定義できる. この内積空間 $(L^1(G,\mu)/\mathcal{N}_\Phi, (\cdot \mid \cdot)_\Phi)$ の Hilbert 空間への完備化 (定義 10.90) を $(\mathcal{H}_\Phi, (\cdot \mid \cdot)_\Phi)$ とおく. 任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し命題 12.65 の (4) より,

$$\pi_0([f]) : L^1(G,\mu)/\mathcal{N}_\Phi \ni q([g]) \mapsto q([f] * [g]) \in \mathcal{H}_\Phi \tag{12.55}$$

は well-defined な線型作用素である. そして命題 12.65 の (4) より,

$$\begin{aligned} \|\pi_0([f])q([g])\|_\Phi^2 &= (q([f] * [g]) \mid q([f] * [g]))_\Phi = \Phi(([f] * [g])^* * ([f] * [g])) \\ &\leqslant \Phi([g]^* * [g])\|[f]\|_1^2 = \|q([g])\|_\Phi^2 \|[f]\|_1^2 \quad (\forall q([g]) \in L^1(G,\mu)/\mathcal{N}_\Phi) \end{aligned}$$

であるから (12.55) は有界線型作用素である. そこで (12.55) を $\mathcal{H}_\Phi = \overline{L^1(G,\mu)/\mathcal{N}_\Phi}$ 上に一意拡張 (命題 3.19) したものを $\pi_\Phi([f]) \in B(\mathcal{H}_\Phi)$ と表す. このとき (12.55), (12.54) と $L^1(G,\mu)/\mathcal{N}_\Phi$ の $\mathcal{H}_\Phi$ における稠密性より,

$$\pi_\Phi : L^1(G,\mu) \ni [f] \mapsto \pi_\Phi([f]) \in B(\mathcal{H}_\Phi) \tag{12.56}$$

が $*$-環準同型写像であることが分かる. 今, 命題 12.65 の (3) と (12.54) より,

$$L^1(G,\mu)/\mathcal{N}_\Phi \ni q([f]) \mapsto \Phi([f]) \in \mathbb{C}$$

は well-defined な有界線型汎関数である. これを $\mathcal{H}_\Phi = \overline{L^1(G,\mu)/\mathcal{N}_\Phi}$ 上の有界線型汎関数に一拡張したものを考え, Riesz の表現定理 3.44 によりそれに対応するベクトルを $v_\Phi \in \mathcal{H}_\Phi$ とおくと,

$$\Phi([f]) = (q([f]) \mid v_\Phi)_\Phi \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu)) \tag{12.57}$$

となる. (12.54), (12.56) より,

$$\begin{aligned} (q([f]) \mid q([g]))_\Phi &= \Phi([g]^* * [f]) = (q([g]^* * [f]) \mid v_\Phi)_\Phi = (\pi_\Phi([g]^*)q([f]) \mid v_\Phi)_\Phi \\ &= (q([f]) \mid \pi_\Phi([g])v_\Phi) \quad (\forall [f], [g] \in L^1(G,\mu)) \end{aligned}$$

であるから, $q(L^1(G,\mu)) = L^1(G,\mu)/\mathcal{N}_\Phi$ の $\mathcal{H}_\Phi$ における稠密性より,

$$q([g]) = \pi_\Phi([g])v_\Phi \quad (\forall [g] \in L^1(G,\mu)) \tag{12.58}$$

が成り立つ. これより,

$$\overline{\pi_\Phi(L^1(G,\mu))v_\Phi} = \overline{L^1(G,\mu)/\mathcal{N}_\Phi} = \mathcal{H}_\Phi$$

であるから (12.56) は $L^1(G,\mu)$ の $\mathcal{H}_\Phi$ 上への表現, 従って G の $\mathcal{H}_\Phi$ 上へのユニタリ表現 (定義 12.50 を参照) であり,

$$\mathcal{H}_\Phi = \overline{\pi_\Phi(L^1(G,\mu))v_\Phi} = \overline{\pi_\Phi(G)v_\Phi}$$

より, G のユニタリ表現 $\pi_\Phi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\Phi)$ は巡回ベクトル v_Φ を持つ. そして (12.57), (12.58) より,

$$\Phi([f]) = (\pi_\Phi([f])v_\Phi \mid v_\Phi)_\Phi = \int_G f(x)(\pi_\Phi(x)v_\Phi \mid v_\Phi)_\Phi d\mu(x) \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

である．そこで $p_\Phi : G \to \mathbb{C}$ を，

$$p_\Phi(x) := (\pi_\Phi(x)v_\Phi \mid v_\Phi)_\Phi \ \ (\forall x \in G)$$

とおけば，

$$\Phi([f]) = \int_G f(x)p_\Phi(x)d\mu(x) \ \ (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

であるから $p_\Phi : G \to \mathbb{C}$ は正定値関数であり，

$$\Phi([f]) = \Phi_{p_\Phi}([f]) \ \ (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

である．以上で証明が終わる．□

定義 12.67 (局所コンパクト群上の正定値関数に対する GNS 表現)**.** G を局所コンパクト群とする．任意の正定値関数 $p \in \mathcal{P}(G)\backslash\{0\}$ に対し，定理 12.66 より，巡回ベクトル $v \in \mathcal{H}_\pi$ を持つ G のユニタリ表現 $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ で，

$$p(x) = (\pi(x)v \mid v) \ \ (\forall x \in G)$$

を満たすものが存在する．このユニタリ表現とその巡回ベクトルの組 (π, v) を p に対する GNS 表現と言う．命題 12.46 より $(\pi_1, v_1), (\pi_2, v_2)$ が共に p に対する GNS 表現であるならば，π_1, π_2 はユニタリ同値であり，ユニタリ作用素 $U : \mathcal{H}_{\pi_1} \to \mathcal{H}_{\pi_2}$ で，

$$U\pi_1(x) = \pi_2(x)U \ \ (\forall x \in G), \ \ Uv_1 = v_2$$

を満たすものが定まる．

系 12.68. G を局所コンパクト群，$\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ を G の Haar 測度，$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定理 12.27 における $L^1(G,\mu)$ の近似単位元とする．このとき任意の $p \in \mathcal{P}(G)\backslash\{0\}$ と p の GNS 表現 (π, v) に対し，

$$\|p\| = p(1) = \|v\|^2 = \lim_{n\to\infty} \Phi_p(\varphi_n) = \|\Phi_p\| \tag{12.59}$$

が成り立つ．

証明.

$$|p(x)| = |(\pi(x)v \mid v)| \leqslant \|v\|^2 = p(1) \ \ (\forall x \in G)$$

であるから，

$$\|p\| = \|v\|^2 = p(1)$$

である．

$$\Phi_p([f]) = \int_G f(x)p(x)d\mu(x) = \int_G f(x)(\pi(x)v \mid v)d\mu(x) = (\pi([f])v \mid v) \ \ (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

より，

$$|\Phi_p([f])| \leqslant \|\pi([f])v\|\|v\| \leqslant \|[f]\|_1\|v\|^2 \ \ (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

であるから $\|\Phi_p\| \leqslant \|v\|^2$ であり，命題 12.51 より，

$$\|v\|^2 = \lim_{n\to\infty}(\pi(\varphi_n)v \mid v) = \lim_{n\to\infty}\Phi_p(\varphi_n) \leqslant \|\Phi_p\| \leqslant \|v\|^2$$

であるから，

$$\|v\|^2 = \lim_{n\to\infty}\Phi_p(\varphi_n) = \|\Phi_p\|$$

である．よって (12.59) が成り立つ．□

定義 12.69 (局所コンパクト群上のノルムが 1 の正定値関数全体のなす凸集合)**.** G を局所コンパクト群とする．G 上の sup ノルムが 1 の正定値関数全体は系 12.68 より，

$$\mathcal{P}_1(G) = \{p \in \mathcal{P}(G) : \|p\| = 1\} = \{p \in \mathcal{P}(G) : p(1) = 1\}$$

と表せる．よって $\mathcal{P}_1(G)$ は各点ごとの演算で凸集合である．そこで $\mathcal{P}_1(G)$ の端点 (定義 3.81) 全体を，

$$\mathrm{ext}\mathcal{P}_1(G) = \{p \in \mathcal{P}_1(G) : p \text{ は凸集合 } \mathcal{P}_1(G) \text{ の端点 }\}$$

とおく．

定理 12.70. G を局所コンパクト群, $p \in \mathcal{P}_1(G)$ とし, p に対する GNS 表現 (定義 12.67) を (π, v) とする. このとき次は互いに同値である.

(1) $p \in \mathrm{ext}\mathcal{P}_1(G)$ (定義 12.69).
(2) π は既約.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. π が既約であることを示すには Schur の補題 12.43 より $\pi(G)' = \mathcal{C}(\pi) = \mathbb{C}1$ が成り立つことを示せばよい. $\pi(G)'$ は von Neumann 環であるから定理 10.186 より $\pi(G)'$ に属する任意の射影作用素 P を取り, P が 1 か 0 であることを示せば十分である.

$$p_1(x) = (P\pi(x)v \mid v), \ \ p_2(x) = ((1-P)\pi(x)v \mid v) \ \ (\forall x \in G)$$

とおく. $P, 1-P$ は $\pi(G)'$ に属する非負有界自己共役作用素であるから,

$$\begin{aligned}
&\int_G ([f]^* * [f])(x) p_1(x) d\mu(x) = \int_G ([f]^* * [f])(x)(P\pi(x)v \mid v) d\mu(x) \\
&= (P\pi([f]^* * [f])v \mid v) = (P\pi([f])^*\pi([f])v \mid v) \\
&= (P\pi([f])v \mid \pi([f])v) \geqslant 0 \ \ (\forall [f] \in L^1(G,\mu)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_G ([f]^* * [f])(x) p_2(x) d\mu(x) = \int_G ([f]^* * [f])(x)((1-P)\pi(x)v \mid v) d\mu(x) \\
&= ((1-P)\pi([f]^* * [f])v \mid v) = ((1-P)\pi([f])^*\pi([f])v \mid v) \\
&= ((1-P)\pi([f])v \mid \pi([f])v) \geqslant 0 \ \ (\forall [f] \in L^1(G,\mu))
\end{aligned}$$

である. よって $p_1, p_2 \in \mathcal{P}(G)$ である. また,

$$p_1 + p_2 = p$$

であり, 系 12.68 より,

$$\|p_1\| + \|p_2\| = p_1(1) + p_2(1) = p(1) = \|p\| = 1$$

であるから, $p \in \mathrm{ext}\mathcal{P}_1(G)$ よりある $\alpha \in [0,1]$ が存在して $p_1 = \alpha p$ が成り立つ. よって,

$$\alpha(\pi(x)v \mid \pi(y)v) = \alpha p(y^{-1}x) = p_1(y^{-1}x) = (P\pi(y^{-1}x)v \mid v) = (P\pi(x)v \mid \pi(y)v) \ \ (\forall x, y \in G)$$

であるから $\overline{\pi(G)v} = \mathcal{H}_\pi$ より $P = \alpha 1$ である. ゆえに π は既約である.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. π が既約であるとする. $p \in \mathrm{ext}\mathcal{P}_1(G)$ を示すには, $p_1 \in \mathcal{P}(G)$ で $p - p_1 \in \mathcal{P}(G)$ なるものを取り, $p_1 = \alpha p$ なる $\alpha \in [0,1]$ が存在することを示せばよい. $p - p_1 \in \mathcal{P}(G)$ より,

$$\Phi_p([f]^* * [f]) - \Phi_{p_1}([f]^* * [f]) = \Phi_{p-p_1}([f]^* * [f]) \geqslant 0 \ \ (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

であるから,

$$0 \leqslant \Phi_{p_1}([f]^* * [f]) \leqslant \Phi_p([f]^* * [f]) = \|\pi([f])v\|^2 \ \ (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

である. よって命題 12.65 より,

$$\pi(L^1(G,\mu))v \times \pi(L^1(G,\mu))v \ni (\pi([f])v, \pi([g])v) \mapsto \Phi_{p_1}([g]^* * [f]) \in \mathbb{C} \tag{12.60}$$

は well-defined な有界準双線型汎関数である. 命題 12.51 より $\pi(L^1(G,\mu))v$ は $\mathcal{H}_\pi$ の稠密部分空間なので, (12.60) は $\mathcal{H}_\pi \times \mathcal{H}_\pi$ 上の有界準双線型汎関数に一意拡張できる*[210]. よって定理 3.49 より $T \in B(\mathcal{H}_\pi)$ で,

$$(T\pi([f])v \mid \pi([g])v) = \Phi_{p_1}([g]^* * [f]) \ \ (\forall [f], [g] \in L^1(G,\mu))$$

*[210] 有界線型作用素の一意拡張 (命題 3.19) と同様のやり方で一意拡張できることが分かる.

を満たすものが存在する. $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定理 12.27 における $L^1(G,\mu)$ の近似単位元とすれば, 任意の $x,y\in G$ に対し, 命題 12.51 より,

$$(T\pi(x)v \mid \pi(y)v) = \lim_{n\to\infty}(T\pi(L_x\varphi_n)v \mid \pi(L_y\varphi_n)v) = \lim_{n\to\infty}\Phi_{p_1}((L_y\varphi_n)^* * (L_x\varphi_n))$$

となり, $p_1\in\mathcal{P}(G)$ に対する GNS 表現を (π_1,v_1) とすれば, 命題 12.51 より,

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_{p_1}((L_y\varphi_n)^* * (L_x\varphi_n)) = \lim_{n\to\infty}(\pi_1(L_x\varphi_n)v_1 \mid \pi_1(L_y\varphi_n)v_1) = (\pi_1(x)v_1 \mid \pi_1(y)v_1) = p_1(y^{-1}x)$$

となるから,

$$(T\pi(x)v \mid \pi(y)v) = p_1(y^{-1}x) \quad (\forall x,y\in G) \tag{12.61}$$

が成り立つ. よって任意の $x,y,z\in G$ に対し,

$$(T\pi(x)\pi(y)v \mid \pi(z)v) = p_1(z^{-1}xy) = p_1((x^{-1}z)^{-1}y) = (T\pi(y)v \mid \pi(x^{-1})\pi(z)v) = (\pi(x)T\pi(y)v \mid \pi(z)v)$$

であるから, $\overline{\pi(G)v} = \mathcal{H}_\pi$ より,

$$T\pi(x) = \pi(x)T \quad (\forall x\in G)$$

が成り立つ. ゆえに $T\in\mathcal{C}(\pi)$ であるから, Schur の補題 12.43 より $T=\alpha 1$ なる $\alpha\in\mathbb{C}$ が存在する. (12.61) より,

$$p_1(x) = (T\pi(x)v \mid v) = \alpha(\pi(x)v \mid v) = \alpha p(x) \quad (\forall x\in G)$$

であるから $p_1=\alpha p$ である. よって $p\in\mathrm{ext}\mathcal{P}_1(G)$ が成り立つ. □

定義 12.71 (コンパクト一様収束位相)**.** X を位相空間, $C(X)$ を X 上の複素数値連続関数全体に各点ごとの演算を入れた $\mathbb{C}$ 上の線型空間とする. 任意の空でないコンパクト集合 $K\subseteq X$ に対し,

$$p_K : C(X)\ni f\mapsto \max_{x\in K}|f(x)|\in[0,\infty)$$

とおくと, p_K は線型空間 $C(X)$ 上のセミノルムである. そして一点集合がコンパクトであることからセミノルムの集合

$$\mathcal{P} := \{p_K : K\subseteq X \text{ は空でないコンパクト集合 }\}$$

は $C(X)$ を分離する (定義 3.56). このセミノルムの分離族 $\mathcal{P}$ が定める $C(X)$ 上のセミノルム位相 (定義 3.57) を $C(X)$ 上のコンパクト一様収束位相と言う. セミノルム位相の基本性質 (命題 3.59 の (1)) より, $C(X)$ のネット $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $f\in C(X)$ にコンパクト一様収束位相で収束することは, 任意の空でないコンパクト集合 $K\subseteq X$ に対し,

$$\max_{x\in K}|f_\lambda(x)-f(x)| = p_K(f_\lambda - f)\to 0$$

が成り立つことと同値である. すなわち $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が f にコンパクト一様収束 (定義 8.8) することと同値である.

定理 12.72. G を局所コンパクト群, $\mu:\mathcal{B}_G\to[0,\infty]$ を G の Haar 測度とする. このとき,

$$\mathcal{P}_1(G)\ni p\mapsto \Phi_p\in\{\Phi\in(L^1(G,\mu))^*_+ : \|\Phi\|=1\} \tag{12.62}$$

は全単射であり, コンパクト一様収束位相 (定義 12.71) と弱 $*$-位相に関して同相写像である.

証明. (12.62) が全単射であることは定理 12.66 と系 12.68 による. $\mathcal{P}_1(G)$ のネット $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $p\in\mathcal{P}_1(G)$ にコンパクト一様収束位相で収束するならば, 任意の $f\in C_c(G)$ に対し,

$$|\Phi_{p_\lambda}(f)-\Phi_p(f)| = \left|\int_G f(x)(p_\lambda(x)-p(x))d\mu(x)\right| \leqslant \|f\|\max_{x\in\mathrm{supp}(f)}|p_\lambda(x)-p(x)|\to 0$$

である. そして定理 5.179 より $L^1(G,\mu)$ において $C_c(G)$ は稠密であり $\|\Phi_{p_\lambda}\|=1$ $(\forall\lambda\in\Lambda)$, $\|\Phi_p\|=1$ であるから,

$$|\Phi_{p_\lambda}([f])-\Phi_p([f])|\to 0 \quad (\forall[f]\in L^1(G,\mu))$$

が成り立つ．よって $L^1(G,\mu)^*$ の弱 $*$-位相で $\lim_{\lambda\in\Lambda}\Phi_{p_\lambda}=\Phi_p$ が成り立つから命題 1.50 より (12.62) は連続である．(12.62) の逆写像が連続であることを示す．$\mathcal{P}_1(G)$ のネット $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $p\in\mathcal{P}_1(G)$ に対し弱 $*$-位相で $\lim_{\lambda\in\Lambda}\Phi_{p_\lambda}=\Phi_p$ が成り立つと仮定し，コンパクト一様収束位相で $\lim_{\lambda\in\Lambda}p_\lambda=p$ が成り立つことを示す．任意のコンパクト集合 $K\subseteq G$ と任意の $\varepsilon\in(0,\infty)$ を取り固定する．p の GNS 表現 (定義 12.67) を (π,v) とする．$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定理 12.27 における $L^1(G,\mu)$ の近似単位元とすると，命題 12.51 より，

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_p(\varphi_n)=\lim_{n\to\infty}(\pi(\varphi_n)v\mid v)=\|v\|^2=p(1)=1,$$
$$\lim_{n\to\infty}\Phi_p(\varphi_n*\varphi_n)=\lim_{n\to\infty}(\pi(\varphi_n)v\mid\pi(\varphi_n)v)=\|v\|^2=p(1)=1$$

であるから $\varphi\in C_c(G)$ で，

$$\|\varphi\|_1=1,\quad \varphi^*=\varphi,\quad 1-\Phi_p(\varphi)-\Phi_p(\varphi)+\Phi_p(\varphi*\varphi)<\varepsilon^2 \tag{12.63}$$

を満たすものが取れる．弱 $*$-位相で $\lim_{\lambda\in\Lambda}\Phi_{p_\lambda}=\Phi_p$ が成り立つので，$\lambda_0\in\Lambda$ が存在し，

$$1-\Phi_{p_\lambda}(\varphi)-\Phi_{p_\lambda}(\varphi)+\Phi_{p_\lambda}(\varphi*\varphi)<\varepsilon^2\quad(\forall\lambda\geqslant\lambda_0) \tag{12.64}$$

が成り立つ．(12.63) と p の GNS 表現より任意の $x\in G$ に対し，

$$\begin{aligned}|p(x)-\Phi_p(L_x\varphi)|^2&=|(\pi(x)v\mid v)-(\pi(x)\pi(\varphi)v\mid v)|^2=|(\pi(x)(1-\pi(\varphi))v\mid v)|^2\\&\leqslant\|\pi(x)(1-\pi(\varphi))v\|^2\|v\|^2=\|(1-\pi(\varphi))v\|^2\\&=1-(\pi(\varphi)v\mid v)-(v\mid\pi(\varphi)v)+(\pi(\varphi)v\mid\pi(\varphi)v)\\&=1-\Phi_p(\varphi)-\Phi_p(\varphi)+\Phi_p(\varphi*\varphi)<\varepsilon^2\end{aligned}$$

であるから，

$$|p(x)-\Phi_p(L_x\varphi)|<\varepsilon\quad(\forall x\in G) \tag{12.65}$$

が成り立つ．同様にして (12.64) と各 p_λ の GNS 表現より，

$$|p_\lambda(x)-\Phi_{p_\lambda}(L_x\varphi)|<\varepsilon\quad(\forall\lambda\geqslant\lambda_0,\forall x\in G) \tag{12.66}$$

が成り立つことが分かる．命題 12.21 より $G\ni x\mapsto L_x\varphi\in L^1(G,\mu)$ は連続であり，K はコンパクトであるから，有限個の $x_1,\cdots,x_n\in K$ と $x_1,\cdots,x_n$ の近傍 $U_1,\cdots,U_n$ で，

$$K\subseteq\bigcup_{j=1}^n U_j,\quad \|L_x\varphi-L_{x_j}\varphi\|_1<\varepsilon\quad(\forall j\in\{1,\cdots,n\},\forall x\in U_j) \tag{12.67}$$

なるものが取れる．そして弱 $*$-位相で $\lim_{\lambda\in\Lambda}\Phi_{p_\lambda}=\Phi_p$ なので $\lambda_1\geqslant\lambda_0$ なる $\lambda_1\in\Lambda$ で，

$$|\Phi_{p_\lambda}(L_{x_j}\varphi)-\Phi_p(L_{x_j}\varphi)|<\varepsilon\quad(\forall j\in\{1,\cdots,n\},\forall\lambda\geqslant\lambda_1) \tag{12.68}$$

なるものが取れる．よって任意の $x\in K$，任意の $\lambda\geqslant\lambda_1$ に対し，$x\in U_j$ なる $j\in\{1,\cdots,n\}$ を取れば，(12.65), (12.66), (12.67), (12.68) より，

$$\begin{aligned}|p(x)-p_\lambda(x)|\leqslant{}&|p(x)-\Phi_p(L_x\varphi)|+|\Phi_p(L_x\varphi)-\Phi_p(L_{x_j}\varphi)|+|\Phi_p(L_{x_j}\varphi)-\Phi_{p_\lambda}(L_{x_j}\varphi)|\\&+|\Phi_{p_\lambda}(L_{x_j}\varphi)-\Phi_{p_\lambda}(L_x\varphi)|+|\Phi_{p_\lambda}(L_x\varphi)-p_\lambda(x)|<5\varepsilon\end{aligned}$$

となるので，

$$|p(x)-p_\lambda(x)|<5\varepsilon\quad(\forall x\in K,\forall\lambda\geqslant\lambda_1)$$

が成り立つ．コンパクト集合 $K\subseteq G$ と $\varepsilon\in(0,\infty)$ は任意なので，コンパクト一様収束位相で $\lim_{\lambda\in\Lambda}p_\lambda=p$ が成り立つ．ゆえに命題 1.50 より (12.62) の逆写像は連続である． □

定理 12.73. G を局所コンパクト群とする．凸集合 $\mathcal{P}_1(G)$ において $\mathrm{conv}(\mathrm{ext}\mathcal{P}_1(G))$ [*211] はコンパクト一様収束位相で稠密である．

[*211] $\mathrm{conv}(\mathrm{ext}\mathcal{P}_1(G))$ は $\mathcal{P}_1(G)$ の端点全体 $\mathrm{ext}\mathcal{P}_1(G)$ の凸包である．

証明. $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を Haar 測度とする. 定理 12.72 より, 凸集合

$$S := \{\Phi \in (L^1(G,\mu))^*_+ : \|\Phi\| = 1\} = \{\Phi_p : p \in \mathcal{P}_1(G)\}$$

の端点全体

$$\mathrm{ext}(S) = \{\Phi_p : p \in \mathrm{ext}\mathcal{P}_1(G)\}$$

の凸包

$$\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(S)) = \{\Phi_p : p \in \mathrm{conv}(\mathrm{ext}\mathcal{P}_1(G))\}$$

が S において弱 $*$-位相で稠密であることを示せばよい.

$$B := \{\Phi \in (L^1(G,\mu))^*_+ : \|\Phi\| \leqslant 1\}$$

とおく. Banach-Alaoglu の定理 3.67 より B は弱 $*$-位相でコンパクトな凸集合であるから, Krein-Milman の端点定理 3.84 より,

$$B = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(B))}^{w^*\text{-topology}}$$

が成り立つ. よって命題 1.34 より任意の $\Phi \in S \subseteq B$ に対し, $\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(B))$ のネット $(\Phi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で弱 $*$-位相で $\Phi_\lambda \to \Phi$ なるものが取れる. ここで任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対し $(1-\varepsilon)B$ も弱 $*$-位相でコンパクトであるから $(1-\varepsilon)B \subseteq B$ は弱 $*$-位相で閉集合である. そして $\Phi \notin (1-\varepsilon)B$ であるので, ある $\lambda_0 \in \Lambda$ に対し,

$$\Phi_\lambda \notin (1-\varepsilon)B \quad (\forall \lambda \geqslant \lambda_0)$$

となる. よって,

$$0 \leqslant 1 - \|\Phi_\lambda\| < \varepsilon \quad (\forall \lambda \geqslant \lambda_0)$$

であるから $\|\Phi_\lambda\| \to 1$ が成り立つ. ゆえに,

$$\Phi = \lim_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{\|\Phi_\lambda\|}\Phi_\lambda \in \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(S))}^{w^*\text{-topology}}$$

が成り立つ. これより $\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(S))$ は S において弱 $*$-位相で稠密である. □

定理 12.74 (Gelfand-Raikov の定理)**.** G を局所コンパクト群とする. $x, y \in G$ が $x \neq y$ ならば, G の既約なユニタリ表現 π で $\pi(x) \neq \pi(y)$ なるものが存在する.

証明. Urysohn の補題 5.165 より $\varphi \in C_c(G)$ で $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ なるものが存在する. よって定理 12.63 より $p \in \mathcal{P}_1(G)$ で $p(x) \neq p(y)$ なるものが存在する. よって定理 12.73 より $p \in \mathrm{ext}(\mathcal{P}_1(G))$ で $p(x) \neq p(y)$ なるものが存在する. この $p \in \mathrm{ext}\mathcal{P}_1(G)$ に対する GNS 表現 (π, v) を取ると, 定理 12.70 より π は既約であり, $(\pi(x)v \mid v) = p(x) \neq p(y) = (\pi(y)v \mid v)$ より $\pi(x) \neq \pi(y)$ である. □

12.3 局所コンパクト群の等質空間上の不変測度

定義 12.75 (剰余類, 剰余類空間)**.** G を群, H を G の部分群とする. $x, y \in G$ が $y^{-1}x \in H$ を満たすことを $x \sim y$ と表すと, $\sim$ は G における同値関係 (定義 2.21) であり, この同値関係に関する $x \in G$ の同値類は $xH \subseteq G$ である. xH を H を法とする x の剰余類と言う. そして H を法とする x の剰余類全体からなる集合 (同値関係 $\sim$ に関する商集合 (定義 2.24)) を,

$$G/H := G/\sim = \{xH : x \in H\}$$

と表し, H を法とする剰余類空間と言う. 商写像は大抵,

$$q : G \ni x \mapsto q(x) := xH \in G/H$$

と表す.

定義 12.76 (正規部分群, 剰余類群)**.** G を群, H を G の部分群とする. 任意の $x \in G$ に対し $xH = Hx$ が成り立つとき, H を G の正規部分群と言う. H が G の正規部分群であるとき, 剰余類空間 G/H に対し,

$$G/H \times G/H \ni (q(x), q(y)) \mapsto q(xy) \in G/H$$

は well-defined であり, この二項演算により剰余類空間 G/H は群をなす. この群 G/H を H を法とした剰余類群と言う. このとき商写像

$$q : G \ni x \mapsto q(x) \in G/H$$

は全射群準同型写像である.

定義 12.77 (局所コンパクト群の剰余類空間の商位相)**.** G を局所コンパクト群, H を G の閉部分群, G/H を剰余類空間, $q : G \to G/H$ を商写像とする.

$$\{V \subseteq G/H : q^{-1}(V) \text{ は } G \text{ の開集合 }\}$$

は G/H の位相をなす. これを剰余類空間 G/H の商位相と言う. 局所コンパクト群 G とその閉部分群 H に対し, 剰余類空間 G/H には, 特に断らない限り, この商位相が入っているものとする.

命題 12.78 (剰余類空間の商位相の基本性質)**.** G を局所コンパクト群, H を G の閉部分群, G/H を剰余類空間, $q : G \to G/H$ を商写像とする.

(1) $q : G \to G/H$ は連続かつ開写像 (開集合を開集合に写す写像) である. また G/H の任意の開集合 V は G のある開集合 U に対し $V = q(U)$ と表せる.
(2) G/H は局所コンパクト Hausdorff 空間である. また G の第二可算性より G/H は第二可算である.
(3) G/H の任意のコンパクト集合 C は G のコンパクト集合 K に対し $C = q(K)$ と表せる.
(4) H が正規部分群であるとき G/H は局所コンパクト群である.

証明. (1) $q : G \to G/H$ が連続であることは G/H の商位相の定義より自明である. G の任意の開集合 U に対し,

$$q^{-1}(q(U)) = UH = \bigcup_{x \in H} Ux$$

は G の開集合であるから $q(U)$ は G/H の開集合である. G/H の任意の開集合 V を取る. 商位相の定義 12.77 より $U = q^{-1}(V)$ は G の開集合であり, $q : G \to G/H$ は全射であるから $V = q(q^{-1}(V)) = q(U)$ である.

(2) $q(x) \neq q(y)$ とすると, $y^{-1}x \in G \backslash H$ であり, H は G の閉集合であるから, G の群演算の連続性より単位元 $1 \in G$ の開近傍 U で,

$$(yU)^{-1}(xU) \subseteq G \backslash H \tag{12.69}$$

なるものが取れる. (1) より $q(xU), q(yU)$ はそれぞれ $q(x), q(y) \in G/H$ の開近傍であり, (12.69) より $q(xU) \cap q(yU) = \varnothing$ であるから, G/H は Hausdorff 空間である. G は局所コンパクト性より任意の $x \in G$ に対し $x \in U \subseteq K$ なる G の開集合 U と G のコンパクト集合 K が取れる. (1) より $q(U)$ は G/H の開集合, $q(K)$ は G/H のコンパクト集合であり, $q(x) \in q(U) \subseteq q(K)$ である. よって G/H の任意の元はコンパクトな近傍を持つので G/H は局所コンパクト Hausdorff 空間である. (1) より G の開集合の可算基 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し $\{q(U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は G/H の開集合の可算基である. よって G/H は第二可算である.

(3) 任意のコンパクト集合 $C \subseteq G/H$ を取る. (1) と G の局所コンパクト性より閉包がコンパクトな有限個の開集合 $U_1, \cdots, U_n \subseteq G$ で,

$$C \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} q(U_j) \tag{12.70}$$

なるものが取れる. (2) より G/H は Hausdorff 空間であるからコンパクト集合 C は G/H の閉集合 (命題 1.44) であり, $\bigcup_{j=1}^{n} \overline{U_j}$ は G のコンパクト集合であるから,

$$K := q^{-1}(C) \cap \bigcup_{j=1}^{n} \overline{U_j}$$

は G のコンパクト集合である. そして (12.70) より $q(K) = C$ である.

(4) 任意の $x, y \in G$ を取る．$q(x)q(y) = q(xy) \in G/H$ の任意の開近傍は (1) より xy のある開近傍 $U \subseteq G$ に対して $q(U)$ と表せる．G の乗法の連続性より $x, y \in G$ の開近傍 U_1, U_2 で $U_1U_2 \subseteq U$ なるものが取れて，$q(U_1)q(U_2) = q(U_1U_2) \subseteq q(U)$ であり，$q(U_1), q(U_2) \subseteq G/H$ はそれぞれ $q(x), q(y) \in G/H$ の開近傍であるから，G/H の乗法は連続である．任意の $x \in G$ に対し $q(x)^{-1} = q(x^{-1}) \in G/H$ の任意の開近傍は (1) より x^{-1} のある開近傍 U によって $q(U)$ と表せる．U^{-1} は x の開近傍であるので (1) より $q(U^{-1}) \subseteq G/H$ は $q(x) \in G/H$ の開近傍であり，$q(U^{-1})^{-1} = q(U)$ であるから G/H の逆元を取る演算は連続である．

□

定義 12.79 (局所コンパクト群の局所コンパクト Hausdorff 空間への作用)**.** G を局所コンパクト群，S を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．

$$G \times S \ni (x, s) \mapsto xs \in S \tag{12.71}$$

が G の S への作用であるとは次が成り立つことを言う．

(1) (12.71) は連続.
(2) $1s = s$ $(\forall s \in S)$.
(3) $x(ys) = (xy)s$ $(\forall x, y \in G, \forall s \in S)$.

(12.71) が G の S への作用であるとき，任意の $s \in S$ に対し，G の閉部分群

$$H_s := \{x \in G : xs = s\}$$

を s における固定部分群と言う．

定義 12.80 (局所コンパクト群の等質空間)**.** G を局所コンパクト群，S を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．G の S への作用

$$G \times S \ni (x, s) \mapsto xs \in S$$

が推移的であるとは，任意の $s, t \in S$ に対し $t = xs$ なる $x \in G$ が存在することを言う．またこのとき S を G の等質空間と言う．

定義 12.81 (群準同型写像の核)**.** G, H を群とし，$\varphi : G \to H$ を群準同型写像とする．

$$\mathrm{Ker}(\varphi) := \{x \in G : \varphi(x) = 1\}$$

を φ の核と言う．

命題 12.82 (群準同型写像の核の基本性質)**.** G, H を群とし，$\varphi : G \to H$ を群準同型写像とする．このとき，

(1) $\varphi : G \to H$ が単射であることと $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1\}$ であることは同値である．
(2) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ は G の正規部分群である．そして剰余類群 $G/\mathrm{Ker}(\varphi)$ を考えると，

$$\widehat{\varphi} : G/\mathrm{Ker}(\varphi) \ni q(x) \mapsto \varphi(x) \in H$$

は well-defined な単射群準同型写像である．

証明. 容易に分かる． □

例 12.83. G, H を局所コンパクト群，$\varphi : G \to H$ を連続群準同型写像とする．このとき，

$$G \times H \ni (x, y) \mapsto \varphi(x)y \in H$$

は G の H への作用である．この作用について H の任意の点に関する固定部分群は $\mathrm{Ker}(\varphi)$ である．またこの作用が推移的であるための必要十分条件は φ が全射であることである．

例 12.84. G を局所コンパクト群，H を G の閉部分群とする．このとき命題 12.78 より，

$$G \times G/H \ni (x, q(y)) \mapsto q(xy) \in G/H$$

は局所コンパクト群 G の局所コンパクト Hausdorff 空間 G/H への推移的作用である．

定理 12.85 (Baire のカテゴリ定理 (局所コンパクト Hausdorff 空間版)). X を局所コンパクト Hausdorff 空間, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の稠密な開集合の列とする. このとき $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ は X で稠密である.

証明. $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ とおく. $\overline{A} = X$ を示すには, 命題 1.32 より, X の任意の空でない開集合 U_0 を取り,

$$U_0 \cap A \neq \varnothing \tag{12.72}$$

が成り立つことを示せばよい. $\overline{V_1} = X$ であるから, 命題 1.32 より $U_0 \cap V_1 \neq \varnothing$ であるので, 定理 1.81 より閉包がコンパクトな空でない開集合 U_1 で,

$$\overline{U_1} \subseteq U_0 \cap V_1$$

を満たすものが取れる. $\overline{V_2} = X$ であるから, 命題 1.32 より $U_1 \cap V_2 \neq \varnothing$ であるので, 定理 1.81 より閉包がコンパクトな空でない開集合 U_2 で,

$$\overline{U_2} \subseteq U_1 \cap V_2$$

を満たすものが取れる. 同様の操作を続けていけば, 閉包がコンパクトな空でない開集合の列 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\overline{U_n} \subseteq U_{n-1} \cap V_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{12.73}$$

を満たすものが構成できる. $(\overline{U_n})_{n\in\mathbb{N}}$ は空でないコンパクト集合の単調減少列であるから,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n} \neq \varnothing$$

であり, (12.73) より,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n} \subseteq U_0 \cap V_1$$

であるから (12.72) が成り立つ. □

系 12.86. X を局所コンパクト Hausdorff 空間, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の閉集合の列とし, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ であるとする. このときある $n \in \mathbb{N}$ に対し $F_n^{\circ} \neq \varnothing$ が成り立つ.

証明. もし任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $F_n^{\circ} = \varnothing$ ならば,

$$\overline{(X \backslash F_n)} = X \backslash F_n^{\circ} = X \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから, 定理 12.85 より $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \backslash F_n)$ は X で稠密である. しかし仮定より,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \backslash F_n) = X \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$$

であるので矛盾する. □

定理 12.87 (開写像定理). G を局所コンパクト群, S を局所コンパクト Hausdorff 空間とし,

$$G \times S \ni (x, s) \mapsto xs \in S \tag{12.74}$$

を G の S への推移的作用とする. このとき任意の $s_0 \in S$ に対し,

$$G \ni x \mapsto xs_0 \in S \tag{12.75}$$

は全射な開写像 (開集合を開集合に写す写像) である. そして s_0 における固定部分群 $H_{s_0} = \{x \in G : xs_0 = s_0\}$ に対し, 剰余類空間 G/H_{s_0} と商写像 $q : G \to G/H_{s_0}$ を考えると,

$$G/H_{s_0} \ni q(x) \mapsto xs_0 \in S \tag{12.76}$$

は同相写像である.

証明. (12.75) が全射であることは (12.74) が推移的であることによる. (12.75) が開写像であることを示す. G の任意の空でない開集合 U を取り Us_0 が S の開集合であることを示せばよい. 任意の $x_0 \in U$ を取り, $1 \in G$ のコンパクト対称近傍 V で $x_0VV \subseteq U$ なるものを取る.

$$G = \bigcup_{y \in G} yV^\circ$$

であるから, G の第二可算性と命題 1.68 より, G の列 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} y_n V^\circ$$

なるものが取れる. (12.75) が全射であることから,

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} y_n(V^\circ s_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} y_n(Vs_0)$$

であり, V のコンパクト性より Vs_0 は S のコンパクト集合, 従って閉集合であるから, 系 12.86 より,

$$(Vs_0)^\circ \neq \varnothing$$

である[*212]. そこで $x_1 \in V$ で $x_1 s_0 \in (Vs_0)^\circ$ なるものを取れば,

$$x_0 s_0 = x_0 x_1^{-1} x_1 s_0 \in x_0 x_1^{-1}(Vs_0)^\circ \subseteq x_0 VV s_0 \subseteq Us_0$$

であり, $x_0 x_1^{-1}(Vs_0)^\circ$ は S の開集合なので $x_0 s_0 \in Us_0$ は Us_0 の内点である. よって $x_0 \in U$ の任意性より Us_0 は S の開集合である. ゆえに (12.75) は開写像である.
$q(x_1) = q(x_2)$ ならば, $x_1^{-1}x_2 \in H_{s_0}$ であるから,

$$x_1 s_0 = x_1(x_1^{-1}x_2)s_0 = x_2 s_0$$

である. よって (12.76) は well-defined である. (12.75) が全射であることから (12.76) も全射である. そして $x_1 s_0 = x_2 s_0$ ならば, $x_2^{-1}x_1 s_0 = s_0$ であるから $x_2^{-1}x_1 \in H_{s_0}$ なので $q(x_1) = q(x_2)$ である. よって (12.76) は全単射である. (12.75) は連続な開写像であるから, 命題 12.78 より (12.76) は同相写像である. □

注意 12.88. S を局所コンパクト群 G の等質空間とすると, 定理 12.87 より, 任意の $s \in S$ に対し, s における固定部分群 H_s を法とする剰余類空間 G/H_s と S の間には,

$$G/H_s \ni q(x) \mapsto xs \in S$$

なる同相写像がある. これより局所コンパクト群の等質空間への作用は, 実質的に例 12.84 における作用である.

注意 12.89. 命題 12.78 より局所コンパクト群 G の剰余類空間は G の第二可算性より第二可算である. よって定理 12.87 より G の任意の等質空間は第二可算である.

系 12.90. G, H を局所コンパクト群, $\varphi : G \to H$ を全射連続群準同型写像とする. このとき,

$$G/\operatorname{Ker}(\varphi) \ni q(x) \mapsto \varphi(x) \in H$$

は同型同相写像である.

証明. 群同型写像であることは φ が全射であることと命題 12.82 の (2) による. G の H への作用

$$G \times H \ni (x, y) \mapsto \varphi(x)y \in H$$

について H の任意の点における固定部分群は $\operatorname{Ker}(\varphi)$ であるから, 定理 12.87 より同相写像である. □

[*212] 任意の $y \in G$ に対し $S \ni s \mapsto ys \in S$ は同相写像であることに注意.

定義 12.91 (等質空間上の関数の平行移動)**.** G を局所コンパクト群, S を G の等質空間とし, f を S 上の関数とする. このとき任意の $x \in G$ に対し S 上の関数 $L_x f$ を,

$$L_x f(s) := f(x^{-1}s) \ \ (\forall s \in S)$$

として定義する.

定理 12.92 (等質空間における平行移動の一様連続性)**.** G を局所コンパクト群, S を G の等質空間とし, $f \in C_0(S)$ とする. このとき,

(1) 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し, 単位元 $1 \in G$ の対称開近傍 V で,

$$y^{-1}x \in V \quad \Rightarrow \quad |L_y f(s) - L_x f(s)| < \varepsilon \ \ (\forall s \in S)$$

なるものが存在する. 特に,

$$G \ni x \mapsto L_x f \in C_0(S)$$

は sup ノルムに関して連続である.

証明. 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ を取り固定する. $C_0(S)$ の定義 5.159 より $K := \left(|f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$ はコンパクトである. f は連続であるから, 各 $s \in K$ に対し $1 \in G$ の開近傍 U_s で,

$$|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ (t \in (U_s)s) \tag{12.77}$$

なるものが取れる. 各 $s \in K$ に対し $1 \in G$ の対称開近傍 V_s で $V_s V_s \subseteq U_s$ なるものを取る.

$$K \subseteq \bigcup_{s \in K} (V_s)s$$

であり, 開写像定理 12.87 より各 $(V_s)s$ は S の開集合であるから, K のコンパクト性より有限個の $s_1, \cdots, s_n \in K$ が取れて,

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (V_{s_j})s_j \tag{12.78}$$

が成り立つ. $1 \in G$ の対称開近傍

$$V := \bigcap_{j=1}^{n} V_{s_j} \tag{12.79}$$

を考える. $y^{-1}x \in V$ を満たす任意の $x, y \in G$ と任意の $s \in S$ を取り,

$$|f(y^{-1}s) - f(x^{-1}s)| < \varepsilon \tag{12.80}$$

が成り立つことを示せばよい. もし $x^{-1}s, y^{-1}s \notin K$ ならば K の定義より,

$$|f(y^{-1}s) - f(x^{-1}s)| \leqslant |f(y^{-1}s)| + |f(x^{-1}s)| < \varepsilon$$

である. またもし $x^{-1}s \in K$ ならば (12.78) より $x^{-1}s \in (V_{s_j})s_j$ なる $j \in \{1, \cdots, n\}$ が取れて, (12.79) より,

$$y^{-1}s = y^{-1}x(x^{-1}s) \in V(V_{s_j})s_j \subseteq (V_{s_j}V_{s_j})s_j \subseteq (U_{s_j})s_j$$

となる. よって,

$$x^{-1}s, y^{-1}s \in (U_{s_j})s_j$$

であるから (12.77) より,

$$|f(y^{-1}s) - f(x^{-1}s)| \leqslant |f(y^{-1}s) - f(s_j)| + |f(s_j) - f(x^{-1}s)| < \varepsilon$$

である. V の対称性より $y^{-1}x \in V$ は $x^{-1}y \in V$ を意味するので, $y^{-1}s \in K$ であるとしても同様にして (12.80) が成り立つことが分かる. よって $x, y \in G$ が $y^{-1}x \in V$ を満たす限り,

$$|f(y^{-1}s) - f(x^{-1}s)| < \varepsilon \ \ (\forall s \in S)$$

が成り立つ. □

定義 12.93 (等質空間上の不変測度)**.** G を局所コンパクト群, S を G の等質空間 (定義 12.80) とする. S 上の位相正則測度 $\nu : \mathcal{B}_S \to [0, \infty]$ が,

$$\nu(S) > 0, \quad \nu(xB) = \nu(B) \quad (\forall x \in G, \forall B \in \mathcal{B}_S)$$

を満たすとき, ν を S 上の G-不変測度と言う.

命題 12.94 (等質空間上の不変測度による積分の基本性質)**.** G を局所コンパクト群, S を G の等質空間, $\nu : \mathcal{B}_S \to [0, \infty]$ を S 上の G-不変測度とする. このとき任意の非負値 Borel 関数 $f : S \to [0, \infty]$ に対し,

$$\int_S L_x f(s) d\nu(s) = \int_S f(s) d\nu(s) \quad (\forall x \in G)$$

が成り立つ.

証明. 非負値 Borel 関数の非負値 Borel 単関数の各点単調増加列による近似 (命題 5.29) より, f がある $B \in \mathcal{B}_S$ の指示関数である ($f = \chi_B$) 場合を示せば十分であるが, 不変測度の定義より,

$$\int_S L_x \chi_B(s) d\nu(s) = \int_S \chi_B(x^{-1}s) d\nu(s) = \int_S \chi_{xB}(s) d\nu(s) = \nu(xB) = \nu(B) = \int_S \chi_B(s) d\nu(s)$$

である. □

命題 12.95 (空でない開集合の不変測度)**.** G を局所コンパクト群, S を G の等質空間, $\nu : \mathcal{B}_S \to [0, \infty]$ を S 上の G-不変測度とする. このとき任意の空でない開集合 $U \subseteq S$ に対し $\nu(U) > 0$ が成り立つ.

証明. $\nu(U) = 0$ なる空でない開集合 $U \subseteq S$ が存在すると仮定する. 任意のコンパクト集合 $K \subseteq S$ に対し, G の S への作用が推移的であることから,

$$K \subseteq \bigcup_{x \in G} xU$$

が成り立つ. 各 xU は S の開集合なので有限個の $x_1, \cdots, x_n \in G$ で,

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} x_j U$$

なるものが取れる. よって,

$$\nu(K) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \nu(x_j U) = \sum_{j=1}^{n} \nu(U) = 0$$

となるので, 位相正則測度の内部正則性 (定義 5.168 の (3)) より,

$$\nu(S) = \sup\{\nu(K) : K \subseteq S \text{ はコンパクト}\} = 0$$

となる. しかし不変測度の定義より $\nu(S) > 0$ であるので矛盾する. □

定理 12.96 (等質空間における平行移動の L^p 連続性)**.** G を局所コンパクト群, S を G の等質空間, $\nu : \mathcal{B}_S \to [0, \infty]$ を S 上の G-不変測度とする. このとき任意の $p \in [1, \infty)$, 任意の $[f] \in L^p(S, \nu)$ に対し,

$$G \ni x \mapsto L_x[f] = [L_x f] \in L^p(S, \nu)$$

は連続である.

証明. 命題 12.94 より,

$$\|L_x[f]\|_p = \|[f]\|_p \quad (\forall x \in G)$$

である. また ν は位相正則測度なので定理 5.179 より $L^p(S, \nu)$ において $C_c(S)$ は稠密である. よって任意の $f \in C_c(S)$ に対し,

$$G \ni x \ni L_x f \in L^p(S, \nu) \tag{12.81}$$

が L^p ノルムで連続であることを示せば十分である．$L_{x_1}L_{x_2}f = L_{x_1x_2}f$ $(\forall x_1, x_2 \in G)$ であるから，単位元 $1 \in G$ における連続性を示せば十分である．$1 \in G$ のコンパクト近傍 V_0 を取り固定する．任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し定理 12.92 より $1 \in G$ の近傍 $V \subseteq V_0$ で，

$$x \in V \quad \Rightarrow \quad |L_x f(s) - f(s)| \leqslant \varepsilon \ \ (\forall s \in S)$$

なるものが取れる．

$$\mathrm{supp}(L_x f - f) \subseteq V\,\mathrm{supp}(f) \subseteq V_0\,\mathrm{supp}(f) \ \ (\forall x \in V)$$

であるから，

$$|L_x f(s) - f(s)| \leqslant \varepsilon \chi_{V_0\,\mathrm{supp}(f)}(s) \ \ (\forall x \in V, \forall s \in S)$$

なので，任意の $x \in V$ に対し，

$$\|L_x f - f\|_p = \left(\int_S |L_x f(s) - f(s)|^p d\nu(s)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon \nu(V_0\,\mathrm{supp}(f))^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つ．$V_0\,\mathrm{supp}(f)$ はコンパクトだから $\nu(V_0\,\mathrm{supp}(f)) < \infty$ であり，ε は f, V_0 によらない任意の正実数なので (12.96) は $1 \in G$ において L^p ノルムで連続である． □

補題 12.97. G を局所コンパクト群，S を G の等質空間，$s \in S$ とする．そして s における固定部分群 $H_s = \{x \in G : xs = s\}$ 上の Haar 測度を $\mu_{H_s} : \mathcal{B}_{H_s} \to [0, \infty]$ とする．このとき任意の $f \in C_c(G)$ に対し，

$$Pf(xs) := \int_{H_s} f(xy) d\mu_{H_s}(y) \ \ (\forall x \in G) \tag{12.82}$$

とおくと，$Pf : S \to \mathbb{C}$ は well-defined であり $Pf \in C_c(S)$ である．そして，

$$C_{c,+}(G) \ni f \mapsto Pf \in C_{c,+}(S) \tag{12.83}$$

は全射であり，

$$C_{c,\mathbb{R}}(G) \ni f \mapsto Pf \in C_{c,\mathbb{R}}(S) \tag{12.84}$$

は全射実線型写像である．

証明. $x_1 s = x_2 s$ ならば $x_1^{-1}x_2 \in H_s$ であるから，μ_{H_s} が H_s の Haar 測度であることにより，任意の $f \in C_c(S)$ に対し，

$$\int_{H_s} f(x_1 y) d\mu_{H_s}(y) = \int_{H_s} f(x_1 x_1^{-1} x_2 y) d\mu_{H_s}(y) = \int_{H_s} f(x_2 y) d\mu_{H_s}(y)$$

である．よって $Pf : S \to \mathbb{C}$ は well-defined である (S は G の等質空間ゆえ $S = Gs$ であることに注意)．任意の $x_0 \in G$ と x_0 のコンパクト近傍 V に対し $H_s \cap (V^{-1}\,\mathrm{supp}(f))$ はコンパクトだから $\mu_{H_s}(H_s \cap (V^{-1}\,\mathrm{supp}(f))) < \infty$ であり，任意の $x \in V$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{H_s} f(xy) d\mu_{H_s}(y) - \int_{H_s} f(x_0 y) d\mu_{H_s}(y)\right| \leqslant \int_{H_s} |f(xy) - f(x_0 y)| d\mu_{H_s}(y) \\
&\leqslant \sup_{y \in H_s} |f(xy) - f(x_0 y)| \mu_{H_s}(H_s \cap (V^{-1}\,\mathrm{supp}(f)))
\end{aligned}$$

であるから，定理 12.3 より，

$$G \ni x \mapsto \int_{H_s} f(xy) d\mu_{H_s}(y) \in \mathbb{C}$$

は連続である．よって定理 12.87 と命題 12.78 の (1) より $Pf : S \to \mathbb{C}$ は連続である．任意の $f \in C_c(G)$ に対し $\mathrm{supp}(f)s \subseteq S$ はコンパクトであるから，Urysohn の補題 5.165 より $\mathrm{supp}(f)s$ 上で 1 の $h \in C_{c,+}(S)$ が取れる．このとき，

$$f(x) = h(xs) f(x) \ \ (\forall x \in G)$$

であるので，

$$Pf(xs) = \int_{H_s} h(xys) f(xy) d\mu_{H_s}(y) = h(xs) \int_{H_s} f(xy) d\mu_{H_s}(y) = h(xs) Pf(xs) \ \ (\forall x \in G),$$

よって $Pf = hPf \in C_c(S)$ である．今, (12.83) が全射であることを示す．任意の $\varphi \in C_c(S)$ を取る．コンパクト集合 $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq S$ に対し命題 12.78 の (3) と定理 12.87 より, コンパクト集合 $K \subseteq G$ で,

$$Ks = \mathrm{supp}(\varphi)$$

なるものが取れる．Urysohn の補題 5.165 より K 上で 1 の $g \in C_{c,+}(G)$ が取れて, 任意の $x \in K$ に対し,

$$Pg(xs) = \int_{H_s} g(xy) d\mu_{H_s}(y) > 0$$

[*213]なので,

$$\mathrm{supp}(\varphi) = Ks \subseteq (Pg > 0)$$

である．そこで $\psi : S \to [0, \infty)$ を,

$$\psi(t) := \begin{cases} \frac{\varphi(t)}{Pg(t)} & (t \in (Pg > 0)) \\ 0 & (t \notin (Pg > 0)) \end{cases} \tag{12.85}$$

と定義すれば, ψ は開集合 $(Pg > 0)$ 上で連続で, 開集合 $S \backslash \mathrm{supp}(\varphi)$ 上で 0 であり,

$$S = (Pg > 0) \cup (S \backslash \mathrm{supp}(\varphi))$$

であるから $\psi : S \to [0, \infty)$ は連続である．そこで,

$$f(x) := \psi(xs) g(x) \ \ (\forall x \in G)$$

とおけば $f \in C_{c,+}(G)$ であり, (12.85) より,

$$Pf(xs) = \int_{H_s} \psi(xys) g(xy) d\mu_{H_s}(y) = \psi(xs) \int_{H_s} g(xy) d\mu_{H_s}(y) = \psi(xs) Pg(xs) = \varphi(xs) \ \ (\forall x \in G)$$

である．よって (12.83) は全射である．任意の $\varphi \in C_{c,\mathbb{R}}(S)$ に対し,

$$\varphi_\pm = \max(\pm\varphi, 0) \in C_{c,+}(S), \ \ \varphi = \varphi_+ - \varphi_-$$

であるから (12.84) は全射である．(12.84) が実線型写像であることは自明である． □

定理 12.98 (等質空間上の不変測度の存在と一意性)**.** G を局所コンパクト群, $\Delta_G : G \to (0, \infty)$ を G のモジュラー関数 (定義 12.16), S を G の等質空間 (定義 12.80) とし, 任意の $s \in S$ に対し s における固定部分群 $H_s = \{x \in G : xs = s\}$ 上のモジュラー関数を $\Delta_{H_s} : H_s \to (0, \infty)$ とする．このとき次は互いに同値である．

(1) S は G-不変測度 (定義 12.93) を持つ．
(2) 任意の $s \in S$ に対し $\Delta_{H_s}(x) = \Delta_G(x)$ $(\forall x \in H_s)$ が成り立つ．
(3) ある $s \in S$ に対し $\Delta_{H_s}(x) = \Delta_G(x)$ $(\forall x \in H_s)$ が成り立つ．

また S 上の G-不変測度は存在するならば正数倍を除いて唯一つである．

証明. (1) ⇒ (2) を示す．S が G-不変測度 $\nu : \mathcal{B}_S \to [0, \infty]$ を持つとする．任意の $s \in S$ を取り, $\mu_{H_s} : \mathcal{B}_{H_s} \to [0, \infty]$ を H_s の Haar 測度とし, 補題 12.97 における非負値性を保存する全射線型写像

$$C_c(G) \ni f \mapsto Pf \in C_c(S), \ \ Pf(xs) = \int_{H_s} f(xy) d\mu_{H_s}(y) \ \ (\forall f \in C_c(G), \forall x \in G) \tag{12.86}$$

を考えると,

$$\begin{aligned} PL_z f(xs) &= \int_{H_s} L_z f(xy) d\mu_{H_s}(y) = \int_{H_s} f(z^{-1}xy) d\mu_{H_s}(y) \\ &= Pf(z^{-1}xs) = L_z Pf(xs) \ \ (\forall f \in C_c(G), \forall x, z \in G) \end{aligned}$$

[*213] 任意の $x \in K$ に対し, $H_s \ni y \mapsto g(xy) \in [0, \infty)$ は $1 \in H_s$ において 1 だから, 命題 12.8 より $\int_{H_s} g(xy) d\mu_{H_s}(y) > 0$ である．

であるから,

$$PL_zf = L_zPf \quad (\forall f \in C_c(G), \forall z \in G)$$

であるので, 命題 12.94 より,

$$\int_S PL_zf(t)d\nu(t) = \int_S L_zPf(t)d\nu(t) = \int_S Pf(t)d\nu(t) \quad (\forall f \in C_c(G))$$

である. よって Radon 汎関数 (定義 5.170)

$$C_{c,\mathbb{R}}(G) \ni f \mapsto \int_S Pf(t)d\nu(t) \in \mathbb{R}$$

に対応する G の位相正則測度 (Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.172) $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ は,

$$\begin{aligned}\int_G f(x)d\mu(x) &= \int_S Pf(t)d\nu(t) = \int_S PL_zf(t)d\nu(t)\\ &= \int_G L_zf(x)d\mu(x) \quad (\forall f \in C_c(G), \forall z \in G)\end{aligned}$$

を満たすから μ は G の Haar 測度である[*214] 任意の $z \in H_s$ に対しモジュラー関数の基本性質 (定理 12.18 の (1)) より,

$$\begin{aligned}&\Delta_G(z)\int_G f(x)d\mu(x) = \int_G R_{z^{-1}}f(x)d\mu(x) = \int_S PR_{z^{-1}}f(t)d\nu(t)\\ &= \int_S\int_{H_s} R_{z^{-1}}f(xy)d\mu_{H_s}(y)d\nu(xs) = \int_S\int_{H_s} f(xyz^{-1})d\mu_{H_s}(y)d\nu(xs)\\ &= \int_S \Delta_{H_s}(z)\int_{H_s} f(xy)d\mu_{H_s}(y)d\nu(xs) = \Delta_{H_s}(z)\int_S Pf(t)d\nu(t)\\ &= \Delta_{H_s}(z)\int_G f(x)d\mu(x) \quad (\forall f \in C_c(G))\end{aligned}$$

であるから $\Delta_G(z) = \Delta_{H_s}(z)$ である. よって (2) が成り立つ.
(2) ⇒ (3) は自明である. (3) ⇒ (1) を示す. (3) が成り立つとし, 非負値性を保存する全射線型写像 (12.86) を考える. $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度とする. 今,

$$Pf = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_G f(x)d\mu(x) = 0 \tag{12.87}$$

が成り立つことを示す. $Pf = 0$ なる $f \in C_c(G)$ を取る. モジュラー関数の基本性質 (定理 12.18 の (3)) より,

$$\begin{aligned}0 = Pf(xs) &= \int_{H_s} f(xy)d\mu_{H_s}(y) = \int_{H_s} \Delta_{H_s}(y^{-1})f(xy^{-1})d\mu_{H_s}(y)\\ &= \int_{H_s} \Delta_G(y^{-1})f(xy^{-1})d\mu_{H_s}(y) \quad (\forall x \in G)\end{aligned} \tag{12.88}$$

である. $\mathrm{supp}(f)s \subseteq S$ のコンパクト性と Urysohn の補題 5.165, (12.86) の全射性より $g \in C_c(G)$ で,

$$Pg(xs) = 1 \quad (\forall x \in \mathrm{supp}(f))$$

なるものが取れる. よって (12.88) と Fubini の定理 5.85, モジュラー関数の基本性質 (定理 12.18 の (1)) より,

$$\begin{aligned}0 &= \int_G g(x)\int_{H_s} \Delta_G(y^{-1})f(xy^{-1})d\mu_{H_s}(y)d\mu(x)\\ &= \int_{H_s}\int_G \Delta_G(y^{-1})g(x)f(xy^{-1})d\mu(x)d\mu_{H_s}(y)\\ &= \int_{H_s}\int_G g(xy)f(x)d\mu(x)d\mu_{H_s}(y)\\ &= \int_S Pg(xs)f(x)d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x)\end{aligned}$$

[*214] 位相正則測度の外部正則性 (定義 5.168) と命題 5.169 の (2) より $\mu(zB) = \mu(B)$ $(\forall z \in G, \forall B \in \mathcal{B}_G)$ が成り立つ. また S における Urysohn の補題 5.165 と (12.86) の全射性より $Pf \in C_{c,+}(S)\backslash\{0\}$ なる $f \in C_{c,+}(G)$ が存在し, 命題 12.95 より $\int_G f(x)d\mu(x) = \int_S Pf(t)d\nu(t) > 0$ であるから $\mu(G) > 0$ である. よって μ は G の Haar 測度 (定義 12.4) である.

であるから (12.87) が成り立つ. (12.87) と (12.86) が非負値性を保存する全射線型写像であることから,

$$C_{c,\mathbb{R}}(S) \ni Pf \mapsto \int_G f(x)d\mu(x) \in \mathbb{R}$$

は well-defined な Radon 汎関数 (定義 5.170) である. よって Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.172 より S の位相正則測度 $\nu : \mathcal{B}_S \to [0,\infty]$ で,

$$\int_S Pf(t)d\nu(t) = \int_G f(x)d\mu(x) \ \ (\forall Pf \in C_c(S))$$

なるものが定まり,

$$\begin{aligned}\int_S L_z Pf(t)d\nu(t) &= \int_S PL_z f(t)d\nu(t) = \int_G L_z f(x)d\mu(x)\\ &= \int_G f(x)d\mu(x) = \int_S Pf(t)d\nu(t) \ \ (\forall Pf \in C_c(S), \forall z \in G)\end{aligned}$$

であるから ν は S の G-不変測度である[*215] よって (1) が成り立つ.

$\nu_1, \nu_2 : \mathcal{B}_S \to [0,\infty]$ を S の G-不変測度とする. 任意の $s \in S$ を取り全射線型写像 (12.86) を考えれば, (1) ⇒ (2) で示したように, G の Haar 測度 $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ で,

$$\int_S Pf(t)d\nu_k(t) = \int_G f(x)d\mu_k(x) \ \ (\forall f \in C_c(G), k = 1,2)$$

を満たすものが取れる. 定理 12.15 よりある正数 c に対し,

$$\mu_2(B) = c\mu_1(B) \ \ (\forall B \in \mathcal{B}_G)$$

が成り立つから,

$$\int_S Pf(t)d\nu_2(t) = \int_G f(x)d\mu_2(x) = c\int_G f(x)d\mu_1(x) = c\int_S Pf(t)d\nu_1(t) \ \ (\forall Pf \in C_c(S))$$

である. よって,

$$\nu_2(B) = c\nu_1(B) \ \ (\forall B \in \mathcal{B}_S)$$

が成り立つ[*216]. ゆえに S の G-不変測度は正数倍を除いて一意的である. □

系 12.99. G をコンパクト群, 局所コンパクト可換群, 離散群のいずれかとすると G の等質空間 S は G-不変測度を持ち, それは正数倍を除いて一意的である.

証明. G をコンパクト群 (resp. 局所コンパクト可換群, 離散群) とすると, G の閉部分群もコンパクト群 (resp. 局所コンパクト可換群, 離散群) である. そしてコンパクト群 (resp. 局所コンパクト可換群, 離散群) はユニモジュラーである (命題 12.20) から, 定理 12.98 の (2) の条件を満たす. □

定義 12.100 (局所コンパクト群の等質空間の L^2 空間上への正則表現)**.** G を局所コンパクト群, S を G の等質空間, $\nu : \mathcal{B}_S \to [0,\infty]$ を G-不変測度とする. 任意の $x \in G$ に対し,

$$\pi(x) : L^2(S,\nu) \to L^2(S,\nu), \ \ \pi(x)[f] := L_x[f] \ \ (\forall [f] \in L^2(S,\nu))$$

とおくと, 命題 12.94 より $\pi(x)$ は Hilbert 空間 $L^2(S,\nu)$ 上のユニタリ作用素である. そして定理 12.96 より,

$$\pi : G \ni x \mapsto \pi(x) \in \mathcal{U}(L^2(S,\nu))$$

は SOT 連続な群準同型写像である. よって π は G の Hilbert 空間 $L^2(S,\nu)$ 上へのユニタリ表現である. これを G の $L^2(S,\nu)$ 上への正則表現と言う.

---

*215 位相正則測度の外部正則性 (定義 5.168) と命題 5.169 の (2) より $\nu(zB) = \mu(B)$ $(\forall z \in G, \forall B \in \mathcal{B}_S)$ が成り立つ. また $\int_S Pf(t)d\nu(t) = \int_G f(x)d\mu(x) > 0$ なる $f \in C_{c,+}(G)$ が存在するので $\nu(S) > 0$ である. よって ν は S の G-不変測度 (定義 12.93) である.

*216 位相正則測度の外部正則性 (定義 5.168) と命題 5.169 の (2) による.

12.4 コンパクト群のユニタリ表現, Peter-Weyl の定理

定義 12.101 (確率測度)**.** $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とする. $\mu(X) = 1$ のとき μ を $(X, \mathfrak{M})$ 上の確率測度と言う.

定義 12.102 (コンパクト群の Haar 測度)**.** G をコンパクト群とする. G は Haar 測度 μ を持ち (定理 12.14), それは正数倍を除いて一意的である (定理 12.15). また Haar 測度は位相正則測度 (定義 5.168) なので G のコンパクト性より G の Haar 測度は有限測度である. よって G の Haar 測度で確率測度であるものが唯一つ存在する. 以後, 特に断らない限り, コンパクト群の Haar 測度は確率測度であるとする.

定義 12.103. G をコンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,1]$ を G の Haar 測度とする. G の任意のユニタリ表現 π_1, π_2 と任意の $v_1 \in \mathcal{H}_{\pi_1}$, $v_2 \in \mathcal{H}_{\pi_2}$ に対し, Schatten 形式 (定義 10.109) $\mathcal{H}_{\pi_1} \times \mathcal{H}_{\pi_2} \ni (u_1, u_2) \mapsto u_1 \odot u_2 \in B(\mathcal{H}_{\pi_2}, \mathcal{H}_{\pi_1})$ により Banach 空間値連続関数

$$G \ni x \mapsto \pi_1(x)v_1 \odot \pi_2(x)v_2 \in B(\mathcal{H}_{\pi_2}, \mathcal{H}_{\pi_1})$$

を考え, Bochner 積分 (定義 5.250) により,

$$T^{\pi_1,\pi_2}_{v_1,v_2} := \int_G (\pi_1(x)v_1 \odot \pi_2(x)v_2) d\mu(x) \in B(\mathcal{H}_{\pi_2}, \mathcal{H}_{\pi_1}) \tag{12.89}$$

を定義する. このとき Bochner 積分の性質 (命題 5.251) と Schatten 形式の性質 (命題 10.110), および Haar 測度による積分の性質 (命題 12.7) より,

$$\begin{aligned}
T^{\pi_1,\pi_2}_{v_1,v_2}\pi_2(y) &= \int_G (\pi_1(x)v_1 \odot \pi_2(x)v_2)\pi_2(y) d\mu(x) = \int_G (\pi_1(x)v_1 \odot \pi_2(y)^*\pi_2(x)v_2) d\mu(x) \\
&= \int_G (\pi_1(x)v_1 \odot \pi_2(y^{-1}x)v_2) d\mu(x) = \int_G (\pi_1(yx)v_1 \odot \pi_2(x)v_2) d\mu(x) \\
&= \int_G \pi_1(y)(\pi_1(x)v_1 \odot \pi_2(x)v_2) d\mu(x) = \pi_1(y) T^{\pi_1,\pi_2}_{v_1,v_2} \quad (\forall y \in G)
\end{aligned}$$

であるから,

$$T^{\pi_1,\pi_2}_{v_1,v_2} \in \mathcal{C}(\pi_2, \pi_1) \tag{12.90}$$

(定義 12.40) が成り立つ. また G の任意のユニタリ表現 π と任意の $u, v \in \mathcal{H}_\pi$ に対し,

$$T^\pi_{u,v} := T^{\pi,\pi}_{u,v} = \int_G (\pi(x)u \odot \pi(x)v) d\mu(x) \tag{12.91}$$

と定義する. 定理 10.158 より,

$$G \ni x \mapsto \pi(x)u \odot \pi(x)v \in B^1(\mathcal{H}_\pi)$$

は Banach 空間 $B^1(\mathcal{H}_\pi)$[*217]値連続関数であるから

$$T^\pi_{u,v} := T^{\pi,\pi}_{u,v} = \int_G (\pi(x)u \odot \pi(x)v) d\mu(x) \in B^1(\mathcal{H}_\pi) \tag{12.92}$$

であり, トレース $\mathrm{Tr} : B^1(\mathcal{H}_\pi) \to \mathbb{C}$ は有界線型汎関数であるから,

$$\mathrm{Tr}(T^\pi_{u,v}) = \int_G \mathrm{Tr}(\pi(x)u \odot \pi(x)v) d\mu(x) = \int_G (\pi(x)u \mid \pi(x)v) d\mu(x) \int_G (u \mid v) d\mu(x) = (u \mid v) \tag{12.93}$$

である.

定義 12.104 (完全可約)**.** G を局所コンパクト群とする. G のユニタリ表現 $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ が完全可約であるとは, π の既約な部分表現 (定義 12.36) の族 $(\pi_j)_{j \in J}$ が存在して $\pi = \oplus_{j \in J} \pi_j$ が成り立つ[*218]ことを言う

[*217] $B^1(\mathcal{H}_\pi)$ はトレースクラス (定義 10.146) である. 命題 10.157 より $B^1(\mathcal{H}_\pi)$ はトレースノルム $\|T\|_1 = \mathrm{Tr}(|T|)$ により Banach 空間である.
[*218] すなわち各既約部分表現 π_j の表現空間を $\mathcal{H}_{\pi_j} \subseteq \mathcal{H}_\pi$ とおくとき $\mathcal{H}_\pi = \bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_{\pi_j}$ と直交分解される.

定理 12.105. G をコンパクト群, $\mu:\mathcal{B}_G\to[0,1]$ を G の Haar 測度とする．このとき,

(1) G の任意の既約なユニタリ表現は有限次元である．
(2) G の任意のユニタリ表現は既約な部分表現を持つ．
(3) G の任意のユニタリ表現は完全可約である．

証明. (1) π が G の既約なユニタリ表現であるとする．任意の $v\in\mathcal{H}_\pi\backslash\{0\}$ に対し定義 12.103 の (12.92) における $T^\pi_{v,v}\in B^1(\mathcal{H}_\pi)$ を考えると, (12.90) より $T^\pi_{v,v}\in\mathcal{C}(\pi)$ であるから, Schur の補題 12.43 より $T^\pi_{v,v}=\alpha 1$ なる $\alpha\in\mathbb{C}$ が存在する．(12.93) より,

$$0<\|v\|^2=\mathrm{Tr}(T^\pi_{v,v})=\mathrm{Tr}(\alpha 1)=\alpha\mathrm{Tr}(1)$$

であるから $\mathrm{Tr}(1)<\infty$ である．ゆえに $\mathcal{H}_\pi$ は有限次元である．

(2) G の任意のユニタリ表現 π を取る．任意の $v\in\mathcal{H}_\pi\backslash\{0\}$ に対し定義 12.103 の (12.92) における $T^\pi_{v,v}\in B^1(\mathcal{H}_\pi)$ を考えると,

$$(T^\pi_{v,v}u\mid u)=\int_G((\pi(x)v\odot\pi(x)v)u\mid u)d\mu(x)=\int_G|(\pi(x)v\mid u)|^2d\mu(x)\geqslant 0\quad(\forall u\in\mathcal{H}_\pi)$$

であるから命題 10.5 より $T^\pi_{v,v}\in B^1(\mathcal{H}_\pi)$ は有界非負自己共役作用素である．また $G\ni x\mapsto|(\pi(x)v\mid v)|^2\in[0,\infty)$ は連続関数で $|(\pi(1)v\mid v)|^2=\|v\|^2>0$ であるから命題 12.8 より,

$$(T^\pi_{v,v}v\mid v)=\int_G|(\pi(x)v\mid v)|^2d\mu(x)>0$$

である．よって $T^\pi_{v,v}\in B^1(\mathcal{H}_\pi)$ は 0 ではない有界非負自己共役作用素なので $\lambda\in\sigma(T^\pi_{v,v})\backslash\{0\}$ が存在する．$T^\pi_{v,v}\in B^1(\mathcal{H}_\pi)$ はコンパクト作用素である (命題 10.149) から, 定理 10.122 の (1) より λ は $T^\pi_{v,v}$ の固有値であり $\mathrm{Ker}(\lambda-T^\pi_{v,v})$ は有限次元である．また定義 12.103 の (12.92) より $T^\pi_{v,v}\in\mathcal{C}(\pi)$ であるから $\mathcal{K}=\mathrm{Ker}(\lambda-T^\pi_{v,v})$ は π 不変である．よって π の部分表現 $\pi|_{\mathcal{K}}:G\to\mathcal{U}(\mathcal{K})$ は G の有限次元ユニタリ表現であるので既約な部分表現を持つ[*219]．ゆえに π は既約な部分表現を持つ．

(3) Zorn の補題 1.12 より π の既約な部分表現の表現空間からなる直交族で集合の包含関係による順序に関して極大なもの $\{\mathcal{K}_j\}_{j\in J}$ が取れる．そこで,

$$\mathcal{K}:=\bigoplus_{j\in J}\mathcal{K}_j\subseteq\mathcal{H}_\pi$$

とおく．$\mathcal{K}\neq\mathcal{H}_\pi$ であると仮定する．$\mathcal{K}$ は π 不変であるから $\mathcal{K}^\perp$ も π 不変である．よって π の部分表現 $\pi|_{\mathcal{K}^\perp}:G\to\mathcal{U}(\mathcal{K}^\perp)$ を考えることができ, (2) より $\pi|_{\mathcal{K}^\perp}$ は既約な部分表現を持つ．すなわち π の既約な部分表現でその表現空間が $\mathcal{K}^\perp$ に含まれるものが存在する．しかしこれは $\{\mathcal{K}_j\}_{j\in J}$ の極大性に反する．ゆえに $\mathcal{K}=\mathcal{H}$ であるから π は完全可約である．

□

定義 12.106 (コンパクト群の既約なユニタリ表現の同値類全体)**.** G をコンパクト群とする．G のユニタリ表現 π に対し π のユニタリ同値類[*220]を $[\pi]$ と表す．そして,

$$\widehat{G}:=\{[\pi]:\pi\text{ は }G\text{ の既約なユニタリ表現}\}$$

とおく．

定義 12.107 (コンパクト群のユニタリ表現の表現空間の成分)**.** G をコンパクト群, $\rho:G\to\mathcal{U}(\mathcal{H}_\rho)$ を G のユニタリ表現とする．任意の $[\pi]\in\widehat{G}$ (定義 12.106) に対し, ρ 不変な閉部分空間

$$\mathcal{H}_\rho([\pi]):=\overline{\mathrm{span}\bigcup_{[\rho|_{\mathcal{K}}]=[\pi]}\mathcal{K}}\subseteq\mathcal{H}_\rho$$

[*219] H を局所コンパクト群, ρ を H の有限次元ユニタリ表現とする．もし ρ が既約ではないならば ρ 不変な閉部分空間 $\mathcal{K}\subseteq\mathcal{H}_\rho$ で $\mathcal{K}\neq\{0\}$, $\mathcal{K}\neq\mathcal{H}_\rho$ なるものが取れる．$\mathcal{K}^\perp$ も ρ 不変であるから $\rho=\rho|_{\mathcal{K}}\oplus\rho|_{\mathcal{K}^\perp}$ と分解できる．同様に H の有限次元ユニタリ表現 $\rho|_{\mathcal{K}}$ と $\rho|_{\mathcal{K}^\perp}$ は既約でない限り, より次元の小さい 2 つの部分表現の和に分解できる．この操作を続けていけば最終的に H の既約な部分表現が得られる．

[*220] ユニタリ表現のユニタリ同値に関しては定義 12.42 を参照．また同値類については定義 2.21 を参照．

(右辺は π と同値な ρ の部分表現の表現空間全体の合併が張る線型空間の閉包) を定義する．ただし ρ の部分表現で π と同値なものがない場合は $\mathcal{H}_\rho([\pi]) := \{0\}$ とする．$\mathcal{H}_\rho([\pi])$ を $\mathcal{H}_\rho$ の $[\pi]$ 成分と言う．

定理 12.108 (コンパクト群のユニタリ表現の表現空間の成分の基本性質)**.** G をコンパクト群, $\rho : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\rho)$ を G のユニタリ表現とする．このとき,

(1) $\mathcal{H}_\rho([\pi]) \neq \{0\}$ なる任意の $[\pi] \in \widehat{G}$ に対し, ρ の既約な部分表現でその表現空間が $\mathcal{H}_\rho([\pi])$ に含まれるものは全て π と同値である．

(2) $[\pi_1] \neq [\pi_2]$ ならば $\mathcal{H}_\rho([\pi_1]) \perp \mathcal{H}_\rho([\pi_2])$ が成り立つ．

(3) $\mathcal{H}_\rho = \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} \mathcal{H}_\rho([\pi])$ が成り立つ．

証明. (1) ρ の既約な部分表現 $\rho|_{\mathcal{L}} : G \to \mathcal{U}(\mathcal{L})$ で $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}_\rho([\pi])$ を満たすものを取る．$\mathcal{L} \neq \{0\}$ であるから $[\rho|_{\mathcal{K}}] = [\pi]$ なる $\mathcal{K}$ で $\mathcal{L}$ と $\mathcal{K}$ が直交しないようなものが取れる．その $\mathcal{K}$ に対し $P \in B(\mathcal{H}_\rho)$ を $\mathcal{K}$ の上への射影作用素とし, $T : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ を $Tv = Pv$ $(\forall v \in \mathcal{L})$ と定義すると $T \neq 0$ である (なぜなら $T = 0$ ならば $P(\mathcal{L}) = 0$ であり $\mathcal{L}$ と $\mathcal{K}$ は直交することになる)．今, 任意の $u \in \mathcal{L}, v \in \mathcal{K}$ に対し,

$$\begin{aligned}(T\rho|_{\mathcal{L}}(x)u \mid v) &= (P\rho(x)u \mid v) = (\rho(x)u \mid Pv) = (\rho(x)u \mid v) = (u \mid \rho(x^{-1})v) \\ &= (u \mid P\rho(x^{-1})v) = (\rho(x)Pu \mid v) = (\rho|_{\mathcal{K}}(x)Tu \mid v) \quad (\forall x \in G)\end{aligned} \tag{12.94}$$

であるから $T \in \mathcal{C}(\rho|_{\mathcal{L}}, \rho|_{\mathcal{K}})$ である．よって $T \neq 0$ であることと Schur の補題 12.44 より $\rho|_{\mathcal{L}}$ と $\rho|_{\mathcal{K}}$ はユニタリ同値である．ゆえに $\rho|_{\mathcal{L}}$ と π はユニタリ同値である．

(2) $[\pi_1] \neq [\pi_2]$ であるとし, $[\rho|_{\mathcal{L}}] = [\pi_1]$, $[\rho|_{\mathcal{K}}] = [\pi_2]$ とする．$P \in B(\mathcal{H}_\rho)$ を $\mathcal{K}$ の上への射影作用素とし, $T : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ を $Tv = Pv$ $(\forall v \in \mathcal{L})$ と定義すると (12.94) が成り立つので $T \in \mathcal{C}(\rho|_{\mathcal{L}}, \rho|_{\mathcal{K}})$ である．$[\rho|_{\mathcal{L}}] = [\pi_1] \neq [\pi_2] = [\rho|_{\mathcal{K}}]$ であるから Schur の補題 12.44 より $T = 0$ である．よって $P(\mathcal{L}) = \{0\}$ であるので $\mathcal{L}$ と $\mathcal{K}$ は直交する．ゆえに $\mathcal{H}_\rho([\pi_1]) \perp \mathcal{H}_\rho([\pi_2])$ が成り立つ．

(3) ρ が完全可約 (定理 12.105) であることと (2) による．

□

定義 12.109 (コンパクト群のユニタリ表現における既約表現の重複度)**.** G をコンパクト群, $\rho : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\rho)$ を G のユニタリ表現とする．$[\pi] \in \widehat{G}$ に対し $\mathcal{H}_\rho$ の $[\pi]$ 成分が $\mathcal{H}_\rho([\pi]) \neq \{0\}$ であるとき, ρ の $\mathcal{H}_\rho([\pi])$ への制限は, 定理 12.105 の (3) と定理 12.108 の (1) より, π と同値な既約な部分表現の直和に分解できる．そしてそれらの既約な部分表現の次元は $\dim(\pi) < \infty$ (定理 12.105 の (1)) である．そこで ρ における $[\pi]$ の重複度を,

$$\frac{\dim(\mathcal{H}_\rho([\pi]))}{\dim(\pi)} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

と定義する．$\mathcal{H}_\rho([\pi]) = 0$ の場合は ρ における $[\pi]$ の重複度は 0 として定義する．

定義 12.110 (コンパクト群の有限次元ユニタリ表現の行列成分)**.** G をコンパクト群, π を G の有限次元ユニタリ表現とする．$\mathcal{H}_\pi$ の CONS $(e_1, \cdots, e_{\dim(\pi)})$ に対し,

$$\pi_{i,j} : G \to \mathbb{C}, \quad \pi_{i,j}(x) := (\pi(x)e_j \mid e_i) \quad (\forall x \in G, \forall i, j \in \{1, \cdots, \dim(\pi)\})$$

なる連続関数を定義する．$(\pi_{i,j})_{i,j=1,\cdots,\dim(\pi)}$ を π の $(e_1, \cdots, e_{\dim(\pi)})$ に関する行列成分と言う．

$$\mathcal{E}(\pi) := \mathrm{span}\{\pi_{i,j} : i, j \in \{1, \cdots, \dim(\pi)\}\} \subseteq C(G)$$

とおくと $\mathcal{E}(\pi)$ は $\mathcal{H}_\pi$ の CONS $(e_1, \cdots, e_{\dim(\pi)})$ の取り方によらない．[*221] また π と ρ がユニタリ同値ならば $\mathcal{E}(\pi) = \mathcal{E}(\rho)$ である．そこで π のユニタリ同値類 $[\pi]$ に対し $\mathcal{E}([\pi]) = \mathcal{E}(\pi)$ と表す．

定義 12.111 (ユニタリ表現のテンソル積)**.** G を局所コンパクト群, $\pi_1, \cdots, \pi_n$ をそれぞれ G のユニタリ表現とする．定理 10.99 より任意の $x \in G$ に対し $\pi_1(x) \otimes \cdots \otimes \pi_n(x)$ はテンソル積 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{\pi_n}$ 上のユニタリ作用

[*221] なぜなら $\mathcal{H}_\pi$ の任意の 2 つの CONS の間に一対一対応を与える $\mathcal{H}_\pi$ 上のユニタリ作用素が存在する．

素であり,

$$\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n : G \ni x \mapsto \pi_1(x) \otimes \cdots \otimes \pi_n(x) \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{\pi_n}) \tag{12.95}$$

は SOT 連続な群準同型写像である. よって (12.95) は G の $\mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{\pi_n}$ 上へのユニタリ表現である. (12.95) をユニタリ表現 $\pi_1, \cdots, \pi_n$ のテンソル積と言う.

定理 12.112 (Peter-Weyl の定理 1)**.** G をコンパクト群とする. このとき,

$$\mathcal{E} := \mathrm{span} \bigcup_{[\pi] \in \widehat{G}} \mathcal{E}([\pi])$$

[*222]は (sup ノルムと各点ごとの演算による) 単位的可換 C^*-環 $C(G)$ の稠密な部分 $*$-環である.

証明. G のユニタリ表現 π と $u, v \in \mathcal{H}_\pi$ に対し $\pi_{u,v} \in C(G)$ を,

$$\pi_{u,v}(x) := (\pi(x)v \mid u) \quad (\forall x \in G)$$

として定義する. G の既約なユニタリ表現は有限次元 (定理 12.105 の (1)) であり, 有限次元ユニタリ表現は有限個の既約なユニタリ表現の直和であるから,

$$\mathcal{E} = \mathrm{span}\{\pi_{u,v} : \pi \text{ は既約}, u, v \in \mathcal{H}_\pi\} = \mathrm{span}\{\pi_{u,v} : \pi \text{ は有限次元}, u, v \in \mathcal{H}_\pi\}$$

である. また偏極恒等式 10.4 より, G のユニタリ表現 π と $u, v \in \mathcal{H}_\pi$ に対し,

$$(\pi(x)v \mid u) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k(\pi(x)(v + i^k u) \mid v + i^k u) \quad (\forall x \in G)$$

であるから,

$$\mathcal{E} = \mathrm{span}\{\pi_{v,v} : \pi \text{ は既約}, v \in \mathcal{H}_\pi\} = \mathrm{span}\{\pi_{u,v} : \pi \text{ は有限次元}, u, v \in \mathcal{H}_\pi\}$$

である. 任意の既約なユニタリ表現 π, ρ と $u \in \mathcal{H}_\pi, v \in \mathcal{H}_\rho$ に対し,

$$\pi_{u,u}(x)\rho_{v,v}(x) = (\pi(x)u \mid u)(\rho(x)v \mid v) = ((\pi \otimes \rho)(x)(u \otimes v) \mid u \otimes v) = (\pi \otimes \rho)_{u\otimes v, u\otimes v}(x) \quad (\forall x \in G)$$

であり, $\pi \otimes \rho$ は有限次元であるから $\pi_{u,u}\rho_{v,v} = (\pi \otimes \rho)_{u\otimes v, u\otimes v} \in \mathcal{E}$ である. よって $\mathcal{E}$ は乗法で閉じている. 任意の既約なユニタリ表現 π と任意の単位ベクトル $v \in \mathcal{H}_\pi$ に対し v は π の巡回ベクトルである (注意 12.39) から, 命題 12.61 と定理 12.70 より $\pi_{v,v} \in \mathrm{ext}(\mathcal{P}_1(G))$ であり, 命題 12.60 より $\overline{\pi_{v,v}} \in \mathrm{ext}(\mathcal{P}_1(G))$ である. そこで $\overline{\pi_{v,v}}$ の GNS 表現 (定義 12.67) (ρ, u) を取ると $\rho_{u,u} = \overline{\pi_{v,v}} \in \mathrm{ext}(\mathcal{P}_1(G))$ であるから定理 12.70 より ρ は既約であるので $\overline{\pi_{v,v}} = \rho_{u,u} \in \mathcal{E}$ である. よって $\mathcal{E}$ は $*$-演算 (複素共役) で閉じている. ゆえに $\mathcal{E}$ は $C(G)$ の部分 $*$-環である. 1 次元 Hilbert 空間上への単位表現 (任意の $x \in G$ に対し恒等写像を与えるユニタリ表現) は既約であるから $1 \in \mathcal{E}$ である. そして $x \neq y$ なる任意の $x, y \in G$ に対し Gelfand-Raikov の定理 12.74 より $p \in \mathcal{E}$ で $p(x) \neq p(y)$ なるものが存在する. よって Stone-Weierstrass の定理 5.192 より $\mathcal{E}$ は $C(G)$ の稠密な部分 $*$-環である. □

定理 12.113 (Peter-Weyl の定理 2)**.** G をコンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, 1]$ を G の Haar 測度とする. このとき,

$$[\pi_1], [\pi_2] \in \widehat{G}, \quad [\pi_1] \neq [\pi_2] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}([\pi_1]) \perp \mathcal{E}([\pi_2]) \quad (\text{in } L^2(G, \mu)), \tag{12.96}$$

$$L^2(G, \mu) = \bigoplus_{[\pi] \in \widehat{G}} \mathcal{E}([\pi]) \tag{12.97}$$

が成り立つ. また各 $[\pi] \in \widehat{G}$ に対し π の行列成分 $(\pi_{i,j})_{i,j=1,\cdots,\dim(\pi)}$ (定義 12.110) を取ると, $\{\sqrt{\dim(\pi)}\pi_{i,j}\}_{i,j=1,\cdots,\dim(\pi)}$ は $\mathcal{E}([\pi]) \subseteq L^2(G, \mu)$ の CONS である.

[*222] $\widehat{G}$ については定義 12.106 を参照. $\mathcal{E}([\pi])$ についてはコンパクト群の既約なユニタリ表現が有限次元であること (定理 12.105 の (1)) に注意して定義 12.110 を参照.

証明. $[\pi_1], [\pi_2] \in \widehat{G}$ が $[\pi_1] \neq [\pi_2]$ であるとする．任意の $u_1 \in \mathcal{H}_{\pi_1}$, $u_2 \in \mathcal{H}_{\pi_2}$ に対し定義 12.103 における $T^{\pi_1,\pi_2}_{u_1,u_2} \in \mathcal{C}(\pi_2, \pi_1)$ を考えれば Schur の補題 12.43 より $T^{\pi_1,\pi_2}_{u_1,u_2} = 0$ であるから, 任意の $v_1 \in \mathcal{H}_{\pi_1}$, $v_2 \in \mathcal{H}_{\pi_2}$ に対し,

$$0 = (T^{\pi_1,\pi_2}_{u_1,u_2} v_2 \mid v_1) = \int_G ((\pi_1(x)u_1 \odot \pi_2(x)u_2)v_2 \mid v_1) d\mu(x) = \int_G (\pi_1(x)u_1 \mid v_1)\overline{(\pi_2(x)u_2 \mid v_2)} d\mu(x)$$

である．よって $\mathcal{E}([\pi_1]) \perp \mathcal{E}([\pi_2])$ であるから (12.96) が成り立つ．定理 5.179 より $L^2(G,\mu)$ において $C(G)$ は稠密であるから, 定理 12.112 より $L^2(G,\mu)$ において,

$$\mathrm{span} \bigcup_{[\pi] \in \widehat{G}} \mathcal{E}([\pi])$$

は稠密である．[*223] このことと (12.96) より (12.97) が成り立つ．

任意の $[\pi] \in \widehat{G}$ を取り $\mathcal{H}_\pi$ の CONS $(e_1, \cdots, e_{\dim(\pi)})$ を取る．任意の $j, j' \in \{1, \cdots, \dim(\pi)\}$ に対し定義 12.103 における $T^\pi_{e_j, e_{j'}} \in \mathcal{C}(\pi)$ を考えると, Schur の補題 12.43 より $T^\pi_{e_j,e_{j'}} = \alpha_{j,j'} 1$ なる $\alpha_{j,j'} \in \mathbb{C}$ が取れて,

$$\alpha_{j,j'} \dim(\pi) = \mathrm{Tr}(T^\pi_{e_j,e_{j'}}) = (e_j \mid e_{j'}) = \delta_{j,j'}$$

となる．よって任意の $i, j, i', j' \in \{1, \cdots, \dim(\pi)\}$ に対し,

$$(\pi_{i,j} \mid \pi_{i',j'})_2 = \int_G (\pi(x)e_j \mid e_i)\overline{(\pi(x)e_{j'} \mid e_{i'})} d\mu(x) = (T^\pi_{e_j,e_{j'}} e_{i'} \mid e_i) = \alpha_{j,j'}\delta_{i,i'} = \delta_{i,i'}\delta_{j,j'} \frac{1}{\dim(\pi)}$$

であるから, $\{\sqrt{\dim(\pi)}\pi_{i,j}\}_{i,j=1,\cdots,\dim(\pi)}$ は $\mathcal{E}([\pi]) \subseteq L^2(G,\mu)$ の CONS である． □

定義 12.114 (コンパクト群上の類関数)**.** G をコンパクト群とする．G 上の関数 f で $f(xy) = f(yx)$ $(\forall x, y \in G)$ を満たすものを G 上の類関数と言う．連続な類関数全体を,

$$ZC(G) := \{f \in C(G) : f(xy) = f(yx)\ (\forall x, y \in G)\}$$

とおく．また G の Haar 測度 $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,1]$ に対し L^2 類関数全体を,

$$ZL^2(G,\mu) := \{[f] \in L^2(G,\mu) : L_y[f] = R_{y^{-1}}[f]\ (\forall y \in G)\}$$

とおく．

定義 12.115 (コンパクト群の指標)**.** G をコンパクト群とする．G の既約なユニタリ表現 π_1, π_2 (定理 12.105 より有限次元) がユニタリ同値ならば, トレースの性質 (命題 10.152) より,

$$\mathrm{Tr}(\pi_1(x)) = \mathrm{Tr}(\pi_2(x)) \ \ (\forall x \in G)$$

である．そこで任意の $[\pi] \in \widehat{G}$ (定義 12.106) に対し,

$$\gamma_{[\pi]} : G \to \mathbb{C}, \ \ \gamma_{[\pi]}(x) := \mathrm{Tr}(\pi(x)) \ \ (\forall x \in G)$$

なる連続関数を定義する．これを $[\pi] \in \widehat{G}$ に対する G の指標と言う．

命題 12.116 (コンパクト群の指標の基本性質)**.** G をコンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,1]$ を Haar 測度とする．このとき,

(1) 任意の $[\pi] \in \widehat{G}$ に対し $\gamma_{[\pi]} \in ZC(G)$ が成り立つ．

(2) $[\pi_1], [\pi_2] \in \widehat{G}$ が $[\pi_1] \neq [\pi_2]$ ならば, Hilbert 空間 $L^2(G,\mu)$ において $\gamma_{[\pi_1]}, \gamma_{[\pi_2]}$ は直交する．また任意の $[\pi] \in \widehat{G}$ に対し $\gamma_{[\pi]}$ は Hilbert 空間 $L^2(G,\mu)$ の単位ベクトルである．

(3) 任意の $[\pi] \in \widehat{G}$ に対し $\mathcal{E}([\pi]) \subseteq L^2(G,\mu)$ (定義 12.110) の上への射影作用素を $P_{[\pi]} \in B(L^2(G,\mu))$ とおくと,

$$P_{[\pi]}([f]) := \dim(\pi)([f] * \gamma_{[\pi]}) \in C(G) \ \ (\forall [f] \in L^2(G,\mu))$$

[*224]が成り立つ．

[*223] μ は有限測度だから sup ノルムは L^2 ノルムより強いことに注意.

[*224] 右辺の $[f] * \gamma_{[\pi]} \in C(G)$ は $[f] \in L^2(G,\mu) \subseteq L^1(G,\mu)$ と $\gamma_{[\pi]} \in C(G)$ の合成積 (定義 12.23) である.

(4) 任意の $[\pi] \in \widehat{G}$ と (3) における射影作用素 $P_{[\pi]} \in B(L^2(G,\mu))$ に対し,

$$P_{[\pi]}([f]) = ([f] \mid \gamma_{[\pi]})_2 \gamma_{[\pi]} \quad (\forall [f] \in ZL^2(G,\mu))$$

が成り立つ.

証明. (1) 指標の定義 12.115 とトレースの性質 (命題 10.152) より,

$$\gamma_{[\pi]}(xy) = \mathrm{Tr}(\pi(xy)) = \mathrm{Tr}(\pi(x)\pi(y)) = \mathrm{Tr}(\pi(y)\pi(x)) = \mathrm{Tr}(\pi(yx)) = \gamma_{[\pi]}(yx) \quad (\forall x,y \in G)$$

であるから $\gamma_{[\pi]} \in ZC(G)$ である.

(2) $[\pi_1],[\pi_2] \in \widehat{G}$ が $[\pi_1] \neq [\pi_2]$ ならば Peter-Weyl の定理 12.113 より $\mathcal{E}([\pi_1]) \perp \mathcal{E}([\pi_2])$ であり, $\gamma_{[\pi_1]} \in \mathcal{E}([\pi_1])$, $\gamma_{[\pi_2]} \in \mathcal{E}([\pi_2])$ であるから $\gamma_{[\pi_1]}$ と $\gamma_{[\pi_2]}$ は直交する. また任意の $[\pi] \in \widehat{G}$ に対し π の行列成分 (定義 12.110) を $(\pi_{i,j})_{i,j=1,\cdots,\dim(\pi)}$ とおくと Peter-Weyl の定理 12.113 より $(\sqrt{\dim(\pi)}\pi_{i,j})_{i,j=1,\cdots,\dim(\pi)}$ は $\mathcal{E}([\pi])$ の CONS であるから,

$$(\gamma_{[\pi]} \mid \gamma_{[\pi]})_2 = \sum_{i,j=1}^{\dim(\pi)} (\pi_{i,i} \mid \pi_{j,j})_2 = \frac{1}{\dim(\pi)} \sum_{j=1}^{\dim(\pi)} (\sqrt{\dim(\pi)}\pi_{j,j} \mid \sqrt{\dim(\pi)}\pi_{j,j})_2 = 1$$

である.

(3) $\mathcal{H}_\pi$ の CONS $(e_1,\cdots,e_{\dim(\pi)})$ に関する π の行列成分 (定義 12.110) を $(\pi_{i,j})_{i,j=1,\cdots,\dim(\pi)}$ とおくと, Peter-Weyl の定理 12.113 より $(\sqrt{\dim(\pi)}\pi_{i,j})_{i,j=1,\cdots,\dim(\pi)}$ は $\mathcal{E}([\pi]) \subseteq L^2(G,\mu)$ の CONS であるから, Schatten 形式 (定義 10.109) $L^2(G,\mu) \times L^2(G,\mu) \ni ([f],[g]) \mapsto [f] \odot [g] \in B(L^2(G,\mu))$ に対し, 命題 10.111 より,

$$P_{[\pi]} = \dim(\pi) \sum_{i,j=1}^{\dim(\pi)} \pi_{i,j} \odot \pi_{i,j}$$

が成り立つ. よって任意の $[f] \in L^2(G,\mu)$ に対し,

$$\begin{aligned}
P_{[\pi]}([f])(x) &= \dim(\pi) \sum_{i,j=1}^{\dim(\pi)} ([f] \mid \pi_{i,j})_2 \pi_{i,j}(x) \\
&= \dim(\pi) \sum_{i,j=1}^{\dim(\pi)} \int_G f(y)(e_i \mid \pi(y)e_j)(\pi(x)e_j \mid e_i)d\mu(y) \\
&= \dim(\pi) \sum_{j=1}^{\dim(\pi)} \int_G f(y)(\pi(x)e_j \mid \pi(y)e_j)d\mu(y) \\
&= \dim(\pi) \int_G f(y) \sum_{j=1}^{\dim(\pi)} (\pi(y^{-1}x)e_j \mid e_j)d\mu(y) \\
&= \dim(\pi) \int_G f(y)\gamma_{[\pi]}(y^{-1}x)d\mu(y) \\
&= \dim(\pi)([f] * \gamma_{[\pi]})(x) \quad (\forall x \in G)
\end{aligned}$$

となる.

(4) 任意の $[\pi] \in \widehat{G}$ に対し $\mathcal{H}_\pi$ は有限次元であるから $G \ni x \mapsto \pi(x) \in B(\mathcal{H}_\pi)$ は作用素ノルムで連続である. よって任意の $[f] \in ZL^2(G,\mu) \subseteq L^2(G,\mu) \subseteq L^1(G,\mu)$ に対し, Bochner 積分

$$\int_G f(y)\pi(y^{-1})d\mu(y) \in B(\mathcal{H}_\pi)$$

が定義できる. G はコンパクト群なのでユニモジュラー (命題 12.20) であるから μ は右 Haar 測度でもある. こ

のことと Bochner 積分の性質 (命題 5.251) と f が類関数であることから,

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_G f(y)\pi(y^{-1})d\mu(y)\right)\pi(x) = \int_G f(y)\pi(y^{-1})\pi(x)d\mu(y) = \int_G f(y)\pi(y^{-1}x)d\mu(y) \\
&= \int_G f(xy)\pi(y^{-1})d\mu(y) = \int_G f(yx)\pi(y^{-1})d\mu(y) = \int_G f(y)\pi(xy^{-1})d\mu(y) \\
&= \int_G f(y)\pi(x)\pi(y^{-1})d\mu(y) = \pi(x)\left(\int_G f(y)\pi(y^{-1})d\mu(y)\right) \quad (\forall x \in G)
\end{aligned}
$$

となるので,

$$\int_G f(y)\pi(y^{-1})d\mu(y) \in \mathcal{C}(\pi)$$

が成り立つ. よって Schur の補題 12.43 よりある $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\int_G f(y)\pi(y^{-1})d\mu(y) = \alpha 1 \tag{12.98}$$

となる. (12.98) のトレースを取れば,

$$
\begin{aligned}
&\alpha \dim(\pi) = \mathrm{Tr}(\alpha 1) = \mathrm{Tr}\left(\int_G f(y)\pi(y^{-1})d\mu(y)\right) = \int_G f(y)\mathrm{Tr}(\pi(y^{-1}))d\mu(y) \\
&= \sum_{j=1}^{\dim(\pi)} \int_G f(y)(\pi(y^{-1})e_j \mid e_j)d\mu(y) = \int_G f(y)\overline{\gamma_{[\pi]}(y)}d\mu(y) = ([f] \mid \gamma_{[\pi]})_2
\end{aligned} \tag{12.99}
$$

となり, 一方, (3) と (12.98) より,

$$
\begin{aligned}
P_{[\pi]}([f])(x) &= \dim(\pi)([f] * \gamma_{[\pi]})(x) = \dim(\pi)\sum_{j=1}^{\dim(\pi)} \int_G f(y)(\pi(y^{-1}x)e_j \mid e_j)d\mu(y) \\
&= \dim(\pi)\sum_{j=1}^{\dim(\pi)} \left(\left(\int_G f(y)\pi(y^{-1})d\mu(y)\right)\pi(x)e_j \mid e_j\right) \\
&= \alpha \dim(\pi)\gamma_{[\pi]}(x) \quad (\forall x \in G)
\end{aligned} \tag{12.100}
$$

となる. よって (12.99), (12.100) より,

$$P_{[\pi]}([f]) = ([f] \mid \gamma_{[\pi]})_2 \gamma_{[\pi]}$$

が成り立つ.

□

定理 12.117 (Peter-Weyl の定理 3)**.** G をコンパクト群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,1]$ を Haar 測度とする. このとき G の指標全体 $\{\gamma_{[\pi]}\}_{[\pi]\in\widehat{G}}$ は L^2 類関数空間 $ZL^2(G,\mu)$ (定義 12.114) の CONS である.

証明. 命題 12.116 の (1), (2) より $\{\gamma_{[\pi]}\}_{[\pi]\in\widehat{G}}$ は $ZL^2(G,\mu)$ の ONS である. 任意の $[\pi] \in \widehat{G}$ に対し $\mathcal{E}([\pi]) \subseteq L^2(G,\mu)$ (定義 12.110) の上への射影作用素を $P_{[\pi]} \in B(L^2(G,\mu))$ とおくと, Peter-Weyl の定理 12.113 より,

$$[f] = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} P_{[\pi]}([f]) \quad (\forall [f] \in L^2(G,\mu))$$

が成り立つから, 命題 12.116 の (4) より,

$$[f] = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} P_{[\pi]}([f]) = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} ([f] \mid \gamma_{[\pi]})_2 \gamma_{[\pi]} \quad (\forall [f] \in ZL^2(G,\mu))$$

が成り立つ. よって $\{\gamma_{[\pi]}\}_{[\pi]\in\widehat{G}}$ は $ZL^2(G,\mu)$ の CONS である. □

系 12.118. G をコンパクト群, $\mu:\mathcal{B}_G\to[0,1]$ を Haar 測度とする．このとき $ZL^2(G,\mu)$ において $ZC(G)$ は稠密である．

証明. 定理 12.117 より $\{\gamma_{[\pi]}\}_{[\pi]\in\widehat{G}}$ は $ZL^2(G,\mu)$ の CONS であるから $\mathrm{span}\{\gamma_{[\pi]}\}_{[\pi]\in\widehat{G}}$ は $ZL^2(G,\mu)$ において稠密である．$\mathrm{span}\{\gamma_{[\pi]}\}_{[\pi]\in\widehat{G}}\subseteq ZC(G)$ であるから $ZL^2(G,\mu)$ において $ZC(G)$ は稠密である． □

S をコンパクト群 G の等質空間とすると, 系 12.99 より S は G-不変測度を持つ．任意の $s\in S$ に対し,

$$G\ni x\mapsto xs\in S$$

は全射連続写像であるから S はコンパクトである．よって位相正則性より S の G-不変測度は有限測度である．

定義 12.119 (単位表現)**.** G を局所コンパクト群, π を G のユニタリ表現とする．$\pi(x)=1$ $(\forall x\in G)$ のとき π を単位表現と言う．

定理 12.120 (コンパクト群の等質空間の L^2 空間上への正則表現に関する Peter-Weyl の定理)**.** G をコンパクト群, $\mu:\mathcal{B}_G\to[0,1]$ を G の Haar 測度, S を G の等質空間, $\nu:\mathcal{B}_S\to[0,\infty)$ を G-不変測度, $\rho:G\to\mathcal{U}(L^2(S,\nu))$ を正則表現 (定義 12.100) とする．任意の $s\in S$ を取り s における固定部分群 $H_s=\{x\in G: xs=s\}$ を考える．そして G の既約なユニタリ表現 π に対し,

$$\mathcal{H}_{\pi,s}:=\{v\in\mathcal{H}_\pi:\pi(x)v=v\ (\forall x\in H_s)\},\quad \dim(\pi)':=\dim(\mathcal{H}_{\pi,s}) \tag{12.101}$$

の CONS を $(e_1,\cdots,e_{\dim(\pi)'})$ とおき, これを延長して $\mathcal{H}_\pi$ の CONS $(e_1,\cdots,e_{\dim(\pi)'},\cdots,e_{\dim(\pi)})$ を構成し, これに関する行列成分を $\pi_{i,j}(x)=(\pi(x)e_j\mid e_i)$ $(\forall x\in G,\forall i,j\in\{1,\cdots,\dim(\pi)\})$ とする．そして任意の $j\in\{1,\cdots,\dim(\pi)'\}$, 任意の $v\in\mathcal{H}_\pi$ に対し,

$$T_j^\pi v\in C(S),\quad T_j^\pi v(xs):=(v\mid\pi(x)e_j)\quad(\forall xs\in S)$$

[*225]とおき, 線型作用素

$$T_j^\pi:\mathcal{H}_\pi\ni v\mapsto T_j^\pi v\in C(S)\subseteq L^2(S,\nu)$$

を定義する．このとき,

$$T_j^\pi\in\mathcal{C}(\pi,\rho)\quad(j=1,\cdots,\dim(\pi)')$$

であり, ρ の $[\pi]$ 成分 (定義 12.107) は直交和

$$\mathrm{Ran}(T_1^\pi)\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ran}(T_{\dim(\pi)'}^\pi)$$

で表され, ρ における $[\pi]$ の重複度 (定義 12.109) は $\dim(\pi)'=\dim(\mathcal{H}_{\pi,s})$ である．

証明. $\mu_{H_s}:\mathcal{B}_{H_s}\to[0,1]$ を H_s の Haar 測度とし, 補題 12.97 における非負値性を保存する全射線型写像

$$P:C(G)\to C(S),\quad Pf(xs)=\int_{H_s}f(xy)d\mu_{H_s}(y)$$

を考える．$\mu_{H_s}(H_s)=1$ なので P は sup ノルムに関して有界である．定理 12.98 の証明より (必要ならば ν を正数倍して),

$$\int_S Pf(t)d\nu(t)=\int_G f(x)d\mu(x)\quad(\forall f\in C(G)) \tag{12.102}$$

が成り立つ．

$$H_s\ni x\mapsto\pi(x)\in\mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi) \tag{12.103}$$

はコンパクト群 H_s のユニタリ表現であり, (12.103) の $\mathcal{H}_{\pi,s}\subseteq\mathcal{H}_\pi$ 上への制限は単位表現である．そして $\mathcal{H}_{\pi,s}^\perp=\mathrm{span}\{e_{\dim(\pi)'+1},\cdots,e_{\dim(\pi)}\}\subseteq\mathcal{H}_\pi$ は (12.103) の不変空間であり, (12.103) の $\mathcal{H}_{\pi,s}^\perp$ への制限によって得られる H_s の

[*225] $T_j^\pi v$ が well-defined であることは $\mathcal{H}_{\pi,s}$ の定義により, 連続性は開写像定理 12.87 による．

ユニタリ表現は単位表現を部分表現として持たない. よって 1 次元 Hilbert 空間上への単位表現が既約であることに注意して Peter-Weyl の定理 12.113 より,

$$P\pi_{i,j}(xs) = \int_{H_s} (\pi(y)e_j \mid \pi(x^{-1})e_i) d\mu_{H_s}(y) = 0 \quad (x \in G, j \geqslant \dim(\pi)' + 1)$$

が成り立つ. また,

$$P\pi_{i,j}(xs) = \int_{H_s} (\pi(x)\pi(y)e_j \mid e_i) d\mu_{H_s}(y) = \pi_{i,j}(x) = \overline{T_j^\pi e_i(xs)} \quad (x \in G, j \leqslant \dim(\pi)')$$

が成り立つ. よって (12.102) と Peter-Weyl の定理 12.112, 12.113 より,

$$C(S) = P(C(G)) \subseteq \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} \left(\bigoplus_{j=1}^{\dim(\pi)'} \mathrm{Ran}(T_j^\pi) \right) \subseteq L^2(S,\nu)$$

が成り立ち, $C(S)$ は $L^2(S,\nu)$ において稠密 (定理 5.179) であるから,

$$L^2(S,\nu) = \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} \left(\bigoplus_{j=1}^{\dim(\pi)'} \mathrm{Ran}(T_j^\pi) \right) \tag{12.104}$$

が成り立つ.

$$\rho(y)T_j^\pi v(xs) = (v \mid \pi(y^{-1}x)e_j) = (\pi(y)v \mid \pi(x)e_j) = T_j^\pi \pi(y)v(xs) \quad (\forall y \in G, \forall v \in \mathcal{H}_\pi, \forall xs \in S)$$

であるから, $T_j^\pi \in \mathcal{C}(\pi, \rho|_{\mathrm{Ran}(T_j^\pi)})$ である. $T_j^\pi e_j \neq 0$ より $T_j^\pi \neq 0$ であり, Schur の補題 12.43 より $\mathcal{C}(\pi) = \mathbb{C}1$ であるから, $T_j^\pi : \mathcal{H}_\pi \to \mathrm{Ran}(T_j^\pi)$ は有限次元 Hilbert 空間の間のユニタリ作用素のスカラー倍である. よって π と $\rho|_{\mathrm{Ran}(T_j^\pi)}$ はユニタリ同値である. ゆえに ρ における $[\pi]$ 成分を $\mathcal{K}([\pi])$ とおけば,

$$\bigoplus_{j=1}^{\dim(\pi)'} \mathrm{Ran}(T_j^\pi) \subseteq \mathcal{K}([\pi]) \tag{12.105}$$

が成り立つ. ここで定理 12.108 の (3) より,

$$L^2(S,\nu) = \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} \mathcal{K}([\pi]) \tag{12.106}$$

であるから, (12.104), (12.105), (12.106) より,

$$\mathcal{K}([\pi]) = \bigoplus_{j=1}^{\dim(\pi)'} \mathrm{Ran}(T_j^\pi)$$

が従う. π と $\rho|_{\mathrm{Ran}(T_j^\pi)}$ はユニタリ同値なので, ρ における $[\pi]$ の重複度は $\dim(\pi)'$ である. □

12.5 局所コンパクト可換群における Fourier 変換, SNAG の定理, Bochner の定理

命題 12.121. G を局所コンパクト可換群, π を G のユニタリ表現とする. このとき次は互いに同値である.

(1) π は既約である.
(2) π は 1 次元である.

証明. (2) $\Rightarrow$ (1) は自明である. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. G を局所コンパクト可換群, $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ を G の既約なユニタリ表現とする. Schur の補題 12.43 より $\mathcal{C}(\pi) = \mathbb{C}1$ であり, G は可換であるから任意の $x \in G$ に対し $\pi(x) \in \mathcal{C}(\pi) = \mathbb{C}1$ である. そして π は既約であるから, 注意 12.39 より, 任意の $v \in \mathcal{H}_\pi \backslash \{0\}$ に対し v は π の巡回ベクトルである. よって $\mathcal{H}_\pi = \overline{\pi(G)v} = \mathbb{C}v$ であるから $\dim(\pi) = \dim(\mathcal{H}_\pi) = 1$ である. □

定義 12.122 (局所コンパクト可換群の指標群)**.** G を局所コンパクト可換群とし, コンパクト可換乗法群 $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ を考える. $\gamma : G \to \mathbb{T}$ が連続群準同型写像であるとき γ を G の指標と言う. 命題 12.121 より G の任意の既約なユニタリ表現は 1 次元であること, および連続群準同型写像 $\gamma : G \to \mathbb{T}$ は G の 1 次元 Hilbert 空間 $\mathbb{C}$ 上へのユニタリ表現 (既約) のトレースとみなせることから, この指標の定義はコンパクト群の指標の定義 12.115 と矛盾しない. 局所コンパクト可換群 G の指標全体を $\widehat{G}$ と表す. $\widehat{G}$ は各点ごとの乗法により可換な乗法群をなす. $\widehat{G}$ を G の指標群と言う. 次の定理 12.123 で見るように $\widehat{G}$ はコンパクト一様収束位相 (定義 12.71) により局所コンパクト可換群である.

G を局所コンパクト可換群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度とする. このとき L^1 群環 $L^1(G,\mu)$ は命題 12.33 より可換 Banach 環であり, 従って群 C^*-環 $C^*(G,\mu)$ (定義 12.53) は可換 C^*-環である.

定理 12.123 (局所コンパクト可換群の指標の性質)**.** G を局所コンパクト可換群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度, $\mathcal{P}_1(G)$ を G 上の sup ノルム 1 の正定値関数全体のなす凸集合 (定義 12.69), $\mathrm{ext}(\mathcal{P}_1(G))$ をその端点全体とする. また $\widehat{G}$ を G の指標群, $\widehat{L^1(G,\mu)}$ を可換 Banach 環 $L^1(G,\mu)$ の指標空間, $\widehat{C^*(G,\mu)}$ を可換 C^*-環 $C^*(G,\mu)$ の指標空間とする[*226]. このとき,

(1) $\widehat{G} = \mathrm{ext}(\mathcal{P}_1(G))$ が成り立つ.
(2) 任意の $\gamma \in \widehat{G}$ に対し $\Phi_\gamma : L^1(G,\mu) \to \mathbb{C}$ を,
$$\Phi_\gamma([f]) := \int_G f(x)\gamma(x)d\mu(x) \in \mathbb{C} \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$
とおけば $\Phi_\gamma \in \widehat{L^1(G,\mu)}$ であり,
$$\widehat{G} \ni \gamma \mapsto \Phi_\gamma \in \widehat{L^1(G,\mu)} \tag{12.107}$$
はコンパクト一様収束位相 (定義 12.71) と弱 $*$-位相に関して同相写像である.
(3) 任意の $\gamma \in \widehat{G}$ に対し (2) における $\Phi_\gamma \in \widehat{L^1(G,\mu)}$ は群 C^*-環 $C^*(G,\mu)$ の指標 $\widetilde{\Phi_\gamma} \in \widehat{C^*(G,\mu)}$ に一意拡張でき,
$$\widehat{G} \ni \gamma \mapsto \widetilde{\Phi_\gamma} \in \widehat{C^*(G,\mu)}$$
はコンパクト一様収束位相と弱 $*$-位相で同相写像である.
(4) $\widehat{G}$ はコンパクト一様収束位相により局所コンパクト可換群であり, G の第二可算性より $\widehat{G}$ は第二可算である.

証明. (1) 任意の $p \in \mathrm{ext}(\mathcal{P}_1(G))$ に対し p の GNS 表現 (定義 12.67) を (π, v) とすれば定理 12.70 より π は既約であるので命題 12.121 より π は 1 次元である. よって各 $x \in G$ に対し $\alpha_x \in \mathbb{T}$ で $\pi(x) = \alpha_x 1$ なるものが定まり,
$$p(x) = (\pi(x)v \mid v) = \alpha_x(v \mid v) = \alpha_x\|v\|^2 = \alpha_x \in \mathbb{T} \quad (\forall x \in G)$$
[*227]であるから,
$$p(xy)1 = \alpha_{xy}1 = \pi(xy) = \pi(x)\pi(y) = \alpha_x\alpha_y 1 = p(x)p(y)1 \quad (\forall x, y \in G).$$
よって $p \in \widehat{G}$ である. また任意の $\gamma \in \widehat{G}$ に対し γ は G の 1 次元 Hilbert 空間 $\mathbb{C}$ 上へのユニタリ表現のトレースとみなせて 1 次元 Hilbert 空間上へのユニタリ表現は既約であるから定理 12.70 より $\gamma \in \mathrm{ext}(\mathcal{P}_1(G))$ である. よって $\widehat{G} = \mathrm{ext}(\mathcal{P}_1(G))$ が成り立つ.

(2) 任意の $\gamma \in \widehat{G}$ を取る. γ を G の 1 次元 Hilbert 空間 $\mathbb{C}$ 上へのユニタリ表現とみなせば, そのユニタリ表現の L^1 群環 $L^1(G,\mu)$ の表現への拡張 (命題 12.48) は,
$$L^1(G,\mu) \ni [f] \mapsto \int_G f(x)\gamma(x)d\mu(x) \in B(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$$
であるから Φ_γ に一致する. よって $\Phi_\gamma : L^1(G,\mu) \to \mathbb{C}$ は乗法を保存する 0 ではない線型汎関数であるから $\Phi_\gamma \in \widehat{L^1(G,\mu)}$ である. 任意の $\Phi \in \widehat{L^1(G,\mu)}$ と $\Phi([f_0]) \neq 0$ なる $[f_0] \in L^1(G,\mu)$ を取り固定し,
$$\gamma(x) := \frac{\Phi(L_x[f_0])}{\Phi([f_0])} \quad (\forall x \in G)$$

[*226] 可換 Banach 環, 可換 C^*-環の指標空間については定義 9.34, 定義 9.39 を参照.
[*227] 系 12.68 より $\|v\|^2 = p(1) = \|p\|^2 = 1$ であることに注意.

として $\gamma : G \to \mathbb{C}$ を定義する. 命題 12.21 より $G \ni x \mapsto L_x[f_0] \in L^1(G,\mu)$ は連続であるので γ は連続である. そして,

$$\gamma(1) = 1,\ \ \gamma(x)\gamma(y) = \frac{\Phi(L_x[f_0] * L_y[f_0])}{\Phi([f_0])^2} = \frac{\Phi(L_{xy}[f_0] * [f_0])}{\Phi([f_0])^2} = \gamma(xy)\ \ (\forall x, y \in G), \tag{12.108}$$

$$|\gamma(x)| \leqslant \frac{\|[f_0]\|_1}{|\Phi([f_0])|}\ \ (\forall x \in G) \tag{12.109}$$

であるので $\gamma(x) \in \mathbb{T}$ $(\forall x \in G)$*228であり, $\gamma : G \to \mathbb{T}$ は群準同型写像である. よって $\gamma \in \widehat{G}$ である. そして (12.108) と合成積の定義 12.22 より,

$$\begin{aligned}\Phi_\gamma([f]) &= \int_G f(x)\gamma(x)d\mu(x) = \frac{1}{\Phi([f_0])}\int_G f(x)\Phi(L_x[f_0])d\mu(x) = \frac{1}{\Phi([f_0])}\Phi\left(\int_G f(x)L_x[f_0]d\mu(x)\right) \\ &= \frac{1}{\Phi([f_0])}\Phi([f] * [f_0]) = \Phi([f])\ \ (\forall [f] \in L^1(G,\mu))\end{aligned}$$

であるから $\Phi = \Phi_\gamma$ である. よって (12.107) は全射である. ゆえに (1) と定理 12.72 より (12.107) はコンパクト一様収束位相と弱 $*$-位相に関して同相写像である.

(3) (2) の証明の冒頭で述べたように, 任意の $\gamma \in \widehat{G}$ に対し Φ_γ は, G の 1 次元 Hilbert 空間 $\mathbb{C}$ 上へのユニタリ表現としての γ の $L^1(G,\mu)$ の表現への拡張である. よって命題 12.56 より Φ_γ は $C^*(G,\mu)$ の表現 $\widetilde{\Phi_\gamma} : C^*(G,\mu) \to \mathbb{C}$ に一意拡張でき,

$$\widehat{L^1(G,\mu)} \ni \Phi_\gamma \mapsto \widetilde{\Phi_\gamma} \in \widehat{C^*(G,\mu)} \tag{12.110}$$

は全単射である*229. よって (2) より (12.110) が同相写像であることを示せばよい. そのためには, 命題 1.50 より, $\widehat{G}$ のネット $(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $\gamma \in \widehat{G}$ に対し,

$$\Phi_{\gamma_\lambda} \to \Phi_\gamma \ \ \Leftrightarrow\ \ \widetilde{\Phi_{\gamma_\lambda}} \to \widetilde{\Phi_\gamma} \tag{12.111}$$

が成り立つことを示せばよい. 弱 $*$-位相の定義 3.66 と汎弱位相による収束の特徴付け (命題 3.63 の (1)) より,

$$\Phi_{\gamma_\lambda} \to \Phi_\gamma \ \ \Leftrightarrow\ \ \Phi_{\gamma_\lambda}([f]) \to \Phi_\gamma([f])\ \ (\forall [f] \in L^1(G,\mu)), \tag{12.112}$$

$$\widetilde{\Phi_{\gamma_\lambda}} \to \widetilde{\Phi_\gamma} \ \ \Leftrightarrow\ \ \widetilde{\Phi_{\gamma_\lambda}}(\omega) \to \widetilde{\Phi_\gamma}(\omega)\ \ (\forall \omega \in C^*(G,\mu)) \tag{12.113}$$

であるから (12.111) の $\Leftarrow$ は明らかに成り立つ. (12.111) の $\Rightarrow$ が成り立つことを示す. (12.112), (12.113) より任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し $\Phi_{\gamma_\lambda}([f]) \to \Phi_\gamma([f])$ が成り立つと仮定して, 任意の $\omega \in C^*(G,\mu)$ に対し $\widetilde{\Phi_{\gamma_\lambda}}(\omega) \to \widetilde{\Phi_\gamma}(\omega)$ が成り立つことを示せばよい. 群 C^*-環の定義 12.53 より $(C^*(G,\mu), \|\cdot\|_*)$ において $L^1(G,\mu)$ は稠密であるから, 任意の正数 ε に対し,

$$\|\omega - [f]\|_* < \frac{\varepsilon}{3}$$

なる $[f] \in L^1(G,\mu)$ が取れる. 仮定より,

$$|\Phi_{\gamma_\lambda}([f]) - \Phi_\gamma([f])| < \frac{\varepsilon}{3}\ \ (\forall \lambda \geqslant \lambda_0)$$

なる $\lambda_0 \in \Lambda$ が取れる. そして $\widehat{C^*(G,\mu)}$ の元は $(C^*(G,\mu), \|\cdot\|_*)$ のノルムが 1 以下の有界線型汎関数である (命題 9.38 を参照) から, 任意の $\lambda \geqslant \lambda_0$ に対し,

$$\begin{aligned}|\widetilde{\Phi_{\gamma_\lambda}}(\omega) - \widetilde{\Phi_\gamma}(\omega)| &\leqslant |\widetilde{\Phi_{\gamma_\lambda}}(\omega) - \Phi_{\gamma_\lambda}([f])| + |\Phi_{\gamma_\lambda}([f]) - \Phi_\gamma([f])| + |\Phi_\gamma([f]) - \widetilde{\Phi_\gamma}(\omega)| \\ &\leqslant \|\omega - [f]\|_* + |\Phi_\gamma([f]) - \widetilde{\Phi_\gamma}(\omega)| + \|[f] - \omega\|_* < \varepsilon\end{aligned}$$

となる. よって $\widetilde{\Phi_{\gamma_\lambda}}(\omega) \to \widetilde{\Phi_\gamma}(\omega)$ が成り立つので (12.111) の $\Rightarrow$ が成り立つ.

---

*228 実際, もし $|\gamma(x)| > 1$ なる $x \in G$ が存在するならば $\lim_{n\to\infty}|\gamma(x)|^n = \infty$ となるが (12.108) と (12.109) より $|\gamma(x)|^n = |\gamma(x^n)| \leqslant \frac{\|[f_0]\|_1}{|\Phi([f_0])|}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であるので矛盾する. よって任意の $x \in G$ に対し $|\gamma(x)| \leqslant 1$ である. そして (12.108) より任意の $x \in G$ に対し $|\gamma(x)| = |\gamma(x^{-1})|^{-1} \geqslant 1$ である.

*229 可換 C^*-環 $C^*(G,\mu)$ の 1 次元 Hilbert 空間 $\mathbb{C}$ 上への表現は乗法を保存する 0 ではない線型汎関数であるから $C^*(G,\mu)$ の指標である. 逆に可換 C^*-環 $C^*(G,\mu)$ の指標は命題 9.42 より $*$-演算を保存するので $C^*(G,\mu)$ の 1 次元 Hilbert 空間 $\mathbb{C}$ 上への表現である.

(4) $\widehat{L^1(G,\mu)}$ は弱 $*$-位相により局所コンパクト Hausdorff 空間である (定義 9.39 を参照). よって (2) より $\widehat{G}$ はコンパクト一様収束位相で局所コンパクト Hausdorff 空間である.

$$\widehat{G}\times\widehat{G}\ni(\gamma_1,\gamma_2)\mapsto\gamma_1\gamma_2\in\widehat{G},\quad \widehat{G}\ni\gamma\mapsto\gamma^{-1}\in\widehat{G}$$

がコンパクト一様収束位相で連続であることは命題 1.50 より明らかである. G の第二可算性と補題 12.124 より $L^1(G,\mu)$ は可分である. よって補題 12.125 より $(L^1(G,\mu))^*_1=\{\Phi\in(L^1(G,\mu))^*:\|\Phi\|\leqslant 1\}$ は弱 $*$-位相により第二可算公理を満たす. ゆえに $\widehat{L^1(G,\mu)}(\subseteq(L^1(G,\mu))^*_1)$ も弱 $*$-位相により第二可算公理を満たすので (2) より $\widehat{G}$ はコンパクト一様収束位相により第二可算公理を満たす.

□

補題 12.124. X を第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間とする. このとき,

(1) $C_0(X)$ は sup ノルムで可分である.

(2) $\mu:\mathcal{B}_X\to[0,\infty]$ を X の位相正則測度とすると, 任意の $p\in[1,\infty)$ に対し Banach 空間 $L^p(X,\mu)$ は可分である.

証明. (1) X は第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間であるので閉包がコンパクトな開集合からなる開集合の可算基 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を持つ. 各 $n,m\in\mathbb{N}$ に対し Urysohn の補題 5.165 より次を満たすような $\varphi_{n,m}\in C_{c,+}(X)$ が取れる.

$$\overline{U_n}\cap\overline{U_m}=\varnothing\quad\Rightarrow\quad\overline{U_n}\preceq\varphi_{n,m}\preceq X\backslash\overline{U_m},\tag{12.114}$$

$$\overline{U_n}\cap\overline{U_m}\neq\varnothing\quad\Rightarrow\overline{U_n}\preceq\varphi_{n,m}.\tag{12.115}$$

($\preceq$ の意味については定義 5.164 を参照) これに対し,

$$\mathcal{A}_0:=\{\varphi\in C_c(X):\varphi\text{ は }\{\varphi_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}\text{ の有限個の元の積}\},$$

$$\mathcal{A}:=\mathrm{span}(\mathcal{A}_0)$$

とおく. $\mathcal{A}_0$ は乗法と複素共役で閉じた可算集合であるので, $\mathcal{A}$ は $C_0(X)$ の可分な部分 $*$-環である. よって $C_0(X)$ において $\mathcal{A}$ が稠密であることを示せばよい. Stone-Weierstrass の定理 5.194 を用いる. 任意の $x\in X$ に対し, $x\in U_n$ なる $n\in\mathbb{N}$ が取れるので (12.114), (12.115) より $\varphi(x)=1$ なる $\varphi\in\mathcal{A}$ が存在する. また $x,y\in X$ が $x\neq y$ を満たすとすると, $n,m\in\mathbb{N}$ で,

$$x\in U_n,\quad y\in U_m,\quad \overline{U_n}\cap\overline{U_m}=\varnothing$$

を満たすものが取れるので (12.114) より $\varphi,\psi\in\mathcal{A}$ で $\varphi(x)=1\neq 0=\psi(y)$ なるものが取れる. よって Stone-Weierstarss の定理 5.194 より $\mathcal{A}$ は $C_0(X)$ で稠密である.

(2) 閉包がコンパクトな X の開集合の単調増加列 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_n$ なるものを取る. (1) より各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $C(\overline{V_n})_{n\in\mathbb{N}}$ は sup ノルムで可分である. そこで $\{h_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}\subseteq C(\overline{V_n})$ を稠密な可算集合とする. 任意の $[f]\in L^p(X,\mu)$, 任意の正数 ε を取る. μ は位相正則測度なので定理 5.179 より $g\in C_c(X)$ で,

$$\|f-g\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$$

なるものが取れる. $\mathrm{supp}(g)$ はコンパクトであるから $\mathrm{supp}(g)\subseteq V_n$ なる $n\in\mathbb{N}$ が取れて, $\{h_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}\subseteq C(\overline{V_n})$ の稠密性より,

$$\|g-h_{n,m}\|<\frac{\varepsilon}{2(\mu(\overline{V_n})+1)^{\frac{1}{p}}}$$

($\overline{V_n}$ はコンパクトであるから $\mu(\overline{V_n})<\infty$ であることに注意) なる $m\in\mathbb{N}$ が取れる. $h_{n,m}\in C(\overline{V_n})$ の X 上への 0 拡張を $\widetilde{h_{n,m}}:X\to\mathbb{C}$ とおけば,

$$\|g-\widetilde{h_{n,m}}\|_p=\left(\int_{\overline{V_n}}|g(x)-h_{n,m}(x)|^pd\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\|g-h_{n,m}\|\mu(\overline{V_n})^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{2}$$

であるから,

$$\|f - \widetilde{h_{n,m}}\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - \widetilde{h_{n,m}}\|_p < \varepsilon$$

である. ゆえに可算集合 $\{\widetilde{h_{n,m}}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ は $L^p(X,\mu)$ で稠密であるから $L^p(X,\mu)$ は可分である.

□

補題 12.125. X を可分なノルム空間とすると, X^* の単位ノルム閉球

$$(X^*)_1 = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| \leqslant 1\}$$

は弱 $*$-位相の相対位相で第二可算である.

証明. 任意の $x \in X$ に対し,

$$\iota_x : X^* \ni \varphi \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{C}$$

とおく. X の稠密な可算部分集合 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を取り, $(\iota_{x_n} : X^* \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ が定める X^* 上の始位相 (定義 1.71) を $\mathcal{O}$ とおく. $\mathbb{C}$ の開集合の可算基を $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ とおけば, 始位相の定義 1.71 より $(X^*,\mathcal{O})$ は開集合の基として,

$$\{\iota_{x_1}^{-1}(U_{m_1}) \cap \cdots \cap \iota_{x_n}^{-1}(U_{m_n}) : n, m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{N}\}$$

を持ち, これは可算集合なので $(X^*,\mathcal{O})$ は第二可算である. よって $(X^*)_1$ は $\mathcal{O}$ の相対位相で第二可算である. これより弱 $*$-位相の $(X^*)_1$ 上の相対位相と $\mathcal{O}$ の $(X^*)_1$ 上の相対位相が一致することを示せばよい. そのためには, 命題 1.50 より, $(X^*)_1$ のネット $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $\varphi \in (X^*)_1$ に対し,

$$\text{弱 } *\text{-位相に関して } \varphi_\lambda \to \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{O} \text{ に関して } \varphi_\lambda \to \varphi \tag{12.116}$$

が成り立つことを示せばよい. 弱 $*$-位相の定義 3.66 と汎弱位相による収束の特徴付け (命題 3.63 の (1)) より,

$$\text{弱 } *\text{-位相に関して } \varphi_\lambda \to \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{任意の } x \in X \text{ に対し } \varphi_\lambda(x) \to \varphi(x) \tag{12.117}$$

であり, 始位相による収束の特徴付け (命題 1.72) より,

$$\mathcal{O} \text{ に関して } \varphi_\lambda \to \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対し } \varphi_\lambda(x_n) \to \varphi(x_n) \tag{12.118}$$

である. よって (12.116) の $\Rightarrow$ は明らかに成り立つ. (12.116) の $\Leftarrow$ が成り立つことを示す. そのためには (12.117), (12.117) より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\varphi_\lambda(x_n) \to \varphi(x_n)$ が成り立つと仮定して, 任意の $x \in X$ に対し $\varphi_\lambda(x) \to \varphi(x)$ が成り立つことを示せばよい. 任意の $x \in X$, 任意の正数 ε を取る. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は X で稠密であるから,

$$\|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

なる $n \in \mathbb{N}$ が取れ, 仮定より $\varphi_\lambda(x_n) \to \varphi(x_n)$ なので,

$$|\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall \lambda \geqslant \lambda_0)$$

なる $\lambda_0 \in \Lambda$ が取れる. ここで $\varphi_\lambda \in (X^*)_1$ $(\forall\lambda \in \Lambda)$, $\varphi \in (X^*)_1$ であるから任意の $\lambda \geqslant \lambda_0$ に対し,

$$\begin{aligned}|\varphi_\lambda(x) - \varphi(x)| &\leqslant |\varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(x_n)| + |\varphi_\lambda(x_n) - \varphi(x_n)| + |\varphi(x_n) - \varphi(x)| \\ &\leqslant \|x - x_n\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|x_n - x\| < \varepsilon\end{aligned}$$

となる. よって任意の $x \in X$ に対し $\varphi_\lambda(x) \to \varphi(x)$ が成り立つので, (12.116) の $\Leftarrow$ が成り立つ. □

定義 12.126 (局所コンパクト可換群の双対群)**.** G を局所コンパクト可換群とする. 定理 12.123 より G の指標群 $\widehat{G}$ はコンパクト一様収束位相により局所コンパクト可換群である. 局所コンパクト可換群 H で $\widehat{G}$ と同相かつ群同型であるものを G の双対群と言う. そして H と $\widehat{G}$ の群同型同相写像は, 一般論においては, 標準的に,

$$H \ni \gamma \mapsto \langle \cdot, \gamma \rangle \in \widehat{G}$$

によって表す.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : G \times H \ni (x, \gamma) \mapsto \langle x, \gamma \rangle \in \mathbb{T}$$

を G とその双対群 H のペアリングと言う. さらに以後, 一般論においては G の双対群は指標群と同じ記号 $\widehat{G}$ で表す.

命題 12.127 (局所コンパクト可換群の双対群の典型例)**.** 局所コンパクト可換群 $\mathbb{R}^N$ (加法群), $\mathbb{T}^N$ (乗法群, コンパクト群), $\mathbb{Z}^N$ (加法群, 離散群) を考える.

(1) $\mathbb{R}^N$ はペアリング $\langle x, k\rangle = e^{-ik\cdot x}$ $(\forall x, k \in \mathbb{R}^N)$ により $\mathbb{R}^N$ 自身を双対群として持つ.
(2) $\mathbb{T}^N$ はペアリング $\langle z, n\rangle = z^n$ $(\forall z \in \mathbb{T}^N, \forall n \in \mathbb{Z}^N)$ により $\mathbb{Z}^N$ を双対群として持つ.
(3) $\mathbb{Z}^N$ はペアリング $\langle n, z\rangle = z^n$ $(\forall z \in \mathbb{T}^N, \forall n \in \mathbb{Z}^N)$ により $\mathbb{T}^N$ を双対群として持つ.

証明. (1) $\langle x, k\rangle = e^{-ik\cdot x}$ $(\forall x, k \in \mathbb{R}^N)$ とおけば,

$$\mathbb{R}^N \ni k \mapsto \langle \cdot, k\rangle \in \widehat{\mathbb{R}^N} \tag{12.119}$$

は明らかに単射連続群準同型写像である. (12.119) が全射であることを示す. $N = 1$ として示せば十分である. $\gamma \in \widehat{\mathbb{R}}$ とすると $\gamma(0) = 1$ であるから $0 \in \mathbb{R}$ に十分近い $a \in \mathbb{R}$ を取れば,

$$\alpha := \int_0^a \gamma(s)ds \neq 0$$

である.

$$\alpha\gamma(t) = \int_0^a \gamma(s+t)ds = \int_0^{a+t} \gamma(s)ds - \int_0^t \gamma(s)ds \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であるので,

$$\alpha\frac{d\gamma}{dt}(t) = \gamma(a+t) - \gamma(t) = (\gamma(a) - 1)\gamma(t) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

である. よって $\beta := \alpha^{-1}(\gamma(a) - 1) \in \mathbb{C}$ とおけば,

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = \beta\gamma(t) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であるので,

$$\frac{d}{dt}(e^{-\beta t}\gamma(t)) = 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

よって平均値の定理 4.8 より,

$$e^{-\beta t}\gamma(t) = \gamma(0) = 1 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

だから,

$$\gamma(t) = e^{\beta t} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

である.

$$|e^{\beta t}| = |\gamma(t)| = 1 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

よりある $k \in \mathbb{R}$ に対し $\beta = -ik$ と表せる. よって $\gamma(t) = e^{-ikt}$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ であるから (12.119) は全射である. ゆえに (12.119) は連続群同型写像であるので開写像定理 12.90 より (12.119) は同相写像である.

(2) $\langle z, n\rangle = z^n = z_1^{n_1}\cdots z_N^{n_N}$ $(\forall z \in \mathbb{T}^N, \forall n \in \mathbb{Z}^N)$ とおくと,

$$\mathbb{Z}^N \ni n \mapsto \langle \cdot, n\rangle \in \widehat{\mathbb{T}^N} \tag{12.120}$$

は明らかに単射連続群準同型写像である (連続性は $\mathbb{Z}^N$ が離散群であることから自明である). (12.120) が全射であることを示す. $N = 1$ であるとして示せば十分である. $\gamma \in \widehat{\mathbb{T}}$ とすると,

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \gamma(e^{ix}) \in \mathbb{T}$$

は $\widehat{\mathbb{R}}$ に属すから (1) よりある $n \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\gamma(e^{ix}) = e^{inx} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

$$1 = \gamma(e^{i2\pi}) = e^{in2\pi}$$

であるから $n \in \mathbb{Z}$ であり，

$$\gamma(e^{ix}) = e^{inx} = (e^{ix})^n \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

であるので $\gamma(z) = z^n$ $(\forall z \in \mathbb{T})$ である．ゆえに (12.120) は全射である．よって (12.120) は連続群同型写像であるので開写像定理 12.90 より (12.120) は同相写像である．

(3) $\langle n, z\rangle = z^n = z_1^{n_1} \cdots z_N^{n_N}$ $(\forall z \in \mathbb{T}^N, \forall n \in \mathbb{Z}^N)$ とおくと，

$$\mathbb{T}^N \ni z \mapsto \langle \cdot, z\rangle \in \widehat{Z^N} \tag{12.121}$$

は明らかに連続群同型写像であるので，開写像定理 12.90 より (12.121) は同相写像である．

□

定理 12.128 (局所コンパクト可換群の Fourier 変換)**.** G を局所コンパクト可換群，$\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ を G の Haar 測度とし，$\widehat{G}$ を G の双対群，$C^*(G, \mu)$ を G の群 C^*-環 (定義 12.53) とする．このとき等長 $*$-環同型写像

$$\mathcal{F} : C^*(G, \mu) \to C_0(\widehat{G})$$

で，

$$\mathcal{F}[f](\gamma) = \int_G f(x)\langle x, \gamma\rangle d\mu(x) \quad (\forall [f] \in L^1(G, \mu), \forall \gamma \in \widehat{G})$$

を満たすものが唯一つ存在する．

証明. 定理 9.43 より可換 C^*-環 $C^*(G, \mu)$ の Gelfand 変換

$$\Gamma : C^*(G, \mu) \to C_0(\widehat{C^*(G, \mu)}) \tag{12.122}$$

は等長 $*$-環同型写像である．また定理 12.123 の (3) より，

$$\tau : \widehat{G} \ni \gamma \mapsto \widetilde{\Phi_\gamma} \in \widehat{C^*(G, \mu)}$$

は同相写像であるから，

$$\mathcal{T} : C_0(\widehat{C^*(G, \mu)}) \ni h \mapsto h \circ \tau \in C_0(\widehat{G}) \tag{12.123}$$

は等長 $*$-環同型写像である．よって (12.122), (12.123) の合成

$$\mathcal{F} := \mathcal{T} \circ \Gamma : C^*(G, \mu) \to C_0(\widehat{G})$$

は等長 $*$-環同型写像である．そして任意の $[f] \in L^1(G, \mu) \subseteq C^*(G, \mu)$, $\gamma \in \widehat{G}$ に対し，

$$\mathcal{F}([f])(\gamma) = \mathcal{T}(\Gamma([f]))(\gamma) = \Gamma([f])(\tau(\gamma)) = \Gamma([f])(\widetilde{\Phi_\gamma}) = \Phi_\gamma([f]) = \int_G f(x)\gamma(x)d\mu(x)$$

である．よって存在が示せた．一意性は $C^*(G, \mu)$ において $L^1(G, \mu)$ が稠密であることによる． □

定義 12.129 (局所コンパクト可換群の Fourier 変換)**.** G を局所コンパクト可換群，$\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ を G の Haar 測度とし，$\widehat{G}$ を G の双対群，$C^*(G, \mu)$ を G の群 C^*-環 (定義 12.53) とする．定理 12.128 より，等長 $*$-環同型写像

$$\mathcal{F} : C^*(G, \mu) \to C_0(\widehat{G})$$

で，

$$\mathcal{F}[f](\gamma) = \int_G f(x)\langle x, \gamma\rangle d\mu(x) \quad (\forall [f] \in L^1(G, \mu), \forall \gamma \in \widehat{G})$$

を満たすものが唯一つ存在する．これを局所コンパクト可換群 G における Fourier 変換と言う．

注意 12.130 (局所コンパクト可換群の Fourier 変換のノルムに関する注意)**.** 群 C^*-環 $C^*(G, \mu)$ のノルムの定義 12.53 より，

$$\|\mathcal{F}([f])\| = \|[f]\|_* \leqslant \|[f]\|_1 \quad (\forall [f] \in L^1(G, \mu))$$

であることに注意.

系 12.131. G を局所コンパクト可換群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度, $\widehat{G}$ を G の双対群, $\mathcal{F} : C^*(G,\mu) \to C_0(\widehat{G})$ を G における Fourier 変換とする．このとき $\mathcal{F}(L^1(G,\mu))$ は $C_0(\widehat{G})$ の稠密な部分 $*$-環である．

証明. 群 C^*-環 $C^*(G,\mu)$ の定義 12.53 より $L^1(G,\mu)$ は $C^*(G,\mu)$ の稠密な部分 $*$-環である．そして $\mathcal{F} : C^*(G,\mu) \to C_0(\widehat{G})$ は等長 $*$-環同型写像であるから, $\mathcal{F}(L^1(G,\mu))$ は $C_0(\widehat{G}) = \mathcal{F}(C^*(G,\mu))$ の稠密な部分 $*$-環である． □

命題 12.132. G を局所コンパクト可換群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度, $\widehat{G}$ を G の双対群, $\mathcal{F} : C^*(G,\mu) \to C_0(\widehat{G})$ を Fourier 変換とする．このとき,

(1) 任意の $x \in G$, 任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し,

$$\mathcal{F}(L_x[f])(\gamma) = \langle x,\gamma\rangle \mathcal{F}([f])(\gamma) \quad (\forall \gamma \in \widehat{G})$$

が成り立つ．

(2) $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定理 12.27 における $L^1(G,\mu)$ の近似単位元とすると,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(L_x\varphi_n)(\gamma) = \langle x,\gamma\rangle \quad (\forall x \in G, \forall \gamma \in \widehat{G})$$

が成り立つ．

証明. (1) μ が Haar 測度であることから,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(L_x[f])(\gamma) &= \int_G f(x^{-1}y)\langle y,\gamma\rangle d\mu(y) = \int_G f(y)\langle xy,\gamma\rangle d\mu(y)\\ &= \langle x,\gamma\rangle \int_G f(y)\langle y,\gamma\rangle d\mu(y) = \langle x,\gamma\rangle(\mathcal{F}[f])(\gamma) \quad (\forall \gamma \in \widehat{G}).\end{aligned}$$

(2) (1) より $x = 1 \in G$ の場合を示せば十分である．$G \ni y \mapsto \langle y,\gamma\rangle \in \mathbb{T}$ の $1 \in G$ における連続性より

$$\begin{aligned}|(\mathcal{F}\varphi_n)(\gamma) - 1| &= \left|\int_G \varphi_n(y)\langle y,\gamma\rangle d\mu(y) - \int_G \varphi_n(y)d\mu(y)\right| = \left|\int_G \varphi_n(y)(\langle y,\gamma\rangle - 1)d\mu(y)\right|\\ &\leqslant \int_G \varphi_n(y)|\langle y,\gamma\rangle - 1|d\mu(y) \to 0 \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

□

定理 12.133 (コンパクト可換群の Fourier 変換)**.** G をコンパクト可換群, $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,1]$ を Haar 測度 ($\mu(G) = 1$), $\widehat{G}$ を G の双対群とする．このとき $\{\langle\cdot,\gamma\rangle : \gamma \in \widehat{G}\}$ は Hilbert 空間 $L^2(G,\mu)$ の CONS である．そして Fourier 変換 $\mathcal{F} : L^1(G,\mu) \to C_0(\widehat{G})$ を $L^2(G,\mu) \subseteq L^1(G,\mu)$ に制限したものは Hilbert 空間 $L^2(G,\mu)$ から Hilbert 空間 $\ell^2(\widehat{G})$ へのユニタリ作用素である．さらに双対群 $\widehat{G}$ は離散群である．

証明. 定義 12.122 で述べたように G の局所コンパクト可換群としての指標はコンパクト群としての指標 (定義 12.115) と同じである．G は可換だから G 上の任意の関数は類関数 (定義 12.114) なので, Peter-Weyl の定理 12.117 より, $\{\langle\cdot,\gamma\rangle : \gamma \in \widehat{G}\}$ は $L^2(G,\mu)$ の CONS である．よって任意の $[f] \in L^2(G,\mu)$ に対し,

$$[f] = \sum_{\gamma\in\widehat{G}} \left(\int_G f(x)\overline{\langle x,\gamma\rangle}d\mu(x)\right)\langle\cdot,\gamma\rangle = \sum_{\gamma\in\widehat{G}} \mathcal{F}([f])(\gamma^{-1})\langle\cdot,\gamma\rangle$$

であるから, 定理 5.147 より,

$$\mathcal{F} : L^2(G,\mu) \ni [f] \mapsto (\mathcal{F}([f])(\gamma^{-1}))_{\gamma\in\widehat{G}} \in \ell(\widehat{G})$$

はユニタリ作用素である．よって,

$$\ell^2(\widehat{G}) = \mathcal{F}(L^2(G,\mu)) \subseteq \mathcal{F}(L^1(G,\mu)) \subseteq C_0(\widehat{G})$$

であるから, 任意の $\gamma \in \widehat{G}$ に対し $\chi_{\{\gamma\}} \in \ell^2(\widehat{G}) \subseteq C_0(\widehat{G})$ なので $\{\gamma\} = (\chi_{\{\gamma\}} > 1)$ は $\widehat{G}$ の開集合である．よって局所コンパクト群 $\widehat{G}$ の位相は離散位相なので $\widehat{G}$ は離散群である． □

定理 12.134 (SNAG の定理)**.** G を局所コンパクト可換群, $\widehat{G}$ を G の双対群とする．このとき G の任意のユニタリ表現 $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ に対し, 射影値測度 $E_\pi : \mathcal{B}_{\widehat{G}} \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_\pi)$ で,

$$\pi(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \gamma \rangle dE_\pi(\gamma) \quad (\forall x \in G) \tag{12.124}$$

を満たすものが唯一つ存在する．そして $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, \infty]$ を G の Haar 測度, $\mathcal{F} : C^*(G, \mu) \to C_0(\widehat{G})$ を Fourier 変換とすると,

$$\pi([f]) = \int_{\widehat{G}} \mathcal{F}([f])(\gamma) dE_\pi(\gamma) \quad (\forall [f] \in L^1(G, \mu))$$

が成り立つ[*230].

証明. G のユニタリ表現 π の $C^*(G, \mu)$ の表現への一意拡張 (定義 12.50 と注意 12.57 を参照) もそのまま $\pi : C^*(G, \mu) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ と表す．Fourier 変換 $\mathcal{F} : C^*(G, \mu) \to C_0(\widehat{G})$ は等長 $*$-環同型写像であるから,

$$\pi \circ \mathcal{F}^{-1} : C_0(\widehat{G}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$$

なる $*$-環準同型写像が定義でき,

$$(\pi \circ \mathcal{F}^{-1})(C_0(\widehat{G}))\mathcal{H}_\pi = \pi(C^*(G, \mu))\mathcal{H}_\pi = \mathrm{span}\{\pi(\omega)v : \omega \in C^*(G, \mu), v \in \mathcal{H}_\pi\}$$

は $\mathcal{H}_\pi$ で稠密である．よって Riesz-Markov-角谷の表現定理 10.60 より射影値測度 $E_\pi : \mathcal{B}_{\widehat{G}} \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_\pi)$ で,

$$(\pi \circ \mathcal{F}^{-1})(h) = \int_{\widehat{G}} h(\gamma) dE_\pi(\gamma) \quad (\forall h \in C_0(\widehat{G}))$$

を満たすものが存在する．これより,

$$\pi([f]) = \int_{\widehat{G}} \mathcal{F}([f])(\gamma) dE_\pi(\gamma) \quad (\forall [f] \in L^1(G, \mu)) \tag{12.125}$$

が成り立つ．定理 12.27 における $L^1(G, \mu)$ の近似単位元 $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を取ると, 命題 12.51 より,

$$\pi(x) = \text{SOT-}\lim_{n \to \infty} \pi(L_x \varphi_n) \quad (\forall x \in G) \tag{12.126}$$

である．また命題 12.132 と Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\int_{\widehat{G}} \mathcal{F}(L_x \varphi_n)(\gamma) dE_\pi(\gamma) \right) v - \left(\int_{\widehat{G}} \langle x, \gamma \rangle dE_\pi(\gamma) \right) v \right\|^2 \\
&= \int_{\widehat{G}} \left| \mathcal{F}(L_x \varphi_n)(\gamma) - \langle x, \gamma \rangle \right|^2 dE_{\pi, v, v}(\gamma) \\
&\to 0 \quad (n \to \infty, \forall x \in G, \forall v \in \mathcal{H}_\pi)
\end{aligned}$$

であるから,

$$\int_{\widehat{G}} \langle x, \gamma \rangle dE_\pi(\gamma) = \text{SOT-}\lim_{n \to \infty} \int_{\widehat{G}} \mathcal{F}(L_x \varphi_n)(\gamma) dE_\pi(\gamma) \quad (\forall x \in G).$$

よって (12.125) より,

$$\int_{\widehat{G}} \langle x, \gamma \rangle dE_\pi(\gamma) = \text{SOT-}\lim_{n \to \infty} \pi(L_x \varphi_n) \quad (\forall x \in G) \tag{12.127}$$

が成り立つ．(12.126), (12.127) より,

$$\pi(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \gamma \rangle dE_\pi(\gamma) \quad (\forall x \in G)$$

[*230] $\pi([f])$ については定義 12.50 を参照.

を得る．これで存在が示せた．
一意性を示す．射影値測度 $E : \mathcal{B}_{\widehat{G}} \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_\pi)$ が (12.124) を満たすならば, 任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$, 任意の $v \in \mathcal{H}_\pi$ に対し, Fubini の定理 5.85 より,

$$\begin{aligned}(\pi([f])v \mid v) &= \int_G f(x)(\pi(x)v \mid v)d\mu(x) = \int_G f(x)\left(\int_{\widehat{G}} \langle x,\gamma\rangle dE_{v,v}(\gamma)\right)d\mu(x)\\ &= \int_{\widehat{G}}\left(\int_G f(x)\langle x,\gamma\rangle d\mu(x)\right)dE(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \mathcal{F}([f])(\gamma)dE_{v,v}(\gamma)\\ &= \left(\left(\int_{\widehat{G}} \mathcal{F}([f])(\gamma)dE(\gamma)\right)v \mid v\right)\end{aligned}$$

となる．よって偏極恒等式 10.4 より,

$$\pi([f]) = \int_{\widehat{G}} \mathcal{F}([f])(\gamma)dE(\gamma) \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

が成り立つ．これより 2 つの射影値測度 $E_1, E_2 : \mathcal{B}_{\widehat{G}} \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_\pi)$ がそれぞれ (12.124) を満たすならば,

$$\int_{\widehat{G}} \mathcal{F}([f])(\gamma)dE_1(\gamma) = \pi([f]) = \int_{\widehat{G}} \mathcal{F}([f])(\gamma)dE_2(\gamma) \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

が成り立ち, 系 12.131 より $\mathcal{F}(L^1(G,\mu))$ は $C_0(\widehat{G})$ で稠密なので,

$$\int_{\widehat{G}} h(\gamma)dE_1(\gamma) = \int_{\widehat{G}} h(\gamma)dE_2(\gamma) \quad (\forall h \in C_0(\widehat{G})) \tag{12.128}$$

が成り立つ．ここで $\widehat{G}$ は第二可算公理を満たす (定理 12.123 の (4) を参照) ので, 定理 5.177 より E_1, E_2 は自動的に位相正則射影値測度 (定義 10.59) であるから, (12.128) と Riesz-Markov-角谷の表現定理 10.60 より $E_1 = E_2$ が成り立つ．これで一意性が示せた．□

系 12.135. $\mathbb{R}$ の任意のユニタリ表現 π に対し $\mathcal{H}_\pi$ 上の自己共役作用素 T で,

$$\pi(x) = e^{ixT} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

を満たすものが唯一つ存在する．

証明. SNAG の定理 12.134 と命題 12.127 の (1) より, 射影値測度 $E : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_\pi)$ で,

$$\pi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\lambda}dE(\lambda) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

を満たすものが唯一つ存在する．

$$T := \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda) \tag{12.129}$$

とおくと, T は $\mathcal{H}_\pi$ 上の自己共役作用素 (命題 10.53 の (2)) であり, 命題 10.66 より,

$$e^{ixT} = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\lambda}dE(\lambda) = \pi(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

である．よって存在が示せた．また自己共役作用素 S が $\pi(x) = e^{ixS}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ を満たすとすると, (12.129) における自己共役作用素 T に対し,

$$e^{ixT} = \pi(x) = e^{ixS} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

であるから補題 10.213 より $T = S$ である．よって一意性が示せた．□

定義 12.136 (自己共役作用素の強可換性)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, S, T を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする．

$$e^{isS}e^{itT} = e^{itT}e^{isS} \quad (\forall s,t \in \mathbb{R})$$

が成り立つとき S, T は互いに強可換であると言う．

定理 12.137 (強可換な自己共役作用素の組に対する結合スペクトル測度)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $T := (T_1, \cdots, T_N)$ を互いに強可換な自己共役作用素の組とする．そして T_j のスペクトル測度 (定義 10.63) を $E_{\sigma(T_j)} : \mathcal{B}_{\sigma(T_j)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ $(j = 1, \cdots, N)$ とおく．このとき射影値測度

$$E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T_1)\times\cdots\times\sigma(T_N)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

で,

$$E_T(B_1 \times \cdots \times B_N) = E_{T_1}(B_1) \cdots E_{T_N}(B_N) \quad (\forall B_1 \in \mathcal{B}_{\sigma(T_1)}, \cdots, B_N \in \mathcal{B}_{\sigma(T_N)})$$

を満たすものが唯一つ存在する．

証明. 強可換性より,

$$\mathbb{R}^N \ni (x_1, \cdots, x_N) \mapsto e^{ix_1T_1} \cdots e^{ix_NT_N} \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

は局所コンパクト可換群 $\mathbb{R}^N$ のユニタリ表現である．よって SNAG の定理 12.134 と命題 12.127 の (1) より, 射影値測度 $E : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ で,

$$e^{ix_1T_1} \cdots e^{ix_NT_N} = \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix_1\lambda_1} \cdots e^{ix_N\lambda_N} dE(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \quad (\forall (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N)$$

を満たすものが唯一つ存在する．各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し,

$$\pi_j : \mathbb{R}^N \ni (x_1, \cdots, x_N) \mapsto x_j \in \mathbb{R}$$

とおき, 射影値測度 $E_j : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を,

$$E_j(B) := E(\pi_j^{-1}(B)) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$$

として定義すると,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\lambda} dE_j(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\lambda_j} dE(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) = e^{ixT_j} = \int_{\sigma(T_j)} e^{ix\lambda} dE_{T_j}(\lambda) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

であるから, SNAG の定理 12.134 の一意性より,

$$E_j(B) = E_{T_j}(B \cap \sigma(T_j)) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$$

が成り立つ．よって,

$$\begin{aligned} E(B_1 \times \cdots \times B_N) &= E(\pi_1^{-1}(B_1)) \cdots E(\pi_N^{-1}(B_N)) = E_1(B_1) \cdots E_N(B_N) \\ &= E_{T_1}(B_1 \cap \sigma(T_1)) \cdots E_{T_N}(B_N \cap \sigma(T_N)) \quad (\forall B_1, \cdots, B_N \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \end{aligned}$$

が成り立つ．これより,

$$E(\sigma(T_1) \times \cdots \times \sigma(T_N)) = E_{T_1}(\sigma(T_1)) \cdots E_{T_N}(\sigma(T_N)) = 1$$

であるから, E を $\mathcal{B}_{\sigma(T_1)\times\cdots\times\sigma(T_N)}$ 上に制限したものは射影値測度であり, それを $E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T_1)\times\cdots\times\sigma(T_N)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ と表すと,

$$E_T(B_1 \times \cdots \times B_N) = E(B_1 \times \cdots \times B_N) = E_{T_1}(B_1) \cdots E_{T_N}(B_N) \quad (\forall B_1 \in \mathcal{B}_{\sigma(T_1)}, \cdots, B_N \in \mathcal{B}_{\sigma(T_N)})$$

である．これで存在が示せた．一意性は σ-加法族 $\mathcal{B}_{\sigma(T_1)\times\cdots\times\sigma(T_N)} = \mathcal{B}_{\sigma(T_1)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\sigma(T_N)}$ (命題 5.16 を参照) が半集合代数 (定義 5.60)

$$\mathcal{B}_{\sigma(T_1)} \times \cdots \times \mathcal{B}_{\sigma(T_N)} = \{B_1 \times \cdots \times B_N : B_1 \in \mathcal{B}_{\sigma(T_1)}, \cdots, B_N \in \mathcal{B}_{\sigma(T_N)}\}$$

によって生成されることと命題 5.65 と単調族定理 5.70 による． □

定義 12.138 (結合スペクトル測度とそれによる積分の定義)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $T := (T_1, \cdots, T_N)$ を互いに強可換な自己共役作用素の組とし, T_j のスペクトル測度 (定義 10.63) を $E_{\sigma(T_j)} : \mathcal{B}_{\sigma(T_j)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ $(j = 1, \cdots, N)$ とおく. 定理 12.137 より, 射影値測度

$$E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T_1)\times\cdots\times\sigma(T_N)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

で,

$$E_T(B_1 \times \cdots \times B_N) = E_{T_1}(B_1)\cdots E_{T_N}(B_N) \quad (\forall B_1 \in \mathcal{B}_{\sigma(T_1)}, \cdots, B_N \in \mathcal{B}_{\sigma(T_N)})$$

を満たすものが唯一つ存在する. この E_T を強可換な自己共役作用素の組 $T = (T_1, \cdots, T_N)$ に付随する結合スペクトル測度と言う. そして任意の Borel 関数

$$f : \sigma(T_1) \times \cdots \times \sigma(T_N) \to \mathbb{C}$$

に対し,

$$f(T) := \int_{\sigma(T_1)\times\cdots\times\sigma(T_N)} f(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) dE_T(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$$

と定義する. 各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し,

$$\pi_j : \sigma(T_1) \times \cdots \times \sigma(T_N) \ni (\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \mapsto \lambda_j \in \sigma(T_j)$$

とおくと,

$$E_T(\pi_j^{-1}(B)) = E_{T_j}(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\sigma(T_j)})$$

であるから, 任意の Borel 関数 $f_j : \sigma(T_j) \to \mathbb{C}$ に対し, 単関数近似より,

$$f_j(T_j) = \int_{\sigma(T_j)} f_j(\lambda) dE_{T_j}(\lambda) = \int_{\sigma(T_1)\times\cdots\times\sigma(T_N)} f_j(\lambda_j) dE_T(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) = (f_j \circ \pi_j)(T)$$

が成り立つことが分かる. よって Borel 関数

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_N = (f_1 \circ \pi_1) \cdots (f_N \circ \pi_N) : \sigma(T_1) \times \cdots \times \sigma(T_N) \to \mathbb{C}$$

に対し, 命題 10.53 の (3) より,

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_N)(T) = \overline{f_1(T_1) \cdots f_N(T_N)}$$

が成り立つ. 特に,

$$e^{ixT} = e^{ix_1T_1} \cdots e^{ix_NT_N} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

である.

系 12.135 の自然な拡張として次の定理がある.

定理 12.139 ($\mathbb{R}^N$ のユニタリ表現と N 個の互いに強可換な自己共役作用素からなる組の一対一対応)**.** $\mathbb{R}^N$ の任意のユニタリ表現 π に対し, $\mathcal{H}_\pi$ 上の N 個の互いに強可換な自己共役作用素からなる組 $T = (T_1, \cdots, T_N)$ で,

$$\pi(x) = e^{ixT} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

(右辺については結合スペクトル測度による積分の定義 12.138 を参照) を満たすものが唯一つ存在する.

証明. SNAG の定理 12.134 と命題 12.127 の (1) より, 射影値測度 $E_\pi : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_\pi)$ で,

$$\pi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\lambda} dE_\pi(\lambda) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

を満たすものが唯一つ存在する. 各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し,

$$T_j := \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_j dE_\pi(\lambda)$$

とおくと, 被積分関数が実数値であるから T_j は自己共役作用素 (命題 10.53 の (2)) であり, 命題 10.66 より, 任意の Borel 関数 $f:\sigma(T_j)\to\mathbb{C}$ に対し,

$$f(T_j)=\int_{\mathbb{R}^N} f(\lambda_j)dE_\pi(\lambda)$$

が成り立つ. 特に,

$$e^{ixT_j}=\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\lambda_j}dE_\pi(\lambda)\quad(\forall x\in\mathbb{R})$$

が成り立つ. よって任意の $j,k\in\{1,\cdots,N\}$, 任意の $x_j,x_k\in\mathbb{R}$ に対し,

$$e^{ix_jT_j}e^{ix_kT_k}=\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix_j\lambda_j}e^{ix_k\lambda_k}dE_\pi(\lambda)=e^{ix_kT_k}e^{ix_jT_j}$$

であるから $T_1,\cdots,T_N$ は互いに強可換であり, $T=(T_1,\cdots,T_N)$ に対し,

$$e^{ixT}=e^{ix_1T_1}\cdots e^{ix_NT_N}=\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix_1\lambda_1}\cdots e^{ix_N\lambda_N}dE_\pi(\lambda)=\pi(x)\quad(\forall x\in\mathbb{R}^N)$$

である. これで存在が示せた. 一意性を示す. $T=(T_1,\cdots,T_N)$, $S=(S_1,\cdots,S_N)$ をそれぞれ互いに強可換な自己共役作用素の組とし,

$$e^{ixT}=\pi(x)=e^{ixS}\quad(\forall x\in\mathbb{R}^N)$$

が成り立つとする. このとき各 $j\in\{1,\cdots,N\}$ に対し,

$$e^{ixT_j}=e^{ixS_j}\quad(\forall x\in\mathbb{R})$$

であるから, 補題 10.213 より $T_j=S_j$ である. これで一意性が示せた. □

定義 12.140 (特性関数). G を局所コンパクト可換群, $\widehat{G}$ を G の双対群, $M(\widehat{G})$ を $\widehat{G}$ 上の測度群環 (定義 12.30) とする. 任意の $\nu\in M(\widehat{G})$ に対し,

$$\widehat{\nu}:G\to\mathbb{C},\quad \widehat{\nu}(x):=\int_{\widehat{G}}\langle x,\gamma\rangle d\nu(\gamma)\quad(\forall x\in G)$$

なる有界連続関数を定義する.[*231] これを $\nu\in M(\widehat{G})$ に対する特性関数と言う.

命題 12.141 (特性関数の基本性質). G を局所コンパクト可換群, $\widehat{G}$ を G の双対群とし,

$$M(\widehat{G})\ni\nu\mapsto\widehat{\nu}\in C_b(G)\tag{12.130}$$

を考える. このとき,

(1) (12.130) は $*$-環準同型写像である.
(2) (12.130) は単射である.

証明. (1) (12.130) が線型写像であることは明らかである. 任意の $\nu_1,\nu_2\in M(\widehat{G})$ に対し命題 12.31 の (12.33) より,

$$\begin{aligned}(\widehat{\nu_1*\nu_2})(x)&=\int_{\widehat{G}}\langle x,\gamma\rangle d(\nu_1*\nu_2)(\gamma)=\int_{\widehat{G}}\left(\int_{\widehat{G}}\langle x,\gamma_1\gamma_2\rangle d\nu_1(\gamma_1)\right)d\nu_2(\gamma_2)\\&=\int_{\widehat{G}}\left(\int_{\widehat{G}}\langle x,\gamma_1\rangle\langle x,\gamma_2\rangle d\nu_1(\gamma_1)\right)d\nu_2(\gamma_2)=\int_{\widehat{G}}\langle x,\gamma_1\rangle d\nu_1(\gamma_1)\int_{\widehat{G}}\langle x,\gamma_2\rangle d\nu_2(\gamma_2)\\&=\widehat{\nu_1}(x)\widehat{\nu_2}(x)\quad(\forall x\in G)\end{aligned}$$

であるから (12.130) は乗法を保存し, 任意の $\nu\in M(\widehat{G})$ に対し命題 12.31 の (12.34) より,

$$\widehat{\nu^*}(x)=\overline{\int_{\widehat{G}}\overline{\langle x,\gamma^{-1}\rangle}d\nu(\gamma)}=\overline{\int_{\widehat{G}}\langle x,\gamma\rangle d\nu(\gamma)}=\overline{\widehat{\nu}(x)}\quad(\forall x\in G)$$

であるから (12.130) は $*$-演算を保存する.

[*231] G は第二可算と仮定しているので第一可算である. Lebesgue 優収束定理より $\widehat{\nu}$ は G の収束する点列を $\mathbb{C}$ の収束する点列に写す. よって命題 1.60 より $\widehat{\nu}$ は連続である.

(2) $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度とし, $\mathcal{F} : C^*(G,\mu) \to C_0(\widehat{G})$ を Fourier 変換 (定義 12.129) とすると, 任意の $\nu \in M(\widehat{G})$ に対し, Fubini の定理 5.85 より,

$$\int_G f(x)\widehat{\nu}(x)d\mu(x) = \int_G f(x)\left(\int_{\widehat{G}}\langle x,\gamma\rangle d\nu(\gamma)\right)d\mu(x) = \int_{\widehat{G}}\left(\int_G f(x)\langle x,\gamma\rangle d\mu(x)\right)d\nu(\gamma)$$
$$= \int_{\widehat{G}}(\mathcal{F}[f])(\gamma)d\nu(\gamma) \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu)) \tag{12.131}$$

が成り立つ. 今, $\nu_1, \nu_2 \in M(\widehat{G})$ が $\widehat{\nu_1} = \widehat{\nu_2}$ を満たすとする. このとき (12.131) より,

$$\int_{\widehat{G}}(\mathcal{F}[f])(\gamma)d\nu_1(\gamma) = \int_{\widehat{G}}(\mathcal{F}[f])(\gamma)d\nu_2(\gamma) \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu)) \tag{12.132}$$

であり, 系 12.131 より $\mathcal{F}(L^1(G,\mu))$ は $C_0(\widehat{G})$ で稠密であるので,

$$\int_{\widehat{G}} h(\gamma)d\nu_1(\gamma) = \int_{\widehat{G}} h(\gamma)d\nu_2(\gamma) \quad (\forall h \in C_0(\widehat{G}))$$

である. よって Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.187 より $\nu_1 = \nu_2$ である. ゆえに (12.130) は単射である.

□

定理 12.142 (Bochner の定理)**.** G を局所コンパクト可換群, $\widehat{G}$ を G の双対群とし,

$$M_+(\widehat{G}) = \{\nu \in M(\widehat{G}) : \nu(B) \geqslant 0 \ (\forall B \in \mathcal{B}_{\widehat{G}})\}$$

とおき, $\mathcal{P}(G)$ を G 上の正定値関数 (定義 12.59) 全体とする. このとき,

$$M_+(\widehat{G}) \ni \nu \mapsto \widehat{\nu} \in \mathcal{P}(G)$$

は全単射であり, ノルムを保存する.

証明. $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度, $\mathcal{F} : C^*(G,\mu) \to C_0(\widehat{G})$ を Fourier 変換 (定義 12.129) とする. 任意の $\nu \in M_+(\widehat{G})$ に対し, 命題 12.141 の (12.131) より,

$$\int_G([f]^* * [f])(x)\widehat{\nu}(x)d\mu(x) = \int_{\widehat{G}}\mathcal{F}([f]^* * [f])(\gamma)d\nu(\gamma) = \int_{\widehat{G}}|(\mathcal{F}[f])(\gamma)|^2 d\nu(\gamma) \geqslant 0 \quad (\forall [f] \in L^1(G,\mu))$$

であるから $\widehat{\nu} \in \mathcal{P}(G)$ である. そして系 12.68 より,

$$\|\widehat{\nu}\| = \widehat{\nu}(1) = \int_{\widehat{G}}\langle 1,\gamma\rangle d\nu(\gamma) = \nu(\widehat{G}) = \|\nu\|$$

である. $M_+(\widehat{G}) \ni \nu \mapsto \widehat{\nu} \in \mathcal{P}(G)$ が単射であることは命題 12.141 の (2) による. 全射であることを示す. 任意の $p \in \mathcal{P}(G)\backslash\{0\}$ を取り, p に対する GNS 表現 (定義 12.67) を (π, v) とおく. π の $C^*(G,\mu)$ の表現への一意拡張 (定義 12.50 と注意 12.57 を参照) もそのまま $\pi : C^*(G,\mu) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ と表す. Fourier 変換 $\mathcal{F} : C^*(G,\mu) \to C_0(\widehat{G})$ は等長 $*$-環同型写像であるから,

$$C_0(\widehat{G}) \ni h \mapsto (\pi(\mathcal{F}^{-1}(h))v \mid v) \in \mathbb{C}$$

は非負値性を保存する有界線型汎関数である. よって Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.172, 5.187 より, $\nu \in M_+(\widehat{G})$ で,

$$(\pi(\mathcal{F}^{-1}(h))v \mid v) = \int_{\widehat{G}} h(\gamma)d\nu(\gamma) \quad (\forall h \in C_0(\widehat{G}))$$

を満たすものが定まる. 任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し Fubini の定理 5.85 より,

$$\int_G f(x)p(x)d\mu(x) = \int_G f(x)(\pi(x)v \mid v)d\mu(x) = (\pi([f])v \mid v) = \int_{\widehat{G}}(\mathcal{F}[f])(\gamma)d\nu(\gamma)$$
$$= \int_{\widehat{G}}\left(\int_G f(x)\langle x,\gamma\rangle d\mu(x)\right)d\nu(\gamma) = \int_G f(x)\left(\int_{\widehat{G}}\langle x,\gamma\rangle d\nu(\gamma)\right)d\mu(x)$$
$$= \int_G f(x)\widehat{\nu}(x)d\mu(x)$$

となるから, $L^\infty(G,\mu) = (L^1(G,\mu))^*$ (定理 5.135) より $p = \widehat{\nu}$ が成り立つ. よって $M_+(\widehat{G}) \ni \nu \mapsto \widehat{\nu} \in \mathcal{P}(G)$ は全射である. □

定理 12.143 (確率測度の収束と特性関数の収束)**.** G を局所コンパクト可換群, $\widehat{G}$ を G の双対群とし, $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\widehat{G}$ 上の確率 Borel 測度の列, ν を $\widehat{G}$ 上の確率 Borel 測度とする[*232]. このとき次は互いに同値である.

(1) $M(\widehat{G}) = C_0(\widehat{G})^*$ (Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.187) の弱 $*$-位相で $\lim_{n\to\infty} \nu_n = \nu$.
(2) コンパクト一様収束で $\lim_{n\to\infty} \widehat{\nu_n} = \widehat{\nu}$.
(3) 各点収束で $\lim_{n\to\infty} \widehat{\nu_n} = \widehat{\nu}$.

また (1), (2), (3) が成り立つとき, $\nu(\partial B) = 0$ を満たす任意の $B \in \mathcal{B}_{\widehat{G}}$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(B) = \nu(B)$$

が成り立つ (ただし $\partial B = \overline{B}\backslash B^\circ$).

証明. まず, Bochner の定理 12.142 より $\widehat{\nu_n} \in \mathcal{P}_1(G)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\widehat{\nu} \in \mathcal{P}_1(G)$[*233]である. $\mu : \mathcal{B}_G \to [0,\infty]$ を G の Haar 測度, $\mathcal{F} : C^*(G,\mu) \to C_0(\widehat{G})$ を Fourier 変換 (定義 12.129) とする.
(1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとすると, 命題 12.141 の (12.131) より, 任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し,

$$\int_G f(x)\widehat{\nu_n}(x)d\mu(x) = \int_{\widehat{G}} (\mathcal{F}[f])(\gamma)d\nu_n(\gamma) \to \int_{\widehat{G}} (\mathcal{F}[f])(\gamma)d\nu(\gamma) = \int_G f(x)\widehat{\nu}(x)d\mu(x)$$

が成り立つ. よって定理 12.72 より (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (3) は自明である. (3) $\Rightarrow$ (1) を示す. (3) が成り立つとすると, 命題 12.141 の (12.131) と Lebesgue 優収束定理より任意の $[f] \in L^1(G,\mu)$ に対し,

$$\int_{\widehat{G}} (\mathcal{F}[f])(\gamma)d\nu_n(\gamma) = \int_G f(x)\widehat{\nu_n}(x)d\mu(x) \to \int_G f(x)\widehat{\nu}(x)d\mu(x) = \int_{\widehat{G}} (\mathcal{F}[f])(\gamma)d\nu_(\gamma)$$

が成り立つ. このことと $\mathcal{F}(L^1(G,\mu))$ が $C_0(\widehat{G})$ で稠密であること (系 12.131), 各 $\nu_n, \nu \in M(\widehat{G}) = C_0(\widehat{G})^*$ のノルムが 1 であることから, 任意の $h \in C_0(\widehat{G})$ に対し,

$$\int_{\widehat{G}} h(\gamma)d\nu_n(\gamma) \to \int_{\widehat{G}} h(\gamma)d\nu(\gamma)$$

が成り立つ. よって (1) が成り立つ.
(1), (2), (3) が成り立つとする. 任意の開集合 $V \subseteq \widehat{G}$ を取る. $f \preceq V$ (定義 5.164) なる任意の $f \in C_{c,+}(\widehat{G})$ に対し (1) と $0 \leqslant f(\gamma) \leqslant \chi_V(\gamma)$ $(\forall \gamma \in \widehat{G})$ より,

$$\int_{\widehat{G}} f(\gamma)d\nu(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \int_{\widehat{G}} f(\gamma)d\nu_n(\gamma) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \int_{\widehat{G}} f(\gamma)d\nu_k(\gamma) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \nu_k(V)$$

である. よって命題 5.169 の (2) より,

$$\nu(V) = \sup\left\{\int_{\widehat{G}} f(\gamma)d\nu(\gamma) : f \preceq V\right\} \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \nu_k(V)$$

が成り立つ. また任意の閉集合 $F \subseteq \widehat{G}$ に対し,

$$1 - \nu(F) = \nu(\widehat{G}\backslash F) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \nu_k(\widehat{G}\backslash F) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} (1 - \nu_k(F)) = 1 - \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} \nu_k(F)$$

であるから,

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} \nu_k(F) \leqslant \nu(F)$$

[*232] $\widehat{G}$ は第二可算 (定理 12.123 の (4) を参照) であるから定理 5.177 より ν_n, ν は自動的に位相正則, すなわち $M(\widehat{G})$ の元である.
[*233] $\mathcal{P}_1(G)$ は G 上のノルムが 1 の正定値関数全体.

が成り立つ. 今, $B \in \mathcal{B}_{\widehat{G}}$ が $\nu(\partial B) = 0$ を満たすとする. $B \subseteq \overline{B} = B^\circ \cup \partial B$ であるから,

$$\nu(B) \leqslant \nu(\overline{B}) = \nu(B^\circ) + \nu(\partial B) = \nu(B^\circ) \leqslant \nu(B),$$

よって,

$$\nu(B) = \nu(\overline{B}) = \nu(B^\circ)$$

である. 開集合 B° と閉集合 $\overline{B}$ に対し上で示した不等式を適用し,

$$\begin{aligned}\nu(B) \leqslant \nu(B^\circ) &\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \nu_k(B^\circ) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \nu_k(B) \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} \nu_k(B) \\ &\leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} \nu_k(\overline{B}) \leqslant \nu(\overline{B}) = \nu(B)\end{aligned}$$

を得る. よって,

$$\nu(B) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \nu_k(B) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} \nu_k(B) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(B)$$

が成り立つ. □

命題 12.144. G を局所コンパクト可換群, $\widehat{G}$ を G の双対群とし, ν を $\widehat{G}$ 上の確率 Borel 測度とする. もし $x_0 \in G$ が $|\widehat{\nu}(x_0)| = 1$ を満たすならば, $\alpha \in \mathbb{T}$ で,

$$\int_B \langle x_0, \gamma\rangle d\nu(\gamma) = \alpha\nu(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\widehat{G}})$$

を満たすものが存在する.

証明. Bochner の定理 12.142 より $\widehat{\nu} \in \mathcal{P}_1(G)$ である. そこで $\widehat{\nu} \in \mathcal{P}_1(G)$ に対する GNS 表現 (定義 12.67) を (π, v) とおく. 仮定より,

$$|(\pi(x_0)v \mid v)| = |\widehat{\nu}(x_0)| = 1 = \widehat{\nu}(1) = \|v\|^2 = \|\pi(x_0)v\|\|v\|$$

であるから, ある $\alpha \in \mathbb{T}$ に対し,

$$\pi(x_0)v = \alpha v$$

となる. G は可換であるから,

$$\pi(x_0)\pi(x)v = \pi(x_0x)v = \pi(xx_0)v = \pi(x)\pi(x_0)v = \alpha\pi(x)v \quad (\forall x \in G)$$

であり, v は π の巡回ベクトルであるから,

$$\pi(x_0) = \alpha 1$$

である. よって,

$$\int_{\widehat{G}} \langle x_0, \gamma\rangle\langle x, \gamma\rangle d\nu(\gamma) = (\pi(x_0)\pi(x)v \mid v) = \alpha(\pi(x)v \mid v) = \int_{\widehat{G}} \alpha\langle x, \gamma\rangle d\nu(\gamma)$$

であるから, 命題 12.141 の (2) より,

$$\int_B \langle x_0, \gamma\rangle d\nu(\gamma) = \alpha\nu(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\widehat{G}})$$

が成り立つ. □

12.6 離散群のユニタリ表現

これまで簡単のため, 局所コンパクト群は断ることなく第二可算公理を満たすとしてきた. 第二可算な離散群は可算であるが, 離散群に対しては可算性を仮定しなくてもこれまで示した結果がほとんど自明的に従う. 非可算離散群に関する結果 (定理 12.150 と定理 12.151) を後の節で使うところがある[*234]ので, 一応, まとめておく.

[*234] 補題 14.131 で用いる.

命題 12.145 (離散群の表現の基本性質)**.** G を可算とは限らない離散群とする.

(1) G の Haar 測度は数え上げ測度の正数倍である.

(2) Banach 空間 $\ell^1(G)$ は,

$$f * g := \sum_{y \in G} f(y) L_y g \in \ell^1(G), \quad f^*(x) := \overline{f(x^{-1})} \quad (\forall x \in G, \forall f, g \in \ell^1(G))$$

を乗法と $*$-演算として Banach $*$-環である (命題 12.26 に相当). また任意の $x \in G$ に対し $\delta_x \in \ell^1(G)$ を,

$$\delta_x(y) := \begin{cases} 1 & (y = x) \\ 0 & (y \neq x) \end{cases}$$

とおくと,

$$\delta_x * f = L_x f, \quad f * \delta_x = R_{x^{-1}} f \quad (\forall x \in G, \forall f \in \ell^1(G))$$

であり, G の単位元 $1 \in G$ に対し $\delta_1 \in \ell^1(G)$ は $\ell^1(G)$ の単位元である.

(3) $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ を G のユニタリ表現[*235]とする. 任意の $f \in \ell^1(G)$ に対し $\pi(f) \in B(\mathcal{H}_\pi)$ を,

$$\pi(f)v := \sum_{x \in G} f(x)\pi(x)v \in \mathcal{H}_\pi \quad (\forall v \in \mathcal{H}_\pi)$$

として定義すると,

$$\ell^1(G) \ni f \mapsto \pi(f) \in B(\mathcal{H}_\pi)$$

は単位的 (単位元を単位元に写す)$*$-環準同型写像である (命題 12.48 に相当).

(4) 与えられた Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と単位的 $*$-環準同型写像 $\rho : \ell^1(G) \to B(\mathcal{H})$ に対し G の $\mathcal{H}$ 上へのユニタリ表現 π で,

$$\pi(f) = \rho(f) \quad (\forall f \in \ell^1(G))$$

を満たすものが唯一つ存在し, それは,

$$\pi(x) = \rho(\delta_x) \quad (\forall x \in G)$$

である (命題 12.49 に相当).

(5) G 上の正定値関数全体 $\mathcal{P}(G)$ と $\ell^1(G)$ 上の有界非負線型汎関数全体 $\ell^1(G)^*_+$ に対し,

$$\mathcal{P}(G) \ni p \mapsto \Phi_p \in \ell^1(G)^*_+$$

[*236]は全単射である. また任意の $p \in \mathcal{P}(G)\backslash\{0\}$ に対し G の巡回ベクトル付きユニタリ表現 (π, v) で,

$$p(x) = (\pi(x)v \mid v) \quad (\forall x \in G)$$

を満たすもの (p に対する GNS 表現) が存在する (定理 12.66 に相当).

(6) 任意の $p \in \mathcal{P}(G)$ に対し $\|p\| = p(1) = \Phi_p(\delta_1) = \|\Phi_p\|$ が成り立つ (系 12.68 に相当). よって $\mathcal{P}(G)$ のノルム 1 の元全体

$$\mathcal{P}_1(G) = \{p \in \mathcal{P}(G) : \|p\| = 1\} = \{p \in \mathcal{P}(G) : p(1) = 1\}$$

は凸集合である.

(7) $p \in \mathcal{P}_1(G)$ に対する GNS 表現を (π, v) とおくと, $p \in \mathrm{ext}_1(\mathcal{P}_1(G))$ (凸集合 $\mathcal{P}_1(G)$ の端点) であることと π が既約であることは同値である (定理 12.70 に相当).

[*235] G から Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\pi$ 上のユニタリ作用素全体のなす群への群準同型写像.

[*236] 有界関数 $p : G \to \mathbb{C}$ に対し $\Phi_p(f) = \sum_{x \in G} f(x)p(x) \in \mathbb{C}$ $(\forall f \in \ell^1(G))$ であり, 有界関数 $p : G \to \mathbb{C}$ が正定値関数であるとは任意の $f \in \ell^1(G)$ に対し $\Phi_p(f^* * f) \geqslant 0$ が成り立つことである.

(8)
$$\mathcal{P}_1(G) \ni p \mapsto \Phi_p \in \{\Phi \in \ell^1(G)^*_+ : \|\Phi\| = 1\} \tag{12.133}$$
は各点収束位相 (コンパクト一様収束位相 (定義 12.71) のこと*237) と弱 $*$-位相に関して同相写像である (定理 12.72 に相当).

(9) 台が有限集合である G 上の複素数値関数全体 $c_c(G)$ に対し,
$$c_c(G) = \mathrm{span}(c_c(G) \cap \mathcal{P}(G))$$
が成り立つ.

(10) 凸集合 $\mathcal{P}_1(G)$ において, その端点全体の凸包 $\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(\mathcal{P}_1(G)))$ は各点収束位相で稠密である (定理 12.73 に相当).

(11) $x \neq y$ なる任意の $x, y \in G$ に対し, G の既約なユニタリ表現 π で $\pi(x) \neq \pi(y)$ なるものが存在する (Gelfand-Raikov の定理 12.74 に相当).

証明.　(1) 命題 12.9 で G の可算性は用いてないことに注意すればよい.

(2) 任意の $f, g \in \ell^1(G)$ に対し,
$$\|f * g\|_1 \leqslant \sum_{y \in G} \|f(y) L_y g\|_1 = \sum_{y \in G} |f(y)| \|g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1,$$
$$\|f^*\|_1 = \sum_{x \in G} |\overline{f(x^{-1})}| = \sum_{x \in G} |f(x)| = \|f\|_1$$
である. 任意の $x \in G$ に対し $\ell^1(G) \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ は有界線型汎関数であるから, 任意の $f, g \in \ell^1(G)$ に対し,
$$(f * g)(x) = \left(\sum_{y \in G} f(y) L_y g\right)(x) = \sum_{y \in G} f(y) L_y g(x) = \sum_{y \in G} f(y) g(y^{-1}x) \quad (\forall x \in G)$$
である. これより任意の $f, g \in \ell^1(G)$ に対し,
$$\begin{aligned}(f * g)^*(x) &= \overline{(f * g)(x^{-1})} = \sum_{y \in G} \overline{f(y) g(y^{-1}x^{-1})} = \sum_{y \in G} f^*(y^{-1}) g^*(xy) \\ &= \sum_{y \in G} g^*(y) f^*(y^{-1}x) = (g^* * f^*)(x) \quad (\forall x \in G)\end{aligned}$$
であるから $(f * g)^* = g^* * f^*$ である. また任意の $h \in \ell^1(G)$ に対し $\ell^1(G) \ni f \mapsto f * h \in \ell^1(G)$ は有界線型作用素であるから,
$$\begin{aligned}(f * g) * h &= \left(\sum_{y \in G} f(y) L_y g\right) * h = \sum_{y \in G} f(y)((L_y g) * h) \\ &= \sum_{y \in G} f(y) L_y (g * h) = f * (g * h) \quad (\forall f, g, h \in \ell^1(G))\end{aligned}$$
である. よって $\ell^1(G)$ は Banach $*$-環である. 任意の $f \in \ell^1(G), x, y \in G$ に対し,
$$(\delta_x * f)(y) = \sum_{z \in G} \delta_x(z) f(z^{-1}y) = f(x^{-1}y) = L_x f(y),$$
$$(f * \delta_x)(y) = \sum_{z \in G} f(z) \delta_x(z^{-1}y) = f(yx^{-1}) = R_{x^{-1}} f(y)$$
であり, 特に $\delta_1 * f = f = f * \delta_1$ である. よって δ_1 は $\ell^1(G)$ の単位元である.

*237 離散位相ではコンパクトであることと有限集合であることが同値であることに注意.

(3)

$$\pi(x)\pi(f)v = \sum_{y\in G} f(y)\pi(x)\pi(y)v = \sum_{y\in G} f(y)\pi(xy)v = \sum_{y\in G} f(x^{-1}y)\pi(y)v$$
$$= \pi(L_x f)v \quad (\forall x \in G, \forall f \in \ell^1(G), \forall v \in \mathcal{H}_\pi)$$

であることと, 任意の $v \in \mathcal{H}_\pi$ に対し, $\ell^1(G) \ni f \mapsto \pi(f)v \in \mathcal{H}_\pi$ が有界線型作用素であることから,

$$\pi(f * g)v = \pi\left(\sum_{x\in G} f(x)L_x g\right)v = \sum_{x\in G} f(x)\pi(L_x g)v = \sum_{x\in G} f(x)\pi(x)\pi(g)v$$
$$= \pi(f)\pi(g)v \quad (\forall f, g \in \ell^1(G), \forall v \in \mathcal{H}_\pi).$$

よって $\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g)$ $(\forall f, g \in \ell^1(G))$ である. また,

$$\begin{aligned}(\pi(f^*)u \mid v) &= \sum_{x\in G} f^*(x)(\pi(x)u \mid v) = \sum_{x\in G} \overline{f(x^{-1})}(\pi(x)u \mid v) \\ &= \sum_{x\in G} \overline{f(x)}(\pi(x^{-1})u \mid v) = \sum_{x\in G} (u \mid f(x)\pi(x)v) \\ &= (u \mid \pi(f)v) = (\pi(f)^* u \mid v) \quad (\forall f \in \ell^1(G), \forall u, v \in \mathcal{H}_\pi)\end{aligned}$$

であるから $\pi(f^*) = \pi(f)^*$ $(\forall f \in \ell^1(G))$ である. そして,

$$\pi(\delta_1)v = \sum_{x\in G} \delta_1(x)\pi(x)v = v \quad (\forall v \in \mathcal{H}_\pi)$$

であるから $\pi(\delta_1) = 1$ である. よって $\ell^1(G) \ni f \mapsto \pi(f) \in B(\mathcal{H}_\pi)$ は単位的な $*$-環準同型写像である.

(4)

$$\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}, \quad (\delta_x)^* = \delta_{x^{-1}} \quad (\forall x, y \in G)$$

であることと $\rho : \ell^1(G) \to B(\mathcal{H})$ が単位的な $*$-環準同型写像であることから,

$$\pi(x) := \rho(\delta_x) \quad (\forall x \in G)$$

によって G の $\mathcal{H}$ 上へのユニタリ表現 $\pi : G \ni x \mapsto \pi(x) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ が定まる. そして任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し $\ell^1(G) \ni f \mapsto \rho(f)v \in \mathcal{H}$ が有界線型作用素であることから,

$$\pi(f)v = \sum_{x\in G} f(x)\pi(x)v = \sum_{x\in G} f(x)\rho(\delta_x)v = \rho\left(\sum_{x\in G} f(x)\delta_x\right)v = \rho(f)v \quad (\forall f \in \ell^1(G), \forall v \in \mathcal{H})$$

なので $\pi(f) = \rho(f)$ $(\forall f \in \ell^1(G))$ である. よって存在が示せた. G のユニタリ表現 $\pi_1, \pi_2 : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ が $\pi_1(f) = \rho(f) = \pi_2(f)$ $(\forall f \in \ell^1(G))$ を満たすならば,

$$\rho(\delta_x)v = \pi_j(\delta_x)v = \sum_{y\in G} \delta_x(y)\pi_j(y)v = \pi_j(x)v \quad (\forall x \in G, \forall v \in \mathcal{H}, j = 1, 2)$$

なので $\pi_1(x) = \rho(\delta_x) = \pi_2(x)$ $(\forall x \in G)$ である. よって一意性が示せた.

(5) $p_1, p_2 \in \mathcal{P}(G)$ が $\Phi_{p_1} = \Phi_{p_2}$ を満たすならば,

$$p_1(x) = \Phi_{p_1}(\delta_x) = \Phi_{p_2}(\delta_x) = p_2(x) \quad (\forall x \in G)$$

であるから $\mathcal{P}(G) \ni p \mapsto \Phi_p \in \ell^1(G)^*_+$ は単射である. 任意の $\Phi \in \ell^1(G)^*_+ \backslash \{0\}$ に対し, 定理 12.66 の証明と全く同様にして G の巡回ベクトル付きユニタリ表現 (π, v) で,

$$\Phi(f) = (\pi(f)v \mid v) = \sum_{x\in G} f(x)(\pi(x)v \mid v) \quad (\forall f \in \ell^1(G))$$

を満たすものが存在することが分かる. そこで $p(x) := (\pi(x)v \mid v)$ $(\forall x \in G)$ とおけば $p \in \mathcal{P}(G)$, $\Phi = \Phi_p$ である.

(6) $p \in \mathcal{P}(G)\backslash\{0\}$ に対する GNS 表現 (π, v) を取ると,

$$p(x) = (\pi(x)v \mid v) \ \ (\forall x \in G), \ \ \Phi_p(f) = (\pi(f)v \mid v) \ \ (\forall f \in \ell^1(G))$$

であるから,

$$\|p\| = \sup_{x \in G} |(\pi(x)v \mid v)| \leqslant \|v\|^2 = p(1) \leqslant \|v\|^2$$

であり,

$$\|\Phi_p\| = \sup_{\|f\|_1 \leqslant 1} |(\pi(f)v \mid v)| \leqslant \|v\|^2 = \Phi_p(\delta_1) \leqslant \|\Phi_p\|$$

である.

(7) 定理 12.70 の証明と全く同様にして示せる.

(8) $\mathcal{P}_1(G) \ni p \mapsto \Phi_p \in \{\Phi \in \ell^1(G)^*_+ : \|\Phi\| = 1\}$ が全単射であることは (5), (6) による. $\mathcal{P}_1(G)$ のネット $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と $p \in \mathcal{P}_1(G)$ を取る. もし各点収束位相で $p_\lambda \to p$ ならば任意の $f \in c_c(G)$ (台が有限集合の関数) に対し,

$$\Phi_{p_\lambda}(f) = \sum_{x \in \mathrm{supp}(f)} f(x)p_\lambda(x) \to \sum_{x \in \mathrm{supp}(f)} f(x)p(x) = \Phi_p(f)$$

である. そして $\ell^1(G)$ において $c_c(G)$ は稠密であり, $\|\Phi_{p_\lambda}\| = 1 \ (\forall \lambda \in \Lambda)$, $\|\Phi_p\| = 1$ なので,

$$\Phi_{p_\lambda}(f) \to \Phi_p(f) \ \ (\forall f \in \ell^1(G))$$

が成り立つ. ゆえに $\ell^1(G)^*$ の弱 $*$-位相で $\Phi_{p_\lambda} \to \Phi_p$ が成り立つから命題 1.50 より (12.134) は連続である. 逆に $\mathcal{P}_1(G)$ のネット $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と $p \in \mathcal{P}_1(G)$ に対し弱 $*$-位相で $\Phi_{p_\lambda} \to \Phi_p$ が成り立つならば, 任意の $x \in G$ に対し,

$$p_\lambda(x) = \Phi_{p_\lambda}(\delta_x) \to \Phi_p(\delta_x) = p(x)$$

であるから各点収束位相で $p_\lambda \to p$ が成り立つ. よって命題 1.50 より 12.134 の逆写像も連続である.

(9) 任意の $f, g \in \ell^1(G)$ を取る. $x \in \mathrm{supp}(f * g)$ ならば,

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in G} f(y)g(y^{-1}x) \neq 0$$

であるから $\mathrm{supp}(f)$ と $G \ni y \mapsto g(y^{-1}x) \in \mathbb{C}$ の台 $x\,\mathrm{supp}(g)^{-1}$ は交わるので, $x \in \mathrm{supp}(f)\,\mathrm{supp}(g)$ である. よって $\mathrm{supp}(f * g) \subseteq \mathrm{supp}(f)\,\mathrm{supp}(g)$ であるから,

$$f * g \in c_c(G) \ \ (\forall f, g \in c_c(G))$$

が成り立つ. 今, G の Hilbert 空間 $\ell^2(G)$ 上への正則表現

$$\pi : G \to \mathcal{U}(\ell^2(G)), \ \ \pi(x) : \ell^2(G) \ni f \mapsto L_x f \in \ell^2(G)$$

を考える. 任意の $f \in c_c(G)$ に対し $f_{-1} \in c_c(G)$ を $f_{-1}(x) := f(x^{-1}) \ (\forall x \in G)$ として定義すると,

$$(\overline{f} * f_{-1})(x) = \sum_{y \in G} \overline{f(y)} f_{-1}(y^{-1}x) = \sum_{y \in G} f(x^{-1}y)\overline{f(y)} = (\pi(x)f \mid f) \ \ (\forall x \in G)$$

であるから, $\overline{f} * f_{-1} \in c_c(G) \cap \mathcal{P}(G)$ である.

$$c_c(G) \times c_c(G) \ni (f, g) \mapsto \overline{g} * f_{-1} \in c_c(G)$$

は準双線型写像であるから, 偏極恒等式 10.4 より,

$$\overline{g} * f_{-1} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \overline{(f + i^k g)} * (f + i^k g)_{-1} \in \mathrm{span}(c_c(G) \cap \mathcal{P}(G)) \ \ (\forall f, g \in c_c(G))$$

である. よって,

$$f = \delta_1 * f = \overline{\delta_1} * (f_{-1})_{-1} \in \mathrm{span}(c_c(G) \cap \mathcal{P}(G)) \ \ (\forall f \in c_c(G))$$

であるから, $c_c(G) = \mathrm{span}(c_c(G) \cap \mathcal{P}(G))$ である.

(10) $\ell^1(G)$ 上の有界非負線型汎関数全体は (6) より,

$$S(\ell^1(G)) = \{\Phi \in \ell^1(G)^*_+ : \Phi(\delta_1) = 1\}$$

だから弱 $*$-閉凸集合であり, Banach-Alaoglu の定理 3.67 より $S(\ell^1(G))$ は弱 $*$-コンパクトな凸集合である. よって Krein-Milman の端点定理 3.84 より,

$$S(\ell^1(G)) = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(S(\ell^1(G))))}^{w^*\text{-topology}}$$

である. よって (8) より $\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(\mathcal{P}_1(G)))$ は $\mathcal{P}_1(G)$ において各点収束位相で稠密である.

(11) $x \neq y$ なる $x, y \in G$ に対し $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ を満たす $\varphi \in c_c(G)$ が取れるので (9) より $p(x) \neq p(y)$ なる $p \in \mathcal{P}_1(G)$ が取れる. よって (10) より $p(x) \neq p(y)$ なる $p \in \mathrm{ext}(\mathcal{P}_1(G))$ が取れる. ゆえに (7) より G の既約なユニタリ表現 π で $\pi(x) \neq \pi(y)$ なるものが取れる.

□

定理 12.146 (離散可換群の表現の基本性質)**.** G を可算とは限らない離散可換群とし, $\widehat{G}$ を G の指標群[*238]とする.

(1) G のユニタリ表現が既約であることと 1 次元であることは同値である.
(2) $\widehat{G} = \mathrm{ext}(\mathcal{P}_1(G))$ が成り立つ.
(3) 任意の $\gamma \in \widehat{G}$ に対し $\Phi_\gamma : \ell^1(G) \to \mathbb{C}$ を,

$$\Phi_\gamma(f) := \sum_{x \in G} f(x)\gamma(x) \in \mathbb{C} \quad (\forall f \in \ell^1(G))$$

とおけば $\Phi_\gamma \in \widehat{\ell^1(G)}$[*239]であり,

$$\widehat{G} \ni \gamma \mapsto \Phi_\gamma \in \widehat{\ell^1(G)} \tag{12.134}$$

は各点収束位相と弱 $*$-位相で同相写像である.

(4) 任意の $\gamma \in \widehat{G}$ に対し (2) における $\Phi_\gamma \in \widehat{\ell^1(G)}$ は群 C^*-環 $C^*(G)$[*240]の指標 $\widetilde{\Phi_\gamma} \in \widehat{C^*(G)}$ に一意拡張でき,

$$\widehat{G} \ni \gamma \mapsto \widetilde{\Phi_\gamma} \in \widehat{C^*(G)}$$

は各点収束位相と弱 $*$-位相で同相写像である.

(5) $\widehat{G}$ は各点収束位相によりコンパクト可換群である.

証明. (1) 命題 12.121 と全く同様にして示せる.

(2) 定理 12.123 の (1) と全く同様にして示せる (命題 12.145 における対応するものを用いる).
(3) 定理 12.123 の (2) と全く同様にして示せる (命題 12.145 における対応するものを用いる).
(4) 定理 12.123 の (3) と全く同様にして示せる (命題 12.145 における対応するものを用いる).
(5) $\ell^1(G)$ は単位的可換 Banach 環であるからその指標空間 $\widehat{\ell^1(G)}$ は弱 $*$-位相でコンパクトである (定義 9.39 を参照). よって (2) より $\widehat{G}$ は各点収束位相でコンパクト群である.

□

定義 12.147 (離散可換群の双対群)**.** G を離散可換群とする. 定理 12.146 より G の指標群 $\widehat{G}$ は各点収束位相によりコンパクト可換群である. コンパクト可換群 H で $\widehat{G}$ と同相かつ群同型であるものを G の双対群と言う. そして H と $\widehat{G}$ の群同型同相写像は, 標準的に,

$$H \ni \gamma \mapsto \langle \cdot, \gamma \rangle \in \widehat{G}$$

によって表す. さらに以後, G の双対群は指標群と同じ記号 $\widehat{G}$ で表す.

[*238] G から $\mathbb{T}$ への群準同型写像全体に各点ごとの演算を入れた群.
[*239] $\widehat{\ell^1(G)}$ は単位的可換 Banach 環 $\ell^1(G)$ の指標空間.
[*240] 定義 12.53 を参照.

定理 12.148 (離散可換群の Fourier 変換)**.** G を可算とは限らない離散可換群とし, $\widehat{G}$ を G の双対群, $C^*(G)$ を G の群 C^*-環 (定義 12.53) とする. このとき等長 $*$-環同型写像

$$\mathcal{F} : C^*(G) \to C(\widehat{G})$$

で,

$$\mathcal{F}f(\gamma) = \sum_{x \in G} f(x)\langle x, \gamma\rangle \quad (\forall f \in \ell^1(G), \forall \gamma \in \widehat{G})$$

を満たすものが唯一つ存在する.

証明. 定理 9.43 より単位的可換 C^*-環 $C^*(G)$ の Gelfand 変換

$$\Gamma : C^*(G) \to C(\widehat{C^*(G)})$$

は等長 $*$-環同型写像である. また定理 12.146 の (4) より,

$$\tau : \widehat{G} \ni \gamma \mapsto \widetilde{\Phi_\gamma} \in \widehat{C^*(G)}$$

は同相写像であるから,

$$\mathcal{T} : C(\widehat{C^*(G)}) \ni h \mapsto h \circ \tau \in C(\widehat{G})$$

は等長 $*$-環同型写像である. よって合成写像

$$\mathcal{F} := \mathcal{T} \circ \Gamma : C^*(G) \to C(\widehat{G})$$

は等長 $*$-環同型写像であり, 任意の $f \in \ell^1(G) \subseteq C^*(G), \gamma \in \widehat{G}$ に対し,

$$\mathcal{F}f(\gamma) = \mathcal{T}(\Gamma f)(\gamma) = \Gamma f(\tau(\gamma)) = \Gamma f(\widetilde{\Phi_\gamma}) = \Phi_\gamma(f) = \sum_{x \in G} f(x)\langle x, \gamma\rangle$$

である. よって存在が示せた. 一意性は $C^*(G)$ における $\ell^1(G)$ の稠密性による. □

定義 12.149. 定理 12.148 における等長 $*$-環同型写像 $\mathcal{F} : C^*(G) \to C(\widehat{G})$ を離散可換群 G の Fourier 変換と言う.

定理 12.150 (離散可換群の Fourier 変換に関する Plancherel の定理)**.** G を可算とは限らない離散可換群, $\widehat{G}$ を G の双対群とする. そしてコンパクト群 $\widehat{G}$ の Haar 測度を $\mu : \mathcal{B}_{\widehat{G}} \to [0, 1]$ $(\mu(\widehat{G}) = 1)$ とする[*241] このとき,

(1) 任意の $x \in G$ に対し,

$$\int_{\widehat{G}} \langle x, \gamma\rangle d\mu(\gamma) = \delta_1(x) = \begin{cases} 1 & (x = 1) \\ 0 & (x \neq 1) \end{cases} \tag{12.135}$$

が成り立つ.

(2) G の Fourier 変換 $\mathcal{F} : \ell^1(G) \to C(\widehat{G})$ は Hilbert 空間 $\ell^2(G)$ から Hilbert 空間 $L^2(\widehat{G}, \mu)$ へのユニタリ作用素に一意拡張できる.

証明. (1) 任意の $x \in G \backslash \{1\}$ に対し, Gelfand-Raikov の定理 (命題 12.145 の (11)) と定理 12.146 の (1) より $\langle x, \gamma_0\rangle \neq 1$ を満たす $\gamma_0 \in \widehat{G}$ が取れる. μ は Haar 測度であるから,

$$\langle x, \gamma_0\rangle \int_{\widehat{G}} \langle x, \gamma\rangle d\mu(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \gamma_0\gamma\rangle d\mu(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \gamma\rangle d\mu(x)$$

なので, $\langle x, \gamma_0\rangle \neq 1$ より,

$$\int_{\widehat{G}} \langle x, \gamma\rangle d\mu(\gamma) = 0$$

である. ゆえに (12.135) が成り立つ.

[*241] Haar 測度の存在定理 12.14 と Haar 測度の一意性定理 12.15 の証明で局所コンパクト群の第二可算性は用いていないことに注意.

(2) (1) より任意の $f, g \in c_c(G)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}f \mid \mathcal{F}g)_2 &= \int_{\widehat{G}} \mathcal{F}f(\gamma)\overline{\mathcal{F}g(\gamma)}d\mu(\gamma) = \sum_{\substack{x\in\mathrm{supp}(f),\\ y\in\mathrm{supp}(g)}} f(x)\overline{g(y)} \int_{\widehat{G}} \langle x,\gamma\rangle\overline{\langle y,\gamma\rangle}d\mu(\gamma) \\
&= \sum_{\substack{x\in\mathrm{supp}(f),\\ y\in\mathrm{supp}(g)}} f(x)\overline{g(y)} \int_{\widehat{G}} \langle xy^{-1},\gamma\rangle d\mu(\gamma) = \sum_{\substack{x\in\mathrm{supp}(f),\\ y\in\mathrm{supp}(g)}} f(x)\overline{g(y)}\delta_1(xy^{-1}) \\
&= \sum_{x\in\mathrm{supp}(f)} f(x)\overline{g(x)} = \sum_{x\in G} f(x)\overline{g(x)} = (f \mid g)_2
\end{aligned}
$$

であるから, $\mathcal{F} : c_c(G) \to L^2(\widehat{G}, \mu)$ は内積を保存する. $C^*(G)$ において $\ell^1(G)$ は稠密であり, $\ell^1(G)$ において $c_c(G)$ は稠密であるので $C^*(G)$ において $c_c(G)$ は稠密である.[*242] よって $\mathcal{F} : C^*(G) \to C(\widehat{G})$ の等長同型性より $\mathcal{F}(c_c(G))$ は $C_c(\widehat{G})$ で稠密である. また $C(\widehat{G})$ は $L^2(\widehat{G}, \mu)$ において稠密 (定理 5.179) であるから $\mathcal{F}(c_c(G))$ は $L^2(\widehat{G}, \mu)$ においても稠密である.[*243] ゆえに $\mathcal{F} : c_c(G) \to L^2(\widehat{G}, \mu)$ の $\ell^2(G) = \overline{c_c(G)}^{\|\cdot\|_2}$ 上への一意拡張 (命題 3.19) は内積を保存する全射線型写像なのでユニタリ作用素である.

□

定理 12.151. G を可算とは限らない離散可換群, $\widehat{G}$ を G の双対群, $H \subseteq \widehat{G}$ を $\widehat{G}$ の閉部分群とする. もし任意の $x \in G\backslash\{1\}$ に対し $\gamma(x) \neq 1$ なる $\gamma \in H$ が存在するならば, $H = \widehat{G}$ が成り立つ.

証明. コンパクト群 $\widehat{G}$ の Haar 測度を $\mu : \mathcal{B}_{\widehat{G}} \to [0, 1]$ ($\mu(\widehat{G}) = 1$) とおき, コンパクト群 H の Haar 測度を $\mu_H : \mathcal{B}_H \to [0, 1]$ ($\mu_H(H) = 1$) とおく. 仮定より任意の $x \in G\backslash\{1\}$ に対し $\langle x, \gamma_0\rangle \neq 1$ なる $\gamma_0 \in H$ が取れる. μ_H は Haar 測度であるから,

$$
\langle x, \gamma_0\rangle \int_H \langle x,\gamma\rangle d\mu_H(\gamma) = \int_H \langle x,\gamma_0\gamma\rangle d\mu_H(\gamma) = \int_H \langle x,\gamma\rangle d\mu_H(\gamma)
$$

である. よって $\langle x, \gamma_0\rangle \neq 1$, $\mu_H(H) = 1$ より,

$$
\int_H \langle x,\gamma\rangle d\mu_H(\gamma) = \delta_1(x) = \begin{cases} 1 & (x = 1) \\ 0 & (x \neq 1) \end{cases} \quad (\forall x \in G)
$$

であるから, 定理 12.150 の (1) より,

$$
\int_{\widehat{G}} \langle x,\gamma\rangle d\mu(\gamma) = \delta_1(x) = \int_H \langle x,\gamma\rangle d\mu_H(\gamma) \quad (\forall x \in G)
$$

が成り立つ. ゆえに任意の $f \in \ell^1(G)$ に対し,

$$
\int_{\widehat{G}} \mathcal{F}f(\gamma)d\mu(\gamma) = \sum_{x\in G} f(x) \int_{\widehat{G}} \langle x,\gamma\rangle d\mu(\gamma) = \sum_{x\in G} f(x) \int_H \langle x,\gamma\rangle d\mu_H(\gamma) = \int_H \mathcal{F}f(\gamma)d\mu_H(\gamma)
$$

であるから, $C(\widehat{G}) = \mathcal{F}(C^*(G)) = \overline{\mathcal{F}(\ell^1(G))}$ より,

$$
\int_{\widehat{G}} h(\gamma)d\mu(\gamma) = \int_H h(\gamma)d\mu_H(\gamma) \quad (\forall h \in C(\widehat{G}))
$$

が成り立つ. これより $H \preceq h$ (定義 5.164) なる任意の $h \in C_+(\widehat{G})$ に対し,

$$
1 = \int_H 1 d\mu_H(\gamma) = \int_H h(\gamma)d\mu_H(\gamma) = \int_{\widehat{G}} h(\gamma)d\mu(\gamma)
$$

であるから, 位相正則測度の性質 (命題 5.169 の (2)) より,

$$
\mu(H) = \inf\left\{\int_{\widehat{G}} h(\gamma)d\mu(\gamma) : H \preceq h\right\} = 1 = \mu(\widehat{G})
$$

となる. よって $\mu(\widehat{G}\backslash H) = 0$ が成り立つ. $\widehat{G}\backslash H$ は $\widehat{G}$ の開集合であり, 空でない開集合の Haar 測度は正である (命題 12.8) ので $\widehat{G}\backslash H = \varnothing$ である. ゆえに $H = \widehat{G}$ である. □

[*242] 群 C^* 環のノルム $\|\cdot\|_*$ は $\|f\|_* \leqslant \|f\|_1$ ($\forall f \in \ell^1(G)$) を満たすことに注意 (定義 12.53 を参照).

[*243] $\mu(\widehat{G}) = 1$ より $\|h\|_2 \leqslant \|h\|$ ($\forall h \in C(\widehat{G})$) であることに注意.

12.7 線型 Lie 群とそれに付随する Lie 代数, 指数写像定理

命題 12.152 (対数の主値関数に対する正則関数カルキュラス)**.** $\mathrm{Log}:\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]\to\mathbb{C}$ を対数の主値関数 (定義 4.49) とし, $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とする. このとき $\|A-1\|<1$ なる任意の $A\in\mathcal{A}$ に対し, 正則関数カルキュラス (定義 9.17) $\mathrm{Log}(A)\in\mathcal{A}$ が定義でき,

$$\mathrm{Log}(A)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(A-1)^n$$

が成り立つ.

証明. $\|A-1\|<1$ と命題 9.10 より,

$$\sigma(A)\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-1|<1\}\subseteq\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$$

[*244]であるから, 正則関数カルキュラス $\mathrm{Log}(A)\in\mathcal{A}$ が定義できる. 定理 7.15 より,

$$\mathrm{Log}(\lambda)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\lambda-1)^n\quad(\forall\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-1|<1)$$

であるから, 定理 9.20 より,

$$\mathrm{Log}(A)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(A-1)^n$$

が成り立つ. □

命題 12.153. $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とする. このとき,

(1) $A,B\in\mathcal{A}$ がある $r\in[0,\infty)$ に対し $\|A\|,\|B\|\leqslant r$ を満たすならば,

$$\|A^n-B^n\|\leqslant nr^{n-1}\|A-B\|\quad(\forall n\in\mathbb{Z}_+)$$

が成り立つ.

(2) $A,B\in\mathcal{A}$ がある $r\in[0,\infty)$ に対し $\|A\|,\|B\|\leqslant r$ を満たすならば,

$$\|\exp(A)-\exp(B)\|\leqslant e^r\|A-B\|$$

が成り立つ.

(3) $A,B\in\mathcal{A}$ がある $r\in[0,1)$ に対し $\|A-1\|,\|B-1\|\leqslant r$ を満たすならば,

$$\|\mathrm{Log}(A)-\mathrm{Log}(B)\|\leqslant\frac{1}{1-r}\|A-B\|$$

が成り立つ.

証明. (1) $n\in\mathbb{Z}_+$ に関する帰納法で示す. $n=0$ の場合は自明である. ある $n\in\mathbb{Z}_+$ に対して成り立つと仮定する.

$$A^{n+1}-B^{n+1}=A(A^n-B^n)+(A-B)B^n$$

であるから,

$$\begin{aligned}\|A^{n+1}-B^{n+1}\|&\leqslant\|A(A^n-B^n)\|+\|(A-B)B^n\|\leqslant\|A\|\|A^n-B^n\|+\|A-B\|\|B\|^n\\&\leqslant nr^{n-1}r\|A-B\|+r^n\|A-B\|=(n+1)r^n\|A-B\|.\end{aligned}$$

よって $n+1$ の場合も成り立つ.

[*244] $\sigma(A-1)=\{\lambda-1:\lambda\in\sigma(A)\}$ に注意.

(2) 命題 9.23 の (1) より $\exp(A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{A^n}{n!}$, $\exp(B) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{B^n}{n!}$ であるから, (1) より,

$$
\begin{aligned}
&\|\exp(A) - \exp(B)\| = \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}(A^n - B^n) \right\| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}\|A^n - B^n\| \\
&\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n-1)!} r^{n-1}\|A - B\| = e^r\|A - B\|.
\end{aligned}
$$

(3) 命題 12.152 より $\mathrm{Log}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(A-1)^n$, $\mathrm{Log}(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(B-1)^n$ であるから, (1) より,

$$
\begin{aligned}
&\|\mathrm{Log}(A) - \mathrm{Log}(B)\| = \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n}((A-1)^n - (B-1)^n) \right\| \\
&\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\|(A-1)^n - (B-1)^n\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} r^{n-1}\|(A-1) - (B-1)\| \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} r^{n-1}\|A - B\| = \frac{1}{1-r}\|A - B\|.
\end{aligned}
$$

□

定理 12.154 (Lie の積公式)**.** $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とする. 任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し,

$$
\exp(A + B) = \lim_{n\to\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right) \right)^n
$$

が成り立つ.

証明. 任意の $A, B \in \mathcal{A}$ と任意の $r \in (0,1)$ を取り固定する.

$$
A_n := \frac{A}{n}, \quad B_n := \frac{B}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})
$$

とおく. 命題 12.153 の (2) より十分大きい $n_0 \in \mathbb{N}$ を取れば,

$$
\|\exp(A_n + B_n) - 1\| \leqslant r, \quad \|\exp(A_n)\exp(B_n) - 1\| \leqslant r \quad (\forall n \geqslant n_0) \tag{12.136}
$$

となる. そこで,

$$
C_n := \mathrm{Log}(\exp(A_n)\exp(B_n)) - (A_n + B_n) \quad (\forall n \geqslant n_0) \tag{12.137}
$$

とおく. 正則関数カルキュラスの合成 (定理 9.20 の (4)) より,

$$
A_n + B_n = \mathrm{Log}(\exp(A_n + B_n)) \quad (\forall n \geqslant n_0)
$$

であるから,

$$
C_n = \mathrm{Log}(\exp(A_n)\exp(B_n)) - \mathrm{Log}(\exp(A_n + B_n)) \quad (\forall n \geqslant n_0)
$$

なので, 命題 12.153 の (3) と (12.136) より,

$$
\begin{aligned}
&\|C_n\| = \|\mathrm{Log}(\exp(A_n)\exp(B_n)) - \mathrm{Log}(\exp(A_n + B_n))\| \\
&\leqslant \frac{1}{1-r}\|\exp(A_n)\exp(B_n) - \exp(A_n + B_n)\| \quad (\forall n \geqslant n_0)
\end{aligned} \tag{12.138}
$$

が成り立つ. ここで任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$
\exp(A_n)\exp(B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{p=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} \frac{A_n^p}{p!}\frac{B_n^q}{q!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{2N} \sum_{p+q=m} \frac{A_n^p}{p!}\frac{B_n^q}{q!}
$$

なので,

$$\exp(A_n)\exp(B_n) - \exp(A_n + B_n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{2N}\left(\sum_{p+q=m}\frac{A_n^p}{p!}\frac{B_n^q}{q!} - \frac{(A_n+B_n)^m}{m!}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{m=2}^{2N}\left(\sum_{p+q=m}\frac{A_n^p}{p!}\frac{B_n^q}{q!} - \frac{(A_n+B_n)^m}{m!}\right)$$

であり,

$$\left\|\sum_{p+q=m}\frac{A_n^p}{p!}\frac{B_n^q}{q!} - \frac{(A_n+B_n)^m}{m!}\right\| \leqslant 2\sum_{\substack{p+q=m,\\ 1\leqslant p, 1\leqslant q}}\frac{\|A_n\|^p}{p!}\frac{\|B_n\|^q}{q!} \quad (\forall m \geqslant 2)$$

であるから,

$$\|\exp(A_n)\exp(B_n) - \exp(A_n + B_n)\| \leqslant \lim_{N\to\infty} 2\sum_{m=2}^{2N}\sum_{\substack{p+q=m,\\ 1\leqslant p, 1\leqslant q}}\frac{\|A_n\|^p}{p!}\frac{\|B_n\|^q}{q!}$$

$$= 2(\exp(\|A_n\|) - 1)(\exp(\|B_n\|) - 1)$$

である．よって (12.138) より,

$$\|nC_n\| \leqslant \frac{2n}{1-r}(\exp(\|A_n\|) - 1)(\exp(\|B_n\|) - 1) \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{12.139}$$

が成り立つ ($\{n(\exp(\|A_n\|) - 1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界であることに注意). (12.137) より,

$$A_n + B_n + C_n = \mathrm{Log}(\exp(A_n)\exp(B_n)) \quad (\forall n \geqslant n_0)$$

であるから, 正則関数カルキュラスの合成 (定理 9.20 の (4)) より,

$$\exp(A_n)\exp(B_n) = \exp(A_n + B_n + C_n) \quad (\forall n \geqslant n_0) \tag{12.140}$$

である. (12.139) より,

$$n(A_n + B_n + C_n) = A + B + nC_n \to A + B \quad (n \to \infty)$$

であるから, (12.140) と命題 9.23 の (2) より,

$$(\exp(A_n)\exp(B_n))^n = (\exp(A_n + B_n + C_n))^n = \exp(n(A_n + B_n + C_n)) \to \exp(A + B) \quad (n \to \infty)$$

である. □

命題 12.155. $\mathcal{A}$ を単位的 Banach 環とし, 加法群 $\mathbb{R}$ から $\mathcal{A}$ の可逆元全体のなす乗法群 $GL(\mathcal{A})$ への連続な群準同型写像 $\alpha : \mathbb{R} \to GL(\mathcal{A})$ を考える．このとき α は各点で微分可能である．そして,

$$A := \frac{d\alpha}{dt}(0) \in \mathcal{A}$$

とおくと $\alpha(t) = \exp(tA)$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ が成り立つ.

証明. $\alpha(0) = 1$ であるから α の連続性より任意の $\varepsilon \in (0, 1)$ に対し $\delta \in (0, \infty)$ が存在し,

$$\|\alpha(t) - 1\| \leqslant \varepsilon \quad (\forall t \in [-\delta, \delta]) \tag{12.141}$$

が成り立つ. Urysohn の補題 6.43 より, 台がコンパクトで滑らかな非負値関数 $\varphi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ で,

$$\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq [-\delta, \delta], \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt = 1 \tag{12.142}$$

を満たすものが取れる．台がコンパクトな連続関数 $\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi(t)\alpha(t) \in \mathcal{A}$ の Bochner 積分 (定義 5.250) により,

$$B := \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\alpha(t)dt \in \mathcal{A}$$

を定義すると, (12.142), (12.141) より,

$$\|B-1\| = \left\|\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)(\alpha(t)-1)dt\right\| \leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t)\|\alpha(t)-1\|dt \leqslant \varepsilon < 1$$

であるから, 命題 9.2 より,

$$B = 1-(1-B) \in GL(\mathcal{A}) \tag{12.143}$$

である.

$$B\alpha(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)\alpha(s)\alpha(t)ds = \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)\alpha(s+t)ds = \int_{\mathbb{R}} \varphi(s-t)\alpha(s)ds \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であり, φ は台がコンパクトな滑らかな関数なので, Lebesgue 優収束定理より,

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto B\alpha(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(s-t)\alpha(s)ds \in \mathcal{A}$$

は各点で微分可能である. よって (12.143) より,

$$\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha(t) = B^{-1}B\alpha(t) \in \mathcal{A}$$

は各点で微分可能である. 今,

$$A := \frac{d\alpha}{dt}(0) \in \mathcal{A}$$

とおく.

$$\alpha(t+h) = \alpha(h)\alpha(t) \quad (\forall t, h \in \mathbb{R})$$

より,

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = A\alpha(t) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であり,

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = \frac{d}{dt}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^{n-1}A^n}{(n-1)!} = \exp(tA)A \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

より,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\exp(-tA)\alpha(t)) &= \left(\frac{d}{dt}(\exp(-tA))\right)\alpha(t) + \exp(-tA)\frac{d\alpha}{dt}(t)\\ &= \exp(-tA)(-A)\alpha(t) + \exp(-tA)A\alpha(t) = 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

であるので, 微積分学の基本定理 5.206 より,

$$\exp(-tA)\alpha(t) = 1 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. ゆえに $\alpha(t) = \exp(tA)$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ が成り立つ. □

定義 12.156 (線型 Lie 群)**.** $\mathcal{V}$ を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 Hilbert 空間とする. $\dim(\mathcal{V}) = N \in \mathbb{N}$ とすると $B(\mathcal{V})$ は N^2 次元 Banach 空間であるから定理 3.25 より $\mathbb{C}^{N^2}$ と同相である. よって $B(\mathcal{V})$ は第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間である. また命題 9.3 より $GL(B(\mathcal{V}))$ は $B(\mathcal{V})$ の開集合であるから乗法群 $GL(B(\mathcal{V}))$ は第二可算公理を満たす局所コンパクト群である. 従って $GL(B(\mathcal{V}))$ の閉部分群も第二可算公理を満たす局所コンパクト群である. $GL(B(\mathcal{V}))$ の閉部分群を $\mathcal{V}$ 上の線型 Lie 群と言う.

定義 12.157 (典型的な線型 Lie 群)**.** $B(\mathbb{C}^N)$ の元を $\mathbb{C}^N$ の標準基底に関する行列表現 (定義 2.56) と同一視し, $B(\mathbb{C}^N) = M_{N\times N}(\mathbb{C})$ とみなす.

(1)

$$GL(N,\mathbb{C}) := GL(B(\mathbb{C}^N)) = \{A \in M_{N\times N}(\mathbb{C}) : A \text{ は可逆 }\}$$

を N 次の一般線型群と言う.

$$GL(N,\mathbb{R}) := \{A \in M_{N\times N}(\mathbb{R}) : A \text{ は可逆 }\}$$

は $GL(N,\mathbb{C})$ の閉部分群であるから $\mathbb{C}^N$ 上の線型 Lie 群である. $GL(N,\mathbb{R})$ を N 次の実一般線型群と言う.

(2)

$$SL(N,\mathbb{C}) := \{A \in GL(N,\mathbb{C}) : \det(A) = 1\},$$
$$SL(N,\mathbb{R}) := \{A \in GL(N,\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$$

はそれぞれ $GL(N,\mathbb{C})$ の閉部分群であるから $\mathbb{C}^N$ 上の線型 Lie 群である．$SL(N,\mathbb{C})$ を N 次の特殊線型群, $SL(N,\mathbb{R})$ を N 次の実特殊線型群と言う．

(3)

$$O(N) := \{A \in GL(N,R) : A^t A = 1\},$$
$$SO(N) := \{A \in O(N) : \det(A) = 1\}$$

はそれぞれ $GL(N,\mathbb{C})$ のコンパクト[*245]な部分群であるから $\mathbb{C}^N$ 上のコンパクト線型 Lie 群である. $O(N)$ を N 次の直交群, $SO(N)$ を N 次の特殊直交群と言う．

(4)

$$U(N) := \{A \in GL(N,\mathbb{C}) : A^* A = 1\},$$
$$SU(N) := \{A \in U(N) : \det(A) = 1\}$$

はそれぞれ $GL(N,\mathbb{C})$ のコンパクト[*246]な部分群であるから $\mathbb{C}^N$ 上のコンパクト線型 Lie 群である. $U(N)$ を N 次のユニタリ群, $SU(N)$ を N 次の特殊ユニタリ群と言う．

定義 12.158 (交換子積)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, S,T を $\mathcal{H}$ 上の線型作用素とする．

$$D([S,T]) = D(ST) \cap D(TS), \quad [S,T] : D([S,T]) \ni v \mapsto STv - TSv \in \mathcal{H}$$

なる $\mathcal{H}$ 上の線型作用素を定義する．$[S,T]$ を S,T の交換子積と言う．

定義 12.159 (線型 Lie 群に付随する Lie 代数)**.** $\mathcal{V}$ を有限次元 Hilbert 空間, G を $\mathcal{V}$ 上の線型 Lie 群 (定義 12.156) とする．

$$\mathrm{Lie}(G) := \{A \in B(\mathcal{V}) : \exp(tA) \in G \ (\forall t \in \mathbb{R})\}$$

を G に付随する Lie 代数と言う．$\mathrm{Lie}(G)$ は次の基本性質を持つ (定理 12.160).

(1) $\mathrm{Lie}(G)$ は実線型空間である．
(2) 任意の $A \in \mathrm{Lie}(G)$, $g \in G$ に対し, $g^{-1}Ag \in \mathrm{Lie}(G)$ である．
(3) 任意の $A, B \in \mathrm{Lie}(G)$ に対し, $[A,B] \in \mathrm{Lie}(G)$ である．

定理 12.160 (Lie 代数の基本性質)**.** 定義 12.159 の (1), (2), (3) が成り立つ．

証明. (1) 任意の $A, B \in \mathrm{Lie}(G)$, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し, Lie の積公式 (定理 12.154) と G が $GL(B(\mathcal{V}))$ の閉部分閉であることから,

$$\exp(t(A+B)) = \lim_{n\to\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n \in G.$$

よって $A+B \in \mathrm{Lie}(G)$ である．$\mathrm{Lie}(G)$ が実数倍で閉じていることは自明である．よって $\mathrm{Lie}(G)$ は実線型空間である．

(2) 任意の $A \in \mathrm{Lie}(G)$, $g \in G$, $t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(tg^{-1}Ag)^n = g^{-1}(tA)^n g \ \ (\forall n \in \mathbb{Z}_+)$$

であるから,

$$\exp(tg^{-1}Ag) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(tg^{-1}Ag)^n}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} g^{-1}\frac{(tA)^n}{n!}g = g^{-1}\exp(tA)g \in G.$$

よって $g^{-1}Ag \in \mathrm{Lie}(G)$ である．

[*245] $M_{N\times N}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^N$ とみなしたとき $O(N), SO(N)$ は $\mathbb{C}^N$ の有界閉集合であることに注意.
[*246] $M_{N\times N}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^N$ とみなしたとき $U(N), SU(N)$ は $\mathbb{C}^N$ 有界閉集合であることに注意.

(3) 任意の $A, B \in \mathrm{Lie}(G)$ に対し (2) より,

$$\exp(tA)B\exp(-tA) \in \mathrm{Lie}(G) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であり, (1) より $\mathrm{Lie}(G)$ は有限次元実線型空間なので定理 3.25 より $B(\mathcal{V})$ の閉実線型部分空間であるから,

$$[A, B] = \frac{d}{dt}(\exp(tA)B\exp(-tA))\Big|_{t=0} \in \mathrm{Lie}(G)$$

である.

□

補題 12.161 (行列の指数関数の行列式)**.** 任意の $A \in M_{N\times N}(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^N)$ に対し,

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$$

が成り立つ.

証明. $\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値, $u_1 \in \mathbb{C}^N$ を固有値 λ に対する A の固有ベクトルとし, $u_2, \cdots, u_N \in \mathbb{C}^N$ を $(u_1, \cdots, u_N)$ が $\mathbb{C}^N$ の基底となるように取る. このとき $U = (u_1, \cdots, u_N) \in GL(N, \mathbb{C})$ (行列の縦ベクトル表記 (定義 2.49)) であり, ある $A' \in M_{N-1,N-1}(\mathbb{C})$ に対し,

$$(Au_1, \cdots, Au_N) = (u_1, \cdots, u_N)\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

と表せるので,

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

である. このことと N に関する帰納法により, 任意の $N \in \mathbb{N}$, 任意の $A \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$ に対し, $U \in GL(N, \mathbb{C})$ で $U^{-1}AU$ が上三角行列 (対角より下の成分が全て 0 の行列) となることが分かる. 今, 任意の $A \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$ を取り, $B := U^{-1}AU$ が上三角行列となるような $U \in GL(N, \mathbb{C})$ を取る. このときトレースの性質 (命題 10.152) より,

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(U^{-1}AU) = \mathrm{Tr}(B) \tag{12.144}$$

である. そして,

$$\exp(A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{A^n}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(UBU^{-1})^n}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}U\frac{B^n}{n!}U^{-1} = U\exp(B)U^{-1}$$

より,

$$\det(\exp(A)) = \det(U\exp(B)U^{-1}) = \det(U)\det(\exp(B))\det(U)^{-1} = \det(\exp(B)) \tag{12.145}$$

である. 各 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し B^n は上三角行列であるから $\exp(B) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{B^n}{n!}$ も上三角行列であり, B の対角成分を上から $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ とおくと, 各 B^n の対角成分は上から $\lambda_1^n, \cdots, \lambda_N^n$, 従って, $\exp(B)$ の対角成分は上から $\exp(\lambda_1), \cdots, \exp(\lambda_N)$ である. ゆえに,

$$\det(\exp(B)) = \exp(\lambda_1)\cdots\exp(\lambda_N) = \exp(\lambda_1 + \cdots + \lambda_N) = \exp(\mathrm{Tr}(B))$$

である. よって (12.144), (12.145) より,

$$\det(A) = \det(B) = \exp(\mathrm{Tr}(B)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$$

である. □

命題 12.162 (典型的な線型 Lie 群に対する Lie 代数)**.** 定義 12.157 における線型 Lie 群に付随する Lie 代数について次が成り立つ.

(1) 一般線型群 $GL(N, \mathbb{C})$, 実一般線型群 $GL(N, \mathbb{R})$ に付随する Lie 代数は,

$$\mathrm{Lie}(GL(N, \mathbb{C})) = M_{N\times N}(\mathbb{C}),$$
$$\mathrm{Lie}(GL(N, \mathbb{R})) = M_{N\times N}(\mathbb{R}).$$

(2) 特殊線型群 $SL(N,\mathbb{C})$, 実特殊線型群 $SL(N,\mathbb{R})$ に付随する Lie 代数は,

$$\mathrm{Lie}(SL(N,\mathbb{C})) = \{A \in M_{N\times N}(\mathbb{C}) : \mathrm{Tr}(A) = 0\},$$
$$\mathrm{Lie}(SL(N,\mathbb{R})) = \{A \in M_{N\times N}(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}(A) = 0\}.$$

(3) 直交群 $O(N)$, 特殊直交群 $SO(N)$ に付随する Lie 代数は,

$$\mathrm{Lie}(O(N)) = \{A \in M_{N\times N}(\mathbb{R}) : A^t + A = 0\},$$
$$\mathrm{Lie}(SO(N)) = \{A \in M_{N\times N}(\mathbb{R}) : A^t + A = 0\}.$$

(4) ユニタリ群 $U(N)$, 特殊ユニタリ群 $SU(N)$ に付随する Lie 代数は,

$$\mathrm{Lie}(U(N)) = \{A \in M_{N\times N}(\mathbb{C}) : A^* + A = 0\},$$
$$\mathrm{Lie}(SU(N)) = \{A \in M_{N\times N}(\mathbb{C}) : A^* + A = 0, \mathrm{Tr}(A) = 0\}.$$

証明. 命題 9.23 の (2) より任意の $A \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$ に対し,

$$\exp(-tA) = \exp(tA)^{-1} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であるから (1) が成り立つ. 補題 12.161 より, 任意の $A \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$ に対し,

$$\det(\exp(tA)) = \exp(\mathrm{Tr}(tA)) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であるから,

$$\det(\exp(tA)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Tr}(A) = 0 \tag{12.146}$$

が成り立つ. これより (2) が成り立つ. また, 任意の $A \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$ に対し,

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA)^* \exp(tA))\Big|_{t=0} = A^* + A$$

であるから,

$$\exp(tA)^* \exp(tA) = 1 \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad A^* + A = 0$$

である. 逆に $A^* + A = 0$ ならば A と A^* は可換なので, 命題 9.23 の (2) より,

$$\exp(tA)^* \exp(tA) = \exp(tA^*) \exp(tA) = \exp(t(A^* + A)) = 1 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であるから,

$$\exp(tA)^* \exp(tA) = 1 \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad A^* + A = 0 \tag{12.147}$$

が成り立つ. よって (12.146), (12.147) より (3) が成り立つ. □

定理 12.163 (指数写像定理)**.** $\mathcal{V}$ を有限次元 Hilbert 空間, G を $\mathcal{V}$ 上の線型 Lie 群とする. このとき $0 \in \mathrm{Lie}(G)$ の開近傍 $U \subseteq \mathrm{Lie}(G)$ と $1 \in G$ の開近傍 $V \subseteq G$ で,

$$U \ni A \mapsto \exp(A) \in V$$

が同相写像となるものが取れる.

証明. $\dim(\mathcal{V}) = N$ とすると, $B(\mathcal{V})$ は "実" 線型空間として $2N^2$ 次元である. 実線型空間 $\mathrm{Lie}(G) \subseteq B(\mathcal{V})$ の基底を $e_1, \cdots, e_n$ として, これを延長して $B(\mathcal{V})$ の基底 $e_1, \cdots, e_n, \cdots, e_{2N^2}$ を構成する. そして,

$$\mathcal{D} := \mathrm{span}\{e_{n+1}, \cdots, e_{2N^2}\} \subseteq B(\mathcal{V})$$

とおく. すると,

$$B(\mathcal{V}) = \mathrm{Lie}(G) \oplus \mathcal{D}$$

と直和分解される. そこで,

$$\Phi : B(\mathcal{V}) = \mathrm{Lie}(G) \oplus \mathcal{D} \ni A + B \mapsto \exp(A)\exp(B) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{A^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{B^n}{n!}\right) \in B(\mathcal{V})$$

なる写像を定義する. 各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し e_j に対応する成分に関する Φ の微分を $\partial_j \Phi$ とおくと, Lebesgue 優収束定理より, $\partial_1\Phi, \cdots, \partial_{2N^2}\Phi$ はそれぞれ連続であることが分かる. そして,

$$\partial_j\Phi(0) = e_j \ \ (j = 1, \cdots, 2N^2)$$

であるから, 逆関数定理 4.17 より, $0 \in B(\mathcal{V})$ の開近傍 $U_0 \subseteq B(\mathcal{V})$ と $1 \in B(\mathcal{V})$ の開近傍 $V_0 \subseteq B(\mathcal{V}_0)$ で,

$$\Phi : U_0 \to V_0 \tag{12.148}$$

が同相写像となるものが取れる. 今,

$$\Phi(U_0 \cap \mathrm{Lie}(G)) = \exp(U_0 \cap \mathrm{Lie}(G)) \tag{12.149}$$

が $1 \in G$ の G における近傍であることを背理法で示す. そこで (12.149) が $1 \in G$ の G における近傍ではないと仮定する. このとき G の列 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$g_n \in V_0 \cap G,\ \ g_n \notin \Phi(U_0 \cap \mathrm{Lie}(G)) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}),\ \ \lim_{n\to\infty} g_n = 1 \tag{12.150}$$

なるものが取れる. (12.148) は同相写像であることと (12.150) より, $\mathrm{Lie}(G)$ の列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $\mathcal{D}$ の列 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$g_n = \Phi(A_n + B_n) = \exp(A_n)\exp(B_n),\ \ B_n \neq 0 \ \ (\forall n \in \mathbb{N}), \tag{12.151}$$

$$A_n \to 0,\ \ B_n \to 0 \ \ (n \to \infty) \tag{12.152}$$

なるものが取れる. $A_n \in \mathrm{Lie}(G)$ より $\exp(A_n) \in G$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であるから,

$$\exp(B_n) = \exp(A_n)^{-1} g_n \in G \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{12.153}$$

である. $\mathcal{D}$ は有限次元ノルム空間であるから定理 3.25 より $\mathcal{D}$ の単位ノルム閉球は点列コンパクトである. よって $\left(\frac{B_n}{\|B_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ [*247]のある部分列 $\left(\frac{B_{k(n)}}{\|B_{k(n)}\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する. そこで,

$$B := \lim_{n\to\infty} \frac{B_{k(n)}}{\|B_{k(n)}\|} \in \mathcal{D} \tag{12.154}$$

とおく. 任意の $t \in \mathbb{R}$ を取り, 各 $n \in \mathbb{N}$ について,

$$m_n \leqslant \frac{t}{\|B_{k(n)}\|} < m_n + 1$$

なる $m_n \in \mathbb{Z}$ を取る. (12.152) より $\lim_{n\to\infty}\|B_{k(n)}\| = 0$ であるから,

$$t = \lim_{n\to\infty} m_n \|B_{k(n)}\| \tag{12.155}$$

が成り立つ. よって (12.154), (12.155) より,

$$tB = \lim_{n\to\infty} m_n \|B_{k(n)}\| \left(\frac{B_{k(n)}}{\|B_{k(n)}\|}\right) = \lim_{n\to\infty} m_n B_{k(n)}$$

であるから, (12.153) と命題 9.23 より,

$$\exp(tB) = \lim_{n\to\infty} \exp(m_n B_{k(n)}) = \exp(B_{k(n)})^{m_n} \in G$$

*247 (12.151) より $B_n \neq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であることに注意.

が成り立つ．これより任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $\exp(tB) \in G$ が成り立つので $B \in \mathrm{Lie}(G)$ である．しかし (12.154) より $B \in \mathcal{D}, \|B\| = 1$ であるから, $\mathrm{Lie}(G) \cap \mathcal{D} = \{0\}$ であることに矛盾する．ゆえに (12.149) は $1 \in G$ の G における近傍である．従って $1 \in B(\mathcal{V})$ の開近傍 $V_1 \subseteq V_0$ で,

$$V_1 \cap G \subseteq \Phi(U_0 \cap \mathrm{Lie}(G))$$

なるものが取れる．(12.148) は同相写像であるから $\Phi(U_1) = V_1$ なる $0 \in B(\mathcal{V})$ の開近傍 $U_1 \subseteq U_0$ が定まり,

$$\Phi(U_1 \cap \mathrm{Lie}(G)) = V_1 \cap G$$

である．よって $U := U_1 \cap \mathrm{Lie}(G), V := V_1 \cap G$ とおけば, $U \subseteq \mathrm{Lie}(G), V \subseteq G$ が求める $0 \in \mathrm{Lie}(G), 1 \in G$ の開近傍である． □

補題 12.164 (局所コンパクト群の開部分群は閉部分群)**.** G を局所コンパクト群とし, 部分群 $H \subseteq G$ が G の開集合であるとする．このとき H は G の閉部分群である．

証明. 任意の $x \in G \backslash H$, 任意の $y \in H$ に対し $xy \notin H$ であるので,

$$G \backslash H = \bigcup_{x \in G \backslash H} xH$$

である．各 xH は G の開集合であるから $G \backslash H$ は G の開集合である．よって H は G の閉部分群である． □

定理 12.165 (線型 Lie 群と連結性)**.** $\mathcal{V}$ を有限次元 Hilbert 空間, G を $\mathcal{V}$ 上の線型 Lie 群とする．このとき,

(1) G の各元は弧状連結な開近傍を持つ．
(2) G の任意の連結成分は開集合である．
(3) G の任意の連結開集合は弧状連結である．
(4) 単位元 $1 \in G$ を含む G の連結成分 G_1 は,

$$G_1 = \{\exp(A_1) \cdots \exp(A_n) : n \in \mathbb{N}, A_1, \cdots, A_n \in \mathrm{Lie}(G)\}$$

と表せて, G_1 は $\mathcal{V}$ 上の線型 Lie 群である．さらに $\mathrm{Lie}(G_1) = \mathrm{Lie}(G)$ が成り立つ．

証明. (1) 実ノルム空間 $\mathrm{Lie}(G)$ における $0 \in \mathrm{Lie}(G)$ の開近傍として, いくらでも小さい弧状連結なものが取れる (0 中心の開球を考えればよい)．よって指数写像定理 12.163 より $1 \in G$ の開近傍 V として弧状連結なものが取れる．任意の $g \in G$ に対し gV は g の弧状連結な開近傍である．

(2) (1) と命題 11.43 の (4) による．

(3) $C \subseteq G$ を連結開集合とする．任意の $g_0 \in C$ を取り,

$$C_1 := \{g \in C : g_0 \text{ と } g \text{ を結ぶ } C \text{ 内の連続曲線が存在する}\}, \quad C_2 := C \backslash C_1$$

とおくと, (1) より C_1, C_2 は C の開集合である．よって C の連結性より $C = C_1$ であるから C は弧状連結である．

(4)

$$G_1 := \{\exp(A_1) \cdots \exp(A_n) : n \in \mathbb{N}, A_1, \cdots, A_n \in \mathrm{Lie}(G)\}$$

とおけば G_1 は G の部分群であり, 指数写像定理 12.163 より G_1 は G の開集合である．よって補題 12.164 より G_1 は G の閉部分群であるので G_1 は $\mathcal{V}$ 上の線型 Lie 群である．また G_1 の任意の元 $g = \exp(A_1) \cdots \exp(A_n)$ に対し,

$$g(t) := \exp(tA_1) \cdots \exp(tA_n) \in G_1 \quad (\forall t \in [0, 1])$$

とおけば, $[0, 1] \ni t \mapsto g(t) \in G_1$ は 1 と g を結ぶ G_1 内の連続曲線であるので G_1 は弧状連結である．よって $1 \in G$ を含む G の連結成分を C_1 とおくと $G_1 \subseteq C_1$ であり, G_1 は C_1 の開かつ閉の集合なので, C_1 の連結性より $G_1 = C_1$ である．任意の $A \in \mathrm{Lie}(G)$ を取る．$\{\exp(tA) : t \in \mathbb{R}\}$ は $1 \in G$ を含む G の連結集合なので G_1 に含まれる．よって $\exp(tA) \in G_1$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ であるので $A \in \mathrm{Lie}(G_1)$ である．

□

命題 12.166. $A \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ とする. このとき,

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ が A の固有値ならば $\overline{\lambda}$ も A の固有値であり, $u \in \mathbb{C}^N$ が A の固有値 λ に対する固有ベクトルならば, $\overline{u} \in \mathbb{C}^N$ (u の各成分を複素共役にしたもの) は A の固有値 $\overline{\lambda}$ に対する固有ベクトルである.

(2) $\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値ならば,

$$\dim\{u \in \mathbb{R}^N : Au = \lambda u\} = \dim\{u \in \mathbb{C}^N : Au = \lambda u\}$$

が成り立つ.

証明. (1) $\lambda \in \mathbb{C}, u \in \mathbb{C}^N$ に対し $Au = \lambda u$ ならば, A が実行列であることから, $A\overline{u} = \overline{\lambda}\overline{u}$ である.

(2) $\mathbb{R}^N$ のベクトル $v_1, \cdots, v_n$ が $\mathbb{R}^N$ において線型独立ならば, $\mathbb{C}^N$ においても線型独立だから, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\dim\{(\lambda - A)u : u \in \mathbb{R}^N\} = \dim\{(\lambda - A)u : u \in \mathbb{C}^N\}$$

である. よって次元定理 2.40 より,

$$\begin{aligned}&\dim\{u \in \mathbb{R}^N : (\lambda - A)u = 0\} = N - \dim\{u \in \mathbb{R}^N : (\lambda - A)u\}\\ &= N - \dim\{u \in \mathbb{C}^N : (\lambda - A)u\} = \dim\{u \in \mathbb{C}^N : (\lambda - A)u = 0\}\end{aligned}$$

である.

□

命題 12.167 (正規実行列について)**.** $A \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ が正規[*248]であるとし, A の固有値を重複度を込めて並べたものを,

$$\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \cdots, \lambda_n, \overline{\lambda_n}, \lambda_{2n+1}, \cdots, \lambda_N \quad (\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \lambda_{2n+1}, \cdots, \lambda_N \in \mathbb{R}) \tag{12.156}$$

とおき,

$$R(\lambda_j) := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\lambda_j) & \mathrm{Im}(\lambda_j) \\ -\mathrm{Im}(\lambda_j) & \mathrm{Re}(\lambda_j) \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \quad (j = 1, \cdots, n)$$

とおく. このとき直交行列 $T \in O(N)$ が存在し,

$$T^{-1}AT = R(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus R(\lambda_n) \oplus \lambda_{2n+1} \oplus \cdots \oplus \lambda_N$$

が成り立つ. ただし右辺は $R(\lambda_1), \cdots, R(\lambda_n) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ と $\lambda_{2n+1}, \cdots, \lambda_N$ を左上から順に対角に並べてそれ以外の成分は 0 とした $N \times N$ 行列である.

証明. A は正規なので A の固有ベクトルからなる $\mathbb{C}^N$ の正規直交基底が取れる. よって命題 12.166 と Schmidt 直交化より, $\mathbb{C}^N$ の正規直交基底

$$u_1, \overline{u_1}, u_2, \overline{u_2}, \cdots, u_n, \overline{u_n}, u_{2n+1}, \cdots, u_N \in \mathbb{C}^N \tag{12.157}$$

で,

$$\begin{aligned} Au_j &= \lambda_j u_j, \quad A\overline{u_j} = \overline{\lambda_j}\overline{u_j} \quad (j = 1, \cdots, n), \\ Au_k &= \lambda_k u_k, \quad u_k \in \mathbb{R}^N \quad (k = 2n+1, \cdots, N) \end{aligned}$$

なるものが取れる. (12.157) を縦ベクトルとして並べてできるユニタリ行列を,

$$U := (u_1, \overline{u_1}, \cdots, u_n, \overline{u_n}, u_{2n+1}, \cdots, u_N) \in U(N)$$

とおき, (12.156) を左上から対角に並べてできる対角行列を $\Lambda \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$ とおくと,

$$AU = U\Lambda$$

[*248] 従って A の固有ベクトルからなる $\mathbb{C}^N$ の正規直交基底が取れる (定理 10.122 の (3) を参照).

である.

$$M := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \in U(2)$$

とおき,

$$V := \overbrace{M \oplus \cdots \oplus M}^{n\text{ 個}} \oplus 1_{N-2n} \in U(N)$$

とおくと, $T = UV$ は成分が実数のユニタリ行列であるから,

$$T = UV \in O(N)$$

である. そして,

$$V^*\Lambda V = R(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus R(\lambda_n) \oplus \lambda_{2n+1} \oplus \cdots \oplus \lambda_N$$

であるので,

$$T^{-1}AT = V^*U^*AUV = V^*\Lambda V = R(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus R(\lambda_n) \oplus \lambda_{2n+1} \oplus \cdots \oplus \lambda_N$$

である. □

命題 12.168. $GL(N,\mathbb{C}), SL(N,\mathbb{C}), SO(N), U(N), SU(N)$ は弧状連結である.

証明. 補題 12.161 の証明で述べたように, 任意の $A \in GL(N,\mathbb{C})$ に対し上三角行列 B と $U \in GL(N,\mathbb{C})$ が存在して $A = U^{-1}BU$ となる. 上三角行列の対角より上の成分を 1 個の径数により一斉に連続的に 0 にすることができる. そしてできた対角行列は 1 個の径数によって連続的に単位行列にすることできる. このことから $GL(N,\mathbb{C}), SL(N,\mathbb{C})$ が弧状連結であることが分かる. $SU(N), U(N)$ が連結であることは正規行列が対角化できること (定理 10.122 の (3)) と, 対角行列は 1 個の径数により連続的に単位行列にすることができることから分かる.

$$R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in SO(2) \quad (\forall \theta \in \mathbb{R})$$

とおけば, 任意の $A \in SO(N)$ に対し, 命題 12.167 より, ある $T \in O(N)$ と $\theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R}$ が存在し,

$$T^{-1}AT = R(\theta_1) \oplus \cdots \oplus R(\theta_n) \oplus 1_{N-2n}$$

となる. ただし右辺は $R(\theta_1), \cdots, R(\theta_n) \in SO(2)$ と $N-2n$ 次の単位行列 1_{N-2n} を対角に並べてそれ以外の成分は 0 にした $N \times N$ 行列である. 各 $R(\theta_j)$ は $\theta_j \to 0$ とすることによって連続的に単位行列にすることができるので $SO(N)$ は弧状連結である. □

定義 12.169 (コンパクト線型 Lie 群のユニタリ表現の微分表現)**.** G をコンパクト線型 Lie 群, π を G のユニタリ表現とする. 任意の $A \in \mathrm{Lie}(G)$ に対し,

$$D(d\pi(A)) := \left\{ v \in \mathcal{H}_\pi : \exists \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\pi(\exp(tA)) - 1)v \in \mathcal{H}_\pi \right\},$$

$$d\pi(A) : D(d\pi(A)) \to \mathcal{H}_\pi, \ \ d\pi(A)v := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\pi(\exp(tA)) - 1)v$$

なる $\mathcal{H}_\pi$ 上の線型作用素を定義する. 各 $A \in \mathrm{Lie}(G)$ に対し $\mathcal{H}_\pi$ 上の線型作用素 $d\pi(A)$ を与える対応 $d\pi$ を π の微分表現と言う.

定理 12.170 (コンパクト線型 Lie 群のユニタリ表現に対応する微分表現の基本性質)**.** G をコンパクト線型 Lie 群, π を G のユニタリ表現 (定義 12.34) とする. このとき,

(1) 任意の $A \in \mathrm{Lie}(G)$ に対し, $id\pi(A)$ は $\mathcal{H}_\pi$ 上の自己共役作用素であり,

$$\pi(\exp(tA)) = \exp(d\pi(A)) \, (:= \exp(it(-id\pi(A)))) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

(2) 任意の $g \in G$, $A \in \mathrm{Lie}(G)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し,

$$d\pi(g^{-1}Ag) = \pi(g)^{-1}d\pi(A)\pi(g), \quad d\pi(\alpha A) = \alpha d\pi(A)$$

が成り立つ.

(3) 任意の $A, B \in \mathrm{Lie}(G)$ に対し,

$$d\pi(A+B) = \overline{d\pi(A) + d\pi(B)}, \quad d\pi([A,B]) = \overline{[d\pi(A), d\pi(B)]}$$

が成り立つ.

証明.　(1) 任意の $A \in \mathrm{Lie}(G)$ に対し,

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \pi(\exp(tA)) \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$$

は $\mathbb{R}$ のユニタリ表現であるので, SNAG の定理 12.135 より, 自己共役作用素 S で,

$$\pi(\exp(tA)) = e^{itS} \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \tag{12.158}$$

を満たすものが唯一つ存在する. 補題 10.213 より,

$$\begin{aligned} D(S) &= \left\{ v \in \mathcal{H}_\pi : \exists \lim_{t\to 0} \frac{1}{it}(e^{itS} - 1)v \in \mathcal{H}_\pi \right\} \\ &= \left\{ v \in \mathcal{H}_\pi : \exists \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\pi(\exp(tA)) - 1)v \in \mathcal{H}_\pi \right\} = D(d\pi(A)) \end{aligned}$$

であり, 任意の $v \in D(S) = D(d\pi(A))$ に対し,

$$Sv = \lim_{t\to 0} \frac{1}{it}(e^{itS} - 1)v = \lim_{t\to 0} \frac{1}{it}(\pi(\exp(tA)) - 1)v = -id\pi(A)v$$

である. よって $id\pi(A) = -S$ は $\mathcal{H}_\pi$ 上の自己共役作用素であり, (12.158) より,

$$\pi(\exp(tA)) = e^{itS} = \exp(it(-id\pi(A))) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

である.

(2) 任意の $g \in G$, $A \in \mathrm{Lie}(G)$ に対し, 定理 12.160 の (2) より,

$$\exp(tg^{-1}Ag) = g^{-1}\exp(tA)g \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であるから,

$$\pi(\exp(tg^{-1}Ag)) = \pi(g)^{-1}\pi(\exp(tA))\pi(g) \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

よって,

$$d\pi(g^{-1}Ag) = \pi(g)^{-1}d\pi(A)\pi(g)$$

が成り立つ. また, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し,

$$\begin{aligned} D(d\pi(A)) &= \left\{ v \in \mathcal{H}_\pi : \exists \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\pi(\exp(tA)) - 1)v \in \mathcal{H}_\pi \right\} \\ &= \left\{ v \in \mathcal{H}_\pi : \exists \lim_{t\to 0} \frac{1}{\alpha t}(\pi(\exp(\alpha tA)) - 1)v \in \mathcal{H}_\pi \right\} \\ &= \left\{ v \in \mathcal{H}_\pi : \exists \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\pi(\exp(t\alpha A)) - 1)v \in \mathcal{H}_\pi \right\} = D(d\pi(\alpha A)) \end{aligned}$$

であり, 任意の $v \in D(d\pi(A)) = D(d\pi(\alpha A))$ に対し,

$$d\pi(\alpha A)v = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\pi(\exp(t\alpha A) - 1)v = \alpha \lim_{t\to 0} \frac{1}{\alpha t}(\pi(\exp(t\alpha A)) - 1)v = \alpha d\pi(A)v$$

であるから $d\pi(\alpha A) = \alpha d\pi(A)$ が成り立つ. 明らかに $d\pi(0A) = d\pi(0) = 0 = 0d\pi(A)$ である.

(3) まず π が有限次元である場合を示す. このとき $B(\mathcal{H}_\pi)$ の SOT はノルム位相と一致するので, 任意の $A \in \mathrm{Lie}(G)$ に対し,

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \pi(\exp(tA)) \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$$

はノルムで連続な群準同型写像である. よって命題 12.155 より任意の $A \in \mathrm{Lie}(G)$ に対し,

$$\pi(\exp(tA)) = \exp(td\pi(A)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{(td\pi(A))^n}{n!} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であり, 任意の $A, B \in \mathrm{Lie}(G)$ に対し, Lie の積公式 12.154 より,

$$\begin{aligned}\exp(td\pi(A+B)) = \pi(\exp(t(A+B))) &= \lim_{n\to\infty} \pi\left(\exp\left(\frac{t}{n}A\right)\exp\left(\frac{t}{n}B\right)\right)^n \\ = \lim_{n\to\infty}\left(\exp\left(\frac{t}{n}d\pi(A)\right)\exp\left(\frac{t}{n}d\pi(B)\right)\right)^n &= \exp(t(d\pi(A)+d\pi(B)))\end{aligned}$$

であるから,

$$d\pi(A+B) = d\pi(A) + d\pi(B).$$

これより $d\pi : \mathrm{Lie}(G) \ni A \mapsto d\pi(A) \in B(\mathcal{H}_\pi)$ は有限次元実線型空間 $\mathrm{Lie}(G)$ 上の線型写像であり, 従って定理 3.25 より有界実線型写像である. よって (2) より任意の $A, B \in \mathrm{Lie}(G)$ に対し,

$$\begin{aligned}d\pi([A,B]) &= \frac{d}{dt}d\pi(\exp(tA)B\exp(-tA))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\pi(\exp(tA))d\pi(B)\pi(\exp(-tA))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\exp(td\pi(A))d\pi(B)\exp(-td\pi(A))\Big|_{t=0} = [d\pi(A), d\pi(B)]\end{aligned}$$

である. これより π が有限次元の場合は成り立つ.
π が無限次元の場合を示す. π はコンパクト群 G のユニタリ表現なので定理 12.105 より π は既約な部分表現の族 $(\pi_j)_{j\in J}$ の直和

$$\pi = \oplus_{j\in J}\pi_j$$

に分解でき, 各 $\pi_j : G \to \mathcal{H}_{\pi_j}$ は有限次元である. 上で示したことから,

$$d\pi_j(A+B) = d\pi_j(A) + d\pi_j(B), \quad d\pi_j([A,B]) = [d\pi_j(A), d\pi_j(B)] \quad (\forall j \in J, \forall A, B \in \mathrm{Lie}(G)) \tag{12.159}$$

が成り立つ. 各 $j \in J$ に対し $\mathcal{H}_{\pi_j} \subseteq \mathcal{H}_\pi$ の上への射影作用素を $P_j : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{H}_{\pi_j}$ とおくと,

$$P_j\pi(g)v = \pi_j(g)P_jv \quad (\forall g \in G, \forall v \in \mathcal{H}_\pi)$$

であるから,

$$P_jd\pi(A)v = d\pi_j(A)P_jv \quad (\forall A \in \mathrm{Lie}(G), \forall v \in D(d\pi(A)))$$

である. よって,

$$d\pi(A)v = \sum_{j\in J}P_jd\pi(A)v = \sum_{j\in J}d\pi_j(A)P_jv \quad (\forall A \in \mathrm{Lie}(G), \forall v \in D(d\pi(A)))$$

であるから,

$$d\pi(A) \subseteq \bigoplus_{j\in J} d\pi_j(A) \quad (\forall A \in \mathrm{Lie}(G))$$

が成り立ち, 各 $A \in \mathrm{Lie}(G)$ に対し $d\pi(A)$ は閉作用素である*249から, この逆の包含関係も成り立つので,

$$d\pi(A) = \bigoplus_{j\in J} d\pi_j(A) \quad (\forall A \in \mathrm{Lie}(G))$$

*249 $id\pi(A)$ は自己共役作用素なので $id\pi(A)$ は閉作用素, 従って $d\pi(A)$ は閉作用素である.

が成り立つ．よって (12.159) と命題 10.85 の (4), (5) より，任意の $A, B \in \mathrm{Lie}(G)$ に対し，

$$d\pi(A+B) = \bigoplus_{j \in J} d\pi_j(A+B) = \bigoplus_{j \in J} (d\pi_j(A) + d\pi_j(B)) = \overline{d\pi(A) + d\pi(B)},$$

$$d\pi([A,B]) = \bigoplus_{j \in J} d\pi_j([A,B]) = \bigoplus_{j \in J} [d\pi_j(A), d\pi_j(B)] = \overline{[d\pi(A), d\pi(B)]}$$

が成り立つ．

□

12.8 $SO(3), SU(2)$ の既約表現の完全分類，球面調和関数空間

定義 12.171 ($\mathrm{Lie}(SO(3)), \mathrm{Lie}(SU(2))$ の標準基底)**.** 命題 12.162 より，

$$\mathrm{Lie}(SO(3)) = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : A^t + A = 0\},$$
$$\mathrm{Lie}(SU(2)) = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) : A^* + A = 0, \mathrm{Tr}(A) = 0\}$$

である．よって実線型空間 $\mathrm{Lie}(SO(3))$ の基底として，

$$F_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad F_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad F_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12.160}$$

が取れて，実線型空間 $\mathrm{Lie}(SU(2))$ の基底として，

$$E_1 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix},\quad E_2 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad E_3 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \tag{12.161}$$

が取れる．(F_1, F_2, F_3) を $\mathrm{Lie}(SO(3))$ の標準基底，(E_1, E_2, E_3) を $\mathrm{Lie}(SU(2))$ の標準基底と呼ぶこととする．これらは交換子積 (定義 12.158) と Levi-Civita の記号 $\varepsilon_{j,k,l}$ (定義 6.79) に関して次の基本関係式を満たす．

$$[F_j, F_k] = \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{j,k,l} F_l,\quad [E_j, E_k] = \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{j,k,l} E_l. \tag{12.162}$$

命題 12.172. (F_1, F_2, F_3) を $\mathrm{Lie}(SO(3))$ の標準基底，(E_1, E_2, E_3) を $\mathrm{Lie}(SU(2))$ の標準基底とする．このとき任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\exp(\theta F_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},\quad \exp(\theta F_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix},\quad \exp(\theta F_3) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\exp(\theta E_1) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix},\quad \exp(\theta E_2) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix},\quad \exp(\theta E_3) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

証明.

$$\alpha(\theta) := \exp(\theta F_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\forall \theta \in \mathbb{R})$$

とおくと，

$$\mathbb{R} \ni \theta \mapsto \alpha(\theta) \in SO(3)$$

は連続群準同型写像である．よって，

$$\alpha(\theta + h) = \alpha(h)\alpha(\theta) \quad (\forall \theta, h \in \mathbb{R})$$

だから，

$$\frac{d\alpha}{d\theta}(\theta) = \frac{d\alpha}{d\theta}(0)\alpha(\theta) = F_1\alpha(\theta) \ \ (\forall\theta \in \mathbb{R})$$

である．これより，

$$\frac{d}{d\theta}(\exp(-\theta F_1)\alpha(\theta)) = \exp(-\theta F_1)(-F_1)\alpha(\theta) + \exp(-\theta F_1)F_1\alpha(\theta) = 0 \ \ (\forall\theta \in \mathbb{R})$$

であるから，微積分学の基本定理 5.206 より $\exp(-\theta F_1)\alpha(\theta) = 1$ $(\forall\theta \in \mathbb{R})$ である．ゆえに $\alpha(\theta) = \exp(\theta F_1)$ $(\forall\theta \in \mathbb{R})$ が成り立つ．他も全く同様の仕方で証明できる． □

次の定理は有用である．

定理 12.173 (角運動量代数に関する定理)**.** G を $SO(3)$ か $SU(2)$ とし，(A_1, A_2, A_3) を $\mathrm{Lie}(G)$ の標準基底 (定義 12.171) とする．そして π を G の有限次元ユニタリ表現とし，その微分表現 (定義 12.169) $d\pi : \mathrm{Lie}(G) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ に対し，

$$L_\pm := id\pi(A_1) \mp d\pi(A_2), \ \ L_3 := id\pi(A_3)$$

とおく．また $v_0 \in \mathcal{H}_\pi$ を自己共役作用素 L_3[*250]の固有値 $l \in \mathbb{R}$ に対する固有ベクトルとし，$L_+v_0 = 0$ が成り立つものとする．このとき，

$$l \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$$

が成り立つ．そして，

$$v_j := L_-^j v_0 \ \ (j \in \mathbb{N})$$

とおくと，$v_0, v_1, \cdots, v_{2l}$ はそれぞれ L_3 の固有値 $l, l-1, \cdots, -l$ に対する固有ベクトルで，

$$\mathcal{K} := \mathrm{span}\{v_0, v_1, \cdots, v_{2l}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$$

は π 不変であり，$\pi|_{\mathcal{K}} : G \to \mathcal{U}(\mathcal{K})$ は既約である．さらに，

$$(d\pi(A_1)^2 + d\pi(A_2)^2 + d\pi(A_3)^2)v = -l(l+1)v \ \ (\forall v \in \mathcal{K})$$

が成り立つ．

証明. 定理 12.170 の (3) と定義 12.171 の (12.160), (12.161) より，

$$[d\pi(A_j), d\pi(A_k)] = d\pi([A_j, A_k]) = \sum_{l=1}^{3}\varepsilon_{j,k,l}d\pi(A_l) \ \ (\forall j,k,l \in \{1,2,3\})$$

である．これより，

$$[L_3, L_\pm] = \pm L_\pm, \ \ [L_\pm, L_\mp] = \pm 2L_3 \tag{12.163}$$

が成り立つ．今，

$$L_3v_j = (l-j)v_j, \ \ L_+v_{j+1} = (2l-j)(j+1)v_j \ \ (\forall j \in \mathbb{Z}_+) \tag{12.164}$$

が成り立つことを $j \in \mathbb{Z}_+$ に関する帰納法で示す．(12.163) の右の式と $L_3v_0 = lv_0$, $L_+v_0 = 0$ より，

$$L_+v_1 = L_+L_-v_0 = 2L_3v_0 = 2lv_0$$

であるから $j = 0$ の場合は成り立つ．ある $j-1 \in \mathbb{Z}_+$ に対して成り立つと仮定すると，(12.163) の左の式より，

$$L_3v_j = L_3L_-v_{j-1} = L_-L_3v_{j-1} - L_{-1}v_{j-1} = (l-(j-1))v_j - v_j = (l-j)v_j,$$

(12.163) の右の式より，

$$L_+v_{j+1} = L_+L_-v_j = L_-L_+v_j + 2L_3v_j = (2l-(j-1))jv_j + 2(l-j)v_j = (2l-j)(j+1)v_j$$

[*250] 自己共役性に関しては定理 12.170 の (1) を参照.

であるから j の場合も成り立つ. よって帰納法より (12.164) が成り立つ. $\mathcal{H}_\pi$ は有限次元であり, 互いに異なる固有値に属する固有ベクトルは線型独立であるので, $v_j = 0$ なる $j \in \mathbb{N}$ が存在する. そのような $j \in \mathbb{N}$ で最小のものを $k+1 \in \mathbb{N}$ とおけば, (12.164) より,

$$0 = L_+ v_{k+1} = (2l-k)(k+1)v_k$$

であり, $v_{k+1} \neq 0$ であるから $k = 2l$ である. よって $l = \frac{k}{2} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ であり, $v_0, v_1, \cdots, v_{2l}$ は L_3 の固有値 $l, l-1, \cdots, -l$ に対する固有ベクトルである. $L_+ v_0 = 0$, $L_- v_{2l} = 0$ であることから,

$$\mathcal{K} = \mathrm{span}\{v_0, v_1, \cdots, v_{2l}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$$

は $L_\pm, L_3$ の作用に対して不変であり, 従って,

$$d\pi(A_1) = \frac{1}{2i}(L_+ + L_-), \quad d\pi(A_2) = \frac{1}{2}(L_- - L_+), \quad d\pi(A_3) = \frac{1}{i}L_3$$

の作用に対して不変である. (A_1, A_2, A_3) は $\mathrm{Lie}(G)$ の基底であるので, $\mathcal{K}$ は $d\pi(\mathrm{Lie}(G))$ の任意の元の作用に対して不変である. ここで命題 12.168 より G は連結であるから指数写像定理の系 12.165 より,

$$G = \{\exp(B_1)\cdots\exp(B_n) : n \in \mathbb{N}, B_1, \cdots, B_n \in \mathrm{Lie}(G)\} \tag{12.165}$$

であり,

$$\pi(\exp(B_1)\cdots\exp(B_n)) = \exp(d\pi(B_1))\cdots\exp(d\pi(B_n)) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall B_1, \cdots, B_n \in \mathrm{Lie}(G)) \tag{12.166}$$

であるから, $\mathcal{K}$ は π 不変である. 今, π の部分表現 $\pi|_{\mathcal{K}} : G \to \mathcal{U}(\mathcal{K})$ が既約であることを示す. π 不変な $\{0\}$ でない部分空間 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ を取り, $\mathcal{L} = \mathcal{K}$ が成り立つことを示せばよい. 任意の $v \in \mathcal{L}\backslash\{0\}$ を取り,

$$v = \sum_{j=0}^{2l} \alpha_j v_j$$

とおき, $\alpha_j \neq 0$ なる最大の $j \in \{0, 1, \cdots, 2l\}$ を j_0 とおく. $\mathcal{L}$ は π 不変であるから $L_\pm$ に対して不変であるので,

$$L_+^{j_0-1} v \in \mathcal{L}$$

であり, (12.164) より v_0 は $L_+^{j_0-1}v$ のスカラー倍なので, $v_0 \in \mathcal{L}$ である. よって,

$$v_j = L_-^j v_0 \in \mathcal{L} \quad (j = 0, 1, \cdots, 2l)$$

であるから, $\mathcal{L} = \mathcal{K}$ である. ゆえに $\pi|_{\mathcal{K}}$ は既約である.

$$C := d\pi(A_1)^2 + d\pi(A_2)^2 + d\pi(A_3)^2$$

とおくと, 任意の $k \in \{1, 2, 3\}$ に対し,

$$Cd\pi(A_k) = \sum_{j=1}^{3} d\pi(A_j)^2 d\pi(A_k) = \sum_{j=1}^{3} d\pi(A_j)d\pi(A_k)d\pi(A_j) + \sum_{j,l=1}^{3} \varepsilon_{j,k,l} d\pi(A_j)d\pi(A_l),$$

$$d\pi(A_k)C = \sum_{j=1}^{3} d\pi(A_k)d\pi(A_j)^2 = \sum_{j=1}^{3} d\pi(A_j)d\pi(A_k)d\pi(A_j) + \sum_{j,l=1}^{3} \varepsilon_{k,j,l} d\pi(A_l)d\pi(A_j)$$

であるから $Cd\pi(A_k) = d\pi(A_k)C$ である. よって C は $d\pi(\mathrm{Lie}(G))$ の任意の元と可換であるので,

$$C\pi(\exp(B)) = C\exp(d\pi(B)) = \exp(d\pi(B))C = \pi(\exp(B))C \quad (\forall B \in \mathrm{Lie}(G))$$

である. 従って (12.165), (12.166) より C は $\pi(G)$ の任意の元と可換であるので, $\pi|_{\mathcal{K}}$ の既約性と Schur の補題 12.43 より $C|_{\mathcal{K}} \in \mathcal{C}(\pi|_{\mathcal{K}}) = \mathbb{C}1$ である. そこで $C|_{\mathcal{K}} = \alpha 1$ とおく.

$$L_- L_+ = -d\pi(A_1)^2 - d\pi(A_2)^2 - L_3, \quad L_3^2 = -d\pi(A_3)^2$$

であるから,

$$C = -L_-L_+ - L_3^2 - L_3$$

である．よって $L_+v_0 = 0, L_3v_0 = lv_0$ より,

$$\alpha v_0 = Cv_0 = -L_-L_+v_0 - L_3^2v_0 - L_3v_0 = -l(l+1)v_0$$

であるから, $v_0 \neq 0$ より $\alpha = -l(l+1)$ である．ゆえに,

$$(d\pi(A_1)^2 + d\pi(A_2)^2 + d\pi(A_3)^2)v = Cv = -l(l+1)v \ \ (\forall v \in \mathcal{K})$$

が成り立つ． □

定義 12.174 (球面調和関数)**.** 任意の $l \in \mathbb{Z}_+$ に対し $\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N)$ を $\mathbb{R}^N$ 上の l 次の多項式全体とし,

$$\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^N) := \{p \in \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N) : p \text{ は調和関数 }\}$$

とおく．そして $N-1$ 次元球面 $S_{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$ に対し $\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N), \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^N)$ を S_{N-1} 上に制限したものを,

$$\mathcal{P}_l(S_{N-1}) := \{p|_{S_{N-1}} : p \in \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N)\},$$
$$\mathcal{H}_l(S_{N-1}) := \{p|_{S_{N-1}} : p \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^N)\}$$

とおく．$\mathcal{H}_l(S_{N-1})$ を l 次の球面調和関数空間と言い, $\mathcal{H}_l(S_{N-1})$ の元を l 次の球面調和関数と言う．

定理 12.175 (球面調和関数空間の基本性質)**.** 球面調和関数空間 $\mathcal{H}_l(S_{N-1})$ $(\forall l \in \mathbb{Z}_+)$ に対し,

(1) $\dim(\mathcal{H}_0(S_{N-1})) = 1, \dim(\mathcal{H}_1(S_{N-1})) = N$,

$$\dim(\mathcal{H}_l(S_{N-1})) = \binom{N-1+l}{N-1} - \binom{N-3+l}{N-1} \ \ (\forall l \geqslant 2)$$

であり,

$$\operatorname{span}\bigcup_{l \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{P}_l(S_{N-1}) = \operatorname{span}\bigcup_{l \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{H}_l(S_{N-1}) \tag{12.167}$$

が成り立つ．

(2) Hilbert 空間 $L^2(S_{N-1}, \mu_{S_{N-1}})$ は,

$$L^2(S_{N-1}, \mu_{S_{N-1}}) = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{H}_l(S_{N-1}) \tag{12.168}$$

と直交分解できる．ただし $\mu : \mathcal{B}_{S_{N-1}} \to [0, \infty)$ は面積測度 (定義 6.85) である．

証明. (1) 任意の $l \in \mathbb{Z}_+$, 任意の $p \in \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N)$ に対し, $p(r\omega) = r^l p(\omega)$ $(\forall r \in (0,\infty), \forall \omega \in S_{N-1})$ であるから,

$$\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N) \ni p \mapsto p|_{S_{N-1}} \in \mathcal{P}_l(S_{N-1}), \ \ \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^N) \ni p \mapsto p|_{S_{N-1}} \in \mathcal{H}_l(S_{N-1})$$

はそれぞれ線型同型写像である．よって,

$$\dim(\mathcal{P}_l(S_{N-1})) = \dim(\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N)), \ \ \dim(\mathcal{H}_l(S_{N-1})) = \dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^N)) \ \ (\forall l \in \mathbb{Z}_+)$$

が成り立つ．$l = 0, 1$ ならば $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^N) = \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N)$ なので,

$$\dim(\mathcal{H}_0(S_{N-1})) = \dim(\mathcal{H}_0(\mathbb{R}^N)) = \dim(\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N)) = 1,$$
$$\dim(\mathcal{H}_1(S_{N-1})) = \dim(\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^N)) = \dim(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^N)) = N$$

である．$l \geqslant 2$ とする．$\mathbb{R}^N$ 上の恒等写像を $\mathrm{id} = (\mathrm{id}_1, \cdots, \mathrm{id}_N) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ とおく．任意の

$$p = \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha \,\mathrm{id}^\alpha = \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha \,\mathrm{id}_1^{\alpha_1} \cdots \mathrm{id}_N^{\alpha_N} \in \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N)$$

に対し，微分作用素 $p(\partial)$ を，

$$p(\partial) := \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha \partial^\alpha = \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_N^{\alpha_N}$$

と定義し，

$$(p \mid q)_l := p(\partial)\overline{q} \quad (\forall p, q \in \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N))$$

と定義する．このとき任意の $p = \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha \,\mathrm{id}^\alpha \in \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N)$, $q = \sum_{|\beta|=l} b_\alpha \,\mathrm{id}^\beta \in \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N)$ に対し，

$$(p \mid q)_l = \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha \overline{b_\alpha}$$

であるから，$(\cdot \mid \cdot)_l$ は有限次元線型空間 $\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N)$ の内積である．そしてこの内積に関する $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N)$ の直交補空間は，$|\mathrm{id}|^2\mathcal{P}_{l-2}(\mathbb{R}^N)$ である (任意の $p \in \mathcal{P}_{l-2}(\mathbb{R}^N)$ に対し $(|\mathrm{id}|^2 p)(\partial) = \Delta p(\partial)$ であることによる)．よって，

$$\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N) = \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^N) \oplus |\mathrm{id}|^2\mathcal{P}_{l-2}(\mathbb{R}^N) \tag{12.169}$$

が成り立つ．ゆえに，

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{H}_l(S_{N-1})) &= \dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^N)) = \dim(\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N)) - \dim(\mathcal{P}_{l-2}(\mathbb{R}^N)) \\ &= \binom{N-1+l}{N-1} - \binom{N-3+l}{N-1}\end{aligned}$$

が成り立つ．また $|\mathrm{id}|^2$ が S_{N-1} 上で恒等的に 1 であることから，(12.169) より，任意の $p_l \in \mathcal{P}_l(S_{N-1})$ に対し $h_l \in \mathcal{H}_l(S_{N-1})$ と $p_{l-2} \in \mathcal{P}_{l-2}(S_{N-1})$ が取れて $p_l = h_l + p_{l-2}$ と表せる．よって帰納法により，$l-2k \in \{0,1\}$ なる $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h_{l-2j} \in \mathcal{H}_{l-2j}(S_{N-1})$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ が取れて，

$$p_l = h_l + h_{l-2} + \cdots + h_{l-2k}$$

と表せる．これより，

$$\mathrm{span} \bigcup_{l \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{P}_l(S_{N-1}) = \mathrm{span} \bigcup_{l \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{H}_l(S_{N-1})$$

が成り立つ．

(2) 定理 6.88 より $L^2(S_{N-1}, \mu_{S_{N-1}})$ において $C(S_{N-1})$ は稠密であり，Stone-Weierstrass の定理 5.192 より $C(S_{N-1})$ において (12.167) は稠密である．よって $L^2(S_{N-1}, \mu_{S_{N-1}})$ において (12.167) は稠密である．*251 これより (12.168) を示すには，$k \neq l$ なる任意の $k, l \in \mathbb{Z}_+$ に対し，$L^2(S_{N-1}, \mu_{S_{N-1}})$ において $\mathcal{H}_k(S_{N-1}) \perp \mathcal{H}_l(S_{N-1})$ が成り立つことを示せばよい．任意の $p \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^N)$, $q \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^N)$ を取る．

$$p(r\omega) = r^k p(\omega), \quad q(r\omega) = r^l q(\omega) \quad (\forall r \in (0, \infty), \forall \omega \in S_{N-1})$$

であるから，$0 \in \mathbb{R}^N$ 中心の極座標 (定義 6.98) による勾配の表示 (命題 6.71) を考えると，極座標が直交座標であること (命題 6.97 の (3)) から，

$$(\nabla p)(\omega) \cdot \omega = \frac{\partial p}{\partial r}(\omega) = kp(\omega), \quad (\nabla q)(\omega) \cdot \omega = \frac{\partial q}{\partial r}(\omega) = lq(\omega) \quad (\forall \omega \in S_{N-1})$$

となる．そして $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\} \subseteq \mathbb{R}^N$ の境界 S_{N-1} 上の外向き単位法線ベクトル場は $S_{N-1} \ni \omega \mapsto \omega \in \mathbb{R}^N$ である (定理 6.117) から，Gauss の発散定理 11.19 の (4) より，

$$\begin{aligned}0 &= \int_{|x|<1} (\Delta p(x)\overline{q}(x) - p(x)\Delta\overline{q}(x))\, dx \\ &= \int_{S_{N-1}} (((\nabla p)(\omega) \cdot \omega)\, \overline{q}(\omega) - p(\omega)(\nabla\overline{q})(\omega) \cdot \omega)\, d\mu_{S_{N-1}}(\omega) \\ &= (k-l) \int_{S_{N-1}} p(\omega)\overline{q(\omega)} d\mu_{S_{N-1}}(\omega)\end{aligned}$$

*251 $\mu_{S_{N-1}}$ は有限測度であることから $C(S_{N-1})$ の sup ノルムは L^2 ノルムより強いことに注意．

となる．よって $k \neq l$ より，

$$\int_{S_{N-1}} p(\omega)\overline{q(\omega)}d\mu_{S_{N-1}}(\omega) = 0$$

を得る．ゆえに $\mathcal{H}_k(S_{N-1}) \perp \mathcal{H}_l(S_{N-1})$ であるので (12.168) が成り立つ．

□

命題 12.176 (コンパクト群 $SO(N)$ の等質空間としての球面 S_{N-1})**.** 球面 $S_{N-1} \subseteq \mathbb{R}^N$ は通常の作用

$$SO(N) \times S_{N-1} \ni (R, u) \mapsto Ru \in S_{N-1}$$

によりコンパクト群 $SO(N)$ の等質空間 (定義 12.80) である．そして S_{N-1} の面積測度 $\mu_{S_{N-1}} : \mathcal{B}_{S_{N-1}} \to [0, \infty)$ は $SO(N)$-不変測度 (定義 12.93) である．

証明. 任意の $u \in S_{N-1}$ に対し，Schmidt の直交化より，$u_2, \cdots, u_N \in S_{N-1}$ で $u, u_2, \cdots, u_N$ が $\mathbb{R}^N$ の正規直交基底となるものが取れる．このとき $u, u_2, \cdots, u_N$ を縦ベクトルとして並べた行列 $R = (u, u_2, \cdots, u_N)$ は $O(N)$ に属するが，必要ならば $u_2, \cdots, u_N$ のうちのいずれかを -1 倍して $R \in SO(N)$ とすることができる．そしてこのとき $Re_1 = u$ である．ゆえに任意の $u \in S_{N-1}$ に対し $Re_1 = u$ なる $R \in SO(N)$ が存在するので S_{N-1} は $SO(N)$ の等質空間である．任意の $R \in O(N)$ に対し C^∞ 級同相写像 $S_{N-1} \ni u \mapsto Ru \in S_{N-1}$ の Jacobian (定義 6.91) は 1 なので変数変換公式 (定理 6.94) より，

$$\mu_{S_{N-1}}(R(B)) = \mu_{S_{N-1}}(B) \ \ (\forall B \in \mathcal{B}_{S_{N-1}})$$

が成り立つ．よって $\mu_{S_{N-1}}$ は $SO(N)$-不変測度である． □

命題 12.177 (コンパクト群 $SU(N)$ の等質空間としての球面 S_{2N-1})**.** $\mathbb{R}^{2N}$ と $\mathbb{C}^N$ を，

$$(x_1, y_1, \cdots, x_N, y_N) = (x_1 + iy_1, \cdots, x_N + iy_N)$$

とみなすことで同一視する．球面

$$S_{2N-1} = \{x \in \mathbb{R}^{2N} : |x| = 1\} = \{z \in \mathbb{C}^N : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}^N$$

は，通常の作用

$$SU(N) \times S_{2N-1} \ni (U, v) \mapsto Uv \in S_{2N-1}$$

によりコンパクト群 $SU(N)$ の等質空間 (定義 12.80) である．そして $S_{2N-1} \subseteq \mathbb{R}^{2N}$ の面積測度 $\mu_{S_{2N-1}} : \mathcal{B}_{S_{N-1}} \to [0, \infty)$ は $SU(N)$-不変測度 (定義 12.93) である．

証明. 任意の $v \in S_{2N-1}$ に対し Schmidt の直交化により $v_2, \cdots, v_N \in S_{2N-1}$ で $v, v_2, \cdots, v_N$ が $\mathbb{C}^N$ の正規直交基底となるものが取れる．このとき $v, v_2, \cdots, v_N$ を縦ベクトルとして並べたもの $U = (v, v_2, \cdots, v_N)$ は $U(N)$ に属するが，必要ならば $v_2, \cdots, v_N$ のいずれかを $(\det(U))^{-1}$ 倍して $U \in SU(N)$ とすることができる．そしてこのとき $Ue_1 = v$ である．ゆえに任意の $v \in S_{2N-1}$ に対し $Ue_1 = v$ なる $U \in SU(N)$ が存在するので，S_{2N-1} は $SU(N)$ の等質空間である．任意の $U \in SU(N)$ に対し，$\mathbb{C}^N = \mathbb{R}^{2N}$ の同一視のもとで $U : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$ は等長実線型同型写像であるから $U \in O(2N)$ とみなせて，C^∞ 級同相写像 $S_{2N-1} \ni v \mapsto Uv \in S_{2N-1}$ の Jacobian (定義 6.91) は 1 なので変数変換公式 (定理 6.94) より，

$$\mu_{S_{2N-1}}(R(B)) = \mu_{S_{2N-1}}(B) \ \ (\forall B \in \mathcal{B}_{S_{2N-1}})$$

が成り立つ．よって $\mu_{S_{2N-1}}$ は $SU(N)$-不変測度である． □

命題 12.176 より，球面 $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ はコンパクト群 $SO(3)$ の等質空間であり，S_2 の面積測度 $\mu_{S_2} : \mathcal{B}_{S_2} \to [0, \infty)$ は $SO(3)$-不変測度である．そこで，

$$\rho : SO(3) \to \mathcal{U}(L^2(S_2, \mu_{S_2})), \ \ \rho(R)f(x) = f(R^{-1}x) \ \ (\forall f \in L^2(S_2, \mu_{S_2}), \forall R \in SO(3), \forall x \in S_2)$$

を $SO(3)$ の $L^2(S_2, \mu_{S_2})$ 上への正則表現 (定義 12.100) とする．また任意の $l \in \mathbb{Z}_+$ に対し $\mathcal{H}_l(S_2)$ を l 次の球面調和関数空間 (定義 12.174) とする．このとき，

定理 12.178 ($SO(3)$ の球面 L^2 空間上への正則表現と既約表現の完全分類)**.** 次が成り立つ.

(1) 任意の $l \in \mathbb{Z}_+$ に対し $\mathcal{H}_l(S_2) \subseteq L^2(S_2, \mu_{S_2})$ は ρ 不変であり, ρ の $\mathcal{H}_l(S_2)$ 上への制限 $\rho_l : SO(3) \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_l(S_2))$ は既約である. そして $\rho = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_+} \rho_l$ が成り立つ.

(2) コンパクト群 $SO(3)$ の任意の既約なユニタリ表現はある $l \in \mathbb{Z}_+$ に対し ρ_l とユニタリ同値である.

証明. (1) 正の向きの直交座標による Laplacian の表示 (定理 6.78) より, 任意の $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ と任意の $R \in SO(3)$ に対し,

$$(\Delta u) \circ R^{-1} = \Delta(u \circ R^{-1})$$

が成り立つ. よって u が調和関数ならば $u \circ R^{-1}$ も調和関数であるので, 任意の $l \in \mathbb{Z}_+$ に対し $\mathcal{H}_l(S_2)$ は ρ 不変である. 定理 12.175 の (2) より $L^2(S_2, \mu_{S_2}) = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{H}_l(S_2)$ であるので, $\rho = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_+} \rho_l$ が成り立つ. 任意の $l \in \mathbb{Z}_+$ を取り固定する. (F_1, F_2, F_3) を $\mathrm{Lie}(SO(3))$ の標準基底 (定義 12.171) とする. $\mathcal{H}_l(S_2)$ は有限次元であるから, $\rho_l : SO(3) \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_l(S_2))$ の微分表現 (定義 12.169) $d\rho_l$ に対し, $d\rho_l(F)$ $(\forall F \in \mathrm{Lie}(SO(3)))$ は $\mathcal{H}_l(S_2)$ 上で定義され, 任意の $u \in \mathcal{H}_l(S_2)$ に対し, 命題 12.172 より,

$$d\rho_l(F_1)u = \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\theta}(\rho(\exp(\theta F_1)) - 1)u = \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\theta}(u \circ \exp(-\theta F_1) - u) = x_3 \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

が成り立つ. ただし (x_1, x_2, x_3) は $\mathbb{R}^3$ の標準座標である. 同様にして任意の $u \in \mathcal{H}_l(S_2)$ に対し,

$$d\rho_l(F_2)u = x_1 \frac{\partial u}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad d\rho_l(F_3)u = x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

が成り立つことが分かる. そこで $v_0^l \in \mathcal{H}_l(S_2)$ を,

$$v_0^l(x_1, x_2, x_3) := (x_1 + ix_2)^l$$

(正則関数は調和関数とみなせる (命題 11.40) ことに注意) と定義すると,

$$(id\rho_l(F_1) - d\rho_l(F_2))v_0^l = 0, \quad id\rho_l(F_3)v_0^l = lv_0^l$$

が成り立つので, 定理 12.173 より,

$$v_j^l := (id\rho_l(F_1) + d\rho_l(F_2))^j v_0^l \in \mathcal{H}_l(S_2) \ \ (j = 1, \cdots, 2l)$$

とおけば, $v_0^l, v_1^l, \cdots, v_{2l}^l$ はそれぞれ自己共役作用素 $id\rho_l(F_3)$ の固有値 $l, l-1, \cdots, -l$ に対する固有ベクトルである. ここで定理 12.175 の (1) より,

$$\dim(\mathcal{H}_l(S_2)) = 2l + 1$$

であるから, $v_0^l, v_1^l, \cdots, v_{2l}^l$ は $\mathcal{H}_l(S_2)$ の基底である. よって定理 12.173 より $\rho_l : SO(3) \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_l(S_2))$ は既約である.

(2) コンパクト群 $SO(3)$ の既約なユニタリ表現のユニタリ同値類全体 $\widehat{SO(3)}$ (定義 12.106) が $\{[\rho_l]\}_{l\in\mathbb{Z}_+}$ と一致することを示せばよく, そのためには, Peter-Weyl の定理 12.117 より, 対応する $SO(3)$ の指標の族 $\{\gamma_{[\rho_l]}\}_{l\in\mathbb{Z}_+}$ が L^2 類関数空間 $ZL^2(SO(3))$ の CONS であることを示せばよい. そしてそのためには, $ZL^2(SO(3))$ において連続類関数空間 $ZC(SO(3))$ が稠密である (系 12.118) ことから, $\mathrm{span}\{\gamma_{[\rho_l]}\}_{l\in\mathbb{Z}_+} \subseteq ZC(SO(3))$ が $ZC(SO(3))$ において sup ノルムで稠密であることを示せばよい. 任意の $f \in ZC(SO(3))$ に対し, $\widehat{f} \in C([0, \pi])$ を,

$$\widehat{f}(\theta) := f(\exp(\theta F_3)) \ \ (\forall \theta \in [0, \pi])$$

(F_3 は $\mathrm{Lie}(SO(3))$ の標準基底 (定義 12.171) の第 3 成分) と定義する. 任意の $R \in SO(3)$ に対し, 命題 12.167 と命題 12.172 より, $A \in O(3)$ と $\theta \in [0, 2\pi]$ で,

$$R = A \exp(\theta F_3) A^{-1} \tag{12.170}$$

を満たすものが取れる．ここで必要ならば $\exp(\theta F_3)$ に両側から, A に右から,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を掛けることで, 任意の $R \in SO(3)$ に対し, (12.170) を満たす $A \in SO(3), \theta \in [0, \pi]$ が取れることが分かる．よって類関数の定義 12.114 より任意の $f \in ZC(SO(3))$, 任意の $R \in SO(3)$ に対し $f(R) = \widehat{f}(\theta)$ を満たす $\theta \in [0, \pi]$ が取れるので,

$$ZC(SO(3)) \ni f \mapsto \widehat{f} \in C([0, \pi]) \tag{12.171}$$

は sup ノルムに関して等長線型写像である．今, 任意の $l \in \mathbb{Z}_+$ に対し (1) の証明で構成した $\mathcal{H}_l(S_2)$ の基底 $v_0^l, v_1^l, \cdots, v_{2l}^l$ を考え, これを正規化したものを $u_0^l, u_1^l, \cdots, u_{2l}^l \in \mathcal{H}_l(S_2)$ とおく．これらは自己共役作用素 $id\rho_l(F_3)$ の固有値 $l, l-1, \cdots, -l$ に対する単位固有ベクトルであるので $\mathcal{H}_l(S_2)$ の CONS であり, 従って, 指標の定義 12.115 より,

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma_{[\rho_l]}}(\theta) &= \gamma_{[\rho_l]}(\exp(\theta F_3)) = \mathrm{Tr}(\rho_l(\exp(\theta F_3))) = \mathrm{Tr}(\exp(\theta d\rho_l(F_3))) \\ &= \sum_{j=0}^{2l} \left(\exp\left(\theta d\rho_l(F_3)\right) u_j^l \mid u_j^l\right) = \sum_{j=0}^{2l} \left(\exp\left(i\theta\left(-id\rho_l(F_3)\right)\right) u_j^l \mid u_j^l\right) \\ &= \sum_{j=0}^{2l} \exp(i\theta(-(l-j))) = \sum_{j=-l}^{l} \exp(ij\theta) = 1 + 2\sum_{j=1}^{l} \cos(j\theta) \quad (\forall \theta \in [0, \pi]) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって,

$$\widehat{\gamma_{[\rho_l]}}(\theta) = 1 + 2\sum_{j=1}^{l} \cos(j\theta) \quad (\forall l \in \mathbb{Z}_+, \forall \theta \in [0, \pi]) \tag{12.172}$$

である． ここで Stone-Weierstrass の定理 5.192 より $C([0, \pi])$ において $\mathrm{span}\{\cos(j\theta)\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ は稠密であり, (12.172) より,

$$\mathrm{span}\{\widehat{\gamma_{[\rho_l]}}\}_{l \in \mathbb{Z}_+} = \mathrm{span}\{\cos(j\theta)\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$$

であるから, $C([0, \pi])$ において $\mathrm{span}\{\widehat{\gamma_{[\rho_l]}}\}_{l \in \mathbb{Z}_+}$ は稠密である．よって (12.171) が等長線型写像であることから, $ZC(SO(3))$ において $\mathrm{span}\{\gamma_{[\rho_l]}\}_{l \in \mathbb{Z}_+}$ は稠密である．ゆえに $\widehat{SO(3)} = \{[\rho_l]\}_{l \in \mathbb{Z}_+}$ が成り立つ．

□

定義 12.179. 任意の $l \in \mathbb{Z}_+$ に対し, $\mathbb{C}^2$ 上の l 次の多項式を球面 $S_3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |(z_1, z_2)| = 1\} \subseteq \mathbb{C}^2$ 上に制限したもの全体を $\mathcal{A}_l(S_3)$ と表す．

命題 12.177 より, 球面 $S_3 = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z| = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1\}$ はコンパクト群 $SU(2)$ の等質空間であり, S_3 の面積測度 $\mu_{S_3} : \mathcal{B}_{S_2} \to [0, \infty)$ は $SU(2)$-不変測度である．そこで,

$$\rho : SU(2) \to \mathcal{U}(L^2(S_3, \mu_{S_3})), \quad \rho(U)f(z) = f(U^{-1}z) \quad (\forall f \in L^2(S_3, \mu_{S_3}), \forall U \in SU(2), \forall z \in S_3)$$

を $SU(2)$ の $L^2(S_3, \mu_{S_3})$ 上への正則表現 (定義 12.100) とする．このとき,

定理 12.180 ($SU(2)$ の球面 L^2 空間上への正則表現と既約表現の完全分類)**.** 次が成り立つ．

(1) 各 $l \in \mathbb{Z}_+$ に対し $\mathcal{A}_l(S_3)$ は ρ 不変であり, ρ の $\mathcal{A}_l(S_3)$ 上への制限 ρ_l は既約である．

(2) $SU(2)$ の任意の既約なユニタリ表現は, ある $l \in \mathbb{Z}_+$ に対し ρ_l とユニタリ同値である．

(3) 任意の $l \in \mathbb{Z}_+$ に対し ρ における $[\rho_l]$ の重複度 (定義 12.109) は $l+1$ であり, ρ における $[\rho_l]$ 成分 (定義 12.107) は $\mathcal{H}_l(S_3)$ (l 次の球面調和関数空間) である．

証明. (1) 各 $l \in \mathbb{Z}_+$ に対し $\mathcal{A}_l(S_3)$ (定義 12.179) が ρ 不変であることは自明である．任意の $l \in \mathbb{Z}_+$ を取り固定し, (E_1, E_2, E_3) を $\mathrm{Lie}(SU(2))$ の標準基底 (定義 12.171) とする． $\mathcal{A}_l(S_3)$ は有限次元であるから, $\rho_l : SU(2) \to$

$\mathcal{U}(\mathcal{A}_l(S_3))$ の微分表現 (定義 12.169) $d\rho_l$ に対し, $d\rho_l(E)$ $(\forall E \in \mathrm{Lie}(SU(2)))$ は $\mathcal{A}_l(S_3)$ 上で定義され, 任意の $u \in \mathcal{A}_l(S_3)$ に対し, 命題 12.172 より,

$$d\rho_l(E_1)u = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}(\rho(\exp(\theta E_1)) - 1)u = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}(u\circ\exp(-\theta E_1) - u) = \frac{i}{2}\left(z_2\frac{\partial u}{\partial z_1} + z_1\frac{\partial u}{\partial z_2}\right)$$

が成り立つ. ただし (z_1, z_2) は $\mathbb{C}^2$ の標準座標である. 同様にして任意の $u \in \mathcal{A}_l(S_3)$ に対し,

$$d\rho_l(E_2) = \frac{1}{2}\left(z_2\frac{\partial u}{\partial z_1} - z_1\frac{\partial u}{\partial z_2}\right),\quad d\rho_l(E_3) = \frac{i}{2}\left(z_1\frac{\partial u}{\partial z_1} - z_2\frac{\partial u}{\partial z_2}\right)$$

が成り立つことが分かる. そこで $v_0^l \in \mathcal{A}_l(S_3)$ を,

$$v_0^l(z_1, z_2) := z_2^l$$

と定義すると,

$$(id\rho_l(E_1) - d\rho_l(E_2))v_0^l = 0,\quad id\rho_l(E_3)v_0^l = \frac{l}{2}v_0^l$$

が成り立つので, 定理 12.173 より,

$$v_j^l := (id\rho_l(E_1) + d\rho_l(E_2))^j v_0^l \in \mathcal{A}_l(S_2)\quad (j = 0, 1, \cdots, l)$$

とおけば, $v_0^l, v_1^l, \cdots, v_l^l$ はそれぞれ自己共役作用素 $id\rho_l(E_3)$ の固有値 $\frac{l}{2}, \frac{l}{2} - 1, \cdots, -\frac{l}{2}$ に対する固有ベクトルである. ここで $\mathcal{A}_l(S_3)$ の定義 12.179 より明らかに,

$$\dim(\mathcal{A}_l(S_3)) = l + 1$$

であるから, $v_0^l, v_1^l, \cdots, v_l^l$ は $\mathcal{A}_l(S_3)$ の基底である. よって定理 12.173 より ρ_l は既約である.

(2) コンパクト群 $SU(2)$ の既約なユニタリ表現のユニタリ同値類全体 $\widehat{SU(2)}$ (定義 12.106) が $\{[\rho_l]\}_{l\in\mathbb{Z}_+}$ と一致することを示せばよく, そのためには, Peter-Weyl の定理 12.117 より, 対応する $SU(2)$ の指標の族 $\{\gamma_{[\rho_l]}\}_{l\in\mathbb{Z}_+}$ が L^2 類関数空間 $ZL^2(SU(2))$ の CONS であることを示せばよい. そしてそのためには, $ZL^2(SU(2))$ において連続類関数空間 $ZC(SU(2))$ が稠密である (系 12.118) ことから, $\mathrm{span}\{\gamma_{[\rho_l]}\}_{l\in\mathbb{Z}_+} \subseteq ZC(SU(2))$ が $ZC(SU(2))$ において sup ノルムで稠密であることを示せばよい. 任意の $f \in ZC(SU(2))$ に対し, $\widehat{f} \in C([0, 2\pi])$ を,

$$\widehat{f}(\theta) := f(\exp(\theta E_3))\quad (\forall\theta \in [0, 2\pi])$$

(E_3 は $\mathrm{Lie}(SU(2))$ の標準基底 (定義 12.171) の第 3 成分) と定義する. 任意の $U \in SU(2)$ に対し U は正規行列だから, 命題 12.172 より, $V \in U(2)$ と $\theta \in [0, 4\pi]$ で,

$$U = V\exp(\theta E_3)V^{-1} \tag{12.173}$$

なるものが取れる. ここで必要ならば V に $(\det(V))^{-1}$ を掛け, $\exp(\theta E_3)$ に両側から, V に右から,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を掛けることで, 任意の $U \in SU(2)$ に対し, (12.173) を満たす $V \in SU(2)$ と $\theta \in [0, 2\pi]$ が取れることが分かる. よって類関数の定義 12.114 より任意の $f \in ZC(SU(2))$, 任意の $U \in SU(2)$ に対し, $f(U) = \widehat{f}(\theta)$ なる $\theta \in [0, 2\pi]$ が取れるので,

$$ZC(SU(2)) \ni f \mapsto \widehat{f} \in C([0, 2\pi])$$

は sup ノルムに関して等長線型写像である. 今, 任意の $l \in \mathbb{Z}_+$ に対し (1) の証明で構成した $\mathcal{A}_l(S_3)$ の基底 $v_0^l, v_1^l, \cdots, v_l^l$ を考え, これを正規化したものを $u_0^l, u_1^l, \cdots, u_l^l \in \mathcal{A}_l(S_3)$ とおく. これらは自己共役作用素

$id\rho_l(E_3)$ の固有値 $\frac{l}{2}, \frac{l}{2}-1, \cdots, -\frac{l}{2}$ に対する単位固有ベクトルであるので $\mathcal{A}_l(S_3)$ の CONS であり, 従って指標の定義 12.115 より,

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma_{[\rho_l]}}(\theta) &= \gamma_{[\rho_l]}(\exp(\theta E_3)) = \mathrm{Tr}(\rho_l(\exp(\theta E_3))) = \mathrm{Tr}(\exp(\theta d\rho_l(E_3))) \\ &= \sum_{j=0}^{l}(\exp(\theta d\rho_l(E_3))u_j^l \mid u_j^l) = \sum_{j=0}^{l}(\exp(i\theta(-id\rho_l(E_3)))u_j^l \mid u_j^l) \\ &= \sum_{j=0}^{l}\exp\left(-i\theta\left(\frac{l}{2}-j\right)\right) = 2\sum_{j=1}^{l}\cos\left(j\frac{\theta}{2}\right) \quad (\forall\theta\in[0,2\pi])\end{aligned}$$

が成り立つ. よって,

$$\widehat{\gamma_{\rho_l}}(\theta) = 2\sum_{j=1}^{l}\cos\left(j\frac{\theta}{2}\right), \quad \widehat{\gamma_{[\rho_0]}}(\theta) = 1 \quad (\forall l\in\mathbb{N}, \forall\theta\in[0,2\pi]) \tag{12.174}$$

である. ここで Stone-Weierstrass の定理 5.192 より $\mathrm{span}\{\cos\left(j\frac{\theta}{2}\right)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ は $C([0,2\pi])$ において稠密であり, (12.174) より,

$$\mathrm{span}\{\widehat{\gamma_{[\rho_l]}}\}_{l\in\mathbb{Z}_+} = \mathrm{span}\left\{\cos\left(j\frac{\theta}{2}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$$

であるから $C([0,2\pi])$ において $\mathrm{span}\{\widehat{\gamma_{[\rho_l]}}\}_{l\in\mathbb{Z}_+}$ は稠密である. よって (12.173) が等長線型写像であることから $ZC(SU(2))$ において $\mathrm{span}\{\gamma_{[\rho_l]}\}_{l\in\mathbb{Z}_+}$ は稠密である. ゆえに $\widehat{SU(2)} = \{\gamma_{[\rho_l]}\}_{l\in\mathbb{Z}_+}$ が成り立つ.

(3) $e_1 = (1,0)\in\mathbb{C}^2$ とおく. 任意の $l\in\mathbb{Z}_+$ を取る. $e_1\in S_3$ における $SU(2)$ の固定部分群は $\{1\}$ であるから, 定理 12.120 より, ρ における $[\rho_l]$ の重複度は ρ_l の表現空間そのものの次元 $\dim(\mathcal{A}_l(S_3)) = l+1$ である. (2) の証明における $\mathcal{A}_l(S_3)$ の CONS $u_0^l, u_1^l, \cdots, u_l^l$ を取り, 任意の $v\in\mathcal{A}_l(S_3)$ に対し $T_j^l v\in C(S_3)$ を,

$$T_j^l v : S_3 \ni Ue_1 \mapsto (v \mid \rho_l(U)u_j^l) \in \mathbb{C} \tag{12.175}$$

と定義し, 線型作用素

$$T_j^l : \mathcal{A}_l(S_3) \ni v \mapsto T_j^l v \in L^2(S_3, \mu_{S_3})$$

を定義する. このとき定理 12.120 より ρ における $[\rho_l]$ 成分は,

$$\bigoplus_{j=0}^{l}\mathrm{Ran}(T_j^l)$$

である. (1) の証明より各 $j\in\{0,1,\cdots,l\}$ に対し u_j^l はあるスカラー $c_j^l\in\mathbb{C}$ に対し,

$$u_j^l(z_1,z_2) = c_j^l z_1^j z_2^{l-j} \quad (\forall(z_1,z_2)\in S_3\subseteq\mathbb{C}^2)$$

と表せることが分かる. よって任意の $v\in\mathcal{A}_l(S_3)$, 任意の $(a,b)\in S_3\subseteq\mathbb{C}^2$ に対し, (12.175) より,

$$\overline{T_j^l v(a,b)} = c_j^l\int_{S_3}(az_1+bz_2)^j(-\bar{b}z_1+\bar{a}z_2)^{l-j}\overline{v(z_1,z_2)}d\mu_{S_3}(z_1,z_2) \tag{12.176}$$

である. ここで $a = x_1+ix_2$, $b = x_3+ix_4$ $(x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R})$ とおけば,

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\\bar{a}\\b\\\bar{b}\end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\bar{a}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \\ \frac{\partial}{\partial b} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3} - i\frac{\partial}{\partial x_4}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\bar{b}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3} + i\frac{\partial}{\partial x_4}\right),\end{aligned}$$

従って Laplacian は,

$$\Delta = \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial \overline{a}\partial a} + \frac{\partial^2}{\partial \overline{b}\partial b}\right)$$

と表せる. よって (12.175) と Lebesgue 優収束定理より,

$$\Delta T_j^l v = 0 \quad (\forall v \in \mathcal{A}_l(S_3), j = 0, 1, \cdots, l)$$

であるから,

$$\bigoplus_{j=0}^{l} \mathrm{Ran}(T_j^l) \subseteq \mathcal{H}_l(S_3) \quad (\forall l \in \mathbb{Z}_+) \tag{12.177}$$

が成り立つ. ここで定理 12.120 より,

$$L^2(S_3, \mu_{S_3}) = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}_+} \bigoplus_{j=0}^{l} \mathrm{Ran}(T_j^l)$$

であり, 定理 12.175 の (2) より,

$$L^2(S_3, \mu_{S_3}) = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{H}_l(S_3)$$

であるから, (12.177) より,

$$\bigoplus_{j=0}^{l} \mathrm{Ran}(T_j^l) = \mathcal{H}_l(S_3) \quad (\forall l \in \mathbb{Z}_+)$$

が成り立つ. ゆえに任意の $l \in \mathbb{Z}_+$ に対し ρ における $[\rho_l]$ 成分は $\mathcal{H}_l(S_3)$ である.

□

12.9 Weyl 型 CCR の表現と Heisenberg 群, Schrödinger 表現, Stone-von Neumann の一意性定理

定義 12.181 ($\mathbb{R}^{2N}$ の標準シンプレクティック形式)**.** 任意の $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{2N}$ に対し,

$$\omega_N((x, y), (x', y')) := x \cdot y' - x' \cdot y \in \mathbb{R}$$

とおき, $\mathbb{R}^{2N}$ 上の反対称双線型汎関数 (定義 2.48)

$$\omega_N : \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$$

を定義する. これを $\mathbb{R}^{2N}$ 上の標準シンプレクティック形式と言う.

注意 12.182. 標準シンプレクティック形式 $\omega_N : \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ は非退化である. すなわち, $z \in \mathbb{R}^{2N}$ に対し,

$$\omega_N(z, z') = 0 \quad (\forall z' \in \mathbb{R}^{2N}) \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$$

が成り立つ. 実際, 零行列と単位行列 $0_N, 1_N \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ に対し,

$$J := \begin{pmatrix} 0_N & 1_N \\ -1_N & 0_N \end{pmatrix} \in M_{2N \times 2N}(\mathbb{R})$$

とおくと,

$$\omega_N(z, z') = z \cdot (Jz') \quad (\forall z, z' \in \mathbb{R}^{2N})$$

であり, J は正則行列である.

定義 12.183 (Heisenberg 群)**.** 任意の $(x, y, \lambda), (x', y', \lambda') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ に対し,

$$(x, y, \lambda)(x', y', \lambda') := \left(x + x', y + y', \lambda + \lambda' + \frac{1}{2}\omega_N((x, y), (x', y'))\right)$$

とおいて $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ における二項演算を定義する. $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ はこの二項演算によって非可換乗法群をなす. $(0, 0, 0)$ がその単位元であり, $(-x, -y, -\lambda)$ が (x, y, λ) の逆元である. そしてこの群は $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ の Euclid 空間としての位相により局所コンパクト群をなす. この局所コンパクト群を H_N と表し, N 次の Heisenberg 群と呼ぶ.

定義 12.184 (Weyl 型 CCR の表現)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. $\mathcal{H}$ 上の $2N$ 個の自己共役作用素の組 $(Q,P) = (Q_1,\cdots,Q_N,P_1,\cdots,P_N)$ が自由度 N の Weyl 型 CCR の $\mathcal{H}$ 上への表現であるとは, $Q = (Q_1,\cdots,Q_N)$, $P = (P_1,\cdots,P_N)$ がそれぞれ N 個の互いに強可換 (定義 12.136) な自己共役作用素の組であり, $\mathbb{R}^N$ の $\mathcal{H}$ 上へのユニタリ表現

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}^N \ni x \mapsto e^{ixQ} \in \mathcal{U}(\mathcal{H}),\\&\mathbb{R}^N \ni y \mapsto e^{iyP} \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\end{aligned}$$

(強可換な自己共役作用素の組に対する結合スペクトル測度による積分の定義 12.138 を参照) が,

$$e^{ixQ}e^{iyP} = e^{-ix\cdot y}e^{iyP}e^{ixQ} \quad (\forall x,y \in \mathbb{R}^N) \tag{12.178}$$

を満たすことを言う.

定義 12.185 (Weyl 型 CCR の表現に対応する Heisenberg 群のユニタリ表現)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし, $(Q,P) = (Q_1,\cdots,Q_N,P_1,\cdots,P_N)$ を自由度 N の Weyl 型 CCR の $\mathcal{H}$ 上への表現とする. このとき N 次の Heisenberg 群 H_N に対し,

$$\pi_{Q,P} : H_N \ni (x,y,\lambda) \mapsto e^{-i\left(\lambda-\frac{1}{2}x\cdot y\right)}e^{ixQ}e^{iyP} \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \tag{12.179}$$

は H_N の $\mathcal{H}$ 上へのユニタリ表現である. 実際, (12.178) より, 任意の $(x,y,\lambda),(x',y',\lambda') \in H_N$ に対し,

$$\begin{aligned}\pi_{Q,P}(x,y,\lambda)\pi_{Q,P}(x',y',\lambda') &= e^{-i\left(\lambda+\lambda'-\frac{1}{2}(x\cdot y+x'\cdot y')\right)}e^{ixQ}e^{iyP}e^{ix'Q}e^{iy'P}\\&= e^{-i\left(\lambda+\lambda'-\frac{1}{2}(x\cdot y+2x'\cdot y+x'\cdot y')\right)}e^{i(x+x')Q}e^{i(y+y')P}\\&= e^{-i\left(\lambda+\lambda'+\frac{1}{2}(x\cdot y'-x'\cdot y)-\frac{1}{2}(x+x')\cdot(y+y')\right)}e^{i(x+x')Q}e^{i(y+y')P}\\&= \pi_{Q,P}\left(x+x',y+y',\lambda+\lambda'+\frac{1}{2}(x\cdot y'-x'\cdot y)\right)\\&= \pi_{Q,P}((x,y,\lambda)(x',y',\lambda'))\end{aligned}$$

である. $\pi_{Q,P}$ を Weyl 型 CCR の表現 (Q,P) に対応する Heisenberg 群 H_N のユニタリ表現と呼ぶこととする.

定理 12.186 (Heisenberg 群のユニタリ表現が Weyl 型 CCR の表現に対応するユニタリ表現であるための条件)**.** π を N 次の Heisenberg 群 H_N のユニタリ表現とする. このとき次は互いに同値である.

(1) 自由度 N の Weyl 型 CCR の $\mathcal{H}_\pi$ 上への表現 (Q,P) で, $\pi = \pi_{Q,P}$ (定義 12.185) なるものが唯一つ存在する.
(2) $\pi(0,0,\lambda) = e^{-i\lambda}1$ $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$ が成り立つ.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は (12.179) より自明である. (2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとする. このとき,

$$\mathbb{R}^N \ni x \mapsto \pi(x,0,0) \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi),\quad \mathbb{R}^N \ni y \mapsto \pi(0,y,0) \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi) \tag{12.180}$$

はそれぞれ $\mathbb{R}^N$ の $\mathcal{H}_\pi$ 上へのユニタリ表現であるから, SNAG の定理 12.139 より, N 個の互いに強可換な $\mathcal{H}_\pi$ 上の自己共役作用素の組 $Q = (Q_1,\cdots,Q_N)$ と $P = (P_1,\cdots,P_N)$ で,

$$e^{ixQ} = \pi(x,0,0),\quad e^{iyP} = \pi(0,y,0) \quad (\forall x,y \in \mathbb{R}^N)$$

なるものが一意存在する. 任意の $x,y \in \mathbb{R}^N$ に対し,

$$\begin{aligned}e^{ixQ}e^{iyP} &= \pi(x,0,0)\pi(0,y,0) = \pi\left(x,y,\frac{1}{2}x\cdot y\right) = e^{-i\frac{1}{2}x\cdot y}\pi(x,y,0),\\e^{iyP}e^{ixQ} &= \pi(0,y,0)\pi(x,0,0) = \pi\left(x,y,-\frac{1}{2}x\cdot y\right) = e^{i\frac{1}{2}x\cdot y}\pi(x,y,0)\end{aligned}$$

であるから,

$$e^{ixQ}e^{iyP} = e^{-ix\cdot y}e^{iyP}e^{ixQ}$$

である．ゆえに (Q,P) は自由度 N の Weyl 型 CCR の $\mathcal{H}_\pi$ 上への表現である．そして，

$$\pi(x,y,\lambda)=\pi\left((x,0,0)(0,y,0)\left(0,0,\lambda-\frac{1}{2}x\cdot y\right)\right)=e^{-i\left(\lambda-\frac{1}{2}x\cdot y\right)}e^{ixQ}e^{iyP}$$
$$=\pi_{Q,P}(x,y,\lambda)\ \ (\forall(x,y,\lambda)\in H_N)$$

であるから (1) が成り立つ． □

定義 12.187 (Weyl 型 CCR の表現の既約性)**.** Weyl 型 CCR の表現 (Q,P) が既約であるとは，(Q,P) に対応する Heisenberg 群のユニタリ表現 (定義 12.185) $\pi_{Q,P}$ が既約であることを言う．

定理 12.188. Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の自己共役作用素

$$Q_j:=\mathrm{id}_j,\ \ P_j:=\mathcal{F}^{-1}Q_j\mathcal{F}=-i\partial_j\ \ (j=1,\cdots,N)$$

を定義する．ただし id_j は恒等写像 $\mathrm{id}=(\mathrm{id}_1,\cdots,\mathrm{id}_N):\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ の第 j 成分による $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の掛け算作用素 (定義 10.81) を表し，$\mathcal{F}:L^2(\mathbb{R}^N)\to L^2(\mathbb{R}^N)$ は Fourier 変換*252であり，∂_j は第 j 座標に関する弱微分である．*253 このとき $Q=(Q_1,\cdots,Q_N)$, $P=(P_1,\cdots,P_N)$ はそれぞれ互いに強可換な自己共役作用素の組であり，任意の Borel 関数 $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ に対し $f(Q)$*254は f による $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の掛け算作用素である．そして $f(P)=\mathcal{F}^{-1}f(Q)\mathcal{F}$ が成り立つ．また，

$$e^{iyP}=T_{-y}\ \ (\forall y\in\mathbb{R}^N)$$

*255であり，(Q,P) は自由度 N の Weyl 型 CCR の $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上への表現である．

証明. $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の掛け算作用素を司る射影値測度を $E:\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}\to\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}^N))$ とおく．

$$Q_j:=\int_{\mathbb{R}^N}\lambda_j dE(\lambda)\ \ (j=1,\cdots,N)$$

であるから，命題 10.66 より，任意の Borel 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対し，

$$f(Q_j)=\int_{\mathbb{R}^N}f(\lambda_j)dE(\lambda)\ \ (j=1,\cdots,N) \tag{12.181}$$

が成り立つ．特に，

$$e^{ix_jQ_j}=\int_{\mathbb{R}^N}e^{ix_j\lambda_j}dE(\lambda)\ \ (\forall x_j\in\mathbb{R},j=1,\cdots,N)$$

であるから，$Q_1,\cdots,Q_N$ は互いに強可換である．そこで $Q=(Q_1,\cdots,Q_N)$ の結合スペクトル測度 (定義 12.138) を $E_Q:\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}\to\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}^N))$ とおくと，(12.181) より，任意の $B_1,\cdots,B_N\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ に対し，

$$E_Q(B_1\times\cdots\times B_N)=E_{Q_1}(B_1)\cdots E_{Q_N}(B_N)=\int_{\mathbb{R}^N}\chi_{B_1}(\lambda_1)\cdots\chi_{B_N}(\lambda_N)dE(\lambda)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^N}\chi_{B_1\times\cdots\times B_N}(\lambda)dE(\lambda)=E(B_1\times\cdots\times B_N)$$

であり，$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ は半集合代数 (定義 5.60)

$$\{B_1\times\cdots\times B_N:B_1,\cdots,B_N\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$$

によって生成される σ-加法族であるから，命題 5.65 と単調族定理 5.70 より，

$$E_Q(B)=E(B)\ \ (\forall B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N})$$

*252 Plancherel の定理 8.71 よりユニタリ作用素．
*253 緩増加超関数の Fourier 変換の基本性質 (命題 8.70) を参照．
*254 強可換な自己共役作用素の組に対する結合スペクトルによる積分の定義 12.138 を参照
*255 T_y は y による平行移動 (定義 8.44)．すなわち $\mathbb{R}^N$ 上の関数 f に対し $T_yf(x)=f(x-y)$ $(\forall x,y\in\mathbb{R}^N)$．

が成り立つ. よって任意の Borel 関数 $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ に対し,

$$f(Q)=\int_{\mathbb{R}^N}f(\lambda)dE_Q(\lambda)=\int_{\mathbb{R}^N}f(\lambda)dE(\lambda)$$

であるから $f(Q)$ は f による $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の掛け算作用素である. Plancherel の定理 8.71 より Fourier 変換 $\mathcal{F}:L^2(\mathbb{R}^N)\to L^2(\mathbb{R}^N)$ はユニタリ作用素であるから, ユニタリ作用素による射影値測度の変換 (命題 10.54) より,

$$P_j=\mathcal{F}^{-1}Q_j\mathcal{F}=\mathcal{F}^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}}\lambda dE_{Q_j}(\lambda)\right)\mathcal{F}=\int_{\mathbb{R}}\lambda d(\mathcal{F}^{-1}E_{Q_j}\mathcal{F})(\lambda)\ \ (j=1,\cdots,N)$$

である. よって,

$$E_{P_j}(B)=\mathcal{F}^{-1}E_{Q_j}(B)\mathcal{F}\ \ (\forall B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}},j=1,\cdots,N)$$

であるから,

$$e^{iy_jP_j}=\int_{\mathbb{R}}e^{iy_j\lambda}dE_{P_j}(\lambda)=\mathcal{F}^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{iy_j\lambda}dE_{Q_j}(\lambda)\right)\mathcal{F}=\mathcal{F}^{-1}e^{iy_jQ_j}\mathcal{F}\ \ (\forall y_j\in\mathbb{R},j=1,\cdots,N)$$

なので, $P_1,\cdots,P_N$ も互いに強可換であり, $P=(P_1,\cdots,P_N)$ の結合スペクトル測度を $E_P:\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}\to\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}^N))$ とおくと, 任意の $B_1,\cdots,B_N\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ に対し,

$$E_P(B_1\times\cdots\times B_N)=E_{P_1}(B_1)\cdots E_{P_N}(B_N)=\mathcal{F}^{-1}E_{Q_1}(B_1)\cdots E_{Q_N}(B_N)\mathcal{F}=\mathcal{F}^{-1}E(B_1\times\cdots\times B_N)\mathcal{F}$$

である. よって命題 5.65 と単調族定理 5.70 より,

$$E_P(B)=\mathcal{F}^{-1}E(B)\mathcal{F}\ \ (\forall B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N})$$

が成り立つので, 任意の Borel 関数 $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ に対し,

$$f(P)=\int_{\mathbb{R}^N}f(\lambda)dE_P(\lambda)=\mathcal{F}^{-1}\int_{\mathbb{R}^N}f(\lambda)dE(\lambda)\mathcal{F}=\mathcal{F}^{-1}f(Q)\mathcal{F}$$

が成り立つ. 特に,

$$e^{iyP}=\mathcal{F}^{-1}e^{iyQ}\mathcal{F}=\mathcal{F}^{-1}e^{iy\cdot\mathrm{id}}\mathcal{F}=T_{-y}\ \ (\forall y\in\mathbb{R}^N)$$

であり,

$$e^{iyP}e^{ixQ}f=T_{-y}e^{ix\cdot\mathrm{id}}f=e^{ix\cdot y}e^{ix\cdot\mathrm{id}}T_{-y}f=e^{ix\cdot y}e^{ixQ}e^{iyP}f\ \ (\forall f\in L^2(\mathbb{R}^N),\forall x,y\in\mathbb{R}^N)$$

であるから,

$$e^{ixQ}e^{iyP}=e^{-ix\cdot y}e^{iyP}e^{ixQ}\ \ (\forall x,y\in\mathbb{R}^N)$$

である. ゆえに (Q,P) は自由度 N の Weyl 型 CCR の $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上への表現である. □

定義 12.189 (Schrödinger 表現)**.** 定理 12.188 における自由度 N の Weyl 型 CCR の Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上への表現 $(Q,P)=(\mathrm{id},-i\nabla)=(\mathrm{id}_1,\cdots,\mathrm{id}_N,-i\partial_1,\cdots,-i\partial_N)$ を自由度 N の Schrödinger 表現と言う.

定理 12.190 (Fourier-Wigner 変換)**.** 自由度 N の Schrödinger 表現に対応する Heisenberg 群のユニタリ表現 (定義 12.185)

$$\rho:H_N\ni(x,y,\lambda)\mapsto e^{-i\lambda}e^{ix\cdot\left(\mathrm{id}+\frac{1}{2}y\right)}T_{-y}\in\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^N))$$

に対し, Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^{2N})=L^2(\mathbb{R}^N)\otimes L^2(\mathbb{R}^N)$ (定義 10.96 を参照) 上のユニタリ作用素 $\mathcal{W}$ で,

$$\mathcal{W}([f]\otimes[g])(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}(\rho(-x,-y,0)[f]\mid[\overline{g}])_2\ \ (\forall x,y\in\mathbb{R}^N)$$

を満たすものが唯一つ存在する.

証明. 任意の $f, g \in \mathcal{S}_N$[*256], 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ に対し,

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}(\rho(-x,-y,0)f \mid \overline{g})_2 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\left(k-\frac{1}{2}y\right)} f(k-y)g(k)dk$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot k} f\left(k-\frac{1}{2}y\right) g\left(k+\frac{1}{2}y\right) dk$$

である. よってユニタリ作用素

$$U : L^2(\mathbb{R}^{2N}) \to L^2(\mathbb{R}^{2N}),\ \ UF(x,y) = F\left(x-\frac{1}{2}y, x+\frac{1}{2}y\right) \quad (\forall F \in L^2(\mathbb{R}^{2N}), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$$

を考えると,

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}(\rho(-x,-y,0)f \mid \overline{g})_2 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot k} f\left(k-\frac{1}{2}y\right) g\left(k+\frac{1}{2}y\right) dk$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot k} U(f\otimes g)(k,y)dk = (\mathcal{F}_N \otimes 1)U(f\otimes g)(x,y)$$

となる. ただし $\mathcal{F}_N \otimes 1$ は Fourier 変換 $\mathcal{F}_N : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ (Plancherel の定理 8.71 よりユニタリ作用素) と恒等作用素 $1 : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ のテンソル積による $L^2(\mathbb{R}^{2N}) = L^2(\mathbb{R}^N) \otimes L^2(\mathbb{R}^N)$ 上のユニタリ作用素である.[*257]
よって,

$$\mathcal{W} := (\mathcal{F}_N \otimes 1)U : L^2(\mathbb{R}^{2N}) \to L^2(\mathbb{R}^{2N})$$

とおけば $\mathcal{W}$ はユニタリ作用素であり, 任意の $f, g \in \mathcal{S}_N$ に対し,

$$\mathcal{W}(f\otimes g)(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}(\rho(-x,-y,0)f \mid \overline{g})_2 \quad (\forall (x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$$

が成り立つ. $L^2(\mathbb{R}^N)$ において $\mathcal{S}_N$ は稠密であるので, 任意の $[f], [g] \in L^2(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$\mathcal{W}([f]\otimes[g])(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}(\rho(-x,-y,0)[f] \mid [\overline{g}])_2 \quad (\forall (x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$$

が成り立つ. 一意性は $L^2(\mathbb{R}^{2N}) = L^2(\mathbb{R}^N) \otimes L^2(\mathbb{R}^N)$ において $\mathrm{span}\{[f]\otimes[g] : [f], [g] \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$ が稠密であることによる. □

定義 12.191. 定理 12.190 におけるユニタリ作用素 $\mathcal{W}$ を Fourier-Wigner 変換と言う.

定理 12.192 (Schrödinger 表現の既約性)**.** Schrödinger 表現は既約 (定義 12.187) である.

証明. 自由度 N の Schrödinger 表現に対応する Heisenberg 群のユニタリ表現を $\rho : H_N \to \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^N))$ とおき, Fourier-Wigner 変換 (定義 12.190) を $\mathcal{W} : L^2(\mathbb{R}^{2N}) \to L^2(\mathbb{R}^{2N})$ とおく. ρ が既約であることを示せばよいので, ρ 不変な $\{0\}$ ではない閉部分空間 $\mathcal{K} \subseteq L^2(\mathbb{R}^N)$ を取り $\mathcal{K}^\perp = \{0\}$ が成り立つことを示せばよい. 任意の単位ベクトル $[f] \in \mathcal{K}$ を取り固定する. 任意の $[g] \in \mathcal{K}^\perp$ に対し,

$$0 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}(\rho(-x,-y,0)[f] \mid [g])_2 = \mathcal{W}([f]\otimes[\overline{g}])(x,y) \quad (\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{2N})$$

であるから $\mathcal{W}([f]\otimes[\overline{g}]) = 0$ である. よって $\mathcal{W}$ がユニタリ作用素であることから,

$$0 = \|\mathcal{W}([f]\otimes[\overline{g}])\|_2 = \|[f]\otimes[\overline{g}]\|_2 = \|[f]\|_2\|[g]\|_2 = \|[g]\|_2$$

であるので $[g] = 0$ である. ゆえに $\mathcal{K}^\perp = \{0\}$ であるから ρ は既約である. □

[*256] $\mathcal{S}_N$ は急減少関数空間 (定義 8.50) である.
[*257] 定理 10.99 を参照.

補題 12.193. π を N 次の Heisenberg 群 H_N のユニタリ表現で定理 12.186 の条件

$$\pi(0,\lambda) = e^{-i\lambda}1 \ \ (\forall\lambda\in\mathbb{R}) \tag{12.182}$$

を満たすものとする．そして任意の $[f]\in L^1(\mathbb{R}^{2N})$ に対し $\pi([f],0)\in B(\mathcal{H}_\pi)$ を $\mathcal{H}_\pi$ 値 Bochner 積分 (定義 5.250) により，

$$\pi([f],0)v := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{2N}} f(y)\pi(y,0)v dy \in \mathcal{H}_\pi \ \ (\forall v\in\mathcal{H}_\pi)$$

と定義し，有界線型作用素

$$L^1(\mathbb{R}^{2N}) \ni [f] \mapsto \pi([f],0)\in B(\mathcal{H}_\pi) \tag{12.183}$$

を定義する．また任意の $[f]\in L^1(\mathbb{R}^{2N})$ に対し，

$$U(x)[f] := e^{-\frac{i}{2}\omega_N(x,\cdot)}T_x[f]\in L^1(\mathbb{R}^{2N}) \ \ (\forall x\in\mathbb{R}^{2N})$$

[*258]とおいてノルム有界連続写像

$$\mathbb{R}^{2N}\ni x\mapsto U(x)[f]\in L^1(\mathbb{R}^{2N})$$

を定義し，$L^1(\mathbb{R}^{2N})$ 値 Bochner 積分により，

$$[f]\star[g] := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{2N}} f(y)U(y)[g]dy \in L^1(\mathbb{R}^{2N}) \ \ (\forall [f],[g]\in L^1(\mathbb{R}^{2N}))$$

を定義する．さらに，

$$[f]^* = [f^*], \ \ f^*(x) = \overline{f(-x)} \ \ (\forall [f]\in L^1(\mathbb{R}^{2N}), \forall x\in\mathbb{R}^{2N})$$

と定義する．このとき，

(1) 任意の $[f],[g]\in L^1(\mathbb{R}^{2N})$，任意の $x\in\mathbb{R}^{2N}$ に対し，

$$\pi(x,0)\pi([f],0) = \pi(U(x)[f],0), \ \ \pi([f],0)\pi([g],0) = \pi([f]\star[g],0), \ \ \pi([f],0)^* = \pi([f]^*,0)$$

が成り立つ．

(2) (12.183) は単射である．

(3) $\rho : H_N \to \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^N))$ を Schrödinger 表現に対応するユニタリ表現, $\mathcal{W} : L^2(\mathbb{R}^{2N}) \to L^2(\mathbb{R}^{2N})$ を Fourier-Wigner 変換 (定義 12.190) とすると，任意の $f,g\in\mathcal{S}_N$ に対し $\mathcal{W}(f\otimes\overline{g})\in L^1(\mathbb{R}^{2N})$ であり，

$$\rho(\mathcal{W}(f\otimes\overline{g}),0) = f\odot g\in B(L^2(\mathbb{R}^N))$$

($\odot$ は Schatten 形式 (定義 10.109)) が成り立つ

証明. (1) 任意の $x\in\mathbb{R}^{2N}$, $[f]\in L^1(\mathbb{R}^{2N})$, $v\in\mathcal{H}_\pi$ に対し，Bochner 積分の性質 (命題 5.251) と (12.182), および $\omega_N(x,x)=0$ $(\forall x\in\mathbb{R}^{2N})$ より，

$$\begin{aligned}
\pi(x,0)\pi([f],0)v &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{2N}} f(y)\pi(x,0)\pi(y,0)v dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{2N}} f(y)e^{-\frac{i}{2}\omega_N(x,y)}\pi(x+y,0)v dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{2N}} f(y-x)e^{-\frac{i}{2}\omega_N(x,y)}\pi(y,0)v dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{2N}} U(x)f(y)\pi(y,0)v dy = \pi(U(x)[f],0)v
\end{aligned}$$

であるから，

$$\pi(x,0)\pi([f],0) = \pi(U(x)[f],0) \ \ (\forall x\in\mathbb{R}^{2N}, \forall [f]\in L^1(\mathbb{R}^{2N})) \tag{12.184}$$

[*258] $\omega_N : \mathbb{R}^{2N}\times\mathbb{R}^{2N}\to\mathbb{R}$ は標準シンプレクティック形式 (定義 12.181), T_x は平行移動 (定義 8.44).

が成り立つ．また任意の $v \in \mathcal{H}_\pi$ に対し，

$$L^1(\mathbb{R}^{2N}) \ni [f] \mapsto \pi([f], 0)v \in \mathcal{H}_\pi$$

は有界線型作用素であるから，Bochner 積分の性質 (命題 5.251) と (12.184) より，任意の $[f], [g] \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$, $v \in \mathcal{H}_\pi$ に対し，

$$\begin{aligned}\pi([f] \star [g], 0)v &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} f(y)\pi(U(y)[g], 0)vdy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} f(y)\pi(y, 0)\pi([g], 0)vdy = \pi([f], 0)\pi([g], 0)v\end{aligned}$$

である．よって，

$$\pi([f] \star [g], 0) = \pi([f], 0)\pi([g], 0) \quad (\forall [f], [g] \in L^1(\mathbb{R}^{2N}))$$

が成り立つ．そして任意の $[f] \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$, $u, v \in \mathcal{H}_\pi$ に対し，

$$\begin{aligned}(\pi([f], 0)u \mid v) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} f(y)(\pi(y, 0)u \mid v)dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} (u \mid \overline{f(y)}\pi(-y, 0)v)dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} (u \mid \overline{f(-y)}\pi(y, 0)v)dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} (u \mid f^*(y)\pi(y, 0)v)dy = (u \mid \pi([f]^*, 0)v)\end{aligned}$$

であるから，

$$\pi([f], 0)^* = \pi([f]^*, 0) \quad (\forall [f] \in L^1(\mathbb{R}^{2N}))$$

が成り立つ．

(2) $\pi([f], 0) = 0$ と仮定して $[f] = 0$ を示せばよい．$C_{c,+}(\mathbb{R}^{2N})$ の列 $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で，

$$\mathrm{supp}(\varphi_n) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{2N} : |x| \leqslant n\}, \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi_n(x)dx = 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たすものを取る．このとき $\mathbb{R}^{2N} \ni y \mapsto U(y)[f] \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$ の連続性より，

$$\begin{aligned}\|\varphi_n \star [f] - [f]\|_1 &= \left\| \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi_n(y)(U(y)[f] - [f])dy \right\|_1 \\ &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi_n(y)\|U(y)[f] - [f]\|_1 dy \to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned} \tag{12.185}$$

である．そして (1) より，

$$\pi(\varphi_n \star [f], 0) = \pi(\varphi_n, 0)\pi([f], 0) = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{12.186}$$

である．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$y \mapsto x - y$ の変数変換により，

$$\begin{aligned}(\varphi_n \star [f])(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi_n(y)e^{-\frac{i}{2}\omega_N(y,x)}f(x - y)dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi_n(x - y)e^{\frac{i}{2}\omega_N(y,x)}f(y)dy \quad (\forall x \in \mathbb{R}^{2N})\end{aligned}$$

であるから，Lebesgue 優収束定理より $\varphi_n \star [f]$ は連続関数である．今，

$$f_n := \varphi_n \star [f] \in C(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^1(\mathbb{R}^{2N}) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおく. (12.186) より $\pi(f_n,0)=0\ (\forall n\in\mathbb{N})$ であるから, 任意の $n\in\mathbb{N}$, 任意の $u,v\in\mathcal{H}_\pi$ に対し,

$$\begin{aligned}0&=(\pi(-x,0)\pi(f_n,0)\pi(x,0)u\mid v)\\&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{2N}}f_n(y)(\pi(-x,0)\pi(y,0)\pi(x,0)u\mid v)dy\\&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{2N}}f_n(y)e^{-\frac{i}{2}\omega_N(y,x)}(\pi(-x,0)\pi(y+x,0)u\mid v)dy\\&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{2N}}f_n(y)e^{-i\omega_N(y,x)}(\pi(y,0)u\mid v)dy\quad(\forall x\in\mathbb{R}^{2N})\end{aligned}$$

である. よって Fourier 変換の単射性[*259]と f_n の連続性より,

$$f_n(y)(\pi(y,0)u\mid v)=0\quad(\forall y\in\mathbb{R}^{2N})$$

が成り立つ. ここで $u,v\in\mathcal{H}_\pi$ の任意性より $f_n=0$ であり, これが任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して成り立つので, (12.185) より,

$$[f]=\lim_{n\to\infty}\varphi_n\star[f]=\lim_{n\to\infty}f_n=0$$

を得る.

(3) 任意の $f,g\in\mathcal{S}_N$ に対し, 定理 12.190 の証明より $\mathcal{W}(f\otimes\overline{g})\in\mathcal{S}_{2N}\subseteq L^1(\mathbb{R}^{2N})$ であり, 任意の $[a],[b]\in L^2(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$\begin{aligned}(\rho(\mathcal{W}(f\otimes\overline{g}),0)[a]\mid[b])_2&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{2N}}\mathcal{W}(f\otimes\overline{g})(y)(\rho(y,0)[a]\mid[b])_2dy\\&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{2N}}\mathcal{W}(f\otimes\overline{g})(y)\overline{(\rho(-y,0)[b]\mid[a])_2}dy=(\mathcal{W}(f\otimes\overline{g})\mid\mathcal{W}([b]\otimes[\overline{a}]))_2\\&=(f\otimes\overline{g}\mid[b]\otimes[\overline{a}])_2=(f\mid[b])_2([a]\mid g)_2=((f\odot g)[a]\mid[b])_2\end{aligned}$$

である. よって $\rho(\mathcal{W}(f\otimes\overline{g}),0)=f\odot g$ が成り立つ.

□

定理 12.194 (Stone-von Neumann の一意性定理)**.** π を Heisenberg 群 H_N のユニタリ表現で定理 12.186 の条件

$$\pi(0,\lambda)=e^{-i\lambda}1\quad(\forall\lambda\in\mathbb{R})\tag{12.187}$$

を満たすものとする. このとき π は完全可約 (定義 12.104) である. そして π の任意の既約な部分表現は自由度 N の Schrödinger 表現に対応する H_N のユニタリ表現 $\rho:H_N\to\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^N))$ とユニタリ同値である.

証明. $\varphi\in\mathcal{S}_N\subseteq L^2(\mathbb{R}^N)$ で $\|\varphi\|_2=1$ を満たすものを取り,

$$\Phi:=\mathcal{W}(\varphi\otimes\overline{\varphi})\in L^1(\mathbb{R}^{2N})$$

とおくと, 補題 12.193 の (3) より,

$$\rho(\Phi,0)=\varphi\odot\varphi\in B(L^2(\mathbb{R}^N))\quad(\odot\text{ は Schatten 形式 })\tag{12.188}$$

である. φ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ の単位ベクトルであるから (12.188) は Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^N)$ の 1 次元部分空間 $\mathbb{C}\varphi$ の上への射影作用素である. よって補題 12.193 の (1) より,

$$\rho(\Phi,0)=\rho(\Phi,0)^2=\rho(\Phi\star\Phi,0),\quad\rho(\Phi,0)=\rho(\Phi,0)^*=\rho(\Phi^*,0)$$

であるから, 補題 12.193 の (2) より,

$$\Phi\star\Phi=\Phi,\quad\Phi^*=\Phi$$

[*259] 緩増加超関数の Fourier 変換の定義 8.68 を参照.

である．よって，

$$P := \pi(\Phi, 0) \in B(\mathcal{H}_\pi) \tag{12.189}$$

とおけば，補題 12.193 の (1), (2) より P は 0 ではない射影作用素である．今，$\mathcal{H}_\pi$ の閉部分空間 $\mathrm{Ran}(P) \subseteq \mathcal{H}_\pi$ の CONS を $\{e_j\}_{j\in J}$ とおき，各 $j \in J$ について π 不変な閉部分空間 $\mathcal{K}_j := \overline{\pi(H_N)e_j} \subseteq \mathcal{H}_\pi$ を定義する．そして π の $\mathcal{K}_j$ 上への制限を $\pi_j : H_N \to \mathcal{U}(\mathcal{K}_j)$ とおく．このとき e_j は π_j の巡回ベクトル (注意 12.38) である．一方，ρ は既約である (定理 12.192) から，注意 12.39 より，単位ベクトル $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ は ρ の巡回ベクトルである．(12.188) より，

$$\rho(\Phi, 0)\rho(x, 0)\rho(\Phi, 0) = (\rho(x, 0)\varphi \mid \varphi)_2(\varphi \odot \varphi) = (\rho(x, 0)\varphi \mid \varphi)_2\rho(\Phi, 0) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^{2N})$$

であり，一方，補題 12.193 の (1) より，

$$\rho(\Phi, 0)\rho(x, 0)\rho(\Phi, 0) = \rho(\Phi \star U(x)\Phi, 0) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^{2N})$$

であるから，補題 12.193 の (2) より，

$$\Phi \star U(x)\Phi = (\rho(x, 0)\varphi \mid \varphi)_2 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^{2N})$$

が成り立つ．よって (12.189) と補題 12.193 の (1) より，

$$P\pi(x, 0)P = \pi(\Phi \star U(x)\Phi, 0) = (\rho(x, 0)\varphi \mid \varphi)_2\rho(\Phi, 0) = (\rho(x, 0)\varphi \mid \varphi)_2 P \quad (\forall x \in \mathbb{R}^{2N}) \tag{12.190}$$

である．(12.187), (12.190) より任意の $j, j' \in J$ と任意の $(x, \lambda) \in H_N$ に対し，

$$\begin{aligned}(\pi(x, \lambda)e_j \mid e_{j'}) &= e^{-i\lambda}(\pi(x, 0)e_j \mid e_{j'}) = e^{-i\lambda}(P\pi(x, 0)Pe_j \mid e_{j'})\\ &= e^{-i\lambda}(\rho(x, 0)\varphi \mid \varphi)_2(Pe_j \mid e_{j'}) = \delta_{j,j'}(\rho(x, \lambda)\varphi \mid \varphi)_2\end{aligned}$$

となるから，$j \neq j'$ ならば $\mathcal{K}_j \perp \mathcal{K}_{j'}$ であり，命題 12.46 より任意の $j \in J$ に対し π_j と ρ はユニタリ同値である．今，$\mathcal{K} := \bigoplus_{j\in J}\mathcal{K}_j \subseteq \mathcal{H}_\pi$ とおき，$\mathcal{K} = \mathcal{H}_\pi$ が成り立つことを示す．そのためには $\mathcal{K}^\perp = \{0\}$ を示せばよいので，$\mathcal{K}^\perp \neq \{0\}$ であると仮定して矛盾を導く．$\mathcal{K}$ は π 不変であるから $\mathcal{K}^\perp$ も π 不変である．そこで π の $\mathcal{K}^\perp$ 上への制限によって得られるユニタリ表現 $\pi|_{\mathcal{K}^\perp} : H_N \to \mathcal{U}(\mathcal{K}^\perp)$ を考える．このとき $\pi|_{\mathcal{K}^\perp}$ は定理 12.186 の条件を満たし，

$$\pi|_{\mathcal{K}^\perp}(\Phi, 0)v \in \mathcal{K}^\perp \cap \mathrm{Ran}(P) \subseteq \mathcal{K}^\perp \cap \mathcal{K} = \{0\} \quad (\forall v \in \mathcal{K}^\perp)$$

であるから，

$$\pi|_{\mathcal{K}^\perp}(\Phi, 0) = 0$$

である．よって補題 12.193 の (2) より $\Phi = 0$ が導かれ，矛盾する．ゆえに $\mathcal{K} = \mathcal{H}_\pi$ であるから，

$$\pi = \bigoplus_{j\in J}\pi_j$$

が成り立つ．各 $j \in J$ に対し π_j と ρ はユニタリ同値であり ρ は既約であるから π は完全可約である．また π の任意の既約な部分表現は定理 12.186 の条件を満たすので上の結果より ρ とユニタリ同値である．□

系 12.195. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上への自由度 N の Weyl 型 CCR の表現 (Q, P) が既約であるとする．このときユニタリ作用素 $U : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}^N)$ で，

$$UQ_jU^{-1} = \mathrm{id}_j, \quad UP_jU^{-1} = -i\partial_j \quad (j = 1, \cdots, N)$$

を満たすものが存在する．そして任意の Borel 関数 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ に対し，

$$Uf(Q)U^{-1} = f(\mathrm{id}), \quad Uf(P)U^{-1} = f(-i\nabla) = \mathcal{F}^{-1}f(\mathrm{id})\mathcal{F}$$

[*260]が成り立つ．特に，

$$U|P|^2U^{-1} = -\Delta$$

が成り立つ．

[*260] 強可換な自己共役作用素の組に付随する結合スペクトル測度による積分の定義 12.138 を参照．定理 12.188 より $f(\mathrm{id})$ は f による掛け算作用素である．

証明. Stone-von Neumann の一意性定理 12.194 より, (Q,P) に対応する Heisenberg 群 H_N のユニタリ表現

$$H_N \ni (x,y,\lambda) \mapsto e^{-i\left(\lambda-\frac{1}{2}x\cdot y\right)}e^{ixQ}e^{iyP} \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

と, 自由度 N の Schrödinger 表現 $(\mathrm{id},-i\nabla)=(\mathrm{id}_1,\cdots,\mathrm{id}_N,-i\partial_1,\cdots,-i\partial_N)$ に対応する H_N のユニタリ表現

$$H_N \ni (x,y,\lambda) \mapsto e^{-i\left(\lambda-\frac{1}{2}x\cdot y\right)}e^{ix\,\mathrm{id}}T_{-y} \in \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^N))$$

はユニタリ同値であるから, ユニタリ作用素 $U:\mathcal{H}\to L^2(\mathbb{R}^N)$ で,

$$Ue^{ixQ}U^{-1}=e^{ix\cdot\mathrm{id}},\ \ Ue^{iyP}U^{-1}=T_{-y}\ \ (\forall x,y\in\mathbb{R}^N)$$

を満たすものが取れる. よって SNAG の定理 12.139 の一意性と定理 12.188 より,

$$UQ_jU^{-1}=\mathrm{id}_j,\ \ UP_jU^{-1}=-i\partial_j\ \ (j=1,\cdots,N)$$

が成り立つ. また定理 12.188 より任意の Borel 関数 $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ に対し,

$$Uf(Q)U^{-1}=f(\mathrm{id}),\ \ Uf(P)U^{-1}=f(-i\nabla)=\mathcal{F}^{-1}f(\mathrm{id})\mathcal{F}$$

が成り立つ. よって命題 10.162 より,

$$U|P|^2U^{-1}=\mathcal{F}^{-1}|\mathrm{id}|^2\mathcal{F}=-\Delta$$

が成り立つ. □

12.10 Weyl 型 CCR の BHJ 表現, 調和振動子型 Schrödinger 作用素のスペクトル構造の決定

定義 12.196 (Schrödinger 作用素)**.** 実数値の $V\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ (定義 8.20) に対し, V による Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の掛け算作用素 (定義 10.81) をそのまま V と表す. Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の対称作用素

$$H_V:=\overline{-\Delta+V}$$

を V をポテンシャルとする Schrödinger 作用素と言う. 自由度 N の Weyl 型 CCR の $\mathcal{H}$ 上への既約表現 (Q,P) を取ると, Stone-von Neumann の一意性定理 12.195 より, ユニタリ作用素 $U:\mathcal{H}\to L^2(\mathbb{R}^N)$ が存在し,

$$H_V=U(\overline{|P|^2+V(Q)})U^{-1}$$

と表せる. 従って H_V のスペクトル構造は $\overline{|P|^2+V(Q)}$ のスペクトル構造と一致する.

例 12.197 (自由型 Schrödinger 作用素のスペクトル構造)**.** ポテンシャルが 0 の $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の Schrödinger 作用素 $H_0=-\Delta$ は, 命題 10.162 より, $H^2(\mathbb{R}^N)$ を定義域とする自己共役作用素であり, そのスペクトル $\sigma(H_0)$ と点スペクトル $\sigma_{\mathrm{p}}(H_0)$ は,

$$\sigma(H_0)=[0,\infty),\ \ \sigma_{\mathrm{p}}(H_0)=\varnothing$$

である.

例 12.198 (Coulomb 型ポテンシャルを持つ Schrödinger 作用素)**.** $\alpha\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$, $k_j,K_{j,k}\in(0,\infty)$ $(\forall j,k\in\{1,\cdots,N\}: j\neq k)$ に対し,

$$V(x_1,\cdots,x_N):=-\sum_{j=1}^{N}\frac{k_j}{|x_j|^\alpha}-\sum_{j\neq k}\frac{K_{j,k}}{|x_j-x_k|^\alpha}$$

なるポテンシャル $V\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{3N})$ を持つ $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ 上の Schrödinger 作用素 $H_V=-\Delta+V$ は, 加藤の定理 10.166 より $H^2(\mathbb{R}^{3N})$ を定義域とする下に有界な自己共役作用素であり, $-\Delta$ の芯は H_V の芯である. $N=1,\alpha=1$ の場合 (水素原子型 Schrödinger 作用素) について後の小節で詳しく扱う.

例 12.199 (調和振動子型 Schrödinger 作用素)**.** 正数 k に対し,

$$V(x) := k|x|^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

なるポテンシャル $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ を持つ Schrödinger 作用素 $H_V = \overline{-\Delta + V}$ を調和振動子型 Schrödinger 作用素と言う．このスペクトル構造については後の定理 12.203 を参照.

定義 12.200 (ユニラテラルシフト, 昇降作用素)**.** Hilbert 空間 $\ell^2(\mathbb{Z}_+^N)$ 上の有界線型作用素 $V_1, \cdots, V_N$ を,

$$(V_j f)(n) := f(n + e_j) \quad (\forall f \in \ell^2(\mathbb{Z}_+^N), \forall n \in \mathbb{Z}_+^N, j = 1, \cdots, N)$$

と定義する．このとき,

$$(V_j^* f)(n) = \begin{cases} f(n - e_j) & (n_j \geqslant 1) \\ 0 & (n_j = 0) \end{cases} \quad (\forall f \in \ell^2(\mathbb{Z}_+^N), j = 1, \cdots, N)$$

であり,

$$V_j^* V_j = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^N, n_j \geqslant 1} \chi_{\{n\}} \odot \chi_{\{n\}}, \quad V_j V_j^* = 1 \quad (j = 1, \cdots, N) \tag{12.191}$$

($\odot$ は Schatten 形式 (定義 10.109)) である．よって $V_1, \cdots, V_N$ は部分等長作用素である．$\mathrm{id}_j : \mathbb{Z}_+^N \ni n \mapsto n_j \in [0, \infty)$ による $\ell^2(\mathbb{Z}_+^N)$ 上の掛け算作用素をそのまま id_j と表して,

$$A_j := V_j \sqrt{\mathrm{id}_j} = \sqrt{\mathrm{id}_j + 1} V_j \quad (j = 1, \cdots, N)$$

とおくと, A_j は稠密に定義された閉線型作用素であり (命題 10.27 の (14)),

$$A_j^* = \sqrt{\mathrm{id}_j} V_j^* = V_j^* \sqrt{\mathrm{id}_j + 1} \quad (j = 1, \cdots, N)$$

である (命題 10.27 の (11)) から, (12.191) より,

$$|A_j| = \sqrt{A_j^* A_j} = \sqrt{\mathrm{id}_j}, \quad |A_j^*| = \sqrt{\mathrm{id}_j + 1} \quad (j = 1, \cdots, N)$$

である．よって A_j, A_j^* の極分解 (定理 10.75, 定理 10.77) は $A_j = V_j \sqrt{\mathrm{id}_j}$, $A_j^* = V_j^* \sqrt{\mathrm{id}_j + 1}$ である．$(V_1, \cdots, V_N)$ を $\ell^2(\mathbb{Z}_+^N)$ 上のユニラテラルシフト, $(A_1, \cdots, A_N)$ を $\ell^2(\mathbb{Z}_+^N)$ 上の昇作用素, $(A_1^*, \cdots, A_N^*)$ を $\ell^2(\mathbb{Z}_+^N)$ 上の降作用素と言う．

定理 12.201 (BHJ (Born-Heisenberg-Jordan) 表現)**.** Hilbert 空間 $\ell^2(\mathbb{Z}_+^N)$ 上の昇降作用素 $(A_1, \cdots, A_N), (A_1^*, \cdots, A_N^*)$ に対し,

$$Q_j := \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{A_j + A_j^*}, \quad P_j := \frac{1}{i\sqrt{2}} \overline{A_j - A_j^*} \quad (j = 1, \cdots, N)$$

とおく．$c_c(\mathbb{Z}_+^N) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+^N)$ を台が有限集合であるもの全体からなる $\ell^2(\mathbb{Z}_+^N)$ の稠密部分空間とする．このとき,

(1) $Q_1, \cdots, Q_N$, $P_1, \cdots, P_N$ はそれぞれ $\ell^2(\mathbb{Z}_+^N)$ 上の自己共役作用素であり, $c_c(\mathbb{Z}_+^N)$ はこれらの共通の芯である．また $c_c(\mathbb{Z}_+^N)$ の任意の元はこれらの自己共役作用素の共通の全解析ベクトル (定義 10.211) である．

(2) 交換子積 $[\cdot, \cdot]$ (定義 12.158) に関して $c_c(\mathbb{Z}_+^N)$ 上で,

$$[A_j, A_k] = [A_j^*, A_k^*] = 0, \quad [A_j, A_k^*] = \delta_{j,k} \quad (\forall j, k \in \{1, \cdots, N\}),$$
$$[Q_j, Q_k] = [P_j, P_k] = 0, \quad [Q_j, P_k] = i\delta_{j,k} \quad (\forall j, k \in \{1, \cdots, N\})$$

が成り立つ．

(3) $\overline{Q_j^2 + P_j^2} = 2\,\mathrm{id}_j + 1$ $(j = 1, \cdots, N)$ が成り立つ．

(4) (Q, P) は自由度 N の Weyl 型 CCR の Hilbert 空間 $\ell^2(\mathbb{Z}_+^N)$ 上への表現 (定義 12.184) である．

(5) Weyl 型 CCR の表現 (Q, P) は既約 (定義 12.187) である．

証明.　(1) 任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ を取り固定する．任意の $m \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し，

$$A_j \chi_{\{m\}} = \sqrt{m_j} \chi_{\{m-e_j\}}, \quad A_j^* \chi_{\{m\}} = \sqrt{m_j + 1} \chi_{\{m+e_j\}}$$

であるから，

$$\|(A_j \pm A_j^*)^n \chi_{\{m\}}\|_2 \leqslant 2^n \sqrt{m_j + n} \sqrt{m_j + n - 1} \cdots \sqrt{m_j + 1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

よって任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{|z|^n}{n!} \|(A_j \pm A_j^*)^n \chi_{\{m\}}\|_2 \leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |2z|^n \frac{\sqrt{m_j + n} \sqrt{m_j + n - 1} \cdots \sqrt{m_j + 1}}{n!}$$

であり，命題 4.28 より右辺は収束するので $\chi_{\{m\}}$ は Q_j, P_j の全解析ベクトルである．$c_c(\mathbb{Z}_+^N) = \mathrm{span}\{\chi_{\{m\}}\}_{m \in \mathbb{Z}_+^N}$ であるから命題 10.212 より $c_c(\mathbb{Z}_+^N)$ の任意の元は Q_j, P_j の全解析ベクトルである．そして $c_c(\mathbb{Z}_+^N)$ は Q_j, P_j の作用に対して不変であり，$\ell^2(\mathbb{Z}_+^N)$ において稠密であるから，Nelson の解析ベクトル定理 10.217 より Q_j, P_j は $c_c(\mathbb{Z}_+^N)$ を芯とする自己共役作用素である．

(2) 直接計算による．

(3) 任意の $j \in \{1, \cdots, N\}$ を取り固定する．$c_c(\mathbb{Z}_+^N)$ 上で，

$$Q_j^2 + P_j^2 = A_j A_j^* + A_j^* A_j = 2\,\mathrm{id}_j + 1$$

であり，$Q_j^2 + P_j^2$ は対称作用素 (従って可閉であり閉包も対称作用素) であるから，

$$2\,\mathrm{id}_j |_{c_c(\mathbb{Z}_+^N)} + 1 \subseteq \overline{Q_j^2 + P_j^2}$$

である．$c_c(\mathbb{Z}_+^N)$ は明らかに id_j の芯なので，

$$2\,\mathrm{id}_j + 1 \subseteq \overline{Q_j^2 + P_j^2}$$

が成り立つ．左辺は自己共役作用素で右辺は対称作用素であるから，

$$2\,\mathrm{id}_j + 1 = \overline{Q_j^2 + P_j^2}$$

が成り立つ．

(4) 任意の $j, k \in \{1, \cdots, N\}$, 任意の $t \in \mathbb{R}$ を取り固定する．(2) より，

$$\frac{(it)^n}{n!} Q_j^n P_k v = P_k \frac{(it)^n}{n!} Q_j^n v - t\delta_{j,k} \frac{(it)^{n-1}}{(n-1)!} Q_j^{n-1} v \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall v \in c_c(\mathbb{Z}_+^N)) \tag{12.192}$$

が成り立つ．(1) より $c_c(\mathbb{Z}_+^N)$ の元は Q_j の全解析ベクトルであるから，定理 10.214 より，

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{(it)^n}{n!} Q_j^n v = e^{itQ_j} v \quad (\forall v \in c_c(\mathbb{Z}_+^N))$$

である．よって $c_c(\mathbb{Z}_+^N)$ が P_k の作用に対して不変であること，P_k が閉作用素であることに注意して (12.192) より，

$$e^{itQ_j} P_k v = P_k e^{itQ_j} v - t\delta_{j,k} e^{itQ_j} v \quad (\forall v \in c_c(\mathbb{Z}_+^N))$$

が成り立つことが分かる．(1) より $c_c(\mathbb{Z}_+^N)$ は P_k の芯であるから，

$$e^{itQ_j} P_k \subseteq (P_k - t\delta_{j,k}) e^{itQ_j}$$

であり，これより，

$$e^{itQ_j} P_k e^{-itQ_j} \subseteq P_k - t\delta_{j,k}$$

であるから両辺の自己共役性より，

$$e^{itQ_j} P_k e^{-itQ_j} = P_k - t\delta_{j,k}$$

を得る．よって定理 10.54 より任意の $s\in\mathbb{R}$ に対し，

$$e^{itQ_j}e^{isP_k}e^{-itQ_j}=e^{-ist\delta_{j,k}}e^{isP_k}$$

が成り立つ．これより，

$$e^{itQ_j}e^{isP_k}=e^{ist\delta_{j,k}}e^{isP_k}e^{itQ_j}\quad(\forall s,t\in\mathbb{R},\forall j,k\in\{1,\cdots,N\})$$

が成り立つ．全く同様に (1), (2) を用いて (より簡単に),

$$e^{itQ_j}e^{isQ_k}=e^{isQ_k}e^{itQ_j},\quad e^{itP_j}e^{isP_k}=e^{isP_k}e^{itP_j}\quad(\forall s,t\in\mathbb{R},\forall j,k\in\{1,\cdots,N\})$$

が成り立つことも分かる．よって (Q,P) は自由度 N の Weyl 型 CCR の表現である．

(5) 定義 12.187 より Weyl 型 CCR の表現 (Q,P) に対応する Heisenberg 群のユニタリ表現 (定義 12.185)

$$\pi:H_N\ni(x,y,\lambda)\mapsto e^{-i\left(\lambda-\frac{1}{2}xy\right)}e^{ixQ}e^{iyP}\in\mathcal{U}(\ell^2(\mathbb{Z}_+^N))$$

が既約であることを示せばよい．そのためには Schur の補題 12.43 より $\mathcal{C}(\pi)=\pi(H_N)'=\mathbb{C}1$ であることを示せばよい．そこで von Neumann 環 (定義 10.179)

$$\mathcal{M}=\pi(H_N)''$$

を考える．$\mathcal{M}'=\pi(H_N)'''=\pi(H_N)'$ であるから $\mathcal{M}'=\mathbb{C}1$ であることを示せばよい．

$$e^{ixQ}=\pi(x,0,0)\in\mathcal{M},\quad e^{iyP}=\pi(0,y,0)\in\mathcal{M}\quad(\forall x,y\in\mathbb{R}^N)$$

であるから, 各 $j\in\{1,\cdots,N\}$ について, 補題 10.213 より,

$$SQ_jv=\lim_{t\to0}\frac{1}{it}S(e^{itQ_j}-1)v=\lim_{t\to0}\frac{1}{it}(e^{itQ_j}-1)Sv=Q_jSv\quad(\forall v\in D(Q_j),\forall S\in\mathcal{M}'),$$

$$SP_jv=\lim_{t\to0}\frac{1}{it}S(e^{itP_j}-1)v=\lim_{t\to0}\frac{1}{it}(e^{itP_j}-1)Sv=P_jSv\quad(\forall v\in D(P_j),\forall S\in\mathcal{M}')$$

である．よって,

$$Q_1,\cdots,Q_N,P_1,\cdots,P_N\in\widetilde{\mathcal{M}}\tag{12.193}$$

[*261]が成り立つ．

$$D(A_j)=D(|A_j|)=D(\sqrt{\mathrm{id}_j})=D(\sqrt{\mathrm{id}_j+1})=D(A_j^*)\quad(j=1,\cdots,N)$$

であるから各 $j\in\{1,\cdots,N\}$ について,

$$A_j\subseteq\frac{1}{\sqrt2}(Q_j+iP_j),\quad A_j^*\subseteq\frac{1}{\sqrt2}(Q_j-iP_j)$$

であり, 命題 10.27 の (8) と定理 10.28 より,

$$\frac{1}{\sqrt2}(Q_j+iP_j)\subseteq\left(\frac{1}{\sqrt2}(Q_j-iP_j)\right)^*\subseteq A_j^{**}=A_j\subseteq\frac{1}{\sqrt2}(Q_j+iP_j),$$

$$\frac{1}{\sqrt2}(Q_j-iP_j)\subseteq\left(\frac{1}{\sqrt2}(Q_j+iP_j)\right)^*\subseteq A_j^{**}=A_j\subseteq\frac{1}{\sqrt2}(Q_j-iP_j)$$

であるから,

$$A_j=\frac{1}{\sqrt2}(Q_j+iP_j),\quad A_j^*=\frac{1}{\sqrt2}(Q_j-iP_j)$$

が成り立つ．ゆえに (12.193) より,

$$A_1,\cdots,A_N,A_1^*,\cdots,A_N^*\in\widetilde{\mathcal{M}}\tag{12.194}$$

[*261] $\widetilde{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ にアフィリエイトする線型作用素全体 (定義 10.181) である．

が成り立つ．定義 12.200 で述べたように $A_j = V_j\sqrt{\mathrm{id}_j}$, $A_j^* = V_j^*\sqrt{\mathrm{id}_j+1}$ は A_j, A_j^* の極分解であるから，(12.194) と定理 10.183 より，

$$V_1, \cdots, V_N \in \mathcal{M} \tag{12.195}$$

が成り立つ．また (3) より，

$$2\,\mathrm{id}_j + 1 = \overline{Q_j^2 + P_j^2} \in \widetilde{\mathcal{M}} \quad (j = 1, \cdots, N)$$

であるから，

$$\mathrm{id}_1, \cdots, \mathrm{id}_N \in \widetilde{\mathcal{M}}$$

なので，$E : 2^{\mathbb{Z}_+^N} \to \mathcal{P}(\ell^2(\mathbb{Z}_+^N))$ を掛け算作用素を表す射影値測度 (定義 10.81) とすると，定理 10.183 より，

$$E(B) \in \mathcal{M} \quad (\forall B \subseteq \mathbb{Z}_+^N) \tag{12.196}$$

が成り立つ．今，任意の $S \in \mathcal{M}'$ を取る．任意の $n \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し (12.196) より，

$$S\chi_{\{n\}} = SE(\{n\})\chi_{\{n\}} = E(\{n\})S\chi_{\{n\}} = \alpha_n\chi_{\{n\}}$$

なる $\alpha_n \in \mathbb{C}$ が取れる．ここで任意の $n = (n_1, \cdots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ に対し，

$$(V_1^*)^{n_1} \cdots (V_N^*)^{n_N}\chi_{\{0\}} = \chi_{\{n\}}$$

であるから，(12.195) より，

$$\alpha_n\chi_{\{n\}} = S\chi_{\{n\}} = S(V_1^*)^{n_1} \cdots (V_N^*)^{n_N}\chi_{\{0\}} = (V_1^*)^{n_1} \cdots (V_N^*)^{n_N}S\chi_{\{0\}} = \alpha_0\chi_{\{n\}}$$

である．よって $\alpha_n = \alpha_0$ $(\forall n \in \mathbb{Z}_+^N)$ であるので $S = \alpha_0 1$ である．ゆえに $\mathcal{M}' = \mathbb{C}1$ であるから求める結果を得た．

□

定義 12.202. 定理 12.201 における自由度 N の Weyl 型 CCR の $\ell^2(\mathbb{Z}_+^N)$ 上への表現 (Q, P) を自由度 N の BHJ 表現と言う．

定理 12.203 (調和振動子型 Schrödinger 作用素のスペクトル構造)**.** 正数 k に対し，

$$V(x) := k|x|^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

なるポテンシャル項 $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ を持つ Schrödinger 作用素 $H_V = \overline{-\Delta + V}$ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の自己共役作用素であり，そのスペクトルは純粋に離散的 (定義 10.125) である．そして，

$$\sigma(H_V) = \sigma_{\mathrm{d}}(H_V) = \left\{k^{\frac{1}{2}}(2n+N)\right\}_{n\in\mathbb{Z}_+},$$

$$\dim\mathrm{Ker}\left(k^{\frac{1}{2}}(2n+N) - H_V\right) = \binom{n+N-1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+)$$

が成り立つ．

証明. 自由度 N の Schrödinger 表現 (定義 12.189) $(\mathrm{id}, -i\nabla) = (\mathrm{id}_1, \cdots, \mathrm{id}_N, -i\partial_1, \cdots, -i\partial_N)$ をスケール変換したもの

$$(Q, P) = (k^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{id}, -k^{-\frac{1}{4}}i\nabla) = (k^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{id}_1, \cdots, k^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{id}_N, -k^{-\frac{1}{4}}i\partial_1, \cdots, -k^{-\frac{1}{4}}i\partial_N)$$

は明らかに自由度 N の Weyl 型 CCR の表現であり，(Q, P) に対応する Heisenberg 群のユニタリ表現 (定義 12.185) は，

$$\pi_{Q,P} : H_N \ni (x, y, \lambda) \mapsto e^{-i\left(\lambda - \frac{1}{2}xy\right)}e^{ixQ}e^{iyP} = e^{-i\left(\lambda - \frac{1}{2}xy\right)}e^{ik^{\frac{1}{4}}x\,\mathrm{id}}T_{-k^{-\frac{1}{4}}y}\,\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^N))$$

である (定理 12.188 を参照)．Schrödinger 表現の既約性 (定理 12.192) と Schur の補題 12.43 より，

$$\mathcal{C}(\pi_{Q,P}) = \pi_{Q,P}(H_N)' = \{e^{ik^{\frac{1}{4}}x\,\mathrm{id}}, T_{-k^{-\frac{1}{4}}y} : x, y \in \mathbb{R}^N\}' = \{e^{ix\,\mathrm{id}}, T_{-y} : x, y \in \mathbb{R}^N\}' = \mathbb{C}1$$

であるから (Q,P) は既約である．そして $|P|^2 = k^{-\frac{1}{2}}\Delta$, $|Q|^2 = k^{\frac{1}{2}}|\mathrm{id}|^2 = k^{-\frac{1}{2}}V$ であるから，

$$H_V = \overline{-\Delta + V} = k^{\frac{1}{2}}(\overline{|P|^2 + |Q|^2})$$

である．今，自由度 N の BHJ 表現を (Q',P') とおくと，定理 12.201 の (3) より，

$$\overline{|P'|^2 + |Q'|^2} = \int_{\mathbb{Z}_+^N} \sum_{j=1}^N (2n_j+1)dE(n_1,\cdots,n_N)$$

(ただし $E : 2^{\mathbb{Z}_+^N} \to \mathcal{P}(\ell^2(\mathbb{Z}_+^N))$ は $\ell^2(\mathbb{Z}_+^N)$ 上の掛け算作用素を司る射影値測度 (定義 10.81)) であり，定理 12.201 の (5) より BHJ 表現 (Q',P') は既約であるから，(Q,P) の既約性と Stone-von Neumann の一意性定理 12.195 より，ユニタリ作用素

$$U : L^2(\mathbb{R}^N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+^N)$$

で，

$$UH_VU^{-1} = k^{\frac{1}{2}}U(\overline{|Q|^2 + |P|^2})U^{-1} = k^{\frac{1}{2}}(\overline{|Q'|^2 + |P'|^2}) = k^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{Z}_+^N} \sum_{j=1}^N (2n_j+1)dE(n_1,\cdots,n_N)$$

を満たすものが取れる．よって H_V は自己共役作用素であり，掛け算作用素に関するスペクトル写像定理 10.83 より，

$$\sigma(H_V) = \sigma(UH_VU^{-1}) = \sigma\left(k^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{Z}_+^N} \sum_{j=1}^N (2n_j+1)dE(n_1,\cdots,n_N)\right) = \left\{k^{\frac{1}{2}}(2n+N)\right\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$$

が成り立つ．これより $\sigma(H_V)$ は孤立点のみからなり，命題 10.53 の (5) より，任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し，

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\left(k^{\frac{1}{2}}(2n+N) - H_V\right) &= \mathrm{Ker}\left(k^{\frac{1}{2}}(2n+N) - k^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{Z}_+^N} \sum_{j=1}^N (2n_j+1)dE(n_1,\cdots,n_N)\right) \\ &= \mathrm{Ran}\,E\left(\{(n_1,\cdots,n_N) \in \mathbb{Z}_+^N : n_1+\cdots+n_N = n\}\right)\end{aligned}$$

であり，$\mathbb{Z}_+^N$ の 1 点集合の指示関数による掛け算作用素は 1 次元射影作用素であるから，

$$\dim \mathrm{Ran}\,E\left(\{(n_1,\cdots,n_N) \in \mathbb{Z}_+^N : n_1+\cdots+n_N = n\}\right) = \binom{n+N-1}{n}$$

である．よって $\sigma(H_V)$ の各点は H_V の離散固有値であるから $\sigma(H_V)$ は純粋に離散的である． □

12.11 回転対称ポテンシャルを持つ Schrödinger 作用素の方位量子化

命題 12.204. 任意の $R \in SO(3)$ に対し，Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上のユニタリ作用素

$$\pi(R) : L^2(\mathbb{R}^3) \ni f \mapsto f \circ R^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

を定義する．このとき，

$$\pi : SO(3) \ni R \mapsto \pi(R) \in \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^3))$$

は SOT 連続な群準同型写像，すなわち，$SO(3)$ の $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上へのユニタリ表現である．

証明. 極座標変換 (6.99) と L^2 空間のテンソル積 (定義 10.96) により，ユニタリ作用素

$$\begin{aligned}&U : L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2([0,\infty) \times S_2) = L^2([0,\infty)) \otimes L^2(S_2), \\ &(Uf)(r,\omega) = rf(r\omega) \quad (\forall (r,\omega) \in [0,\infty) \times S_2)\end{aligned}$$

が定義できる．また単位球面 S_2 は $SO(3)$ の等質空間である (命題 12.176) から，正則表現 (定義 12.100) としてユニタリ表現

$$\rho : SO(3) \to \mathcal{U}(L^2(S_2)), \quad \rho(R)f = f \circ R^{-1} \quad (\forall R \in SO(3), \forall f \in L^2(S_2))$$

が定義できる．そこでユニタリ表現

$$1 \otimes \rho : SO(3) \ni R \mapsto 1 \otimes \rho(R) \in \mathcal{U}(L^2([0,\infty)) \otimes L^2(S_2)),$$
$$U^{-1}(1 \otimes \rho)U : SO(3) \ni R \mapsto U^{-1}(1 \otimes \rho(R))U \in \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^3))$$

を考えると, 任意の $f \in L^2([0,\infty) \times S_2)$ に対し,

$$(1 \otimes \rho(R))f(r,\omega) = f(r, R^{-1}\omega) \ \ (\forall R \in SO(3), \forall (r,\omega) \in [0,\infty) \times S_2)$$

であるから,

$$(U^{-1}(1 \otimes \rho(R))U)f = f \circ R^{-1} \ \ (\forall R \in SO(3), \forall f \in L^2(\mathbb{R}^3))$$

である．ゆえに,

$$\pi(R) = U^{-1}(1 \otimes \rho(R))U \ \ (\forall R \in SO(3))$$

であるので π は $SO(3)$ の $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上へのユニタリ表現である． □

定義 12.205 ($SO(3)$ の $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上への正則表現)**.** 命題 12.204 における $SO(3)$ の Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上へのユニタリ表現

$$\pi : SO(3) \ni R \mapsto \pi(R) \in \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^3)), \ \ \pi(R)f = f \circ R^{-1} \ \ (\forall R \in SO(3), \forall f \in L^2(\mathbb{R}^3))$$

を $SO(3)$ の $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上への正則表現と言う．

定義 12.206 ($L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の角運動量作用素)**.** $SO(3)$ の $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上への正則表現 π (定義 12.205) と $\mathrm{Lie}(SO(3))$ の標準基底 (F_1, F_2, F_3) (定義 12.171) に対し, π の微分表現 (定義 12.169) により $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の自己共役作用素

$$L_j := id\pi(F_j) \ \ (j = 1,2,3)$$

を定義する．このとき $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の自己共役作用素の 3 つ組 $L = (L_1, L_2, L_3)$ を $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の角運動量作用素と言う．

定義 12.207 ($L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の位置作用素, 運動量作用素)**.** Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の強可換 (定義 12.136) な自己共役作用素の 3 つ組

$$Q = (\mathrm{id}_1, \mathrm{id}_2, \mathrm{id}_3), \ \ P = -i\nabla = (-i\partial_1, -i\partial_2, -i\partial_3)$$

(定理 12.188 を参照) をそれぞれ $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の位置作用素, 運動量作用素と言う．

命題 12.208 (自己共役作用素の芯の判定法)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし, 稠密な部分空間 $D \subseteq D(T)$ が,

$$e^{itT}D = D \ \ (\forall t \in \mathbb{R})$$

を満たすとする．このとき D は T の芯である．

証明. T を D 上に制限した対称作用素

$$S : D \ni v \mapsto Tv \in \mathcal{H}$$

が本質的に自己共役であることを示せばよい．よって定理 10.34 と命題 10.31 より $\mathrm{Ran}(S \pm i)$ が $\mathcal{H}$ で稠密であることを示せばよいので,

$$\mathrm{Ker}(S^* \pm i) = \{0\} \tag{12.197}$$

を示せばよい (命題 10.27 の (7))．任意の $y_\pm \in \mathrm{Ker}(S^* \pm i)$ と任意の $x \in D$ を取り固定し, 有界関数

$$f_\pm : \mathbb{R} \ni t \mapsto (e^{itT}x \mid y_\pm) \in \mathbb{C}$$

を定義する．このとき,

$$\frac{d}{dt}f_\pm(t) = i(Te^{itT}x \mid y_\pm) \ \ (\forall t \in \mathbb{R})$$

である (補題 10.213). また仮定より $e^{itT}x \in D$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ であり, $S^* y_\pm = \mp i y_\pm$ であるから,

$$\frac{d}{dt} f_\pm(t) = i(Se^{itT}x \mid y_\pm) = i(e^{itT}x \mid S^* y_\pm) = i(e^{itT}x \mid \mp i y_\pm) = \mp f_\pm(t) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

である. よって,

$$f_\pm(t) = e^{\mp t} f_\pm(0) = e^{\mp t}(x \mid y_\pm) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

である. ここで $f_\pm$ は有界関数なので $(x \mid y_\pm) = 0$ でなくてはならない. 以上より,

$$(x \mid y_\pm) = 0 \quad (\forall x \in D, \forall y_\pm \in \mathrm{Ker}(S^* \pm i))$$

が成り立つ. D は稠密なので (12.197) が成り立つ. □

定理 12.209 ($L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の位置作用素, 運動量作用素, 角運動量作用素の芯としての $D(\mathbb{R}^3)$ と $\mathcal{S}_3$)**.** 台がコンパクトな C^∞ 級関数空間 $D(\mathbb{R}^3)$ と急減少関数空間 $\mathcal{S}_3$ は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の位置作用素, 運動量作用素, 角運動量作用素 (定義 12.207, 定義 12.206) の各成分 Q_j, P_j, L_j の芯であり, これらの作用に対して不変である. また Levi-Civita の記号 (定義 6.79) $\varepsilon_{j,k,l}$ に対し,

$$L_j = \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l} Q_k P_l \quad (\text{on } \mathcal{S}_3, j = 1, 2, 3)$$

が成り立つ.

証明. 定理 12.188 より,

$$e^{itQ_j} = e^{it\,\mathrm{id}_j}, \quad e^{itP_j} = \mathcal{F}^{-1} e^{it\,\mathrm{id}_j} \mathcal{F} = T_{-te_j} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3)$$

であるから $D(\mathbb{R}^3), \mathcal{S}_3$ は e^{itQ_j}, e^{itP_j} $(j = 1, 2, 3)$ の作用に対して不変である. また $D(\mathbb{R}^3), \mathcal{S}_3$ は $L^2(\mathbb{R}^3)$ の稠密部分空間 (定理 6.88) であり,

$$D(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathcal{S}_3 \subseteq \bigcap_{j=1}^{3} (D(Q_j) \cap D(P_j))$$

であるから, 命題 12.208 より $D(\mathbb{R}^3), \mathcal{S}_3$ は Q_j, P_j $(j = 1, 2, 3)$ の芯である. 定理 12.170 の (1) より,

$$e^{i\theta L_j} = \pi(\exp(-\theta F_j)) \quad (\forall \theta \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3) \tag{12.198}$$

であるから, $D(\mathbb{R}^3), \mathcal{S}_3$ は $e^{i\theta L_j}$ $(j = 1, 2, 3)$ の作用に対して不変であり, 命題 12.172 と Lebesgue 優収束定理より, 任意の $f \in \mathcal{S}_3$, 任意の $j \in \{1, 2, 3\}$ に対し $L^2(\mathbb{R}^3)$ のノルムで,

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta}(f \circ \exp(\theta F_j) - f) = \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l}\, \mathrm{id}_k\, \partial_l f$$

であるから, (12.198) と補題 10.213 より,

$$\begin{aligned} L_j f &= \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{i\theta}(e^{i\theta L_j} - 1) f = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{i\theta}(f \circ \exp(\theta F_j) - f) \\ &= \frac{1}{i} \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l}\, \mathrm{id}_k\, \partial_l f = \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l} Q_k P_l f \end{aligned}$$

である. よって,

$$D(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathcal{S}_3 \subseteq \bigcap_{j=1}^{3} D(L_j)$$

であるから, 命題 12.208 より $D(\mathbb{R}^3), \mathcal{S}_3$ は L_1, L_2, L_3 の芯であり,

$$L_j f = \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l} Q_k P_l f \quad (\forall f \in \mathcal{S}_3, j = 1, 2, 3) \tag{12.199}$$

が成り立つ. $D(\mathbb{R}^3), \mathcal{S}_3$ は明らかに Q_j, P_j $(j = 1, 2, 3)$ の作用に対して不変であるから, (12.199) より $D(\mathbb{R}^3), \mathcal{S}_3$ は L_j $(j = 1, 2, 3)$ の作用に対して不変である. □

定理 12.210 ($L^2(\mathbb{R}^3)$ の角運動量作用素の固有空間への分解)**.** $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の角運動量作用素 $L = (L_1, L_2, L_3)$ (定義 12.206) に対し，

$$|L|^2 := \overline{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}$$

は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の自己共役作用素であり，L_1, L_2, L_3 それぞれと強可換 (定義 12.136) である．また $|L|^2, L_1, L_2, L_3$ のスペクトルは固有値のみからなり，

$$\sigma(|L|^2) = \sigma_{\mathrm{p}}(|L|^2) = \{l(l+1)\}_{l\in\mathbb{Z}_+},$$

$$\sigma(L_j) = \sigma_{\mathrm{p}}(L_j) = \mathbb{Z} \ \ (j = 1, 2, 3)$$

が成り立つ．そして各 $l \in \mathbb{Z}_+$ に対し l 次の球面調和関数空間 (定義 12.174) を $\mathcal{H}_l(S_2) \subseteq L^2(S_2)$ とおき，極座標変換 (定理 6.99) によるユニタリ作用素を，

$$\begin{aligned} &U : L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2([0,\infty)) \otimes L^2(S_2), \\ &(Uf)(r,\omega) = rf(r\omega) \ \ (\forall f \in L^2(\mathbb{R}^3), \forall (r,\omega) \in [0,\infty) \times S_2) \end{aligned} \tag{12.200}$$

とおくと，各 $j \in \{1,2,3\}$ に対し $\mathcal{H}_l(S_2)$ の CONS

$$\{v_{j,m}^l : m = -l, -l+1, \cdots, l\}$$

が取れて，

$$\begin{aligned} &L^2(\mathbb{R}^3) = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_+} \mathrm{Ran}\, E_{|L|^2}(\{l(l+1)\}), \\ &\mathrm{Ran}\, E_{|L|^2}(\{l(l+1)\}) = U^{-1}\left(L^2([0,\infty)) \otimes \mathcal{H}_l(S_2)\right) \ \ (\forall l \in \mathbb{Z}_+), \\ &\mathrm{Ran}\, E_{|L|^2}(\{l(l+1)\}) = \bigoplus_{m=-l}^{l} \mathrm{Ran}\, E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})E_{L_j}(\{m\}) \ \ (\forall l \in \mathbb{Z}_+, \forall j \in \{1,2,3\}), \\ &\mathrm{Ran}\, E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})E_{L_j}(\{m\}) = U^{-1}(L^2([0,\infty)) \otimes v_{j,m}^l) \\ &(\forall l \in \mathbb{Z}_+, \forall j \in \{1,2,3\}, \forall m \in \{-l, -l+1, \cdots, l\}) \end{aligned}$$

が成り立つ．

証明. $SO(3)$ の $L^2(\mathbb{R}^3), L^2(S_2)$ 上への正則表現を π, ρ とおくと，命題 12.204 より，

$$\pi(R) = U^{-1}(1 \otimes \rho(R))U \ \ (\forall R \in SO(3))$$

であるから，定理 12.170 の (1) より，

$$\begin{aligned} \exp(i\theta L_j) &= \pi(\exp(-\theta F_j)) = U^{-1}(1 \otimes \rho(\exp(-\theta F_j)))U \\ &= U^{-1}(1 \otimes \exp(i\theta(id\rho(F_j))))U \ \ (\forall \theta \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

である．よって補題 10.213 より，

$$L_j = U^{-1}(1 \otimes id\rho(F_j))U \ \ (j = 1, 2, 3) \tag{12.201}$$

である．定理 12.178 より各 $l \in \mathbb{Z}_+$ に対し $\mathcal{H}_l(S_2)$ は ρ の $2l+1$ 次元不変空間であり，ρ の $\mathcal{H}_l(S_2)$ 上への制限

$$\rho_l : SO(3) \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_l(S_2)), \ \ \rho_l(R)f = \rho(R)f \ \ (\forall R \in SO(3), \forall f \in \mathcal{H}_l(S_2))$$

は既約である．そして定理 12.173 より，

$$d\rho_l(F_1)^2 + d\rho_l(F_2)^2 + d\rho_l(F_3)^2 = -l(l+1) \tag{12.202}$$

であり，各 $j \in \{1,2,3\}$ に対し $\mathcal{H}_l(S_2)$ の CONS

$$\{v_{j,m}^l : m = -l, -l+1, \cdots, l\}$$

で,

$$id\rho_l(F_j)v^l_{j,m} = mv^l_{j,m} \quad (\forall m \in \{-l, -l+1, \cdots, l\}) \tag{12.203}$$

なるものが取れる. ここで,

$$\mathcal{H}^l := U^{-1}(L^2([0,\infty)) \otimes \mathcal{H}_l(S_2)), \quad \mathcal{H}^l_{j,m} := U^{-1}(L^2([0,\infty)) \otimes v^l_{j,m})$$
$$(\forall l \in \mathbb{Z}_+, \forall j \in \{1,2,3\}, \forall m \in \{-l,-l+1,\cdots,l\})$$

とおくと, (12.201) と (12.202) より $|L|^2$ は $\mathcal{H}^l$ 上で $l(l+1)$ であり, (12.203) より L_j は $\mathcal{H}^l_m$ 上で m である. そして定理 12.178 より,

$$L^2(\mathbb{R}^3) = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{H}^l, \quad \mathcal{H}^l = \bigoplus_{m=-l}^{l} \mathcal{H}^l_{j,m} \quad (\forall l \in \mathbb{Z}_+, \forall j \in \{1,2,3\}) \tag{12.204}$$

であるから,

$$|L|^2 = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_+} l(l+1)|_{\mathcal{H}^l}, \quad L_j = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_+}\bigoplus_{m=-l}^{l} m|_{\mathcal{H}^l_{j,m}} \quad (j=1,2,3)$$

が成り立つ. よって $|L|^2$ は自己共役作用素であり, 定理 10.87 より,

$$e^{it|L|^2} = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_+} e^{itl(l+1)}|_{\mathcal{H}^l}, \quad e^{itL_j} = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_+}\bigoplus_{m=-l}^{l} e^{itm}|_{\mathcal{H}^l_{j,m}} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, j=1,2,3)$$

であるから $|L|^2$ は L_1, L_2, L_3 それぞれと強可換である. そして任意の $l \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1,2,3\}$, $m \in \{-l,-l+1,\cdots,l\}$ に対し,

$$\mathcal{H}^l \subseteq \mathrm{Ran}\, E_{|L|^2}(\{l(l+1)\}), \quad \mathcal{H}^l_{j,m} \subseteq \mathrm{Ran}\, E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})E_{L_j}(\{m\})$$

であるから, (12.204) より,

$$\mathcal{H}^l = \mathrm{Ran}\, E_{|L|^2}(\{l(l+1)\}), \quad \mathcal{H}^l_{j,m} = \mathrm{Ran}\, E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})E_{L_j}(\{m\})$$

であり, 定理 10.87 より,

$$\{l(l+1)\}_{l\in\mathbb{Z}_+} \subseteq \sigma_{\mathrm{p}}(|L|^2) \subseteq \sigma(|L|^2) = \{l(l+1)\}_{l\in\mathbb{Z}_+},$$

$$\mathbb{Z} \subseteq \sigma_{\mathrm{p}}(L_j) \subseteq \sigma(L_j) = \bigcup_{l\in\mathbb{Z}_+}\bigcup_{m=-l}^{l}\{m\} = \mathbb{Z}$$

である. □

定理 12.211 (回転対称なポテンシャルを持つ Schrödinger 作用素の方位量子化)**.** 回転対称なポテンシャル $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$[*262] を持つ Schrödinger 作用素 $H = \overline{-\Delta + V}$ が $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の自己共役作用素であると仮定する. このとき角運動量作用素 $L = (L_1, L_2, L_3)$ に対し H は L_1, L_2, L_3 それぞれと強可換であり, また H は $|L|^2 = \overline{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}$ とも強可換である. そして各 $l \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1,2,3\}$, $m \in \{-l,-l+1,\cdots,l\}$ に対し, 定理 12.210 における $L^2(\mathbb{R}^3)$ の閉部分空間

$$\mathcal{H}^l_{j,m} = U^{-1}(L^2([0,\infty)) \otimes v^l_{j,m}) = \mathrm{Ran}\, E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})E_{L_j}(\{m\})$$

と, その上への射影作用素

$$P^l_{j,m} := E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})E_{L_j}(\{m\})$$

を考えると,

$$P^l_{j,m} H \subseteq H P^l_{j,m}$$

であり, H の $\mathcal{H}^l_{j,m}$ 上への制限

$$H^l_{j,m} : P^l_{j,m}(D(H)) = D(H) \cap \mathrm{Ran}(P^l_{j,m}) \ni f \mapsto Hf \in \mathcal{H}^l_{j,m}$$

[*262] $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ が回転対称であるとは任意の $R \in SO(3)$ に対し $V \circ R^{-1} = V$ が成り立つことを言う.

は $\mathcal{H}_{j,m}^l$ 上の自己共役作用素である．また,

$$H = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_+}\bigoplus_{m=-l}^{l} H_{j,m}^l \quad (j = 1, 2, 3)$$

である．さらに任意の $l \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, 2, 3\}$, $m \in \{-l, -l+1, \cdots, l\}$, 任意の $\varphi \in D((0, \infty))$ に対し,

$$H_{j,m}^l U^{-1}(\varphi \otimes v_{j,m}^l) = -U^{-1}\left(\varphi'' \otimes v_{j,m}^l\right) + \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + V\right) U^{-1}(\varphi \otimes v_{j,m}^l)$$

が成り立つ．

証明. 正の向きの直交座標による Laplacian の表示 (命題 6.78) より, 任意の $R \in SO(3)$ に対し,

$$(\Delta u) \circ R^{-1} = \Delta(u \circ R^{-1})$$

であるから,

$$\pi(R)\Delta\pi(R)^{-1} = \Delta \quad (\forall R \in SO(3))$$

である．また V は回転対称であるから, 掛け算作用素として,

$$\pi(R)V\pi(R)^{-1} = V \quad (\forall R \in SO(3))$$

である．よって,

$$\pi(R)H\pi(R)^{-1} = H \quad (\forall R \in SO(3))$$

が成り立つ．ここで定理 12.170 の (1) より,

$$\pi(\exp(\theta F_j)) = e^{-i\theta L_j} \quad (\forall\theta \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3)$$

であるから,

$$e^{i\theta L_j} H e^{-i\theta L_j} = H \quad (\forall\theta \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3).$$

よって定理 10.54 より,

$$e^{i\theta L_j} e^{itH} e^{-i\theta L_j} = e^{itH} \quad (\forall\theta, \forall t \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3)$$

である．これより H は L_1, L_2, L_3 のそれぞれと強可換である．さらにこのことから,

$$e^{itH} L_j^2 e^{-itH} = L_j^2 \quad (\forall t \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3)$$

であるので,

$$e^{itH}|L|^2 e^{-itH} = |L|^2 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

である．ゆえに H は $|L|^2$ とも強可換である．よって任意の $l \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, 2, 3\}$, $m \in \{-l, -l+1, \cdots, l\}$ に対し,

$$P_{j,m}^l H \subseteq H P_{j,m}^l \tag{12.205}$$

が成り立つので, H の $\mathcal{H}_{j,m}^l = \mathrm{Ran}(P_{j,m}^l)$ 上への制限

$$H_{j,m}^l : P_{j,m}^l(D(H)) = D(H) \cap \mathrm{Ran}(P_{j,m}^l) \ni f \mapsto Hf \in \mathcal{H}_{j,m}^l$$

は H の自己共役性を受け継いで $\mathcal{H}_{j,m}^l$ 上の自己共役作用素であることが分かる．Laplacian を極座標によって表したものを,

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{S_2} \tag{12.206}$$

(命題 6.97 より極座標は直交座標であることに注意して命題 6.78 を用いる) とおく．任意の $v \in \mathcal{H}_l(S_2)$ に対し v は $\mathbb{R}^3$ 上の l 次の調和多項式を S_2 上に制限したものである (定義 12.174) から, (12.206) より,

$$\Delta_{S_2} v = -l(l+1)v \quad (\forall l \in \mathbb{Z}_+, \forall v \in \mathcal{H}_l(S_2)) \tag{12.207}$$

である．また任意の $\varphi \in D((0,\infty))$ に対し，

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\varphi(r)\right)\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\varphi(r) = \frac{1}{r}\varphi''(r)$$

であるから，(12.206), (12.207) より，

$$\begin{aligned}-\Delta U^{-1}(\varphi\otimes v_{j,m}^l) &= -\frac{1}{r}\varphi'' v_{j,m}^l + \frac{l(l+1)}{r^2}\frac{1}{r}\varphi v_{j,m}^l \\ &= -U^{-1}(\varphi''\otimes v_{j,m}^l) + \frac{l(l+1)}{r^2}U^{-1}(\varphi\otimes v_{j,m}^l)\end{aligned}$$

(U については (12.200) を参照) である．よって，

$$H_{j,m}^l U^{-1}(\varphi\otimes v_{j,m}^l) = -U^{-1}\left(\varphi''\otimes v_{j,m}^l\right) + \left(\frac{l(l+1)}{r^2}+V\right)U^{-1}(\varphi\otimes v_{j,m}^l)$$

である．定理 12.210 より，

$$1 = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_+}\bigoplus_{m=-l}^{l} P_{j,m}^l$$

であるから，(12.205) より，

$$H = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_+}\bigoplus_{m=-l}^{l} H_{j,m}^l$$

である． □

12.12 水素原子型 Schrödinger 作用素のスペクトル構造の決定

定義 12.212 (水素原子型 Schrödinger 作用素)**.** $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の Schrödinger 作用素

$$H = -\Delta - \frac{2}{|\mathrm{id}|}$$

を水素原子型 Schrödinger 作用素作用素と言う．

注意 12.213. 水素原子型 Schödinger 作用素は，実際はある正数 m,α に対し，

$$-\frac{1}{2m}\Delta - \frac{\alpha}{|\mathrm{id}|} \tag{12.208}$$

と表される．$k = m\alpha$ とおき，自由度 3 の Schrödinger 表現 (定義 12.189)

$$(\mathrm{id}, -i\nabla) = (\mathrm{id}_1, \mathrm{id}_2, \mathrm{id}_3, -i\partial_1, -i\partial_2, -i\partial_3)$$

に対し，

$$(Q,P) := (k\,\mathrm{id}, -k^{-1}i\nabla) = (k\,\mathrm{id}_1, k\,\mathrm{id}_2, k\,\mathrm{id}_3, -k^{-1}i\partial_1, -k^{-1}i\partial_2, -k^{-1}i\partial_3)$$

とおくと，定理 12.188 より，

$$e^{ixQ} = e^{ikx\,\mathrm{id}},\quad e^{iyP} = T_{-k^{-1}y}\quad (\forall x,y\in\mathbb{R}^3)$$

であるから，(Q,P) は自由度 3 の Weyl 型 CCR の $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上への既約表現である (既約性は Schrödinger 表現の既約性 (定理 12.192) による)．よって Stone-von Neumann の定理 12.195 よりユニタリ作用素 $U : L^2(\mathbb{R}^3)\to L^2(\mathbb{R}^3)$ が存在し，

$$U(-\Delta)U^{-1} = U|(-i\nabla)|^2U^{-1} = |P|^2 = k^{-2}(-\Delta),$$

$$U\left(\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)U^{-1} = \frac{1}{|Q|} = k^{-1}\frac{1}{|\mathrm{id}|}$$

となる. これより,

$$U\left(-\Delta-\frac{2}{|\mathrm{id}|}\right)U^{-1}=k^{-2}(-\Delta)-k^{-1}\frac{2}{|\mathrm{id}|}=k^{-2}\left(-\Delta-\frac{2k}{|\mathrm{id}|}\right)=\frac{1}{(m\alpha)^2}\left(-\Delta-\frac{2m\alpha}{|\mathrm{id}|}\right)$$
$$=\frac{2m}{(m\alpha)^2}\left(-\frac{1}{2m}\Delta-\frac{\alpha}{|\mathrm{id}|}\right)=\frac{2}{m\alpha^2}\left(-\frac{1}{2m}\Delta-\frac{\alpha}{|\mathrm{id}|}\right)$$

であるから, (12.208) のスペクトル構造は,

$$\frac{m\alpha^2}{2}\left(-\Delta-\frac{2}{|\mathrm{id}|}\right)$$

のスペクトル構造と一致する.

命題 12.214 (水素原子型 Schrödinger 作用素の基本性質)**.** 水素原子型 Schrödinger 作用素 (定義 12.212) について次が成り立つ.

(1) $H=D(-\Delta)=H^2(\mathbb{R}^3)$ を定義域とする下に有界な自己共役作用素であり, $-\Delta$ の芯は H の芯である.
(2) H の真性スペクトルは $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)=[0,\infty)$ であり, H は無限個の離散固有値[*263]を持つ. そして H の離散固有値を下から並べたものを $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とおくと, $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n=0$ である.
(3) 角運動量作用素 $L=(L_1,L_2,L_3)$ (定義 12.206) と $|L|^2=\overline{L_1^2+L_2^2+L_3^2}$[*264]に対し, H は $L_1,L_2,L_3,|L|^2$ それぞれと強可換である.
(4) H の任意の固有値の任意の固有ベクトルは $C_0(\mathbb{R}^3)\cap C^\infty(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ に属する.

証明. (1), (2) は加藤の定理 10.166 による. そして (3) は定理 12.211 による.
(4) を示す. λ を H の任意の固有値とし, $f\in D(H)=H^2(\mathbb{R}^3)$ をその固有ベクトルとする:

$$\lambda f=Hf=-\Delta f-\frac{2}{|\mathrm{id}|}f. \tag{12.209}$$

Sobolev の埋め込み定理 8.134 より $D(H)=H^2(\mathbb{R}^3)\subseteq C_0(\mathbb{R}^3)$ であるので $f\in C_0(\mathbb{R}^3)$ である. 今, ある $m\in\mathbb{Z}_+$ に対し,

$$\varphi f\in H^{m+2}(\mathbb{R}^3)\quad(\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})) \tag{12.210}$$

が成り立つと仮定する. このとき任意の $\varphi\in D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ に対し, (12.209), (12.210) より,

$$\Delta(\varphi f)=(\Delta\varphi)f+2\nabla\varphi\cdot\nabla f+\varphi\Delta f=\left(\Delta\varphi-\left(\frac{2}{|\mathrm{id}|}+\lambda\right)\varphi\right)f+2\nabla\varphi\cdot\nabla f\in H^{m+1}(\mathbb{R}^3)$$

であるから, 楕円型正則性 (定理 11.29 の (3)) より,

$$\varphi f\in H^{m+3}(\mathbb{R}^3)\quad(\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}))$$

が成り立つ. よって帰納法より (12.210) は任意の $m\in\mathbb{Z}_+$ に対して成り立つので, Sobolev の埋め込み定理 8.134 より,

$$\varphi f\in C^\infty(\mathbb{R}^3)\quad(\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}))$$

である. これより $f\in C^\infty(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ である. □

定義 12.215. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $A=(A_1,A_2,A_3)$, $B=(B_1,B_2,B_3)$ を $\mathcal{H}$ 上の線形作用素の 3 つ組とする. これに対し $\mathcal{H}$ 上の線型作用素 $A\cdot B$ を,

$$A\cdot B:=\sum_{j=1}^{3}A_jB_j$$

と定義する. また $\mathcal{H}$ 上の線型作用素の 3 つ組 $A+B,\alpha A,A\times B$ $(\alpha\in\mathbb{C})$ をその $j\in\{1,2,3\}$ 成分が,

$$(A+B)_j:=A_j+B_j,\quad(\alpha A)_j:=\alpha A_j,\quad(A\times B)_j:=\sum_{k,l}\varepsilon_{j,k,l}A_kB_l$$

であるものとして定義する. ただし $\varepsilon_{j,k,l}$ は Levi-Civita の記号 (定義 6.79) である.

[*263] 離散固有値と真性スペクトルについては定義 10.123 を参照.
[*264] $|L|^2$ については定理 12.210 を参照.

補題 12.216 (Levi-Civita の記号の基本性質)**.** Levi-Civita の記号 $\varepsilon_{j,k,l}$ (定義 6.79) について,

$$\sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{j,k,l}\varepsilon_{l,r,m} = \delta_{j,r}\delta_{k,m} - \delta_{j,m}\delta_{k,r} \quad (\forall j,k,r,m \in \{1,2,3\})$$

が成り立つ.

証明. 容易に確かめられる. □

補題 12.217. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $A = (A_j)_{j=1,2,3}$, $B = (B_j)_{j=1,2,3}$, $C = (C_j)_{j=1,2,3}$ をそれぞれ $\mathcal{H}$ 上の線型作用素の 3 つ組とし, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ を,

$$\mathcal{S} \subseteq \bigcap_{j=1}^{3} (D(A_j) \cap D(B_j) \cap D(C_j)),$$

$$A_j\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}, \quad B_j\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}, \quad C_j\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S} \quad (j = 1,2,3)$$

を満たす線型部分空間とする. このとき,

(1) $\mathcal{S}$ 上で $A_jA_k = A_kA_j$ $(\forall j,k \in \{1,2,3\})$ が成り立つならば, $\mathcal{S}$ 上で,

$$A \times A = 0$$

が成り立つ.

(2) $\mathcal{S}$ 上で,

$$A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C$$

が成り立つ.

(3) 任意の $j \in \{1,2,3\}$ に対し $\mathcal{S}$ 上で,

$$(A \times B + B \times A)_j = \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l}[A_k, B_l]$$

が成り立つ.

(4) 任意の $j \in \{1,2,3\}$ に対し $\mathcal{S}$ 上で,

$$(A \times (B \times C))_j = \sum_{k} A_kB_jC_k - (A \cdot B)C_j,$$

$$((A \times B) \times C)_j = \sum_{l} A_lB_jC_l - A_j(B \cdot C)$$

が成り立つ.

(5) $\mathcal{S}$ 上で $A_jA_k = A_kA_j$ $(\forall j,k \in \{1,2,3\})$ が成り立つならば, 任意の $j \in \{1,2,3\}$ に対し, $\mathcal{S}$ 上で,

$$(A \times (A \times B))_j = A_j(A \cdot B) - (A \cdot A)B_j,$$

$$((B \times A) \times A)_j = (B \cdot A)A_j - B_j(A \cdot A)$$

が成り立つ.

(6) 任意の $j,k \in \{1,2,3\}$ に対し $\mathcal{K}$ 上で,

$$A_jA_k - A_kA_j = \sum_{l} \varepsilon_{j,k,l}(A \times A)_l$$

が成り立つ.

証明. (1) 任意の $j \in \{1,2,3\}$ に対し $\mathcal{S}$ 上で,

$$(A \times A)_j = \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l}A_kA_l = \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l}A_lA_k = -\sum_{k,l} \varepsilon_{j,l,k}A_lA_k = -(A \times A)_j$$

であるから $\mathcal{S}$ 上で $(A \times A)_j = 0$ である.

(2) 任意の $j \in \{1,2,3\}$ に対し $\mathcal{S}$ 上で,

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= \sum_j A_j (B \times C)_j = \sum_{j,k,l} \varepsilon_{j,k,l} A_j B_k C_l = \sum_{j,k,l} \varepsilon_{l,j,k} A_j B_k C_l \\ &= \sum_l (A \times B)_l C_l = (A \times B) \cdot C \end{aligned}$$

が成り立つ.

(3) 任意の $j \in \{1,2,3\}$ に対し $\mathcal{S}$ 上で,

$$\begin{aligned} (A \times B + B \times A)_j &= \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l} A_k B_l + \sum_{k,l} \varepsilon_{j,l,k} B_l A_k = \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l} (A_k B_l - B_l A_k) \\ &= \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l} [A_k, B_l] \end{aligned}$$

が成り立つ.

(4) 補題 12.216 より任意の $j \in \{1,2,3\}$ に対し $\mathcal{S}$ 上で,

$$\begin{aligned} (A \times (B \times C))_j &= \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l} A_k (B \times C)_l = \sum_{k,l,r,m} \varepsilon_{j,k,l} \varepsilon_{l,r,m} A_k B_r C_m \\ &= \sum_{k,r,m} (\delta_{j,r} \delta_{k,m} - \delta_{j,m} \delta_{k,r}) A_k B_r C_m \\ &= \sum_k (A_k B_j C_k - A_k B_k C_j) \\ &= \sum_k A_k B_j C_k - (A \cdot B) C_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((A \times B) \times C)_j &= \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l} (A \times B)_k C_l = \sum_{k,l,r,m} \varepsilon_{j,k,l} \varepsilon_{k,r,m} A_r B_m C_l \\ &= \sum_{l,r,m} (\delta_{l,r} \delta_{j,m} - \delta_{l,m} \delta_{r,j}) A_r B_m C_l \\ &= \sum_l (A_l B_j C_l - A_j B_l C_l) \\ &= \sum_l A_l B_j C_l - A_j (B \cdot C) \end{aligned}$$

である.

(5) (4) より任意の $j \in \{1,2,3\}$ に対し $\mathcal{S}$ 上で,

$$\begin{aligned} (A \times (A \times B))_j &= \sum_k A_k A_j B_k - (A \cdot A) B_j = \sum_k A_j A_k B_k - (A \cdot A) B_j \\ &= A_j (A \cdot B) - (A \cdot A) B_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((B \times A) \times A)_j &= \sum_l B_l A_j A_l - B_j (A \cdot A) = \sum_l B_l A_l A_j - B_j (A \cdot A) \\ &= (B \cdot A) A_j - B_j (A \cdot A) \end{aligned}$$

である.

(6) 補題 12.216 より任意の $j, k \in \{1,2,3\}$ に対し $\mathcal{S}$ 上で,

$$\begin{aligned} A_j B_k - A_k B_j &= \sum_{r,m} (\delta_{j,r} \delta_{k,m} - \delta_{j,m} \delta_{k,r}) A_r B_m = \sum_{l,r,m} \varepsilon_{j,k,l} \varepsilon_{l,r,m} A_r B_m \\ &= \sum_l \varepsilon_{j,k,l} (A \times B)_l \end{aligned}$$

である.

□

注意 12.218. $Q = (Q_j)_{j=1,2,3}$, $P = (P_j)_{j=1,2,3}$, $L = (L_j)_{j=1,2,3}$ をそれぞれ Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の位置作用素, 運動量作用素, 角運動量作用素 (定義 12.207, 定義 12.206) とする. このとき定理 12.209 より急減少関数空間 $\mathcal{S}_3 \subseteq L^2(\mathbb{R}^3)$ に対し,

$$\mathcal{S}_3 \subseteq \bigcap_{j=1}^{3} (D(Q_j) \cap D(P_j) \cap D(L_j)),$$

$$Q_j\mathcal{S}_3 \subseteq \mathcal{S}_3, \quad P_j\mathcal{S}_3 \subseteq \mathcal{S}_3, \quad L_j\mathcal{S}_3 \subseteq \mathcal{S}_3 \quad (j = 1, 2, 3)$$

であり,

$$L_j f = \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l} Q_k P_l f \quad (\forall f \in \mathcal{S}_3, j = 1, 2, 3) \tag{12.211}$$

である.

補題 12.219. $Q = (Q_j)_{j=1,2,3}$, $P = (P_j)_{j=1,2,3}$, $L = (L_j)_{j=1,2,3}$ をそれぞれ $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の位置作用素, 運動量作用素, 角運動量作用素とする. このとき,

(1) 任意の $j, k \in \{1, 2, 3\}$ に対し $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$[Q_j, P_k] = i\delta_{j,k}$$

が成り立つ. また $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$L = Q \times P = -P \times L, \quad Q \times Q = P \times P = 0,$$

$$L \cdot Q = Q \cdot L = L \cdot P = P \cdot L = 0$$

が成り立つ.

(2) 任意の $j, k \in \{1, 2, 3\}$ に対し $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$[L_j, Q_k] = i\sum_l \varepsilon_{j,k,l} Q_l, \quad [L_j, P_k] = i\sum_l \varepsilon_{j,k,l} P_l, \quad [L_j, L_k] = i\sum_l \varepsilon_{j,k,l} L_l$$

が成り立つ.

(3) A, B をそれぞれ Q, P, L のうちのいずれかとすると, 任意の $j, k \in \{1, 2, 3\}$ に対し $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$[L_j, (A \times B)_k] = i\sum_l \varepsilon_{j,k,l} (A \times B)_l, \quad [L_j, A \cdot B] = 0$$

が成り立つ. また $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$L \times A + A \times L = 2iA$$

が成り立つ.

(4) $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$L \times Q + Q \times L = 2iQ, \quad L \times P + P \times L = 2iP, \quad L \times L = iL$$

が成り立つ. また $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$L \cdot (Q \times L) = (Q \times L) \cdot L = L \cdot (L \times Q) = (L \times Q) \cdot L = 0,$$
$$L \cdot (P \times L) = (P \times L) \cdot L = L \cdot (L \times P) = (L \times P) \cdot L = 0$$

が成り立つ.

証明. (1) 任意の $j, k \in \{1, 2, 3\}$, 任意の $f \in \mathcal{S}_3$ に対し,

$$[Q_j, P_k]f = -i\,\mathrm{id}_j\,\partial_k f + i\partial_k\,\mathrm{id}_j\, f = i\delta_{j,k} f$$

であるから $\mathcal{S}_3$ 上で $[Q_j, P_k] = i\delta_{j,k}$ である. また (12.211) より $\mathcal{S}_3$ 上で $L = Q \times P$ である. 補題 12.217 の (3) より $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$(Q \times P + P \times Q)_j = \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l}[Q_k, P_l] = \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l} i\delta_{k,l} = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

であるから $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$L_j = (Q \times P)_j = -(P \times Q)_j$$

である. そして補題 12.217 の (1) より $\mathcal{S}_3$ 上で $Q \times Q = P \times P = 0$ であり, 補題 12.217 の (2) より $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$\begin{aligned}
&L \cdot Q = -(P \times Q) \cdot Q = -P \cdot (Q \times Q) = 0, \\
&Q \cdot L = Q \cdot (Q \times P) = (Q \times Q) \cdot P = 0, \\
&L \cdot P = (Q \times P) \cdot P = Q \cdot (P \times P) = 0, \\
&P \cdot L = -P \cdot (P \times Q) = -(P \times P) \cdot Q = 0
\end{aligned}$$

である.

(2) π を $SO(3)$ の $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上への正則表現 (定義 12.205) とし, (F_1, F_2, F_3) を $\mathrm{Lie}(SO(3))$ の標準基底 (定義 12.171) とすると, 角運動量作用素の定義 12.206 より, 任意の $f \in \mathcal{S}_3$ に対し $L^2(\mathbb{R}^3)$ のノルムで,

$$\begin{aligned}
[L_j, Q_k]f &= i\frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} (\pi(\exp(\theta F_j))Q_k\pi(\exp(-\theta F_j)))\, f \\
&= -i(F_jQ)_kf = i\sum_{k,l}\varepsilon_{j,k,l}Q_lf,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_j, P_k]f &= i\frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} (\pi(\exp(\theta F_j))P_k\pi(\exp(-\theta F_j)))\, f \\
&= i(PF_j)_kf = i\sum_{k,l}\varepsilon_{j,k,l}P_lf
\end{aligned}$$

である. また定理 12.170 の (3) より任意の $f \in \mathcal{S}_3$ に対し,

$$[L_j, L_k]f = [id\pi(F_j), id\pi(F_k)]f = -[d\pi(F_j), d\pi(F_k)]f = -d\pi([F_j, F_k])f = i\sum_{j,k}\varepsilon_{j,k,l}L_lf$$

である.

(3) (2) より任意の $j, k \in \{1, 2, 3\}$ に対し $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$[L_j, A_k] = i\sum_{l}\varepsilon_{j,k,l}A_l, \quad [L_j, B_k] = i\sum_{l}\varepsilon_{j,k,l}B_l$$

であるから, 補題 12.216 と補題 12.217 の (6) より, $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$\begin{aligned}
[L_j, (A \times B)_k] &= \sum_{l,m}\varepsilon_{k,l,m}[L_j, A_lB_m] = \sum_{l,m}\varepsilon_{k,l,m}[L_j, A_l]B_m + \sum_{l,m}\varepsilon_{k,l,m}A_l[L_j, B_m] \\
&= i\sum_{l,m,a}\varepsilon_{k,l,m}\varepsilon_{j,l,a}A_aB_m + i\sum_{l,m,b}\varepsilon_{k,l,m}\varepsilon_{j,m,n}A_lB_b \\
&= i\left(\delta_{j,k}\sum_{a}A_aB_a - A_kB_j\right) + i\left(A_jB_k - \delta_{j,k}\sum_{b}A_bB_b\right) \\
&= i(A_jB_k - A_kB_j) = i\sum_{l}\varepsilon_{j,k,l}(A \times B)_l
\end{aligned}$$

である. また任意の $j \in \{1, 2, 3\}$ に対し $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$\begin{aligned}
[L_j, A \cdot B] &= \sum_{k}[L_j, A_kB_k] = \sum_{k}[L_j, A_k]B_k + \sum_{k}A_k[L_j, B_k] \\
&= i\sum_{k,l}\varepsilon_{j,k,l}A_lB_k + i\sum_{k,l}\varepsilon_{j,k,l}A_kB_l = 0
\end{aligned}$$

である. そして補題 12.216 の (3) より任意の $j \in \{1, 2, 3\}$ に対し $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$(L \times A + A \times L)_j = \sum_{k,l}\varepsilon_{j,k,l}[L_k, A_l] = i\sum_{k,l,m}\varepsilon_{j,k,l}\varepsilon_{k,l,m}A_m = 2iA_j$$

である.

(4) (3) より $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$L \times Q + Q \times L = 2iQ, \quad L \times P + P \times L = 2iP, \quad L \times L = iL$$

であるから, (1) と補題 12.217 の (2) より $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$\begin{aligned} &L \cdot (P \times L) = L \cdot (2iP) - L \cdot (L \times P) = -(L \times L) \cdot P = -iL \cdot P = 0, \\ &(P \times L) \cdot L = P \cdot (L \times L) = iP \cdot L = 0, \\ &L \cdot (L \times P) = (L \times L) \cdot P = iL \cdot P = 0, \\ &(L \times P) \cdot L = 2iP \cdot L - (P \times L) \cdot L = -P \cdot (L \times L) = -iP \cdot L = 0 \end{aligned}$$

である. 全く同様にして $\mathcal{S}_3$ 上で,

$$L \cdot (Q \times L) = (Q \times L) \cdot L = L \cdot (L \times Q) = (L \times Q) \cdot L = 0$$

が成り立つことも示せる.

□

定義 12.220 (Runge-Lenz ベクトル作用素)**.** $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の対称作用素

$$A_j := -\frac{Q_j}{|Q|} + \frac{1}{2}(P \times L - L \times P)_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

を定義する. $A = (A_j)_{j=1,2,3}$ を Runge-Lenz ベクトル作用素と言う.

補題 12.221. Q, P, L, H, A をそれぞれ $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の位置作用素, 運動量作用素, 角運動量作用素, 水素原子型 Schrödinger 作用素 (定義 12.212), Runge-Lenz ベクトル作用素とする. このとき,

(1) 任意の $j, k \in \{1, 2, 3\}$ に対し $D(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$ 上で,

$$[L_j, A_k] = i \sum_l \varepsilon_{j,k,l} A_l$$

が成り立つ.

(2) $D(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$ 上で,

$$A = -\frac{Q}{|Q|} + P \times L - iP = -\frac{Q}{|Q|} + iP - L \times P$$

が成り立つ.

(3) $D(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$ 上で,

$$L \cdot A = A \cdot L = 0$$

が成り立つ.

(4) 任意の $j \in \{1, 2, 3\}$ に対し $D(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$ 上で,

$$[H, A_j] = 0$$

が成り立つ.

(5) $D(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$ 上で,

$$A \cdot A = 1 + H(|L|^2 + 1)$$

が成り立つ.

(6) 任意の $j, k \in \{1, 2, 3\}$ に対し $D(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$ 上で,

$$[A_j, A_k] = -i \sum_l \varepsilon_{j,k,l} L_l H$$

が成り立つ.

証明. (1) π を $SO(3)$ の $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上への正則表現 (定義 12.205) とすると,

$$\pi(R)|Q|\pi(R)^{-1} = |Q| \ \ (\forall R \in SO(3))$$

($|Q|$ は $\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto |x| \in [0,\infty)$ による掛け算作用素) であり,

$$e^{i\theta L_j} = \pi(\exp(-\theta F_j)) \ \ (\forall \theta \in \mathbb{R}, j = 1,2,3)$$

であるから, 定理 10.54 より,

$$e^{i\theta L_j}\frac{1}{|Q|}e^{-i\theta L_j} = \frac{1}{|Q|} \ \ (\forall \theta \in \mathbb{R}, j = 1,2,3)$$

である. よって $D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ 上で $\frac{1}{|Q|}$ と L_1, L_2, L_3 は可換であるから, 任意の $j,k \in \{1,2,3\}$ に対し $D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ 上で,

$$\left[L_j, \frac{Q_k}{|Q|}\right] = \frac{1}{|Q|}[L_j, Q_k]$$

である. このことと補題 12.219 の (2), (3) より求める結果を得る.

(2) 補題 12.219 の (3) による.

(3) 補題 12.219 の (4) による.

(4) $\frac{1}{|Q|}$ と L_1, L_2, L_3 は $D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ 上で可換であるから, 任意の $j \in \{1,2,3\}$ に対し $D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ 上で,

$$\begin{aligned}
\left[H, \frac{Q_j}{|Q|}\right] &= \left[-\Delta, \frac{Q_j}{|Q|}\right] = \sum_k \left[P_kP_k, \frac{Q_j}{|Q|}\right] = \sum_k P_k\left[P_k, \frac{Q_j}{|Q|}\right] + \sum_k \left[P_k, \frac{Q_j}{|Q|}\right]P_k \\
&= -i(P_j|Q|^2 - (P\cdot Q)Q_j)\frac{1}{|Q|^3} - \frac{i}{|Q|^3}(|Q|^2P_j - Q_j(Q\cdot P)) \\
&= i((P\times Q)\times Q)_j\frac{1}{|Q|^3} + \frac{i}{|Q|^3}(Q\times(Q\times P))_j \\
&= -i(L\times Q)_j\frac{1}{|Q|^3} + \frac{i}{|Q|^3}(Q\times L)_j \\
&= \frac{i}{|Q|^3}(Q\times L - L\times Q)_j
\end{aligned} \tag{12.212}$$

となる. ただし 2 段目から 3 段目において補題 12.217 の (5) を用いた. また H と L_1, L_2, L_3 は強可換 (命題 12.214) なので, $D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ 上で可換であるから, $D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ 上で,

$$\begin{aligned}
\left[H, \frac{1}{2}(P\times L - L\times P)\right] &= \frac{1}{2}([H,P]\times L - L\times[H,P]) \\
&= \left[-\frac{1}{|Q|}, P\right]\times L - L\times\left[-\frac{1}{|Q|}, P\right] \\
&= \frac{i}{|Q|^3}(Q\times L - L\times Q)
\end{aligned} \tag{12.213}$$

である. よって (12.212), (12.213) より $D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ 上で,

$$\begin{aligned}
[H, A] &= \left[H, -\frac{Q}{|Q|}\right] + \left[H, \frac{1}{2}(P\times L - L\times P)\right] \\
&= -\frac{i}{|Q|^3}(Q\times L - L\times Q) + \frac{i}{|Q|^3}(Q\times L - L\times Q) \\
&= 0
\end{aligned}$$

である.

(5) (2) より $D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ 上で,

$$\begin{aligned}
A\cdot A &= \left(-\frac{Q}{|Q|} + iP - L\times P\right)\cdot\left(-\frac{Q}{|Q|} + P\times L - iP\right) \\
&= 1 - \frac{Q}{|Q|}\cdot(P\times L - iP) - (iP - L\times P)\cdot\frac{Q}{|Q|} \\
&+ (iP - L\times P)\cdot(P\times L - iP)\cdot
\end{aligned} \tag{12.214}$$

であり, 補題 12.217 の (2), (5) と補題 12.219 より $D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ 上で,

$$-\frac{Q}{|Q|}\cdot(P\times L-iP)=-\frac{|L|^2}{|Q|}+\frac{i}{|Q|}(Q\cdot P), \tag{12.215}$$

$$\begin{aligned}-(iP-L\times P)\cdot\frac{Q}{|Q|}&=-iP\cdot\frac{Q}{|Q|}+(L\times P)\cdot Q\frac{1}{|Q|}\\&=-\frac{2}{|Q|}-\frac{i}{|Q|}(Q\cdot P)+L\cdot(P\times Q)\frac{1}{|Q|}\\&=-\frac{2}{|Q|}-\frac{i}{|Q|}(Q\cdot P)-\frac{|L|^2}{|Q|},\end{aligned} \tag{12.216}$$

$$\begin{aligned}(iP-L\times P)\cdot(P\times L-iP)&=|P|^2-(L\times P)\cdot(P\times L)\\&=|P|^2-L\cdot(P\times(P\times L))\\&=|P|^2+L\cdot(|P|^2L)\\&=|P|^2(|L|^2+1)\end{aligned} \tag{12.217}$$

である. よって (12.214), (12.215), (12.216), (12.217) より $D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ 上で,

$$A\cdot A=1-\frac{2}{|Q|}(|L|^2+1)+|P|^2(|L|^2+1)=1+H(|L|^2+1)$$

である.

(6) (2) と補題 12.215 の (5) より任意の $j\in\{1,2,3\}$ に対し $D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ 上で,

$$\begin{aligned}A_j&=-\frac{Q_j}{|Q|}+(P\times L)_j-iP_j=-\frac{Q_j}{|Q|}-(P\times(P\times Q))_j-iP_j\\&=-\frac{Q_j}{|Q|}-P_j(P\cdot Q)+|P|^2Q_j-iP_j=-\frac{Q_j}{|Q|}-(P\cdot Q)P_j+|P|^2Q_j\\&=\left(|P|^2-\frac{1}{|Q|}\right)Q_j-(P\cdot Q)P_j\end{aligned}$$

である. A_j は対称作用素であるので $D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ 上で,

$$A_j=Q_j\left(|P|^2-\frac{1}{|Q|}\right)-P_j(Q\cdot P)$$

でもある. よって $D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ 上で,

$$\begin{aligned}A&=\left(|P|^2-\frac{1}{|Q|}\right)Q-(P\cdot Q)P\\&=Q\left(|P|^2-\frac{1}{|Q|}\right)-P(Q\cdot P)\end{aligned}$$

であるから, $P\times P=Q\times Q=0$ であることと $|P|^2-\frac{1}{|Q|}$, $P\cdot Q$ がそれぞれ L_j と可換である (補題 12.219 の (3)) に注意して, $D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ 上で,

$$\begin{aligned}A\times A&=-\left(|P|^2-\frac{1}{|Q|}\right)Q\times P(Q\cdot P)-(P\cdot Q)P\times Q\left(|P|^2-\frac{1}{|Q|}\right)\\&=-L\left(|P|^2(Q\cdot P)-\frac{1}{|Q|}(Q\cdot P)-(P\cdot Q)|P|^2+(P\cdot Q)\frac{1}{|Q|}\right)\\&=-L\left(i|P|^2-i\frac{2}{|Q|}\right)=-iLH\end{aligned}$$

である．よって補題 12.215 の (6) より，

$$[A_j, A_k] = A_jA_k - A_kA_j = \sum_l \varepsilon_{j,k,l}(A \times A)_l = -i\sum_l \varepsilon_{j,k,l}L_lH$$

である．

□

補題 12.222. Q, P, L, H, A をそれぞれ $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の位置作用素, 運動量作用素, 角運動量作用素, 水素原子型 Schrödinger 作用素, Runge-Lenz ベクトル作用素とし, λ を H の任意の離散固有値[*265]とする．このとき，

(1) 任意の $j \in \{1,2,3\}$ に対し，

$$\mathrm{Ker}(\lambda - H) \subseteq D(L_j), \quad L_j\,\mathrm{Ker}(\lambda - H) \subseteq \mathrm{Ker}(\lambda - H)$$

が成り立つ．

(2) 任意の $k, l \in \{1,2,3\}$ に対し，

$$\mathrm{Ker}(\lambda - H) \subseteq D(P_kL_l) \cap D(L_kP_l)$$

が成り立つ．

(3) 任意の $j \in \{1,2,3\}$ に対し，

$$\mathrm{Ker}(\lambda - H) \subseteq D((P \times L)_j) \cap D((L \times P)_j) = D(A_j)$$

が成り立ち, 任意の $v \in \mathrm{Ker}(\lambda - H)$ に対し，

$$A_jv = -\frac{Q_j}{|Q|}v + (P \times L)_jv - iP_jv$$

が成り立つ．

(4) 任意の $v \in \mathrm{Ker}(\lambda - H) \subseteq D(H) = H^2(\mathbb{R}^3)$[*266], 任意の $j \in \{1,2,3\}$ に対し, $P_jv \in H^1(\mathbb{R}^3)$ に $D'(\mathbb{R}^3)$ の元として Laplacian Δ を作用させたものは $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ に属する．

(5) 任意の $v \in \mathrm{Ker}(\lambda - H) \subseteq D(H) = H^2(\mathbb{R}^3)$, 任意の $j \in \{1,2,3\}$ に対し, $\frac{\mathrm{id}_j}{|\mathrm{id}|}v \in L^2(\mathbb{R}^3)$ に $D'(\mathbb{R}^3)$ の元として Laplacian Δ を作用させたものは $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ に属する．

(6) 任意の $j \in \{1,2,3\}$ に対し，

$$A_j\,\mathrm{Ker}(\lambda - H) \subseteq \mathrm{Ker}(\lambda - H)$$

が成り立つ．

証明. (1) π を $SO(3)$ の $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上への正則表現 (定義 12.205) とすると，

$$\pi(R)H\pi(R)^{-1} = H \quad (\forall R \in SO(3))$$

であるから, 定理 10.54 より，

$$\pi(R)E_H(\{\lambda\})\pi(R)^{-1} = E_H(\{\lambda\}) \quad (\forall R \in SO(3))$$

(E_H は H のスペクトル測度) である．よって $L^2(\mathbb{R}^3)$ の有限次元部分空間 $\mathrm{Ker}(\lambda - H) = \mathrm{Ran}\,E_H(\{\lambda\})$[*267]は π 不変であり, π を $\mathrm{Ker}(\lambda - H)$ に制限して得られる $SO(3)$ のユニタリ表現は有限次元であることから作用素ノルムで連続であるので, 命題 12.155 より任意の $j \in \{1,2,3\}$ に対し，

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta}(\pi(\exp(\theta F_j)) - 1)v \in \mathrm{Ker}(\lambda - H)$$

が存在する．ゆえに $v \in D(d\pi(F_j)) = D(L_j)$[*268]であり, $L_jv = id\pi(F_j)v \in \mathrm{Ker}(\lambda - H)$ である．

[*265] 命題 12.214 より H は無限個の離散固有値を持つ．
[*266] $D(H) = H^2(\mathbb{R}^3)$ であることについては命題 12.214 を参照．
[*267] 定理 10.68 を参照．
[*268] 角運動量作用素の定義 12.206 を参照．

(2) 任意の $k, l \in \{1,2,3\}$ を取る. (1) より,

$$L_l \operatorname{Ker}(\lambda - H) \subseteq \operatorname{Ker}(\lambda - H) \subseteq D(H) = H^2(\mathbb{R}^3) \subseteq D(P_k)$$

であるから,

$$\operatorname{Ker}(\lambda - H) \subseteq D(P_k L_l)$$

である. 補題 12.219 の (2) より,

$$P_l L_k = L_k P_l - i \sum_m \varepsilon_{k,l,m} P_m \quad (\text{on } \mathcal{S}_3)$$

であるから, 任意の $v \in \operatorname{Ker}(\lambda - H)$, 任意の $u \in \mathcal{S}_3$ に対し,

$$\begin{aligned}(P_l v \mid L_k u)_2 = (v \mid P_l L_k u)_2 &= \left(v \mid L_k P_l u - i \sum_m \varepsilon_{k,l,m} P_m u\right)_2 \\ &= \left(P_l L_k v + i \sum_m \varepsilon_{k,l,m} P_m v \mid u\right)_2\end{aligned}$$

である. ここで定理 12.209 より $\mathcal{S}_3$ は L_k の芯であるので, 任意の $v \in \operatorname{Ker}(\lambda - H)$, 任意の $u \in D(L_k)$ に対し,

$$(P_l v \mid L_k u)_2 = \left(P_l L_k v + i \sum_m \varepsilon_{k,l,m} P_m v \mid u\right)_2$$

が成り立つ. よって任意の $v \in \operatorname{Ker}(\lambda - H)$ に対し,

$$P_l v \in D(L_k^*) = D(L_k)$$

であるので,

$$\operatorname{Ker}(\lambda - H) \subseteq D(L_k P_l)$$

が成り立つ.

(3) 任意の $j \in \{1,2,3\}$ を取る.

$$(P \times L)_j = \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l} P_k L_l, \quad (L \times P)_j = \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l} L_k P_l$$

であるから (2) より,

$$\operatorname{Ker}(\lambda - H) \subseteq D((P \times L)_j) \cap D((L \times P)_j) = D(A_j)$$

が成り立つ. 補題 12.219 の (3) より,

$$\frac{1}{2}(P \times L - L \times P)_j = iP_j - (L \times P)_j$$

であるから, 任意の $v \in \operatorname{Ker}(\lambda - H)$, 任意の $u \in \mathcal{S}_3$ に対し,

$$\begin{aligned}(A_j v \mid u)_2 &= \left(-\frac{Q_j}{|Q|} v \mid u\right)_2 + \left(v \mid \frac{1}{2}(P \times L - L \times P)_j u\right)_2 \\ &= \left(-\frac{Q_j}{|Q|} v \mid u\right)_2 + (v \mid iP_j u - (L \times P)_j u)_2 \\ &= \left(-\frac{Q_j}{|Q|} v \mid u\right)_2 + + ((P \times L)_j v - iP_j v \mid u)_2 \\ &= \left(-\frac{Q_j}{|Q|} v + (P \times L)_j v - iP_j v \mid u\right)_2\end{aligned}$$

である. $\mathcal{S}_3$ は $L^2(\mathbb{R}^3)$ において稠密なので,

$$A_j v = -\frac{Q_j}{|Q|} v + (P \times L)_j v - iP_j v \quad (\forall v \in \operatorname{Ker}(\lambda - H))$$

が成り立つ.

(4) 任意の $v \in \mathrm{Ker}(\lambda - H) \subseteq D(H) = H^2(\mathbb{R}^3)$, 任意の $j \in \{1,2,3\}$ を取る. $P_j v \in H^1(\mathbb{R}^3)$ に $D'(\mathbb{R}^3)$ の元として Δ を作用させたもの

$$\Delta P_j v = -i\partial_j \Delta v = -i\partial_j \left(\lambda + \frac{2}{|\mathrm{id}|}\right) v \in D'(\mathbb{R}^3)$$

が $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ に属することを示すには, $\frac{1}{|\mathrm{id}|}v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ に $D'(\mathbb{R}^3)$ の元として ∂_j を作用させたものが $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ に属することを示せばよい. v は H の固有ベクトルなので,

$$v \in D(H) = H^2(\mathbb{R}^3), \quad v \in C_0(\mathbb{R}^3) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$$

(命題 12.214 の (4) を参照) である. そこで Borel 関数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ を,

$$f(x) := \partial_j \left(\frac{1}{|x|} v(x)\right) = -\frac{x_j}{|x|^3} v(x) + \frac{1}{|x|}\partial_j v(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$$

なるものとして定義すると, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ である. 任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^3)$ に対し Gauss の発散定理 11.20 と変数変換公式 (6.94) より,

$$\begin{aligned} &\int_{|x|>\varepsilon} f(x)\varphi(x)dx + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{|x|} v(x)\partial_j\varphi(x)dx = \int_{|x|>\varepsilon} \partial_j \left(\frac{1}{|x|} v(x)\varphi(x)\right) dx \\ &= -\varepsilon^2 \int_{S_2} \frac{1}{\varepsilon} v(\varepsilon\omega)\varphi(\varepsilon\omega)\omega_j d\mu_{S_2}(\omega) \to 0 \quad (\varepsilon \to +0) \end{aligned} \tag{12.218}$$

であり, $f, \frac{1}{|\mathrm{id}|}v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ であるから Lebesgue 優収束定理より,

$$\int_{|x|>\varepsilon} f(x)\varphi(x)dx + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{|x|} v(x)\partial_j\varphi(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\varphi(x)dx + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|} v(x)\partial_j\varphi(x)dx \quad (\varepsilon \to +0) \tag{12.219}$$

である. よって (12.218), (12.219) より,

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|} v(x)\partial_j\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\varphi(x)dx \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^3))$$

が成り立つ. これより $\frac{1}{|\mathrm{id}|}v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ に $D'(\mathbb{R}^3)$ の元として ∂_j を作用させたものは $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ である.

(5) 任意の $v \in \mathrm{Ker}(\lambda - H)$, 任意の $j \in \{1,2,3\}$ を取る. v は H の固有ベクトルなので,

$$v \in D(H) = H^2(\mathbb{R}^3), \quad v \in C_0(\mathbb{R}^3) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$$

(命題 12.214 の (4) を参照) である. そこで Borel 関数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ を,

$$f(x) := \Delta\left(\frac{x_j}{|x|} v(x)\right) = \Delta\left(\frac{x_j}{|x|}\right) v(x) + 2\nabla\left(\frac{x_j}{|x|}\right)\cdot\nabla v(x) + \frac{x_j}{|x|}\Delta v(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$$

なるものとして定義すると $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ であることが分かる. 任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^3)$ を取る. Gauss の発散定理 11.20 と変数変換公式 (6.94) より, 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し,

$$\begin{aligned} &\int_{|x|>\varepsilon} f(x)\varphi(x)dx - \int_{|x|>\varepsilon} \frac{x_j}{|x|} v(x)\Delta\varphi(x)dx = \int_{|x|>\varepsilon} \left(\Delta\left(\frac{x_j}{|x|} v(x)\right)\varphi(x) - \frac{x_j}{|x|} v(x)\Delta\varphi(x)\right) dx \\ &= -\varepsilon^2 \int_{S_2} \nabla\left(\frac{\mathrm{id}_j}{|\mathrm{id}|} v\right)(\varepsilon\omega)\varphi(\varepsilon\omega)\cdot\omega d\mu_{S_2}(\omega) + \varepsilon^2 \int_{S_2} \omega_j v(\varepsilon\omega)\nabla\varphi(\varepsilon\omega)\cdot\omega d\mu_{S_2}(\omega) \\ &= -\varepsilon^2 \int_{S_2} \nabla\left(\frac{\mathrm{id}_j}{|\mathrm{id}|} v\varphi\right)(\varepsilon\omega)\cdot\omega d\mu_{S_2}(\omega) + 2\varepsilon^2 \int_{S_2} \omega_j v(\varepsilon\omega)\nabla\varphi(\varepsilon\omega)\cdot\omega d\mu_{S_2}(\omega) \end{aligned} \tag{12.220}$$

となる. $f, \frac{\mathrm{id}_j}{|\mathrm{id}|}v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ であるから, Lebesgue 優収束定理より,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} ((12.220) \text{ の左辺 }) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\varphi(x)dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x_j}{|x|} v(x)\Delta\varphi(x)dx \tag{12.221}$$

であり, v は有界なので,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(\text{((12.220) の右辺の第二項)}) = 0 \tag{12.222}$$

である. 今,

$$F:[0,\infty)\ni r\mapsto \int_{S_2}\left(\frac{\mathrm{id}_j}{|\mathrm{id}|}v\varphi\right)(r\omega)d\mu_{S_2}(\omega)\ \ (\forall r\in[0,\infty))$$

とおくと, Lebesgue 優収束定理より F は連続関数で $(0,\infty)$ 上で微分可能であり,

$$F'(r) = \int_{S_2}\nabla\left(\frac{\mathrm{id}_j}{|\mathrm{id}|}v\varphi\right)(r\omega)\cdot\omega d\mu_{S_2}(\omega)\ \ (\forall r\in(0,\infty))$$

である. よって,

$$\text{((12.220) の右辺の第一項)} = -\varepsilon^2F'(\varepsilon) \tag{12.223}$$

である.

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(F(\varepsilon)-F(0)) = 0$$

であるから, 平均値の定理より, 0 に収束する正数の列 $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n\mathrm{Re}F'(\varepsilon_n) = 0,\quad \lim_{n\to\infty}\delta_n\mathrm{Im}F'(\delta_n) = 0$$

を満たすものが取れる. よって (12.220), (12.221), (12.222), (12.223) より,

$$\int_{\mathbb{R}^3}f(x)\varphi(x)dx - \int_{\mathbb{R}^3}\frac{x_j}{|x|}v(x)\Delta\varphi(x)dx = 0$$

を得る. ゆえに $\frac{\mathrm{id}_j}{|\mathrm{id}|}v\in L^2(\mathbb{R}^3)$ に $D'(\mathbb{R}^3)$ の元として ∂_j を作用させたものは $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ である.

(6) 任意の $v\in\mathrm{Ker}(\lambda-H)$, 任意の $j\in\{1,2,3\}$ を取る. (3) より,

$$A_jv = -\frac{Q_j}{|Q|}v + (P\times L)_jv - iP_jv = -\frac{Q_j}{|Q|}v + \sum_{k,l}\varepsilon_{j,k,l}P_kL_lv - iP_jv$$

であるから, (1), (4), (5) より $A_jv\in L^2(\mathbb{R}^3)$ に $D'(\mathbb{R}^3)$ の元として Δ を作用させたもの ΔA_jv は $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ に属する. よって,

$$\left(-\Delta-\frac{2}{|\mathrm{id}|}\right)A_jv\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \tag{12.224}$$

である. また $v\in C^\infty(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ (命題 12.214 の (4) を参照) であることと補題 12.221 の (4) より,

$$\left(-\Delta-\frac{2}{|x|}\right)A_j\varphi(x)v(x) = A_j\left(-\Delta-\frac{2}{|x|}\right)\varphi(x)v(x)\ \ (\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}))$$

であり, Urysohn の補題 6.43 より $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ に含まれる任意の閉球 $CB(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}^3:|y-x|\leqslant\varepsilon\}\subseteq\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ に対し, $\varphi\in D(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ で $\varphi(y)=1$ $(\forall y\in CB(x,\varepsilon))$ を満たすものが取れるから,

$$\left(-\Delta-\frac{2}{|x|}\right)A_jv(x) = A_j\left(-\Delta-\frac{2}{|x|}\right)v(x)\ \ (\forall x\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$$

が成り立つ. よって (12.224) より,

$$\left(-\Delta-\frac{2}{|\mathrm{id}|}\right)A_jv = A_j\left(-\Delta-\frac{2}{|\mathrm{id}|}\right)v$$

が成り立つので,

$$\left(-\Delta-\frac{2}{|\mathrm{id}|}\right)A_jv = A_jHv = \lambda A_jv$$

が成り立つ. ゆえに,

$$\int_{\mathbb{R}^3}\lambda A_jv(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^3}A_jv(x)\left(-\Delta-\frac{2}{|x|}\right)\varphi(x)dx\ \ (\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^3))$$

であるから，

$$(\lambda A_j v \mid u) = (A_j v \mid Hu) \quad (\forall u \in D(\mathbb{R}^3))$$

である．$D(\mathbb{R}^3)$ は $-\Delta$ の芯である (定理 8.110) から，H の芯でもある (命題 12.214 の (1) を参照) ので，

$$(\lambda A_j v \mid u) = (A_j v \mid Hu) \quad (\forall u \in D(H))$$

である．ゆえに，

$$A_j v \in D(H^*) = D(H), \quad (\lambda - H)A_j v = 0$$

が成り立つ．

□

補題 12.223. Q, P, L, H, A をそれぞれ $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の位置作用素，運動量作用素，角運動量作用素，水素原子型 Schrödinger 作用素，Runge-Lenz ベクトル作用素とし，λ を H の任意の離散固有値とする．補題 12.222 より各 $j \in \{1,2,3\}$ に対し有限次元 Hilbert 空間 $\mathrm{Ker}(\lambda - H)$ 上の自己共役作用素

$$L_{\lambda,j} : \mathrm{Ker}(\lambda - H) \ni v \mapsto L_j v \in \mathrm{Ker}(\lambda - H),$$
$$A_{\lambda,j} : \mathrm{Ker}(\lambda - H) \ni v \mapsto A_j v \in \mathrm{Ker}(\lambda - H)$$

が定義できる．これらに対し $\mathrm{Ker}(\lambda - H)$ 上の自己共役作用素

$$J_{\lambda,\pm,j} := \frac{1}{2}(L_{\lambda,j} \pm (-\lambda)^{-\frac{1}{2}} A_{\lambda,j})$$

を定義する (命題 12.214 の (2) より λ は負であることに注意)．このとき，

(1) 任意の $j,k \in \{1,2,3\}$ に対し，

$$[L_{\lambda,j}, L_{\lambda,k}] = i\sum_l \varepsilon_{j,k,l} L_{\lambda,l}, \quad [L_{\lambda,j}, A_{\lambda,k}] = i\sum_l \varepsilon_{j,k,l} A_{\lambda,l}, \quad [A_{\lambda,j}, A_{\lambda,k}] = i\sum_l \varepsilon_{j,k,l}(-\lambda) L_{\lambda,l}$$

が成り立つ．

(2) 有限次元 Hilbert 空間 $\mathrm{Ker}(\lambda - H)$ 上の自己共役作用素の 3 つ組 $L_\lambda = (L_{\lambda,j})_{j=1,2,3}$, $A_\lambda = (A_{\lambda,j})_{j=1,2,3}$ に対し，

$$L_\lambda \cdot A_\lambda = A_\lambda \cdot L_\lambda = 0, \quad |A_\lambda|^2 = 1 + \lambda(|L_\lambda|^2 + 1)$$

が成り立つ．ただし $|A_\lambda|^2 = A_\lambda \cdot A_\lambda$, $|L_\lambda|^2 = L_\lambda \cdot L_\lambda$ である．

(3) 任意の $j,k \in \{1,2,3\}$ に対し，

$$[J_{\lambda,\pm,j}, J_{\lambda,\pm,k}] = i\sum_l \varepsilon_{j,k,l} J_{\lambda,\pm,l}, \quad [J_{\lambda,+,j}, J_{\lambda,-,k}] = 0$$

が成り立つ．

(4) 有限次元 Hilbert 空間 $\mathrm{Ker}(\lambda - H)$ 上の自己共役作用素の 3 つ組 $J_{\lambda,\pm} = (J_{\lambda,\pm,j})_{j=1,2,3}$ に対し，

$$|J_{\lambda,\pm}|^2 = J_{\lambda,\pm} \cdot J_{\lambda,\pm} = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$$

が成り立つ．

証明.　(1) 補題 12.219 の (2) と補題 12.222 の (1), (6) による．

(2) 補題 12.222 の (3), (5) による．

(3) (1) より，任意の $j,k \in \{1,2,3\}$ に対し，

$$\begin{aligned}
[J_{\lambda,\pm,j}, J_{\lambda,\pm,k}] &= \frac{1}{4}\left([L_{\lambda,j}, L_{\lambda,k}] \pm (-\lambda)^{-\frac{1}{2}}[L_{\lambda,j}, A_{\lambda,k}] \pm (-\lambda)^{-\frac{1}{2}}[A_{\lambda,j}, L_{\lambda,k}] + (-\lambda)^{-1}[A_{\lambda,j}, A_{\lambda,k}]\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_l \left(\varepsilon_{j,k,l} L_{\lambda,l} \pm \varepsilon_{j,k,l}(-\lambda)^{-\frac{1}{2}} A_{\lambda,l} \mp \varepsilon_{k,j,l}(-\lambda)^{-\frac{1}{2}} A_{\lambda,l} + \varepsilon_{j,k,l} L_{\lambda,l}\right) \\
&= \sum_l \varepsilon_{j,k,l} \frac{1}{2}(L_{\lambda,l} \pm (-\lambda)^{-\frac{1}{2}} A_{\lambda,l}) = \sum_l \varepsilon_{j,k,l} J_{\lambda,\pm,l}
\end{aligned}$$

であり,

$$[J_{\lambda,+,j}, J_{\lambda,-,k}] = \frac{1}{4}\left([L_{\lambda,j}, L_{\lambda,k}] - (-\lambda)^{-\frac{1}{2}}[L_{\lambda,j}, A_{\lambda,k}] + (-\lambda)^{-\frac{1}{2}}[A_{\lambda,j}, L_{\lambda,k}] - (-\lambda)^{-1}[A_{\lambda,j}, A_{\lambda,k}]\right)$$
$$= \frac{1}{4}\sum_l \left(\varepsilon_{j,k,l}L_{\lambda,l} - \varepsilon_{j,k,l}(-\lambda)^{-\frac{1}{2}}A_{\lambda,l} - \varepsilon_{k,j,l}(-\lambda)^{-\frac{1}{2}}A_{\lambda,l} - \varepsilon_{j,k,l}L_{\lambda,l}\right) = 0$$

である.

(4) (2) より,

$$|J_{\lambda,\pm}|^2 = \frac{1}{4}\left(|L_\lambda|^2 + (-\lambda)^{-1}|A_\lambda|^2\right) = \frac{1}{4}\left(|L_\lambda|^2 + (-\lambda)^{-1}(1 + \lambda(|L_\lambda|^2 + 1))\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(|L_\lambda|^2 - \frac{1}{\lambda} - |L_\lambda|^2 - 1\right) = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$$

である.

□

定理 12.224 (水素原子型 Schrodinger 作用素の離散固有値の固有空間の方位量子化)**.** 水素原子型 Schrödinger 作用素

$$H = -\Delta - \frac{2}{|\mathrm{id}|} : H^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$$

の任意の離散固有値 λ は, ある $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\lambda = -\frac{1}{n^2}$$

と表される. そして H の離散固有値 $\lambda = -\frac{1}{n^2}$ の固有空間 $\mathrm{Ker}(\lambda - H) = \mathrm{Ran}\, E_H(\{\lambda\}) = \mathrm{Ran}\, E_H\left(\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}\right)$ は, 角運動量作用素 $L = (L_1, L_2, L_3)$ と $|L|^2 = \overline{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}$[*269]に対し,

$$\mathrm{Ran}\, E_H\left(\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}\right) = \bigoplus_{l=0}^{n-1} \mathrm{Ran}\, E_H\left(\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}\right) E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})$$
$$= \bigoplus_{l=0}^{n-1}\bigoplus_{m=-l}^{l} \mathrm{Ran}\, E_H\left(\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}\right) E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})E_{L_j}(\{m\}) \quad (j = 1, 2, 3) \tag{12.225}$$

と分解される. ただし $E_H, E_{|L|^2}, E_{L_j}$ はそれぞれ $H, |L|^2, L_j$ のスペクトル測度である.

証明. H の離散固有値 λ に対し, 補題 12.223 における $\mathrm{Ker}(\lambda - H) = \mathrm{Ran}\, E_H(\{\lambda\})$ 上の自己共役作用素の 3 つ組 $L_\lambda = (L_{\lambda,j})_{j=1,2,3}$, $J_{\lambda,\pm} = (J_{\lambda,\pm,j})_{j=1,2,3}$ を考える. 補題 12.223 の (3) より,

$$[-iJ_{\lambda,\pm,j}, -iJ_{\lambda,\pm,k}] = \sum_l \varepsilon_{j,k,l}(-iJ_{\lambda,\pm,l}) \quad (\forall j,k \in \{1,2,3\})$$

であるから, $(-iJ_{\lambda,\pm,j})_{j=1,2,3}$ と $\mathrm{Ker}(\lambda - H)$ の関係は定理 12.173 における $(A_j)_{j=1,2,3}$ と $\mathcal{K}$ の関係と等しい. そして補題 12.223 の (4) より,

$$|J_{\lambda,+}|^2 = |J_{\lambda,-}|^2 = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$$

であるから, 定理 12.173 より $J_{\lambda,+,j}, J_{\lambda,-,j}$ の最大固有値は等しく, それはある $l_0 \in \mathbb{Z}_+$ によって $\frac{l_0}{2}$ と表され, さらに,

$$\frac{l_0}{2}\left(\frac{l_0}{2} + 1\right) = |J_{\lambda,\pm}|^2 = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$$

が成り立つ. よって $n := l_0 + 1 \in \mathbb{N}$ とおけば,

$$\lambda = -\frac{1}{n^2}$$

[*269] 定理 12.210 と定理 12.211 を参照.

である. 今, (12.225) が成り立つことを示す. そのためには定理 12.210 より $\mathrm{Ker}(\lambda - H) = \mathrm{Ran}\, E_H(\{\lambda\})$ 上で $|L_\lambda|^2$ の最大固有値が $l_0(l_0+1)$ であることを示せば十分である. 補題 12.223 の (3) より,

$$[-iL_{\lambda,j}, -iL_{\lambda,k}] = \sum_l \varepsilon_{j,k,l}(-iL_{\lambda,l}) \quad (\forall j,k \in \{1,2,3\})$$

であるから $(-iL_{\lambda,j})_{j=1,2,3}$ と $\mathrm{Ker}(\lambda - H)$ の関係は定理 12.173 における $(A_j)_{j=1,2,3}$ と $\mathcal{K}$ の関係と等しい. よって定理 12.173 より $|L_\lambda|^2$ の最大固有値が $l_0(l_0+1)$ であることを示すには $L_{\lambda,j}$ の最大固有値が l_0 であることを示せば十分である. 補題 12.223 の (3) より $(-iJ_{\lambda,+,j})_{j=1,2,3}$ と $(-iJ_{\lambda,-,j})_{j=1,2,3}$ の各成分は互いに可換であるから, 定理 12.173 より $J_{\lambda,+,j}$ と $J_{\lambda,-,j}$ は最大固有値 $\frac{l_0}{2}$ の同時固有ベクトルを持つ. そして,

$$L_{\lambda,j} = J_{\lambda,+,j} + J_{\lambda,-,j} \tag{12.226}$$

であるから $L_{\lambda,j}$ は固有値 l_0 を持つ. 補題 12.223 の (1) より,

$$[L_{\lambda,j}, J_{\lambda,\pm,j}] = \frac{1}{2}[L_{\lambda,j}, L_{\lambda,j}] \pm (-\lambda)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}[L_{\lambda,j}, A_{\lambda,j}] = 0$$

であるから $L_{\lambda,j}, J_{\lambda,+,j}, J_{\lambda,-,j}$ は互いに可換である. よってもし $L_{\lambda,j}$ が l_0 より大きい固有値を持つならば, (12.226) より, その固有空間上で $J_{\lambda,+,j}$ か $J_{\lambda,-,j}$ のうちのいずれか一方は $\frac{l_0}{2}$ より大きい固有値を持つこととなり, $\frac{l_0}{2}$ が $J_{\lambda,\pm,j}$ の最大固有値であることに矛盾する. よって $L_{\lambda,j}$ の最大固有値は l_0 であるので, $|L_\lambda|^2$ の最大固有値は $l_0(l_0+1)$ である. □

定義 12.225 (Laguerre 多項式)**.** 任意の $k, n \in \mathbb{Z}_+$ に対し多項式 $L_k^n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を,

$$L_k^n(x) := \frac{x^{-k}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{k+n}e^{-x}\right) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m(k+n)!}{m!(n-m)!(k+m)!}x^m \quad (\forall x \in (0,\infty))$$

と定義する. これを Laguerre 多項式と言う.

命題 12.226 (Laguerre 多項式が満たす微分方程式)**.** 任意の $k, n \in \mathbb{Z}_+$ に対し Laguerre 多項式 $L_k^n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ は,

$$x\frac{d^2}{dx^2}L_k^n(x) + (k+1-x)\frac{d}{dx}L_k^n(x) + nL_k^n(x) = 0 \quad (\forall x \in (0,\infty))$$

を満たす.

証明.

$$L_k^n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m(k+n)!}{m!(n-m)!(k+m)!}x^m \quad (\forall x \in (0,\infty))$$

であるから, 任意の $x \in (0,\infty)$ に対し,

$$x\frac{d^2}{dx^2}L_k^n(x) = \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m(k+n)!}{(m-1)!(n-m)!(k+m)!}(m-1)x^{m-1} \quad (\forall x \in (0,\infty)),$$

$$(k+1)\frac{d}{dx}L_k^n(x) = \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m(k+n)!}{(m-1)!(n-m)!(k+m)!}(k+1)x^{m-1} \quad (\forall x \in (0,\infty))$$

であるから,

$$\begin{aligned} x\frac{d^2}{dx^2}L_k^n(x) + (k+1)\frac{d}{dx}L_k^n(x) &= \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m(k+n)!}{(m-1)!(n-m)!(k+m)!}(k+m)x^{m-1} \\ &= -\sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m-1}(k+n)!}{(m-1)!(n-m)!(k+m-1)!}x^{m-1} \\ &= -\sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m(k+n)!}{m!(n-m)!(k+m)!}(n-m)x^m \end{aligned} \tag{12.227}$$

である．また，

$$-x\frac{d}{dx}L_k^n(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m(k+n)!}{m!(n-m)!(n+m)!}(-m)x^m,$$

$$nL_k^n(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m(k+n)!}{m!(n-m)!(n+m)!}nx^m$$

であるから，

$$-x\frac{d}{dx}L_k^n(x)+nL_k^n(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m(k+n)!}{m!(n-m)!(n+m)!}(n-m)x^m \tag{12.228}$$

である．よって (12.227), (12.228) より，

$$\begin{aligned}&x\frac{d^2}{dx^2}L_k^n(x)+(k+1-x)\frac{d}{dx}L_k^n(x)+nL_k^n(x)\\&=x\frac{d^2}{dx^2}L_k^n(x)+(k+1)\frac{d}{dx}L_k^n(x)-x\frac{d}{dx}L_k^n(x)+nL_n^k(x)\\&=-\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m(k+n)!}{m!(n-m)!(k+m)!}(n-m)x^m+\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m(k+n)!}{m!(n-m)!(k+m)!}(n-m)x^m=0\end{aligned}$$

である． □

補題 12.227. $n,l\in\mathbb{Z}_+$ が $n\geqslant l+1$ を満たすとする．このとき Laguerre 多項式 $L_{2l+1}^{n-l-1}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ (定義 12.225) に対し，

$$K_l^n(x):=e^{-\frac{x}{2}}x^{l+1}L_{2l+1}^{n-l-1}(x)\ \ (\forall x\in(0,\infty))$$

と定義する．このとき，

$$\frac{d^2}{dx^2}K_l^n(x)=\left(\frac{l(l+1)}{x^2}-\frac{n}{x}+\frac{1}{4}\right)K_l^n(x)\ \ (\forall x\in(0,\infty))$$

が成り立つ．

証明. $L:=L_{2l+1}^{n-l-1}$, $K:=K_l^n$ とおく．命題 12.226 より，

$$xL''(x)+(2l+2-x)L'(x)+(n-l-1)L(x)=0\ \ (\forall x\in(0,\infty)) \tag{12.229}$$

である．

$$K(x)=e^{-\frac{x}{2}}x^{l+1}L(x)\ \ (\forall x\in(0,\infty))$$

であるから，

$$\begin{aligned}e^{\frac{x}{2}}K''(x)&=\frac{1}{4}x^{l+1}L(x)-\frac{d}{dx}(x^{l+1}L(x))+\frac{d^2}{dx^2}(x^{l+1}L(x))\\&=\left(\frac{1}{4}x^{l+1}-(l+1)x^l+l(l+1)x^{l-1}\right)L(x)+(-x^{l+1}+2(l+1)x^l)L'(x)+x^{l+1}L''(x)\\&=\left(\frac{1}{4}x^{l+1}-(l+1)x^l+l(l+1)x^{l-1}\right)L(x)+x^l\left((2l+2-x)L'(x)+xL''(x)\right)\end{aligned}$$

である．よって (12.229) より，

$$\begin{aligned}e^{\frac{x}{2}}K''(x)&=\left(\frac{1}{4}x^{l+1}-(l+1)x^l+l(l+1)x^{l-1}\right)L(x)-x^l(n-l-1)L(x)\\&=\left(\frac{1}{4}x^{l+1}-nx^l+l(l+1)x^{l-1}\right)L(x)\\&=\left(\frac{1}{4}-\frac{n}{x}+\frac{l(l+1)}{x^2}\right)x^{l+1}L(x)\end{aligned}$$

であるから，

$$K''(x)=\left(\frac{1}{4}-\frac{n}{x}+\frac{l(l+1)}{x^2}\right)e^{-\frac{x}{2}}x^{l+1}L(x)=\left(\frac{1}{4}-\frac{n}{x}+\frac{l(l+1)}{x^2}\right)K(x)$$

である． □

補題 12.228. $n \geqslant l+1$ を満たす $n, l \in \mathbb{Z}_+$ に対し補題 12.227 における

$$K_l^n(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{l+1} L_{2l+1}^{n-l-1}(x) \quad (\forall x \in (0,\infty))$$

を考える．そしてこれに対し，

$$R_l^n(x) := K_l^n\left(\frac{2}{n}x\right) = e^{-\frac{x}{n}}\left(\frac{2}{n}x\right)^{l+1} L_{2l+1}^{n-l-1}\left(\frac{2}{n}x\right) \quad (\forall x \in (0,\infty))$$

と定義する．このとき 2 階の線型常微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}R(x) = \left(\frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{n^2}\right)R(x) \quad (\forall x \in (0,\infty)) \tag{12.230}$$

の解 $R:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ で，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}R(x) = 0 \tag{12.231}$$

を満たすものは R_l^n の定数倍のみである．

証明. 補題 12.227 より，

$$\frac{d^2}{dx^2}R_l^n(x) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 K_l^{n\prime\prime}\left(\frac{2}{n}x\right) = \left(\frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{n^2}\right)R_l^n(x)$$

であるから R_l^n は (12.230) の解である．また $R_l^n(x)$ は最低次数が $l+1 \geqslant 1$ 以上の x の多項式に $e^{-\frac{x}{n}}$ を掛けたものであるから，$R_l^n(x)$ は (12.231) も満たす．定理 11.14 より 2 階の線型常微分方程式 (12.230) の解空間は 2 次元である．そこでその解空間の元で $R := R_l^n$ と線型独立なもの $M:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ を取る．M が，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}M(x) = 0 \tag{12.232}$$

を満たすと仮定して矛盾を導けばよい．(12.230) の解空間における M と $R = R_l^n$ の線型独立性より，

$$R(x)M'(x) - R'(x)M(x) = \det\begin{pmatrix} R(x) & M(x) \\ R'(x) & M'(x)\end{pmatrix} \neq 0 \quad (\forall x \in (0,\infty))$$

である．そして，

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(R(x)M'(x) - R'(x)M(x)) = R(x)M''(x) - R''(x)M(x) \\
&= \left(\frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{n^2}\right)(R(x)M(x) - R(x)M(x)) = 0 \quad (\forall x \in (0,\infty))
\end{aligned}$$

であるから，0 ではない実数 C が存在し，

$$R(x)M'(x) - R'(x)M(x) = C \quad (\forall x \in (0,\infty))$$

が成り立つ．任意の $a \in (0,\infty)$ を取る．

$$\begin{aligned}
M'(x) &= M'(a) + \int_a^x M''(r)dr \\
&= M'(a) + \int_a^x \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{r} + \frac{1}{n^2}\right)M(r)dr \\
&= M'(a) + \int_a^x \left(\frac{l(l+1)}{r} - 2 + \frac{r}{n^2}\right)\frac{M(r)}{r}dr \quad (\forall x \in [a,\infty))
\end{aligned} \tag{12.233}$$

であり，(12.232) より $[a,\infty) \ni x \mapsto \frac{M(x)}{x} \in \mathbb{R}$ は有界であるから，(12.233) より，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}M'(x) = 0$$

が成り立つ. $R(x), R'(x)$ は x の多項式に $e^{-\frac{x}{n}}$ を掛けたものなので,

$$\lim_{x\to\infty} x^3R(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} xR'(x) = 0$$

であるから,

$$0 \neq C = R(x)M'(x) - R'(x)M(x) = (x^3R(x))\frac{M'(x)}{x^3} - xR'(x)\frac{M(x)}{x} \to 0 \ \ (x\to\infty)$$

となり, 矛盾を得る. □

補題 12.229. $n \geqslant l+1$ を満たす $n, l \in \mathbb{Z}_+$ に対し, 補題 12.228 における $R_l^n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ と l 次の任意の球面調和関数 $v^l \in \mathcal{H}_l(S_2) \subseteq L^2(S_2)$ を取る. そして極座標変換によるユニタリ作用素

$$U : L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2([0,\infty)) \otimes L^2(S_2),$$
$$(Uf)(r,\omega) := rf(r\omega) \ \ (\forall (r,\omega) \in [0,\infty)\times S_2)$$

[*270]を考え,

$$f_l^n := U^{-1}(R_l^n \otimes v^l) \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

とおく. このとき,

$$f_l^n \in H^2(\mathbb{R}^3)$$

であり, 水素原子型 Schrödinger 作用素

$$H = -\Delta - \frac{2}{|\mathrm{id}|} : H^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$$

に対し,

$$Hf_l^n = -\frac{1}{n^2}f_l^n$$

が成り立つ.

証明. $f_l^n \in H^2(\mathbb{R}^3)$ を示すには, 注意 10.161 より, f_l^n に $D'(\mathbb{R}^3)$ の元として Δ を作用させたもの Δf_l^n が $L^2(\mathbb{R}^3)$ に属することを示せば十分である. Laplacian を極座標によって表したものを,

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{S_2} \tag{12.234}$$

(命題 6.97 より極座標は直交座標であることに注意して命題 6.78 を用いる) とおく. $v^l \in \mathcal{H}_l(S_2)$ は $\mathbb{R}^3$ 上の l 次の調和多項式を S_2 上に制限したものである (定義 12.174) から, (12.234) より,

$$\Delta_{S_2}v^l = -l(l+1)v^l \tag{12.235}$$

である. よって任意の $(r,\omega) \in (0,\infty)\times S_2$ に対し,

$$\begin{aligned}\Delta f_l^n(r\omega) &= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}R_l^n(r)v^l(\omega)\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\left(\frac{1}{r}R_l^n(r)v^l(\omega)\right)\\ &= \frac{1}{r}\left(\frac{d^2}{dr^2}R_l^n(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}R_l^n(r)\right)v^l(\omega)\\ &= \frac{1}{r}\left(-\frac{2}{r}+\frac{1}{n^2}\right)R_l^n(r)v^l(\omega)\\ &= \left(-\frac{2}{r}+\frac{1}{n^2}\right)f_l^n(r\omega)\end{aligned} \tag{12.236}$$

[*270] 極座標変換については定理 6.99 を参照. L^2 空間のテンソル積については定義 10.96 を参照.

となる．ここで 3 番目の等号において R_l^n が満たす微分方程式 (補題 12.228 を参照)

$$\frac{d^2}{dr^2}R_l^n(r) = \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{r} + \frac{1}{n^2}\right) R_l^n(r)$$

を用いた．$\frac{1}{r}R_l^n(r)$ は r の多項式と $e^{-\frac{r}{n}}$ の積であるから, 極座標変換より,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}} |\Delta f_l^n(x)|^2 dx = \int_{(0,\infty)\times S_2} r^2|\Delta f_l^n(r\omega)|^2 dr d\mu_{S_2}(\omega) \\
&= \int_{(0,\infty)\times S_2} r^2 \left(-\frac{2}{r} + \frac{1}{n^2}\right)^2 \left(\frac{1}{r}R_l^n(r)\right)^2 dr \int_{S_2} |v^l(\omega)|^2 d\mu_{S_2}(\omega) < \infty
\end{aligned}$$

となる．よって Borel 関数 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ を,

$$g(x) = \Delta f_l^n(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\})$$

なるものとして定義すると $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$ である．任意の $\varphi \in D(\mathbb{R}^3)$ を取る．Gauss の発散定理 11.20 と変数変換公式 (6.94) より, 任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|>\varepsilon} g(x)\varphi(x)dx - \int_{|x|>\varepsilon} f_l^n(x)\Delta\varphi(x)dx \\
&= -\varepsilon^2 \int_{S_2} (\nabla f_l^n(\varepsilon\omega)\cdot\omega)\varphi(\varepsilon\omega)d\mu_{S_2}(\omega) + \varepsilon^2 \int_{S_2} f_l^n(\varepsilon\omega)\nabla\varphi(\varepsilon\omega)\cdot\omega d\mu_{S_2}(\omega)
\end{aligned} \tag{12.237}$$

であり,

$$(0,\infty)\times S_2 \ni (r,\omega) \mapsto \nabla f_l^n(r\omega)\cdot\omega = \frac{d}{dr}\frac{1}{r}R_l^n(r)v^l(\omega) \in \mathbb{C}$$

[*271] と f_l^n は有界であるので, (12.237) の右辺は $\varepsilon \to +0$ で 0 に収束する．また Lebesgue 優収束定理より (12.237) の左辺は $\varepsilon \to +0$ で,

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(x)\varphi(x)dx - \int_{\mathbb{R}^3} f_l^n(x)\Delta\varphi(x)dx$$

に収束するので,

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^3} f_l^n(x)\Delta\varphi(x)dx$$

が成り立つ．ゆえに $D'(\mathbb{R}^3)$ の元として f_l^n に Δ を作用させたものは $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$ であるので, $f_l^n \in H^2(\mathbb{R}^3)$ である．よって $Hf_l^n \in L^2(\mathbb{R}^3)$ であり, (12.236) より,

$$\begin{aligned}
Hf_l^n(r\omega) &= -\Delta f_l^n(r\omega) - \frac{2}{r}f_l^n(r\omega) = -\left(-\frac{2}{r} + \frac{1}{n^2}\right) f_l^n(r\omega) - \frac{2}{r}f_l^n(r\omega) \\
&= -\frac{1}{n^2}f_l^n(r\omega) \quad (\forall (r,\omega) \in (0,\infty)\times S_2)
\end{aligned}$$

であるから,

$$Hf_l^n = -\frac{1}{n^2}f_l^n$$

が成り立つ． □

定義 12.230. H を水素原子型 Schrödinger 作用素 (定義 12.212), $(L_j)_{j=1,2,3}$ を角運動量作用素, $|L|^2 = \overline{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}$ とし, 極座標変換によるユニタリ作用素

$$\begin{aligned}
&U : L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2([0,\infty)) \otimes L^2(S_2), \\
&(Uf)(r,\omega) := rf(r\omega) \quad (\forall (r,\omega) \in [0,\infty)\times S_2)
\end{aligned}$$

[*271] 勾配の極座標 (命題 6.97 より直交座標) による表示 (命題 6.71) を用いた．

*272を考え，任意の $l \in \mathbb{Z}_+$，任意の $j \in \{1,2,3\}$ に対し，l 次の球面調和関数空間 $\mathcal{H}^l(S_2) \subseteq L^2(S_2)$ の CONS $(v^l_{j,m})_{m=-l,\cdots,l}$ で，

$$\operatorname{Ran} E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})E_{L_j}(\{m\}) = U^{-1}(L^2([0,\infty)) \otimes v^l_{j,m}) \quad (m = -l, -l+1, \cdots, l)$$

(定理 12.210 を参照) なるものを取る．また任意の $n \in \mathbb{N}$, 任意の $l \in \{0,1,\cdots,n-1\}$ に対し，補題 12.228 における

$$R^n_l : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad R^n_l(r) = e^{-\frac{r}{n}} \left(\frac{2}{n}r\right)^{l+1} L^{n-l-1}_{2l+1}\left(\frac{2}{n}r\right) \quad (\forall r \in (0,\infty))$$

を考える．そしてこれらに対し，

$$\begin{aligned} &f^n_{l,j,m} := U^{-1}(R^n_l \otimes v^l_{j,m}) \in U^{-1}(L^2([0,\infty)) \otimes v^l_{j,m}) = \operatorname{Ran} E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})E_{L_j}(\{m\}) \\ &(\forall n \in \mathbb{N}, \forall l \in \{0,1,\cdots,n-1\}, \forall j \in \{1,2,3\}, \forall m \in \{-l,-l+1,\cdots,l\}) \end{aligned}$$

と定義する．このとき補題 12.229 より，

$$\begin{aligned} &f^n_{l,j,m} \in \operatorname{Ran} E_H\left(\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}\right) E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})E_{L_j}(\{m\}) \\ &(\forall n \in \mathbb{N}, \forall l \in \{0,1,\cdots,n-1\}, \forall j \in \{1,2,3\}, \forall m \in \{-l,-l+1,\cdots,l\}) \end{aligned}$$

である．

定理 12.231 (水素原子型 Schrödinger 作用素のスペクトル構造の決定)**.** 水素原子型 Schrödinger 作用素

$$H = -\Delta - \frac{2}{|\mathrm{id}|} : H^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$$

の真性スペクトルと離散スペクトル (定義 10.123) は，

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = [0,\infty), \quad \sigma_{\mathrm{d}}(H) = \left\{-\frac{1}{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

である．そして任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し H の離散固有値 $-\frac{1}{n^2}$ の固有空間は，角運動量作用素 $(L_j)_{j=1,2,3}$ と $|L|^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ に対し，

$$\begin{aligned} \operatorname{Ran} E_H\left(\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}\right) &= \bigoplus_{l=0}^{n-1} \operatorname{Ran} E_H\left(\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}\right) E_{|L|^2}(\{l(l+1)\}) \\ &= \bigoplus_{l=0}^{n-1} \bigoplus_{m=-l}^{l} \operatorname{Ran} E_H\left(\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}\right) E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})E_{L_j}(\{m\}) \quad (j=1,2,3) \end{aligned} \tag{12.238}$$

と分解でき，さらに，

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ran} E_H\left(\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}\right) E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})E_{L_j}(\{m\}) = \mathbb{C}f^n_{l,j,m} \\ &(\forall n \in \mathbb{N}, \forall l \in \{0,1,\cdots,n-1\}, \forall j \in \{1,2,3\}, \forall m \in \{-l,-l+1,\cdots,l\}) \end{aligned} \tag{12.239}$$

(定義 12.230 を参照) が成り立ち，従って，

$$\dim \operatorname{Ran} E_H\left(\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}\right) = n^2$$

が成り立つ．

*272 極座標変換については定理 6.99 を参照．L^2 空間のテンソル積については定義 10.96 を参照．

証明. H の真性スペクトルが $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)=[0,\infty)$ であることは命題 12.214 の (2) で述べてある. そして定理 12.224 より,

$$\sigma_{\mathrm{d}}(H)\subseteq\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

であり, 補題 12.229 より, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $-\frac{1}{n^2}$ は H の負の固有値であるから,

$$-\frac{1}{n^2}\in\sigma(H)\backslash[0,\infty)=\sigma(H)\backslash\sigma_{\mathrm{ess}}(H)=\sigma_{\mathrm{d}}(H)\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

である. よって,

$$\sigma_{\mathrm{d}}(H)=\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

が成り立つ. 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し H の離散固有値 $-\frac{1}{n^2}$ の固有空間が (12.238) のように分解できることは定理 12.224 による. 今, 任意の $n\in\mathbb{N}$, $l\in\{0,1,\cdots,n-1\}$, $j\in\{1,2,3\}$, $m\in\{-l,-l+1,\cdots,l\}$ に対し (12.239) が成り立つことを示す. そのためには任意の

$$f=U^{-1}(R\otimes v_{j,m}^{l})\in\mathrm{Ran}\,E_H\left(\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}\right)E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})E_{L_j}(\{m\})$$

を取り, f が $f_{l,j,m}^{n}$ のスカラー倍であることを示せばよい. f は H の固有ベクトルであるから命題 12.214 の (4) より $f\in C_0(\mathbb{R}^3)\cap C^{\infty}(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ である. よって $R\in L^2([0,\infty))$ は $(0,\infty)$ 上で滑らかであり,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}R(r)=0 \tag{12.240}$$

を満たす. 任意の $\varphi\in D((0,\infty))$ を取る. 定理 12.211 より,

$$HU^{-1}(\varphi\otimes v_{j,m}^{l})=U^{-1}\left(\left(-\varphi''+\frac{l(l+1)}{r^2}\varphi-\frac{2}{r}\varphi\right)\otimes v_{j,m}^{l}\right)$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\left(Hf\mid U^{-1}(\varphi\otimes v_{j,m}^{l})\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)}&=\left(U^{-1}(R\otimes v_{j,m}^{l})\mid HU^{-1}(\varphi\otimes v_{j,m}^{l})\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\
&=\left(R\mid -\varphi''+\frac{l(l+1)}{r^2}\varphi-\frac{2}{r}\varphi\right)_{L^2([0,\infty))}\\
&=\int_{(0,\infty)}\left(-R''(r)+\frac{l(l+1)}{r^2}R(r)-\frac{2}{r}R(r)\right)\overline{\varphi(r)}dr
\end{aligned}$$

である. 一方, $Hf=-\frac{1}{n^2}f$ であるから,

$$\begin{aligned}
\left(Hf\mid U^{-1}(\varphi\otimes v_{j,m}^{l})\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)}&=-\frac{1}{n^2}\left(U^{-1}(R\otimes v_{j,m}^{l})\mid U^{-1}(\varphi\otimes v_{j,m}^{l})\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\
&=-\frac{1}{n^2}\left(R\mid\varphi\right)_{L^2([0,\infty))}=-\frac{1}{n^2}\int_{(0,\infty)}R(r)\overline{\varphi(r)}dr
\end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,\infty)}\left(-R''(r)+\frac{l(l+1)}{r^2}R(r)-\frac{2}{r}R(r)\right)\overline{\varphi(r)}dr\\
&=-\frac{1}{n^2}\int_{(0,\infty)}R(r)\overline{\varphi(r)}dr\quad(\forall\varphi\in D((0,\infty)))
\end{aligned}$$

が成り立つ. ゆえに,

$$-R''(r)+\frac{l(l+1)}{r^2}R(r)-\frac{2}{r}R(r)=-\frac{1}{n^2}R(r)\quad(\forall r\in(0,\infty))$$

が成り立つ. これと (12.240) と補題 12.228 より, R は R_l^n のスカラー倍である. よって f は f_l^n のスカラー倍であるので, (12.239) が成り立つ. これより,

$$\dim\mathrm{Ran}\,E_H\left(\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}\right)E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})E_{L_j}(\{m\})=1$$

であるから, (12.238) より,

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Ran} E_H\left(\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}\right) &= \dim \bigoplus_{l=0}^{n-1} \bigoplus_{m=-l}^{l} \operatorname{Ran} E_H\left(\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}\right) E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})E_{L_j}(\{m\}) \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} \dim \operatorname{Ran} E_H\left(\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}\right) E_{|L|^2}(\{l(l+1)\})E_{L_j}(\{m\}) \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} 1 = \sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n(n-1)+n = n^2\end{aligned}$$

である. □

13 確率論の基礎

13.1 確率変数の確率分布, 確率密度関数, 期待値, (共) 分散, 直積確率測度と確率変数の独立性

定義 13.1 (確率空間)**.** 測度空間 $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ が確率空間であるとは, 測度 P が確率測度, すなわち $P(\Omega) = 1$ であることを言う. 確率論の文脈では全空間 Ω のことを標本空間, Ω の点のことを標本, 可測集合 $E \in \mathcal{E}$ のことを事象, $P(E) \in [0,1]$ のことを事象 E の確率と言う.

定義 13.2 (確率変数, 確率分布)**.** 確率空間 $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ の確率変数とは, 可測空間 $(\Omega, \mathcal{E})$ から他の可測空間 $(S, \mathcal{B})$ への可測写像 $X : (\Omega, \mathcal{E}) \to (S, \mathcal{B})$ のことである. 大抵の場合, 確率変数の値域となる可測空間 $(S, \mathcal{B})$ は $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N})$ であり, このような確率変数を単に $\mathbb{R}^N$ 値確率変数と言う. $X : (\Omega, \mathcal{E}) \to (S, \mathcal{B})$ を確率変数とする.

$$P_X : \mathcal{B} \ni B \mapsto P(X^{-1}(B)) \in [0,1]$$

なる確率測度 P_X を確率変数 X の確率分布と言う. このとき任意の非負値可測関数 $f : (S, \mathcal{B}) \to [0, \infty]$ に対し,

$$\int_S f(x) dP_X(x) = \int_\Omega f(X(\omega)) dP(\omega)$$

である.[*273]

定義 13.3 ($\mathbb{R}^N$ 値確率変数の確率密度関数)**.** X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ 上の $\mathbb{R}^N$ 値確率変数とする. X の確率分布 $P_X : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0,1]$ が $\mathbb{R}^N$ の Lebesgue 測度に関して絶対連続であるならば, Radon-Nikodym の定理 5.104 より, 非負値の $u_X \in L^1(\mathbb{R}^N)$ で,

$$P(X^{-1}(B)) = P_X(B) = \int_B u_X(x) dx \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N})$$

を満たすものが存在する. u_X を確率変数 X の確率密度関数と言う.

定義 13.4 (確率空間上の L^p 空間)**.** $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ を確率空間とする. 任意の $p \in [1, \infty]$ に対し $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ 上の L^p 空間を,

$$L^p(P) := L^p(\Omega, \mathcal{E}, P)$$

と表す. また $\mathbb{R}^N$ 値の確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ が $L^p(P)$ に属するとは,

$$|X| : \Omega \ni \omega \mapsto |X(\omega)| \in [0, \infty)$$

が $L^p(P)$ に属すると言うことである.

定義 13.5 ($\mathbb{R}^N$ 値確率変数の期待値, 分散, 共分散, 共分散行列)**.** $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ を確率空間とする. $L^1(P)$ に属する $\mathbb{R}^N$ 値確率変数 X に対し,

$$\mathrm{E}(X) := \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) \in \mathbb{R}^N$$

を X の期待値と言う. $L^2(P)$ に属する $\mathbb{R}^N$ 値確率変数 X に対し,

$$\mathrm{Var}(X) := \int_\Omega |X(\omega) - \mathrm{E}(X)|^2 dP(\omega) = \mathrm{E}(|X|^2) - |\mathrm{E}(X)|^2 \in [0, \infty)$$

を X の分散と言う. また $L^2(P)$ に属する $\mathbb{R}^N$ 値確率変数 X, Y に対し,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) := \int_\Omega (X(\omega) - \mathrm{E}(X)) \cdot (Y(\omega) - \mathrm{E}(Y)) dP(\omega) \in \mathbb{R}$$

を X, Y の共分散と言い, $L^2(P)$ に属する $\mathbb{R}^N$ 値確率変数 $X = (X_1, \cdots, X_N)$ に対し, 実対称行列

$$\mathrm{Covm}(X) := (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{i,j} \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$$

を X の共分散行列と言う.

[*273] 非負値可測関数の非負値可測単関数の各点単調増加列による近似 (命題 5.29) による.

命題 13.6 (共分散行列の非負性)**.** $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ を確率空間とし, $X = (X_1, \cdots, X_N)$ を $L^2(P)$ に属する $\mathbb{R}^N$ 値の確率変数とする. このとき X の共分散行列

$$\mathrm{Covm}(X) = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{i,j} \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$$

は非負行列[*274]である.

証明. 任意の $\xi = (\xi_j)_{j=1,\cdots,N} \in \mathbb{C}^N$ に対し,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Comv}(X)\xi \mid \xi) &= \sum_{i,j}\int_\Omega (X_i(\omega) - \mathrm{E}(X_i))(X_j(\omega) - \mathrm{E}(X_j))\xi_i\overline{\xi_j}dP(\omega) \\ &= \int_\Omega |(X(\omega) - \mathrm{E}(X))\xi|^2 dP(\omega) \geqslant 0\end{aligned}$$

であるから, 命題 10.5 より $\mathrm{Covm}(X)$ は非負行列である. □

命題 13.7 (確率密度関数を持つ確率変数の共分散行列の可逆性)**.** $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ を確率空間とし, X を $L^2(P)$ に属する $\mathbb{R}^N$ 値の確率変数とする. そして X は確率密度関数 (定義 13.3) $u_X \in L^1(\mathbb{R}^N)$ を持つとする. このとき X の共分散行列は可逆である.

証明. 次元定理 2.40 より $\mathrm{Covm}(X) \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ が $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の線型写像として単射であることを示せば十分である. そこで $\mathrm{Covm}(X)\xi = 0$ を満たす $\xi \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ が存在すると仮定して矛盾を導く.

$$\begin{aligned}0 = (\mathrm{Covm}(X)\xi \mid \xi) &= \int_\Omega |(X(\omega) - \mathrm{E}(X))\xi|^2 dP(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |(x - \mathrm{E}(X))\xi|^2 dP_X(\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} |(x - \mathrm{E}(X))\xi|^2 u_X(x)dx\end{aligned}$$

であり, 右辺の被積分関数は非負値であるから, 命題 5.46 より,

$$|(x - \mathrm{E}(X))\xi|^2 u_X(x) = 0 \quad (\text{a.e. } x \in \mathbb{R}^N) \tag{13.1}$$

である. ここで定理 6.36 より,

$$\{x \in \mathbb{R}^N : (x - \mathrm{E}(X))\xi = 0\} \tag{13.2}$$

は $\mathbb{R}^N$ 内の $N-1$ 次元多様体であるので, 命題 6.87 より (13.2) の $\mathbb{R}^N$ における Lebesgue 測度は 0 である. ゆえに a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ で $|(x - \mathrm{E}(X))\xi|^2 \neq 0$ であるから, (13.1) より a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ で $u_X(x) = 0$ である. よって,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_X(x)dx = 0$$

となるが, u_X は確率密度関数なので,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_X(x)dx = P_X(\mathbb{R}^N) = 1$$

であるから矛盾する. ゆえに $\mathrm{Comv}(X)$ は可逆である. □

定理 13.8 (無限直積確率測度の存在)**.** J を空でない集合とし, 各 $j \in J$ に対し確率空間 $(\Omega_j, \mathcal{E}_j, P_j)$ が与えられているとする. そして,

$$(\Omega, \mathcal{E}) := \left(\prod_{j\in J}\Omega_j, \bigotimes_{j\in J}\mathcal{E}_j\right)$$

を直積可測空間 (定義 5.12) とし, 各 $j \in J$ に対し $\pi_j : \Omega \to \Omega_j$ を自然な射影とする. このとき確率測度 $P : \mathcal{E} \to [0,1]$ で, 任意の互いに異なる $j_1, \cdots, j_n \in J$ と任意の $E_1 \in \mathcal{E}_{j_1}, \cdots, E_n \in \mathcal{E}_{j_n}$ に対し,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n \pi_{j_k}^{-1}(E_k)\right) = \prod_{k=1}^n P_{j_k}(E_k) \tag{13.3}$$

を満たすものが唯一つ存在する.

[*274] つまり C^*-環 $M_{N\times N}(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^N)$ の非負元 (定義 9.55).

証明. J が有限集合の場合は通常の直積測度 (定義 5.82) であるので, J は無限集合であるとする.

$$\mathcal{C} := \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{j_k}^{-1}(E_k) : n \in \mathbb{N}, j_1, \cdots, j_n \in J, E_1 \in \mathcal{E}_{j_1}, \cdots, E_n \in \mathcal{E}_{j_n} \right\}$$

とおくと, $\mathcal{C}$ は半集合代数 (定義 5.60) である. $P : \mathcal{C} \to [0,1]$ を (13.3) によって定義すると, 有限個の確率測度の直積確率測度を考えることによって P は半集合代数 $\mathcal{C}$ 上の有限加法的測度 (定義 5.71) であることが分かる. 命題 5.65 より $\mathcal{C}$ から生成される有限加法族 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{C}$ の互いに交わらない有限個の元の合併である. よって P は $\mathcal{A}$ 上の有限加法的測度に一意拡張できる. その拡張も $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ と表す. P が $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$ 上の測度に一意拡張できることを示せばよい. そのためには Hopf の拡張定理 5.79 より P が $\mathcal{A}$ 上の σ-加法的測度であることを示せばよい. さらにそれを示すには $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ の有限加法性より, $\mathcal{A}$ の単調減少列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$ なるものに対し, $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = 0$ が成り立つことを示せばよい. そこで $\mathcal{A}$ の単調減少列 $(A_n)_{n\ni\mathbb{N}}$ で,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) > 0 \tag{13.4}$$

を満たすものが存在すると仮定して矛盾を導く.

$$\varepsilon := \inf_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) > 0$$

とおく. 今, J の空でない有限部分集合の非交叉列 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists B_n \subseteq \prod_{j\in F_1\cup\cdots\cup F_n} \Omega_j \ \text{ s.t. } \ A_n = B_n \times \prod_{j\in J\setminus(F_1\cup\cdots\cup F_n)} \Omega_j \tag{13.5}$$

となるように取る. そして,

$$\Omega^{(n)} := \prod_{j\in J\setminus(F_1\cup\cdots\cup F_n)} \Omega_j \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおき, $\Omega^{(n)}$ 上の有限加法族 $\mathcal{A}^{(n)}$ と有限加法的測度 $P^{(n)} : \mathcal{A}^{(n)} \to [0,1]$ を, Ω に対し $\mathcal{A}$ と P を定義したのと同様にして定義する. また, 任意の $A \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, x_1 \in \prod_{j\in F_1} \Omega_j, \cdots, x_n \in \prod_{j\in F_n} \Omega_j$ に対し,

$$A(x_1, \cdots, x_n) := \{y \in \Omega^{(n)} : (x_1, \cdots, x_n, y) \in A\} \in \mathcal{A}^{(n)}$$

と定義する. (13.5) より,

$$\varepsilon \leqslant P(A_m) = \int_{\prod_{j\in F_1}\Omega_j} P^{(1)}(A_m(x)) d \bigotimes_{j\in F_1} P_j(x) \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$

である. $\bigotimes_{j\in F_1} P_j$ は確率測度であり,

$$P^{(1)}(A_{m+1}(x)) \leqslant P^{(1)}(A_m(x)) \quad (\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \prod_{j\in F_1} \Omega_j)$$

であるから, 単調収束定理より,

$$\varepsilon \leqslant \int_{\prod_{j\in F_1}\Omega_j} \inf_{m\in\mathbb{N}} P^{(1)}(A_m(x)) d \bigotimes_{j\in F_1} P_j(x)$$

が成り立つ. よって $x_1 \in \prod_{j\in F_1} \Omega_j$ で,

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \inf_{m\in\mathbb{N}} P^{(1)}(A_m(x_1))$$

を満たすものが取れる. これより,

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqslant P^{(1)}(A_m(x_1)) = \int_{\prod_{j\in F_2}\Omega_j} \inf_{m\in\mathbb{N}} P^{(2)}(A_m(x_1, x)) d \bigotimes_{j\in F_2} P_j(x) \quad (\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \prod_{j\in F_2} \Omega_j)$$

であるから, 上と同様に単調収束定理より,

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \int_{\prod_{j\in F_2}\Omega_j} \inf_{m\in\mathbb{N}} P^{(2)}(A_m(x_1, x)) d \bigotimes_{j\in F_2} P_j(x)$$

が成り立つことが分かる．よって $x_2 \in \prod_{j \in F_2} \Omega_j$ で，

$$\frac{\varepsilon}{2^2} \leqslant \inf_{m \in \mathbb{N}} P^{(2)}(A_m(x_1, x_2))$$

を満たすものが取れる．同様の操作を続けていき，

$$x_n \in \prod_{j \in F_n} \Omega_j \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

で，

$$\frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant P^{(n)}(A_m(x_1, \cdots, x_n)) \quad (\forall n, m \in \mathbb{N})$$

を満たすものが構成できる．これより特に，

$$A_n(x_1, \cdots, x_n) \neq \varnothing \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから，(13.4) より，

$$(x_1, \cdots, x_n) \in B_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

である．そこで $x \in \Omega$ を，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\prod_{j \in F_n} \Omega_j$ への射影が x_n であるものとして定義すれば，

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

となり，(13.3) に矛盾する．よって求める結果を得た． □

定義 13.9 (直積確率測度)**.** J を空でない集合とし，各 $j \in J$ に対し確率空間 $(\Omega_j, \mathcal{E}_j, P_j)$ が与えられているとする．このとき定理 13.8 より，直積可測空間 $(\prod_{j \in J} \Omega_j, \bigotimes_{j \in J} \mathcal{E}_j)$ 上の確率測度 $\bigotimes_{j \in J} P_j$ で，任意の互いに異なる有限個の $j_1, \cdots, j_n \in J$ と $E_1 \in \mathcal{E}_{j_1}, \cdots, E_n \in \mathcal{E}_{j_n}$ に対し，

$$\bigotimes_{j \in J} P_j \left(\bigcap_{k=1}^{n} \pi_{j_k}^{-1}(E_k) \right) = \prod_{k=1}^{n} P_{j_k}(E_k)$$

を満たすものが唯一つ存在する．$\bigotimes_{j \in J} P_j$ を $(P_j)_{j \in J}$ の直積確率測度と言い，確率空間 $(\prod_{j \in J} \Omega_j, \bigotimes_{j \in J} \mathcal{E}_j, \bigotimes_{j \in J} P_j)$ を $((\Omega_j, \mathcal{E}_j, P_j))_{j \in J}$ の直積確率空間と言う．

定義 13.10 (確率変数の独立性)**.** $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ を確率空間，J を空でない集合とし，各 $j \in J$ に対し確率変数 $X_j : \Omega \to (S_j, \mathcal{B}_j)$ が与えられているとする． 確率変数の族 $(X_j)_{j \in J}$ が独立であるとは，任意の互いに異なる有限個の $j_1, \cdots, j_n \in J$ と $E_1 \in \mathcal{E}_{j_1}, \cdots, E_n \in \mathcal{E}_{j_n}$ に対し，

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} X_{j_k}^{-1}(E_k) \right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_{j_k}^{-1}(E_k))$$

が成り立つことを言う．すなわち，確率変数の族 $(X_j)_{j \in J}$ が独立であるとは，直積可測空間 $(\prod_{j \in J} S_j, \bigotimes_{j \in J} \mathcal{B}_j)$ 値確率変数

$$X := (X_j)_{j \in J} : \Omega \ni \omega \mapsto (X_j(\omega))_{j \in J} \in \left(\prod_{j \in J} S_j, \bigotimes_{j \in J} \mathcal{B}_j \right)$$

に対し，

$$P_X = \bigotimes_{j \in J} P_{X_j}$$

が成り立つことである ($P_X \left(\bigcap_{k=1}^{n} \pi_{j_k}^{-1}(E_k) \right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} X_{j_k}^{-1}(E_k) \right)$ であることに注意)．

命題 13.11. $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ を確率空間とし，$(X_j : \Omega \to (S_j, \mathcal{B}_j))_{j \in J}$ を独立な確率変数の族 (定義 13.10) とする．

(1) 任意の空でない $J_0 \subseteq J$ に対し確率変数の族 $(X_j : \Omega \to (S_j, \mathcal{B}_j))_{j \in J_0}$ は独立である．

(2) 各 $j \in J$ に対し可測空間 $(\mathcal{T}_j, \mathcal{C}_j)$ と可測写像 $f_j : (S_j, \mathcal{B}_j) \to (\mathcal{T}_j, \mathcal{C}_j)$ が与えられているとする．そして各 $j \in J$ に対し確率変数 $f_j(X_j) : \Omega \ni \omega \mapsto f_j(X_j(\omega)) \in (T_j, \mathcal{C}_j)$ を定義する．このとき確率変数の族 $(f_j(X_j) : \Omega \to (T_j, \mathcal{C}_j))_{j \in J}$ は独立である．

(3) $(J_i)_{i \in I}$ を J の互いに交わらない空でない部分集合の族で $J = \bigcup_{i \in I} J_i$ なるものとする．そして各 $i \in I$ に対し，

$$Y_i := (X_j)_{j \in J_i} : \Omega \ni \omega \mapsto (X_j(\omega))_{j \in J_i} \in \left(\prod_{j \in J_i} S_j, \bigotimes_{j \in J_i} \mathcal{B}_j \right)$$

なる確率変数を定義する．このとき確率変数の族 $(Y_i)_{i \in I}$ は独立である．

証明. 確率変数の独立性の定義 13.10 より容易に確かめられる． □

命題 13.12 (独立な確率変数の共分散)**.** $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ を確率空間とし，X, Y を $L^2(P)$ に属する独立な確率変数とする．このとき X, Y の共分散と $X + Y$ の分散 (定義 13.5) について，

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0, \ \ \mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

が成り立つ．

証明. 独立性より $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$ であるから，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \int_\Omega (X(\omega) - \mathrm{E}(X)) \cdot (Y(\omega) - \mathrm{E}(Y)) dP(\omega) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (x - \mathrm{E}(X)) \cdot (y - \mathrm{E}(Y)) dP_{(X,Y)}(x, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} (x - \mathrm{E}(X)) \cdot (y - \mathrm{E}(Y)) dP_X(x) dP_Y(y) \\
&= (\mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X)) \cdot (\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(Y)) = 0
\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X + Y) &= \int_\Omega |(X(\omega) + Y(\omega)) - (\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y))|^2 dP(\omega) \\
&= \int_\Omega (|X(\omega) - \mathrm{E}(X)|^2 - 2(X(\omega) - \mathrm{E}(X))(Y(\omega) - \mathrm{E}(Y)) + |Y(\omega) - \mathrm{E}(Y)|^2) dP(\omega) \\
&= \mathrm{Var}(X) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)
\end{aligned}$$

である． □

13.2 Kolmogorov の大数の法則, Khinchin の大数の法則

補題 13.13 (Kolmogorov の不等式)**.** $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ を確率空間, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $L^2(P)$ に属する $\mathbb{R}^N$ 値の独立な確率変数の列とする．

$$S_n := \sum_{k=1}^n (X_k - \mathrm{E}(X_k)) \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおく．このとき任意の正数 ε に対し，

$$P\left(\varepsilon < \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n| \right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Var}(X_n)$$

が成り立つ．

証明.

$$A := \left(\varepsilon < \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n| \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\varepsilon < |S_n|)$$

とおき,

$$\begin{aligned} A_n :&= (|S_1| \leqslant \varepsilon, \cdots, |S_{n-1}| \leqslant \varepsilon, \varepsilon < |S_n|) \\ &= \{\omega \in \Omega : |S_1(\omega)| \leqslant \varepsilon, \cdots, |S_{n-1}(\omega)| \leqslant \varepsilon, \varepsilon < |S_n(\omega)|\} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

とおくと, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{E}$ の非交叉列であり,

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

である. 命題 13.12 より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Var}(X_j) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \mathrm{E}\left(\left|\sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}(X_j)\right|^2\right) = \mathrm{E}(|S_n|^2) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(|S_n|^2\chi_{A_k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(|S_n - S_k|^2\chi_{A_k}) + 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}((S_n - S_k)S_k\chi_{A_k}) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(|S_k|^2\chi_{A_k}) \\ &\geqslant 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}((S_n - S_k)S_k\chi_{A_k}) + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \end{aligned} \tag{13.6}$$

である. ここで $S_n - S_k$ は $X_{k+1}, \cdots, X_n$ の関数であり, $S_k\chi_{A_k}$ は $X_1, \cdots, X_k$ の関数であるから, 命題 13.11 より $S_n - S_k$ と $S_k\chi_{A_k}$ は独立である. よって,

$$\mathrm{E}((S_n - S_k)S_k\chi_{A_k}) = \mathrm{E}(S_n - S_k)\mathrm{E}(S_k\chi_{A_k}) = \sum_{j=k+1}^{n} (\mathrm{E}(X_j) - \mathrm{E}(X_j))\mathrm{E}(S_k\chi_{A_k}) = 0$$

である. ゆえに (13.6) より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Var}(X_j) \geqslant \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

であるから,

$$P(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Var}(X_n)$$

が成り立つ. □

補題 13.14. $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ を確率空間, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $L^2(P)$ に属する $\mathbb{R}^N$ 値の独立な確率変数の列とする. もし,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$$

が成り立つならば, P- a.e. $\omega \in \Omega$ で,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n(\omega) - \mathrm{E}(X_n)) \in \mathbb{R}^N$$

が存在する.

証明.

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} (X_j - \mathrm{E}(X_j)) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおき, 各 $n, m \in \mathbb{N}$ に対し,

$$A_{n,m} := \left(\frac{1}{m} < \sup_{k\geqslant n+1} |S_k - S_n|\right) \in \mathcal{E}$$

とおくと, 補題 13.13 より,

$$P(A_{n,m}) \leqslant m^2 \sum_{k\geqslant n+1} \mathrm{Var}(X_k) \quad (\forall n, m \in \mathbb{N})$$

が成り立つ. そして仮定より $\lim_{n\to\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\mathrm{Var}(X_k)=0$ であるから, 任意の $m\in\mathbb{N}$ に対し,

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_{n,m}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}m^2\sum_{k\geqslant n+1}\mathrm{Var}(X_k)=0$$

が成り立つ. よって,

$$A:=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_{n,m}\in\mathcal{E}$$

とおくと,

$$P(A)\leqslant\sum_{m\in\mathbb{N}}P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_{n,m}\right)=0$$

である. 任意の $\omega\in\Omega\backslash A=\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Omega\backslash A_{n,m}$ を取る. このとき任意の $m\in\mathbb{N}$ に対し, $n\in\mathbb{N}$ が存在し,

$$\sup_{k\geqslant n+1}|X_k(\omega)-X_n(\omega)|\leqslant\frac{1}{m}$$

となるから,

$$|S_k(\omega)-S_{k'}(\omega)|\leqslant\frac{2}{m}\quad(\forall k,k'\geqslant n+1)$$

である. ゆえに $(S_k(\omega))_{k\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるので,

$$\lim_{n\to\infty}S_k(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}(X_n(\omega)-\mathrm{E}(X_n))\in\mathbb{R}^N$$

が存在する. □

補題 13.15. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^N$ の列とし,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_n}{n}\in\mathbb{R}^N$$

が存在すると仮定する. このとき,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=0$$

が成り立つ.

証明.

$$b_0:=0,\ \ b_n:=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

とおくと, 仮定より $b:=\lim_{n\to\infty}b_n\in\mathbb{R}^N$ が存在する.

$$a_n=n(b_n-b_{n-1})\ \ (\forall n\in\mathbb{N})$$

であるから,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k(b_k-b_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}(kb_k-(k-1)b_{k-1})-\sum_{k=1}^{n-1}b_k=nb_n-\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

である. ここで,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k-b\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|b_k-b|\to 0\ \ (n\to\infty)$$

であるから,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=b_n-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}b_k\to b-b=0$$

である. □

定理 13.16 (Kolmogorov の大数の法則)**.** $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ を確率空間, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $L^2(P)$ に属する $\mathbb{R}^N$ 値の独立な確率変数の列とする．もし,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{Cov}(X_n)}{n^2} < \infty$$

が成り立つならば, P- a.e. $\omega \in \Omega$ で,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k(\omega) - \mathrm{E}(X_k)) = 0$$

が成り立つ.

証明. 各 $n \in \mathbb{N}$ について $Y_n := \frac{X_n}{n} \in L^2(P)$ とおけば, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は独立な確率変数の列であり, 仮定より,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Var}(Y_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} < \infty$$

である．よって補題 13.14 より, P - a.e. $\omega \in \Omega$ で,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Y_n(\omega) - \mathrm{E}(Y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(X_n(\omega) - \mathrm{E}(X_n)) \in \mathbb{R}^N$$

が存在するので, 補題 13.15 より, P - a.e. $\omega \in \Omega$ で,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k(\omega) - \mathrm{E}(X_k)) = 0$$

が成り立つ. □

補題 13.17. μ を $\mathbb{R}^N$ 上の Borel 測度で,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x| d\mu(x) < \infty$$

を満たすものとする．このとき,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \int_{|x|<n} |x|^2 d\mu(x) < \infty$$

が成り立つ.

証明.

$$a_n := \int_{|x|<n} |x|^2 d\mu(x) \leqslant n \int_{|x|<n} |x| d\mu(x) < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
\infty &> \int_{\mathbb{R}^N} |x| d\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{n-1\leqslant|x|<n} |x| d\mu(x) \geqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \int_{n-1\leqslant|x|<n} |x|^2 d\mu(x) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}} \left(a_1 + \frac{a_2 - a_1}{2} + \frac{a_3 - a_2}{3} + \cdots + \frac{a_N - a_{N-1}}{N} + \frac{a_{N+1} - a_N}{N+1} \right) \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n(n+1)} + \frac{a_{N+1}}{N+1} \right) \geqslant \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n(n+1)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

であり, $(\frac{n(n+1)}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ は有界であるから,

$$\infty > \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n(n+1)}{n^2} \frac{a_n}{n(n+1)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n^2} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \int_{|x|<n} |x|^2 d\mu(x)$$

である. □

定理 13.18 (Khinchin の大数の法則)**.** $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ を確率空間, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $L^1(P)$ に属する $\mathbb{R}^N$ 値の独立な確率変数の列とし, $\{P_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$*275が有限集合であると仮定する. このとき P - a.e. $\omega \in \Omega$ で,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k(\omega) - \mathrm{E}(X_k)) = 0$$

が成り立つ.

証明. $\{P_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\mu_1, \cdots, \mu_l\}$ とし, Borel 測度

$$\mu := \mu_1 + \cdots + \mu_l : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0, \infty)$$

を定義すると,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x| d\mu(x) = \sum_{j=1}^{l} \int_{\mathbb{R}^N} |x| d\mu_j(x) < \infty$$

である.

$$Y_n := X_n \chi_{|X_n|<n} \in L^2(P) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおくと,

$$\mathrm{Var}(Y_n) \leqslant \mathrm{E}(|Y_n|^2) = \int_{|x|<n} |x|^2 dP_{X_n}(x) \leqslant \int_{|x|<n} |x|^2 d\mu(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから, 補題 13.17 より,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \int_{|x|<n} |x|^2 d\mu(x) < \infty$$

である. 命題 13.11 より $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は独立であるから, Kolmogorov の大数の法則 13.16 より,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k(\omega) - \mathrm{E}(Y_k)) = 0 \quad (P\text{ - a.e. } \omega \in \Omega) \tag{13.7}$$

が成り立つ.

$$|\mathrm{E}(X_n) - \mathrm{E}(Y_n)| \leqslant \int_{n\leqslant|x|} |x| dP_X(\omega) \leqslant \int_{n\leqslant|x|} |x| d\mu(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{E}(Y_k) - \mathrm{E}(X_k)) = 0 \tag{13.8}$$

である. 今,

$$A_n := (n \leqslant |X|) \in \mathcal{E} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおくと,

$$P(A_n) = P_{X_n}(n \leqslant |x|) \leqslant \mu(n \leqslant |x|) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(n \leqslant |x|) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\geqslant n} \mu(k \leqslant |x| < k+1) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} k\mu(k \leqslant |x| < k+1) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{k\leqslant|x|<k+1} |x| d\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |x| d\mu(x) < \infty
\end{aligned}$$

である. よって,

$$A := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant m} A_n \in \mathcal{E}$$

*275 P_{X_n} は確率変数 X_n の確率分布 (定義 13.2) である.

とおけば,

$$P(A) = \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{n\geqslant m} A_n\right) \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{n\geqslant m} P(A_n) = 0$$

となる. 任意の $\omega \in \Omega\backslash A = \bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geqslant m}\Omega\backslash A_n$ を取る. このときある $m \in \mathbb{N}$ が存在し $X_n(\omega) = Y_n(\omega)$ $(\forall n \geqslant m)$ であるから,

$$\lim_{n\to\infty}(X_n(\omega) - Y_n(\omega)) = 0 \quad (P\text{ -a.e. } \omega \in \Omega)$$

である. よって,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k(\omega) - Y_k(\omega)) = 0$$

が成り立つ. これを (13.7), (13.8) と合わせれば,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k(\omega) - \mathrm{E}(X_k)) = 0 \quad (P\text{ - a.e. } \omega \in \Omega)$$

を得る. □

13.3 確率分布の特性関数

定義 13.19 ($\mathbb{R}^N$ 上の確率 Borel 測度の特性関数)**.** 局所コンパクト可換群 $\mathbb{R}^N$ の双対群 $\widehat{\mathbb{R}^N}$ (定義 12.126) は定理 12.127 より, ペアリング

$$\langle x, \xi\rangle = e^{i\xi\cdot x} \quad (\forall x, \xi \in \mathbb{R}^N)$$

によって $\mathbb{R}^N$ 自身である. 確率論の文脈においては, このペアリングによって $\widehat{\mathbb{R}^N} = \mathbb{R}^N$ とみなし, 確率 Borel 測度 $\nu \in M(\mathbb{R}^N) = M(\widehat{\mathbb{R}^N})$ の特性関数 (定義 12.140)

$$\widehat{\nu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x} d\nu(x) \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^N)$$

を定義する.

定理 13.20 (Bochner の定理)**.** $M_{+,1}(\mathbb{R}^N)$ を $\mathbb{R}^N$ 上の確率 Borel 測度全体とし, $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^N)$ をノルムが 1 の $\mathbb{R}^N$ 上の正定値関数全体 (定義 12.59) とする. このとき任意の $\nu \in M_{+,1}(\mathbb{R}^N)$ に対し $\widehat{\nu} \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^N)$ であり,

$$M_{+,1}(\mathbb{R}^N) \ni \nu \mapsto \widehat{\nu} \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^N)$$

は全単射である.

証明. 局所コンパクト可換群における Bochner の定理 12.142 で, $G = \mathbb{R}^N$ としたものである. □

定義 13.21 ($\mathbb{R}^N$ 値確率変数の特性関数)**.** $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ を確率空間, $X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ を確率変数とする. 確率分布 $P_X \in M_{+,1}(\mathbb{R}^N)$ の特性関数

$$\varphi_X(\xi) := \widehat{P_X}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x} dP_X(\xi) = \int_{\Omega} e^{i\xi\cdot X(\omega)} dP(\omega) = \mathrm{E}(e^{i\xi\cdot X}) \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^N)$$

を確率変数 X の特性関数と言う.

命題 13.22 (特性関数の滑らかさ)**.** $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ を確率空間, $X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ を確率変数, $n \in \mathbb{N}$ とする. もし X が $L^n(P)$ に属するならば, X の特性関数 $\varphi_X : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ は C^n 級であり,

$$\frac{\partial}{\partial\xi_{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\xi_{j_k}}\varphi_X(\xi) = \mathrm{E}((iX_{j_1})\cdots(iX_{j_k})e^{i\xi\cdot X(\omega)})$$
$$(\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall k \in \{1, \cdots, n\}, \forall j_1, \cdots, j_k \in \{1, \cdots, N\})$$

が成り立つ.

証明. Lebesgue 優収束定理より明らかである. □

命題 13.23 (独立な確率変数の和の確率分布と特性関数)**.** $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ を確率空間, $X_1, \cdots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}^N$ を独立な確率変数とする. このとき,

$$P_{X_1+\cdots+X_n} = P_{X_1} * \cdots * P_{X_n}$$

[*276]であり,

$$\varphi_{X_1+\cdots+X_n} = \varphi_{X_1} \cdots \varphi_{X_n}$$

が成り立つ.

証明. 独立性の定義 13.10 より, 確率変数 $(X_1, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^N$ の確率分布は,

$$P_{(X_1,\cdots,X_n)} = P_{X_1} \otimes \cdots \otimes P_{X_n}$$

であるから,

$$\begin{aligned} P_{X_1+\cdots+X_n}(B) &= \int_{\mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^N} \chi_B(x_1 + \cdots + x_n) dP_{(X_1,\cdots,X_n)}(x_1, \cdots, x_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \cdots \int_{\mathbb{R}^N} \chi_B(x_1 + \cdots + x_n) dP_{X_1}(x_1) \cdots dP_{X_n}(x_n) \\ &= P_{X_1} * \cdots P_{X_n}(B) \ \ (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}) \end{aligned}$$

である. よって命題 12.141 より,

$$\varphi_{X_1+\cdots+X_n} = \widehat{P_{X_1+\cdots+X_n}} = P_{X_1} \widehat{* \cdots *} P_{X_n} = \widehat{P_{X_1}} \cdots \widehat{P_{X_n}} = \varphi_{X_1} \cdots \varphi_{X_n}$$

である. □

命題 13.24 (確率密度関数を持つ確率変数の特性関数の基本的性質)**.** $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ を確率空間, $X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ を確率密度関数 (定義 13.3) を持つ確率変数とする. このとき,

$$|\varphi_X(\xi)| < 1 \ \ (\forall \xi \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\})$$

が成り立つ.

証明. $|\varphi_X(\xi)| = 1$ を満たす $\xi \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ が存在すると仮定して矛盾を導く. このとき命題 12.144 より, ある $\alpha \in \mathbb{T}$ が存在し,

$$\int_B e^{i\xi\cdot x} dP_X(x) = \alpha P_X(B) \ \ (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N})$$

が成り立つ. X の確率密度関数を $u_X \in L^1(\mathbb{R}^N)$ とおくと,

$$\int_B e^{i\xi\cdot x} u_X(x) dx = \int_B \alpha u_X(x) dx \ \ (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N})$$

であるから, 命題 5.57 より,

$$(\alpha - e^{i\xi x}) u_X(x) = 0 \ \ (\text{a.e. } x \in \mathbb{R}^N) \tag{13.9}$$

である. ここで $\alpha = e^{i\theta}$ なる $\theta \in \mathbb{R}$ を取れば,

$$\{x \in \mathbb{R}^N : \alpha - e^{i\xi x} = 0\} = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \{x \in \mathbb{R}^N : \xi \cdot x - \theta = 2m\pi\}$$

であり, 定理 6.36 より, 各 $m \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\{x \in \mathbb{R}^N : \xi \cdot x - \theta = 2m\pi\}$$

[*276] 右辺は測度群環 $M(\mathbb{R}^N)$ (定義 12.30) における $P_{X_1}, \cdots, P_{X_n}$ の合成積である.

は $\mathbb{R}^N$ 内の超曲面であるので, その Lebesgue 測度は 0 である (命題 6.87). よって,

$$\alpha - e^{i\xi x} \neq 0 \quad (\text{a.e. } x \in \mathbb{R}^N)$$

であるから, (13.9) と合わせて,

$$u_X(x) = 0 \quad (\text{a.e. } x \in \mathbb{R}^N)$$

を得る. しかしこれは,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_X(x)dx = 0$$

を意味し,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_X(x)dx = P_X(\mathbb{R}^N) = 1$$

であることに矛盾する. □

定理 13.25 (確率測度の弱 $*$-収束と特性関数の収束)**.** $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^N$ 上の確率 Borel 測度の列, ν を $\mathbb{R}^N$ 上の確率 Borel 測度とする. このとき次は互いに同値である.

(1) $M(\mathbb{R}^N) = C_0(\mathbb{R}^N)^*$ (Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.187) の弱 $*$-位相で $\lim_{n\to\infty} \nu_n = \nu$.
(2) コンパクト一様収束で $\lim_{n\to\infty} \widehat{\nu_n} = \widehat{\nu}$.
(3) 各点収束で $\lim_{n\to\infty} \widehat{\nu_n} = \widehat{\nu}$.

また, (1), (2), (3) が成り立つとき, $\nu(\partial B) = 0$ を満たす任意の $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(B) = \nu(B)$$

が成り立つ (ただし $\partial B = \overline{B}\backslash B^\circ$).

証明. 定理 12.143 で $G = \mathbb{R}^N$ としたものである. □

13.4 Poisson の小数の法則

定義 13.26 (Poisson 分布)**.** 各 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し $\delta_n \in M(\mathbb{R})$ を n における Dirac 測度 (定義 12.29) とする. $\lambda \in [0,\infty)$ に対し, $\mathbb{R}$ 上の確率 Borel 測度

$$\mathrm{Poi}_\lambda := e^{-\lambda} \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{\lambda^n}{n!}\delta_n \in M(\mathbb{R})$$

を定義する. これをパラーメータ λ の Poisson 分布と言う. 任意の非負値 Borel 関数 $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ に対し, 単関数近似 (命題 5.29) より,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mathrm{Poi}_\lambda(x) = e^{-\lambda} \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{\lambda^n}{n!} f(n)$$

であるから, Poisson 分布 Poi_λ の特性関数 (定義 13.19) は,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{Poi}_\lambda}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}d\mathrm{Poi}_\lambda(x) = e^{-\lambda} \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{\lambda^n}{n!}e^{in\xi} = e^{-\lambda} \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(\lambda e^{i\xi})^n}{n!} \\ &= \exp(\lambda(e^{i\xi} - 1)) \quad (\forall \xi \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

である.

定理 13.27 (Poisson の小数の法則)**.** 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し確率空間 $(\Omega_n, \mathcal{E}_n, P_n)$ と, 0 か 1 の値を取る有限個の独立な確率変数 $X_{n,1}, \cdots, X_{n,m(n)} : \Omega_n \to \{0, 1\}$ が与えられているとし,

$$X_n := X_{n,1} + \cdots + X_{n,m(n)} : \Omega_n \to \{0, 1, \cdots, m(n)\} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおく．もし，

$$\exists\lambda := \lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X_n)\in[0,\infty),\quad \lim_{n\to\infty}\max(\mathrm{E}(X_{n,1})+\cdots+\mathrm{E}(X_{n,m(n)}))=0 \tag{13.10}$$

が成り立つならば，$M(\mathbb{R})=C_0(\mathbb{R})^*$ (Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.187) の弱 $*$-位相で $\lim_{n\to\infty}P_{n,X_n}=\mathrm{Poi}_\lambda$ が成り立つ[*277]．また任意の $a\in[0,\infty)$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty}P_n(X_n\leqslant a)=\mathrm{Poi}_\lambda([0,a])$$

が成り立つ．

証明． 各 $X_{n,k}$ は 0 か 1 の値を取るので，その確率分布はある $p_{n,k}\in[0,1]$ に対し，

$$P_{n,X_{n,k}}=p_{n,k}\delta_1+(1-p_{n,k})\delta_0\quad(\forall n\in\mathbb{N},\forall k\in\{1,\cdots,m(n)\})$$

と表せる．このとき，

$$\mathrm{E}(X_{n,k})=p_{n,k}\quad(\forall n\in\mathbb{N},\forall k\in\{1,\cdots,m(n)\})$$

であるから，(13.10) より，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m(n)}p_{n,k}=\lambda,\quad \lim_{n\to\infty}\max(p_{n,1},\cdots,p_{n,m(n)})=0 \tag{13.11}$$

である．特性関数は，

$$\varphi_{X_{n,k}}(\xi)=\widehat{P_{n,X_{n,k}}}(\xi)=1+p_{n,k}(e^{i\xi}-1)\quad(\forall n\in\mathbb{N},\forall k\in\{1,\cdots,m(n)\},\forall\xi\in\mathbb{R}) \tag{13.12}$$

である．そこで対数の主値関数 (定義 4.49) $\mathrm{Log}:\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]\to\mathbb{C}$ の $1\in\mathbb{C}$ の周りの冪級数展開 (定理 7.15) を考えると，

$$\mathrm{Log}(1+z)=z(1+\delta(z))\quad(\forall z\in\mathbb{C}:|z|<1),\quad \lim_{z\to0}\delta(z)=0 \tag{13.13}$$

と表せるので，(13.11), (13.12) より，十分大きい $n\in\mathbb{N}$ に対し，

$$\varphi_{X_{n,k}}(\xi)=\exp\left(p_{n,k}(e^{i\xi}-1)\left(1+\delta(p_{n,k}(e^{i\xi}-1))\right)\right)\quad(\forall\xi\in\mathbb{R})$$

となる．$X_{n,1},\cdots,X_{n,m(n)}$ は独立であるから，命題 13.23 より，

$$\varphi_{X_n}(\xi)=\prod_{k=1}^{m(n)}\varphi_{X_{n,k}}(\xi)=\exp\left(\sum_{k=1}^{m(n)}p_{n,k}(e^{i\xi}-1)\left(1+\delta(p_{n,k}(e^{i\xi}-1))\right)\right)\quad(\forall\xi\in\mathbb{R})$$

である．ゆえに (13.11) と (13.13) より，

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{X_n}(\xi)=\exp(\lambda(e^{i\xi}-1))=\widehat{\mathrm{Poi}_\lambda}(\xi)\quad(\forall\xi\in\mathbb{R})$$

であるから，定理 13.25 より，$M(\mathbb{R})=C_0(\mathbb{R})^*$ の弱 $*$-位相で $\lim_{n\to\infty}P_{X_{n,k}}=\mathrm{Poi}_\lambda$ が成り立つ．
任意の $a\in[0,\infty)$ を取る．$m\leqslant a<m+1$ なる $m\in\mathbb{Z}_+$ を取り，$f\in C_c(\mathbb{R})$ で，

$$f(x)=1\quad(\forall x\in[0,a]),\quad \mathrm{supp}(f)\subseteq(-1,m+1)$$

なるものを取る．各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $X_n=X_{n,1}+\cdots+X_{n,m(n)}$ の値域は $\{0,1,\cdots,m(n)\}$ に含まれるので P_{n,X_n} の台は $\mathbb{Z}_+$ に含まれる．また Poi_λ の台は $\mathbb{Z}_+$ である．よって，

$$\int_{\mathbb{R}}f(x)dP_{n,X_n}(x)=P_{n,X_n}([0,a])\quad(\forall n\in\mathbb{N}),\quad \int_{\mathbb{R}}f(x)d\mathrm{Poi}_\lambda(x)=\mathrm{Poi}_\lambda([0,a])$$

であるので，

$$\lim_{n\to\infty}P_{n,X_n}([0,a])=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f(x)dP_{n,X_n}(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x)d\mathrm{Poi}_\lambda(x)=\mathrm{Poi}_\lambda([0,a])$$

である． □

---

*277 すなわち任意の $f\in C_0(\mathbb{R})$ に対し $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f(x)dP_{n,X_n}(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x)d\mathrm{Poi}_\lambda(x)$ が成り立つ．

命題 13.28 (命中率)**.** $(M, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし, $B \in \mathcal{B}$ とする. $\mathcal{B}$ の列 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $\mathbb{N}$ の列 $(m(n))_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$B \subseteq V_n, \quad \mu(V_n) \in (0, \infty) \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \quad \exists\lambda := \lim_{n\to\infty} m(n)\frac{\mu(B)}{\mu(V_n)} \in [0, \infty), \quad \lim_{n\to\infty} m(n) = \infty$$

なるものがあるとする. そして各 $n \in \mathbb{N}$ に対し確率空間 $(V_n, \mathcal{B}_{V_n}, \frac{1}{\mu(V_n)}\mu)$ の $m(n)$ 個のコピーの直積確率空間を $(\Omega_n, \mathcal{E}_n, P_n)$ とおく. このとき任意の $a \in [0, \infty)$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\{(x_1, \cdots, x_{m(n)}) \in \Omega_n : x_1, \cdots, x_{m(n)} \in \Omega_n \text{ で } B \text{ に入るものの個数が } a \text{ 以下 }\}) = \mathrm{Poi}_\lambda([0, a])$$

が成り立つ.

証明. 確率空間 $(\Omega_n, \mathcal{E}_n, P_n)$ の確率変数 $X_{n,1}, \cdots, X_{n,m(n)}$ を,

$$X_{n,k}(x_1, \cdots, x_{m(n)}) = \chi_B(x_k) \quad (\forall k \in \{1, \cdots, m(n)\}, \forall (x_1, \cdots, x_{m(n)}) \in \Omega_n)$$

として定義すると, $X_{n,1}, \cdots, X_{n,m(n)}$ は独立 (定義 13.10 を参照) であり,

$$\mathrm{E}(X_{n,k}) = \frac{\mu(B)}{\mu(V_n)} \quad (\forall k \in \{1, \cdots, m(n)\})$$

である. $X_n := X_{n,1} + \cdots + X_{n,m(n)}$ とおくと,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n) = \lim_{n\to\infty} m(n)\frac{\mu(B)}{\mu(V_n)} = \lambda,$$

$$\lim_{n\to\infty} \max(\mathrm{E}(X_{n,1}), \cdots, \mathrm{E}(X_{n,m(n)})) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(B)}{\mu(V_n)} = \lim_{n\to\infty} m(n)\frac{\mu(B)}{\mu(V_n)}\frac{1}{m(n)} = 0$$

である. よって Poisson の小数の法則 (定理 13.27) より, 任意の $a \in [0, \infty)$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(X_n \leqslant a) = \mathrm{Poi}_\lambda([0, a])$$

が成り立つ. ここで,

$$(X_n \leqslant a) = \{(x_1, \cdots, x_{m(n)}) \in \Omega_n : x_1, \cdots, x_{m(n)} \in \Omega_n \text{ で } B \text{ に入るものの個数が } a \text{ 以下 }\}$$

であるから求める結果を得る. □

13.5 中心極限定理, 局所中心極限定理

定義 13.29 (正規分布)**.** $m \in \mathbb{R}^N$ と可逆な非負実対称行列 $V \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ に対し,

$$\mathrm{N}_{m,V}(B) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_B \exp\left(-\frac{1}{2}V^{-1}(x-m)\cdot(x-m)\right) dx \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N})$$

とおくと, 変数変換公式 (定理 5.229) と定理 8.59 より, $\mathrm{N}_{m,V}$ は $\mathbb{R}^N$ 上の確率 Borel 測度である. これを期待値 m, 共分散行列 V に対する正規分布と言う.

命題 13.30. $m \in \mathbb{R}^N$ と可逆な非負実対称行列 $V \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ に対し, 正規分布 $\mathrm{N}_{m,V} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} \to [0, 1]$ を考える. このとき,

(1) $\mathrm{N}_{m,V}$ を確率分布とする $\mathbb{R}^N$ 値確率変数の期待値は m, 共分散行列 (定義 13.5) は V である.
(2) $\mathrm{N}_{m,V}$ の特性関数は,

$$\widehat{\mathrm{N}_{m,V}}(\xi) = e^{im\cdot\xi} \exp\left(-\frac{1}{2}V\xi\cdot\xi\right) \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^N)$$

である.

証明.　(1)

$$g(x) := \frac{1}{\det(V)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}V^{-1}x\cdot x\right) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

とおくと, 変数変換公式 (定理 5.229) と定理 8.59 より g の Fourier 変換は,

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)e^{-ix\cdot\xi}dx = \exp\left(-\frac{1}{2}V\xi\cdot\xi\right) \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^N)$$

である. よって $\mathrm{N}_{m,V}$ を確率分布とする確率変数の期待値は, Lebesgue 測度の平行移動不変性と定理 8.58 の (4) より,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det(V)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} x\exp\left(\frac{1}{2}V^{-1}(x-m)\cdot(x-m)\right)dx\\&= m + \left(\widehat{(\mathrm{id}_j\, g)}(0)\right)_{j=1,\cdots,N} = m + (i\partial_j\widehat{g}(0))_{j=1,\cdots,N} = m\end{aligned}$$

であり, $\mathrm{N}_{m,V}$ を確率分布とする確率変数の共分散行列の (i,j) 成分は,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det(V)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}(x_i-m_i)(x_j-m_j)\exp\left(\frac{1}{2}V^{-1}(x-m)\cdot(x-m)\right)dx\\&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det(V)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} x_ix_j\exp\left(\frac{1}{2}V^{-1}x\cdot x\right)dx\\&= \widehat{(\mathrm{id}_i\,\mathrm{id}_j\, g)}(0) = -\partial_i\partial_j\widehat{g}(0) = V_{i,j}\end{aligned}$$

である.

(2) Lebesgue 測度の平行移動不変性と定理 8.59 より,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{N}_{m,V}}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det(V)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x}\exp\left(-\frac{1}{2}V^{-1}(x-m)\cdot(x-m)\right)dx\\&= e^{i\xi\cdot m}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det(V)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x}\exp\left(-\frac{1}{2}V^{-1}x\cdot x\right)dx\\&= e^{i\xi\cdot m}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}\exp\left(iV^{\frac{1}{2}}\xi\cdot x\right)\exp\left(-\frac{1}{2}x\cdot x\right)dx\\&= e^{i\xi\cdot m}\exp\left(-\frac{1}{2}V\xi\cdot\xi\right) \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^N)\end{aligned}$$

である.

□

定理 13.31 (中心極限定理)**.** $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ を確率空間, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $L^2(P)$ に属する $\mathbb{R}^N$ 値の独立な確率変数の列とする. 次を仮定する.

(1) 確率分布の集合 $\{P_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有限集合である.

(2) 各 X_n に対する共分散行列 (定義 13.5) $V_n := \mathrm{Covm}(X_n) \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ は可逆であり,

$$V := \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$$

が存在する.

このとき V は可逆な非負対称行列であり,

$$S_n := \sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathrm{E}(X_k)) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおくと, $M(\mathbb{R}^N) = C_0(\mathbb{R}^N)^*$ (Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.187) の弱 $*$-位相で,

$$\lim_{n\to\infty} P_{\frac{1}{\sqrt{n}}S_n} = \mathrm{N}_{0,V}$$

が成り立つ. また境界の Lebesgue 測度が 0 の任意の $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n \in B\right) = \mathrm{N}_{0,V}(B)$$

が成り立つ.

証明. 各 V_n は可逆な非負実対称行列 (命題 13.6) であり, (1) より $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有限集合であるから,

$$a := \min \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma(V_n) \in (0,\infty)$$

が存在する. よって任意の単位ベクトル $z \in \mathbb{C}^N$ に対し,

$$(Vz \mid z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (V_k z \mid z) \geqslant a > 0$$

であるから, V は可逆な非負実対称行列である.

$$Y_n := X_n - \mathrm{E}(X_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおくと, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^2(P)$ に属する独立な $\mathbb{R}^N$ 値確率変数の列であり,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}Y_k \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから, 命題 13.23 より,

$$\varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}}S_n}(\xi) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k}(\xi) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{Y_k}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\xi\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N) \tag{13.14}$$

である. $Y_n \in L^2(P)$ であり, $\mathrm{E}(Y_n) = 0$, $\mathrm{Covm}(Y_n) = V_n$ であるから, 命題 13.22 より φ_{Y_n} は C^2 級であり,

$$\varphi_{Y_n}(0) = 1, \quad \left(\frac{\partial \varphi_{Y_n}}{\partial \xi_j}(0)\right)_j = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi_{Y_n}}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(0)\right)_{i,j} = -V_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{13.15}$$

である. (1) より $(\varphi_{Y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ は有限集合であるから, 正数 ε が存在し,

$$|\varphi_{Y_n}(\xi) - 1| < 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi \in B(0,\varepsilon))$$

となる (ただし $B(0,\varepsilon) = \{\xi \in \mathbb{R}^N : |\xi| < \varepsilon\}$ である). そこで C^2 級関数

$$B(0,\varepsilon) \ni \xi \mapsto \mathrm{Log}(\varphi_{Y_n}(\xi)) \in \mathbb{C} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

に Taylor の定理 4.14 を適用すると, (13.15) より,

$$\varphi_{Y_n}(\xi) = \exp\left(\mathrm{Log}(\varphi_{Y_n})(\xi)\right) = -\exp\left(-\frac{1}{2}(V_n + \delta_n(\xi))\xi \cdot \xi\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi \in B(0,\varepsilon)), \tag{13.16}$$

$$\lim_{|\xi|\to 0} \delta_n(\xi) = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

となる. (1) より $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有限集合であるから,

$$\lim_{|\xi|\to 0} \max_{n\in\mathbb{N}} |\delta_n(\xi)| = 0 \tag{13.17}$$

である. 今, 任意の $\xi \in \mathbb{R}^N$ を取り固定する. 十分大きい $n_0 \in \mathbb{N}$ を取れば,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\xi \in B(0,\varepsilon) \quad (\forall n \geqslant n_0)$$

となるから, (13.14) と (13.16) より,

$$\varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}}S_n}(\xi) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{Y_k}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\xi\right) = \exp\left(-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(V_k + \delta_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\xi\right)\right)\xi\cdot\xi\right)$$

となる. よって (2) と (13.17) より,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}}S_n}(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2}V\xi\cdot\xi\right)$$

を得る. ここで命題 13.30 の (2) より右辺は $\widehat{\mathrm{N}_{0,V}}(\xi)$ であるから,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}}S_n}(\xi) = \widehat{\mathrm{N}_{0,V}}(\xi)$$

である. $\xi \in \mathbb{R}^N$ は任意であるから, 定理 13.25 より $M(\mathbb{R}^N) = C_0(\mathbb{R}^N)^*$ の弱 $*$-位相で,

$$\lim_{n\to\infty} P_{\frac{1}{\sqrt{n}}S_n} = \mathrm{N}_{0,V}$$

が成り立つ. $\mathrm{N}_{0,V}$ は Lebesgue 測度に関して絶対連続であるので, 定理 13.25 の後半より, 境界の Lebesgue 測度が 0 である任意の $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n \in B\right) = \mathrm{N}_{0,V}(B)$$

が成り立つ. □

定理 13.32 (局所中心極限定理)**.** $(\Omega,\mathcal{E},P)$ を確率空間, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $L^3(P)$ に属する $\mathbb{R}^N$ 値の独立な確率変数の列とする. 次を仮定する.

(1) 確率分布の集合 $\{P_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有限集合である.
(2) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し X_n は確率密度関数 (定義 13.3) を持ち, その 1 階の弱偏導関数は $L^1(\mathbb{R}^N)$ に属する.

このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $X_1 + \cdots + X_n$ は確率密度関数 $U_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$ を持ち, 十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対し $U_n \in C_0(\mathbb{R}^N)$ (無限遠で消える連続関数) である. そして,

$$\begin{aligned} E_n &:= \mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) \in \mathbb{R}^N \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \\ V_n &:= \mathrm{Covm}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Covm}(X_1) + \cdots + \mathrm{Covm}(X_n) \in M_{N\times N}(\mathbb{R}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

とおくと, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $V_n \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ は可逆な非負対称行列であり,

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{N}{2}} \sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|U_n(x) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\det(V_n)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}V_n^{-1}(x-E_n)\cdot(x-E_n)\right)\right| = 0$$

が成り立つ.

証明. まず $\mathrm{E}(X_n) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であると仮定して示す. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は独立であるから命題 13.23 より,

$$P_{X_1+\cdots+X_n} = P_{X_1} * \cdot * P_{X_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{13.18}$$

である. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $X_1, \cdots, X_n$ は確率密度関数を持つので, (13.18) と定理 12.32 より, $X_1 + \cdots + X_n$ も確率密度関数 $U_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$ を持ち, 命題 13.23 より,

$$\int_{\mathbb{R}^N} U_n(x)e^{ix\cdot\xi}dx = \varphi_{X_1+\cdots+X_n}(\xi) = \varphi_{X_1}(\xi)\cdots\varphi_{X_n}(\xi) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N) \tag{13.19}$$

である. (2) と緩増加超関数の Fourier 変換の性質 (命題 8.70), および $L^1(\mathbb{R}^N)$ の元の Fourier 変換は有界である[*278]ことから, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $\mathbb{R}^N \ni \xi \mapsto \xi\varphi_{X_n}(\xi)\in\mathbb{C}^N$ は有界である. そして (1) より $\{\varphi_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有限集合であるから, 十分大きい正数 M を取れば,

$$|\varphi_{X_n}| \leqslant \frac{M}{|\xi|} \quad (\forall n\in\mathbb{N}, \forall\xi\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}) \tag{13.20}$$

が成り立つ. これより,

$$\varphi_{X_1}\cdots\varphi_{X_n}\in L^1(\mathbb{R}^N) \quad (\forall n\geqslant N+1)$$

であるから, (13.19) の Fourier 変換を考えて,

$$U_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_{X_1}(\xi)\cdots\varphi_{X_n}(\xi)e^{-ix\cdot\xi}d\xi \quad (\forall n\geqslant N+1, \forall x\in\mathbb{R}^N) \tag{13.21}$$

が成り立ち, 命題 8.58 の (6) より,

$$U_n\in C_0(\mathbb{R}^N) \quad (\forall n\geqslant N+1)$$

である. (2) より各 X_n は確率密度関数を持つので命題 13.7 より $\mathrm{Covm}(X_n)\in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ は可逆な非負実対称行列である. よって $\mathrm{Covm}(X_n)$ の固有値は全て正であり, (1) より $\{\mathrm{Covm}(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有限集合であるから,

$$\begin{aligned}
&a := \min\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\sigma(\mathrm{Covm}(X_n)) > 0, \quad b := \max\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\sigma(\mathrm{Covm}(X_n)) < \infty, \\
&\sigma(V_n)\subseteq[na, nb], \quad \det(V_n)\subseteq[(na)^N, (nb)^N] \quad (\forall n\in\mathbb{N})
\end{aligned} \tag{13.22}$$

[*279]である. 今, (13.21) を,

$$\begin{aligned}
U_{n,1}(x) &:= \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\log(n)\leqslant|V_n^{\frac{1}{2}}\xi|}\varphi_{X_1}(\xi)\cdots\varphi_{X_n}(\xi)e^{-ix\cdot\xi}d\xi \quad (\forall n\geqslant N+1, \forall x\in\mathbb{R}^N), \\
U_{n,2}(x) &:= \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{|V_n^{\frac{1}{2}}\xi|\leqslant\log(n)}\varphi_{X_1}(\xi)\cdots\varphi_{X_n}(\xi)e^{-ix\cdot\xi}d\xi \quad (\forall n\geqslant N+1, \forall x\in\mathbb{R}^N)
\end{aligned}$$

と分解 ($U_n(x) = U_{n,1}(x)+U_{n,2}(x)$ $(\forall n\geqslant N+1, \forall x\in\mathbb{R}^N)$) する. まず $U_{n,1}$ を評価する. 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $X_n\in L^3(P)$ より $\varphi_{X_n}\in C^3(\mathbb{R}^N)$ (命題 13.22) であり, $\mathrm{E}(X_n)=0$ であることと, (13.22) より,

$$\left(\frac{\partial\varphi_{X_n}}{\partial\xi_j}(0)\right)_j = i\mathrm{E}(X_n) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2\varphi_{X_n}}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(0)\right)_{i,j} = -\mathrm{Covm}(X_n)\leqslant -a1 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$$

である. よって Taylor の定理 4.14 と $\{\varphi_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有限集合であること ((1) による) から, 十分小さい $\varepsilon\in(0, M+1)$ を取れば,

$$|\varphi_{X_n}(\xi)| = |\exp(\mathrm{Log}(\varphi_{X_n}(\xi)))| \leqslant \exp\left(-\frac{a}{4}|\xi|^2\right) \quad (\forall n\in\mathbb{N},\ \forall\xi\in\mathbb{R}^N : |\xi|\leqslant\varepsilon) \tag{13.23}$$

となる. また, 各 X_n は確率密度関数を持つので命題 13.24 より $|\varphi_{X_n}(\xi)|<1$ $(\forall n\in\mathbb{N}, \forall\xi\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\})$ であり, $\{\varphi_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有限集合なので, ある $\rho\in(0,1)$ が存在し,

$$|\varphi_{X_n}(\xi)|\leqslant\rho \quad (\forall n\in\mathbb{N},\ \forall\xi\in\mathbb{R}^N : \varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant M+1) \tag{13.24}$$

となる. $n_1\geqslant N+1$ なる $n_1\in\mathbb{N}$ で,

$$\frac{\log(n)}{(nb)^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon \quad (\forall n\geqslant n_1)$$

[*278] 命題 8.58 の (6) より $L^1(\mathbb{R}^N)$ の元の Fourier 変換は $C_0(\mathbb{R}^N)$ の元 (無限遠で消える連続関数) であるから, 特に有界である.
[*279] $\sigma(\mathrm{Covm}(X_n)), \sigma(V_n)$ は $\mathrm{Covm}(X_n), V_n\in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ の固有値全体である.

なるものを取れば, 任意の $n \geqslant n_1$ に対し, (13.20), (13.22), (13.23), (13.24) より,

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^N \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |U_{n,1}(x)| &\leqslant \int_{\log(n)\leqslant|V^{\frac{1}{2}}\xi|} |\varphi_{X_1}(\xi)\cdots\varphi_{X_n}(\xi)|d\xi \leqslant \int_{\frac{\log(n)}{(nb)^{\frac{1}{2}}}\leqslant|\xi|} |\varphi_{X_1}(\xi)\cdots\varphi_{X_n}(\xi)|d\xi \\
&\leqslant \int_{\frac{\log(n)}{(nb)^{\frac{1}{2}}}\leqslant|\xi|\leqslant\varepsilon} \exp\left(-\frac{a}{4}|\xi|^2\right)d\xi + \int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant M+1} \rho^n d\xi + \int_{M+1\leqslant|\xi|} \left(\frac{M}{|\xi|}\right)^n d\xi \\
&\leqslant \int_{|\xi|\leqslant\varepsilon} \exp\left(-\frac{a}{4b}(\log(n))^2\right)d\xi + \int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant M+1} \rho^n d\xi + \frac{M^N\mu_{S_{N-1}}(S_{N-1})}{n-N}\left(\frac{M}{M+1}\right)^{n-N}
\end{aligned}
$$

となる. これより,

$$
\lim_{n\to\infty} n^{\frac{N}{2}} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |U_{n,1}(x)| = 0 \tag{13.25}
$$

が成り立つ. 次に $U_{n,2}$ を評価する. 変数変換公式 (定理 5.229) より,

$$
U_{n,2}(x) = \frac{1}{(2\pi)^N \det(V_n)^{\frac{1}{2}}} \int_{|\xi|\leqslant\log(n)} \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}\left(V_n^{-\frac{1}{2}}\xi\right) e^{-i(V_n^{\frac{1}{2}}\xi)\cdot x} d\xi \quad (\forall n \geqslant N+1, \forall x \in \mathbb{R}^N)
$$

である. (13.22) より,

$$
n \sup_{|\xi|\leqslant\log(n)} |V_n^{-\frac{1}{2}}\xi|^3 \leqslant n\left(\frac{\log(n)}{(na)^{\frac{1}{2}}}\right)^3 \to 0 \quad (n\to\infty)
$$

であるから, Taylor の定理 4.14 より十分大きい $n_2 \geqslant N+1$ を取れば,

$$
\prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}\left(V_n^{-\frac{1}{2}}\xi\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\mathrm{Log}\left(\varphi_{X_k}\left(V_n^{-\frac{1}{2}}\xi\right)\right)\right) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} e^{\delta_n(\xi)} \quad (\forall n \geqslant n_2, \forall |\xi| \leqslant \log(n)),
$$

と表せて,

$$
\lim_{n\to\infty} \sup_{|\xi|\leqslant\log(n)} |\delta_n(\xi)| = 0 \tag{13.26}
$$

である. よって,

$$
U_{n,2}(x) = \frac{1}{(2\pi)^N \det(V_n)^{\frac{1}{2}}} \int_{|\xi|\leqslant\log(n)} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} e^{\delta_n(x)} e^{-i(V_n^{-\frac{1}{2}}\xi)\cdot x} d\xi \quad (\forall n \geqslant n_2, \forall x \in \mathbb{R}^N)
$$

であり, 定理 8.59 より,

$$
\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(V_n)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}V_n^{-1}x\cdot x\right) = \frac{1}{(2\pi)^N \det(V_n)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} e^{-i(V_n^{-\frac{1}{2}}\xi)\cdot x} d\xi \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^N)
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left| U_{n,2}(x) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(V_n)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}V_n^{-1}x\cdot x\right) \right| \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^N \det(V_n)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{|\xi|\leqslant\log(n)} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} |e^{\delta_n(\xi)} - 1| d\xi + \int_{\log(n)\leqslant|\xi|} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} d\xi \right) \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^N (na)^{\frac{N}{2}}} \left(\int_{|\xi|\leqslant\log(n)} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} |e^{\delta_n(\xi)} - 1| d\xi + \int_{\log(n)\leqslant|\xi|} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} d\xi \right)
\end{aligned}
$$

である. よって (13.26) と Lebesgue 優収束定理より,

$$
\lim_{n\to\infty} n^{\frac{N}{2}} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left| U_{n,2}(x) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(V_n)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}V_n^{-1}x\cdot x\right) \right| = 0
$$

が成り立つ. $U_{n,1}$ の評価 (13.25) と合わせて,

$$
\lim_{n\to\infty} n^{\frac{N}{2}} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left| U_n(x) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(V_n)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}V_n^{-1}x\cdot x\right) \right| = 0
$$

を得る. 以上で $\mathrm{E}(X_n) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ の場合の証明が終わる.
一般の場合を示す. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $Y_n := X_n - \mathrm{E}(X_n) \in L^3(P)$ とおけば $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は独立な $\mathbb{R}^N$ 値の確率変数の列であり, 条件 (1), (2) を満たす. そして各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $Y_1 + \cdots + Y_n$ の確率密度関数 W_n は $X_1 + \cdots + X_n$ の確率密度関数 U_n に対し,

$$W_n(x) = U_n(x + E_n) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^N)$$

であるから, 上の結果より,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^{\frac{N}{2}} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left| U_n(x) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(V_n)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} V_n^{-1}(x - E_n)\cdot(x - E_n) \right) \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{\frac{N}{2}} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left| W_n(x) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(V_n)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} V_n^{-1} x \cdot x \right) \right| = 0
\end{aligned}$$

となる. □

13.6 エルゴード定理

定義 13.33 (保測写像, 保測変換)**.** $(M, \mathfrak{M}, \mu), (N, \mathfrak{N}, \nu)$ をそれぞれ測度空間とし, $f : M \to N$ を全単射とする. $f : (M, \mathfrak{M}) \to (N, \mathfrak{N})$ と $f^{-1} : (N, \mathfrak{N}) \to (M, \mathfrak{M})$ が共に可測写像であり,

$$\mu(E) = \nu(f(E)) \ \ (\forall E \in \mathfrak{M})$$

が成り立つとき, f を測度空間 $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ から測度空間 $(N, \mathfrak{N}, \nu)$ への保測写像と言う. 特に測度空間 $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ から $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ 自身への保測写像を測度空間 $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ 上の保測変換と言う.

定義 13.34 (保測変換群)**.** 測度空間 $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ 上の保測変換全体を $\mathrm{Aut}(M, \mathfrak{M}, \mu)$ と表す. $\mathrm{Aut}(M, \mathfrak{M}, \mu)$ は明らかに写像の合成を乗法として乗法群をなす. そこでこの乗法群 $\mathrm{Aut}(M, \mathfrak{M}, \mu)$ を $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ 上の保測変換群と言う.

定義 13.35 (1 径数保測変換群)**.** $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とする. $\mathbb{R}$ 上で定義され, 保測変換群 $\mathrm{Aut}(M, \mathfrak{M}, \mu)$ に値を取る群準同型写像

$$(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}} : \mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha_t \in \mathrm{Aut}(M, \mathfrak{M}, \mu)$$

で,

$$(\mathbb{R} \times M, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathfrak{M}) \ni (t, x) \mapsto \alpha_t(x) \in (M, \mathfrak{M})$$

が可測写像であるものを $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ 上の 1 径数保測変換群と言う.

補題 13.36. $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ 上の 1 径数保測変換群とし, $X \in L^1(P)$ を実数値確率変数とする. このとき,

(1)
$$N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \omega \in \Omega : \int_{-n}^{n} |X(\alpha_t(\omega))| dt = \infty \right\}$$

とおくと $P(N) = 0$ であり, $\alpha_t(N) = N$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ である.

(2) 実数値確率変数の列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を,

$$X_n(\omega) := \begin{cases} \frac{1}{n} \int_0^n X(\alpha_t(\omega)) dt & (\omega \in \Omega \backslash N) \\ 0 & (\omega \in N) \end{cases}$$

として定義すると, $X_n \in L^1(P)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であり,

$$\int_\Omega |X_n(\omega)| dP(\omega) \leqslant \int_\Omega |X(\omega)| dP(\omega) \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ.

(3) $\alpha_1(E) = E$ を満たす任意の $E \in \mathfrak{M}$ と任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\int_{E \cap (\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n > c)} X_1(\omega)dP(\omega) \geqslant cP\left(E \cap (\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n > c)\right)$$

が成り立つ．

(4) P - a.e. $\omega \in \Omega$ で $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \in \mathbb{R}$ が存在する．

(5) 確率変数 $\overline{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ を P - a.e. $\omega \in \Omega$ で $\overline{X}(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \in \mathbb{R}$ なるものとして定義すると，$\overline{X} \in L^1(P)$ であり，

$$\int_\Omega \overline{X}(\omega)dP(\omega) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$$

が成り立つ．

(6) P - a.e. $\omega \in \Omega$ で，

$$\overline{X}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(\alpha_t(\omega))dt \in \mathbb{R}$$

が成り立つ．

証明. (1) Tonelli の定理 5.84 と各 α_t が保測変換であることから，

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{-n}^n |X(\alpha_t(\omega))|dtdP(\omega) &= \int_{-n}^n \int_\Omega |X(\alpha_t(\omega))|dP(\omega)dt = \int_{-n}^n \int_\Omega |X(\omega)|dP(\omega)dt \\ &= 2n\int_\Omega |X(\omega)|dP(\omega) < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

である．よって，

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \int_{-n}^n |X(\alpha_t(\omega))|dt = \infty\right\}\right) = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから $P(N) = 0$ である．$\omega \in \Omega$ に対し，

$$\int_{-n}^n |X(\alpha_s(\alpha_t(\omega)))|ds = \int_{-n}^n |X(\alpha_{s+t}(\omega))|ds = \int_{-n+t}^{n+t} |X(\alpha_s(\omega))|ds \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N})$$

であるから，

$$\int_{-n}^n |X(\alpha_s(\omega))|ds < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad \int_{-n}^n |X(\alpha_s(\alpha_t(\omega)))|ds < \infty \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N})$$

である．よって $\alpha_t(\Omega\backslash N) = \Omega\backslash N$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ であるから，$\alpha_t(N) = N$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ である．

(2) Tonelli の定理 5.84 と各 α_t が保測変換であることから，

$$\begin{aligned}\int_\Omega |X_n(\omega)|dP(\omega) &\leqslant \frac{1}{n}\int_\Omega \int_0^n |X(\alpha_t(\omega))|dtdP(\omega) = \frac{1}{n}\int_0^n \int_\Omega |X(\alpha_t(\omega))|dP(\omega)dt \\ &= \frac{1}{n}\int_0^n \int_\Omega |X(\omega)|dP(\omega)dt = \int_\Omega |X(\omega)|dP(\omega) \quad (\forall n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

である．

(3) 実数値確率変数の列 $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，

$$Y_0(\omega) := 0, \quad Y_n(\omega) := n(X_n(\omega) - c) \quad (\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}),$$

$$Z_n(\omega) := \max(Y_0(\omega), Y_1(\omega), \cdots, Y_n(\omega)) \quad (\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N})$$

として定義すると，

$$E \cap (\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n > c) = E \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X_n > c) = E \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(Y_n > 0) = E \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(Z_n > 0) \tag{13.27}$$

であり,

$$(Z_n > 0) \subseteq (Z_{n+1} > 0) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{13.28}$$

である. 任意の $n \in \mathbb{N}$, 任意の $j \in \{1, \cdots, n\}$ に対し,

$$Y_{j-1}(\alpha_1(\omega)) + Y_1(\omega) = \int_0^j (X(\alpha_t(\omega)) - c)dt = Y_j(\omega) \ \ (\forall \omega \in \Omega \backslash N)$$

((1) より $\alpha_1(\Omega\backslash N) = \Omega\backslash N$ であることに注意) であるから,

$$Z_n(\alpha_1(\omega)) + Y_1(\omega) \geqslant \max(Y_1(\omega), \cdots, Y_n(\omega)) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega\backslash N) \tag{13.29}$$

である. ここで $Y_0(\omega) = 0$ $(\forall \omega \in \Omega)$ より,

$$Z_n(\omega) = \max(Y_1(\omega), \cdots, Y_n(\omega)) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in (Z_n > 0)\backslash N)$$

なので, (13.29) より,

$$Z_n(\alpha_1(\omega)) + Y_1(\omega) \geqslant Z_n(\omega) \ \ (\forall \omega \in (Z_n > 0)\backslash N, \forall n \in \mathbb{N}) \tag{13.30}$$

である. また $\alpha_1(E) = E$ であることと α_1 が保測変換であることから,

$$\int_E Z_n(\alpha_1(\omega))dP(\omega) = \int_{\alpha_1(E)} Z_n(\alpha_1(\omega))dP(\omega) = \int_E Z_n(\omega)dP(\omega) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{13.31}$$

である. よって $P(N) = 0$ と $Z_n(\omega) \geqslant 0$ $(\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N})$ であることに注意して, (13.30), (13.31) より,

$$\begin{aligned}
\int_{E\cap(Z_n>0)} Y_1(\omega)dP(\omega) &\geqslant \int_{E\cap(Z_n>0)} Z_n(\omega)dP(\omega) - \int_{E\cap(Z_n>0)} Z_n(\alpha_1(\omega))dP(\omega) \\
&\geqslant \int_E Z_n(\omega)dP(\omega) - \int_E Z_n(\alpha_1(\omega))dP(\omega) \\
&= \int_E Z_n(\omega)dP(\omega) - \int_E Z_n(\omega)dP(\omega) = 0 \ \ (\forall n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

となる. これと (13.27), (13.28) より,

$$\int_{E\cap(\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n > c)} Y_1(\omega)dP(\omega) = \int_{E\cap(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > 0)} Y_1(\omega)dP(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_{E\cap(Z_n>0)} Y_1(\omega)dP(\omega) \geqslant 0$$

を得る. $Y_1 = X_1 - c$ なので,

$$\int_{E\cap(\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n > c)} X_1(\omega)dP(\omega) \geqslant cP\left(E \cap (\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n > c)\right)$$

が成り立つ.

(4)

$$X_*(\omega) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} X_k(\omega), \ \ X^*(\omega) := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} X_k(\omega) \ \ (\forall \omega \in \Omega)$$

とおく.

$$nX_n(\alpha_1(\omega)) + X_1(\omega) = \int_0^{n+1} X(\alpha_t(\omega))dt = (n+1)X_{n+1}(\omega) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega\backslash N)$$

であるから,

$$X_n(\alpha_1(\omega)) = \frac{n+1}{n} X_{n+1}(\omega) - \frac{1}{n} X_1(\omega) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega)$$

((1) より $\alpha_1(N) = N$ であることに注意) である. よって,

$$X_*(\alpha_1(\omega)) = X_*(\omega), \ \ X^*(\alpha_1(\omega)) = X^*(\omega) \ \ (\forall \omega \in \Omega) \tag{13.32}$$

が成り立つ. 今,

$$X_*(\omega) = X^*(\omega) \ \ (P\text{-a.e. } \omega \in \Omega) \tag{13.33}$$

が成り立つことを示す. そのためには $P(X_* < X^*) = 0$ を示せばよい[*280]が,

$$(X_* < X^*) = \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}:a<b} (X_* < a < b < X^*)$$

であり $\mathbb{Q}$ は可算であるから, $a < b$ を満たす任意の $a, b \in \mathbb{Q}$ を取り固定し,

$$E := (X_* < a < b < X^*) \in \mathcal{E}$$

とおいて, $P(E) = 0$ が成り立つことを示せばよい. (13.32) より $\alpha_1(E) = E$ であり,

$$E = E \cap (\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n > b)$$

であるから, (3) より,

$$\int_E X_1(\omega) dP(\omega) \geqslant bP(E)$$

である. また,

$$E = E \cap (\sup_{n\in\mathbb{N}} (-X_n) > -a)$$

であるから, (3) で X を $-X$ に置き換えたものを考えれば,

$$\int_E -X_1(\omega) dP(\omega) \geqslant -aP(E)$$

を得る. よって,

$$bP(E) \leqslant \int_E X_1(\omega) dP(\omega) \leqslant aP(E)$$

である. $a < b$ であるから, これは $P(E) = 0$ を意味する. よって (13.33) が成り立つ.

Fatou の補題 5.41 と (2) より,

$$\int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} |X_k(\omega)| dP(\omega) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \int_\Omega |X_k(\omega)| dP(\omega) \leqslant \int_\Omega |X(\omega)| dP(\omega) < \infty$$

である. よって,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} |X_k(\omega)| < \infty \quad (P\text{ - a.e. } \omega \in \Omega) \tag{13.34}$$

である. 任意の $\omega \in \Omega$ に対し,

$$X_*(\omega) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} X_k(\omega) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} |X_k(\omega)|, \quad -X^*(\omega) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} (-X_k(\omega)) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} |X_k(\omega)|$$

であるから, (13.33) と (13.34) より,

$$X^*(\omega) = X_*(\omega) \in \mathbb{R} \quad (P\text{ - a.e. } \omega \in \Omega)$$

が成り立つ. ゆえに P - a.e. $\omega \in \Omega$ で $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \in \mathbb{R}$ が存在する.

(5) (4) における X_*, X^* に対し,

$$\overline{X}(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X_*(\omega) = X^*(\omega) \quad (P\text{ - a.e. } \omega \in \Omega) \tag{13.35}$$

である. Fatou の補題 5.41 と (2) より,

$$\int_\Omega |\overline{X}(\omega)| dP(\omega) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} \int_\Omega |X_k(\omega)| dP(\omega) \leqslant \int_\Omega |X(\omega)| dP(\omega) < \infty$$

であるから $\overline{X}, X_*, X^* \in L^1(P)$ である. 今,

$$E_{n,k} := \left(\frac{k}{2^n} < X^* \leqslant \frac{k+1}{2^n} \right) \in \mathcal{E} \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}) \tag{13.36}$$

[*280] 任意の $\omega \in \Omega$ に対し $X_*(\omega) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} X_k(\omega) \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} X_k(\omega) = X^*(\omega)$ であることに注意.

とおく. (13.33) より,

$$\alpha_1(E_{n,k}) = E_{n,k} \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z})$$

であり,

$$E_{n,k} = E_{n,k} \cap \left(\frac{k}{2^n} < \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n \right) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z})$$

であるから, (3) より,

$$\int_{E_{n,k}} X_1(\omega) dP(\omega) \geqslant \frac{k}{2^n} P(E_{n,k}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}) \tag{13.37}$$

である. また (13.36) より,

$$\int_{E_{n,k}} X^*(\omega) dP(\omega) \leqslant \frac{k+1}{2^n} P(E_{n,k}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z})$$

であるから, (13.37) とあわせると,

$$\int_{E_{n,k}} X^*(\omega) dP(\omega) \leqslant \int_{E_{n,k}} X_1(\omega) dP(\omega) + \frac{1}{2^n} P(E_{n,k}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}) \tag{13.38}$$

を得る. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $(E_{n,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ は非交叉列であり,

$$\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} E_{n,k}$$

であるから, (13.38) より,

$$\begin{aligned} \int_\Omega X^*(\omega) dP(\omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{E_{n,k}} X^*(\omega) dP(\omega) \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{E_{n,k}} X_1(\omega) dP(\omega) + \frac{1}{2^n} P(E_{n,k}) \right) \\ &= \int_\Omega X_1(\omega) dP(\omega) + \frac{1}{2^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{13.39}$$

となる. Fubini の定理 5.85 と各 α_t が保測変換であることから,

$$\int_\Omega X_1(\omega) dP(\omega) = \int_\Omega \int_0^1 X(\alpha_t(\omega)) dt dP(\omega) = \int_0^1 \int_\Omega X(\alpha_t(\omega)) dP(\omega) dt = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega)$$

であるので, (13.39) より,

$$\int_\Omega X^*(\omega) dP(\omega) \leqslant \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) \tag{13.40}$$

が成り立つ. ここで (13.40) で X を $-X$ に置き換えたものを考えれば,

$$\int_\Omega -X_*(\omega) dP(\omega) = \int_\Omega (-X)^*(\omega) dP(\omega) \leqslant \int_\Omega -X(\omega) dP(\omega) \tag{13.41}$$

を得る. (13.35) より,

$$\int_\Omega \overline{X}(\omega) dP(\omega) = \int_\Omega X^*(\omega) dP(\omega) = \int_\Omega X_*(\omega) dP(\omega)$$

であるから, (13.40), (13.41) より,

$$\int_\Omega \overline{X}(\omega) dP(\omega) = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega)$$

が成り立つ.

(6) 任意の $T > 0$ に対し確率変数 $X_T : \Omega \to \mathbb{R}$ を,

$$X_T(\omega) := \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T X(\alpha_t(\omega)) dt & (\omega \in \Omega \backslash N) \\ 0 & (\omega \in N) \end{cases}$$

と定義する．また任意の $T>0$ に対し $n-1<T\leqslant n$ なる $n\in\mathbb{N}$ を $[T]$ と表す．このとき任意の $\omega\in\Omega\backslash N$, 任意の $T>0$ に対し,

$$\begin{aligned}|X_{[T]}(\omega)-X_T(\omega)| &\leqslant \frac{1}{[T]}\int_T^{[T]}|X(\alpha_t(\omega))|dt+\frac{[T]-T}{[T]^2}\int_0^T|X(\alpha_t(\omega))|dt\\ &\leqslant \frac{1}{[T]}\int_{[T]-1}^{[T]}|X(\alpha_t(\omega))|dt+\frac{1}{[T]^2}\int_0^{[T]}|X(\alpha_t(\omega))|dt\end{aligned}$$

であり, (4) で X を $|X|$ に置き換えたものを考えれば,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{[T]}\int_0^{[T]}|X(\alpha_t(\omega))|dt<\infty\quad (P\text{ - a.e. }\omega\in\Omega)$$

が成り立つので,

$$\lim_{T\to\infty}|X_{[T]}(\omega)-X_T(\omega)|=0$$

が成り立つ．よって P - a.e. $\omega\in\Omega$ で,

$$\lim_{T\to\infty}X_T(\omega)=\lim_{T\to\infty}X_{\overline{T}}(\omega)=\overline{X}(\omega)$$

が成り立つ．

□

定義 13.37 (エルゴード性)**.** $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を確率空間 $(\Omega,\mathcal{E},P)$ 上の 1 径数保測変換群とする．

$$\{E\in\mathcal{E}:\alpha_t(E)=E\ (\forall t\in\mathbb{R})\}\subseteq\{E\in\mathcal{E}:P(E)=0\}\cup\{E\in\mathcal{E}:P(E)=1\}$$

が成り立つとき, $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ はエルゴード的であると言う．

命題 13.38 (エルゴード性と同値な条件)**.** $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を確率空間 $(\Omega,\mathcal{E},P)$ 上の 1 径数保測変換群とする．このとき次は互いに同値である．

(1) $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ はエルゴード的である．

(2) $X\circ\alpha_t=X\ (\forall t\in\mathbb{R})$ を満たす任意の実数値確率変数 $X:\Omega\to\mathbb{R}$ に対し, X はある定数関数と P - a.e. で一致する．

証明. (2) ⇒ (1) を示す．(2) が成り立つとし, $E\in\mathcal{E}$ が $\alpha_t(E)=E\ (\forall t\in\mathbb{R})$ を満たすとする．このとき E の指示関数 $\chi_E:\Omega\to\mathbb{R}$ に対し,

$$\chi_E\circ\alpha_t=\chi_{\alpha_{-t}(E)}=\chi_E\quad(\forall t\in\mathbb{R})$$

であるから, (2) が成り立つことより χ_E は P - a.e. で 1 であるか, P - a.e. で 0 である．ゆえに $P(E)=\int_\Omega\chi_E(\omega)dP(\omega)$ は 1 か 0 であるので, (1) が成り立つ．

(1) ⇒ (2) を示す．(1) が成り立つとし, $X\circ\alpha_t=X\ (\forall t\in\mathbb{R})$ を満たす任意の実数値確率変数 $X:\Omega\to\mathbb{R}$ を取る．このとき任意の $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{Z}$ に対し,

$$E_{n,k}:=\left(\frac{k}{2^n}<X\leqslant\frac{k+1}{2^n}\right)\in\mathcal{E}$$

とおけば $\alpha_t(E_{n,k})=E_{n,k}\ (\forall t\in\mathbb{R})$ であるから, (1) が成り立つことより $P(E_{n,k})=1$ か $P(E_{n,k})=0$ が成り立つ．ここで任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $(E_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ は非交叉列であり,

$$\Omega=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}E_{n,k}\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

であるから,

$$1=P(\Omega)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}P(E_{n,k})\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

である．よって各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $k(n) \in \mathbb{Z}$ で，

$$P(E_{n,k(n)}) = 1, \quad P(E_{n,k}) = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{Z} : k \neq k(n))$$

なるものが唯一つ存在する．そしてこのとき，

$$E_{n+1,k(n+1)} \subseteq E_{n,k(n)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから，

$$1 = \lim_{n\to\infty} P(E_{n,k(n)}) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_{n,k(n)}\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{k(n)}{2^n}, \frac{k(n)+1}{2^n}\right]\right)\right) \tag{13.42}$$

である．よって，

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{k(n)}{2^n}, \frac{k(n)+1}{2^n}\right] \neq \varnothing$$

であり，これは一点集合であるので，その一点を $c \in \mathbb{R}$ とおけば (13.42) より，

$$X(\omega) = c \quad (P\text{ - a.e. } \omega \in \Omega)$$

である．よって (2) が成り立つ．□

定理 13.39 (Birkoff のエルゴード定理)**.** $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ 上のエルゴード的な 1 径数保測変換群，$X \in L^1(P)$ を実数値確率変数とする．このとき，

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(\alpha_t(\omega))dP(\omega) = \mathrm{E}(X) \quad (P\text{ - a.e. } \omega \in \Omega)$$

が成り立つ．

証明. 補題 13.36 とその証明における P-零集合 $N \in \mathcal{E}$ と $X_n, \overline{X}, X_*, X^* \in L^1(P)$ を考える．また任意の $T > 0$ に対し $n-1 < T \leqslant n$ なる $n \in \mathbb{N}$ を $[T]$ と表す．このとき，

$$\begin{aligned} nX_n(\alpha_T(\omega)) + \int_0^T X(\alpha_t(\omega))dt &= \int_0^{n+T} X(\alpha_t(\omega))dt = \int_0^{n+[T]} X(\alpha_t(\omega))dt + \int_{n+[T]}^{n+T} X(\alpha_t(\omega))dt \\ &= (n+[T])X_{n+[T]}(\omega) + \int_{n+[T]}^{n+T} X(\alpha_t(\omega))dt \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall T > 0, \forall \omega \in \Omega\backslash N) \end{aligned}$$

であるから，

$$X_n(\alpha_T(\omega)) = \frac{n+[T]}{n}X_{n+[T]}(\omega) + \frac{1}{n}\int_{n+[T]}^{n+T} X(\alpha_t(\omega))dt - \frac{1}{n}\int_0^T X(\alpha_t(\omega))dt \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall T > 0, \forall \omega \in \Omega\backslash N) \tag{13.43}$$

である．そして補題 13.36 の (6) より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{n+[T]}^{n+T} X(\alpha_t(\omega))dt = \overline{X}(\omega) - \overline{X}(\omega) = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^T X(\alpha_t(\omega))dt = 0 \quad (\forall T > 0, \forall \omega \in \Omega\backslash N)$$

であるから，(13.43) より，

$$X_*(\alpha_T(\omega)) = X_*(\omega), \quad X^*(\alpha_T(\omega)) = X^*(\omega) \quad (\forall T > 0, \forall \omega \in \Omega\backslash N)$$

が成り立つ．また補題 13.36 の (1) より，

$$X_n(\alpha_T(\omega)) = X_n(\omega) = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \mathbb{N})$$

であるから，

$$X_*(\alpha_T(\omega)) = 0 = X_*(\omega), \quad X^*(\alpha_T(\omega)) = 0 = X^*(\omega) \quad (\forall T > 0, \forall \omega \in N)$$

なので,

$$X_*(\alpha_T(\omega)) = X_*(\omega), \quad X^*(\alpha_T(\omega)) = X^*(\omega) \ \ (\forall T > 0, \forall \omega \in \Omega)$$

が成り立つ. ゆえに補題 13.38 より X_*, X^* はある定数関数と P - a.e. で一致する. 補題 13.36 の (5) の証明より,

$$\overline{X}(\omega) = X_*(\omega) = X^*(\omega) \ \ (P\text{ - a.e. } \omega \in \Omega)$$

であるから, ある定数 c が存在し,

$$\overline{X}(\omega) = c \ \ (P\text{ - a.e. } \omega \in \Omega) \tag{13.44}$$

が成り立つ. よって補題 13.36 の (5) より,

$$c = \mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}(X) \tag{13.45}$$

である. また補題 13.36 の (6) より,

$$\overline{X}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(\alpha_t(\omega))dt \ \ (P\text{ - a.e. } \omega \in \Omega) \tag{13.46}$$

であるので, (13.44), (13.45), (13.46) より,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(\alpha_t(\omega))dt = \overline{X}(\omega) = c = \mathrm{E}(X) \ \ (P\text{ - a.e. } \omega \in \Omega)$$

を得る. □

14 作用素環の基礎

14.1 C^*-環の表現, 非負線型汎関数, 状態, GNS 表現

定義 14.1 (C^*-環の表現)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. $*$-環準同型写像 $\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ で,

$$\pi(\mathcal{A})\mathcal{H} := \mathrm{span}\{\pi(A)v : A \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{H}\} \tag{14.1}$$

が $\mathcal{H}$ で稠密であるものを $\mathcal{A}$ の $\mathcal{H}$ 上への表現と言う. 定理 9.78 より π は自動的にノルム減少, すなわち,

$$\|\pi(A)\| \leqslant \|A\| \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

である. また, 定理 9.80 より $\pi(\mathcal{A})$ は C^*-環である. $\mathcal{H}$ を π の表現空間と言い, $\mathcal{H}_\pi$ と表す.

定義 14.2 (C^*-環の表現の忠実性)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, π を $\mathcal{A}$ の表現とする. $\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H}_\pi)$ が単射であるとき π は忠実であると言う. π が忠実であるとき, 定理 9.79 より, π はノルムを保存する. すなわち,

$$\|\pi(A)\| = \|A\| \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

が成り立つ.

注意 14.3. $\mathcal{A}$ を C^*-環, π を $\mathcal{A}$ の表現とする. このとき,

$$\widehat{\pi} : \mathcal{A}/\operatorname{Ker}(\pi) \ni [A] \mapsto \pi(A) \in B(\mathcal{H}_\pi)$$

は商 C^*-環 (定理 9.72) $\mathcal{A}/\operatorname{Ker}(\pi)$ の $\mathcal{H}_\pi$ 上への忠実表現である.

命題 14.4 (C^*-環の近似単位元の表現)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathcal{A}$ の近似単位元 (定理 9.70) とし, π を $\mathcal{A}$ の表現とする. このとき,

$$\pi(U_\lambda) \to 1 \quad (\text{in SOT})$$

が成り立つ.

証明. 任意の $A \in \mathcal{A}$ と $v \in \mathcal{H}_\pi$ に対し,

$$\pi(U_\lambda)\pi(A)v = \pi(U_\lambda A)v \to \pi(A)v$$

であるから,

$$\pi(U_\lambda)v \to v \quad (\forall v \in \pi(\mathcal{A})\mathcal{H}_\pi)$$

が成り立つ. よって $\pi(\mathcal{A})\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$ の稠密性 (定義 14.1) と $\|\pi(U_\lambda)\| \leqslant \|U_\lambda\| \leqslant 1$ $(\forall \lambda \in \Lambda)$ より,

$$\pi(U_\lambda)v \to v \quad (\forall v \in \mathcal{H}_\pi)$$

が成り立つので, SOT(定義 10.9) で $\pi(U_\lambda) \to 1$ が成り立つ. □

定義 14.5 (部分表現, 既約表現)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, π を $\mathcal{A}$ の表現とする. $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}_\pi$ が,

$$\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K} \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

を満たすとき $\mathcal{K}$ は π 不変であると言う. π 不変な $\{0\}$ ではない閉部分空間 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}_\pi$ に対し,

$$\pi|_{\mathcal{K}}(A)v = \pi(A)v \in \mathcal{K} \quad (\forall A \in \mathcal{A}, \forall v \in \mathcal{K})$$

とおくと, $\pi|_{\mathcal{K}}(A) \in B(\mathcal{K})$ であり,

$$\pi|_{\mathcal{K}} : \mathcal{A} \ni A \mapsto \pi|_{\mathcal{K}}(A) \in B(\mathcal{K})$$

は $\mathcal{A}$ の $\mathcal{K}$ 上への表現である[*281]. $\pi|_{\mathcal{K}}$ を π の $\mathcal{K}$ 上への制限と言い, このような表現を π の部分表現と言う. π 不変な閉部分空間が $\{0\}$ と $\mathcal{H}$ のみの場合, π は既約であると言う.

[*281] $\mathcal{K}$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間なので $\mathcal{H}$ の内積により Hilbert 空間である.

定義 14.6 (巡回ベクトル)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, π を $\mathcal{A}$ の表現とする. $v \in \mathcal{H}_\pi$ に対し,

$$\pi(\mathcal{A})v = \{\pi(A)v : A \in \mathcal{A}\}$$

が $\mathcal{H}_\pi$ で稠密であるとき, v を π の巡回ベクトルと言う.

注意 14.7 (巡回ベクトルを持つ部分表現)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, π を $\mathcal{A}$ の表現とする. 任意の $v \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$ に対し,

$$\mathcal{K}_v := \overline{\pi(\mathcal{A})v} \subseteq \mathcal{H}_\pi$$

とおけば $\mathcal{K}_v$ は π 不変な $\{0\}$ ではない閉部分空間であり, π の $\mathcal{K}$ 上への制限は $v \in \mathcal{K}$ を巡回ベクトルとして持つ.

注意 14.8 (既約な表現と巡回ベクトル)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, π を $\mathcal{A}$ の既約表現とする. このとき注意 14.7 より任意の $v \in \mathcal{H}_\pi\backslash\{0\}$ に対し v は π の巡回ベクトルである.

定義 14.9 (繋絡作用素)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, π_1, π_2 を $\mathcal{A}$ の表現とする. $T \in B(\mathcal{H}_{\pi_1}, \mathcal{H}_{\pi_2})$ が,

$$T\pi_1(A) = \pi_2(A)T \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

を満たすとき, T を π_1, π_2 の繋絡作用素と言う. π_1, π_2 の繋絡作用素全体を $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ と表す. また $\mathcal{C}(\pi) := \mathcal{C}(\pi, \pi)$ と表す.

命題 14.10 (繋絡作用素全体の基本性質)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, π_1, π_2, π_3 を $\mathcal{A}$ の表現とする. このとき,

(1) $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ は $B(\mathcal{H}_{\pi_1}, \mathcal{H}_{\pi_2})$ の線型部分空間である.
(2) 任意の $T \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$, $S \in \mathcal{C}(\pi_2, \pi_3)$ に対し $ST \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_3)$ が成り立つ.
(3) 任意の $T \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ に対し $T^* \in \mathcal{C}(\pi_2, \pi_1)$ が成り立つ.

証明. 全て容易に示せる. □

定義 14.11 (C^*-環の表現のユニタリ同値)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, π_1, π_2 を $\mathcal{A}$ の表現とする. $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ がユニタリ作用素 (定義 5.143) を含むとき, π_1, π_2 はユニタリ同値であると言い, $\pi_1 \sim \pi_2$ と表す. 命題 14.10 よりこの $\sim$ は $\mathcal{A}$ の表現全体における同値関係 (定義 2.21) である.

定理 14.12 (Schur の補題)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, π を $\mathcal{A}$ の表現とする. このとき次は互いに同値である.

(1) π は既約.
(2) $\mathcal{C}(\pi) = \mathbb{C}1$.

証明. $\mathcal{C}(\pi) \subseteq B(\mathcal{H}_\pi)$ は $\pi(\mathcal{A}) \subseteq B(\mathcal{H}_\pi)$ の可換子環 (定義 10.175) $\pi(\mathcal{A})'$ に他ならない. そして $\pi(\mathcal{A})' \subseteq B(\mathcal{H}_\pi)$ は von Neumann 環 (定義 10.179) であるから, 定理 10.186 の (1) より,

$$\mathcal{C}(\pi) = \pi(\mathcal{A})' = \overline{\mathcal{P}(\pi(\mathcal{A})')}^{\|\cdot\|} \tag{14.2}$$

である. ただし $\mathcal{P}(\pi(\mathcal{A})')$ は von Neumann 環 $\pi(\mathcal{A})'$ の射影全体である. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. 任意の $P \in \mathcal{P}(\pi(\mathcal{A})')$ に対し $\mathrm{Ran}(P) \subseteq \mathcal{H}_\pi$ は π 不変な閉部分空間であるから $\mathrm{Ran}(P)$ は $\mathcal{H}_\pi$ か $\{0\}$ である. よって P は 1 か 0 なので (12.36) より $\mathcal{C}(\pi) = \mathbb{C}1$ である.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとする. $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}_\pi$ を π 不変な閉部分空間とし, $\mathcal{K}$ の上への射影作用素 (定義 10.7) を $P \in B(\mathcal{H}_\pi)$ とおくと,

$$\pi(A)P = P\pi(A)P \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

であるから,

$$P\pi(A) = (\pi(A^*)P)^* = (P\pi(A)P)^* = P\pi(A)P = \pi(A)P \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

である. よって $P \in \mathcal{C}(\pi) = \mathbb{C}1$ であるから $P = \alpha 1$ なる $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在し, $P^2 = P$ であることから α は 1 か 0, 従って P は 1 か 0 である. ゆえに $\mathcal{K}$ は $\mathcal{H}_\pi$ か $\{0\}$ であるので π は既約である. □

系 14.13 (Schur の補題の系)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, π_1, π_2 を $\mathcal{A}$ の既約な表現とする．このとき次は互いに同値である．

(1) π_1, π_2 はユニタリ同値.
(2) $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2) \neq \{0\}$.

証明. (1) ⇒ (2) はユニタリ同値の定義より自明である．(2) ⇒ (1) を示す．(2) が成り立つとし，ノルムが 1 の任意の $T \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ を取る．このとき命題 14.10 より $T^*T \in \mathcal{C}(\pi_1), TT^* \in \mathcal{C}(\pi_2)$ であり，π_1, π_2 は既約なので Schur の補題 14.12 より $T^*T \in \mathbb{C}1, TT^* \in \mathbb{C}1$ である．ここで $\|T^*T\| = \|T\|^2 = 1, \|TT^*\| = \|T^*\| = \|T\| = 1$ であり，$T^*T \in B(\mathcal{H}_{\pi_1}), TT^* \in B(\mathcal{H}_{\pi_2})$ は有界非負自己共役作用素なので $T^*T = 1, TT^* = 1$ である．ゆえに $T : \mathcal{H}_{\pi_1} \to \mathcal{H}_{\pi_2}$ はユニタリ作用素であるから π_1, π_2 はユニタリ同値である． □

定義 14.14 (C^*-環の表現の直和)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, J を空でない集合とし，各 $j \in J$ に対し $\mathcal{A}$ の表現 $\pi_j : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H}_{\pi_j})$ が与えられているとする．このとき[*282]

$$\left(\oplus_{j\in J}\pi_j\right)(A)(v_j)_{j\in J} := (\pi_j(A)v_j)_{j\in J} \quad \left(\forall A \in \mathcal{A}, \forall (v_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}_{\pi_j}\right)$$

として，$\mathcal{A}$ の直和 Hilbert 空間 $\bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}_j$ 上への表現 $\oplus_{j\in J}\pi_j$ が定義できる．これを $(\pi_j)_{j\in J}$ の直和と言う．

命題 14.15 (C^*-環の巡回ベクトルを持つ表現の巡回ベクトル込みのユニタリ同値条件)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, $(\pi_1, v_1), (\pi_2, v_2)$ をそれぞれ $\mathcal{A}$ の表現とその巡回ベクトル (定義 14.6) の組とする．このとき次は互いに同値である．

(1) $(\pi_1(A)v_1 \mid v_1) = (\pi_2(A)v_2 \mid v_2)$ $(\forall A \in \mathcal{A})$.
(2) ユニタリ作用素 $U \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ で $Uv_1 = v_2$ なるものが存在する (特に π_1, π_2 はユニタリ同値).

また (1), (2) が成り立つとき，(2) におけるユニタリ作用素 $U \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ は，

$$U\pi_1(A)v_1 = \pi_2(A)v_2 \quad (\forall A \in \mathcal{A}) \tag{14.3}$$

によって特徴付けられる．

証明. (2) が成り立つとすると，

$$(\pi_2(A)v_2 \mid v_2) = (\pi_2(A)Uv_1 \mid Uv_1) = (U^*\pi_2(A)Uv_1 \mid v_1) = (\pi_1(A)v_1 \mid v_1) \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

であるから (1) が成り立つ．
(1) ⇒ (2) を示す．(1) が成り立つとすると，

$$(\pi_1(A)v_1 \mid \pi_1(B)v_1) = (\pi_1(B^*A)v_1 \mid v_1) = (\pi_2(B^*A)v_2 \mid v_2) = (\pi_2(A)v_2 \mid \pi_2(B)v_2) \quad (\forall A, B \in \mathcal{A})$$

であるから，$\pi_1(\mathcal{A})v_1$ から $\pi_2(\mathcal{A})v_2$ の上への等長線型同型写像 U_0 で，

$$U_0\pi_1(A)v_1 = \pi_2(A)v_2 \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

を満たすものが定義できる．v_j は π_j の巡回ベクトルなので $\mathcal{H}_{\pi_j} = \overline{\pi_j(\mathcal{A})v_j}$ $(j = 1, 2)$ であるから $U_0 : \pi_1(G)v_1 \to \mathcal{H}_{\pi_2}$ の $\mathcal{H}_{\pi_1}$ への一意拡張 (命題 3.19) $U : \mathcal{H}_{\pi_1} \to \mathcal{H}_{\pi_2}$ はユニタリ作用素である．U は (14.3) を満たすので特に $Uv_1 = v_2$ である．そして，

$$(U\pi_1(A))\pi_1(B)v_1 = U\pi_1(AB)v_1 = \pi_2(AB)v_2 = \pi_2(A)\pi_2(B)v_2 = (\pi_2(A)U)\pi_1(B)v_1 \quad (\forall A, B \in \mathcal{A})$$

であるから，$\mathcal{H}_{\pi_1} = \overline{\pi_1(\mathcal{A})v_1}$ より，

$$U\pi_1(A) = \pi_2(A)U \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

が成り立つ．よって $U \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ であるので (2) が成り立つ． □

[*282] C^*-環の表現のノルム減少性 (定義 14.1) に注意.

補題 14.16 (C^*-環の非負部分はノルム閉)**.** C^*-環 $\mathcal{A}$ の非負部分 $\mathcal{A}_+ \subseteq \mathcal{A}$ はノルムで閉である.

証明. $\mathcal{A}_+$ の列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がノルムで $A \in \mathcal{A}$ に収束するとして $A \in \mathcal{A}_+$ が成り立つことを示せばよい. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はノルムで収束する列なので, ある正数 α に対し,

$$\|A_n\| \leqslant \alpha \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ. よって連続関数カルキュラス (9.48) より,

$$\|\alpha 1 - A_n\| \leqslant \alpha \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから,

$$\|\alpha 1 - A\| = \lim_{n\to\infty} \|\alpha 1 - A_n\| \leqslant \alpha.$$

であるので, 補題 9.60 より $A \in \mathcal{A}_+$ である. □

定義 14.17 (C^*-環上の非負線型汎関数)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. 線型汎関数 $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ で,

$$\varphi(A) \geqslant 0 \quad (\forall A \in \mathcal{A}_+)$$

を満たすものを $\mathcal{A}$ 上の非負線型汎関数と言う. 次の定理 14.18 より C^*-環上の非負線型汎関数は自動的に有界線型汎関数である. C^*-環 $\mathcal{A}$ の非負線型汎関数全体を $\mathcal{A}^*_+ \subseteq \mathcal{A}^*$ と表す.

定理 14.18 (C^*-環の非負線型汎関数の自動的有界性)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ を非負線型汎関数とする. このとき φ は有界線型汎関数である.

証明. $\mathcal{A}_1$ を $\mathcal{A}$ のノルムが 1 以下の元全体とする. φ が有界線型汎関数であることを示すには $\varphi(\mathcal{A}_1)$ が有界であることを示せばよい. $\mathcal{A}_{+,1} := \mathcal{A}_+ \cap \mathcal{A}_1$ とおくと, 注意 9.58 より,

$$\mathcal{A}_1 = \{(A_{1,+} - A_{1,-}) + i(A_{2,+} - A_{2,-}) : A_{j,\pm} \in \mathcal{A}_{+,1}, (j = 1, 2)\}$$

であるから, $\varphi(\mathcal{A}_1)$ が有界であることを示すには $\varphi(\mathcal{A}_{+,1})$ が有界であることを示せば十分である. そこで $\varphi(\mathcal{A}_{+,1})$ が有界ではないと仮定する. このとき,

$$A_n \in \mathcal{A}_{+,1}, \quad \varphi(A_n) > 2^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{14.4}$$

を満たす $\mathcal{A}$ の列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が取れる. $\|A_n\| \leqslant 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ より,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|A_n\|}{2^n} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$$

であるから, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{A_n}{2^n}$ は絶対収束する. そこで,

$$A := \sum_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$$

とおくと, 補題 14.16 より,

$$A - \sum_{n=1}^{N} \frac{A_n}{2^n} = \sum_{n\geqslant N+1} \frac{A_n}{2^n} \in \mathcal{A}_+$$

であるから,

$$\varphi\left(A - \sum_{n=1}^{N} \frac{A_n}{2^n}\right) \geqslant 0 \quad (\forall N \in \mathbb{N})$$

である. よって,

$$\varphi(A) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(A_n)}{2^n} \quad (\forall N \in \mathbb{N})$$

であるが, (14.4) より,

$$\varphi(A) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(A_n)}{2^n} > \sum_{n=1}^{N} \frac{2^n}{2^n} = N \quad (\forall N \in \mathbb{N})$$

となり矛盾する. よって $\varphi(\mathcal{A}_{+,1})$ は有界なので φ は有界線型汎関数である. □

命題 14.19 (C^*-環の非負線型汎関数に関する Schwarz の不等式)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, $\varphi \in \mathcal{A}_+^*$ とする. このとき,

(1) 任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し, $\overline{\varphi(B^*A)} = \varphi(A^*B)$ が成り立つ.
(2) 任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し, $|\varphi(B^*A)|^2 \leqslant \varphi(A^*A)\varphi(B^*B)$ が成り立つ.
(3) 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し, $|\varphi(A)|^2 \leqslant \|\varphi\|\varphi(A^*A)$ が成り立つ.
(4) 任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し, $|\varphi(B^*AB)| \leqslant \varphi(B^*B)\|A\|$ が成り立つ.

証明. (1)

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (A, B) \mapsto \varphi(B^*A) \in \mathbb{C} \tag{14.5}$$

は準双線型汎関数であるから, 偏極恒等式 10.4 より,

$$\varphi(B^*A) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \varphi\left(\left(A + i^k B\right)^* \left(A + i^k B\right)\right) \tag{14.6}$$

が成り立ち, 各 $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ に対し,

$$\varphi\left(\left(A + i^k B\right)^* \left(A + i^k B\right)\right) = \varphi\left(\left(B + \overline{i}^k A\right)^* \left(B + \overline{i}^k A\right)\right)$$

は実数であるから, (12.52) より,

$$\begin{aligned}\overline{\varphi(B^*A)} &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \overline{i}^k \varphi\left(\left(B + \overline{i}^k A\right)^* \left(B + \overline{i}^k A\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \varphi\left(\left(B + i^k A\right)^* \left(B + i^k A\right)\right) = \varphi(A^*B).\end{aligned}$$

(2) (14.5) は内積の忠実性以外の条件を満たすので, 補題 12.64 より成り立つ.

(3) $(U)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathcal{A}$ の近似単位元 (定理 9.70) とすると, (2) より任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し,

$$|\varphi(U_\lambda A)|^2 \leqslant \varphi(U_\lambda^* U_\lambda)\varphi(A^*A) \leqslant \|\varphi\|\varphi(A^*A) \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

であるから,

$$|\varphi(A)|^2 = \lim_{\lambda\in\Lambda}|\varphi(U_\lambda A)|^2 \leqslant \|\varphi\|\varphi(A^*A).$$

(4) 任意の $B \in \mathcal{A}$ を取り固定する.

$$\psi : \mathcal{A} \ni A \mapsto \varphi(B^*AB) \in \mathbb{C}$$

とおくと, $\psi \in \mathcal{A}_+^*$ である. $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathcal{A}$ の近似単位元とすると, 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し (2) より,

$$|\psi(U_\lambda A)|^2 \leqslant \psi(U_\lambda^* U_\lambda)\psi(A^*A) \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

であり,

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \psi(U_\lambda^* U_\lambda) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \varphi\left(B^* U_\lambda^* U_\lambda B\right) = \varphi(B^*B)$$

であるから,

$$|\psi(A)|^2 = \lim_{\lambda\in\Lambda}|\psi(U_\lambda A)|^2 \leqslant \varphi(B^*B)\psi(A^*A)$$

となる. よって,

$$|\psi(A)|^2 \leqslant \varphi(B^*B)\|\psi\|\|A\|^2 \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

であるから,

$$\|\psi\| \leqslant \varphi(B^*B)$$

が成り立つ. ゆえに任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し,

$$\varphi(B^*AB) = \psi(A) \leqslant \varphi(B^*B)\|A\|$$

が成り立つ.

□

定理 14.20 (C^*-環上の非負線型汎関数に対する GNS 表現)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. 任意の $\varphi \in \mathcal{A}_+^* \backslash \{0\}$ に対し, 巡回ベクトル $v \in \mathcal{H}_\pi$ を持つ $\mathcal{A}$ の表現 π で,

$$\varphi(A) = (\pi(A)v \mid v) \ \ (\forall A \in \mathcal{A})$$

を満たすものが存在する.

証明.

$$\mathcal{N}_\varphi := \{A \in \mathcal{A} : \varphi(A^*A) = 0\}$$

とおくと, 命題 14.19 の (2) より $\mathcal{N}_\varphi$ は $\mathcal{A}$ の線型部分空間であり, 命題 14.19 の (3) と $\varphi \neq 0$ より $\mathcal{N}_\varphi \neq \mathcal{A}$ である. そこで商線型空間 $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\varphi \neq \{0\}$ を考え, 商写像を,

$$\mathcal{A}/\mathcal{N}_\varphi \ni A \mapsto [A] \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\varphi$$

とおく. 命題 14.19 の (1), (2) より,

$$([A] \mid [B])_\varphi := \varphi(B^*A) \ \ (\forall A, B \in \mathcal{A}) \tag{14.7}$$

として $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\varphi$ の内積 $(\cdot \mid \cdot)_\varphi$ が定義できる. この内積空間 $(\mathcal{A}/\mathcal{N}_\varphi, (\cdot \mid \cdot)_\varphi)$ の Hilbert 空間への完備化 (定義 10.90) を $(\mathcal{H}_\varphi, (\cdot \mid \cdot)_\varphi)$ とおく. 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し命題 14.19 の (4) より,

$$\pi_0(A) : \mathcal{A}/\mathcal{N}_\varphi \ni [B] \mapsto [AB] \in \mathcal{H}_\varphi \tag{14.8}$$

は well-defined な線型作用素である. そして命題 14.19 の (4) より,

$$\begin{aligned} \|\pi_0(A)[B]\|_\varphi^2 &= ([AB]) \mid [AB])_\varphi = \varphi((AB)^*(AB)) \\ &\leqslant \varphi(B^*B)\|A\|^2 = \|[B]\|_\varphi^2\|A\|^2 \ \ (\forall [B] \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\varphi) \end{aligned}$$

であるから (14.8) は有界線型作用素である. そこで (14.8) を $\mathcal{H}_\varphi = \overline{\mathcal{A}/\mathcal{N}_\varphi}$ 上に一意拡張 (命題 3.19) したものを $\pi_\varphi(A) \in B(\mathcal{H}_\varphi)$ と表す. このとき $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\varphi$ の $\mathcal{H}_\varphi$ における稠密性より,

$$\pi_\varphi : \mathcal{A} \ni A \mapsto \pi_\varphi(A) \in B(\mathcal{H}_\varphi)$$

が $*$-環準同型写像であることが分かる. 今, 命題 14.19 の (3) より,

$$\mathcal{A}/\mathcal{N}_\varphi \ni [A] \mapsto \varphi(A) \in \mathbb{C}$$

は well-defined な有界線型汎関数である. これを $\mathcal{H}_\varphi = \overline{\mathcal{A}/\mathcal{N}_\varphi}$ 上の有界線型汎関数に一意拡張したものを考え, Riesz の表現定理 3.44 によりそれに対応するベクトルを $v_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ とおくと,

$$\varphi(A) = ([A] \mid v_\varphi)_\varphi \ \ (\forall A \in \mathcal{A}) \tag{14.9}$$

となる. (14.7), (14.9) より,

$$\begin{aligned} ([A] \mid [B])_\varphi &= \varphi(B^*A) = ([B^*A] \mid v_\varphi)_\varphi = (\pi_\varphi(B^*)[A] \mid v_\varphi)_\varphi \\ &= ([A] \mid \pi_\varphi(B)v_\varphi) \ \ (\forall A, B \in \mathcal{A}) \end{aligned}$$

であるから, $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\varphi$ の $\mathcal{H}_\varphi$ における稠密性より,

$$[B] = \pi_\varphi(B)v_\varphi \ \ (\forall B \in \mathcal{A}) \tag{14.10}$$

が成り立つ. これより,

$$\overline{\pi_\varphi(\mathcal{A})v_\varphi} = \overline{\mathcal{A}/\mathcal{N}_\varphi} = \mathcal{H}_\varphi$$

であるから, π_φ は $\mathcal{A}$ の $\mathcal{H}_\varphi$ 上への表現であり, $v_\varphi \in \mathcal{H}_\pi$ は π_φ の巡回ベクトルである. そして (14.9), (14.10) より,

$$\varphi(A) = (\pi_\varphi(A)v_\varphi \mid v_\varphi)_\varphi \ \ (\forall A \in \mathcal{A})$$

が成り立つ. □

定義 14.21 (C^*-環上の非負線型汎関数に対する GNS 表現)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. 任意の $\varphi \in \mathcal{A}_+^* \backslash \{0\}$ に対し, 定理 14.20 より巡回ベクトル $v \in \mathcal{H}_\pi$ を持つ $\mathcal{A}$ の表現 π で,

$$\varphi(A) = (\pi(A)v \mid v) \ \ (\forall A \in \mathcal{A})$$

を満たすものが存在する. このとき表現 π とその巡回ベクトル v の組 (π, v) を φ に対する GNS 表現と言う. 命題 14.15 より $(\pi_1, v_1), (\pi_2, v_2)$ が共に φ に対する GNS 表現であるならば, π_1, π_2 はユニタリ同値であり, ユニタリ作用素 $U : \mathcal{H}_{\pi_1} \to \mathcal{H}_{\pi_2}$ で,

$$U\pi_1(A) = \pi_2(A)U \ \ (\forall A \in \mathcal{A}), \ \ Uv_1 = v_2$$

を満たすものが定まる.

系 14.22. $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. このとき任意の $\varphi \in \mathcal{A}_+^*$ と $\mathcal{A}$ の任意の近似単位元 $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し,

$$\|\varphi\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(U_\lambda)$$

が成り立つ.

証明. $\varphi \in \mathcal{A}_+^* \backslash \{0\}$ に対する GNS 表現 (π, v) を取る.

$$\|\varphi\| = \sup_{A \in \mathcal{A}_1} |\varphi(A)| = \sup_{A \in \mathcal{A}} |(\pi(A)v \mid v)| \leqslant \|v\|^2$$

であり, 命題 14.4 より,

$$\|v\|^2 = \lim_{\lambda \in \Lambda} (\pi(U_\lambda)v \mid v) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(U_\lambda) \leqslant \|\varphi\|$$

である. よって,

$$\|\varphi\| = \|v\|^2 = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(U_\lambda)$$

である. □

定理 14.23 (C^*-環上の有界線型汎関数が非負線型汎関数であるための条件)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環, $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathcal{A}$ のノルム 1 以下の非負元からなる $\mathcal{A}$ の近似単位元とする[*283]. もし $\varphi \in \mathcal{A}^*$ が,

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(U_\lambda) = \|\varphi\|$$

を満たすならば $\varphi \in \mathcal{A}_+^*$ である.

証明. $\|\varphi\| = 1$ であるとして示せば十分である. まず $\varphi(\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}) \subset \mathbb{R}$ を示す. 任意のノルムが 1 以下の $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$ を取り $\varphi(A) \in \mathbb{R}$ を示せばよい. そこで,

$$\varphi(A) := \alpha + i\beta \ \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

とおく.

$$\begin{aligned} |\varphi(A) \pm in\varphi(U_\lambda)|^2 &= |\varphi(A \pm inU_\lambda)|^2 \leqslant \|A \pm inU_\lambda\|^2 = \|A^2 \pm in(AU_\lambda - U_\lambda A) + n^2U_\lambda^2\| \\ &\leqslant \|A\|^2 + n\|AU_\lambda - U_\lambda A\| + n^2 \ \ (\forall \lambda \in \Lambda, \forall n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

であり,

$$\varphi(U_\lambda) \to \|\varphi\| = 1, \ \ \|AU_\lambda - U_\lambda A\| \to 0$$

であるから,

$$|\varphi(A) \pm in|^2 \leqslant 1 + n^2 \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ. よって,

$$|\alpha + i(\beta \pm n)|^2 \leqslant 1 + n^2 \ \ (\forall n \in \mathbb{N}),$$

[*283] 定理 9.70 よりそのような近似単位元は存在する.

従って，

$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 \leqslant \mp 2n\beta \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

である．これより $0 \leqslant \mp\beta$ であるから $\beta = 0$ を得る．ゆえに $\varphi(A) = \alpha \in \mathbb{R}$ が成り立つ．

φ が非負線型汎関数であることを示す．任意ののノルムが 1 以下の $A \in \mathcal{A}_+$ を取り $\varphi(A) \geqslant 0$ であることを示せばよい．各 U_λ と A はノルムが 1 以下の非負元だから，連続関数カルキュラス (9.48) より，

$$-1 \leqslant -U_\lambda \leqslant A - U_\lambda \leqslant A \leqslant 1 \ \ (\forall \lambda \in \Lambda),$$

[*284]従って，

$$\|A - U_\lambda\| \leqslant 1 \ \ (\forall \lambda \in \Lambda)$$

が成り立つ．これより，

$$|\varphi(A) - \varphi(U_\lambda)| = |\varphi(A - U_\lambda)| \leqslant 1 \ \ (\forall \lambda \in \Lambda)$$

となるから，$\lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(U_\lambda) = \|\varphi\| = 1$ より，

$$|\varphi(A) - 1| \leqslant 1$$

を得る．よって $\varphi(A) \geqslant 0$ が成り立つ． □

補題 14.24. C^*-環 $\mathcal{A}$ の 0 ではない任意の正規元 A に対し，ノルムが 1 の $\varphi \in \mathcal{A}_+^*$ で $|\varphi(A)| = \|A\|$ を満たすものが存在する．

証明. (1) $\mathcal{A}$ が単位的である場合．$\{1, A\}$ から生成される単位的可換 C^*-環 $C^*(\{1, A\})$ の Gelfand 変換 (定理 9.43)

$$\Gamma : C^*(\{1, A\}) \to C(\widehat{C^*(\{1, A\})})$$

を考えると，$\widehat{C^*(\{1, A\})}$ がコンパクトであることから，

$$\|A\| = \|\Gamma(A)\| = \sup_{\gamma \in \widehat{C^*(\{1,A\})}} |\Gamma(A)(\gamma)| = |\Gamma(A)(\gamma_0)| = |\gamma_0(A)|$$

を満たす $\gamma_0 \in \widehat{C^*(\{1, A\})}$ が取れる．そして有界線型汎関数 $\gamma_0 : C^*(\{1, A\}) \to \mathbb{C}$ に対し，Hahn-Banach の拡張定理 3.71 より γ_0 の拡張 $\varphi \in \mathcal{A}^*$ で $\|\varphi\| = \|\gamma_0\|$ を満たすものが取れる．

$$\|\varphi\| = \|\gamma_0\| = 1 = \gamma(1) = \varphi(1)$$

であるから定理 14.23 より $\varphi \in \mathcal{A}_+^*$ であり，$|\varphi(A)| = |\gamma_0(A)| = \|A\|$ である．

(2) $\mathcal{A}$ が単位的でない場合．$\widetilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$ を単位化 C^*-環とすると，(1) よりノルムが 1 の $\psi \in \widetilde{\mathcal{A}}_+^*$ で $\psi(A) = \|A\|$ なるものが取れる．ψ を $\mathcal{A}$ に制限したものを φ とおくと，φ はノルムが 1 以下で $\varphi \in \mathcal{A}_+^*$ であり，

$$0 < \|A\| = |\varphi(A)| \leqslant \|\varphi\|\|A\|$$

より $1 \leqslant \|\varphi\|$ である．よって $\|\varphi\| = 1$ である．

□

定義 14.25 (C^*-環の状態, 純粋状態)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環とする．$\varphi \in \mathcal{A}_+^*$ で $\|\varphi\| = 1$ を満たすものを $\mathcal{A}$ の状態と言う．$\mathcal{A}$ の状態全体

$$S(\mathcal{A}) = \{\varphi \in \mathcal{A}_+^* : \|\varphi\| = 1\}$$

は補題 14.24 より空ではなく，系 14.22 より凸集合である．そこで $S(\mathcal{A})$ の端点 (定義 3.81) を $\mathcal{A}$ の純粋状態と言う．$\mathcal{A}$ の純粋状態全体を，

$$PS(\mathcal{A}) := \mathrm{ext}(S(\mathcal{A}))$$

とおく．

[*284] 単位的ではない場合は単位化 C^*-環において考える．

定理 14.26. C^*-環 $\mathcal{A}$ の 0 ではない任意の正規元 A に対し, 純粋状態 $\varphi \in PS(\mathcal{A})$ で $|\varphi(A)| = \|A\|$ を満たすものが存在する.

証明. 補題 14.24 より $\psi \in S(\mathcal{A})$ で $|\psi(A)| = \|A\|$ を満たすものが取れる. これを固定する.

$$F := \{\varphi \in S(\mathcal{A}) : \varphi(A) = \psi(A)\}$$

とおくと, F は凸集合であり弱 $*$-閉である (F の弱 $*$-閉包が $S(\mathcal{A})$ に含まれることについては $\|A\| > 0$ であることによる). よって Banach-Alaoglu の定理 3.67 より F は弱 $*$-コンパクトな凸集合であるから Krein-Milman の端点定理 3.84 より F は端点を持つ. 今, F が $S(\mathcal{A})$ のフェイス (定義 3.80) であることを示す. $\varphi_1, \varphi_2 \in S(\mathcal{A}), t \in (0,1)$ が,

$$\varphi := (1-t)\varphi_1 + t\varphi_2 \in F$$

を満たすとする. このとき,

$$\|A\| = |\psi(A)| = |\varphi(A)| \leqslant (1-t)|\varphi_1(A)| + t|\varphi_2(A)| \leqslant \|A\|$$

であるから $|\varphi(A)| = |\varphi_1(A)| = |\varphi_2(A)| = \|A\|$ なので, $\varphi(A), \varphi_1(A), \varphi_2(A)$ は $\mathbb{C}$ の中心 0, 半径 $\|A\|$ の円周上にある. そして,

$$\varphi(A) = (1-t)\varphi_1(A) + t\varphi_2(A)$$

であるから $\psi(A) = \varphi(A) = \varphi_1(A) = \varphi_2(A)$ である. よって $\varphi_1, \varphi_2 \in F$ なので F は $S(\mathcal{A})$ のフェイスである. ゆえに F の端点 φ は $S(\mathcal{A})$ の端点であるので $\varphi \in PS(\mathcal{A})$ であり, $\varphi \in F$ であるから $|\varphi(A)| = |\psi(A)\| = \|A\|$ である. □

定理 14.27 (C^***-環の純粋状態と既約表現).** $\mathcal{A}$ を C^*-環, φ を $\mathcal{A}$ の状態とし, φ の GNS 表現 (定義 14.20) を (π, v) とおく. このとき次は互いに同値である.

(1) φ は純粋状態である.
(2) π は既約 (定義 14.5) である.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. φ が純粋状態であるとする. π が既約であることを示すには, Schur の補題 14.12 より $\pi(\mathcal{A})' = \mathcal{C}(\pi) = \mathbb{C}1$ であることを示せばよい. そしてそのためには定理 10.186 より von Neumann 環 $\pi(\mathcal{A})'$ に属する射影作用素 P を取り P が 1 か 0 であることを示せばよい.

$$\varphi_1(A) = (P\pi(A)v \mid v), \quad \varphi_2(A) = ((1-P)\pi(A)v \mid v) \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

とおくと, $P, 1-P \in \pi(\mathcal{A})'_+$ であるから $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}^*_+$ であり, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ である. よって系 14.22 より,

$$\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\| = \|\varphi\| = 1$$

であるから, $\varphi \in \mathrm{ext}(S(\mathcal{A}))$ より $\alpha \in [0,1]$ が存在して $\varphi_1 = \alpha\varphi$ が成り立つ. よって,

$$\alpha(\pi(A)v \mid \pi(B)v) = \alpha\varphi(B^*A) = \varphi_1(B^*A) = (P\pi(A)v \mid \pi(B)v) \quad (\forall A, B \in \mathcal{A})$$

であり, v が π の巡回ベクトルであることから, $P = \alpha 1$ である. P は射影作用素なので $\alpha^2 = \alpha$ であるから P は 0 か 1 である. ゆえに π は既約である.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. π が既約であるとする. φ が純粋状態であることを示すには $\varphi_1 \in \mathcal{A}^*_+$ で $\varphi - \varphi_1 \in \mathcal{A}^*_+$ を満たすものを取り, $\varphi_1 = \|\varphi_1\|\varphi$ が成り立つことを示せばよい. $\varphi - \varphi_1 \in \mathcal{A}^*_+$ より,

$$\varphi_1(A^*A) \leqslant \varphi(A^*A) = \|\pi(A)v\|^2 \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

である. よって命題 14.19 の (2) より,

$$\pi(\mathcal{A})v \times \pi(\mathcal{A})v \ni (\pi(A)v, \pi(B)v) \mapsto \varphi_1(B^*A) \in \mathbb{C} \tag{14.11}$$

なる有界準双線型汎関数が定義できる．v は π の巡回ベクトルなので (14.11) は $\mathcal{H}_\pi \times \mathcal{H}_\pi$ 上の有界準双線型汎関数に一意拡張できる．[*285] よって定理 3.49 より $T \in B(\mathcal{H}_\pi)$ で，

$$(T\pi(A)v \mid \pi(B)v) = \varphi_1(B^*A) \quad (\forall A, B \in \mathcal{A}) \tag{14.12}$$

なるものが取れる．

$$\begin{aligned}(T\pi(A)\pi(B)v \mid \pi(C)v) &= \varphi_1(C^*AB) = \varphi_1((A^*C)^*B) = (T\pi(B)v \mid \pi(A^*C)v) \\ &= (\pi(A)T\pi(B)v \mid \pi(C)v) \quad (\forall A, B, C \in \mathcal{A})\end{aligned}$$

であり，v は π の巡回ベクトルなので $T \in \mathcal{C}(\pi)$ が成り立つ．よって π が既約であることと Schur の補題 14.12 より $T = \alpha 1$ なる $\alpha \in \mathbb{C}$ が取れて (14.12) より，

$$\varphi_1(B^*A) = \alpha(\pi(A)v \mid \pi(B)v) \quad (\forall A, B \in \mathcal{A})$$

となる．$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathcal{A}$ の近似単位元とすると，命題 14.4 より，

$$\varphi_1(A) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \varphi_1(U_\lambda^* A) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \alpha(\pi(A)v \mid \pi(U_\lambda)v) = \alpha(\pi(A)v \mid v) = \alpha\varphi(A)$$

となるから，$\varphi_1 = \alpha\varphi = \|\varphi_1\|\varphi$ が成り立つ．よって φ は純粋状態である． □

定理 14.28 (C^*-環の忠実表現の存在)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環とし，任意の $\varphi \in PS(\mathcal{A})$[*286] に対し (π_φ, v_φ) を φ に対する GNS 表現とする．このとき直和表現 (定義 14.14)

$$\pi := \bigoplus_{\varphi\in PS(\mathcal{A})} \pi_\varphi : \mathcal{A} \ni A \mapsto (\pi_\varphi(A))_{\varphi\in PS(\mathcal{A})} \in B\left(\bigoplus_{\varphi\in PS(\mathcal{A})} \mathcal{H}_{\pi_\varphi}\right)$$

は $\mathcal{A}$ の忠実表現 (定義 14.2) である．

証明. $\pi(A) = 0$ とすると，任意の $\varphi \in PS(\mathcal{A})$ に対し $\pi_\varphi(A) = 0$ であるから，

$$\varphi(A^*A) = \|\pi_\varphi(A)v_\varphi\|^2 = 0 \quad (\forall \varphi \in PS(\mathcal{A}))$$

である．よって定理 14.26 より $A^*A = 0$ であるから，$\|A\|^2 = \|A^*A\| = 0$ である．ゆえに π は忠実である． □

定義 14.29 (C^*-環の単純性)**.** C^*-環 $\mathcal{A}$ が単純であるとは，$\mathcal{A}$ の任意の閉イデアル (定理 9.71 より C^*-環の閉イデアルは自動的に $*$-イデアル) が $\mathcal{A}$ と $\{0\}$ のみであることを言う．

定理 14.30 (C^*-環の単純性の特徴付け)**.** C^*-環 $\mathcal{A}$ に対し次は互いに同値である．

(1) $\mathcal{A}$ は単純である．
(2) $\mathcal{A}$ の任意の表現は忠実である．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す．$\mathcal{A}$ が単純であるとし，$\mathcal{A}$ の任意の表現 π を取る．$\mathrm{Ker}(\pi)$ は $\mathcal{A}$ の閉イデアルであるから $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathcal{A}$ か $\mathrm{Ker}(\pi) = \{0\}$ であり，C^*-環の表現の非退化性 (14.1) より $\mathrm{Ker}(\pi) \neq \mathcal{A}$ なので，$\mathrm{Ker}(\pi) = \{0\}$ である．よって π は忠実である．
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す．(2) が成り立つと仮定し，$\mathcal{A}$ の閉イデアル $\mathcal{I}$ で $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ なるものを取る．このとき定理 9.72 より $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ は C^*-環であるから，$\mathcal{A}/\mathcal{I}$ は表現 $\pi : \mathcal{A}/\mathcal{I} \to B(\mathcal{H}_\pi)$ を持つ (定理 14.28 など)．商写像

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto [A] \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$$

は全射 $*$-環準同型写像であるから，

$$\hat{\pi} : \mathcal{A} \ni A \mapsto \pi([A]) \in B(\mathcal{H}_\pi)$$

は $\mathcal{A}$ の表現である．(2) が成り立つので $\hat{\pi}$ は忠実であるから，$[A] = 0$ ならば $\hat{\pi}(A) = \pi([A]) = 0$ より $A = 0$ である．よって $\mathcal{I} = \{0\}$ であるから $\mathcal{A}$ は単純である． □

[*285] 有界線型作用素の一意拡張 (命題 3.19) と同様のやり方で一意拡張できることが分かる．
[*286] 定理 14.26 より C^*-環は必ず純粋状態を持つことに注意．

命題 14.31 (コンパクト作用素環の単純性)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．コンパクト作用素環 (定義 10.107) $B_0(\mathcal{H})$ は単純 C^*-環である．

証明. $\mathcal{I}$ を $B_0(\mathcal{H})$ の $\{0\}$ ではない閉イデアルとする．任意の $T \in \mathcal{I}\backslash\{0\}$ を取り, $\|Tu\| = 1$ なる $u \in \mathcal{H}$ を取る．このとき, Schatten 形式 (定義 10.109) $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (v, w) \mapsto v \odot w \in B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H})$ に対し,

$$v \odot w = (v \odot Tu)(Tu \odot w) = (v \odot u)T^*T(u \odot w) \in \mathcal{I} \quad (\forall v, w \in \mathcal{H})$$

であるから, 任意の有限階作用素は $\mathcal{I}$ に属する. $\mathcal{I}$ は閉であり, $B_0(\mathcal{H})$ は有限階作用素全体の閉包であるので $B_0(\mathcal{H}) = \mathcal{I}$ である． □

14.2 von Neumann 環の前双対, 正規状態, 正規準同型写像

定理 14.32. $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環 (定義 10.179), $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ を線型汎関数, $\mathcal{M}_1$ を単位ノルム閉球とする．このとき次は互いに同値である．

(1) φ は σ-WOT (定義 10.167) で連続である．
(2) φ は σ-SOT (定義 10.167) で連続である．
(3) φ の $\mathcal{M}_1$ 上への制限は WOT (定義 10.9) 連続である．
(4) φ の $\mathcal{M}_1$ 上への制限は SOT (定義 10.9) 連続である．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は σ-SOT が σ-WOT より強いことによる．
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す．(2) が成り立つとする．このとき $\{A \in \mathcal{M} : |\varphi(A)| < 1\}$ は $0 \in \mathcal{M}$ の σ-SOT に関する近傍であるから補題 10.171 より $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ で,

$$\{A \in \mathcal{M} : \|(Av_n)_{n\in\mathbb{N}}\| < 1\} \subseteq \{A \in \mathcal{M} : |\varphi(A)| < 1\}$$

を満たすものが取れる．よって,

$$|\varphi(A)| \leqslant \|(Av_n)_{n\in\mathbb{N}}\| \quad (\forall A \in \mathcal{M})$$

が成り立つ．これより Hilbert 空間 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ の部分空間

$$\mathcal{K} := \{(Av_n)_{n\in\mathbb{N}} : A \in \mathcal{M}\}$$

を考えると,

$$\psi : \mathcal{K} \ni (Av_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \varphi(A) \in \mathbb{C}$$

は well-defined な (ノルムが 1 以下の) 有界線型汎関数であるので, Hahn-Banach の拡張定理 3.71 と Riesz の表現定理 3.44 より $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ が取れて,

$$\varphi(A) = \psi((Av_n)_{n\in\mathbb{N}}) = ((Av_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (Av_n \mid u_n) \quad (\forall A \in \mathcal{M})$$

となる．よって φ は σ-WOT 連続であるので (1) が成り立つ．
命題 10.170 の (3) より $\mathcal{M}_1$ 上で σ-WOT と WOT は一致するから (1) $\Rightarrow$ (3) が成り立つ．SOT は WOT より強いので (3) $\Rightarrow$ (4) が成り立つ．
(4) $\Rightarrow$ (1) を示す．(4) が成り立つとする．定理 10.174 より $\mathcal{M}_1$ は SOT で閉なので $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathcal{M}_1$ は SOT 閉である．よって再び定理 10.174 より $\mathrm{Ker}(\varphi)$ は σ-WOT 閉である．ゆえに系 3.78 より φ は σ-WOT 連続である． □

定義 14.33 (von Neumann 環の前双対, 正規汎関数)**.** von Neumann 環 $\mathcal{M}$ に対し,

$$\mathcal{M}_* := \{\varphi \in \mathcal{M}^* : \varphi \text{ は } \sigma\text{-WOT 連続 }\}$$

を $\mathcal{M}$ の前双対と言う．この名称の妥当性は次の定理 14.34 による. $\mathcal{M}_*$ の元を $\mathcal{M}$ 上の正規汎関数と言う．

定理 14.34 (前双対)**.** $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環, $(B^1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ をトレースクラス[*287]とする.

$$\mathcal{M}^\perp := \{T \in B^1(\mathcal{H}) : \mathrm{Tr}(AT) = 0 \ (\forall A \in \mathcal{M})\}$$

なる $B^1(\mathcal{H})$ の閉部分空間に対し, 商 Banach 空間 (定義 3.9) $B^1(\mathcal{H})/\mathcal{M}^\perp$ を考え, 商写像を,

$$B^1(\mathcal{H}) \ni T \mapsto [T] \in B^1(\mathcal{H})/\mathcal{M}^\perp$$

とおく. そして有界双線型汎関数

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M} \times B^1(\mathcal{H})/\mathcal{M}^\perp \ni (A, [T]) \mapsto \mathrm{Tr}(AT) \in \mathbb{C}$$

を定義する. このとき,

(1)
$$\mathcal{M} \ni A \mapsto \langle A, \cdot \rangle \in \left(B^1(\mathcal{H})/\mathcal{M}^\perp\right)^* \tag{14.13}$$

は等長線型同型写像である.

(2)
$$B^1(\mathcal{H})/\mathcal{M}^\perp \ni [T] \mapsto \langle \cdot, [T] \rangle \in \mathcal{M}^* \tag{14.14}$$

は等長線型同型写像である.

(3) $\mathcal{M}_*$ は $\mathcal{M}^*$ の閉部分空間である.

(4) 任意の $A \in \mathcal{M}$ に対し $\iota(A) \in (\mathcal{M}_*)^*$ を,

$$\iota(A) : \mathcal{M}_* \ni \varphi \mapsto \varphi(A) \in \mathbb{C}$$

と定義すると,

$$\iota : \mathcal{M} \ni A \mapsto \iota(A) \in (\mathcal{M}_*)^*$$

は等長線型同型写像である.

証明. (1) 任意の $A \in \mathcal{M}$ と $[T] \in B^1(\mathcal{H})/\mathcal{M}^\perp$ に対し,

$$|\langle A, [T] \rangle| = |\mathrm{Tr}(A(T-S))| \leqslant \|A\|\|T-S\| \ \ (\forall S \in \mathcal{M}^\perp)$$

であるから, 商ノルムの定義 3.5 より,

$$|\langle A, [T] \rangle| \leqslant \|A\|\|[T]\| \tag{14.15}$$

が成り立つので, (14.13) はノルム減少な線型写像である. また任意の $A \in B(\mathcal{H})$ に対し, 定理 10.158 の (6) より,

$$\|A\| = \sup_{T \in B^1(\mathcal{H}), \|T\|_1 \leqslant 1} |\mathrm{Tr}(AT)| = \sup_{T \in B^1(\mathcal{H}), \|T\|_1 \leqslant 1} |\langle A, [T] \rangle| \leqslant \|\langle A, \cdot \rangle\|$$

であるから (14.13) は等長線型写像である. 後は (14.13) が全射であることを示せばよい. そこで任意の $\varphi \in (B^1(\mathcal{H})/\mathcal{M}^\perp)^*$ を取る. このとき,

$$B^1(\mathcal{H}) \ni T \mapsto \varphi([T]) \in \mathbb{C}$$

は有界線型汎関数なので, 定理 10.158 の (6) より $A \in B(\mathcal{H})$ で,

$$\varphi([T]) = \mathrm{Tr}(AT) \ \ (\forall T \in B^1(\mathcal{H}))$$

を満たすものが定まる. もし $A \notin \mathcal{M}$ であるならば, $\mathcal{M}$ が $B(\mathcal{H})$ の σ-WOT 閉部分空間であることから, σ-WOT の定義 10.167 と Hahn-Banach の分離定理 3.77 より $T \in B^1(\mathcal{H})$ と $t \in \mathbb{R}$ で,

$$\mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(AT)) < t \leqslant \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(BT)) \ \ (\forall B \in \mathcal{M})$$

[*287] 命題 10.157 よりトレースクラスは Banach 空間である.

を満たすものが取れる. $\mathcal{M}$ の線型性よりこれは,

$$\mathrm{Tr}(AT) \neq 0, \quad T \in \mathcal{M}^{\perp}$$

を意味するが, $T \in \mathcal{M}^{\perp}$ より $[T] = 0 \in B^1(\mathcal{H})/\mathcal{M}^{\perp}$ であり, 従って $\mathrm{Tr}(AT) = \varphi([T]) = \varphi(0) = 0$ となり矛盾する. よって $A \in \mathcal{M}$ である. ゆえに,

$$\varphi([T]) = \mathrm{Tr}(AT) = \langle A, [T] \rangle \ \ (\forall [T] \in B^1(\mathcal{H})/\mathcal{M}^{\perp})$$

であるので, (14.13) は全射である.

(2) (14.14) が全射線型写像であることは σ-WOT の定義 10.167 より明らかである. (14.14) が等長であることを示せばよい. まず (14.15) より (14.14) はノルム減少である. 任意の $[T] \in B^1(\mathcal{H})/\mathcal{M}^{\perp}$ に対し Hahn-Banach の拡張定理 3.72 と (1) より $A \in \mathcal{M}$ で,

$$\|A\| \leqslant 1, \quad \|[T]\| = |\langle A, [T] \rangle|$$

を満たすものが存在する. よって,

$$\|[T]\| = |\langle A, [T] \rangle| \leqslant \|A\| \|\langle \cdot, [T] \rangle\| \leqslant \|\langle \cdot, [T] \rangle\| \leqslant \|[T]\|$$

であるから (14.14) は等長である.

(3) (2) より $\mathcal{M}_*$ は Banach 空間 $B^1(\mathcal{H})/\mathcal{M}^{\perp}$ と等長線型同型であるから Banach 空間である. ゆえに $\mathcal{M}_*$ は $\mathcal{M}^*$ の閉部分空間である.

(4) (1), (2) より明らかである.

□

定義 14.35 (von Neumann 環上の正規非負線型汎関数, 正規状態)**.** $\mathcal{M}$ を von Neumann 環, $\mathcal{M}_*$ を $\mathcal{M}$ の前双対 (定義 14.33), $\mathcal{M}_+^*, S(\mathcal{M})$ を C^*-環 $\mathcal{M}$ 上の非負線型汎関数全体と状態全体 (定義 14.25) とする.

$$\mathcal{M}_{*,+} := \mathcal{M}_* \cap \mathcal{M}_+^*, \quad NS(\mathcal{M}) := \mathcal{M}_* \cap S(\mathcal{M})$$

とおき, $\mathcal{M}_{*,+}$ の元を $\mathcal{M}$ 上の正規非負線型汎関数, $NS(\mathcal{M})$ の元を $\mathcal{M}$ 上の正規状態と言う.

命題 14.36. $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環とする.

$$\mathcal{M}_* = \mathrm{span}(NS(\mathcal{M}))$$

が成り立つ.

証明. σ-WOT の定義 10.167 より任意の $\varphi \in \mathcal{M}_*$ に対し $T \in B^1(\mathcal{H})$ で,

$$\varphi(A) = \mathrm{Tr}(AT) \ \ (\forall A \in \mathcal{M})$$

を満たすものが取れる. 命題 10.147 より $T \in B^1(\mathcal{H})$ は $B^1(\mathcal{H})_+ = B^1(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})_+$ の元の線型結合で表せる. そして任意の $S \in B^1(\mathcal{H})_+$ に対し, 定理 10.158 より $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \odot v_n$ なる $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{n \in N} \mathcal{H}$ が取れて,

$$\mathrm{Tr}(AS) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Tr}(A(v_n \odot v_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (Av_n \mid v_n) \geqslant 0 \ \ (\forall A \in \mathcal{M}_+)$$

となるので, $\mathcal{M} \ni A \mapsto \mathrm{Tr}(AS) \in \mathbb{C}$ は $\mathcal{M}_{*,+}$ の元である. よって $\mathcal{M}_*$ は $\mathcal{M}_{*,+}$ の元の線型結合で表せるので, $NS(\mathcal{M})$ の元の線型結合で表せる. □

定理 14.37 (正規非負線型汎関数に対する密度行列)**.** $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環とする. 任意の $\varphi \in \mathcal{M}_{*,+}$ に対し $T \in B^1(\mathcal{H})_+ = B^1(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})_+$ で,

$$\varphi(A) = \mathrm{Tr}(AT) \ \ (\forall A \in \mathcal{M})$$

を満たすものが存在する.

証明. φ は σ-WOT 連続な線型汎関数であるから σ-WOT の定義 10.167 より $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}$ で,

$$\varphi(A)=\sum_{n\in\mathbb{N}}(Au_n\mid v_n)\ \ (\forall A\in\mathcal{M})$$

を満たすものが取れる. 直和 Hilbert 空間 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}$ 上への C^*-環 $\mathcal{M}$ の表現

$$\pi:\mathcal{M}\to B\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}\right),\ \ \pi(A)(w_n)_{n\in\mathbb{N}}:=(Aw_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \ \left(\forall A\in\mathcal{M},\forall(w_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}\right)$$

を考えると,

$$\varphi(A)=\sum_{n\in\mathbb{N}}(Au_n\mid v_n)=(\pi(A)u\mid v)\ \ (\forall A\in\mathcal{M})$$

と表せる.

$$w:=\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)\in\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\|\pi(A)w\|^2=(\pi(A)w\mid\pi(A)w)&=\frac{1}{2}(\pi(A)(u+v)\mid\pi(A)(u+v))\\&=\frac{1}{2}(\|\pi(A)u\|^2+\|\pi(A)v\|^2+2\mathrm{Re}(\pi(A)u\mid\pi(A)v))\\&\geqslant\mathrm{Re}(\pi(A)u\mid\pi(A)v)=\varphi(A^*A)\ \ (\forall A\in\mathcal{M})\end{aligned}$$

であるから, 命題 14.19 より,

$$\pi(\mathcal{M})w\times\pi(\mathcal{M})w\ni(\pi(A)w,\pi(B)w)\mapsto\varphi(B^*A)\in\mathbb{C}$$

は well-defined な有界準双線型汎関数である. よってこれは Hilbert 空間

$$\mathcal{K}:=\overline{\pi(\mathcal{M})w}\subseteq\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}\tag{14.16}$$

に対し $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ 上の有界準双線型汎関数に一意拡張できる[*288]から, 定理 3.49 より $S\in B(\mathcal{K})$ で,

$$\varphi(B^*A)=(S\pi(A)w\mid\pi(B)w)\ \ (\forall A,B\in\mathcal{M})$$

を満たすものが定まる.

$$(S\pi(A)w\mid\pi(A)w)=\varphi(A^*A)\geqslant 0\ \ (\forall A\in\mathcal{M})$$

より $S\in B(\mathcal{K})_+$ であり,

$$\begin{aligned}(S\pi(A)\pi(B)w\mid\pi(C)w)=\varphi(C^*AB)=\varphi((A^*C)^*B)&=(S\pi(B)w\mid\pi(A^*C)w)\\&=(\pi(A)S\pi(B)w\mid\pi(C)w)\ \ (\forall A,B,C\in\mathcal{M})\end{aligned}$$

より,

$$S\pi(A)v=\pi(A)Sv\ \ (\forall A\in\mathcal{M},\forall v\in\mathcal{K})$$

である. (14.16) より $\mathcal{K}$ は π 不変な閉部分空間であるので, π の $\mathcal{K}$ 上への制限を $\pi|_{\mathcal{K}}$ とおくと, $S\in(\pi|_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}))'_+$ である. 連続関数カルキュラスより $\sqrt{S}\in(\pi|_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}))'$ であるから,

$$\varphi(A)=(S\pi(A)w\mid w)=(\pi(A)\sqrt{S}w\mid\sqrt{S}w)\ \ (\forall A\in\mathcal{M})\tag{14.17}$$

となる. そこで,

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}:=\sqrt{S}w\in\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}$$

[*288] 命題 3.19 と全く同様にして考える.

とおき,

$$T := \sum_{n\in\mathbb{N}} z_n \odot z_n \in B^1(\mathcal{H})_+ \quad (\odot \text{ は Schatten 形式 })$$

とおけば, (14.17) より,

$$\varphi(A) = (\pi(A)\sqrt{S}w \mid \sqrt{S}w) = (\pi(A)z \mid z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (Az_n \mid z_n) = \mathrm{Tr}(AT) \quad (\forall A \in \mathcal{M})$$

となる. □

注意 14.38. $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環とする. $\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}$ のノルム有界な単調増加ネット $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し, 定理 10.14 より,

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \text{SOT-}\lim_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$$

が存在する. von Neumann 環の定義 10.179 より $\mathcal{M}$ は SOT 閉であるから,

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \text{SOT-}\lim_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathcal{M}_{\mathrm{sa}}$$

である. また $(P_j)_{j\in J}$ を $\mathcal{M}$ の射影の直交族とすると, その和 (定義 10.16)

$$\sum_{j\in J} P_j = \text{SOT-}\lim_{F\to J} \sum_{j\in F} P_j$$

は ($F \subseteq J$ は有限集合) は $\mathcal{M}$ の射影である.

定理 14.39 (正規非負線型汎関数の特徴付け)**.** $\mathcal{M}$ を von Neumann 環とし, $\varphi \in \mathcal{M}^*_+$ とする. このとき次は互いに同値である.

(1) $\varphi \in \mathcal{M}_{*,+}$.
(2) $\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}$ のノルム有界な任意の単調増加ネット $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し, $\varphi(\sup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \varphi(A_\lambda)$ が成り立つ.
(3) $\mathcal{M}$ の任意の射影の直交族 $(P_j)_{j\in J}$ に対し $\varphi(\sum_{j\in J} P_j) = \sum_{j\in J} \varphi(P_j)$ が成り立つ.

証明. (1) ⇒ (2) ⇒ (3) は定理 14.32 と注意 14.38 による.
(3) ⇒ (1) を示す. (3) が成り立つとする. $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ を $\mathcal{M}$ の射影全体とし, 任意の $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ に対し, $\varphi \cdot P \in \mathcal{M}^*$ を,

$$(\varphi \cdot P)(A) := \varphi(AP) \quad (\forall A \in \mathcal{M})$$

と定義する.

$$\mathcal{P}_1 := \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) : \varphi \cdot P \in \mathcal{M}_*\}$$

($0 \in \mathcal{P}_1$ だから $\mathcal{P}_1 \neq \varnothing$) とおく. Zorn の補題 1.12 より $\mathcal{P}_1$ の元からなる直交族で集合の包含関係に関して極大なもの $\{P_j\}_{j\in J}$ が取れる.

$$P_1 = \sum_{j\in J} P_j \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$$

とおく. 任意の有限集合 $F \subseteq J$ に対し命題 14.19 より,

$$\begin{aligned}
&\left|(\varphi \cdot P_1)(A) - \left(\varphi \cdot \sum_{j\in F} P_j\right)(A)\right|^2 = \left|\varphi\left(A\left(P_1 - \sum_{j\in F} P_j\right)\right)\right|^2 \\
&\leqslant \varphi(AA^*)\varphi\left(P_1 - \sum_{j\in F} P_j\right) \leqslant \|\varphi\| \left(\varphi(P_1) - \sum_{j\in F}\varphi(P_j)\right) \|A\|^2 \quad (\forall A \in \mathcal{M})
\end{aligned}$$

であるから,

$$\left\|\varphi \cdot P_1 - \varphi \cdot \sum_{j\in F} P_j\right\|^2 \leqslant \|\varphi\| \left|\varphi(P_1) - \sum_{j\in F}\varphi(P_j)\right|$$

であり, (3) が成り立つと言う仮定より右辺は $F \to J$ で 0 に収束するので,

$$\left\|\varphi \cdot P_1 - \varphi \cdot \sum_{j \in F} P_j\right\| \to 0 \ \ (F \to J) \tag{14.18}$$

が成り立つ. 任意の有限集合 $F \subseteq J$ に対し,

$$\varphi \cdot \sum_{j \in F} P_j = \sum_{j \in F} \varphi \cdot P_j \in \mathcal{M}_*$$

であり, 定理 14.34 の (3) より $\mathcal{M}_*$ は $\mathcal{M}^*$ の閉部分空間であるから, (14.18) より,

$$\varphi \cdot P_1 = \lim_{F \to J} \varphi \cdot \sum_{j \in F} P_j \in \mathcal{M}_*$$

が成り立つ. よって $P_1 = 1$ が成り立つことを示せば証明は終わる. そこで $P_1 < 1$ であると仮定して矛盾を導く. このとき $1 - P_1 > 0$ だから $\psi \in \mathcal{M}_{*,+}$ で,

$$\varphi(1 - P_1) < \psi(1 - P_1) \tag{14.19}$$

を満たすものが取れる.*[289]

$$\mathcal{P}_2 := \{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) : Q \leqslant 1 - P_1, \psi(Q) \leqslant \varphi(Q)\}$$

($0 \in \mathcal{P}_2$ だから $\mathcal{P}_2 \neq \varnothing$) とおく. Zorn の補題 1.12 より $\mathcal{P}_2$ の元からなる射影の直交族で極大なもの $\{Q_i\}_{i \in I}$ が取れる.

$$P_2 := \sum_{i \in I} Q_i \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$$

とおけば $P_2 \leqslant 1 - P_1$ であり, (3) が成り立つと言う仮定と $\psi \in \mathcal{M}_{*,+}$ より,

$$\psi(P_2) = \sum_{i \in I} \psi(Q_i) \leqslant \sum_{i \in I} \varphi(Q_i) = \varphi(P_2)$$

であるから $P_2 \in \mathcal{P}_2$ である. (14.18) より $1 - P_1 \notin \mathcal{P}_2$ であるから $P_2 < 1 - P_1$ なので,

$$P_3 := 1 - P_1 - P_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), \quad P_3 > 0$$

である. $P \leqslant P_3$ なる任意の $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ に対し $P \leqslant 1 - P_1$ かつ $P \leqslant 1 - P_2 = 1 - \sum_{i \in I} Q_i$ なので $\{Q_i\}$ の極大性より $\varphi(P) \leqslant \psi(P)$ となり, 定理 10.186 の (2) より,

$$P_3 \mathcal{M}_+ P_3 = \overline{\mathrm{span}_+\{P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) : P \leqslant P_3\}}$$

であるから,

$$\varphi(P_3 A P_3) \leqslant \psi(P_3 A P_3) \ \ (\forall A \in \mathcal{M}_+)$$

が成り立つ. よって命題 14.19 より,

$$|(\varphi \cdot P_3)(A)|^2 = |\varphi(AP_3)|^2 \leqslant \varphi(1)\varphi(P_3 A^* A P_3) \leqslant \|\varphi\| \psi(P_3 A^* A P_3) \ \ (\forall A \in \mathcal{M}) \tag{14.20}$$

が成り立つ. $\mathcal{M}$ のネット $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が $A \in \mathcal{M}$ に σ-SOT で収束するとすると,

$$P_3(A_\lambda - A)^*(A_\lambda - A)P_3 \to 0 \ \ (\text{in } \sigma\text{-WOT})$$

であるから, $\psi \in \mathcal{M}_*$ であることと (14.20) より,

$$|(\varphi \cdot P_3)(A_\lambda) - (\varphi \cdot P_3)(A)|^2 = |(\varphi \cdot P_3)(A_\lambda - A)|^2 \leqslant \|\varphi\| \psi(P_3(A_\lambda - A)^*(A_\lambda - A)P_3) \to 0$$

が成り立つ. ゆえに $\varphi \cdot P_3 : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ は σ-SOT で連続な線型汎関数であるから, 定理 14.32 より $\varphi \cdot P_3 \in \mathcal{M}_*$, 従って $P_3 \in \mathcal{P}_1$ である. しかし $0 < P_3 \leqslant 1 - P_1 = 1 - \sum_{j \in J} P_j$ であるから, $P_3 \in \mathcal{P}_1$ であることは $\{P_j\}_{j \in J}$ が $\mathcal{P}_1$ の極大な直交族であることと矛盾する. ゆえに $P_1 = 1$ であるから $\varphi \in \mathcal{M}_{*,+}$ が成り立つ. □

*[289] $(1 - P_1)v \neq 0$ なる $v \in \mathcal{H}$ を取り $\omega_v(A) := (Av \mid v)$ $(\forall A \in \mathcal{M})$ とおけば $\omega_v \in \mathcal{M}_{*,+}$ であり $\omega_v(1 - P_1) > 0$ であることに注意.

定義 14.40 (正規準同型写像, 正規表現)**.** $\mathcal{M},\mathcal{N}$ を von Neumann 環, $\pi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ を $*$-環準同型写像とする. π が $\mathcal{M},\mathcal{N}$ の σ-WOT に関して連続であるとき, $\pi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ を正規準同型写像と言う. von Neumann 環 $\mathcal{M}$ の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上への表現[*290] $\pi:\mathcal{M}\to B(\mathcal{H})$ が正規準同型写像であるとき, π を $\mathcal{M}$ の $\mathcal{H}$ 上への正規表現と言う.

定理 14.41 (正規準同型写像の特徴付け)**.** $\mathcal{M},\mathcal{N}$ を von Neumann 環, $\pi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ を $*$-環準同型写像とする. また $\mathcal{M}_1$ を $\mathcal{M}$ の単位ノルム閉球とする. このとき次は互いに同値である.

(1) π は正規準同型写像 (定義 14.40) である.
(2) 任意の $\psi\in\mathcal{N}_*$ に対し $\psi\circ\pi:\mathcal{M}\ni A\mapsto\psi(\pi(A))\in\mathbb{C}$ は $\mathcal{M}_*$ に属する.
(3) π は $\mathcal{M},\mathcal{N}$ の σ-SOT に関して連続である.
(4) $\mathcal{M}_1\ni A\mapsto\pi(A)\in\mathcal{N}$ は $\mathcal{M},\mathcal{N}$ の WOT に関して連続である.
(5) $\mathcal{M}_1\ni A\mapsto\pi(A)\in\mathcal{N}$ は $\mathcal{M},\mathcal{N}$ の SOT に関して連続である.
(6) $\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}$ のノルム有界な任意の単調増加ネット $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し $\pi(\sup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\sup_{\lambda\in\Lambda}\pi(A_\lambda)$ が成り立つ.
(7) $\mathcal{M}$ の任意の射影の直交族 $(P_j)_{j\in J}$ に対し $\pi(\sum_{j\in J}P_j)=\sum_{j\in J}\pi(P_j)$ が成り立つ.

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2) は前双対の定義 14.33 と σ-WOT の定義 10.167 より明らかである.
σ-WOT, σ-SOT の定義 10.167 より, $\mathcal{M}$ のネット $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $A\in\mathcal{M}$ に対し,

$$A_\lambda\to A\ \ (\text{in }\sigma\text{-SOT})\quad\Leftrightarrow\quad (A_\lambda-A)^*(A_\lambda-A)\to 0\ \ (\text{in }\sigma\text{-WOT})\tag{14.21}$$

であるから, π の $*$-環準同型性とネットによる連続性の特徴付け (命題 1.50) より (1) $\Rightarrow$ (3) が成り立つ.
(3) $\Rightarrow$ (2) は定理 14.32 による.
(1) $\Rightarrow$ (4) は $\mathcal{M}_1$ 上で σ-WOT と WOT が一致すること (命題 10.170 の (3)) による.
WOT, SOT の定義 10.9 より (14.21) は σ-WOT と σ-SOT をそれぞれ WOT, SOT に置き換えても成り立つので (4) $\Rightarrow$ (5) が成り立つ.
(5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7) は注意 14.38 で述べたことによる.
$\mathcal{N}_*$ の元が $\mathcal{N}_{*,+}$ の元の線型結合で表せること (命題 14.36) と定理 14.39 より (7) $\Rightarrow$ (2) が成り立つ. □

系 14.42. $\mathcal{M},\mathcal{N}$ を von Neumann 環, $\pi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ を $*$-環同型写像とする. このとき π は正規である. また,

$$\mathcal{N}_*\ni\psi\mapsto\psi\circ\pi\in\mathcal{M}_*\tag{14.22}$$

は等長線型同型写像である.

証明. π は $*$-環同型写像であるから定理 14.41 の (6) の条件を満たすので正規である. (14.22) が等長線型同型写像であることは C^*-環の単射 $*$-環準同型写像がノルムを保存する (定理 9.79) ことによる. □

定義 14.43 (von Neumann 環の中心, 中心射影)**.** $\mathcal{M}\subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環とする. $\mathcal{M}$ の可換子環 $\mathcal{M}'\subseteq B(\mathcal{H})$ と $\mathcal{M}$ の交叉によって表される可換 von Neumann 環

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}):=\mathcal{M}\cap\mathcal{M}'=\{A\in\mathcal{M}:AB=BA\ (\forall B\in\mathcal{M})\}$$

を $\mathcal{M}$ の中心と言う. また von Neumann 環 $\mathcal{Z}(M)$ の射影のことを $\mathcal{M}$ の中心射影と言う.

定理 14.44 (von Neumann 環の中心射影と弱閉イデアルの一対一対応)**.** $\mathcal{M}$ を von Neumann 環, $\mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$ を $\mathcal{M}$ の中心射影全体とする. このとき,

$$\mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))\ni Z\mapsto\mathcal{M}Z\in\{\mathcal{M}\text{ の }\sigma\text{-WOT 閉イデアル }\}\tag{14.23}$$

は全単射である.

証明. 任意の $Z\in\mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$ に対し $\mathcal{M}Z$ が $\mathcal{M}$ の σ-WOT 閉イデアルであることは明らかである. $Z_1,Z_2\in\mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$ が $\mathcal{M}Z_1=\mathcal{M}Z_2$ を満たすとすると, $Z_1\in\mathcal{M}Z_2$, $Z_2\in\mathcal{M}Z_1$ であるから $Z_1=Z_1Z_2=Z_2Z_1=Z_2$ である. よって

[*290] C^*-環の表現の定義 14.1 を参照. 非退化性 (14.1) より $\pi:\mathcal{M}\to B(\mathcal{H})$ は単位的である (単位元を単位元に写す) ことに注意.

(14.23) は単射である. $\mathcal{M}$ の任意の σ-WOT 閉 (従って特にノルム閉) イデアル $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$ を取る. 定理 9.71 より $\mathcal{I}$ は $*$-演算で閉じているので C^*-環である. よって定理 9.70 より $\mathcal{I}$ の近似単位元で $\mathcal{I}_+$ の単調増加ネットであるもの $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が取れる. 定理 10.14 より $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は σ-WOT 収束し[*291], $\mathcal{I}$ は σ-WOT 閉であるので $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の σ-WOT 収束点 Z は $\mathcal{I}$ に属する. よって Z は $\mathcal{I}$ の単位元であり, $\mathcal{I}$ が $\mathcal{M}$ のイデアルであることから $\mathcal{I} = \mathcal{M}Z = Z\mathcal{M}$ である. 任意の $A \in \mathcal{M}$ に対し $AZ \in \mathcal{M}Z = \mathcal{I}, ZA \in Z\mathcal{M} = \mathcal{I}$ であり Z は $\mathcal{I}$ の単位元であるから $AZ = ZAZ = ZA$ である. よって $Z \in Z(\mathcal{M})$ である. Z は $\mathcal{I}$ の単位元なので $Z^* = Z, Z^2 = Z$ である. ゆえに $Z \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$ である. □

定理 14.45 (自動的弱閉性)**.** $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ を von Neumann 環, $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ を正規準同型写像とする. このとき $\pi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{N}$ は σ-WOT(σ-SOT, WOT, SOT) 閉である. 特に von Neumann 環の正規表現による像は von Neumann 環である.

証明. 定理 10.174 より $\pi(\mathcal{M})$ の単位ノルム閉球 $(\pi(\mathcal{M}))_1$ が σ-WOT コンパクトであることを示せば十分である. $\mathcal{M}$ の単位ノルム閉球 $\mathcal{M}_1$ は σ-WOT コンパクトであるから π の正規性より $\pi(\mathcal{M}_1)$ は σ-WOT コンパクトである. よって $(\pi(\mathcal{M}))_1 = \pi(\mathcal{M}_1)$ を示せば十分である. $\mathrm{Ker}(\pi)$ は $\mathcal{M}$ の σ-WOT 閉イデアルであるから, 定理 14.44 より中心射影 $Z \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$ で $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathcal{M}Z$ なるものが取れる. このとき π の C^*-環 $\mathcal{M}(1-Z)$ への制限は単射 $*$-環準同型写像であるので, 定理 9.79 よりノルムを保存する. よって,

$$(\pi(\mathcal{M}))_1 = (\pi(\mathcal{M}(1-Z)))_1 = \pi((\mathcal{M}(1-Z))_1) \subseteq \pi(\mathcal{M}_1) \subseteq \pi(\mathcal{M})_1$$

であるから $(\pi(\mathcal{M}))_1 = \pi(\mathcal{M}_1)$ である.
π が von Neumann 環の正規表現の場合は非退化性 (定義 14.1 の (14.1)) より $\pi(1) = 1 \in B(\mathcal{H}_\pi)$ であるから $\pi(\mathcal{M})$ は $\mathcal{H}_\pi$ 上の von Neumann 環である. □

命題 14.46 (正規非負線型汎関数の GNS 表現の正規性)**.** $\mathcal{M}$ を von Neumann 環, $\varphi \in \mathcal{M}_{*,+}\backslash\{0\}$ とし, (π, v) を φ に対する GNS 表現 (定義 14.21) とする. このとき π は正規である.

証明. $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ を $\mathcal{M}$ の射影全体, $(P_j)_{j\in J}$ を $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ の元からなる任意の直交族とし, $P := \sum_{j\in J} P_j \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ とおく. 任意の $B, C \in \mathcal{M}$ に対し $\mathcal{M} \ni A \mapsto \varphi(C^*AB) \in \mathbb{C}$ は正規だから,

$$(\pi(P)\pi(B)v \mid \pi(C)v) = \varphi(C^*PB) = \sum_{j\in J}\varphi(C^*P_jB) = \sum_{j\in J}(\pi(P_j)\pi(B)v \mid \pi(C)v) = \left(\sum_{j\in J}\pi(P_j)\pi(B)v \mid \pi(C)v\right)$$

である. よって $\overline{\pi(\mathcal{M})v} = \mathcal{H}_\pi$ より,

$$\pi(P) = \sum_{j\in J}\pi(P_j)$$

が成り立つので, 定理 14.41 より π は正規である. □

定義 14.47 (因子環)**.** von Neumann 環 $\mathcal{M}$ が因子環であるとは, その中心が,

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}1$$

であることを言う.

命題 14.48 (因子環の特徴付け)**.** $\mathcal{M}$ を von Neumann 環とする. このとき次は互いに同値である.

(1) $\mathcal{M}$ は因子環である.
(2) $\mathcal{M}$ の σ-WOT 閉イデアルが $\mathcal{M}$ と $\{0\}$ のみである.
(3) $\mathcal{M}$ の任意の正規表現が忠実 (定義 14.2) である.

証明. (1) ⇒ (2) は定理 14.44 による.
(2) ⇒ (3) を示す. (2) が成り立つとする. π を $\mathcal{M}$ の正規表現とすると $\mathrm{Ker}(\pi)$ は $\mathcal{M}$ の σ-WOT 閉イデアルであるから $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathcal{M}$ か $\mathrm{Ker}(\pi) = \{0\}$ であり, π は 0 ではない[*292]から $\mathrm{Ker}(\pi) = \{0\}$ である. ゆえに π は忠実である.

[*291] 定理 10.170 の (3) より $\mathcal{M}_1$ においては WOT と σ-WOT が一致することに注意.
[*292] 定義 14.1 より C^*-環の表現は非退化 ((14.1) を満たす) としていることに注意.

(3) ⇒ (1) を示す．(3) が成り立つとする．中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ は von Neumann 環であるから，定理 10.186 より，

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \overline{\operatorname{span}\mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))}$$

である．よって (1) が成り立つことを示すには中心射影全体が，

$$\mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M})) = \{0, 1\} \tag{14.24}$$

であることを示せばよい．任意の $Z \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))\backslash\{0\}$ を取る．

$$Av = AZv = ZAv \in \mathrm{Ran}(Z) \quad (\forall A \in \mathcal{M}, \forall v \in \mathrm{Ran}(Z))$$

であるから，

$$\pi : \mathcal{M} \ni A \mapsto A|_{\mathrm{Ran}(Z)} \in B(\mathrm{Ran}(Z))$$

($A|_{\mathrm{Ran}(Z)}$ は A の $\mathrm{Ran}(Z)$ 上への制限) として $\mathcal{M}$ の $\mathrm{Ran}(Z)$ 上への表現が定義でき，π は明らかに正規である．$\pi(Z) = \pi(1)$ であり，(3) が成り立つと言う仮定より π は忠実なので $Z = 1$ である．よって (14.24) が成り立つ．□

定義 14.49 (von Neumann 環の射影による縮小と誘導)**.** $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環とする．任意の $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})\backslash\{0\}$ に対し定理 10.186 の (2) の証明で述べたように $P\mathcal{M}P$ は $\mathcal{M}$ の σ-WOT 閉部分 $*$-環であり，

$$P\mathcal{M}P \ni PAP \mapsto PA|_{\mathrm{Ran}(P)} \in B(\mathrm{Ran}(P))$$

は等長 $*$-環準同型写像で，σ-WOT に関して像の上への同相写像である．よって，

$$\mathcal{M}_P := \{PA|_{\mathrm{Ran}(P)} : A \in \mathcal{M}\} \subseteq B(\mathrm{Ran}(P))$$

は $B(\mathrm{Ran}(P))$ の単位元を含む σ-WOT 閉部分 $*$-環なので Hilbert 空間 $\mathrm{Ran}(P)$ 上の von Neumann 環である．$\mathcal{M}_P$ を $\mathcal{M}$ の P による縮小 von Neumann 環と言う．
また任意の $P' \in \mathcal{P}(\mathcal{M}')\backslash\{0\}$ に対し，

$$\mathcal{M} \ni A \mapsto A|_{\mathrm{Ran}(P')} \in B(\mathrm{Ran}(P'))$$

は $\mathcal{M}$ の Hilbert 空間 $\mathrm{Ran}(P')$ 上への正規表現である．よって定理 14.45 より，

$$\mathcal{M}_{P'} := \{A|_{\mathrm{Ran}(P')} : A \in \mathcal{M}\} \subseteq B(\mathrm{Ran}(P'))$$

は $\mathrm{Ran}(P')$ 上の von Neumann 環である．$\mathcal{M}_{P'}$ を $\mathcal{M}$ の P' による誘導 von Neumann 環と言う．

定理 14.50 (縮小 von Neumann 環の可換子環)**.** $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環とし，$P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})\backslash\{0\}$ とする．このとき P による $\mathcal{M}$ の縮小 von Neumann 環 $\mathcal{M}_P \subseteq B(\mathrm{Ran}(P))$ と，P による $\mathcal{M}'$ の誘導 von Neumann 環 $\mathcal{M}'_P \subseteq B(\mathrm{Ran}(P))$ に関して，

$$(\mathcal{M}_P)' = \mathcal{M}'_P$$

が成り立つ．

証明. 任意の $A \in \mathcal{M}, A' \in \mathcal{M}'$ に対し，

$$(A'P)(PAP) = A'(PAP) = (PAP)A' = (PAP)(A'P)$$

であるから $\mathcal{M}'_P \subseteq (\mathcal{M}_P)'$ が成り立つ．そして $\mathcal{M}_P \subseteq B(\mathrm{Ran}(P))$ は von Neumann 環なので $\mathcal{M}_P = (\mathcal{M}_P)''$ であるから，

$$\mathcal{M}_P = (\mathcal{M}_P)'' \subseteq (\mathcal{M}'_P)' \tag{14.25}$$

が成り立つ．この逆の包含関係を示せばよい．任意の $B \in (\mathcal{M}'_P)' \subseteq B(\mathrm{Ran}(P))$ を取る．自然に $BP \in B(\mathcal{H})$ とみなす．任意の $A' \in \mathcal{M}'$ に対し，

$$(BP)A' = B(A'P) = (A'P)(BP) = A'(BP)$$

であるから $BP \in \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$ である．よって $B = P(BP)|_{\mathrm{Ran}(P)} \in \mathcal{M}_P$ であるから (14.25) の逆の包含関係が成り立つ．□

14.3 von Neumann 環の σ-有限性と可分性, 忠実正規非負線型汎関数, 巡回分離ベクトル

定義 14.51 (von Neumann 環の σ-有限性)**.** von Neumann 環 $\mathcal{M}$ が σ-有限であるとは, $\mathcal{M}$ の 0 ではない射影からなる任意の直交族が高々可算であることを言う.

定義 14.52 (非負線型汎関数の忠実性)**.** $\mathcal{A}$ を C^*-環とする. $\varphi \in \mathcal{A}_+^*$ が忠実であるとは,

$$\{A \in \mathcal{A} : \varphi(A^*A) = 0\} = \{0\}$$

が成り立つことを言う.

定理 14.53 (von Neumann 環の σ-有限性と忠実正規状態の存在)**.** von Neumann 環 $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ に対し, 次は互いに同値である.

(1) $\mathcal{M}$ は σ-有限である.
(2) $\mathcal{M}$ は忠実正規状態を持つ.

証明. (2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとする. φ を $\mathcal{M}$ の忠実正規状態とし, $\{P_j\}_{j\in J}$ を $\mathcal{M}$ の 0 ではない射影からなる任意の直交族とする. φ の正規性より,

$$\sum_{j\in J}\varphi(P_j) = \varphi\left(\sum_{j\in J}P_j\right) < \infty$$

であるから, 命題 3.27 より,

$$J_0 = \{j \in J : \varphi(P_j) \neq 0\}$$

は可算集合である. φ は忠実であり, 任意の $j \in J$ に対し P_j は 0 ではない $\mathcal{M}$ の射影であるから $\varphi(P_j) > 0$ である. よって $J = J_0$ だから $\{P_j\}_{j\in J}$ は可算である. ゆえに $\mathcal{M}$ は σ-有限である.
(1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. 任意の単位ベクトル $u \in \mathcal{H}$ に対し閉部分空間 $\overline{\mathcal{M}'u}$ の上への射影作用素を $P_u \in B(\mathcal{H})$ とおく. $\mathrm{Ran}(P_u) = \overline{\mathcal{M}'u}$ は $\mathcal{M}'$ の作用によって不変であるから $P_u \in \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$ であり, $u \in \mathrm{Ran}(P_u)$ より $P_u > 0$ である. Zorn の補題 1.12 より,

$$\{P_u \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) : u \in \mathcal{H}, \|u\| = 1\}$$

の元からなる直交族で集合の包含関係に関して極大なものが存在する. それを $\{P_{u_j}\}_{j\in J}$ とおく. このとき,

$$\sum_{j\in J}P_{u_j} = 1 \tag{14.26}$$

が成り立つことを示す. もし $\sum_{j\in J}P_{u_j} < 1$ ならば $P := 1 - \sum_{j\in J}P_{u_j}$ とおけば P は $\mathcal{M}$ の 0 ではない射影であるから, 単位ベクトル $u \in \mathrm{Ran}(P)$ を取れば,

$$\mathrm{Ran}(P_u) = \overline{\mathcal{M}'u} = \overline{\mathcal{M}'Pu} \subseteq \mathrm{Ran}(P),$$

従って,

$$P_u \leqslant P = 1 - \sum_{j\in J}P_{u_j}$$

となる. よって P_u は各 P_{u_j} と直交するので $\{P_{u_j}\}_{j\in J}$ の極大性に矛盾する. ゆえに (14.26) が成り立つ. $\mathcal{M}$ は σ-有限であるから J は高々可算なので, 正数の族 $(c_j)_{j\in J}$ で,

$$\sum_{j\in J}c_j < \infty$$

なるものが取れる. 定理 10.158 より,

$$\sum_{j\in J}c_j\|u_j \odot u_j\|_1 = \sum_{j\in J}c_j\|u_j\|^2 = \sum_{j\in J}c_j < \infty$$

であるから, $\sum_{j\in J} c_j(u_j \odot u_j)$ はトレースクラス $(B^1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ において絶対収束する．よって,

$$\varphi(A) = \mathrm{Tr}\left(A\left(\sum_{j\in J} c_j(u_j \odot u_j)\right)\right) = \sum_{j\in J} c_j \mathrm{Tr}(Au_j \odot u_j) = \sum_{j\in J} c_j(Au_j \mid u_j) \quad (\forall A \in \mathcal{M})$$

として $\varphi \in \mathcal{M}_*$ が定義できる．

$$\varphi(A^*A) = \sum_{j\in J} c_j\|Au_j\|^2 \geqslant 0 \quad (\forall A \in \mathcal{M}) \tag{14.27}$$

であるから $\varphi \in \mathcal{M}_{*,+}$ であり, $A \in \mathcal{M}$ が $\varphi(A^*A) = 0$ を満たすならば (14.27) より任意の $j \in J$ に対し $Au_j = 0$ であるから $A\overline{\mathcal{M}'u_j} = \{0\}$, 従って $AP_{u_j} = 0$ である．よって (14.26) より $A = \sum_{j\in J} AP_{u_j} = 0$ であるから $\varphi \in \mathcal{M}_{*,+}$ は忠実である． □

定義 14.54 (von Neumann 環の可分性)**.** $\mathcal{M}$ を von Neumann 環とする．$\mathcal{M}$ の前双対 $\mathcal{M}_*$ が可分であるとき, $\mathcal{M}$ は可分であると言う．

命題 14.55. 可分な von Neumann 環は σ-有限である．

証明. $\mathcal{M}$ を可分な von Neumann 環とする．このとき Banach 空間 $\mathcal{M}_*$ は可分であるから, 距離空間における可分と第二可算の同値性 (命題 1.108) より正規状態全体 $NS(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}_*$ も可分である．よって $NS(\mathcal{M})$ の稠密な可算部分集合 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が取れる．そこで,

$$\varphi := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\varphi_n \in NS(\mathcal{M})$$

とおく.[*293] φ が忠実正規状態であることを示す．$A \in \mathcal{M}$ が $\varphi(A^*A) = 0$ を満たすとすると任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\varphi_n(A^*A) = 0$ であるから, $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq NS(\mathcal{M})$ の稠密性より任意の $\psi \in NS(\mathcal{M})$ に対し $\psi(A^*A) = 0$ である．命題 14.36 より $\mathcal{M}_* = \mathrm{span}(NS(\mathcal{M}))$ であるから任意の $\psi \in \mathcal{M}_*$ に対し $\psi(A^*A) = 0$ なので, $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_*)^*$ (定理 14.34) より $A^*A = 0$, 従って $\|A\|^2 = \|A^*A\| = 0$ である．よって φ は忠実正規状態であるから, 定理 14.53 より $\mathcal{M}$ は σ-有限である． □

命題 14.56. 可分な Hilbert 空間上の von Neumann 環は可分である．

証明. $\mathcal{H}$ を可分な Hilbert 空間, $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環とする．任意の $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ に対し, $\varphi_{u,v} \in \mathcal{M}_*$ を,

$$\varphi_{u,v}(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}} (Au_n \mid v_n) \quad (\forall A \in \mathcal{M})$$

と定義する．このとき,

$$|\varphi_{u,v}(A)| \leqslant \|(Au_n)_{n\in\mathbb{N}}\|\|(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\| \leqslant \|A\|\|u\|\|v\| \quad (\forall A \in \mathcal{M})$$

であるから $\|\varphi_{u,v}\| \leqslant \|u\|\|v\|$ なので,

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H} \times \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H} \ni (u, v) \mapsto \varphi_{u,v} \in \mathcal{M}_* \tag{14.28}$$

は有界準双線型汎関数である．また $\mathcal{M}_*$ の定義 14.33 と σ-WOT の定義 10.167 より (14.28) は全射である．よって $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ の可分性より $\mathcal{M}_*$ は可分である． □

定義 14.57 (von Neumann 環の巡回ベクトル, 分離ベクトル, 巡回分離ベクトル)**.** $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環, $v \in \mathcal{H}$ とする．

(1) $\mathcal{M}v = \{Av : A \in \mathcal{M}\}$ が $\mathcal{H}$ で稠密であるとき v を $\mathcal{M}$ の巡回ベクトルと言う．
(2) $\{A \in \mathcal{M} : Av = 0\} = \{0\}$ であるとき v を $\mathcal{M}$ の分離ベクトルと言う．
(3) v が $\mathcal{M}$ の巡回ベクトルでありかつ $\mathcal{M}$ の分離ベクトルであるとき v を $\mathcal{M}$ の巡回分離ベクトルと言う．

[*293] 系 14.22 より $\|\varphi\| = \varphi(1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\varphi_n(1) = 1$ であるから $\varphi \in NS(\mathcal{M})$ である．

命題 14.58. $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環, $v \in \mathcal{H}$ とする．このとき次は互いに同値である．

(1) v は $\mathcal{M}$ の分離ベクトルである．
(2) v は $\mathcal{M}'$ の巡回ベクトルである．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す．(1) が成り立つとする．閉部分空間 $\overline{\mathcal{M}'v} \subseteq \mathcal{H}$ の上への射影作用素を $P \in B(\mathcal{H})$ とすると，$\mathrm{Ran}(P) = \overline{\mathcal{M}'v}$ は $\mathcal{M}'$ の作用に対して不変であるから $P \in \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$ である．そして $v \in \overline{\mathcal{M}'v} = \mathrm{Ran}(P)$ であるから $(1-P)v = 0$ である．よって $1 - P = 0$ であるから $\overline{\mathcal{M}'v} = \mathcal{H}$ なので, v は $\mathcal{M}'$ の巡回ベクトルである．
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す．(2) が成り立つとする．$A \in \mathcal{M}$ が $Av = 0$ を満たすとすると，

$$AB'v = B'Av = 0 \quad (\forall B' \in \mathcal{M}')$$

であり, $\mathcal{M}'v \subseteq \mathcal{H}$ は稠密であるので $A = 0$ である．よって v は $\mathcal{M}$ の分離ベクトルである． □

注意 14.59 (忠実正規非負線型汎関数の GNS 表現)**.** $\mathcal{M}$ を von Neumann 環, $\varphi \in \mathcal{M}_{*,+}$ を忠実とし, (π, v) を φ に対する GNS 表現とする．このとき定理 14.45 より $\pi(\mathcal{M})$ は von Neumann 環であり，

$$\varphi(A^*A) = (\pi(A^*A)v \mid v) = \|\pi(A)v\|^2 \quad (\forall A \in \mathcal{M})$$

より v は $\pi(\mathcal{M})$ の巡回分離ベクトルである．また π は忠実である．

14.4 Kaplansky の稠密性定理, テンソル積 von Neumann 環, 冨田の可換子環定理

定理 14.60 (Kaplansky の稠密性定理)**.** $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環とし, $\mathcal{D}$ を $\mathcal{M}$ の WOT 稠密な部分 $*$-環とする．このとき，

(1) $\mathcal{D}'' = \overline{\mathcal{D}}^{\sigma\text{-SOT}} = \overline{\mathcal{D}}^{\sigma\text{-WOT}} = \overline{\mathcal{D}}^{\mathrm{SOT}} = \overline{\mathcal{D}}^{\mathrm{WOT}} = \mathcal{M}$ が成り立つ．
(2) $\mathcal{D}_{\mathrm{sa}}$ は $\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}$ において σ-SOT (σ-WOT, SOT) 稠密である．[*294]
(3) $\mathcal{D}_{\mathrm{sa},1}$ は $\mathcal{M}_{\mathrm{sa},1}$ において σ-SOT (σ-WOT, SOT) 稠密である．[*295]
(4) 任意の $A \in \mathcal{M}_1$ に対し $\mathcal{D}_1$ のネット $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ で，

$$A_\lambda \to A, \quad A_\lambda^* \to A^* \quad (\text{in } \sigma\text{- SOT } (\sigma\text{-WOT, SOT}))$$

なるものが存在する．[*296]

証明. (1) $\mathcal{D}$ は凸集合であるから系 10.12 より $\mathcal{D}$ の SOT 閉包と WOT 閉包は一致する．よって $1 \in \mathcal{M} = \overline{\mathcal{D}}^{\mathrm{SOT}}$ なので，

$$\mathcal{D}\mathcal{H} = \mathrm{span}\{Av : A \in \mathcal{D}, v \in \mathcal{H}\}$$

は $\mathcal{H}$ で稠密である．ゆえに二重可換子環定理 10.178 より $\mathcal{D}'' = \overline{\mathcal{D}}^{\sigma\text{-SOT}} = \overline{\mathcal{D}}^{\sigma\text{-WOT}} = \overline{\mathcal{D}}^{\mathrm{SOT}} = \overline{\mathcal{D}}^{\mathrm{WOT}} = \mathcal{M}$ が成り立つ．

(2) $*$-演算は σ-WOT 連続であるから (1) より $\mathcal{D}_{\mathrm{sa}}$ は $\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}$ において σ-WOT 稠密である．$\mathcal{D}_{\mathrm{sa}}$ は凸集合であるから定理 10.174 より $\mathcal{D}_{\mathrm{sa}}$ の σ-WOT 閉包と σ-SOT 閉包は一致する．よって $\mathcal{D}_{\mathrm{sa}}$ は $\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}$ において σ-SOT (σ-WOT, SOT) 稠密である．

(3)

$$f : \mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{2t}{1+t^2} \in \mathbb{R}$$

とおくと，

$$1 \pm f(t) = \frac{(1 \pm t)^2}{1+t^2}, \quad f'(t) = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

[*294] $\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}, \mathcal{D}_{\mathrm{sa}}$ はそれぞれ $\mathcal{M}, \mathcal{D}$ の自己共役元全体.
[*295] $\mathcal{M}_{\mathrm{sa},1}$ は $\mathcal{D}_{\mathrm{sa},1}$ はそれぞれ $\mathcal{M}, \mathcal{D}$ のノルムが 1 以下の自己共役元全体.
[*296] $\mathcal{M}_1, \mathcal{D}_1$ はそれぞれ $\mathcal{M}, \mathcal{D}$ のノルムが 1 以下の元全体.

であるので,

$$f(\mathbb{R}) \subseteq [-1,1] \tag{14.29}$$

であり,

$$[-1,1] \ni t \mapsto f(t) \in [-1,1] \tag{14.30}$$

は狭義単調増加な全単射連続関数である. (14.30) の逆関数を,

$$g : [-1,1] \to [-1,1]$$

とおくと, 補題 9.47 より g は連続関数である. 今, $\mathcal{A} \subseteq B(\mathcal{H})$ を $\mathcal{D}$ のノルム閉包とする. 連続関数カルキュラス (9.48) と (14.29) より,

$$f(\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}) \subseteq \mathcal{A}_{\mathrm{sa},1},\quad f(\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{sa},1}$$

であり, 連続関数カルキュラスの合成 (定理 9.51 の (3)) より,

$$\mathcal{A}_{\mathrm{sa},1} = f(g(\mathcal{A}_{\mathrm{sa},1})) \subseteq f(\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}),\quad \mathcal{M}_{\mathrm{sa},1} = f(g(\mathcal{M}_{\mathrm{sa},1})) \subseteq f(\mathcal{M}_{\mathrm{sa}})$$

であるから,

$$\mathcal{A}_{\mathrm{sa},1} = f(\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}),\quad \mathcal{M}_{\mathrm{sa},1} = f(\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}) \tag{14.31}$$

が成り立つ. 任意の $A, B \in B(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ に対し,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(f(A) - f(B)) &= (1 + A^2)^{-1}(A(1 + B^2) - (1 + A^2)B)(1 + B^2)^{-1} \\ &= (1 + A^2)^{-1}(A - B)(1 + B^2)^{-1} - \frac{1}{4}f(A)(A - B)f(B)\end{aligned}$$

であり,

$$\|(1 + A^2)^{-1}\| \leqslant 1,\quad \|f(A)\| \leqslant 1\quad (\forall A \in B(\mathcal{H}))$$

であるから, 任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(B(\mathcal{H}), \mathrm{SOT}) \ni A \mapsto f(A)v \in \mathcal{H}$$

は連続である.[*297] よって,

$$(B(\mathcal{H}), \mathrm{SOT}) \ni A \mapsto f(A) \in (B(\mathcal{H}), \mathrm{SOT})$$

は連続であるので, (2) と (14.31) より,

$$\mathcal{M}_{\mathrm{sa},1} = f(\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}) = f\left(\overline{\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}}^{\mathrm{SOT}}\right) \subseteq \overline{f(\mathcal{A}_{\mathrm{sa}})}^{\mathrm{SOT}} = \overline{\mathcal{A}_{\mathrm{sa},1}}^{\mathrm{SOT}} = \overline{\mathcal{D}_{\mathrm{sa},1}}^{\mathrm{SOT}} \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{sa},1},$$

従って,

$$\mathcal{M}_{\mathrm{sa},1} = \overline{\mathcal{D}_{\mathrm{sa},1}}^{\mathrm{SOT}}$$

が成り立つ. 命題 10.170 より $\mathcal{M}_1$ において SOT と σ-SOT は一致するので, $\mathcal{D}_{\mathrm{sa},1}$ は $\mathcal{M}_{\mathrm{sa},1}$ において σ-SOT (σ-WOT, SOT) 稠密である.

(4) $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ とし, 自然に $M_{2\times 2}(B(\mathcal{H})) = B(\mathcal{H}^2)$ とみなす. このとき,

$$M_{2\times 2}(\mathcal{M}) \subseteq M_{2\times 2}(B(\mathcal{H})) = B(\mathcal{H}^2)$$

は $B(\mathcal{H}^2)$ の単位元を含む WOT 閉な部分 $*$-環であるから $\mathcal{H}^2$ 上の von Neumann 環であり,

$$M_{2\times 2}(\mathcal{D}) \subseteq M_{2\times 2}(\mathcal{M})$$

はその WOT 稠密な部分 $*$-環である. 任意の $A \in \mathcal{M}_1$ に対し,

$$\widetilde{A} := \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$$

[*297] ネットによる連続性の特徴付け (命題 1.50) を参照.

とおけば, $\widetilde{A}$ は $M_{2\times 2}(\mathcal{M})$ のノルムが 1 以下の自己共役元であるから, (3) より $M_{2\times 2}(\mathcal{D})$ のノルムが 1 以下の自己共役元からなるネット $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で,

$$B_\lambda \to \widetilde{A} \ \ (\text{in SOT})$$

なるものが取れる. 各 λ について B_λ の 1 行 2 列成分を $A_\lambda \in \mathcal{D}_1$ とおけば, B_λ の自己共役性より B_λ の 2 行 1 列成分は $A_\lambda^* \in \mathcal{D}_1$ なので,

$$A_\lambda \to A, \ \ A_\lambda^* \to A^* \ \ (\text{in SOT})$$

が成り立つ. 命題 10.170 より $\mathcal{M}_1$ において SOT と σ-SOT は一致するので,

$$A_\lambda \to A, \ \ A_\lambda^* \to A^* \ \ (\text{in } \sigma\text{-SOT } (\sigma\text{-WOT, SOT}))$$

が成り立つ.

□

定義 14.61. $\mathcal{H}_1,\cdots,\mathcal{H}_N$ を Hilbert 空間, $\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N$ をテンソル積 Hilbert 空間 (定義 10.92) とし, $\mathcal{D}_1 \subseteq B(\mathcal{H}_1),\cdots,\mathcal{D}_N \subseteq B(\mathcal{H}_N)$ をそれぞれ線型部分空間とする. これに対し $B(\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N)$ の線型部分空間

$$\mathcal{D}_1\odot\cdots\odot\mathcal{D}_N := \operatorname{span}\{A_1\otimes\cdots\otimes A_N : A_1\in\mathcal{D}_1,\cdots,A_N\in\mathcal{D}_N\}$$

[*298]を定義する. もし $\mathcal{D}_1 \subseteq B(\mathcal{H}_1),\cdots,\mathcal{D}_N \subseteq B(\mathcal{H}_N)$ がそれぞれ部分 $*$-環であるならば $\mathcal{D}_1\odot\cdots\odot\mathcal{D}_N$ は $B(\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N)$ の部分 $*$-環である.

定義 14.62 (テンソル積 von Neumann 環)**.** $\mathcal{H}_1,\cdots,\mathcal{H}_N$ を Hilbert 空間, $\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N$ をテンソル積 Hilbert 空間とし, $\mathcal{M}_1 \subseteq B(\mathcal{H}_1),\cdots,\mathcal{M}_N \subseteq B(\mathcal{H}_N)$ をそれぞれ von Neumann 環とする. $B(\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N)$ の部分 $*$-環

$$\mathcal{M}_1\odot\cdots\odot\mathcal{M}_N := \operatorname{span}\{A_1\otimes\cdots\otimes A_N : A_1\in\mathcal{M}_1,\cdots,A_N\in\mathcal{M}_N\}$$

が生成する $\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N$ 上の von Neumann 環を,

$$\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N := (\mathcal{M}_1\odot\cdots\odot\mathcal{M}_N)'' = \overline{\mathcal{M}_1\odot\cdots\odot\mathcal{M}_N}$$

と表す. ただし右辺の閉包は WOT, SOT, σ-WOT, σ-SOT のうちのいずれかによるものである.[*299] $\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N$ を $\mathcal{M}_1,\cdots,\mathcal{M}_N$ のテンソル積 von Neumann 環と言う.

命題 14.63. Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1,\cdots,\mathcal{H}_N$ に対し,

$$B(\mathcal{H}_1)\otimes\cdots\otimes B(\mathcal{H}_N) = B(\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N)$$

が成り立つ.

証明. 命題 10.111 より $B(\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N)$ において有限階作用素環 $B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N)$ は SOT 稠密である. そして命題 10.94 より $B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N)$ において,

$$(u_1\otimes\cdots\otimes u_N)\odot(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)$$

(この $\odot$ は Schatten 形式 (定義 10.109)) なる形の元の線型結合全体はノルムで稠密であり,

$$(u_1\otimes\cdots\otimes u_N)\odot(v_1\otimes\cdots\otimes v_N) = (u_1\odot v_1)\otimes\cdots\otimes(u_N\odot v_N)$$

である. ゆえに,

$$B(\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N) = \overline{B_{\mathrm{f}}(\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N)}^{\mathrm{SOT}} = \overline{B(\mathcal{H}_1)\odot\cdots\odot B(\mathcal{H}_N)}^{\mathrm{SOT}} = B(\mathcal{H}_1)\otimes\cdots\otimes B(\mathcal{H}_N)$$

が成り立つ. □

[*298] 有界線型作用素のテンソル積 $A_1\otimes\cdots\otimes A_N$ については定理 10.99 を参照.

[*299] 二重可換子環定理 10.178 よりこれらの閉包は一致する.

命題 14.64. $\mathcal{M}_j$ を von Neumann 環, $\mathcal{D}_j \subseteq \mathcal{M}_j$ を WOT 稠密な部分 $*$-環とする $(j = 1, \cdots, N)$. このとき,

$$(\mathcal{D}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{D}_N)'' = \overline{\mathcal{D}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{D}_N} = \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N$$

が成り立つ. ただし閉包は σ-SOT, σ-WOT, SOT, WOT のうちのいずれかによるものである.

証明. 任意の $A_j \in \mathcal{M}_j$ に対し, Kaplansky の稠密性定理 14.60 より $\mathcal{D}_j$ のネット $(A_{j,\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ $(j = 1, \cdots, N)$ で,

$$A_{j,\lambda} \to A_j \quad (\text{in SOT}, \forall j \in \{1, \cdots, N\}) \tag{14.32}$$

$$\|A_{j,\lambda}\| \leqslant \|A_j\| \quad (\forall \lambda \in \Lambda, \forall j \in \{1, \cdots, N\}) \tag{14.33}$$

を満たすものが取れる. 任意の $v_1 \in \mathcal{H}_1, \cdots, v_N \in \mathcal{H}_N$ に対し (14.32) より,

$$(A_{1,\lambda} \otimes \cdots \otimes A_{N,\lambda})(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) \to (A_1 \otimes \cdots \otimes A_N)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N)$$

であり, (14.33) と定理 10.99 より,

$$\|A_{1,\lambda} \otimes \cdots \otimes A_{N,\lambda}\| = \|A_{1,\lambda}\| \cdots \|A_{N,\lambda}\| \leqslant \|A_1\| \cdots \|A_N\| = \|A_1 \otimes \cdots \otimes A_N\| \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

であるから, 任意の $v \in \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N = \overline{\operatorname{span}\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_N : v_1 \in \mathcal{H}_1, \cdots, v_N \in \mathcal{H}_N\}}$ に対し,

$$(A_{1,\lambda} \otimes \cdots \otimes A_{N,\lambda})v \to (A_1 \otimes \cdots \otimes A_N)v$$

が成り立つ. よって,

$$A_1 \otimes \cdots \otimes A_N = \text{SOT-}\lim_{\lambda \in \Lambda} A_{1,\lambda} \otimes \cdots \otimes A_{N,\lambda} \in \overline{\mathcal{D}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{D}_N}^{\text{SOT}}$$

が成り立つ. ここで $A_j \in \mathcal{M}_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ は任意であるから,

$$\mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N \subseteq \overline{\mathcal{D}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{D}_N}^{\text{SOT}},$$

従って,

$$\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N = \overline{\mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N}^{\text{SOT}} = \overline{\mathcal{D}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{D}_N}^{\text{SOT}}$$

が成り立つ. よって二重可換子環定理 10.178 より求める結果を得る. □

命題 14.65 (トレースクラスのテンソル積)**.** $\mathcal{H}_1, \cdots, \mathcal{H}_N$ をそれぞれ Hilbert 空間とする. このとき,

$$B^1(\mathcal{H}_1) \odot \cdots \odot B^1(\mathcal{H}_N) = \operatorname{span}\{T_1 \otimes \cdots \otimes T_N : T_1 \in B^1(\mathcal{H}_1), \cdots, T_N \in B(\mathcal{H}_N)\}$$

はトレースクラス $(B^1(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N), \|\cdot\|_1)$ において稠密である. また,

$$\operatorname{Tr}(T_1 \otimes \cdots \otimes T_N) = \operatorname{Tr}(T_1) \cdots \operatorname{Tr}(T_N) \quad (\forall T_1 \in B^1(\mathcal{H}_1), \cdots, T_N \in B^1(\mathcal{H}_N)) \tag{14.34}$$

が成り立つ.

証明. $\mathcal{H}_1, \cdots, \mathcal{H}_N$ の CONS をそれぞれ $\{e_{1,j}\}_{j \in J_1}, \cdots, \{e_{N,j}\}_{j \in J_N}$ とおく. このとき命題 10.94 より,

$$\{e_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes e_{N,j_N}\}_{(j_1, \cdots, j_N) \in J_1 \times \cdots \times J_N} \tag{14.35}$$

は $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ の CONS である. 任意の $T_j \in B^1(\mathcal{H}_j)$ に対し T_j の極分解 (10.75) を $T_j = V_j|T_j|$ $(j = 1, \cdots, N)$ とすると,

$$\begin{aligned}|T_1 \otimes \cdots \otimes T_N| &= \sqrt{(T_1 \otimes \cdots \otimes T_N)^*(T_1 \otimes \cdots \otimes T_N)} = \sqrt{(T_1^*T_1) \otimes \cdots \otimes (T_N^*T_N)} \\ &= \sqrt{|T_1|^2 \otimes \cdots \otimes |T_N|^2} = |T_1| \otimes \cdots \otimes |T_N|\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(|T_1\otimes\cdots\otimes T_N|)=\mathrm{Tr}(|T_1|\otimes\cdots\otimes|T_N|)\\
&=\sum_{(j_1,\cdots,j_N)\in J_1\times\cdots\times J_N}((|T_1|\otimes\cdots\otimes|T_N|)(e_{1,j_1}\otimes\cdots\otimes e_{N,j_N})\mid e_{1,j_1}\otimes\cdots\otimes e_{N,j_N})\\
&=\sum_{(j_1,\cdots,j_N)\in J_1\times\cdots\times J_N}(|T_1|e_{1,j_1}\mid e_{1,j_1})\cdots(|T_N|e_{N,j_N}\mid e_{N,j_N})\\
&=\sum_{j_1\in J_1}(|T_1|e_{1,j_1}\mid e_{1,j_1})\cdots\sum_{j_N\in J_N}(|T_N|e_{N,j_N}\mid e_{N,j_N})=\mathrm{Tr}(|T_1|)\cdots\mathrm{Tr}(|T_N|)<\infty
\end{aligned}$$

である．よって $T_1\otimes\cdots\otimes T_N\in B^1(\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N)$ であり,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(T_1\otimes\cdots\otimes T_N)&=\sum_{(j_1,\cdots,j_N)\in J_1\times\cdots\times J_N}((T_1\otimes\cdots\otimes T_N)(e_{1,j_1}\otimes\cdots\otimes e_{N,j_N})\mid e_{1,j_1}\otimes\cdots\otimes e_{N,j_N})\\
&=\sum_{(j_1,\cdots,j_N)\in J_1\times\cdots\times J_N}(T_1e_{1,j_1}\mid e_{1,j_1})\cdots(T_Ne_{N,j_N}\mid e_{N,j_N})\\
&=\sum_{j_1\in J_1}(T_1e_{1,j_1}\mid e_{1,j_1})\cdots\sum_{j_N\in J_N}(T_Ne_{N,j_N}\mid e_{N,j_N})=\mathrm{Tr}(T_1)\cdots\mathrm{Tr}(T_N)
\end{aligned}$$

である．定理 10.158 と命題 10.94 よりトレースクラス $(B^1(\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N),\|\cdot\|_1)$ において,

$$(u_1\otimes\cdots\otimes u_N)\odot(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)$$

(この $\odot$ は Schatten 形式 (定義 10.109)) なる形の元の線型結合全体は稠密であり,

$$(u_1\otimes\cdots\otimes u_N)\odot(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)=(u_1\odot v_1)\otimes\cdots\otimes(u_N\odot v_N)$$

であるから,

$$B^1(\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N)=\overline{B_1(\mathcal{H}_1)\odot\cdots\odot B^1(\mathcal{H}_N)}^{\|\cdot\|_1}$$

が成り立つ． □

定理 14.66 (von Neumann 環の前双対のテンソル積)**.** $\mathcal{M}_1\subseteq B(\mathcal{H}_1),\cdots,\mathcal{M}_N\subseteq B(\mathcal{H}_N)$ をそれぞれ von Neumann 環とする．このとき任意の $\varphi_1\in\mathcal{M}_{1,*},\cdots,\varphi_N\in\mathcal{M}_{N,*}$ に対し，線型汎関数

$$\varphi_1\odot\cdots\odot\varphi_N:\mathcal{M}_1\odot\cdots\odot\mathcal{M}_N\ni A_1\otimes\cdots\otimes A_N\mapsto\varphi_1(A_1)\cdots\varphi_N(A_N)\in\mathbb{C}$$

[*300]はテンソル積 von Neumann 環 $\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N$ 上の正規汎関数

$$\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_N\in(\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N)_*$$

に一意拡張でき,

$$\|\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_N\|\leqslant\|\varphi_1\|\cdots\|\varphi_N\|$$

が成り立つ．また $\varphi_1\in\mathcal{M}_{1,*,+},\cdots,\varphi_N\in\mathcal{M}_{N,*,+}$ の場合は,

$$\|\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_N\|=\|\varphi_1\|\cdots\|\varphi_N\|$$

が成り立つ．そして,

$$\mathcal{M}_{1,*}\odot\cdots\odot\mathcal{M}_{N,*}:=\mathrm{span}\{\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_N:\varphi_1\in\mathcal{M}_{1,*},\cdots,\varphi_N\in\mathcal{M}_{N,*}\}$$

とおくと,

$$(\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N)_*=\overline{\mathcal{M}_{1,*}\odot\cdots\odot\mathcal{M}_{N,*}}\tag{14.36}$$

が成り立つ．

[*300] 定理 2.68 を参照．$\mathcal{M}_1\odot\cdots\odot\mathcal{M}_N$ が線型空間 $\mathcal{M}_1,\cdots,\mathcal{M}_N$ の線型空間としてのテンソル積と線型同型であることに注意．

証明. $\varphi_1 \in \mathcal{M}_{1,*}, \cdots, \varphi_N \in \mathcal{M}_{N,*}$ に対し, $T_1 \in B^1(\mathcal{H}_1), \cdots, T_N \in B^1(\mathcal{H}_N)$ で,

$$\varphi_j(A) = \mathrm{Tr}(AT_j) \quad (\forall A \in \mathcal{M}_j, \forall j \in \{1, \cdots, N\}) \tag{14.37}$$

なるものを取り固定する. 命題 14.65 より $T_1 \otimes \cdots \otimes T_N \in B^1(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N)$ であるから,

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N : \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N \ni A \mapsto \mathrm{Tr}(A(T_1 \otimes \cdots \otimes T_N)) \in \mathbb{C}$$

は正規汎関数であり, (14.35) より, これは $\mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N$ 上で $\varphi_1 \odot \cdots \odot \varphi_N$ と一致する. $\varphi_1 \odot \cdots \odot \varphi_N$ の $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N$ 上の正規汎関数への拡張の一意性は稠密性と正規汎関数の連続性より明らかである. 今,

$$\mathcal{M}_j^{\perp} := \{S \in B^1(\mathcal{H}_j) : \forall A \in \mathcal{M}_j, \mathrm{Tr}(AS) = 0\} \quad (j = 1, \cdots, N)$$

とおけば,

$$\varphi_j(A) = \mathrm{Tr}(A(T_j - S)) \quad (\forall A \in \mathcal{M}_j, \forall S \in \mathcal{M}_j^{\perp}, j = 1, \cdots, N)$$

であり, 定理 14.34 より,

$$\|\varphi_j\| = \inf\{\|T_j - S\| : S \in \mathcal{M}_j^{\perp}\} \quad (j = 1, \cdots, N) \tag{14.38}$$

である. そして任意の $S_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp}, \cdots, S_N \in \mathcal{M}_N^{\perp}$ に対し, $\varphi_1 \odot \cdots \odot \varphi_N$ の $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N$ 上の正規汎関数への拡張の一意性より,

$$(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N)(A) = \mathrm{Tr}\left(A\left((T_1 - S_1) \otimes \cdots \otimes (T_N - S_N)\right)\right) \quad (\forall A \in \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)$$

が成り立つから, (14.35) より,

$$\|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N\| \leqslant \|(T_1 - S_1) \otimes \cdots \otimes (T_N - S_N)\|_1 \leqslant \|T_1 - S_1\|_1 \cdots \|T_N - S_N\|_1.$$

よって (14.38) より,

$$\|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N\| \leqslant \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_N\|$$

が成り立つ. $\varphi_1 \in \mathcal{M}_{1,*,+}, \cdots, \varphi_N \in \mathcal{M}_{N,*,+}$ の場合は, 命題 14.37 より, (14.37) を満たす $T_1 \in B^1(\mathcal{H}_1), \cdots, T_N \in B^1(\mathcal{H}_N)$ として非負のものが取れる. このとき $T_1 \otimes \cdots \otimes T_N \in B^1(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N)$ も非負なので $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N$ も非負であるから, 系 14.22 より,

$$\|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N\| = (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N)(1) = \varphi_1(1) \cdots \varphi_N(1) = \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_N\|$$

である. (14.36) が成り立つことは $B^1(\mathcal{H}_1) \odot \cdots \odot B^1(\mathcal{H}_N)$ がトレースクラス $(B^1(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N), \|\cdot\|_1)$ において稠密である (命題 14.65) ことから明らかである. □

定理 14.67 (正規準同型写像のテンソル積)**.** $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_N, \mathcal{N}_1, \cdots, \mathcal{N}_N$ をそれぞれ von Neumann 環とし,

$$\pi_j : \mathcal{M}_j \to \mathcal{N}_j \quad (j = 1, \cdots, N)$$

を正規準同型写像 (定義 14.40) とする. このとき $*$-環準同型写像

$$\pi_1 \odot \cdots \odot \pi_N : \mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N \ni A_1 \otimes \cdots \otimes A_N \mapsto \pi_1(A_1) \otimes \cdots \otimes \pi_N(A_N) \in \mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_N$$

[*301]は, テンソル積 von Neumann 環上の正規準同型写像

$$\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N : \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N \to \mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_N$$

に一意拡張できる.

[*301] 定理 2.68 を参照. $\mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N$ が線型空間 $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_N$ の線型空間としてのテンソル積と線型同型であることに注意.

証明. 拡張の一意性は,

$$\mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N = \mathrm{span}\{A_1 \otimes \cdots \otimes A_N : A_1 \in \mathcal{M}_1, \cdots, A_N \in \mathcal{M}_N\}$$

の $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N$ における稠密性と正規準同型写像の連続性より明らかである．正規準同型写像への拡張の存在を示す．

$$\pi := \pi_1 \odot \cdots \odot \pi_N : \mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N \to \mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_N$$

とおく．まず π がノルム減少であることを示す. $\mathcal{N}_1 \subseteq B(\mathcal{H}_1), \cdots, \mathcal{N}_N \subseteq B(\mathcal{H}_N)$ とする. 任意の $v \in \mathcal{H}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{H}_N = \mathrm{span}\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_N : v_1 \in \mathcal{H}_1, \cdots, v_N \in \mathcal{H}_N\}$ に対し, 定理 14.66 より,

$$\mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N \ni A \mapsto (\pi(A)v \mid v) \in \mathbb{C}$$

は $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N$ 上の正規汎関数 $\pi_v \in (\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)_*$ に拡張できる．任意の $A \in \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N$ に対し, Kaplansky の稠密性定理 14.60 より, $\mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N$ のネット $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ で,

$$A_\lambda^* A_\lambda \to A^* A \ \ (\text{in } \sigma\text{-WOT})$$

なるものが取れるので, π_v の正規性より,

$$\pi_v(A^*A) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \pi_v(A_\lambda^* A_\lambda) = \lim_{\lambda \in \Lambda} (\pi(A_\lambda^* A_\lambda)v \mid v) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \|\pi(A_\lambda)v\|^2 \geqslant 0$$

である．よって π_v は C^*-環 $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N$ 上の非負線型汎関数であるから,

$$\|\pi(A)v\|^2 = \pi_v(A^*A) \leqslant \|A\|^2 \pi_v(1) \leqslant \|A\|^2 \|v\|^2 \ \ (\forall A \in \mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N)$$

が成り立つ．これが任意の $v \in \mathcal{H}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{H}_N$ に対して成り立つので, $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N = \overline{\mathcal{H}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{H}_N}$ より,

$$\|\pi(A)\| = \sup\{\|\pi(A)v\| : v \in \mathcal{H}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{H}_N, \|v\| \leqslant 1\} \leqslant \|A\| \ \ (\forall A \in \mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N)$$

が成り立つ．これより π はノルム減少である．

任意の $\psi \in \mathcal{N}_{1,*} \odot \cdots \odot \mathcal{N}_{N,*}$ (定理 14.66 を参照) に対し, $\psi \circ \pi \in \mathcal{M}_{1,*} \odot \cdots \odot \mathcal{M}_{N,*}$ であり, 定理 14.66 よりこれは $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N$ 上の正規汎関数

$$\widetilde{\psi \circ \pi} \in (\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)_*$$

に一意拡張できる．任意の $A \in \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N$ に対し, Kaplansky の稠密性定理 14.60 より, $\mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N$ のネット $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ で,

$$\|A_\lambda\| \leqslant \|A\| \ \ (\forall \lambda \in \Lambda), \ \ A_\lambda \to A \ \ (\text{in } \sigma\text{-WOT})$$

なるものが取れるので, $\widetilde{\psi \circ \pi}$ が正規であることと π がノルム減少であることから,

$$|(\widetilde{\psi \circ \pi})(A)| = \lim_{\lambda \in \Lambda} |(\widetilde{\psi \circ \pi})(A_\lambda)| = \lim_{\lambda \in \Lambda} |\psi(\pi(A_\lambda))| \leqslant \|\psi\| \|A\|$$

が成り立つ．よって任意の $A \in \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N$ に対し,

$$\mathcal{N}_{1,*} \odot \cdots \odot \mathcal{N}_{N,*} \ni \psi \mapsto (\widetilde{\psi \circ \pi})(A) \in \mathbb{C} \tag{14.39}$$

はノルムが $\|A\|$ 以下の有界線型汎関数であるので, (14.39) は,

$$(\mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_N)_* = \overline{\mathcal{N}_{1,*} \odot \cdots \odot \mathcal{N}_{N,*}} \tag{14.40}$$

上のノルムが $\|A\|$ 以下の有界線型汎関数に一意拡張できる．ゆえに定理 14.34 より, ノルムが $\|A\|$ 以下の $\widetilde{\pi}(A) \in \mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_N$ で,

$$\psi(\widetilde{\pi}(A)) = (\widetilde{\psi \circ \pi})(A) \ \ (\forall \psi \in \mathcal{N}_{1,*} \odot \cdots \odot \mathcal{N}_{N,*}) \tag{14.41}$$

を満たすものが一意存在する．こうして,

$$\widetilde{\pi} : \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N \ni A \mapsto \widetilde{\pi}(A) \in \mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_N$$

が定義でき，これはノルム減少の線型写像である．そして任意の $A \in \mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N$ に対し，

$$\psi(\widetilde{\pi}(A)) = (\widetilde{\psi \circ \pi})(A) = \psi(\pi(A)) \quad (\forall \psi \in \mathcal{N}_{1,*} \odot \cdots \odot \mathcal{N}_{N,*})$$

であるから，(14.40) と定理 14.34 より $\widetilde{\pi}(A) = \pi(A)$ が成り立つ． よって $\widetilde{\pi}$ は π の拡張である． 任意の $\psi \in (\mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_N)_*$ に対し ψ にノルム収束する $\mathcal{N}_{1,*} \odot \cdots \odot \mathcal{N}_{N,*}$ の列 $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取れば，(14.41) と $\widetilde{\pi}$ のノルム減少線型性より，

$$\|\psi \circ \widetilde{\pi} - \widetilde{\psi_n \circ \pi}\| = \|\psi \circ \widetilde{\pi} - \psi_n \circ \widetilde{\pi}\| \leqslant \|\psi - \psi_n\| \to 0$$

であるから，

$$\psi \circ \widetilde{\pi} = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\psi_n \circ \pi} \in (\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)_*$$

である．よって $\widetilde{\pi}$ は σ-WOT に関して連続である．Kaplansky の稠密性定理 14.60 より，任意の $A, B \in \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N$ に対し，$\mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N$ のネット $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で，

$$\|A_\lambda\| \leqslant \|A\|, \ \ \|B_\lambda\| \leqslant \|B\| \ \ (\forall \lambda \in \Lambda), \ \ A_\lambda \to A, \ \ A_\lambda^* \to A^*, \ \ B_\lambda \to B \ \ (\text{in } \sigma\text{-WOT})$$

なるものが取れるので，

$$\widetilde{\pi}(AB) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \widetilde{\pi}(A_\lambda B_\lambda) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \pi(A_\lambda)\pi(B_\lambda) = \widetilde{\pi}(A)\widetilde{\pi}(B),$$

$$\widetilde{\pi}(A^*) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \widetilde{\pi}(A_\lambda^*) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \pi(A_\lambda)^* = \widetilde{\pi}(A)^*$$

である．よって $\widetilde{\pi} : \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N \ni A \mapsto \widetilde{\pi}(A) \in \mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_N$ は正規準同型写像である．これで存在が示せた．□

定義 14.68 (テンソル積正規準同型写像)**.** $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_N, \mathcal{N}_1, \cdots, \mathcal{N}_N$ をそれぞれ von Neumann 環とし，

$$\pi_j : \mathcal{M}_j \to \mathcal{N}_j \ \ (j = 1, \cdots, N)$$

を正規準同型写像とする．このとき定理 14.67 より，テンソル積 von Neumann 環上の正規準同型写像

$$\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N : \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N \to \mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_N$$

で，

$$(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N)(A_1 \otimes \cdots \otimes A_N) = \pi_1(A_1) \otimes \cdots \otimes \pi_N(A_N) \ \ (\forall A_1 \in \mathcal{M}_1, \cdots, A_N \in \mathcal{M}_N)$$

を満たすものが唯一つ存在する．これを正規準同型写像 $\pi_1, \cdots, \pi_N$ のテンソル積と言う．

命題 14.69 (単射な正規準同型写像のテンソル積の単射性)**.** $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_N, \mathcal{N}_1, \cdots, \mathcal{N}_N$ をそれぞれ von Neumann 環とし，

$$\pi_j : \mathcal{M}_j \to \mathcal{N}_j \ \ (j = 1, \cdots, N)$$

を単射な正規準同型写像とする．このときテンソル積正規準同型写像

$$\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N : \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N \to \mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_N$$

も単射である．

証明. (1) 各 π_j が単位的である (単位元を単位元に写す) 場合を考える．このとき定理 14.45 より各 $\pi_j(\mathcal{M}_j)$ と $(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N)(\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)$ は von Neumann 環であるから，

$$(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N)(\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N) = \pi_1(\mathcal{M}_1) \otimes \cdots \otimes \pi_N(\mathcal{M}_N)$$

が成り立つ．von Neumann 環の間の $*$-環同型写像は正規である (系 14.42) から，

$$\rho_j : \pi_j(\mathcal{M}_j) \ni \pi_j(A) \mapsto A \in \mathcal{M}_j \ \ (j = 1, \cdots, N)$$

はそれぞれ正規準同型写像であり，テンソル積正規準同型写像

$$\begin{aligned} \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_N : & \pi_1(\mathcal{M}_1) \otimes \cdots \otimes \pi_N(\mathcal{M}_N) \to \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N \\ & \pi_1(A_1) \otimes \cdots \otimes \pi_N(A_N) \mapsto A_1 \otimes \cdots \otimes A_N \end{aligned}$$

を考えれば, 合成写像

$$(\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_N) \circ (\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N) : \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N \to \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N \tag{14.42}$$

は $\mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N$ 上で恒等写像なので, 稠密性と正規性より (14.69) は恒等写像である. よって $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N$ は単射である.

(2) 一般の場合を示す. 射影作用素

$$P_j := \pi_j(1) \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_j) \quad (j = 1, \cdots, N),$$
$$P := P_1 \otimes \cdots \otimes P_N = (\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N)(1) \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_N)$$

を考え, 縮小 von Neumann 環 (定義 14.49) 上への同型同相写像

$$\Phi_j : P_j\mathcal{N}_jP_j \ni P_jAP_j \mapsto P_jA|_{\mathrm{Ran}(P_j)} \in \mathcal{N}_{j,P_j} \quad (j = 1, \cdots, N),$$

$$\begin{aligned}\Phi : & P(\mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_N)P \to (\mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_N)_P = \mathcal{N}_{1,P_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_{N,P_N} \\ & P(A_1 \otimes \cdots \otimes A_N)P \mapsto P(A_1 \otimes \cdots \otimes A_N)|_{\mathrm{Ran}(P)} = (P_1A_1)|_{\mathrm{Ran}(P_1)} \otimes \cdots \otimes (P_NA_N)|_{\mathrm{Ran}(P_N)}\end{aligned}$$

を考える. すると,

$$\Phi_j \circ \pi_j : \mathcal{M}_j \ni A \mapsto \pi_j(A)|_{\mathrm{Ran}(P_j)} \in \mathcal{N}_{j,P_j} \quad (j = 1, \cdots, N)$$

は単位的な単射正規準同型写像であり,

$$\begin{aligned}&\Phi \circ (\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N)(A_1 \otimes \cdots \otimes A_N) \\ &= \pi_1(A_1)|_{\mathrm{Ran}(P_1)} \otimes \cdots \otimes \pi_N(A_N)|_{\mathrm{Ran}(P_N)} \\ &= (\Phi_1 \circ \pi_1) \otimes \cdots \otimes (\Phi_N \circ \pi_N)(A_1 \otimes \cdots \otimes A_N) \\ &(\forall A_1 \in \mathcal{M}_1, \cdots, \forall A_N \in \mathcal{M}_N)\end{aligned}$$

であるから,

$$\Phi \circ (\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N) = (\Phi_1 \circ \pi_1) \otimes \cdots \otimes (\Phi_N \circ \pi_N)$$

である. よって (1) より $\Phi \circ (\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N)$ は単射である. P と Φ の定義よりこれは $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N$ が単射であることを意味する.

□

定理 14.70 (正規非負線型汎関数のテンソル積に対する GNS 表現)**.** $\mathcal{M}_j$ を von Neumann 環, $\varphi_j \in \mathcal{M}_{j,*,+}\backslash\{0\}$ とし, (π_j, v_j) を φ_j に対する GNS 表現[*302]とする ($j = 1, \cdots, N$). このときテンソル積 von Neumann 環 $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N$ の正規表現

$$\begin{aligned}\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N : & \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N \to B(\mathcal{H}_{\pi_1}) \otimes \cdots \otimes B(\mathcal{H}_{\pi_N}) = B(\mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{\pi_N}) \\ & A_1 \otimes \cdots \otimes A_N \mapsto \pi_1(A_1) \otimes \cdots \otimes \pi_N(A_N)\end{aligned}$$

[*303]と $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \in \mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{\pi_N}$ に対し $(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N, v_1 \otimes \cdots \otimes v_N)$ は $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N \in (\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)_{*,+}\backslash\{0\}$[*304] の GNS 表現である. またもし $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ がそれぞれ忠実 (定義 14.52) ならば, $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N$ も忠実である.

証明. 任意の $A_1 \in \mathcal{M}_1, \cdots, A_N \in \mathcal{M}_N$ に対し,

$$\begin{aligned}&(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N)(A_1 \otimes \cdots \otimes A_N) = \varphi_1(A_1) \cdots \varphi_N(A_N) \\ &= (\pi_1(A_1)v_1 \mid v_1) \cdots (\pi_N(A_N)v_N \mid v_N) \\ &= ((\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N)(A_1 \otimes \cdots \otimes A_N)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_N)\end{aligned}$$

[*302] 命題 14.46 より π_j は正規表現であることに注意.
[*303] $B(\mathcal{H}_{\pi_1}) \otimes \cdots \otimes B(\mathcal{H}_{\pi_N}) = B(\mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{\pi_N})$ であることは命題 14.63 による.
[*304] 定理 14.66 を参照.

であるから,

$$\mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N = \mathrm{span}\{A_1 \otimes \cdots \otimes A_N : A_1 \in \mathcal{M}_1, \cdots, A_N \in \mathcal{M}_N\}$$

の $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N$ における稠密性と $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N$, $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N$ の正規性より, 任意の $A \in \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N$ に対し,

$$(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N)(A) = ((\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N)(A)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_N)$$

が成り立つ. 各 j について $\pi_j(\mathcal{M}_j)v_j$ は $\mathcal{H}_{\pi_j}$ において稠密であるので, 命題 10.94 より,

$$\begin{aligned}(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N)(\mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) &= \pi_1(\mathcal{M}_1)v_1 \odot \cdots \odot \pi_N(\mathcal{M}_N)v_N \\ = \mathrm{span}\{\pi_1(A_1)v_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N(A_N)v_N : A_1 \in \mathcal{M}_1, \cdots, A_N \in \mathcal{M}_N\}\end{aligned}$$

は $\mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{\pi_N}$ において稠密である. よって $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ は $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N$ の巡回ベクトルである. これより $(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N, v_1 \otimes \cdots \otimes v_N)$ は $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N$ の GNS 表現である.
$\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ が忠実であるならば, 注意 14.59 より, $v_1, \cdots, v_N$ は $\pi_1(\mathcal{M}_1), \cdots, \pi_N(\mathcal{M}_N)$ の巡回分離ベクトルである.

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathcal{M}_1)' \otimes \cdots \otimes \pi_N(\mathcal{M}_N)' &\subseteq (\pi_1(\mathcal{M}_1) \otimes \cdots \otimes \pi_N(\mathcal{M}_N))' \\ &= (\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N)(\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)'\end{aligned}$$

より,

$$\pi_1(\mathcal{M}_1)'v_1 \odot \cdots \odot \pi_N(\mathcal{M}_N)'v_N \subseteq (\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N)(\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)'(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N)$$

であり, 命題 14.58 より各 $\pi_j(\mathcal{M}_j)'v_j$ は $\mathcal{H}_{\pi_j}$ において稠密であるので, $(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N)(\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)'(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N)$ は $\mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{\pi_N}$ において稠密である. よって命題 14.58 より $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ は $(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N)(\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)$ の巡回分離ベクトルである. また注意 14.59 より $\pi_1, \cdots, \pi_N$ は忠実であるから, 命題 14.69 より $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N$ も忠実である. ゆえに $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N$ は忠実である. □

補題 14.71. $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環とし, $v \in \mathcal{H}$ を $\mathcal{M}$ の巡回ベクトルとする. このとき,

$$(\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}v)^{\perp}_{\mathbb{R}} = i\overline{\mathcal{M}'_{\mathrm{sa}}v}$$

(実化 Hilbert 空間における直交補空間 (定義 10.198) を参照) が成り立つ.

証明. 任意の $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{sa}}$, $A' \in \mathcal{M}'_{\mathrm{sa}}$ に対し,

$$(Av \mid A'v) = (A'v \mid Av) \in \mathbb{R}$$

であるから,

$$\mathrm{Re}(Av \mid iA'v) = \mathrm{Im}(Av \mid A'v) = 0$$

である. よって,

$$i\overline{\mathcal{M}'_{\mathrm{sa}}v} \subseteq (\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}v)^{\perp}_{\mathbb{R}}$$

が成り立つ. 逆の包含関係を示す. そのためには実 Hilbert 空間の直交分解 3.38 より, 任意の

$$x \in (\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}v)^{\perp}_{\mathbb{R}} \cap (i\mathcal{M}'_{\mathrm{sa}}v)^{\perp}_{\mathbb{R}}$$

を取って $x = 0$ が成り立つことを示せばよい. 今, $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ とおいて自然に $B(\mathcal{H}^2) = M_{2\times 2}(B(\mathcal{H}))$ とみなし, von Neumann 環 $\mathcal{M}$ の $\mathcal{H}^2$ 上への表現

$$\pi : \mathcal{M} \ni A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(B(\mathcal{H})) = B(\mathcal{H}^2)$$

を考える. そして $\mathcal{H}^2$ の閉部分空間 $\overline{\pi(\mathcal{M})\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix}}$ の上への射影作用素を,

$$C := \begin{pmatrix} P & R \\ R^* & Q \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(B(\mathcal{H})) = B(\mathcal{H}^2)$$

とおく．このとき $\mathrm{Ran}(C)$ は $\pi(\mathcal{M})$ の作用に対して不変であるから $C\in\pi(\mathcal{M})'$ であり, C は射影作用素であるから $0\leqslant C\leqslant 1$, $C\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix}$ である．これらのことから特に,

$$P,Q,R\in\mathcal{M}',\ \ 0\leqslant P,Q\leqslant 1,\ \ (1-P)v=Rx \tag{14.43}$$

が成り立つことが分かる．$x\in(\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}v)_{\mathbb{R}}^{\perp}$ より,

$$\mathrm{Re}(x\mid Av)=0\ \ (\forall A\in\mathcal{M}_{\mathrm{sa}})$$

であるから,

$$(Av\mid x)=-(x\mid Av)=-(Ax\mid v)\ \ (\forall A\in\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}),$$

従って,

$$(Av\mid x)+(Ax\mid v)=0\ \ (\forall A\in\mathcal{M}_{\mathrm{sa}})$$

であり, $\mathcal{M}=\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}+i\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}$ であるから,

$$(Av\mid x)+(Ax\mid v)=0\ \ (\forall A\in\mathcal{M})$$

である．よって $\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}\in\mathrm{Ran}(C)^{\perp}=\mathrm{Ran}(1-C)$ であるから,

$$Px+Rv=0 \tag{14.44}$$

が成り立つ．また $x\in(i\mathcal{M}'_{\mathrm{sa}}v)_{\mathbb{R}}^{\perp}$ より,

$$\mathrm{Im}(x\mid A'v)=\mathrm{Re}(x\mid iA'v)=0\ \ (\forall A'\in\mathcal{M}'_{\mathrm{sa}})$$

であるから,

$$(A'v\mid x)=(x\mid A'v)=(A'x\mid v)\ \ (\forall A'\in\mathcal{M}_{\mathrm{sa}})$$

であり, $\mathcal{M}'=\mathcal{M}'_{\mathrm{sa}}+i\mathcal{M}'_{\mathrm{sa}}$ より,

$$(A'v\mid x)=(A'x\mid v)\ \ (\forall A'\in\mathcal{M}')$$

である．よって (14.43) より特に,

$$(Rv\mid x)=(Rx\mid v) \tag{14.45}$$

が成り立つ．(14.43), (14.44), (14.45) より,

$$0\leqslant(Px\mid x)=-(Rv\mid x)=-(Rx\mid v)=-((1-P)v\mid v)\leqslant 0$$

なので,

$$\|\sqrt{P}x\|^2=(Px\mid x)=0,\ \ \|\sqrt{(1-P)}v\|^2=((1-P)v\mid v)=0,$$

従って,

$$Px=(1-P)v=0$$

である．ここで v は $\mathcal{M}$ の巡回ベクトルなので, 命題 14.58 より, v は $\mathcal{M}'$ の分離ベクトルである．そして $1-P\in\mathcal{M}'$ であり $(1-P)v=0$ であるから $P=1$ である．よって $x=Px=0$ である．□

補題 14.72. $\mathcal{M}\subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環, $v\in\mathcal{H}$ を $\mathcal{M}$ の巡回ベクトルとする．そして $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{M}$, $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{M}'$ をそれぞれ部分 $*$-環で,

$$\mathcal{A}\mathcal{H}=\mathrm{span}\{Au : A\in\mathcal{A}, u\in\mathcal{H}\},\ \ \mathcal{B}\mathcal{H}=\mathrm{span}\{Bu : B\in\mathcal{B}, u\in\mathcal{H}\}$$

が $\mathcal{H}$ で稠密であるものとする．このとき次は互いに同値である．

(1) $\mathcal{A}''=\mathcal{M}$, $\mathcal{B}''=\mathcal{M}'$.

(2) $(\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}v)_{\mathbb{R}}^{\perp} = i\overline{\mathcal{B}_{\mathrm{sa}}v}$.
(3) $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}v + i\mathcal{B}_{\mathrm{sa}}v}$.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとすると, 二重可換子環定理 10.178 より, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ はそれぞれ von Neumann 環 $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ において WOT 稠密であるから, Kaplansky の稠密性定理 14.60 より $\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}, \mathcal{B}_{\mathrm{sa}}$ はそれぞれ $\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}, \mathcal{M}'_{\mathrm{sa}}$ において SOT 稠密である. このことと補題 14.71 より,

$$(\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}v)_{\mathbb{R}}^{\perp} = (\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}v)_{\mathbb{R}}^{\perp} = i\overline{\mathcal{M}'_{\mathrm{sa}}v} = i\overline{\mathcal{B}_{\mathrm{sa}}v}$$

であるから (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (3) は $\mathcal{H}$ の実化 Hilbert 空間 (定義 10.198) の直交分解より明らかである.
(3) $\Rightarrow$ (2) は $i\overline{\mathcal{B}_{\mathrm{sa}}v} \subseteq (\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}v)_{\mathbb{R}}^{\perp}$ であることによる.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとすると,

$$i\overline{\mathcal{B}_{\mathrm{sa}}v} \subseteq i\overline{\mathcal{M}'_{\mathrm{sa}}v} = (\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}v)_{\mathbb{R}}^{\perp} \subseteq (\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}v)_{\mathbb{R}}^{\perp} = i\overline{\mathcal{B}_{\mathrm{sa}}v}$$

であるから $\overline{\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}v} = \overline{\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}v}$ が成り立つ. よって,

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{M}v} = \overline{\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}v + i\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}v} = \overline{\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}v + i\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}v} = \overline{\mathcal{A}v} \tag{14.46}$$

が成り立つ. また,

$$i\mathcal{A}'_{\mathrm{sa}}v \subseteq (\mathcal{A}_{\mathrm{sa}}v)_{\mathbb{R}}^{\perp} = i\overline{\mathcal{B}_{\mathrm{sa}}v} \tag{14.47}$$

である. 今, 任意の $A' \in \mathcal{A}'_{\mathrm{sa}}$ と任意の $B' \in \mathcal{B}'_{\mathrm{sa}}$ を取る. (14.47) より $\mathcal{B}_{\mathrm{sa}}$ の列 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty} B_n v = A'v$ なるものが取れる. よって任意の $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ に対し,

$$\begin{aligned}(A'B'A_1v \mid A_2v) &= (B'A_1v \mid A_2A'v) = \lim_{n\to\infty}(B'A_1v \mid A_2B_nv)\\ &= \lim_{n\to\infty}(B'A_1B_nv \mid A_2v) = (B'A'A_1v \mid A_2v)\end{aligned}$$

であるので (14.46) より $A'B' = B'A'$ が成り立つ. ゆえに $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}''$ であるから,

$$\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{M}''' = \mathcal{M}'$$

が成り立つ. これより $\mathcal{A}'' = \mathcal{M}'' = \mathcal{M}, \mathcal{B}'' = \mathcal{M}'$ なので (1) が成り立つ. □

補題 14.73. $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ を Hilbert 空間, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{K}$ をそれぞれ実線型部分空間とし,

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{L} + i\mathcal{L}}, \quad \mathcal{K} = \overline{\mathcal{R} + i\mathcal{R}}$$

が成り立つとする. このときテンソル積 Hilbert 空間 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ の実線型部分空間

$$\mathcal{L} \odot \mathcal{R} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{x \otimes y : x \in \mathcal{L}, y \in \mathcal{R}\}, \quad \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp} \odot \mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{\perp} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{x \otimes y : x \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp}, y \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{\perp}\}$$

[*305]に対し,

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} = \overline{\mathcal{L} \odot \mathcal{R} + i(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp} \odot \mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{\perp})}$$

が成り立つ.

証明. 任意の

$$z \in \left(\mathcal{L} \odot \mathcal{R} + i(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp} \odot \mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{\perp})\right)_{\mathbb{R}}^{\perp} \tag{14.48}$$

を取り固定する. $z = 0$ が成り立つことを示せばよい. 実化 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}, \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ に対し,

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \ni (x, y) \mapsto \mathrm{Re}(x \otimes y \mid z) \in \mathbb{R}$$

[*305] ただし $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}$ は実係数による線型結合全体を表す. $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp}, \mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{\perp}$ は実化 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}, \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ における $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ の直交補空間 (定義 10.198) である.

は有界双線型汎関数であるから, 定理 3.49 より, $T \in B(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}, \mathcal{K}_{\mathbb{R}})$ で,

$$\mathrm{Re}(x \otimes y \mid z) = \mathrm{Re}(Tx \mid y) \quad (\forall x \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}, \forall y \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}})$$

なるものが定まる. ここで,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(Tix \mid y) &= \mathrm{Re}((ix) \otimes y \mid z) = \mathrm{Re}(x \otimes iy \mid z) = \mathrm{Re}(Tx \mid iy) \\ &= \mathrm{Re}(-iTx \mid y) \quad (\forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in \mathcal{K})\end{aligned}$$

より $Tix = -iTx$ $(\forall x \in \mathcal{H})$ であるから, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ は有界反線型作用素である. そこで T の反線型共役作用素を $T^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ (定義 10.192) とおく. 今, (14.48) より,

$$0 = \mathrm{Re}(x \otimes y \mid z) = \mathrm{Re}(Tx \mid y) = \mathrm{Re}(T^*y \mid x) \quad (\forall x \in \mathcal{L}, \forall y \in \mathcal{R})$$

であるから,

$$T\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{\perp}, \quad T^*\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp} \tag{14.49}$$

である. また (14.48) より,

$$0 = \mathrm{Re}(i(x \otimes y) \mid z) = \mathrm{Re}(Tx \mid iy) = \mathrm{Re}(T^*y \mid ix) \quad (\forall x \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp}, \forall y \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{\perp})$$

であるから,

$$T\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp} \subseteq (i\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{\perp})_{\mathbb{R}}^{\perp} = i\overline{\mathcal{R}}, \quad T\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{\perp} \subseteq (i\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp})_{\mathbb{R}}^{\perp} = i\overline{\mathcal{L}} \tag{14.50}$$

である. よって (14.49), (14.50) より,

$$T^*T\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp} \subseteq T^*i\overline{\mathcal{R}} \subseteq i\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp} \tag{14.51}$$

であるから,

$$(T^*T)^2\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp} \subseteq T^*Ti\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp}$$

である. ここで T^*T は $\mathcal{H}$ 上の有界非負線型作用素であるから, 連続関数カルキュラス (9.48) より,

$$T^*T\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp} = \sqrt{(T^*T)^2}\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp}$$

であるので, (14.51) より,

$$T^*T\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp} \cap i\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp} = (\mathcal{L} + i\mathcal{L})_{\mathbb{R}}^{\perp} = \{0\}$$

である. これより,

$$T\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp} = \{0\}$$

であるから, (14.49) より,

$$T\mathcal{H} = T(\overline{\mathcal{L}} \oplus_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\perp}) = T\overline{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{\perp}$$

であり, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ は反線型作用素であるから,

$$T\mathcal{H} = Ti\mathcal{H} = iT\mathcal{H} \subseteq i\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{\perp}$$

である. よって,

$$T\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{\perp} \cap i\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{\perp} = (\mathcal{R} + i\mathcal{R})_{\mathbb{R}}^{\perp} = \{0\}$$

であるから $T = 0$ である. ゆえに,

$$\mathrm{Re}(x \otimes y \mid z) = \mathrm{Re}(Tx \mid y) = 0 \quad (\forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in \mathcal{K})$$

なので, $z = 0$ が成り立つ. □

定理 14.74 (冨田の可換子環定理)**.** $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H}), \mathcal{N} \subseteq B(\mathcal{K})$ を von Neumann 環とする. このとき,

$$(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})' = \mathcal{M}' \otimes \mathcal{N}'$$

が成り立つ.

証明.

$$\mathcal{M}'\otimes\mathcal{N}'\subseteq(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})' \tag{14.52}$$

は明らかである．この逆の包含関係を示す．

(1) $\mathcal{M},\mathcal{N}$ が巡回ベクトル $u\in\mathcal{H},v\in\mathcal{K}$ を持つと仮定して示す．このとき，

$$\mathcal{H}=\overline{\mathcal{M}u}=\overline{\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}u+i\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}u},\ \ \mathcal{K}=\overline{\mathcal{N}v}=\overline{\mathcal{N}_{\mathrm{sa}}v+i\mathcal{N}_{\mathrm{sa}}v}$$

であるから，補題 14.73 より，

$$\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}=\overline{\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}u\odot\mathcal{N}_{\mathrm{sa}}v+i((\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}u)^{\perp}_{\mathbb{R}}\odot(\mathcal{N}_{\mathrm{sa}}v)^{\perp}_{\mathbb{R}})} \tag{14.53}$$

が成り立つ．ここで補題 14.71 より，

$$(\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}u)^{\perp}_{\mathbb{R}}=i\overline{\mathcal{M}'_{\mathrm{sa}}u},\ \ (\mathcal{N}_{\mathrm{sa}}v)^{\perp}_{\mathbb{R}}=i\overline{\mathcal{N}'_{\mathrm{sa}}v}$$

であるから，(14.53) より，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}&=\overline{\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}u\odot\mathcal{N}_{\mathrm{sa}}v+i((\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}u)^{\perp}_{\mathbb{R}}\odot(\mathcal{N}_{\mathrm{sa}}v)^{\perp}_{\mathbb{R}})}\\&=\overline{\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}u\odot\mathcal{N}_{\mathrm{sa}}v+i(\mathcal{M}'_{\mathrm{sa}}u\odot\mathcal{N}'_{\mathrm{sa}}v)}\\&=\overline{(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})_{\mathrm{sa}}(u\otimes v)+i(\mathcal{M}'\otimes\mathcal{N}')_{\mathrm{sa}}(u\otimes v)}\end{aligned} \tag{14.54}$$

が成り立つ．$\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}=\overline{\mathcal{M}u\odot\mathcal{N}v}=\overline{(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})(u\otimes v)}$ より $u\otimes v\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ は von Neumann 環 $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ の巡回ベクトルであるから，(14.54), (14.52) と補題 14.72 より，

$$\mathcal{M}'\otimes\mathcal{N}'=(\mathcal{M}'\otimes\mathcal{N}')''=(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})'$$

が成り立つ．

(2) 一般の場合を示す．(14.52) の逆の包含関係を示すには $(\mathcal{M}'\otimes\mathcal{N}')'\subseteq(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})''$ を示せばよいので，任意の $A\in(\mathcal{M}'\otimes\mathcal{N}')'$ と任意の $B\in(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})'$ を取り $AB=BA$ が成り立つことを示せばよい．そしてこれを示すには任意の $T\in B^1(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})_+$ に対し $\mathrm{Tr}((AB)T)=\mathrm{Tr}((BA)T)$ が成り立つことを示せばよい．ここで $\mathcal{H}$ の CONS を $\{e_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{K}$ の CONS を $\{f_j\}_{j\in J}$ とすると $\{e_i\otimes f_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ は $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ の CONS (命題 10.94) であるから，定理 10.158 の (4) の証明より，任意の $T\in B^1(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})_+$ に対し $\{\lambda_{i,j}\}_{(i,j)\in I\times J}\subseteq[0,\infty)$ で，

$$T=\sum_{(i,j)\in I\times J}\lambda_{i,j}(e_i\otimes f_j)\odot(e_i\otimes f_j)\ \ (\text{トレースノルムで収束. }\odot\text{ は Schatten 形式.})$$

なるものが取れ，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}((AB)T)&=\sum_{(i,j)\in I\times J}\lambda_{i,j}\mathrm{Tr}(AB(e_i\otimes f_j)\odot(e_i\otimes f_j))=\sum_{(i,j)\in I\times J}\lambda_{i,j}(AB(e_i\otimes f_j)\mid e_i\otimes f_j),\\\mathrm{Tr}((BA)T)&=\sum_{(i,j)\in I\times J}\lambda_{i,j}\mathrm{Tr}(BA(e_i\otimes f_j)\odot(e_i\otimes f_j))=\sum_{(i,j)\in I\times J}\lambda_{i,j}(BA(e_i\otimes f_j)\mid e_i\otimes f_j)\end{aligned}$$

である．これより任意の単位ベクトル $u\in\mathcal{H},v\in\mathcal{K}$ を取り，

$$(AB(u\otimes v)\mid u\otimes v)=(BA(u\otimes v)\mid u\otimes v)$$

が成り立つことを示せば十分である．今，閉部分空間 $\overline{\mathcal{M}u}\subseteq\mathcal{H}$, $\overline{\mathcal{N}v}\subseteq\mathcal{K}$ の上への射影作用素を $P'\in B(\mathcal{H})$, $Q'\in B(\mathcal{K})$ とおく．$\mathrm{Ran}(P')=\overline{\mathcal{M}u}$ は $\mathcal{M}$ の作用に対して不変なので $P'\in\mathcal{P}(\mathcal{M}')$ であり，$\mathrm{Ran}(Q')=\overline{\mathcal{N}v}$ は $\mathcal{N}$ の作用に対して不変なので $Q'\in\mathcal{P}(\mathcal{N}')$ である．そこで誘導 von Neumann 環 (定義 14.49) $\mathcal{M}_{P'}\subseteq B(\mathrm{Ran}(P'))$, $\mathcal{N}_{Q'}\subseteq B(\mathrm{Ran}(Q'))$ を考えれば，u,v は $\mathcal{M}_{P'},\mathcal{N}_{Q'}$ の巡回ベクトルであるから (1) より，

$$(\mathcal{M}_{P'}\otimes\mathcal{N}_{Q'})'=(\mathcal{M}_{P'})'\otimes(\mathcal{N}_{Q'})' \tag{14.55}$$

が成り立つ. $P'\otimes Q'\in\mathcal{P}(\mathcal{M}'\otimes\mathcal{N}')$, $A\in(\mathcal{M}'\otimes\mathcal{N}')'$ であるから, 定理 14.50 より,

$$A|_{\mathrm{Ran}(P'\otimes Q')}\in(\mathcal{M}'\otimes\mathcal{N}')'_{P'\otimes Q'}=((\mathcal{M}'\otimes\mathcal{N}')_{P'\otimes Q'})'=(\mathcal{M}'_{P'}\otimes\mathcal{N}'_{Q'})'=((\mathcal{M}_{P'})'\otimes(\mathcal{N}_{Q'})')'$$

である. よって (14.55) より,

$$A|_{\mathrm{Ran}(P'\otimes Q')}\in\mathcal{M}_{P'}\otimes\mathcal{N}_{Q'}\tag{14.56}$$

が成り立つ. また (14.52) より $P'\otimes Q'\in\mathcal{P}((\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})')$ であり, $B\in(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})'$ あるから, 定理 14.50 より,

$$(P'\otimes Q')B|_{\mathrm{Ran}(P'\otimes Q')}\in(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})'_{P'\otimes Q'}=((\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})_{P'\otimes Q'})'=(\mathcal{M}_{P'}\otimes\mathcal{N}_{Q'})'\tag{14.57}$$

である. よって (14.56), (14.57) より,

$$\begin{aligned}(P'\otimes Q')AB(P'\otimes Q')&=(P'\otimes Q')A(P'\otimes Q')B(P'\otimes Q')\\&=(P'\otimes Q')B(P'\otimes Q')A(P'\otimes Q')\\&=(P'\otimes Q')BA(P'\otimes Q')\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}(AB(u\otimes v)\mid u\otimes v)&=((P'\otimes Q')AB(P'\otimes Q')(u\otimes v)\mid u\otimes v)\\&=((P'\otimes Q')BA(P'\otimes Q')(u\otimes v)\mid u\otimes v)\\&=(BA(u\otimes v)\mid u\otimes v)\end{aligned}$$

である. よって求める結果を得た.

□

注意 14.75. $\mathcal{M}_1\subseteq B(\mathcal{H}_1),\cdots,\mathcal{M}_N\subseteq B(\mathcal{H}_N)$ を von Neumann 環とする. このとき命題 14.64 より,

$$\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_k=(\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_{k-1})\otimes\mathcal{M}_k\ \ (k=2,\cdots,N)$$

であるから, 冨田の可換子環定理 14.74 と帰納法により,

$$(\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N)'=\mathcal{M}_1'\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N'$$

が成り立つことが分かる.

系 14.76 (冨田の可換子環定理の系)**.** $\mathcal{M}_1,\mathcal{N}_1\subseteq B(\mathcal{H}_1),\cdots,\mathcal{M}_N,\mathcal{N}_N\subseteq B(\mathcal{H}_N)$ を von Neumann 環とする. このとき,

(1) $(\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N)\cap(\mathcal{N}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{N}_N)=(\mathcal{M}_1\cap\mathcal{N}_1)\otimes\cdots\otimes(\mathcal{M}_N\otimes\mathcal{N}_N)$ が成り立つ.

(2) $\mathcal{M}_1,\cdots,\mathcal{M}_N$ がそれぞれ因子環 (定義 14.47) ならば $\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N$ も因子環である.

証明. (1) 冨田の可換子環定理 14.74 より,

$$\begin{aligned}&(\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N)\cap(\mathcal{N}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{N}_N)=\big((\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N)'\cup(\mathcal{N}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{N}_N)'\big)'\\&=\big((\mathcal{M}_1'\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N')\cup(\mathcal{N}_1'\otimes\cdots\otimes\mathcal{N}_N')\big)'=\big((\mathcal{M}_1'\cup\mathcal{N}_1')''\otimes\cdots\otimes(\mathcal{M}_N'\cup\mathcal{N}_N')''\big)'\\&=((\mathcal{M}_1\cap\mathcal{N}_1)'\otimes\cdots\otimes(\mathcal{M}_N\cap\mathcal{N}_N)')'=(\mathcal{M}_1\cap\mathcal{N}_1)\otimes\cdots\otimes(\mathcal{M}_N\cap\mathcal{N}_N).\end{aligned}$$

(2) 冨田の可換子環定理 14.74 と (1) より,

$$\begin{aligned}&(\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N)\cap(\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N)'=(\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N)\cap(\mathcal{M}_1'\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N')\\&=(\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_1')\otimes\cdots\otimes(\mathcal{M}_N\cap\mathcal{M}_N')=\mathbb{C}1\otimes\cdots\otimes\mathbb{C}1=\mathbb{C}1.\end{aligned}$$

□

系 14.77. $\pi_1,\cdots,\pi_N$ をそれぞれ局所コンパクト群 $G_1,\cdots,G_N$ の既約なユニタリ表現とする. このとき局所コンパクト群 $G_1\times\cdots\times G_N$ のユニタリ表現

$$\pi_1\otimes\cdots\otimes\pi_N:G_1\times\cdots\times G_N\ni(x_1,\cdots,x_N)\mapsto\pi_1(x_1)\otimes\cdots\otimes\pi_N(x_N)\in\mathcal{U}(\mathcal{H}_{\pi_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\pi_N})$$

は既約である.

証明. Schur の補題 12.43 より $\pi_j(G_j)' = \mathbb{C}1$ であるから, 富田の可換子環定理 14.74 より,

$$\begin{aligned}&(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N)(G_1 \times \cdots \times G_N)' = (\mathrm{span}(\pi_1(G_1)) \odot \cdots \odot \mathrm{span}(\pi_N(G_N)))' \\ &= (\pi_1(G_1)'' \otimes \cdots \otimes \pi_N(G_N)'')' = \pi_1(G_1)' \otimes \cdots \otimes \pi_N(G_N)' \\ &= \mathbb{C}1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}1 = \mathbb{C}1\end{aligned}$$

である. よって再び Schur の補題 12.43 より $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_N$ は既約である. □

14.5 von Neumann 環上の 1 径数自己同型群, KMS 条件

定義 14.78 (von Neumann 環上の自己同型群)**.** $\mathcal{M}$ を von Neumann 環とする. $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}$ の上への $*$-環同型写像を $\mathcal{M}$ 上の自己同型写像と言う. 定理 9.79 と系 14.42 より $\mathcal{M}$ 上の自己同型写像は自動的に等長かつ正規である. $\mathcal{M}$ 上の自己同型写像全体を $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ と表す. $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ は写像の合成を乗法として乗法群をなす. この乗法群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ を $\mathcal{M}$ 上の自己同型群と言う.

定義 14.79 (von Neumann 環上の弱連続な 1 径数自己同型群)**.** $\mathcal{M}$ を von Neumann 環とする. 群準同型写像 $\alpha = (\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}} : \mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha_t \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ で, 任意の $\varphi \in \mathcal{M}_*$ に対し,

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi \circ \alpha_t \in \mathcal{M}_*$$

が $\mathcal{M}_*$ のノルムに関して連続であるものを $\mathcal{M}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群と言う.

注意 14.80 (弱連続な 1 径数自己同型群の連続性に関する注意)**.** $\alpha = (\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を von Neumann 環 $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群とする. 任意の $A \in \mathcal{M}$ を取り固定し,

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha_t(A) \in \mathcal{M} \tag{14.58}$$

を考える. 定義 14.79 より任意の $\varphi \in \mathcal{M}_*$ に対し,

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi(\alpha_t(A)) \in \mathbb{C}$$

は連続であるから (14.58) は σ-WOT 連続である. よって特に WOT 連続であり, 任意の $s, t \in \mathbb{R}$, 任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\|\alpha_s(A)v - \alpha_t(A)v\|^2 = (\alpha_s(A^*A)v \mid v) - 2\mathrm{Re}(\alpha_s(A)v \mid \alpha_t(A)v) + (\alpha_t(A^*A)v \mid v)$$

であるから (14.58) は SOT 連続である. ここで $\|\alpha_t(A)\| = \|A\|$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ であるから命題 10.170 より (14.58) は σ-SOT 連続である.

命題 14.81. $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環, L を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし,

$$e^{itL}Ae^{-itL} \in \mathcal{M} \quad (\forall A \in \mathcal{M}, \forall t \in \mathbb{R})$$

が成り立つとする. このとき,

$$\alpha_t(A) := e^{itL}Ae^{-itL} \quad (\forall A \in \mathcal{M}, \forall t \in \mathbb{R})$$

とおくと, $\alpha = (\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ は $\mathcal{M}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群である.

証明. α が $\mathbb{R}$ から $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ への群準同型写像であることは明らかである. 任意の $\varphi \in \mathcal{M}_*$ を取り, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ で,

$$\varphi(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (Au_n \mid v_n) = ((Au_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (v_n)_{n\in\mathbb{N}})$$

なるものを取ると, $\|A\| \leqslant 1$ なる任意の $A \in \mathcal{M}$ と任意の $s, t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}&|\varphi(\alpha_s(A)) - \varphi(\alpha_t(A))| = \left|(e^{isL}Ae^{-isL}u_n - e^{itL}Ae^{-itL}u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right| \\ &\leqslant \left|(e^{isL}A\left(e^{-isL}u_n - e^{-itL}u_n\right))_{n\in\mathbb{N}} \mid (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right| + \left|(\left(e^{isL} - e^{itL}\right)Ae^{-itL}u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right| \\ &\leqslant \left|((e^{-isL}u_n - e^{-itL}u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (v_n)_{n\in\mathbb{N}})\right| + \left|((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (e^{-isL}v_n - e^{-itL}v_n)_{n\in\mathbb{N}})\right|\end{aligned}$$

であるから,

$$\|\varphi\circ\alpha_s-\varphi\circ\alpha_t\| \leqslant \left|\left((e^{-isL}u_n-e^{-itL}u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right| + \left|\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (e^{-isL}v_n-e^{-itL}v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right|$$

が成り立つ. 右辺は $s\to t$ で 0 に収束するので $\mathbb{R}\ni t\mapsto\varphi\circ\alpha_t\in\mathcal{M}_*$ は連続である. ゆえに α は $\mathcal{M}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群である. □

定義 14.82 (von Neumann 環上の弱連続な 1 径数自己同型群に関して解析的な元)**.** $\alpha=(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を von Neumann 環 $\mathcal{M}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群とする. $A\in\mathcal{M}$ が α に関して解析的であるとは,

$$\mathbb{R}\ni t\mapsto\alpha_t(A)\in\mathcal{M}$$

が Banach 空間 $\mathcal{M}$ 値の整関数 ($\mathbb{C}$ 上の正則関数) に拡張できることを言う. 一致の原理 (定理 7.24, 注意 7.38) よりそのような拡張は一意的であるから, その拡張を,

$$\mathbb{C}\ni z\mapsto\alpha_z(A)\in\mathcal{M}$$

と表す. そして,

$$\mathcal{M}_\alpha := \{A\in\mathcal{M} : A \text{ は } \alpha \text{ に関して解析的}\}$$

とおく.

命題 14.83 ($\mathcal{M}_\alpha$ の基本性質)**.** $\alpha=(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を von Neumann 環 $\mathcal{M}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群とし, α に関して解析的な元全体を $\mathcal{M}_\alpha\subseteq\mathcal{M}$ とする. このとき,

(1) $\mathcal{M}_\alpha$ は $\mathcal{M}$ の単位元を含む部分 $*$-環であり, 任意の $A,B\in\mathcal{M}_\alpha$, 任意の $w,z\in\mathbb{C}$ に対し,

$$\alpha_z(A+B)=\alpha_z(A)+\alpha_z(B),\quad \alpha_z(wA)=w\alpha_z(A),$$
$$\alpha_z(AB)=\alpha_z(A)\alpha_z(B),\quad \alpha_z(A^*)=\alpha_{\overline{z}}(A)^*$$

が成り立つ.

(2) 任意の $A\in\mathcal{M}_\alpha$, $w\in\mathbb{C}$ に対し $\alpha_w(A)\in\mathcal{M}_\alpha$ であり,

$$\alpha_z(\alpha_w(A))=\alpha_{z+w}(A)\quad(\forall z\in\mathbb{C}).$$

が成り立つ.

(3) $\mathcal{M}=\mathcal{M}_\alpha''=\overline{\mathcal{M}_\alpha}$ が成り立つ. ただし閉包は WOT, SOT, σ-WOT, σ-SOT のいずれかによるものである.

証明. (1) $\alpha_t(1)=1$ ($\forall t\in\mathbb{R}$) であるから $1\in\mathcal{M}_\alpha$ である. 任意の $A,B\in\mathcal{M}_\alpha$, 任意の $w\in\mathbb{C}$ に対し,

$$\mathbb{C}\ni z\mapsto\alpha_z(A)+\alpha_z(B)\in\mathcal{M},\quad \mathbb{C}\ni z\mapsto w\alpha_z(A)\in\mathcal{M},$$
$$\mathbb{C}\ni z\mapsto\alpha_z(A)\alpha_z(B)\in\mathcal{M},\quad \mathbb{C}\ni z\mapsto\alpha_{\overline{z}}(A)^*\in\mathcal{M}$$

はそれぞれ Banach 空間 $\mathcal{M}$ 値の整関数であり, $\mathbb{R}$ 上でそれぞれ,

$$\mathbb{R}\ni t\mapsto\alpha_t(A+B)\in\mathcal{M},\quad \mathbb{R}\ni t\mapsto\alpha_t(wA)\in\mathcal{M},$$
$$\mathbb{R}\ni t\mapsto\alpha_t(AB)\in\mathcal{M},\quad \mathbb{R}\ni t\mapsto\alpha_t(A^*)\in\mathcal{M}$$

に一致するので, 一致の原理 (定理 7.24, 注意 7.38) より求める結果を得る.

(2) 任意の $A\in\mathcal{M}_\alpha$ を取り固定する. 任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し,

$$\mathbb{C}\ni w\mapsto\alpha_t(\alpha_w(A))\in\mathcal{M},\quad \mathbb{C}\ni w\mapsto\alpha_{t+w}(A)\in\mathcal{M}$$

はそれぞれ Banach 空間 $\mathcal{M}$ 値の整関数であり $\mathbb{R}$ 上で, 一致の原理より,

$$\alpha_t(\alpha_w(A))=\alpha_{t+w}(A)\quad(\forall t\in\mathbb{R},\forall w\in\mathbb{C})$$

が成り立つ．よって任意の $w \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha_t(\alpha_w(A)) \in \mathcal{M}$$

は Banach 空間 $\mathcal{M}$ 値の整関数

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \alpha_{z+w}(A) \in \mathcal{M}$$

に拡張できるから, $\alpha_w(A) \in \mathcal{M}_\alpha$ であり，

$$\alpha_z(\alpha_w(A)) = \alpha_{z+w}(A) \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

が成り立つ．

(3) (1) より $\mathcal{M}_\alpha$ は $\mathcal{M}$ の単位元を含む部分 $*$-環であるから, 二重可換子環定理 10.178 より $\mathcal{M}_\alpha$ が $\mathcal{M}$ において σ-WOT で稠密であることを示せば十分である．任意の $A \in \mathcal{M}$, 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し，

$$\mathcal{M}_* \ni \varphi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon}} \varphi(\alpha_t(A))dt \in \mathbb{C}$$

は有界線型汎関数であるから, 定理 14.34 より, $A_\varepsilon \in \mathcal{M}$ で,

$$\varphi(A_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon}} \varphi(\alpha_t(A))dt \quad (\forall \varphi \in \mathcal{M}_*)$$

なるものが定まる．そして任意の $\varphi \in \mathcal{M}_*$ に対し, 変数変換と Lebesgue 優収束定理より,

$$\varphi(A_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} \varphi(\alpha_{\sqrt{\varepsilon}t}(A))dt \to \varphi(A) \quad (\varepsilon \to +0)$$

であるから,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} A_\varepsilon = A \quad (\text{in } \sigma\text{-WOT})$$

が成り立つ．これより任意の $A \in \mathcal{M}$, 任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ を取り固定し, $A_\varepsilon \in \mathcal{M}_\alpha$ が成り立つことを示せばよい．まず,

$$\varphi(\alpha_s(A_\varepsilon)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon}} \varphi(\alpha_{t+s}(A))dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(t-s)^2}{2\varepsilon}} \varphi(\alpha_t(A))dt \quad (\forall s \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{M}_*) \tag{14.59}$$

であることに注意する．任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\mathcal{M}_* \ni \varphi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(t-z)^2}{2\varepsilon}} \varphi(\alpha_t(A))dt \in \mathbb{C}$$

は有界線型汎関数であるから, 定理 14.34 より, $A_\varepsilon(z) \in \mathcal{M}$ で,

$$\varphi(A_\varepsilon(z)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(t-z)^2}{2\varepsilon}} \varphi(\alpha_t(A))dt \quad (\forall \varphi \in \mathcal{M}_*)$$

なるものが定まる．ここで (14.59) より,

$$A_\varepsilon(s) = \alpha_s(A_\varepsilon) \quad (\forall s \in \mathbb{R})$$

であるので, $A_\varepsilon \in \mathcal{M}_\alpha$ を示すには,

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto A_\varepsilon(z) \in \mathcal{M}$$

が Banach 空間 $\mathcal{M}$ 値の整関数であることを示せばよい．任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\mathcal{M}_* \ni \varphi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} \frac{t-z}{\varepsilon} e^{-\frac{(t-z)^2}{2\varepsilon}} \varphi(\alpha_t(A))dt \in \mathbb{C}$$

は有界線型汎関数なので, 定理 14.34 より, $B_\varepsilon(z) \in \mathcal{M}$ で,

$$\varphi(B_\varepsilon(z)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} \frac{t-z}{\varepsilon} e^{-\frac{(t-z)^2}{2\varepsilon}} \varphi(\alpha_t(A))dt \quad (\forall \varphi \in \mathcal{M}_*)$$

なるものが定まる. 任意の $z \in \mathbb{C}, h \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ に対し, 定理 14.34 より,

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{h}(A_\varepsilon(z+h)-A_\varepsilon(z))-B_\varepsilon(z)\right\| \\
&=\sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{M}_*,\\ \|\varphi\|\leqslant 1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{h}\left(e^{-\frac{(t-(z+h))^2}{2\varepsilon}}-e^{-\frac{(t-z)^2}{2\varepsilon}}\right)-\frac{t-z}{\varepsilon}e^{-\frac{(t-z)^2}{2\varepsilon}}\right)\varphi(\alpha_t(A))dt\right| \\
&\leqslant\frac{\|A\|}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{1}{h}\left(e^{-\frac{(t-(z+h))^2}{2\varepsilon}}-e^{-\frac{(t-z)^2}{2\varepsilon}}\right)-\frac{t-z}{\varepsilon}e^{-\frac{(t-z)^2}{2\varepsilon}}\right|dt
\end{aligned}$$

であるから, Lebesgue 優収束定理より,

$$\frac{d}{dz}A_\varepsilon(z)=B_\varepsilon(z)\ \ (\forall z\in\mathbb{C})$$

が成り立つ. そして同様にして $\mathbb{C}\ni z\mapsto B_\varepsilon(z)\in\mathcal{M}$ が連続であることも分かる. よって $\mathbb{C}\ni z\mapsto A_\varepsilon(z)\in\mathcal{M}$ は Banach 空間 $\mathcal{M}$ 値の整関数である.

□

定義 14.84 (KMS 条件)**.** $\mathcal{M}$ を von Neumann 環, $\alpha=(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を $\mathcal{M}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群, β を正数とする. 正規非負線型汎関数 $\varphi\in\mathcal{M}_{*,+}$ が α に関して β-KMS 条件を満たす (あるいは (α,β)-KMS 条件を満たす) とは,

$$\varphi(B\alpha_{i\beta}(A))=\varphi(AB)\ \ (\forall A\in\mathcal{M}_\alpha,\forall B\in\mathcal{M})$$

が成り立つことを言う. (α,β)-KMS 条件を満たす正規状態のことを (α,β)-KMS 状態と言う.

定義 14.85 (弱連続な 1 径数自己同型群に対する正規状態の平衡性)**.** $\mathcal{M}$ を von Neumann 環, $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を $\mathcal{M}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群とする. $\mathcal{M}$ 上の正規状態 φ が,

$$\varphi(\alpha_t(A))=\varphi(A)\ \ (\forall A\in\mathcal{M},\forall t\in\mathbb{R})$$

を満たすとき, φ は $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ に対して平衡であると言う.

命題 14.86 (KMS 状態の平衡性, 忠実な KNS 状態に対する弱連続な 1 径数自己同型群の一意性)**.** $\mathcal{M}$ を von Neumann 環, $\alpha^1,\cdots,\alpha^N$ をそれぞれ $\mathcal{M}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群, β を正数とする. そして $\varphi\in\mathcal{M}_{*,+}$ が各 $j\in\{1,\cdots,N\}$ に関して (α^j,β)-KMS 条件を満たすとする. このとき,

(1)
$$\varphi(\alpha_z^1(A_1)\cdots\alpha_z^N(A_N))=\varphi(A_1\cdots A_N)\ \ (\forall A_1\in\mathcal{M}_{\alpha^1},\cdots,A_N\in\mathcal{M}_{\alpha^N},\forall z\in\mathbb{C}),\tag{14.60}$$
$$\varphi(\alpha_t^1(A_1)\cdots\alpha_t^N(A_N))=\varphi(A_1\cdots A_N)\ \ (\forall A_1,\cdots,A_N\in\mathcal{M},\forall t\in\mathbb{R})\tag{14.61}$$

が成り立つ. 特に φ は $\alpha^1,\cdots,\alpha^N$ に対して平衡である.

(2) もし φ が忠実ならば $\alpha^1=\cdots=\alpha^N$ が成り立つ.

証明. (1) 任意の $A_1\in\mathcal{M}_{\alpha^1},\cdots,A_N\in\mathcal{M}_{\alpha^N}$ に対し,

$$f(z):=\varphi(\alpha_z^1(A_1)\cdots\alpha_z^N(A_N))\ \ (\forall z\in\mathbb{C})$$

として整関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を定義すると, KMS 条件と命題 14.83 の (2) より,

$$\begin{aligned}
f(z+i\beta)&=\varphi(\alpha_{i\beta}^1(\alpha_z^1(A_1))\cdots\alpha_{i\beta}^N(\alpha_z^N(A_N)))=\varphi(\alpha_z^N(A_N)\alpha_{i\beta}^1(\alpha_z^1(A_1))\cdots\alpha_{i\beta}^{N-1}(\alpha_z(A_{N-1}))) \\
&=\varphi(\alpha_z^{N-1}(A_{N-1})\alpha_z^N(A_N)\alpha_{i\beta}^1(\alpha_z^1(A_1))\cdots\alpha_{i\beta}^{N-2}(\alpha_z(A_{N-2})))=\cdots \\
&=\varphi(\alpha_z^1(A_1)\cdots\alpha_z^N(A_N))=f(z)\ \ (\forall z\in\mathbb{C})
\end{aligned}$$

が成り立つので, f は周期 $i\beta$ を持つ. よって,

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|=\sup_{0\leqslant\mathrm{Im}(z)\leqslant\beta}|f(z)|\leqslant\|\varphi\|\sup_{0\leqslant\mathrm{Im}(z)\leqslant\beta}\|\alpha_{i\mathrm{Im}(z)}^1(A_1)\cdots\alpha_{i\mathrm{Im}(z)}^N(A_N)\|<\infty$$

[*306]であるから f は有界な整関数なので, Liouville の定理 7.19 より f は定数関数である. ゆえに (14.60) が成り立つ. 命題 14.83 の (3) より $\mathcal{M}_{\alpha^1}, \cdots, \mathcal{M}_{\alpha^N}$ はそれぞれ $\mathcal{M}$ において σ-WOT 稠密なので, 各 α^j と φ の正規性より (14.61) が成り立つ.

(2) φ が忠実であるとする. (1) より任意の $A \in \mathcal{M}$, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\varphi(\alpha_t^1(A) - \alpha_t^2(A))^*(\alpha_t^1(A) - \alpha_t^2(A)))\\&= \varphi(\alpha_t^1(A^*)\alpha_t^1(A)) - \varphi(\alpha_t^1(A^*)\alpha_t^2(A)) - \varphi(\alpha_t^2(A^*)\alpha_t^1(A)) + \varphi(\alpha_t^2(A^*)\alpha_t^2(A))\\&= \varphi(A^*A) - \varphi(A^*A) - \varphi(A^*A) + \varphi(A^*A) = 0\end{aligned}$$

であるから, φ の忠実性より $\alpha_t^1(A) = \alpha_t^2(A)$ が成り立つ.

□

補題 14.87 (KMS 状態の GNS 表現). $\mathcal{M}$ を von Neumann 環, $\alpha = (\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を $\mathcal{M}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群, β を正数とし, $\varphi \in \mathcal{M}_{*,+}\backslash\{0\}$ が (α, β)-KMS 条件を満たすとする. そして (π, v) を φ に対する GNS 表現 (定義 14.20) とする. このとき v は von Neumann 環 $\pi(\mathcal{M})$[*307]の巡回分離ベクトルである.

証明. (π, v) は GNS 表現 (定義 14.20) であるから v は $\pi(\mathcal{M})$ の巡回ベクトルである. v が $\pi(\mathcal{M})$ の分離ベクトルであることを示せばよい. $\pi(B^*)v = 0$ を満たす任意の $B \in \mathcal{M}$ を取る. このとき KMS 条件より,

$$\varphi(AB) = \varphi(B\alpha_{i\beta}(A)) = (\pi(\alpha_{i\beta}(A))v \mid \pi(B^*)v) = 0 \quad (\forall A \in \mathcal{M}_\alpha)$$

であるから,

$$(\pi(B)v \mid \pi(A^*)v) = \varphi(AB) = 0 \quad (\forall A \in \mathcal{M}_\alpha) \tag{14.62}$$

である. ここで命題 14.83 より $\mathcal{M}_\alpha \subseteq \mathcal{M}$ は σ-WOT 稠密な部分 $*$-環であり, π は正規である (命題 14.46) から,

$$\mathcal{H}_\pi = \overline{\pi(\mathcal{M})v} = \overline{\pi(\mathcal{M}_\alpha)v}$$

が成り立つ. これより (14.62) は $\pi(B)v = 0$ を意味する. よって,

$$\{B \in \mathcal{M} : \pi(B^*)v = 0\} = \{B \in \mathcal{M} : \pi(B)v = 0\} \tag{14.63}$$

が成り立つ. $\pi(A)v = 0$ なる任意の $\pi(A) \in \pi(\mathcal{M})$ に対し, (14.63) より,

$$\pi(A)^*\pi(B)v = \pi(A^*B)v = \pi(B^*A)v = \pi(B^*)\pi(A)v = 0 \quad (\forall B \in \mathcal{M})$$

であるから, $\mathcal{H}_\pi = \overline{\pi(\mathcal{M})v}$ より $\pi(A)^* = 0$, 従って $\pi(A) = 0$ である. ゆえに v は $\pi(\mathcal{M})$ の分離ベクトルである. □

定理 14.88 (因子環上の KMS 状態の忠実性). $\mathcal{M}$ を因子環 (定義 14.47), $\alpha = (\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を $\mathcal{M}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群, β を正数とし, $\varphi \in \mathcal{M}_{*,+}\backslash\{0\}$ が (α, β)-KMS 条件を満たすとする. このとき φ は忠実である.

証明. (π, v) を φ に対する GNS 表現とすると, 補題 14.87 より, v は von Neumann 環 $\pi(\mathcal{M})$ の巡回分離ベクトルである. そして $\mathcal{M}$ が因子環であることと π が $\mathcal{M}$ の正規表現である (命題 14.46) ことから, 命題 14.48 より, π は忠実である. よって,

$$\{A \in \mathcal{M} : \varphi(A^*A) = 0\} = \{A \in \mathcal{M} : \pi(A)v = 0\} = \{A \in \mathcal{M} : \pi(A) = 0\} = \{0\}$$

であるから, φ は忠実である. □

補題 14.89. $\mathcal{M}$ を von Neumann 環, $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_{*,+}$ とし,

$$\psi(B) \leqslant \varphi(B) \quad (\forall B \in \mathcal{M}_+) \tag{14.64}$$

が成り立つとする. このとき $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ を満たす任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し,

[*306] 各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ について $\mathbb{C} \ni z \mapsto \alpha_z^j(A_j) \in \mathcal{M}$ は Banach 空間 $\mathcal{M}$ 値の整関数なので特にノルムで連続であることに注意.

[*307] $\pi(\mathcal{M})$ が von Neumann 環であることについては命題 14.46 と定理 14.45 による.

(1) $A \in \mathcal{M}_+$ で,

$$\psi(B) = \lambda\varphi(AB) + \overline{\lambda}\varphi(BA) \quad (\forall B \in \mathcal{M})$$

を満たすものが存在する.

(2) もし φ が忠実ならば, (1) における $A \in \mathcal{M}_+$ は唯一つである.

証明. (1) 必要ならば λ を正数倍して,

$$\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant \frac{1}{2} \tag{14.65}$$

であると仮定して示せば十分である. 定理 14.34 より $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_*)^*$ であるから, 線型写像

$$\mathcal{M} \ni A \mapsto \lambda\varphi(A\cdot) + \overline{\lambda}\varphi(\cdot A) \in \mathcal{M}_*$$

は $\mathcal{M}$ の σ-WOT と Banach 空間 $\mathcal{M}_*$ の弱位相 (定義 3.74) に関して連続である.[*308] そして $\mathcal{M}$ のノルムが 1 以下の非負元全体 $\mathcal{M}_{+,1}$ は σ-WOT コンパクトな凸集合であるから,

$$\mathcal{C} := \{\lambda\varphi(A\cdot) + \overline{\lambda}\varphi(\cdot A) \in \mathcal{M}_* : A \in \mathcal{M}_{+,1}\}$$

は $\mathcal{M}_*$ の弱位相でコンパクトな凸集合である. $\psi \in \mathcal{C}$ を示せばよい. そこで $\psi \notin \mathcal{C}$ であると仮定して矛盾を導く. $\mathcal{C}$ は $\mathcal{M}_*$ の弱位相に関して閉な凸集合であるから $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_*)^*$ (定理 14.34) であることと $\overline{\omega(B)} = \omega(B^*)$ $(\forall \omega \in \mathcal{C}, \forall B \in \mathcal{M})$ であることに注意して Hahn-Banach の分離定理 3.77 を適用すれば, $B \in \mathcal{M}_{\mathrm{sa}}$ で,

$$\psi(B) > \lambda\varphi(AB) + \overline{\lambda}\varphi(BA) \quad (\forall A \in \mathcal{M}_{+,1})$$

なるものが取れることが分かる. そこで $B \in \mathcal{M}_{\mathrm{sa}}$ の Jordan 分解 (命題 9.56) を $B = B_+ - B_-$ とし, Borel 関数カルキュラスにより $A := \chi_{(\mathrm{id} \geqslant 0)}(B) \in \mathcal{M}_{+,1}$ (定理 10.183 を参照) を考えると,

$$AB = BA = B_+ \geqslant B_+ - B_- = B$$

であるから, φ, ψ の非負性と (14.65) より,

$$\psi(B_+) \geqslant \psi(B) > \lambda\varphi(AB) + \overline{\lambda}\varphi(BA) = 2\mathrm{Re}(\lambda)\varphi(B_+) \geqslant \varphi(B_+)$$

となり (14.64) に矛盾する. よって $\psi \in \mathcal{C}$ が成り立つ.

(2) φ が忠実であるとし, $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{+,1}$ が,

$$\psi(B) = \lambda\varphi(A_jB) + \overline{\lambda}\varphi(BA_j) \quad (\forall B \in \mathcal{M}, j = 1, 2)$$

を満たすとする.

$$\begin{aligned} &2\mathrm{Re}(\lambda)(A_1 - A_2)^2 = (\lambda + \overline{\lambda})(A_1 - A_2)^2 \\ &= \lambda A_1(A_1 - A_2) + \overline{\lambda}(A_1 - A_2)A_1 - \lambda A_2(A_1 - A_2) - \overline{\lambda}(A_1 - A_2)A_2 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} &2\mathrm{Re}(\lambda)\varphi((A_1 - A_2)^2) \\ &= \lambda\varphi(A_1(A_1 - A_2)) + \overline{\lambda}\varphi((A_1 - A_2)A_1) - \lambda\varphi(A_2(A_1 - A_2)) - \overline{\lambda}\varphi((A_1 - A_2)A_2) \\ &= \psi(A_1 - A_2) - \psi(A_1 - A_2) = 0 \end{aligned}$$

である. よって $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ であることと φ の忠実性より $A_1 = A_2$ を得る.

□

定理 14.90 (因子環上の KMS 状態の一意性)**.** $\mathcal{M}$ を因子環 (定義 14.47), $\alpha = (\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$ を $\mathcal{M}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群, β を正数とし, φ_1, φ_2 をそれぞれ (α, β)-KMS 状態とする. このとき $\varphi_1 = \varphi_2$ が成り立つ.

[*308] 連続性はネットによる議論 (命題 1.50) により分かる.

証明.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \in \mathcal{M}_{*,+}$$

とおくと, φ も (α, β)-KMS 条件を満たす.

$$\varphi_j(B) \leqslant \varphi(B) \quad (\forall B \in \mathcal{M}_+, j = 1, 2)$$

であり, 定理 14.88 より φ_1, φ_2 は忠実であるから, 補題 14.89 より, $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_+$ で,

$$\varphi_j(B) = \frac{1}{2}\varphi(A_jB) + \frac{1}{2}\varphi(BA_j) \quad (\forall B \in \mathcal{M}, j = 1, 2) \tag{14.66}$$

を満たすものが一意的に定まる. ここで命題 14.86 より $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ はそれぞれ α に対して平衡であるから,

$$\begin{aligned}\varphi_j(B) = \varphi_j(\alpha_{-t}(B)) &= \frac{1}{2}\varphi(A_j\alpha_{-t}(B) + \frac{1}{2}\varphi(\alpha_{-t}(B)A_j) \\ &= \frac{1}{2}\varphi(\alpha_t(A_j)B) + \frac{1}{2}\varphi(B\alpha_t(A_j)) \quad (\forall B \in \mathcal{M}, \forall t \in \mathbb{R}, j = 1, 2)\end{aligned}$$

である. よって A_1, A_2 の一意性より,

$$\alpha_t(A_j) = A_j \quad (\forall t \in \mathbb{R}, j = 1, 2)$$

であるので, $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_\alpha$ であり,

$$\alpha_z(A_j) = A_j \quad (\forall z \in \mathbb{C}, j = 1, 2) \tag{14.67}$$

が成り立つ. (14.67) と (α, β)-KMS 条件より,

$$\varphi(A_jB) = \varphi(B\alpha_{i\beta}(A_j)) = \varphi(BA_j) \quad (\forall B \in \mathcal{M}, j = 1, 2)$$

であるから, (14.66) より,

$$\varphi_j(B) = \frac{1}{2}\varphi(A_jB) + \frac{1}{2}\varphi(BA_j) = \varphi(A_jB) = \varphi(BA_j) \quad (\forall B \in \mathcal{M}, j = 1, 2) \tag{14.68}$$

が成り立つ. 任意の $B \in \mathcal{M}, C \in \mathcal{M}_\alpha$ に対し, (α, β)-KMS 条件と (14.67), (14.68) より,

$$\begin{aligned}\varphi(BA_jC) &= \varphi(\alpha_{-i\beta}(A_jC)B) = \varphi(A_j\alpha_{-i\beta}(C)B) = \varphi_j(\alpha_{-i\beta}(C)B) \\ &= \varphi_j(BC) = \varphi(A_jBC) \quad (j = 1, 2)\end{aligned}$$

であるから, $\mathcal{M}_\alpha$ の稠密性 (命題 14.83 の (3)) と φ の正規性より,

$$\varphi(BA_jC) = \varphi(A_jBC) \quad (\forall B, C \in \mathcal{M}, j = 1, 2)$$

が成り立つ. よって φ の忠実性より,

$$A_jB = BA_j \quad (\forall B \in \mathcal{M}, j = 1, 2)$$

が成り立つので,

$$A_j \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \mathbb{C}1 \quad (j = 1, 2)$$

である. そこで $A_j = \alpha_j 1$ $(j = 1, 2)$ とおくと (14.68) より,

$$1 = \varphi_j(1) = \varphi(A_j) = \alpha_j\varphi(1) = 2\alpha_j \quad (j = 1, 2)$$

であるから, $A_j = \frac{1}{2}$ である. よって (14.68) より,

$$\varphi_1(B) = \frac{1}{2}\varphi(B) = \varphi_2(B) \quad (\forall B \in \mathcal{M})$$

であるから $\varphi_1 = \varphi_2$ が成り立つ. □

補題 14.91 (Schwarz の鏡像原理). $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ を開集合で $\Omega_0 := \Omega \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$ を満たすものとする. そして,

$$\Omega_+ := \{z \in \Omega : \mathrm{Im}(z) > 0\}, \quad \Omega_- := \{z \in \Omega : \mathrm{Im}(z) < 0\}, \quad \overline{\Omega_\pm} := \{\overline{z} : z \in \Omega_\pm\}$$

とおく. このとき $\Omega_\pm$ 上で正則で Ω_0 上で実数値を取る連続関数 $f_\pm : \Omega_\pm \cup \Omega_0 \to \mathbb{C}$ に対し, その鏡像拡張

$$\widetilde{f_\pm} : \Omega_\pm \cup \Omega_0 \cup \overline{\Omega_\pm} \to \mathbb{C}, \quad \widetilde{f_\pm}(z) := \begin{cases} f_\pm(z) & (z \in \Omega_\pm \cup \Omega_0) \\ \overline{f_\pm(\overline{z})} & (z \in \overline{\Omega_\pm}) \end{cases}$$

は正則関数である.

証明. $\widetilde{f_\pm}$ が連続関数であり $\Omega_\pm \cup \overline{\Omega_\pm}$ 上で正則であることは明らかである. よって Cauchy の積分定理 7.28 とコンパクト距離空間上の連続関数の一様連続性 (定理 1.123) より, $\Omega_\pm \cup \Omega_0 \cup \overline{\Omega_\pm}$ に含まれる実軸と虚軸に平行な辺を持つ任意の長方形の周に沿った $\widetilde{f_\pm}$ の複素線積分は 0 であることが分かる. ゆえにそのような任意の長方形の内部で $\widetilde{f_\pm}$ は原始関数を持つ. 従って $\widetilde{f_\pm}$ は正則関数である. □

補題 14.92 (三線定理). β を正数とし, $\Omega_\beta := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im}(z) < \beta\}$ とおく. このとき Ω_β 上で正則な有界連続関数 $f : \overline{\Omega_\beta} \to \mathbb{C}$ に対し,

$$\sup_{z \in \overline{\Omega_\beta}} |f(z)| = \sup_{\mathrm{Im}(z)=0,\beta} |f(z)|$$

が成り立つ.

証明. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n : \overline{\Omega_\beta} \to \mathbb{C}$ を,

$$f_n(z) := e^{-\frac{z^2+\beta^2}{n}} f(z) \quad (\forall z \in \overline{\Omega_\beta})$$

とおくと f_n は Ω_β 上で正則な有界連続関数であり,

$$|f_n(z)| \leqslant e^{-\frac{\mathrm{Re}(z)^2}{n}} |f(z)| \quad (\forall z \in \overline{\Omega_\beta})$$

であるから,

$$\lim_{s \to \pm\infty} \sup_{t \in [0,\beta]} |f_n(s+it)| = 0$$

が成り立つ. よって弱最大値の原理 11.45 より, 任意の $z_0 \in \overline{\Omega_\beta}$ に対し,

$$|f_n(z_0)| \leqslant \sup_{\mathrm{Im}(z)=0,\beta} |f_n(z)| \leqslant \sup_{\mathrm{Im}(z)=0,\beta} |f(z)|$$

であるから, $n \in \mathbb{N}$ の任意性より,

$$|f(z_0)| = \lim_{n \to \infty} |f_n(z_0)| \leqslant \sup_{\mathrm{Im}(z)=0,\beta} |f(z)|$$

が成り立つ. ゆえに,

$$\sup_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \sup_{\mathrm{Im}(z)=0,\beta} |f(z)|$$

が成り立つ. □

定理 14.93 (KMS 条件と同値な条件). $\mathcal{M}$ を von Neumann 環, $\alpha = (\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$ を $\mathcal{M}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群, β を正数とし, $\Omega_\beta := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im}(z) < \beta\}$ とおく. このとき $\varphi \in \mathcal{M}_{*,+}$ に対し次は互いに同値である.

(1) φ は (α, β)-KMS 条件 (定義 14.84) を満たす.

(2) $\mathcal{M}$ の WOT 稠密な部分 $*$-環 $\mathcal{D}$ で以下の条件を満たすものが存在する : 任意の $A, B \in \mathcal{D}$ に対し Ω_β 上で正則な有界連続関数 $f_{A,B} : \overline{\Omega_\beta} \to \mathbb{C}$ で,

$$f_{A,B}(t) = \varphi(B\alpha_t(A)), \quad f_{A,B}(t+i\beta) = \varphi(\alpha_t(A)B) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

を満たすものが存在する.

(3) $\mathcal{M}$ の WOT 稠密な部分 $*$-環 $\mathcal{D}$ で以下の条件を満たすものが存在する：任意の $A\in\mathcal{D}$, 任意の $B\in\mathcal{M}$ に対し Ω_β 上で正則な有界連続関数 $f_{A,B}:\overline{\Omega_\beta}\to\mathbb{C}$ で,

$$f_{A,B}(t)=\varphi(B\alpha_t(A)),\quad f_{A,B}(t+i\beta)=\varphi(\alpha_t(A)B)\quad(\forall t\in\mathbb{R})$$

を満たすものが存在する.

(4) 任意の $A,B\in\mathcal{M}$ に対し Ω_β 上で正則な有界連続関数 $f_{A,B}:\overline{\Omega_\beta}\to\mathbb{C}$ で,

$$f_{A,B}(t)=\varphi(B\alpha_t(A)),\quad f_{A,B}(t+i\beta)=\varphi(\alpha_t(A)B)\quad(\forall t\in\mathbb{R})$$

を満たすものが存在する.

証明. (1) ⇒ (2) は命題 14.83 より明らかである ($\mathcal{D}$ として $\mathcal{M}_\alpha$ を取ればよい).
(2) ⇒ (3) を示す. (2) が成り立つとする. 任意の $A\in\mathcal{D}$, $B\in\mathcal{M}$ を取り固定する. Kaplansky の稠密性定理 14.60 より $\mathcal{D}$ のネット $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で,

$$B_\lambda\to B,\quad B_\lambda^*\to B^*\quad(\text{in }\sigma\text{-SOT})\tag{14.69}$$

なるものが取れる. (2) が成り立つことから各 $\lambda\in\Lambda$ に対し Ω_β 上で正則な有界連続関数 $f_{A,B_\lambda}:\overline{\Omega_\beta}\to\mathbb{C}$ で,

$$f_{A,B_\lambda}(t)=\varphi(B_\lambda\alpha_t(A)),\quad f_{A,B_\lambda}(t+i\beta)=\varphi(\alpha_t(A)B_\lambda)\quad(\forall t\in\mathbb{R})$$

を満たすものが取れる. 非負線型汎関数に関する Schwarz の不等式 (命題 14.19) より, 任意の $\lambda,\mu\in\Lambda$, 任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}|f_{A,B_\lambda}(t)-f_{A,B_\mu}(t)|^2&\leqslant\|\varphi\|\|A\|^2\varphi((B_\lambda-B_\mu)(B_\lambda-B_\mu)^*)\\|f_{A,B_\lambda}(t+i\beta)-f_{A,B_\mu}(t+i\beta)|^2&\leqslant\|\varphi\|\|A\|^2\varphi((B_\lambda-B_\mu)^*(B_\lambda-B_\mu))\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}M_{\lambda,\mu}&:=\|\varphi\|\|A\|^2\varphi((B_\lambda-B_\mu)(B_\lambda-B_\mu)^*),\\N_{\lambda,\mu}&:=\|\varphi\|\|A\|^2\varphi((B_\lambda-B_\mu)^*(B_\lambda-B_\mu))\quad(\forall\lambda,\mu\in\Lambda)\end{aligned}\tag{14.70}$$

とおけば, 三線定理 14.92 より,

$$\sup_{z\in\overline{\Omega_\beta}}|f_{A,B_\lambda}(z)-f_{A,B_\mu}(z)|^2\leqslant\max(M_{\lambda,\mu},N_{\lambda,\mu})\tag{14.71}$$

が成り立つ. ここで (14.69), (14.70) と φ の正規性より, 任意の正数 ε に対し $\lambda_0\in\Lambda$ が存在し,

$$\max(M_{\lambda,\mu},N_{\lambda,\mu})\leqslant\varepsilon^2\quad(\forall\lambda,\mu\geqslant\lambda_0)$$

となるので, (14.71) より,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\lambda_0\in\Lambda\text{ s.t. }\forall\lambda,\mu\geqslant\lambda_0,\ \sup_{z\in\overline{\Omega_\beta}}|f_{A,B_\lambda}(z)-f_{A,B_\mu}(z)|\leqslant\varepsilon\tag{14.72}$$

が成り立つ. コンパクト集合のネットは収束する部分ネットを持つ (定理 1.47) ので, (14.72) は特に各 $z\in\overline{\Omega_\beta}$ に対し $(f_{A,B_\lambda}(z))_{\lambda\in\Lambda}$ が収束する部分ネットを持つことを意味し, このことと (14.72) を組み合わせれば $(f_{A,B_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ が一様収束することが分かる (一様 Cauchy 条件を満たす関数列が一様収束すること (定理 1.127) の証明と同様にすればよい). そこで $f_{A,B}:\overline{\Omega_\beta}\to\mathbb{C}$ をその一様収束極限とすると, 定理 1.125 より $f_{A,B}:\overline{\Omega_\beta}\to\mathbb{C}$ は有界連続関数であり, Cauchy の積分公式 7.27 より f は Ω_β 上で正則である. そして,

$$\begin{aligned}f_{A,B}(t)&=\lim_{\lambda\in\Lambda}f_{A,B_\lambda}(t)=\lim_{\lambda\in\Lambda}\varphi(B_\lambda\alpha_t(A))=\varphi(B\alpha_t(A))\quad(\forall t\in\mathbb{R}),\\f_{A,B}(t+i\beta)&=\lim_{\lambda\in\Lambda}f_{A,B_\lambda}(t+i\beta)=\lim_{\lambda\in\Lambda}\varphi(\alpha_t(A)B_\lambda)=\varphi(\alpha_t(A)B)\quad(\forall t\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

であるので (3) が成り立つ.
(3) ⇒ (4) を示す. (3) が成り立つとする. このとき任意の $A \in \mathcal{D}_{\mathrm{sa}}$ に対し,

$$f_{A,1}(t) = f_{A,1}(t + i\beta) = \varphi(\alpha_t(A)) \in \mathbb{R} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

である. よって Schwarz の鏡像原理 14.91 により $f_{A,1} : \overline{\Omega_\beta} \to \mathbb{C}$ は上下に繰り返し鏡像拡張していくことで有界な整関数に拡張できる. ゆえに Liouville の定理 7.19 より $f_{A,1}$ は定数関数である. これより,

$$\varphi(\alpha_t(A)) = \varphi(A) \quad (\forall A \in \mathcal{D}, \forall t \in \mathbb{R}) \tag{14.73}$$

が成り立つ. 今, 任意の $A, B \in \mathcal{M}$ を取り固定する. Kaplansky の稠密性定理 14.60 より $\mathcal{D}$ のネット $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ で,

$$A_\lambda \to A, \quad A_\lambda^* \to A^* \quad (\text{in } \sigma\text{-SOT}) \tag{14.74}$$

なるものが取れる. (3) が成り立つことから各 $\lambda \in \Lambda$ に対し Ω_β 上で正則な有界連続関数 $f_{A_\lambda,B} : \overline{\Omega_\beta} \to \mathbb{C}$ で,

$$f_{A_\lambda,B}(t) = \varphi(B\alpha_t(A_\lambda)), \quad f_{A_\lambda,B}(t + i\beta) = \varphi(\alpha_t(A_\lambda)B) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

を満たすものが取れる. 非負線型汎関数に関する Schwarz の不等式 (命題 14.19) と (14.73) より, 任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}
|f_{A_\lambda,B}(t) - f_{A_\mu,B}(t)|^2 &\leqslant \|\varphi\|\|B\|^2\varphi((A_\lambda - A_\mu)^*(A_\lambda - A_\mu)) \\
|f_{A_\lambda,B}(t + i\beta) - f_{A_\mu,B}(t + i\beta)|^2 &\leqslant \|\varphi\|\|B\|^2\varphi((A_\lambda - A_\mu)(A_\lambda - A_\mu)^*)
\end{aligned}$$

であるので, 三線定理 14.92 と (14.74) より $(f_{A_\lambda,B})_{\lambda \in \Lambda}$ は一様収束する (上の (2) ⇒ (3) の証明で述べたことと同様). その一様収束極限を $f_{A,B} : \overline{\Omega_\beta} \to \mathbb{C}$ とおけば $f_{A,B}$ は Ω_β 上で正則な有界連続関数であり,

$$\begin{aligned}
f_{A,B}(t) &= \lim_{\lambda \in \Lambda} f_{A_\lambda,B}(t) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(B\alpha_t(A_\lambda)) = \varphi(B\alpha_t(A)) \quad (\forall t \in \mathbb{R}), \\
f_{A,B}(t + i\beta) &= \lim_{\lambda \in \Lambda} f_{A_\lambda,B}(t + i\beta) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(\alpha_t(A_\lambda)B) = \varphi(\alpha_t(A)B) \quad (\forall t \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

であるので (4) が成り立つ.
(4) ⇒ (1) を示す. (4) が成り立つとする. 任意の $A \in \mathcal{M}_\alpha, B \in \mathcal{M}$ を取る.

$$\overline{\Omega_\beta} \ni z \mapsto \varphi(B\alpha_z(A)) - f_{A,B}(z) \in \mathbb{C}$$

は Ω_β 上で正則な有界連続関数で $\mathbb{R}$ 上で 0 であるから, Schwarz の鏡像原理 14.91 と一致の原理 7.24 より, $\overline{\Omega_\beta}$ 上で 0 である. よって特に,

$$\varphi(B\alpha_{i\beta}(A)) = f_{A,B}(i\beta) = \varphi(AB)$$

であるから (1) が成り立つ. □

定理 14.94 (Gibbs 状態)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, H を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素, β を正数とする. そして,

$$\alpha_t(A) := e^{itH}Ae^{-itH} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in B(\mathcal{H}))$$

として $B(\mathcal{H})$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群 $\alpha = (\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$ を定義する (命題 14.81 を参照). このとき次は互いに同値である.

(1) $e^{-\beta H} \in B^1(\mathcal{H})_+$.
(2) (α, β)-KMS 状態が存在する.

そして (1), (2) が成り立つとき, その (α, β)-KMS 状態は,

$$B(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \frac{1}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})}\mathrm{Tr}(Ae^{-\beta H}) \in \mathbb{C} \tag{14.75}$$

である.

証明. H の任意の全解析ベクトル (定義 10.211) $u,v\in\mathcal{H}$ に対し,

$$\alpha_t(u\odot v)=e^{itH}(u\odot v)e^{-itH}=(e^{itH}u)\odot(e^{itH}v)\quad(\forall t\in\mathbb{R})$$

($\odot$ は Schatten 形式 (定義 10.109) を表す) であるから定理 10.214 より $u\odot v$ は α に関して解析的であり,

$$\alpha_z(u\odot v)=(e^{izH}u)\odot(e^{i\overline{z}H}v)\quad(\forall z\in\mathbb{C})\tag{14.76}$$

が成り立つ. そして H の全解析ベクトル全体は $\mathcal{H}$ の稠密部分空間である (定理 10.214) から,

$$\mathcal{D}:=\operatorname{span}\{u\odot v : u,v\in\mathcal{H}\text{ は }H\text{ の全解析ベクトル }\}\subseteq B(\mathcal{H})_\alpha$$

とおくと $\mathcal{D}$ は $B(\mathcal{H})$ の WOT 稠密な部分 $*$-環である.

(1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとし $B(\mathcal{H})$ 上の正規状態 $\varphi : B(\mathcal{H})\to\mathbb{C}$ を (14.75) によって定義する. 任意の $B\in B(\mathcal{H})$ と H の任意の全解析ベクトル $u,v\in\mathcal{H}$ に対し, (14.76) より,

$$\operatorname{Tr}\left(B\alpha_{i\beta}(u\odot v)e^{-\beta H}\right)=\operatorname{Tr}\left(B\left(e^{-\beta H}u\odot e^{\beta H}v\right)e^{-\beta H}\right)=\operatorname{Tr}(Be^{-\beta H}(u\odot v))=\operatorname{Tr}((u\odot v)Be^{-\beta H})$$

であるから,

$$\varphi(B\alpha_{t+i\beta}(A))=\varphi(\alpha_t(A)B)\quad(\forall t\in\mathbb{R},\forall A\in\mathcal{D},\forall B\in B(\mathcal{H}))$$

が成り立つ. よって定理 14.93 より φ は (α,β)-KMS 条件を満たす.

(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (2) が成り立つとし $\varphi : B(\mathcal{H})\to\mathbb{C}$ を (α,β)-KMS 状態とする. そして $T\in B^1(\mathcal{H})_+$ で,

$$\varphi(A)=\operatorname{Tr}(AT)\quad(\forall A\in B(\mathcal{H}))$$

なるものを取る. 任意の $x,y\in\mathcal{H}$ と H の任意の全解析ベクトル $u,v\in\mathcal{H}$ に対し,

$$\varphi((u\odot v)(x\odot y))=\operatorname{Tr}(T(u\odot v)(x\odot y))=\operatorname{Tr}((Tu\odot v)(x\odot y))=(x\mid v)(Tu\mid y),$$
$$\varphi((x\odot y)\alpha_{i\beta}(u\odot v))=\operatorname{Tr}(T(x\odot y)(e^{-\beta H}u\odot e^{\beta H}v))=(Tx\mid e^{\beta H}v)(e^{-\beta H}u\mid y)$$

であるから (α,β)-KMS 条件より,

$$(x\mid v)(Tu\mid y)=(Tx\mid e^{\beta H}v)(e^{-\beta H}u\mid y)$$

である. H の全解析ベクトル全体は $\mathcal{H}$ の稠密部分空間である (定理 10.214) から, あるスカラー $c\in\mathbb{C}$ が存在し,

$$T=ce^{-\beta H}$$

となる. ここで $1=\varphi(1)=\operatorname{Tr}(T)$ であるから $c\neq 0$ なので,

$$e^{-\beta H}=c^{-1}T\in B^1(\mathcal{H})_+$$

であり, $c\operatorname{Tr}(e^{-\beta H})=\operatorname{Tr}(T)=1$ より $c=\frac{1}{\operatorname{Tr}(e^{-\beta H})}$ であるから,

$$T=\frac{1}{\operatorname{Tr}(e^{-\beta H})}e^{-\beta H}$$

である. よって φ は (14.75) である. □

定義 14.95 (Gibbs 状態)**.** 定理 14.94 における $B(\mathcal{H})$ 上の (α,β)-KMS 状態 (14.75) を (H,β) に対する Gibbs 状態と言う.

命題 14.96 (弱連続な 1 径数自己同型群のテンソル積)**.** $(\alpha_t^1)_{t\in\mathbb{R}},\cdots,(\alpha_t^N)_{t\in\mathbb{R}}$ をそれぞれ von Neumann 環 $\mathcal{M}_1,\cdots,\mathcal{M}_N$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群とする. そして各 $t\in\mathbb{R}$ に対しテンソル積 von Neumann 環 $\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N$ 上の自己同型写像

$$\alpha_t:=\alpha_t^1\otimes\cdots\otimes\alpha_t^N\in\operatorname{Aut}(\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N)$$

(定理 14.67, 命題 14.69 を参照) を定義する. このとき $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ は $\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_N$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群である.

証明.

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha_t \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)$$

が群準同型写像であることは明らかである. 弱連続な 1 径数自己同型群の定義 14.79 より任意の $\varphi \in (\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)_*$ に対し,

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi \circ \alpha_t \in (\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)_*$$

がノルムで連続であることを示せばよいが, 定理 14.66 より,

$$(\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)_* = \overline{\mathrm{span}\{\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N : \varphi_1 \in \mathcal{M}_{1,*}, \cdots, \varphi_N \in \mathcal{M}_{N,*}\}}$$

であり, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)_* \ni \varphi \mapsto \varphi \circ \alpha_t \in (\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)_*$$

は等長線型同型写像であるから, 任意の $\varphi_1 \in \mathcal{M}_{1,*}, \cdots, \varphi_N \in \mathcal{M}_{N,*}$ を取り,

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N) \circ \alpha_t = (\varphi_1 \circ \alpha_t^1) \otimes \cdots \otimes (\varphi_N \circ \alpha_t^N) \in (\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)_* \tag{14.77}$$

がノルムで連続であることを示せば十分である. しかし定理 14.66 より,

$$\mathcal{M}_{1,*} \times \cdots \times \mathcal{M}_{N,*} \ni (\varphi_1, \cdots, \varphi_N) \mapsto \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N \in (\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N)_*$$

は有界多重線型写像であり, 各 $j \in \{1, \cdots, N\}$, $\varphi_j \in \mathcal{M}_{j,*}$ について $\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi_j \circ \alpha_t^j \in \mathcal{M}_{j,*}$ はノルムで連続であるので (14.77) はノルムで連続である. □

定理 14.97 (KMS 状態のテンソル積は KMS 状態)**.** $\alpha^1 = (\alpha_t^1)_{t\in\mathbb{R}}, \cdots, \alpha^N = (\alpha_t^N)_{t\in\mathbb{R}}$ をそれぞれ von Neumann 環 $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_N$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群とし, テンソル積 von Neumann 環

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N$$

上の弱連続な 1 径数自己同型群 $\alpha = (\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を,

$$\alpha_t := \alpha_t^1 \otimes \cdots \otimes \alpha_t^N \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

によって定義する (命題 14.96 を参照). そして β を正数とし, 各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ について φ_j を $\mathcal{M}_j$ 上の (α^j, β)-KMS 状態とする. このとき $\mathcal{M}$ 上の正規状態

$$\varphi := \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N : \mathcal{M} \ni A_1 \otimes \cdots \otimes A_N \mapsto \varphi_1(A_1) \cdots \varphi_N(A_N) \in \mathbb{C}$$

(定理 14.66 を参照) は (α, β)-KMS 状態である.

証明. 各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ について α^j に関して解析的な元 $A_j, B_j \in \mathcal{M}_{\alpha^j}^j$ を取る. (α^j, β)-KMS 条件より,

$$\varphi_j(B_j \alpha_{t+i\beta}^j(A_j)) = \varphi_j(\alpha_t^j(A_j)B_j) \quad (\forall j \in \{1, \cdots, N\}, \forall t \in \mathbb{R})$$

であるから, $A = A_1 \otimes \cdots \otimes A_N, B = B_1 \otimes \cdots \otimes B_N \in \mathcal{M}_\alpha$ とおくと,

$$\begin{aligned}\varphi(B\alpha_{t+i\beta}(A)) &= \varphi_1(B_1\alpha_{t+i\beta}^1(A_1)) \cdots \varphi_N(B_N\alpha_{t+i\beta}^N(A_N)) \\ &= \varphi_1(\alpha_t^1(A_1)B_1) \cdots \varphi_N(\alpha_t^N(A_N)B_N) = \varphi(\alpha_t(A)B) \quad (\forall t \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

である. これより $\mathcal{M}$ の WOT 稠密な部分 $*$-環

$$\mathcal{D} := \mathcal{M}_{1,\alpha^1} \odot \cdots \odot \mathcal{M}_{N,\alpha^N} = \mathrm{span}\{A_1 \otimes \cdots \otimes A_N : A_1 \in \mathcal{M}_{1,\alpha^1}, \cdots, A_N \in \mathcal{M}_{N,\alpha^N}\}$$

[*309]を考えれば,

$$\varphi(B\alpha_{t+i\beta}(A)) = \varphi(\alpha_t(A)B) \quad (\forall A, B \in \mathcal{D}, \forall t \in \mathbb{R})$$

であるから, 定理 14.93 より φ は (α, β)-KMS 条件を満たす. □

[*309] 稠密性については命題 14.83 と命題 14.64 を参照.

14.6 冨田-竹崎の定理

定理 14.98. $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環, $v \in \mathcal{H}$ を $\mathcal{M}$ の巡回分離ベクトル (定義 14.57) とする. このとき,

(1) 実化 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ (定義 10.198) の閉部分空間

$$\overline{\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}v},\quad \overline{i\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}v},\quad \overline{\mathcal{M}'_{\mathrm{sa}}v},\quad \overline{i\mathcal{M}'_{\mathrm{sa}}v}$$

の上への射影作用素をそれぞれ $P, Q, P', Q' \in B(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ とおくと,

$$P' = 1 - Q,\quad Q' = 1 - P, \tag{14.78}$$

$$\mathrm{Ran}(P) \cap \mathrm{Ran}(Q) = \mathrm{Ran}(P') \cap \mathrm{Ran}(Q') = \{0\} \tag{14.79}$$

が成り立つ.

(2)

$$T := P - Q = P' - Q',\quad R := P + Q,\quad R' := P' + Q' = 2 - R$$

とおくと, T は $\mathcal{H}$ 上の単射有界反線型自己共役作用素であり, R, R' は $\mathcal{H}$ 上の単射有界非負自己共役作用素である.

(3)

$$T^2 = |T|^2 = RR' = R'R = R(2 - R), \tag{14.80}$$

$$P|T| = |T|P,\quad Q|T| = |T|Q,\quad P'|T| = P'|T|,\quad Q'|T| = |T|Q' \tag{14.81}$$

が成り立つ.

(4)

$$T = J|T|$$

を反線型自己共役作用素 T の極分解 (10.204) とすると, J は $\mathcal{H}$ 上の共役子 (定義 10.201) である. そして,

$$JT = |T| = TJ,\quad J|T| = T = |T|J,\quad JP = P'J,\quad JQ = Q'J,\quad JR = R'J \tag{14.82}$$

が成り立つ.

(5)

$$\begin{aligned} S_0 &: \mathcal{M}v \ni Av \mapsto A^*v \in \mathcal{H}, \\ F_0 &: \mathcal{M}'v \ni A'v \mapsto A'^*v \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

は稠密に定義された反線型作用素であり可閉である. そしてその閉包 $S = \overline{S_0}, F = \overline{F_0}$ は,

$$\begin{aligned} S &: \mathrm{Ran}(P) + \mathrm{Ran}(Q) \ni Px + Qy \mapsto Px - Qy \in \mathcal{H}, \\ F &: \mathrm{Ran}(P') + \mathrm{Ran}(Q') \ni P'x + Q'y \mapsto P'x - Q'y \in \mathcal{H} \end{aligned} \tag{14.83}$$

であり,

$$F = JSJ = S^*,\quad S = JFJ = F^* \tag{14.84}$$

が成り立つ.

(6) 単射非負自己共役作用素

$$\Delta := R^{-1}R' = R^{-1}(2 - R)$$

に対し,

$$S = J\Delta^{\frac{1}{2}},\quad F = J\Delta^{-\frac{1}{2}} \tag{14.85}$$

が成り立つ. そしてこれは稠密に定義された反線型作用素 S, F の極分解 (10.204) である.

(7)
$$v = Rv = R'v = \Delta v = \Delta^{-1}v = \Delta^{\alpha}v = Sv = Fv = Jv \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

(8)
$$J\Delta J = \Delta^{-1},\ \ J\Delta^{it} = \Delta^{it}J,\ \ |T|\Delta^{it} = \Delta^{it}|T|,\ \ T\Delta^{it} = \Delta^{it}T \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

証明.　(1) 命題 14.58 より v は von Neumann 環 $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ の共通の巡回分離ベクトルである. よって補題 14.71 より,

$$(\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}v)^{\perp}_{\mathbb{R}} = i\overline{\mathcal{M}'_{\mathrm{sa}}v},\ \ (\mathcal{M}'_{\mathrm{sa}}v)^{\perp}_{\mathbb{R}} = i\overline{\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}v}$$

が成り立つ. これより,

$$1 - P = Q',\ \ 1 - P' = Q$$

であるので (14.78) が成り立つ. また,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ran}(P) \cap \mathrm{Ran}(Q))^{\perp}_{\mathbb{R}} &\supseteq \mathrm{Ran}(1-P) + \mathrm{Ran}(1-Q) = \mathrm{Ran}(Q') + \mathrm{Ran}(P') \supseteq \mathcal{M}'v,\\ (\mathrm{Ran}(P') \cap \mathrm{Ran}(Q'))^{\perp}_{\mathbb{R}} &\supseteq \mathrm{Ran}(1-P') + \mathrm{Ran}(1-Q') = \mathrm{Ran}(Q) + \mathrm{Ran}(P) \supseteq \mathcal{M}v\end{aligned}$$

であり, $\mathcal{M}'v, \mathcal{M}v$ は $\mathcal{H}$ で稠密であるので (14.79) が成り立つ.

(2)
$$i\,\mathrm{Ran}(1-P) = i(\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}v)^{\perp}_{\mathbb{R}} = (i\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}v)^{\perp}_{\mathbb{R}} = \mathrm{Ran}(1-Q)$$

であるから任意の $x + y \in \mathrm{Ran}(P) + \mathrm{Ran}(1-P) = \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ に対し, $iP(x+y) = ix = Qi(x+y)$ である. よって $iP = Qi$ が成り立つ. 同様に $iP' = Q'i$ である. これより $iT = i(P-Q) = (Q-P)i = Ti$ であり, $iR = i(P+Q) = (Q+P)i = Ri$, $iR' = i(P'+Q') = (Q'+P')i = R'i$ である. よって $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は有界反線型作用素であり, $R, R' : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は有界線型作用素である. $T = P - Q$, $R = P + Q$ の実化 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 上の線型作用素としての自己共役性より,

$$\mathrm{Re}(Tx \mid y) = \mathrm{Re}(Ty \mid x),\ \ \mathrm{Re}(Rx \mid y) = \mathrm{Re}(x \mid Ry) \quad (\forall x, y \in \mathcal{H}) \tag{14.86}$$

が成り立つ. (14.86) と $T, R : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ の反線型性と線型性より,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(Tx \mid y) &= \mathrm{Re}(Tix \mid y) = \mathrm{Re}(Ty \mid ix) = \mathrm{Im}(Ty \mid x) \quad (\forall x, y \in \mathcal{H}),\\ \mathrm{Im}(Rx \mid y) &= -\mathrm{Re}(Rix \mid y) = -\mathrm{Re}(ix \mid Ry) = \mathrm{Im}(x \mid Ry) \quad (\forall x, y \in \mathcal{H})\end{aligned}$$

であるので,

$$(Tx \mid y) = (Ty \mid x),\ \ (Rx \mid y) = (x \mid Ry) \quad (\forall x, y \in \mathcal{H})$$

が成り立つ. ゆえに $T = T^*$, $R = R^*$ なので T は有界反線型自己共役作用素, $R, R' = 2 - R$ は有界線型自己共役作用素である. T が単射であることを示す. $Tx = Px - Qx = 0$ であるとすると, (14.79) より $Px = Qx \in \mathrm{Ran}(P) \cap \mathrm{Ran}(Q) = \{0\}$, 従って (14.78), (14.79) より,

$$x \in \mathrm{Ran}(1-P) \cap \mathrm{Ran}(1-Q) = \mathrm{Ran}(Q') \cap \mathrm{Ran}(P') = \{0\} \tag{14.87}$$

である. ゆえに $x = 0$ であるから T は単射である. $R = P + Q$ が非負かつ単射であることを示す. R は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素であり, P, Q は $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 上の射影作用素であるから,

$$(Rx \mid x) = \mathrm{Re}(Rx \mid x) = \mathrm{Re}(Px \mid x) + \mathrm{Re}(Qx \mid x) = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2 \geqslant 0 \quad (\forall x \in \mathcal{H})$$

である. よって R は非負であり, $Rx = 0$ ならば $Px = Qx = 0$ であるから (14.86) が成り立つので $x = 0$, 従って R は単射である. 全く同様にして $R' = P' + Q'$ が非負かつ単射であることも示せる.

(3)

$$\begin{aligned}|T|^2 &= T^*T = T^2 = (P-Q)^2 = P+Q-PQ-QP = 2(P+Q)-(P+Q+PQ+QP)\\ &= 2(P+Q)-(P+Q)^2 = R(2-R) = RR' = R'R\end{aligned}$$

であるから, R, R' の非負自己共役性と連続関数カルキュラス (9.48) より,

$$|T| = R^{\frac{1}{2}}R'^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ. そして,

$$P|T|^2 = P(P+Q-PQ-QP) = P-PQP = (P+Q-PQ-QP)P = |T|^2P,$$
$$Q|T|^2 = Q(P+Q-PQ-QP) = Q-QPQ = (P+Q-PQ-QP)Q = |T|^2Q$$

であるから連続関数カルキュラス (9.48) より,

$$P|T| = |T|P, \quad Q|T| = |T|Q$$

が成り立つ. よって $P' = 1-Q, Q' = 1-P, R = P+Q, R' = P'+Q'$ も $|T|$ と可換である.

(4) T は単射反線型自己共役作用素であるから定理 10.204 と定理 10.206 より $J = J^*$ かつ $J^2 = J^*J = S(|T|) = 1$ である. よって J は共役子である.

$$J|T| = T = T^* = |T|J, \quad JT = |T| = |T|^* = TJ$$

であり, (14.81) より,

$$\begin{aligned}|T|JP &= TP = (P-Q)P = (1-Q)(P-Q) = P'T = P'|T|J = |T|P'J,\\ |T|JQ &= TQ = (P-Q)Q = (P-1)(Q-P) = Q'T = Q'|T|J = |T|Q'J\end{aligned}$$

である. よって $|T|$ の単射性より $JP = P'J, JQ = Q'J$ であり, またこれより $JR = J(P+Q) = (P'+Q')J = R'J$ である.

(5) S_0, F_0 が稠密に定義された反線型作用素であることは v が $\mathcal{M}$ の巡回分離ベクトルであることによる. (14.79) より (14.83) は well-defined な反線型作用素であり, $\mathrm{Ran}(P), \mathrm{Ran}(Q), \mathrm{Ran}(P'), \mathrm{Ran}(Q')$ が $\mathcal{H}$ の閉実線型部分空間であることから S, F は閉作用素である. また明らかに S, F は $\mathcal{M}v, \mathcal{M}'v$ を芯として持つので $S = \overline{S_0}, F = \overline{F_0}$ である. (14.82) より,

$$JSJ(P'x+Q'y) = JS(PJx+QJy) = J(PJx-QJy) = P'x-Q'y = F(P'x+Q'y) \quad (\forall x, y \in \mathcal{H})$$

であるから $JSJ = F, JFJ = S$ である. (14.78) より $PQ' = 0, QP' = 0$ であるから,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(S(Px+Qy) \mid P'x'+Q'y') = \mathrm{Re}(Px-Qy \mid P'x'+Q'y') = \mathrm{Re}(Px+Qy \mid P'x'-Q'y')\\ &= \mathrm{Re}(Px+Qy \mid F(P'x'+Q'y')) = \mathrm{Re}(F(P'x'+Q'y') \mid Px+Qy) \quad (\forall x, y \in \mathcal{H})\end{aligned}$$

である. よって S の反線型性より $F \subseteq S^*$ が成り立つ. 任意の $z \in D(S^*)$ に対し,

$$\mathrm{Re}(Px \mid S^*z) = \mathrm{Re}(Px \mid z), \quad \mathrm{Re}(Qy \mid S^*z) = -\mathrm{Re}(Qy \mid z) \quad (\forall x, y \in \mathcal{H})$$

であるから, (14.78) より,

$$(1-S^*)z \in \mathrm{Ran}(1-P) = \mathrm{Ran}(Q'), \quad (1+S^*)z \in \mathrm{Ran}(1-Q) = \mathrm{Ran}(P')$$

である. よって,

$$z = \frac{1}{2}((1+S^*)z + (1-S^*)z) \in \mathrm{Ran}(P') + \mathrm{Ran}(Q') = D(F) \quad (\forall z \in D(S^*))$$

であるから $D(S^*) \subseteq D(F)$ なので $F = S^*$ が成り立つ. 定理 10.199 より $F^* = S^{**} = S$ であるから (14.84) が成り立つ.

(6) (14.84) と命題 10.197 の (11) より,

$$(JS)^* = S^*J = JSJJ = JS, \quad (JF)^* = F^*J = JFJJ = JF$$

であるから JS, JF は自己共役作用素である. (14.78) より $PQ' = 0, QP' = 0$ であることと (14.82) より,

$$\begin{aligned} |T|JS(Px + Qy) &= T(Px - Qy) = (P' - Q')(Px - Qy) = (P' + Q')(Px + Qy) = R'(Px + Qy), \\ |T|JF(P'x + Q'y) &= T(P'x - Q'y) = (P - Q)(P'x - Q'y) = (P + Q)(P'x + Q'y) = R(P'x + Q'y) \end{aligned}$$

であるから, (14.80) より,

$$\begin{aligned} JS &\subseteq |T|^{-1}R' = R^{-\frac{1}{2}}R'^{\frac{1}{2}} = \Delta^{\frac{1}{2}}, \\ JF &\subseteq |T|^{-1}R = R'^{-\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}} = \Delta^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である. よって両辺の自己共役性より $JS = \Delta^{\frac{1}{2}}, JF = \Delta^{-\frac{1}{2}}$ が成り立ち, J は共役子なので (14.85) が成り立つ. $|S| = \sqrt{S^*S} = \Delta^{\frac{1}{2}}, |F| = \sqrt{F^*F} = \Delta^{-\frac{1}{2}}$ であり, $\Delta^{\frac{1}{2}}, \Delta^{-\frac{1}{2}}$ は単射なので (14.85) は S, F の極分解である.

(7) (1) より,

$$Pv = v, \quad P'v = v, \quad Qv = QP'v = 0, \quad Q'v = Q'Pv = 0$$

であるから $Tv = (P - Q)v = Pv = v, Rv = (P + Q)v = Pv = v, R'v = (P' + Q')v = P'v = v$ であり,

$$v = R^{-1}v = R^{-1}R'v = \Delta v$$

である. よって v は自己共役作用素 Δ の固有値 1 の固有ベクトルなので $v = \Delta^{\frac{1}{2}}v$ であり, (14.83) より,

$$Jv = J\Delta^{\frac{1}{2}}v = Sv = SPv = Pv = v$$

である.

(8) (14.84), (14.85) より,

$$J\Delta J = J\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}J = SS^* = F^*F = \Delta^{-1}$$

であるので, 命題 10.207 より,

$$J\Delta^{it}J = (J\Delta J)^{-it} = (\Delta^{-1})^{-it} = \Delta^{it} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

である. よって任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し Δ^{it} は J と可換である. また $\Delta = R^{-1}(2 - R)$ であり, (14.80) より $|T| = (R(2 - R))^{\frac{1}{2}}$ なので Borel カルキュラスより任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し Δ^{it} は $|T|$ と可換である. よって Δ^{it} は $T = J|T|$ と可換である.[*310]

□

定義 14.99 (von Neumann 環の巡回分離ベクトルに付随するモジュラー作用素, モジュラー共役子)**.** $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環, $v \in \mathcal{H}$ を $\mathcal{M}$ の巡回分離ベクトル (定義 14.57) とする. 定理 14.98 における Δ と J をそれぞれ $(\mathcal{M}, v)$ に付随するモジュラー作用素, モジュラー共役子と言う. $(\mathcal{M}, v)$ に付随するモジュラー作用素とモジュラー共役子は, 定理 14.98 の (5), (6) より,

$$\mathcal{M}v \ni Av \mapsto A^*v \in \mathcal{H}$$

の閉包 S の極分解 (定理 10.204) として決定られ, $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$ である.

命題 14.100. $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環, $v \in \mathcal{H}$ を $\mathcal{M}$ の巡回分離ベクトルとし, $(\mathcal{M}, v)$ に付随するモジュラー作用素を Δ, モジュラー共役子を J とする. このとき v は $\mathcal{M}'$ の巡回分離ベクトルでもあり, $(\mathcal{M}', v)$ に付随するモジュラー作用素は Δ^{-1}, モジュラー共役子は J である.

証明. 定理 14.98 より明らかである. □

[*310] Borel 関数カルキュラスの基本性質については定理 10.68 を参照.

補題 14.101. $f:\Omega=\{z\in\mathbb{C}:-1<\mathrm{Re}(z)<1\}\to\mathbb{C}$ を $\{z\in\mathbb{C}:-\frac{1}{2}\leqslant\mathrm{Re}(z)\leqslant\frac{1}{2}\}$ において有界な正則関数とする．このとき任意の $\theta\in(-\pi,\pi)$ に対し，

$$f(0)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\theta t}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}f\left(it+\frac{1}{2}\right)+e^{-i\frac{\theta}{2}}f\left(it-\frac{1}{2}\right)\right)dt$$

が成り立つ．

証明. 正則関数 $g:\Omega\backslash\{0\}\to\mathbb{C}$ を，

$$g(z):=\pi e^{i\theta z}(\sin(\pi z))^{-1}f(z)\quad(\forall z\in\Omega\backslash\{0\})$$

[*311]として定義すると，

$$\lim_{z\to 0}zg(z)=f(0)$$

であるから g の特異点 0 における留数は $f(0)$ である．よって留数定理 7.33 より，任意の正数 L に対し，

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-L}^{L}g\left(it+\frac{1}{2}\right)idt-\int_{-L}^{L}g\left(it-\frac{1}{2}\right)idt+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}g(-iL+s)ds-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}g(iL+s)ds\right)\tag{14.88}$$

が成り立つ．ここで，

$$M:=\sup_{-\frac{1}{2}\leqslant\mathrm{Re}(z)\leqslant\frac{1}{2}}|f(z)|<\infty$$

とおくと，$\theta-\pi<0<\theta+\pi$ より，

$$\sup_{-\frac{1}{2}\leqslant s\leqslant\frac{1}{2}}|g(it+s)|\leqslant 2\pi M\frac{e^{-\theta t}}{|e^{\pi t}-e^{-\pi t}|}\to 0\quad(t\to\pm\infty)$$

であるから，(14.88) の第 3 項と第 4 項は $L\to\infty$ で 0 に収束する．よって，

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-\infty}^{\infty}g\left(it+\frac{1}{2}\right)idt-\int_{-\infty}^{\infty}g\left(it-\frac{1}{2}\right)idt\right)\tag{14.89}$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}\pm g\left(it\pm\frac{1}{2}\right)&=\pm\pi\exp\left(i\theta\left(it\pm\frac{1}{2}\right)\right)\sin\left(i\pi t\pm\frac{\pi}{2}\right)^{-1}f\left(it\pm\frac{1}{2}\right)\\&=\pi e^{-\theta t}e^{\pm i\frac{\theta}{2}}\cos(i\pi t)^{-1}f\left(it\pm\frac{1}{2}\right)\\&=2\pi e^{-\theta t}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}e^{\pm i\frac{\theta}{2}}f\left(it\pm\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

を (14.89) に代入して，

$$f(0)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\theta t}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}f\left(it+\frac{1}{2}\right)+e^{-i\frac{\theta}{2}}f\left(it-\frac{1}{2}\right)\right)dt$$

を得る． □

補題 14.102. $\mathcal{M}\subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環，$v\in\mathcal{H}$ を $\mathcal{M}$ の巡回分離ベクトルとする．このとき定理 14.98 において定義した作用素に関して次が成り立つ．

(1) 任意の $A'\in\mathcal{M}'_{+,1}$[*312]に対し，$A\in\mathcal{M}_+$ で，

$$Av=TA'v=RA'v$$

を満たすものが存在する．

[*311] $\{z\in\mathbb{C}:\sin(\pi z)=0\}=\mathbb{Z}$ であるから任意の $z\in\Omega\backslash\{0\}$ に対し $\sin(\pi z)\neq 0$ であることに注意．
[*312] $\mathcal{M}'_{+,1}$ は $\mathcal{M}'$ のノルムが 1 以下の非負元全体．

(2) 任意の $A' \in \mathcal{M}'_{+,1}$ と $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ なる任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し, $A \in \mathcal{M}_+$ で,

$$|T|JA'J|T| = \lambda R'AR + \overline{\lambda}RAR'$$

を満たすものが存在する.

(3) 任意の $A' \in \mathcal{M}'_{+,1}$ と任意の $\theta \in (-\pi, \pi)$ に対し,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\theta t}(e^{\pi t} + e^{-\pi t})^{-1}\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}dt \in \mathcal{M}_+$$

が成り立つ. ただし左辺は $\mathcal{H}$ 値 Bochner 積分 (定義 5.250) によって,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\theta t}(e^{\pi t} + e^{-\pi t})^{-1}\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}dt\right)u = \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta t}(e^{\pi t} + e^{-\pi t})^{-1}\left(\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}u\right)dt \quad (\forall u \in \mathcal{H})$$

として定義される $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素である.

証明. (1)

$$\mathcal{M} \ni B \mapsto (Bv \mid v) \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{M} \ni B \mapsto (Bv \mid A'v) \in \mathbb{C} \tag{14.90}$$

はそれぞれ正規非負線型汎関数であり,

$$(Bv \mid A'v) \leqslant (Bv \mid v) \quad (\forall B \in \mathcal{M}_+)$$

であるから, 補題 14.89 より $A \in \mathcal{M}_+$ で,

$$(Bv \mid A'v) = \frac{1}{2}(ABv \mid v) + \frac{1}{2}(BAv \mid v) \quad (\forall B \in \mathcal{M})$$

を満たすものが取れる. これより,

$$(Bv \mid A'v) = \mathrm{Re}(Bv \mid Av) \quad (\forall B \in \mathcal{M}_{\mathrm{sa}})$$

であるから $Av - A'v \in (\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}v)^{\perp}_{\mathbb{R}} = \mathrm{Ran}(1-P)$ なので,

$$Av = PAv = PA'v$$

である. ここで $QP' = Q(1-Q) = 0$ であるから $QA'v = QP'A'v = 0$ なので,

$$TA'v = (P-Q)A'v = PA'v = Av, \quad RA'v = (P+Q)A'v = PA'v = Av$$

である.

(2) (1) と同様に (14.90) に対して補題 14.89 を適用すれば $A \in \mathcal{M}_+$ で,

$$(Bv \mid A'v) = \lambda(ABv \mid v) + \overline{\lambda}(BAv \mid v) \quad (\forall B \in \mathcal{M})$$

を満たすものが取れることが分かる. これより,

$$\begin{aligned}(Cv \mid A'Bv) &= \lambda(ABCv \mid v) + \overline{\lambda}(BCAv \mid v) = \lambda(Cv \mid BAv) + \overline{\lambda}(CAv \mid Bv) \\ &= \lambda(Cv \mid J\Delta^{\frac{1}{2}}ABv) + \overline{\lambda}(J\Delta^{\frac{1}{2}}ACv \mid Bv) \quad (\forall B, C \in \mathcal{M}_{\mathrm{sa}})\end{aligned} \tag{14.91}$$

が成り立つ. ここで任意の $B', C' \in \mathcal{M}'_{+,1}$ に対し (1) より $B, C \in \mathcal{M}_+$ で,

$$Bv = TB'v = RB'v, \quad Cv = TC'v = RC'v$$

を満たすものが取れる. そこでこれを (14.91) の左辺と右辺に代入すると,

$$((14.91)\text{ の左辺 }) = (TC'v \mid A'TB'v) = (TA'TB'v \mid C'v) = (|T|JA'J|T|v \mid C'v)$$

となり, $TJ\Delta^{\frac{1}{2}}=|T|\Delta^{\frac{1}{2}}=(R'^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}})(R^{-\frac{1}{2}}R'^{\frac{1}{2}})\subseteq R'$ より,

$$\begin{aligned}((14.91)\text{ の右辺 }) &= \lambda(TC'v\mid J\Delta^{\frac{1}{2}}ARB'v)+\overline{\lambda}(J\Delta^{\frac{1}{2}}ARC'v\mid TB'v)\\ &= \lambda(R'ARB'v\mid C'v)+\overline{\lambda}(B'v\mid R'ARC'v)\\ &= \lambda(R'ARB'v\mid C'v)+\overline{\lambda}(RAR'B'v\mid C'v)\end{aligned}$$

となる. よって任意の $B',C'\in\mathcal{M}'_{+,1}$ に対し,

$$(|T|JA'J|T|B'v\mid C'v)=\lambda(R'ARB'v\mid C'v)+\overline{\lambda}(RAR'B'v\mid C'v)$$

が成り立ち, $\mathcal{M}'v=\operatorname{span}\mathcal{M}'_{+,1}v$ は $\mathcal{H}$ で稠密なので,

$$|T|JA'J|T|=\lambda R'AR+\overline{\lambda}RAR'$$

が成り立つ.

(3) $\mathrm{Re}(e^{i\frac{\theta}{2}})=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$ であるから (2) より $A\in\mathcal{M}_+$ で,

$$|T|JA'J|T|=e^{i\frac{\theta}{2}}R'AR+e^{-i\frac{\theta}{2}}RAR' \tag{14.92}$$

を満たすものが取れる. 今, 自己共役作用素 $\log(\Delta)$ の任意の全解析ベクトル (定義 10.211) $u,w\in\mathcal{H}$ を取り固定する. そして整関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を,

$$f(z)=\left(|T|A|T|\Delta^{-z}u\mid\Delta^{\overline{z}}w\right)\quad(\forall z\in\mathbb{C})$$

として定義する. このとき f は明らかに $\{z\in\mathbb{C}:-\frac{1}{2}\leqslant\mathrm{Re}(z)\leqslant\frac{1}{2}\}$ 上で有界であるから補題 14.101 より,

$$f(0)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\theta t}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}f\left(it+\frac{1}{2}\right)+e^{-i\frac{\theta}{2}}f\left(it-\frac{1}{2}\right)\right)dt \tag{14.93}$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned}|T|\Delta^{-\frac{1}{2}}&=(R^{\frac{1}{2}}R'^{\frac{1}{2}})(R'^{-\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}})\subseteq R,\\ |T|\Delta^{\frac{1}{2}}&=(R'^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}})(R^{-\frac{1}{2}}R'^{\frac{1}{2}})\subseteq R'\end{aligned}$$

であるから, 任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}f\left(it+\frac{1}{2}\right)&=\left(A|T|\Delta^{-\frac{1}{2}}\Delta^{-it}u\mid|T|\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{-it}w\right)=(\Delta^{it}R'AR\Delta^{-it}u\mid w),\\ f\left(it-\frac{1}{2}\right)&=\left(A|T|\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{-it}u\mid|T|\Delta^{-\frac{1}{2}}\Delta^{-it}w\right)=(\Delta^{it}RAR'\Delta^{-it}u\mid w)\end{aligned}$$

である. よって (14.92) より,

$$\begin{aligned}&e^{i\frac{\theta}{2}}f\left(it+\frac{1}{2}\right)+e^{-i\frac{\theta}{2}}f\left(it-\frac{1}{2}\right)=\left(\Delta^{it}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}RAR'+e^{-i\frac{\theta}{2}}RAR'\right)\Delta^{-it}u\mid w\right)\\ &=(\Delta^{it}|T|JA'J|T|\Delta^{-it}u\mid w)=(|T|\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}|T|u\mid w)\quad(\forall t\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

であるので, (14.93) より,

$$\begin{aligned}(|T|A|T|u\mid w)&=\int_{\mathbb{R}}e^{-\theta t}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}(|T|\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}|T|u\mid w)dt\\ &=\left(|T|\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-\theta t}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}dt\right)|T|u\mid w\right)\end{aligned}$$

である. u,w は自己共役作用素 $\log(\Delta)$ の任意の全解析ベクトルであり, 定理 10.214 より自己共役作用素の全解析ベクトル全体は $\mathcal{H}$ の稠密部分空間であるから,

$$|T|A|T|=|T|\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-\theta t}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}dt\right)|T|$$

が成り立つ. さらに $|T|$ は単射な有界自己共役作用素であるから,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\theta t}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}dt = A \in \mathcal{M}_+$$

が成り立つ.

□

定理 14.103 (冨田-竹崎の定理)**.** $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環, $v \in \mathcal{H}$ を $\mathcal{M}$ の巡回分離ベクトル, $(\mathcal{M}, v)$ に付随するモジュラー作用素を Δ, モジュラー共役子を J とおく. このとき,

(1)

$$\Delta^{it}\mathcal{M}\Delta^{-it} = \mathcal{M} \ \ (\forall t \in \mathbb{R}), \ \ J\mathcal{M}J = \mathcal{M}'$$

が成り立つ.

(2)

$$JAJ = A^*, \ \ \Delta A v = A v \ \ (\forall A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}')$$

が成り立つ.

(3)

$$\sigma_t(A) := \Delta^{it}A\Delta^{-it} \in \mathcal{M} \ \ (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M})$$

として定義される $\mathcal{M}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群 $\sigma = (\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ に関して解析的な元 (定義 14.82) $A \in \mathcal{M}_\sigma$ を取ると, Av は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 $\log(\Delta)$ の全解析ベクトルであり,

$$\Delta^{iz}Av = \sigma_z(A)v \ \ (\forall A \in \mathcal{M}, \forall z \in \mathbb{C})$$

が成り立つ.

(4) 任意の正数 β に対し,

$$\alpha_t(A) := \sigma_{-\frac{t}{\beta}}(A) \ \ (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M})$$

として $\mathcal{M}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群 $\alpha = (\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を定義すると, 正規非負線型汎関数

$$\omega_v : \mathcal{M} \ni A \mapsto (Av \mid v) \in \mathbb{C}$$

は (α, β)-KMS 条件 (定義 14.84) を満たす.

証明. (1) 任意の $A', B' \in \mathcal{M}'$ と任意の $u, w \in \mathcal{H}$ を取り固定する. $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Re}(z) < \pi\}$ とおき,

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-zt}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}\left(\left[\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it},\ B'\right]u \mid w\right)dt \\ &= \left(\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-zt}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}\left[\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it},\ B'\right]dt\right)u \mid w\right) \\ &= \left(\left[\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-zt}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}dt\right),\ B'\right]u \mid w\right) \end{aligned}$$

($[\cdot,\cdot]$ は交換子積 (定義 12.158)) として $f : \Omega \to \mathbb{C}$ を定義すると Lebesgue 優収束定理より f は正則関数であることが分かる. 補題 14.102 の (3) より,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\theta t}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}dt \in \mathcal{M} \ \ (\forall \theta \in (-\pi, \pi))$$

であるから,

$$f(\theta) = \left(\left[\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-zt}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}dt\right),\ B'\right]u \mid w\right) = 0 \ \ (\forall \theta \in (-\pi, \pi))$$

である. よって一致の原理 7.24 より $f(z) = 0 \ (\forall z \in \Omega)$ であるから, 特に,

$$0 = f(is) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ist}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}\left(\left[\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it},\ B'\right]u \mid w\right)dt \ \ (\forall s \in \mathbb{R}) \tag{14.94}$$

が成り立つ．よって Fourier 変換の単射性[*313]と (14.94) の被積分関数の連続性より，

$$\left(\left[\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it},\ B'\right]u \mid w\right) = 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ．これが任意の $A', B' \in \mathcal{M}'$ と任意の $u, w \in \mathcal{H}$ に対して成り立つので，

$$\Delta^{it}J\mathcal{M}'J\Delta^{-it} \subseteq \mathcal{M}'' = \mathcal{M} \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \tag{14.95}$$

が成り立つ．

命題 14.100 より $(\mathcal{M}', v)$ に付随するモジュラー作用素とモジュラー共役子は Δ^{-1}, J であるので，$\mathcal{M}$ の替わりに $\mathcal{M}'$ を考えれば (14.95) より，

$$\Delta^{-it}J\mathcal{M}J\Delta^{it} \subseteq \mathcal{M}' \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \tag{14.96}$$

が成り立つことが分かる．よって (14.95), (14.96) より，

$$\Delta^{it}J\mathcal{M}'J\Delta^{-it} = \mathcal{M} \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \tag{14.97}$$

を得る．$t = 0$ とすれば $J\mathcal{M}'J = \mathcal{M}$ となり，これを (14.97) に代入すれば $\Delta^{it}\mathcal{M}\Delta^{-it} = \mathcal{M}$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ を得る．

(2) 任意の $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ に対し定理 14.98 より，

$$J\Delta^{\frac{1}{2}}Av = A^*v, \quad J\Delta^{-\frac{1}{2}}Av = A^*v$$

であるから，

$$\Delta^{\frac{1}{2}}Av = \Delta^{-\frac{1}{2}}Av = JA^*v$$

である．また $Jv = v$ であり，(1) より $JA^*J \in \mathcal{M}$ であるから，

$$\Delta^{\frac{1}{2}}Av = \Delta^{-\frac{1}{2}}Av = JA^*v = JA^*Jv \in \mathcal{M}v \subseteq D(\Delta^{\frac{1}{2}})$$

である．ゆえに，

$$Av = \Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}}Av = \Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}Av = \Delta Av$$

であるから Av は Δ の固有値 1 の固有ベクトルである．よって $\Delta^{\frac{1}{2}}Av = Av$ であるから，

$$A^*v = J\Delta^{\frac{1}{2}}Av = JAv = JAJv$$

であり，(1) より $A^*, JAJ \in \mathcal{M}$ で v は $\mathcal{M}$ の分離ベクトルであるから，$A^* = JAJ$ である．

(3) v は Δ の固有値 1 の固有ベクトルであるから $\Delta^{it}v = v$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ である．よって，

$$\Delta^{it}Av = \Delta^{it}A\Delta^{-it}v = \sigma_t(A)v \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M})$$

なので任意の $A \in \mathcal{M}_\sigma$ に対し，

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \Delta^{it}Av = \sigma_t(A)v \in \mathcal{H}$$

は $\mathcal{H}$ 値整関数に拡張できる．ゆえに定理 10.214 より Av は $\log(\Delta)$ の全解析ベクトルであり，

$$\Delta^{iz}Av = \sigma_z(A)v \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

が成り立つ．

(4) 任意の $A \in \mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_\sigma$ に対し (3) より，

$$\alpha_{i\beta}(A)v = \sigma_{-i}(A)v = \Delta Av$$

であるから，任意の $A \in \mathcal{M}_\alpha, B \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\begin{aligned}\omega_v(B\alpha_{i\beta}(A)) &= (\alpha_{i\beta}(A)v \mid B^*v) = (\Delta Av \mid B^*v) = (\Delta^{\frac{1}{2}}Av \mid \Delta^{\frac{1}{2}}B^*v)\\ &= (J\Delta^{\frac{1}{2}}B^*v \mid J\Delta^{\frac{1}{2}}Av) = (Bv \mid A^*v) = \omega_v(AB)\end{aligned}$$

となる．よって ω_v は (α, β)-KMS 条件を満たす．

□

[*313] 緩増加超関数空間上の Fourier 変換 (定義 8.68) は線型同型写像であるから特に単射．

定義 14.104 (von Neumann 環の巡回分離ベクトルに付随するモジュラー自己同型群)**.** $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環, $v \in \mathcal{H}$ を $\mathcal{M}$ の巡回分離ベクトル, $(\mathcal{M}, v)$ に付随するモジュラー作用素を Δ とおく. 冨田-竹崎の定理 14.103 より,

$$\sigma_t(A) := \Delta^{it} A \Delta^{-it} \in \mathcal{M} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M})$$

によって $\mathcal{M}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群 $\sigma = (\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ が定義できる. σ を $(\mathcal{M}, v)$ に付随するモジュラー自己同型群と言う.

定理 14.105. $\mathcal{M}$ を von Neumann 環, $\varphi \in \mathcal{M}_{*,+}$ を忠実正規非負線型汎関数とする. このとき任意の正数 β に対し, φ が β-KMS 条件を満たす (定義 14.84) ような $\mathcal{M}$ 上の 1 径数自己同型群が唯一つ存在する.

証明. 一意性は命題 14.86 による. 存在を示す. (π, v) を φ に対する GNS 表現とすると, 定理 14.45 と注意 14.59 より v は von Neumann 環 $\pi(\mathcal{M})$ の巡回分離ベクトルであり, π は忠実である. 今, $(\pi(\mathcal{M}), v)$ に付随するモジュラー自己同型群を $\sigma = (\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ とおくと,

$$\pi(\alpha_t(A)) := \sigma_{-\frac{t}{\beta}}(\pi(A)) \in \pi(\mathcal{M}) \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M})$$

によって $\mathcal{M}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群 $\alpha = (\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$ が定義できる (系 14.42 より $\pi(\mathcal{M}) \ni \pi(A) \mapsto A \in \mathcal{M}$ は正規であることに注意).

$$\varphi(A) = (\pi(A)v \mid v) \quad (\forall A \in \mathcal{M})$$

であるから, 冨田-竹崎の定理 14.103 の (4) より φ は (α, β)-KMS 条件を満たす. □

定義 14.106 (極大可換な von Neumann 環)**.** von Neumann 環 $\mathcal{M}$ に対し,

$$\mathcal{M} \text{ は可換} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$$

である. $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ が成り立つとき $\mathcal{M}$ は極大可換であると言う.

系 14.107 (可換な von Neumann 環が極大可換であるための十分条件)**.** $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を可換な von Neumann 環とする. もし $\mathcal{M}$ が巡回ベクトルを持つならば $\mathcal{M}$ は極大可換である.

証明. $\mathcal{M}$ が巡回ベクトル $v \in \mathcal{H}$ を持つとする. $\mathcal{M}$ は可換なので $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ であるから,

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{M}v} = \overline{\mathcal{M}'v}$$

である. よって命題 14.58 より v は $\mathcal{M}$ の分離ベクトルでもある. そこで $(\mathcal{M}, v)$ に付随するモジュラー共役子を J とおくと, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ であることと冨田-竹崎の定理 14.103 より,

$$\mathcal{M}' = J\mathcal{M}J \subseteq J\mathcal{M}'J = \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$$

である. よって $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ であるから $\mathcal{M}$ は極大可換である. □

命題 14.108 ($J\Delta^{\frac{1}{2}}$ の芯)**.** $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環, $v \in \mathcal{H}$ を $\mathcal{M}$ の巡回分離ベクトルとし, $(\mathcal{M}, v)$ に付随するモジュラー作用素を Δ, モジュラー共役子を J とする. また $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}$ を WOT 稠密な部分 $*$-環とする. このとき $\mathcal{D}v$ は $J\Delta^{\frac{1}{2}}$ の芯である.

証明. 任意の $A \in \mathcal{M}$ に対し Kaplansky の稠密性定理 14.60 より $\mathcal{D}$ のネット $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ で,

$$A_\lambda \to A, \quad A_\lambda^* \to A^* \quad (\text{in SOT})$$

なるものが取れる. よって,

$$(A_\lambda v, (J\Delta^{\frac{1}{2}})A_\lambda v) = (A_\lambda v, A_\lambda^* v) \to (Av, A^* v) = (Av, (J\Delta^{\frac{1}{2}})Av)$$

であるから,

$$(J\Delta^{\frac{1}{2}})|_{\mathcal{M}v} \subseteq \overline{(J\Delta^{\frac{1}{2}})|_{\mathcal{D}v}} \subseteq J\Delta^{\frac{1}{2}}$$

である. ここで $\mathcal{M}v$ は $J\Delta^{\frac{1}{2}}$ の芯なので,

$$\overline{(J\Delta^{\frac{1}{2}})|_{\mathcal{M}v}} = \overline{(J\Delta^{\frac{1}{2}})|_{\mathcal{D}v}} = J\Delta^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ. よって $\mathcal{D}v$ は $J\Delta^{\frac{1}{2}}$ の芯である. □

命題 14.109 (モジュラー作用素, モジュラー共役子, モジュラー自己同型群のテンソル積)**.** $\mathcal{M}_j \subseteq B(\mathcal{H}_j)$ を von Neumann 環, $v_j \in \mathcal{H}_j$ を $\mathcal{M}_j$ の巡回分離ベクトルとする ($j = 1, \cdots, N$). このとき,

$$v := v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \in \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$$

はテンソル積 von Neumann 環

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_N \subseteq B(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N)$$

の巡回分離ベクトルである. そして $(\mathcal{M}_j, v_j)$ に付随するモジュラー作用素, モジュラー共役子, モジュラー自己同型群をそれぞれ $\Delta_j, J_j, (\sigma_t^j)_{t\in\mathbb{R}}$ ($j = 1, \cdots, N$) とおくと, $(\mathcal{M}, v)$ に付随するモジュラー作用素, モジュラー共役子, モジュラー自己同型群は,

$$\Delta = \Delta_1 \otimes \cdots \otimes \Delta_N, \quad J = J_1 \otimes \cdots \otimes J_N, \quad \sigma_t = \sigma_t^1 \otimes \cdots \otimes \sigma_t^N \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

である.[*314]

証明.

$$\mathcal{M}v \supseteq \mathcal{M}_1 v_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N v_N, \quad \mathcal{M}'v \supseteq \mathcal{M}_1' v_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N' v_N$$

($\odot$ は線型空間としてのテンソル積を表す) より v は $\mathcal{M}$ の巡回分離ベクトルである. そこで $(\mathcal{M}, v)$ に付随するモジュラー作用素とモジュラー共役子を Δ, J とおく.

$$\mathcal{D} := \mathcal{M}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N = \mathrm{span}\{A_1 \otimes \cdots \otimes A_N : A_1 \in \mathcal{M}_1, \cdots, A_N \in \mathcal{M}_N\}$$

は $\mathcal{M}$ の WOT 稠密な部分 $*$-環であるから, 命題 14.108 より,

$$\mathcal{D}v = \mathcal{M}_1 v_1 \odot \cdots \odot \mathcal{M}_N v_N$$

は $J\Delta^{\frac{1}{2}}$ の芯である. また定理 10.104 より $\mathcal{D}v$ は非負自己共役作用素

$$(\Delta_1 \otimes \cdots \otimes \Delta_N)^{\frac{1}{2}} = \Delta_1^{\frac{1}{2}} \otimes \cdots \otimes \Delta_N^{\frac{1}{2}}$$

の芯でもある. 任意の $A_1 \in \mathcal{M}_1, \cdots, A_N \in \mathcal{M}_N$ に対し,

$$\begin{aligned} J\Delta^{\frac{1}{2}}(A_1 \otimes \cdots \otimes A_N)v &= A_1^* v_1 \otimes \cdots \otimes A_N^* v_N = (J_1 \Delta_1^{\frac{1}{2}} A_1 v_1) \otimes \cdots \otimes (J_N \Delta_N^{\frac{1}{2}} A_N v_N) \\ &= (J_1 \otimes \cdots \otimes J_N)(\Delta_1^{\frac{1}{2}} \otimes \cdots \otimes \Delta_N^{\frac{1}{2}})(A_1 \otimes \cdots \otimes A_N)v \\ &= (J_1 \otimes \cdots \otimes J_N)(\Delta_1 \otimes \cdots \otimes \Delta_N)^{\frac{1}{2}}(A_1 \otimes \cdots \otimes A_N)v \end{aligned}$$

であるから $\mathcal{D}v$ 上で,

$$J\Delta^{\frac{1}{2}} = (J_1 \otimes \cdots \otimes J_N)(\Delta_1 \otimes \cdots \otimes \Delta_N)^{\frac{1}{2}} \tag{14.98}$$

が成り立つ. $\mathcal{D}v$ は (14.98) の両辺の作用素の芯であるので, (14.98) は作用素の等式として成り立つ. よってモジュラー作用素とモジュラー共役子の極分解による特徴付け (定義 14.99 を参照) と極分解の一意性 (定理 10.204) より,

$$\Delta = \Delta_1 \otimes \cdots \otimes \Delta_N, \quad J = J_1 \otimes \cdots \otimes J_N$$

が成り立つ. 定理 10.104 より,

$$\Delta^{it} = \Delta_1^{it} \otimes \cdots \otimes \Delta_N^{it} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であるから, $(\mathcal{M}, v)$ に付随するモジュラー自己同型群を $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ とおくと,

$$\sigma_t(A_1 \otimes \cdots \otimes A_N) = \sigma_t^1(A_1) \otimes \cdots \otimes \sigma_t^N(A_N) \quad (\forall A_1 \in \mathcal{M}_1, \cdots, \forall A_N \in \mathcal{M}_N, \forall t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. よって $\sigma_t = \sigma_t^1 \otimes \cdots \otimes \sigma_t^N$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ が成り立つ. □

---

*314 自己共役作用素のテンソル積については定理 10.104 を参照. 弱連続な 1 径数自己同型群のテンソル積については命題 14.96 を参照.

14.7 Fock 空間, 第二量子化作用素, 生成消滅作用素, Segal の場の作用素

定義 14.110 (テンソル積 Hilbert 空間上の対称化作用素, 反対称化作用素)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし, $\bigotimes^N \mathcal{H}$ を $N \in \mathbb{N}$ 個の $\mathcal{H}$ のテンソル積 Hilbert 空間 (定義 10.92), $\mathfrak{S}_N$ を N 次の置換群とする. 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対し, 定理 2.68 と命題 3.19 より $\bigotimes^N \mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素

$$P_\sigma : \bigotimes^N \mathcal{H} \ni v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(N)} \in \bigotimes^N \mathcal{H}$$

が定まる. これを σ による置換作用素と言う. 明らかに,

$$P_\sigma P_\tau = P_{\tau\sigma}, \quad P_\sigma^* = P_{\sigma^{-1}} \quad (\forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_N)$$

が成り立つ. これより,

$$\Theta_{N,+} := \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} P_\sigma, \quad \Theta_{N,-} := \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) P_\sigma$$

とおけば,

$$\Theta_{N,\pm}^* = \Theta_{N,\pm}, \quad P_\sigma \Theta_{N,\pm} = \Theta_{N,\pm} P_\sigma = (\mathrm{sgn}(\sigma))^{\frac{1 \mp 1}{2}} \Theta_{N,\pm} \quad (\forall \sigma \in \mathfrak{S}_N), \quad \Theta_{N,\pm}^2 = \Theta_{N,\pm}$$

である. よって $\Theta_{N,\pm}$ は Hilbert 空間 $\bigotimes^N \mathcal{H}$ 上の射影作用素である. $\Theta_{N,+}, \Theta_{N,-}$ をそれぞれ $\bigotimes^N \mathcal{H}$ 上の対称化作用素, 反対称化作用素と言う. 以後のため, $N = 0$ の場合も考え,

$$\bigotimes^0 \mathcal{H} := \mathbb{C}, \quad \Theta_{0,\pm} := 1$$

とする.

定義 14.111 ((反) 対称 Fock 空間, 有限粒子空間, Fock 真空)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. Hilbert 空間の列 $\left(\bigotimes^N \mathcal{H}\right)_{N \in \mathbb{Z}_+}$, $\left(\Theta_{N,\pm}\left(\bigotimes^N \mathcal{H}\right)\right)_{N \in \mathbb{Z}_+}$ の直和 Hilbert 空間

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}_+} \bigotimes^N \mathcal{H}, \quad \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}) := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}_+} \Theta_{N,\pm}\left(\bigotimes^N \mathcal{H}\right)$$

を考える. $\mathcal{F}(\mathcal{H}), \mathcal{F}_+(\mathcal{H}), \mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ をそれぞれ $\mathcal{H}$ 上の全 Fock 空間, 対称 Fock 空間, 反対称 Fock 空間と言う. しばしば各 $N \in \mathbb{Z}_+$ に対し自然な等長埋め込みにより,

$$\bigotimes^N \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{H}), \quad \Theta_{N,\pm}\left(\bigotimes^N \mathcal{H}\right) \subseteq \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$$

とみなし, 閉部分空間 $\bigotimes^N \mathcal{H}, \Theta_{N,\pm}(\bigotimes^N \mathcal{H})$ をそれぞれ $\mathcal{F}(\mathcal{H}), \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$ の N 粒子空間と呼ぶ. また,

$$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H}) := \mathrm{span} \bigcup_{N \in \mathbb{Z}_+} \bigotimes^N \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{H}),$$

$$\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin}}(\mathcal{H}) := \mathrm{span} \bigcup_{N \in \mathbb{Z}_+} \Theta_{N,\pm}\left(\bigotimes^N \mathcal{H}\right) \subseteq \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$$

をそれぞれ有限粒子空間と呼ぶ. 0 粒子空間に属する単位ベクトル

$$\Omega := (1, 0, 0, \cdots) \in \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$$

を Fock 真空と呼ぶ.

$D \subseteq \mathcal{H}$ を線型部分空間とし, $\bigodot^N D \subseteq \bigotimes^N \mathcal{H}$ を N 個の D の線型空間としてのテンソル積, すなわち,

$$\bigodot^N D := \mathrm{span}\, \{v_1 \otimes \cdots \otimes v_N : v_1, \cdots, v_N \in D\}$$

とする. ただし $\bigodot^0 D := \bigotimes^0 \mathcal{H} = \mathbb{C}$ とする. そして有限粒子空間の線型部分空間

$$\mathcal{F}_{\mathrm{fin},0}(D) := \mathrm{span} \bigcup_{N\in\mathbb{Z}_+} \bigodot^N D \subseteq \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H}),$$

$$\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(D) := \mathrm{span} \bigcup_{N\in\mathbb{Z}_+} \Theta_{N,\pm} \left(\bigodot^N D \right) \subseteq \mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$$

を定義する.

定義 14.112 (作用素の射影作用素による簡約)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $P \in B(\mathcal{H})$ を 0 ではない射影作用素とする. $\mathcal{H}$ 上の (反) 線型作用素 T が P によって簡約可能であるとは,

$$PT \subseteq TP$$

が成り立つことを言う. T が P によって簡約可能であるとき $P(D(T)) = D(T) \cap \mathrm{Ran}(P)$ である. よって

$$D(T_P) := P(D(T)) = D(T) \cap \mathrm{Ran}(P)$$

とおいて Hilbert 空間 $\mathrm{Ran}(P)$ 上の (反) 線型作用素

$$T_P : D(T_P) \ni v \mapsto Tv \in \mathrm{Ran}(P)$$

が定義できる. T_P を T の P による簡約部分と言う.

命題 14.113 (作用素の射影作用素による簡約の基本性質)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $P \in B(\mathcal{H})$ を 0 ではない射影作用素とする.

(1) S, T を P によって簡約可能な $\mathcal{H}$ 上の線型作用素とすると, $S+T, ST, \alpha T$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) も P によって簡約可能であり,

$$(S+T)_P = S_P + T_P, \quad (ST)_P = S_P T_P, \quad (\alpha T)_P = \alpha T_P$$

が成り立つ.

(2) T を P によって簡約可能な $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された線型作用素とすると, T^* も P によって簡約可能であり, T_P は Hilbert 空間 $\mathrm{Ran}(P)$ 上の稠密に定義された線型作用素である. そして,

$$(T^*)_P = (T_P)^*$$

が成り立つ.

(3) T を P によって簡約可能な $\mathcal{H}$ 上の可閉作用素とすると, $\overline{T}$ も P によって簡約可能であり, T_P は Hilbert 空間 $\mathrm{Ran}(P)$ 上の可閉作用素である. そして,

$$(\overline{T})_P = \overline{(T_P)}$$

が成り立つ.

(4) $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間とし, $E : \mathcal{B}_X \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を P によって簡約可能な射影値測度 (つまり任意の $B \in \mathfrak{M}$ に対し $E(B)$ が P によって簡約可能) とすると,

$$E_P : \mathfrak{M} \ni B \mapsto E(B)_P \in \mathcal{P}(\mathrm{Ran}(P))$$

は射影値測度である. そして任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し $\int_X f(x) dE(x)$ は P によって簡約可能であり,

$$\left(\int_X f(x) dE(x) \right)_P = \int_X f(x) dE_P(x)$$

が成り立つ.[*315]

[*315] 射影値測度や射影値測度による積分については定義 10.47, 定義 10.52 を参照.

(5) T を P によって簡約可能な $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素か $B(\mathcal{H})$ の正規元とすると, T のスペクトル測度 $E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ は P によって簡約可能である. そして任意の Borel 関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し $f(T)$ は P によって簡約可能であり,

$$f(T)_P = f(T_P)$$

が成り立つ. [*316]

証明. (1) は容易に確かめられる.
(2) を示す. $D(T_P) = P(D(T))$ は $\mathrm{Ran}(P) = P(\mathcal{H})$ の稠密部分空間であるから T_P は稠密に定義された作用素である. 任意の $u \in D(T), v \in D(T^*)$ に対し,

$$(u \mid PT^*v) = (Pu \mid T^*v) = (TPu \mid v) = (PTu \mid v) = (Tu \mid Pv)$$

であるから $Pv \in D(T^*)$ であり, $PT^*v = T^*Pv$ である. よって $PT^* \subseteq T^*P$ であるから T^* は P によって簡約可能である. 任意の $v \in D((T^*)_P) = D(T^*) \cap \mathrm{Ran}(P)$, 任意の $u \in D(T_P) = D(T) \cap \mathrm{Ran}(P)$ に対し,

$$(u \mid (T^*)_P v) = (u \mid T^*v) = (Tu \mid v) = (T_P u \mid v)$$

であるから $v \in D((T_P)^*)$, $(T^*)_P v = (T_P)^* v$ である. よって $(T^*)_P \subseteq (T_P)^*$ である. また任意の $v \in D((T_P)^*)$, 任意の $u \in D(T)$ に対し,

$$(Tu \mid v) = (PTu \mid v) = (T_P Pu \mid v) = (Pu \mid (T_P)^* v) = (u \mid (T_P)^* v)$$

であるから $v \in D(T^*) \cap \mathrm{Ran}(P) = D((T^*)_P)$ である. ゆえに $(T^*)_P = (T_P)^*$ である.
(3) を示す. 任意の $v \in D(\overline{T})$ に対し $D(T)$ の列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$v_n \to v, \ \ Tv_n \to \overline{T}v \ \ (n \to \infty)$$

なるものが取れ,

$$Pv_n \to Pv, \ \ TPv_n = PTv_n \to P\overline{T}v \ \ (n \to \infty)$$

であるから $P\overline{T}v = \overline{T}Pv$ である. よって $\overline{T}$ は P によって簡約可能である. 今, S を P によって簡約可能な線型作用素とすると, S の P による簡約部分 S_P のグラフは,

$$G(S_P) = (P \oplus P)(G(S)) = (\mathrm{Ran}(P) \oplus \mathrm{Ran}(P)) \cap G(S)$$

である. よって,

$$G((\overline{T})_P) = (\mathrm{Ran}(P) \oplus \mathrm{Ran}(P)) \cap G(\overline{T}) = (\mathrm{Ran}(P) \oplus \mathrm{Ran}(P)) \cap \overline{G(T)}$$

であるから, $G((\overline{T})_P)$ は $\mathrm{Ran}(P) \oplus \mathrm{Ran}(P)$ において閉である. ゆえに $(\overline{T})_P$ は $\mathrm{Ran}(P)$ 上の閉作用素である. そして,

$$G((\overline{T})_P) = (P \oplus P)(G(\overline{T})) = (P \oplus P)(\overline{G(T)})$$

において,

$$G(T_P) = (P \oplus P)(G(T))$$

は稠密なので, $\overline{(T_P)} = (\overline{T})_P$ が成り立つ.
(4) を示す. (1), (2) より任意の $B \in \mathfrak{M}$ に対し $E_P(B)$ は Hilbert 空間 $\mathrm{Ran}(P)$ 上の射影作用素である.

$$E_P : \mathfrak{M} \ni B \mapsto E(B)_P \in \mathcal{P}(\mathrm{Ran}(P))$$

が射影値測度 (定義 10.47) であることは自明である. 任意の可測単関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対し, (1) より $\int_X f(x)dE(x)$ は P によって簡約可能であり, その簡約部分は,

$$\left(\int_X f(x)dE(x)\right)_P = \int_X f(x)dE_P(x) \tag{14.99}$$

[*316] スペクトル測度については定理 10.61, 定理 10.63 を参照. $f(T)$ や $f(T_P)$ は f に関する Borel 関数カルキュラス (定義 10.65) である.

である. 任意の有界可測関数は可測単関数の列によって一様近似できる (命題 5.129) ので, (14.99) は任意の有界可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対して成り立つ. 任意の可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ を取る.

$$f_n := f\chi_{(|f| \leqslant n)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

として有界可測関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定義すると, Lebesgue 優収束定理より任意の $v \in D\left(\int_X f(x)dE(x)\right)$ に対し,

$$\begin{aligned} P\left(\int_X f(x)dE(x)\right)v &= \lim_{n\to\infty} P\left(\int_X f_n(x)dE(x)\right)v = \lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n(x)dE(x)\right)Pv \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_X f(x)dE(x)\right)E(|f| \leqslant n)Pv \end{aligned}$$

であり, $\lim_{n\to\infty} E(|f| \leqslant n)v = v$ であるから, $\int_X f(x)dE(x)$ が閉作用素であることにより,

$$P\left(\int_X f(x)dE(x)\right)v = \lim_{n\to\infty}\left(\int_X f(x)dE(x)\right)E(|f| \leqslant n)Pv = \left(\int_X f(x)dE(x)\right)Pv$$

が成り立つ. よって $\int_X f(x)dE(x)$ は P によって簡約可能である. 任意の $v \in \mathrm{Ran}(P)$ に対し単調収束定理より,

$$\begin{aligned} &\int_X |f(x)|^2 dE_{v,v}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n(x)|^2 dE_{v,v}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\left(\int_X f_n(x)dE(x)\right)v\right\|^2 \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\left(\int_X f_n(x)dE_P(x)\right)v\right\|^2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n(x)|^2 dE_{P,v,v}(x) = \int_X |f(x)|^2 dE_{P,v,v}(x) \end{aligned}$$

であるから,

$$D\left(\left(\int_X f(x)dE(x)\right)_P\right) = D\left(\int_X f(x)dE(x)\right) \cap \mathrm{Ran}(P) = D\left(\int_X f(x)dE_P(x)\right)$$

である. そして任意の $u \in D\left(\left(\int_X f(x)dE(x)\right)_P\right) = D\left(\int_X f(x)dE_P(x)\right)$ と任意の $v \in \mathrm{Ran}(P)$ に対し Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned} \left(\left(\int_X f(x)dE(x)\right)_P u \mid v\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\int_X f_n(x)dE(x)\right)_P u \mid v\right) \\ = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\int_X f_n(x)dE_P(x)\right)u \mid v\right) &= \left(\left(\int_X f(x)dE_P(x)\right)u \mid v\right) \end{aligned}$$

である. ゆえに,

$$\left(\int_X f(x)dE(x)\right)_P = \int_X f(x)dE_P(x)$$

が成り立つ.
(5) を示す. $T \in B(\mathcal{H})$ が正規の場合, Stone-Weierstrass の定理 5.192 より,

$$C(\sigma(T)) = \overline{\mathrm{span}\left\{\overline{\mathrm{id}}^n\,\mathrm{id}^m : n, m \in \mathbb{Z}_+\right\}}$$

であり,

$$P(T^*)^n T^m = (T^*)^n T^m P \quad (\forall n, m \in \mathbb{Z}_+)$$

であるから,

$$Pf(T) = f(T)P \quad (\forall f \in C(\sigma(T)))$$

が成り立つ. よって任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\left(\left(\int_{\sigma(T)} f(\lambda)dE_T(\lambda)\right)u \mid Pv\right) = \left(\left(\int_{\sigma(T)} f(\lambda)dE_T(\lambda)\right)Pu \mid v\right) \quad (\forall f \in C(\sigma(T)))$$

であるから, E_T の位相正則性 (定理 10.61 を参照) と Riesz-Markov-角谷の表現定理 5.187 より,

$$(E_T(B)u \mid Pv) = (E_T(B)Pu \mid v) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\sigma(T)})$$

が成り立つ. よって E_T は P によって簡約可能である.

T が自己共役作用素の場合, T の Cayley 変換 $C(T) = (T-i)(T+i)^{-1}$ は P によって簡約可能なユニタリ作用素 (定理 10.34) であるから上で示したことにより $C(T)$ のスペクトル測度 $E_{C(T)}$ は P によって簡約可能である. 定理 10.63 より,

$$E_T(B) = E_{C(T)}(C(B)) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\sigma(T)})$$

であるから E_T も P によって簡約可能である. よって (4) より任意の Borel 関数 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ に対し $f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)dE_T(\lambda)$ は P によって簡約可能であり,

$$f(T)_P = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)dE_{T,P}(\lambda)$$

である. 命題 10.66 と (4) より,

$$\int_{\sigma(T)} f(\lambda)dE_{T,P}(\lambda) = f\left(\int_{\sigma(T)} \lambda dE_{T,P}(\lambda)\right) = f\left(\left(\int_{\sigma(T)} \lambda dE_T(\lambda)\right)_P\right) = f(T_P)$$

であるから, $f(T)_P = f(T_P)$ が成り立つ. □

定義 14.114 (第二量子化作用素)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, T を $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉線型作用素とする. このとき定義 10.97 と同様にして, 各 $N \in \mathbb{N}$ に対しテンソル積 Hilbert 空間 $\bigotimes^N \mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉線型作用素 $d\Gamma_N(T), \Gamma_N(T)$ で,

$$\bigodot^N D(T) = \mathrm{span}\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_N : v_1, \cdots, v_N \in D(T)\}$$

を芯として持ち, 任意の $v_1, \cdots, v_N \in D(T)$ に対し,

$$d\Gamma_N(T)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) = \sum_{j=1}^N v_1 \otimes \cdots \otimes v_{j-1} \otimes Tv_j \otimes v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_N, \tag{14.100}$$

$$\Gamma_N(T)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) = Tv_1 \otimes \cdots \otimes Tv_N \tag{14.101}$$

を満たすようなものが一意存在することが分かる ($\Gamma_N(T) = \bigotimes^N T$ に他ならない). $N = 0$ の場合, $d\Gamma_0(T), \Gamma_0(T)$ を $\bigotimes^0 \mathcal{H} = \mathbb{C}$ 上の線型作用素として $d\Gamma_0(T) = 0$, $\Gamma_0(T) = 1$ と定める. 任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ に対し $d\Gamma_N(T), \Gamma_N(T)$ の $\bigodot^N D(T)$ 上への制限は, (14.100), (14.101) より (反) 対称化作用素 $\Theta_{N,\pm}$ によって簡約可能 (定義 14.112) である. よって命題 14.113 の (3) より $d\Gamma_N(T), \Gamma_N(T)$ は $\Theta_{N,\pm}$ によって簡約可能であり, その簡約部分

$$d\Gamma_{N,\pm}(T) := (d\Gamma_N(T))_{\Theta_{N,\pm}}, \quad \Gamma_{N,\pm}(T) := (\Gamma_N(T))_{\Theta_{N,\pm}}$$

は $\Theta_{N,\pm}(\bigodot^N D(T))$ を芯として持つ $\Theta_{N,\pm}(\bigotimes^N \mathcal{H})$ 上の稠密に定義された閉線型作用素である. 直和を取ることにより, Fock 空間 $\mathcal{F}(\mathcal{H}), \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$ 上の稠密に定義された閉線型作用素 (命題 10.85 を参照)

$$d\Gamma(T) := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}_+} d\Gamma_N(T), \quad \Gamma(T) := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}_+} \Gamma_N(T),$$

$$d\Gamma_\pm(T) := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}_+} d\Gamma_{N,\pm}(T), \quad \Gamma_\pm(T) := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}_+} \Gamma_{N,\pm}(T)$$

を定義する. $d\Gamma(T), d\Gamma_\pm(T)$ を T の第二量子化作用素, $\Gamma(T), \Gamma_\pm(T)$ を T の第二種の第二量子化作用素と言う.

命題 14.115 (第二量子化作用素の基本的性質)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする.

(1) T を $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉作用素とし, $D \subseteq D(T)$ を T の芯とする. このとき $\mathcal{F}_{\mathrm{fin},0}(D)$ (定義 14.111) は $d\Gamma(T), \Gamma(T)$ の芯であり, $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(D)$ (定義 14.111) は $d\Gamma_\pm(T), \Gamma_\pm(T)$ の芯である.

(2) $V, V_1, V_2 \in B(\mathcal{H})$ が縮小作用素[*317]ならば, $\Gamma(V), \Gamma_\pm(V)$ は $\mathcal{F}(\mathcal{H}), \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$ 上の縮小作用素である. そして,

$$\Gamma_\pm(V)^* = \Gamma_\pm(V^*),\ \ \Gamma_\pm(V_1)\Gamma_\pm(V_2) = \Gamma_\pm(V_1V_2)$$

が成り立つ. 特に射影作用素, ユニタリ作用素, 部分等長作用素の第二種の第二量子化作用素は, それぞれ射影作用素, ユニタリ作用素, 部分等長作用素である.

(3) X を第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間, $E : \mathcal{B}_X \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を射影値測度, $f : X \to \mathbb{C}$ を可測関数とする. このとき任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し,

$$d\Gamma_N\left(\int_X f(x)dE(x)\right) = \int_{X^N} \sum_{j=1}^N f(x_j) d\bigotimes^N E(x_1, \cdots, x_N),$$

$$\Gamma_N\left(\int_X f(x)dE(x)\right) = \int_{X^N} \prod_{j=1}^N f(x_j) d\bigotimes^N E(x_1, \cdots, x_N)$$

が成り立つ. ただし $\bigotimes^N E : \mathcal{B}_{X^N} \to \mathcal{P}(\bigotimes^N \mathcal{H})$ はテンソル積射影値測度 (定義 10.101) である.

(4) T が $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素ならば $d\Gamma(T), \Gamma(T)$ は $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 上の自己共役作用素であり, $d\Gamma_\pm(T), \Gamma_\pm(T)$ は $\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$ 上の自己共役作用素である. そして,

$$\exp(zd\Gamma(T)) = \Gamma(\exp(zT)),\ \ \exp(zd\Gamma_\pm(T)) = \Gamma_\pm(\exp(zT))\ \ (\forall z \in \mathbb{C})$$

が成り立つ.

証明. (1) 第二量子化作用素の定義 14.114 より各 $N \in \mathbb{Z}_+$ に対し $\bigodot^N D(T)$ は $d\Gamma_N(T), \Gamma_N(T)$ の芯であるから, $\bigodot^N D$ は $d\Gamma_N(T), \Gamma_N(T)$ の芯である. $d\Gamma_{N,\pm}(T), \Gamma_{N,\pm}(T)$ は $d\Gamma_N(T), \Gamma_N(T)$ の $\Theta_{N,\pm}$ による簡約部分なので, 命題 14.113 の (3) より $\Theta_{N,\pm}(\bigodot^N D)$ は $d\Gamma_{N,\pm}(T), \Gamma_{N,\pm}(T)$ の芯である. よって線型作用素の直和の性質 (命題 10.85) より $\mathcal{F}_{\mathrm{fin},0}(D) = \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}_+} \bigodot^N D$ は $d\Gamma(T), \Gamma(T)$ の芯であり, $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(D) = \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}_+} \Theta_{N,\pm}(\bigodot^N D)$ は $d\Gamma_\pm(T), \Gamma_\pm(T)$ の芯である.

(2) 第二種の第二量子化作用素の定義 14.114 より任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し $\Gamma_N(V) = \bigotimes^N V$ であるから有界線型作用素のテンソル積の性質 (定理 10.99) より $\Gamma_N(V)$ は $\bigotimes^N \mathcal{H}$ 上の縮小作用素であり,

$$\Gamma_N(V)^* = \Gamma_N(V^*),\ \ \Gamma_N(V_1)\Gamma_N(V_2) = \Gamma_N(V_1V_2)\ \ (\forall N \in \mathbb{Z}_+) \tag{14.102}$$

である. 任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ に対し $\Gamma_{N,\pm}(V)$ は縮小作用素 $\Gamma_N(V)$ の $\Theta_{N,\pm}$ による簡約部分であるから $\Theta_{N,\pm}(\bigotimes^N \mathcal{H})$ 上の縮小作用素であり, (14.102) と命題 14.113 より,

$$\Gamma_{N,\pm}(V)^* = \Gamma_{N,\pm}(V^*),\ \ \Gamma_{N,\pm}(V_1)\Gamma_{N,\pm}(V_2) = \Gamma_{N,\pm}(V_1V_2)\ \ (\forall N \in \mathbb{Z}_+)$$

である. ゆえに線型作用素の直和の性質 (命題 10.85) より $\Gamma_\pm(V)$ は $\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}) = \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}_+} \Theta_{N,\pm}(\bigotimes^N \mathcal{H})$ 上の縮小作用素であり,

$$\Gamma_\pm(V)^* = \Gamma_\pm(V^*),\ \ \Gamma_\pm(V_1)\Gamma_\pm(V_2) = \Gamma_\pm(V_1V_2)$$

である.

(3) 第二種の第二量子化作用素の定義 14.114 とテンソル積射影値測度による積分の性質 (定理 10.103) より,

$$\Gamma_N\left(\int_X f(x)dE(x)\right) = \bigotimes^N \int_X f(x)dE(x) = \int_{X^N} \prod_{j=1}^N f(x_j) d\bigotimes^N E(x_1, \cdots, x_N)$$

である. また,

$$1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \overbrace{\int_X f(x)dE(x)}^{j\text{ 番目}} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 = \int_{X^N} f(x_j) d\bigotimes^N E(x_1, \cdots, x_N)$$

[*317] $V \in B(\mathcal{H})$ が縮小作用素であるとは $\|V\| \leqslant 1$ であると言うこと.

であるから, 第二量子化作用素の定義 14.114 とテンソル積射影値測度による積分の性質 (定理 10.103) より,

$$\begin{aligned} d\Gamma_N\left(\int_X f(x)dE(x)\right) &= \overline{\sum_{j=1}^N 1\otimes\cdots\otimes 1\otimes \overbrace{\int_X f(x)dE(x)}^{j\text{ 番目}}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1} \\ &= \overline{\sum_{j=1}^N \int_{X^N} f(x_j)d\bigotimes^N E(x_1,\cdots,x_N)} \\ &= \int_{X^N}\sum_{j=1}^N f(x_j)d\bigotimes^N E(x_1,\cdots,x_N) \end{aligned}$$

(3 番目の等号は命題 10.53 の (3) による) である.

(4) T のスペクトル測度を $E_T : \mathcal{B}_{\sigma(T)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ とおくと, (3) より各 $N \in \mathbb{N}$ について,

$$d\Gamma_N(T) = \int_{\sigma(T)^N}\sum_{j=1}^N \lambda_j d\bigotimes^N E_T(\lambda_1,\cdots,\lambda_N), \tag{14.103}$$

$$\Gamma_N(T) = \int_{\sigma(T)^N}\prod_{j=1}^N \lambda_j d\bigotimes^N E_T(\lambda_1,\cdots,\lambda_N) \tag{14.104}$$

であり, それぞれ右辺の被積分関数は実数値であるから $d\Gamma_N(T), \Gamma_N(T)$ は $\bigotimes^N \mathcal{H}$ 上の自己共役作用素である (命題 10.53 の (2) を参照). よって線型作用素の直和の基本性質 (命題 10.85) より $d\Gamma(T), \Gamma(T)$ は $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 上の自己共役作用素である. また (14.103) と命題 10.66 より, 任意の $N \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned} \exp\left(zd\Gamma_N(T)\right) &= \int_{\sigma(T)^N}\exp\left(z\sum_{j=1}^N\lambda_j\right)d\bigotimes^N E_T(\lambda_1,\cdots,\lambda_N) \\ &= \int_{\sigma(T)^N}\prod_{j=1}^N \exp(z\lambda_j)d\bigotimes^N E_T(\lambda_1,\cdots,\lambda_N) \\ &= \bigotimes^N \int_{\sigma(T)}\exp(z\lambda)dE_T(\lambda) = \bigotimes^N \exp(zT) \\ &= \Gamma_N(\exp(zT)) \end{aligned}$$

であり, 命題 14.113 の (5) より,

$$\exp(zd\Gamma_{N,\pm}(T)) = (\exp(zd\Gamma_N(T)))_\pm = \Gamma_{N,\pm}(\exp(zT))$$

であるから, 自己共役作用素の直和の Borel 関数カルキュラス (定理 10.87) より, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\exp(zd\Gamma(T)) = \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}_+}\exp(zd\Gamma_N(T)) = \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}_+}\Gamma_N(\exp(zT)) = \Gamma(\exp(zT)),$$

$$\exp(zd\Gamma_\pm(T)) = \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}_+}\exp(zd\Gamma_{N,\pm}(T)) = \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}_+}\Gamma_{N,\pm}(\exp(zT)) = \Gamma_\pm(\exp(zT))$$

である.

□

定理 14.116 (自己共役作用素の第二量子化作用素のスペクトルについて)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, H を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. このとき,

(1)

$$\sigma(d\Gamma_-(T)) \subseteq \sigma(d\Gamma_+(T)) = \sigma(d\Gamma(T)) = \{0\} \cup \overline{\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\left\{\sum_{j=1}^N \lambda_j : \lambda_1,\cdots,\lambda_N \in \sigma(H)\right\}}$$

が成り立つ.

(2)

$$\sigma(\Gamma_-(H)) \subseteq \sigma(\Gamma_+(H)) = \sigma(\Gamma(H)) = \overline{\{1\} \cup \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left\{ \prod_{j=1}^{N} \lambda_j : \lambda_1, \cdots, \lambda_N \in \sigma(H) \right\}}$$

が成り立つ.

(3) H を単射非負自己共役作用素とし, ある正数 β に対し,

$$e^{-\beta H} \in B^1(\mathcal{H})$$

が成り立つと仮定する. このとき H のスペクトル $\sigma(H)$ は離散固有値のみからなり, それを下から重複度を込めて並べたものを $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$ (重複度だけ同じ値が続く) とおくと,

$$\mathrm{Tr}(e^{-\beta d\Gamma_\pm(H)}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 \mp e^{-\beta\lambda_n})^{\mp 1} < \infty$$

が成り立つ. よって特に,

$$e^{-\beta d\Gamma_\pm(H)} \in B^1(\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}))$$

が成り立つ.

証明.　(1) $E_H : \mathcal{B}_{\sigma(H)} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を H のスペクトル測度とする. 各 $N \in \mathbb{N}$ について命題 14.115 の (3) より

$$d\Gamma_N(H) = \int_{\sigma(H)^N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j d \bigotimes^{N} E_H(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \tag{14.105}$$

であるから, 自己共役作用素のテンソル積の Borel 関数カルキュラスの性質 (定理 10.104) より,

$$\sigma(d\Gamma_N(H)) = \sigma\left(\int_{\sigma(H)^N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j d \bigotimes^{N} E_H(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \right) = \overline{\left\{ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j : \lambda_1, \cdots, \lambda_N \in \sigma(H) \right\}} \tag{14.106}$$

である. また $d\Gamma_{N,\pm}(H)$ は $d\Gamma_N(H)$ の簡約部分であるから明らかに

$$\sigma(d\Gamma_{N,\pm}(H)) \subseteq \sigma(d\Gamma_N(H)) \tag{14.107}$$

である. よって自己共役作用素の直和のスペクトルの性質 (定理 10.87) より,

$$\sigma(d\Gamma_\pm(H)) = \overline{\bigcup_{N\in\mathbb{Z}_+} \sigma(d\Gamma_{N,\pm}(H))} \subseteq \overline{\bigcup_{N\in\mathbb{Z}_+} \sigma(d\Gamma_N(H))} = \sigma(d\Gamma(H)) \tag{14.108}$$

であり, (14.106) より,

$$\sigma(d\Gamma_\pm(H)) \subseteq \sigma(d\Gamma(H)) = \overline{\bigcup_{N\in\mathbb{Z}_+} \sigma(d\Gamma_N(H))} = \overline{\{0\} \cup \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j : \lambda_1, \cdots, \lambda_N \in \sigma(H) \right\}}$$

である. 後は $\sigma(d\Gamma_+(H)) = \sigma(d\Gamma(H))$ が成り立つことを示せばよい. そのためには (14.108) より任意の $N \in \mathbb{N}$ を取り固定し $\sigma(d\Gamma_N(H)) = \sigma(d\Gamma_{N,+}(H))$ が成り立つことを示せばよく, そしてそのためには (14.106), (14.107) より, 任意の $\lambda_1, \cdots, \lambda_N \in \sigma(H)$ を取り固定し,

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \in \sigma(d\Gamma_{N,+}(H)) \tag{14.109}$$

が成り立つことを示せばよい. 互いに異なる $\mu_1, \cdots, \mu_M$ で $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\} = \{\mu_1, \cdots, \mu_M\}$ なるものを取り, 各 $k \in \{1, \cdots, M\}$ に対し $\lambda_j = \mu_k$ なる $j \in \{1, \cdots, N\}$ の個数を n_k とおく. そして任意の正数 ε を取る. 十分小さい正数 δ を取れば,

$$B(\mu_k, \delta) \cap B(\mu_{k'}, \delta) = \varnothing \quad (\forall k, k' \in \{1, \cdots, M\} : k \neq k'), \tag{14.110}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{N}(x_j-\lambda_j)\right|\leqslant\varepsilon \quad (\forall x_j\in B(\lambda_j,\delta):j=1,\cdots,N) \tag{14.111}$$

となる (ただし $B(\lambda_j,\delta)=\{x\in\sigma(H):|x-\lambda_j|<\delta\}$). そこで各 $k\in\{1,\cdots,M\}$ に対し単位ベクトル $u_k\in\operatorname{Ran}E_H(B(\mu_k,\delta))$ を取り, $\lambda_j=\mu_k$ なる全ての $j\in\{1,\cdots,N\}$ に対し $v_j:=u_k$ とおく. (14.110) より $u_1,\cdots,u_M$ は互いに直交する単位ベクトルであるから, 対称化作用素 $\Theta_{N,+}$ の定義 14.110 より,

$$\begin{aligned}&\|\Theta_{N,+}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\|^2=(\Theta_{N,+}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\mid v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\\&=\frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}(v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(N)}\mid v_1\otimes\cdots\otimes v_N)=\frac{n_1!\cdots n_M!}{N!}\end{aligned} \tag{14.112}$$

であり, (14.105) と (14.111) より,

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j-d\Gamma_{N,+}(H)\right)\Theta_{N,+}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\right\|\leqslant\left\|\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j-d\Gamma_N(H)\right)(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\right\|\\&=\left\|\left(\int_{\sigma(H)^N}\sum_{j=1}^{N}(\lambda_j-x_j)d\bigotimes^N E_H(x_1,\cdots,x_N)\right)(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\right\|\leqslant\varepsilon\end{aligned} \tag{14.113}$$

である. ここで $\frac{n_1!\cdots n_M!}{N!}$ は ε によらない正数であり, ε は任意であるから, (14.112), (14.113) より $D(d\Gamma_{N,+}(H))$ の単位ベクトルの列 $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j-d\Gamma_{N,+}(H)\right)w_n\right\|\leqslant\frac{1}{n}\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

なるものが取れる. これより (14.109) が成り立つ.

(2) (1) と全く同様にして示せる.

(3) 命題 10.127 の (2) より H のスペクトル $\sigma(H)$ は離散固有値のみからなる. そこで H の離散固有値を下から重複度を込めて並べたものを $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$ (H は単射非負自己共役作用素であるから $0<\lambda_1$ であることに注意) とおき, $\mathcal{H}$ の CONS $\{e_1,e_2,\cdots\}$ を,

$$He_j=\lambda_j e_j\quad(\forall j\in\mathbb{N})$$

となるように取る. このとき各 $N\in\mathbb{N}$ に対し, 命題 10.94 より,

$$\{e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_N}:j_1,\cdots,j_N\in\mathbb{N}\}$$

は $\bigotimes^N\mathcal{H}$ の CONS であるから,

$$\begin{aligned}&\{\Theta_{N,+}(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_N}):j_1\leqslant\cdots\leqslant j_N\},\\&\{\Theta_{N,-}(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_N}):j_1<\cdots<j_N\}\end{aligned}$$

を正規化したものはそれぞれ $\Theta_{N,+}(\bigotimes^N\mathcal{H}),\Theta_{N,-}(\bigotimes^N\mathcal{H})$ の CONS である. また命題 14.115 の (4) より,

$$e^{-\beta d\Gamma_\pm(H)}=\Gamma_\pm(e^{-\beta H})$$

であるので,

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(e^{-\beta d\Gamma_+(H)})&=\operatorname{Tr}(\Gamma_+(e^{-\beta H}))=1+\sum_{N\in\mathbb{N}}\sum_{j_1\leqslant\cdots\leqslant j_N}e^{-\beta\lambda_{j_1}}\cdots e^{-\beta\lambda_{j_N}}\\&=\sum_{N\in\mathbb{Z}_+}\sup_{M\in\mathbb{N}}\sum_{n_1+\cdots+n_M=N}e^{-\beta n_1\lambda_1}\cdots e^{-\beta n_M\lambda_M}\\&=\sup_{M\in\mathbb{N}}\sum_{N\in\mathbb{Z}_+}\sum_{n_1+\cdots+n_M=N}e^{-\beta n_1\lambda_1}\cdots e^{-\beta n_M\lambda_M}\\&=\sup_{M\in\mathbb{N}}\sum_{n_1\in\mathbb{Z}_+}e^{-\beta n_1\lambda_1}\cdots\sum_{n_M\in\mathbb{Z}_+}e^{-\beta n_M\lambda_M}\\&=\sup_{M\in\mathbb{N}}\prod_{k=1}^{M}(1-e^{-\beta\lambda_k})^{-1},\end{aligned}$$

$$\mathrm{Tr}(e^{-\beta d\Gamma_-(H)}) = \mathrm{Tr}(\Gamma_-(e^{-\beta H})) = 1 + \sum_{N\in\mathbb{N}}\sum_{j_1<\cdots<j_N} e^{-\beta\lambda_{j_1}}\cdots e^{-\beta\lambda_{j_N}} = \sup_{M\in\mathbb{N}}\prod_{k=1}^{M}(1+e^{-\beta\lambda_k})$$

が成り立つ. 対数の主値関数 (定義 4.49) $\mathrm{Log} : \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ の $1 \in \mathbb{C}$ の周りでの冪級数展開 (定理 7.15) を考えれば, 正則関数 $\delta : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ が存在し,

$$\mathrm{Log}(1+z) = z(1+\delta(z)) \ \ (\forall z \in \mathbb{C} : |z| < 1)$$

と表せることが分かる. よって,

$$\begin{aligned}\log\left(\prod_{k=1}^{M}(1\mp e^{-\beta\lambda_k})^{\mp 1}\right) &= \sum_{k=1}^{M}\log((1\mp e^{-\beta\lambda_k})^{\mp 1})\\ &= \sum_{k=1}^{M} e^{-\beta\lambda_k}(1+\delta(\mp e^{-\beta\lambda_k})) \ \ (\forall M \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

と表せる. ここで $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_k$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ より,

$$0 < e^{-\beta\lambda_k} \leqslant e^{-\beta\lambda_1} < 1 \ \ (\forall k \in \mathbb{N})$$

であり,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\beta\lambda_k} = \sum_{k\in\mathbb{N}}(e^{-\beta H}e_k \mid e_k) = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}) < \infty$$

であるから,

$$\lim_{M\to\infty}\log\left(\prod_{k=1}^{M}(1\mp e^{-\beta\lambda_k})^{\mp 1}\right) = \lim_{M\to\infty}\sum_{k=1}^{M} e^{-\beta\lambda_k}(1+\delta(\mp e^{-\beta\lambda_k})) \in \mathbb{R}$$

が存在する. ゆえに,

$$\lim_{M\to\infty}\prod_{k=1}^{M}(1\mp e^{-\beta\lambda_k})^{\mp 1} \in \mathbb{R}$$

が存在するので,

$$\mathrm{Tr}(e^{-\beta d\Gamma_\pm(H)}) = \sup_{M\in\mathbb{N}}\prod_{k=1}^{M}(1\mp e^{-\beta\lambda_k})^{\mp 1} = \lim_{M\to\infty}\prod_{k=1}^{M}(1\mp e^{-\beta\lambda_k})^{\mp 1} < \infty$$

である.

□

定義 14.117 (生成作用素と消滅作用素)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $f \in \mathcal{H}$ とする. 各 $N \in \mathbb{Z}_+$ に対し,

$$A^*_{N,\pm}(f) \in B\left(\Theta_{N,\pm}\left(\bigotimes^{N}\mathcal{H}\right), \Theta_{N+1}\left(\bigotimes^{N+1}\mathcal{H}\right)\right)$$

を,

$$A^*_{N,\pm}(f) : \Theta_{N,\pm}\left(\bigotimes^{N}\mathcal{H}\right) \ni \Psi \mapsto \sqrt{N+1}\,\Theta_{N+1,\pm}(f\otimes\Psi) \in \Theta_{N+1,\pm}\left(\bigotimes^{N+1}\mathcal{H}\right)$$

として定義する. また各 $N \in \mathbb{N}$ に対し,

$$A_{N,\pm}(f) := (A^*_{N-1,\pm}(f))^* \in B\left(\Theta_{N,\pm}\left(\bigotimes^{N}\mathcal{H}\right), \Theta_{N-1,\pm}\left(\bigotimes^{N-1}\mathcal{H}\right)\right)$$

と定義する. そして等長線型作用素

$$V_\pm : \bigoplus_{N\in\mathbb{N}}\Theta_{N,\pm}\left(\bigotimes^{N}\mathcal{H}\right) \ni (\Psi_1, \Psi_2, \cdots) \mapsto (0, \Psi_1, \Psi_2, \cdots) \in \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}_+}\Theta_{N,\pm}\left(\bigotimes^{N}\mathcal{H}\right) = \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$$

に対し, Hilbert 空間 $\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$ 上の稠密に定義された閉線型作用素

$$A_\pm^*(f) := V_\pm\left(\bigoplus_{N\in\mathbb{Z}_+} A_{N,\pm}^*(f)\right)$$

[*318]を定義し, これに対し,

$$A_\pm(f) := (A_\pm^*(f))^* = \left(\bigoplus_{N\in\mathbb{Z}_+} A_{N,\pm}^*(f)\right)^* V_\pm^* = \left(\bigoplus_{N\in\mathbb{Z}_+} (A_{N,\pm}^*(f))^*\right) V_\pm^* = \left(\bigoplus_{N\in\mathbb{N}} A_{N,\pm}(f)\right) V_\pm^*$$

[*319]を定義する. $A_\pm^*(f)$ は稠密に定義された閉線型作用素であるから定理 10.28 より,

$$A_\pm(f)^* = (A_\pm^*(f))^{**} = A_\pm^*(f)$$

である. そして $A_\pm^*(f)$ は,

$$D(A_\pm^*(f)) = \left\{(\Psi_0, \Psi_1, \cdots) \in \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}) : \sum_{N\in\mathbb{Z}_+} \|A_{N,\pm}^*(f)\Psi_N\|^2 < \infty\right\},$$
$$A_\pm^*(f)(\Psi_0, \Psi_1, \cdots) = (0, A_{0,\pm}^*(f)\Psi_0, A_{1,\pm}^*(f)\Psi_1, \cdots)$$

と特徴付けられ,

$$V_\pm^* : \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}) = \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}_+} \Theta_{N,\pm}\left(\bigotimes^N \mathcal{H}\right) \ni (\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \cdots) \mapsto (\Psi_1, \Psi_2, \cdots) \in \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \Theta_{N,\pm}\left(\bigotimes^N \mathcal{H}\right)$$

であるから $A_\pm(f)$ は,

$$D(A_\pm(f)) = \left\{(\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \cdots) \in \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}) : \sum_{N\in\mathbb{N}} \|A_{N,\pm}(f)\Psi_N\|^2 < \infty\right\},$$
$$A_\pm(f)(\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \cdots) = (A_{1,\pm}(f)\Psi_1, A_{2,\pm}(f)\Psi_2, \cdots)$$

と特徴付けられる. 特に Fock 真空 $\Omega = (1, 0, 0, \cdots) \in \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$ に対し,

$$A_\pm(f)\Omega = 0$$

である. $A_\pm^*(f)$, $A_\pm(f)$ をそれぞれ $f \in \mathcal{H}$ に関する $\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$ 上の生成作用素, 消滅作用素と言う.

命題 14.118 (生成消滅作用素の成分の基本性質)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする.

(1) 任意の $N \in \mathbb{Z}_+$, 任意の $f, v_1, \cdots, v_N \in \mathcal{H}$ に対し,

$$A_{N,\pm}^*(f)\Theta_{N,\pm}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) = \sqrt{N+1}\Theta_{N+1,\pm}(f \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_N)$$

が成り立つ. また,

$$\mathcal{H} \ni f \mapsto A_{N,\pm}^*(f) \in B\left(\Theta_{N,\pm}\left(\bigotimes^N \mathcal{H}\right), \Theta_{N+1,\pm}\left(\bigotimes^{N+1} \mathcal{H}\right)\right) \tag{14.114}$$

は有界線型作用素であり,

$$\|A_{N,\pm}^*(f)\| \leqslant \sqrt{N+1}\|f\| \quad (\forall f \in \mathcal{H}) \tag{14.115}$$

が成り立つ.

[*318] $A_\pm^*(f)$ が閉線型作用素であることは, 命題 10.85 の (2) と $V_\pm$ が等長線型作用素であることによる.
[*319] 2 番目の等号は命題 10.27 の (11) により, 3 番目の等号は命題 10.85 の (3) による.

(2) 任意の $N \in \mathbb{N}$, 任意の $f, v_1, \cdots, v_N \in \mathcal{H}$ に対し,

$$A_{N,\pm}(f)\Theta_{N,\pm}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} (\pm 1)^{j-1} (v_j \mid f) \Theta_{N-1,\pm}(v_1 \otimes \cdots \otimes \overset{j\text{ 番目}}{\widehat{v_j}} \otimes \cdots \otimes v_N) \tag{14.116}$$

($\overset{j\text{ 番目}}{\widehat{\ }}$ は j 番目を飛ばすことを意味する) が成り立つ. また,

$$\mathcal{H} \ni f \mapsto A_{N,\pm}(f) \in B\left(\Theta_{N,\pm}\left(\bigotimes^{N} \mathcal{H}\right), \Theta_{N-1,\pm}\left(\bigotimes^{N-1} \mathcal{H}\right)\right) \tag{14.117}$$

は有界反線型作用素であり,

$$\|A_{N,\pm}(f)\| \leqslant \sqrt{N}\|f\| \quad (\forall f \in \mathcal{H}) \tag{14.118}$$

が成り立つ.

(3) 任意の $f \in \mathcal{H}$ と $\mathcal{H}$ 上の任意のユニタリ作用素 U に対し,

$$\Gamma_{N+1,\pm}(U)A^*_{N,\pm}(f) = A^*_{N,\pm}(Uf)\Gamma_{N,\pm}(U) \quad (\forall N \in \mathbb{Z}_+),$$
$$\Gamma_{N-1,\pm}(U)A_{N,\pm}(f) = A_{N,\pm}(Uf)\Gamma_{N,\pm}(U) \quad (\forall N \in \mathbb{N})$$

が成り立つ.

(4) 任意の $f, g \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\begin{aligned} &A^*_{N+1,\pm}(f)A^*_{N,\pm}(g) = \pm A^*_{N+1,\pm}(g)A^*_{N,\pm}(f) \quad (\forall N \in \mathbb{Z}_+),\\ &A^*_{N-1,\pm}(f)A_{N,\pm}(g) = d\Gamma_{N,\pm}(f \odot g) \quad (\forall N \in \mathbb{N}),\\ &A_{N+1,\pm}(f)A^*_{N,\pm}(g) = (g \mid f) \pm d\Gamma_{N,\pm}(g \odot f) \quad (\forall N \in \mathbb{Z}_+) \end{aligned} \tag{14.119}$$

が成り立つ. ただし $f \odot g, g \odot f$ は Schatten 形式 (定義 10.109) である.

証明.　(1)

$$\begin{aligned} &A^*_{N,\pm}(f)\Theta_{N,\pm}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) = \sqrt{N+1}\Theta_{N+1,\pm}(f \otimes \Theta_{N,\pm}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N))\\ &= \sqrt{N+1}\frac{1}{N!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)^{\frac{1\mp1}{2}} \Theta_{N+1,\pm}(f \otimes v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(N)})\\ &= \sqrt{N+1}\frac{1}{N!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \Theta_{N+1,\pm}(f \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_N)\\ &= \sqrt{N+1}\Theta_{N+1,\pm}(f \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) \end{aligned}$$

である. (14.114) が線型であることは明らかであり, 任意の $f \in \mathcal{H}, \Psi \in \Theta_{N,\pm}(\bigotimes^N \mathcal{H})$ に対し,

$$\|A^*_{N,\pm}(f)\Psi\| = \sqrt{N+1}\|\Theta_{N+1,\pm}(f \otimes \Psi)\| \leqslant \sqrt{N+1}\|f \otimes \Psi\| \leqslant \sqrt{N+1}\|f\|\|\Psi\|$$

であるから (14.115) が成り立つ.

(2) 任意の $\Psi \in \Theta_{N-1,\pm}(\bigotimes^{N-1} \mathcal{H})$ に対し,

$$\begin{aligned} &(A_{N,\pm}(f)\Theta_{N,\pm}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) \mid \Psi) = \sqrt{N}(\Theta_{N,\pm}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) \mid \Theta_{N,\pm}(f \otimes \Psi))\\ &= \sqrt{N}\frac{1}{N!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)^{\frac{1\mp1}{2}} (v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(N)} \mid f \otimes \Psi)\\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} (\pm 1)^{j-1}(v_j \mid f)(\Theta_{N-1,\pm}(v_1 \otimes \cdots \otimes \overset{j\text{ 番目}}{\widehat{v_j}} \otimes \cdots \otimes v_N) \mid \Psi) \end{aligned}$$

であるから (14.116) が成り立つ. $A_{N,\pm}(f) = (A^*_{N-1,\pm}(f))^*$ であるから (1) より (14.117) は反線型であり, (14.118) が成り立つ.

(3) (1) より任意の $v_1,\cdots,v_N\in\mathcal{H}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\Gamma_{N+1,\pm}(U)A^*_{N,\pm}(f)\Theta_{N,\pm}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)=\sqrt{N+1}\Gamma_{N+1,\pm}(U)\Theta_{N+1,\pm}(f\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\\&=\sqrt{N+1}\Theta_{N+1,\pm}(Uf\otimes Uv_1\otimes\cdots\otimes v_N)=A^*_{N+1,\pm}(Uf)\Theta_{N,\pm}(Uv_1\otimes\cdots\otimes Uv_N)\\&=A^*_{N+1,\pm}(Uf)\Gamma_{N,\pm}(U)\Theta_{N,\pm}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\end{aligned}$$

である．よって $\Gamma_{N+1,\pm}(U)A^*_{N,\pm}(f)=A^*_{N+1,\pm}(Uf)\Gamma_{N,\pm}(U)$ が成り立つ．(2) より任意の $v_1,\cdots,v_N\in\mathcal{H}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\Gamma_{N-1,\pm}(U)A_{N,\pm}(f)\Theta_{N,\pm}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\\&=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}(\pm1)^{j-1}(v_j\mid f)\Gamma_{N-1,\pm}(U)\Theta_{N-1,\pm}(v_1\otimes\cdots\otimes\overset{j\text{ 番目}}{\widehat{v_j}}\otimes\cdots\otimes v_N)\\&=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}(\pm1)^{j-1}(Uv_j\mid Uf)\Theta_{N-1,\pm}(Uv_1\otimes\cdots\otimes\overset{j\text{ 番目}}{\widehat{Uv_j}}\otimes\cdots\otimes Uv_N)\\&=A_{N,\pm}(Uf)\Gamma_{N,\pm}(U)\Theta_{N,\pm}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\end{aligned}$$

である．よって $\Gamma_{N-1,\pm}(U)A_{N,\pm}(f)=A_{N,\pm}(Uf)\Gamma_{N,\pm}(U)$ が成り立つ．

(4) (1), (2) より任意の $f,g,v_1,\cdots,v_N\in\mathcal{H}$ に対し,

$$\begin{aligned}&A^*_{N+1,\pm}(f)A^*_{N,\pm}(g)\Theta_{N,\pm}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\\&=\sqrt{(N+2)(N+1)}\Theta_{N+2,\pm}(f\otimes g\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\\&=\pm\sqrt{(N+2)(N+1)}\Theta_{N+2,\pm}(g\otimes f\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\\&=\pm A^*_{N+1,\pm}(g)A^*_{N,\pm}(f)\Theta_{N,\pm}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&A^*_{N-1,\pm}(f)A_{N,\pm}(g)\Theta_{N,\pm}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\\&=\sum_{j=1}^{N}(\pm1)^{j-1}(v_j\mid g)\Theta_{N,\pm}(f\otimes v_1\otimes\cdots\otimes\overset{j\text{ 番目}}{\widehat{v_j}}\otimes\cdots\otimes v_N)\\&=\sum_{j=1}^{N}\Theta_{N,\pm}(v_1\otimes\cdots\otimes\overset{j\text{ 番目}}{\overbrace{(f\odot g)v_j}}\otimes\cdots\otimes v_N)\\&=d\Gamma_{N,\pm}(f\odot g)\Theta_{N,\pm}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&A_{N+1,\pm}(f)A^*_{N,\pm}(g)\Theta_{N,\pm}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\\&=\sqrt{N+1}A_{N+1,\pm}(f)\Theta_{N+1,\pm}(g\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\\&=(g\mid f)\Theta_{N,\pm}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\pm\sum_{j=1}^{N}(\pm1)^{j-1}(v_j\mid f)\Theta_{N,\pm}(g\otimes v_1\otimes\cdots\otimes\widehat{v_j}\otimes\cdots\otimes v_N)\\&=(g\mid f)\Theta_{N,\pm}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\pm\sum_{j=1}^{N}\Theta_{N,\pm}(v_1\otimes\cdots\otimes(g\odot f)v_j\otimes\cdots\otimes v_N)\\&=((g\mid f)\pm d\Gamma_{N,\pm}(g\odot f))\,\Theta_{N,\pm}(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)\end{aligned}$$

である．よって (14.119) が成り立つ．

□

定義 14.119 (反交換子積)**.** Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線型作用素 S,T に対し,

$$D([S,T]_\pm):=D(ST)\cap D(TS),\quad [S,T]_\pm:D([S,T]_\pm)\ni v\mapsto STv\mp TSv\in\mathcal{H}$$

なる $\mathcal{H}$ 上の線型作用素を定義する．$[S,T]_+=ST-TS$ は S,T の交換子積 (定義 12.158) に他ならない．$[S,T]_-=ST+TS$ を S,T の反交換子積と言う．

定理 14.120 (生成消滅作用素の基本性質)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする.

(1) 任意の $N \in \mathbb{Z}_+$, $\Psi_N \in \Theta_{N,\pm}(\bigotimes^N \mathcal{H}) \subseteq \mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ と任意の有限個の $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\|A^\sharp_\pm(f_1)\cdots A^\sharp_\pm(f_n)\Psi_N\| \leqslant \sqrt{(N+n)(N+n-1)\cdots(N+1)}\|f_1\|\cdots\|f_n\|\|\Psi_N\|$$

が成り立つ. ただし $A^\sharp_\pm(f)$ は $A^*_\pm(f)$ か $A_\pm(f)$ を意味する.

(2) 任意の $f, g \in \mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned} A^*_\pm(f+g) &= \overline{A^*_\pm(f) + A^*_\pm(g)}, \quad A^*_\pm(\alpha f) = \alpha A^*_\pm(f), \\ A_\pm(f+g) &= \overline{A_\pm(f) + A_\pm(g)}, \quad A_\pm(\alpha f) = \overline{\alpha} A_\pm(f) \end{aligned} \tag{14.120}$$

が成り立つ.

(3) 任意の $f \in \mathcal{H}$ と $\mathcal{H}$ 上の任意のユニタリ作用素 U に対し,

$$\begin{aligned} \Gamma_\pm(U)A^*_\pm(f)\Gamma_\pm(U)^* &= A^*_\pm(Uf), \\ \Gamma_\pm(U)A_\pm(f)\Gamma_\pm(U)^* &= A_\pm(Uf) \end{aligned}$$

が成り立つ.

(4) 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し,

$$A^*_\pm(f)A_\pm(f) = d\Gamma_\pm(f \odot f), \quad A_\pm(f)A^*_\pm(f) = \|f\|^2 \pm d\Gamma_\pm(f \odot f)$$

($\odot$ は Schatten 形式 (定義 10.109)) が成り立つ.

(5) 任意の $f, g \in \mathcal{H}$ に対し, 有限粒子空間 $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ (定義 14.111) 上で,

$$[A^*_\pm(f), A^*_\pm(g)]_\pm = [A_\pm(f), A_\pm(g)]_\pm = 0, \quad [A_\pm(f), A^*_\pm(g)]_\pm = (g \mid f)$$

が成り立つ.

(6) 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し $A^*_-(f), A_-(f) \in B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$ であり,

$$\|A^*_-(f)\| = \|A_-(f)\| = \|f\|$$

が成り立つ. また $f \in \mathcal{H}$ が単位ベクトルの場合, $A_-(f), A^*_-(f)$ は $\mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ 上の部分等長作用素であり,

$$A_-(f)A^*_-(f) = 1 - A^*_-(f)A_-(f)$$

が成り立つ.

(7) 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し $D(A_+(f)) = D(A^*_+(f))$ であり, $f \neq 0$ である限り, $A^*_+(f), A_+(f)$ は $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ 上の非有界作用素である.

証明. (1) 命題 14.118 の (1) の (14.115) と,(2) の (14.118) による.

(2) 命題 14.118 の (1), (2) より有限粒子空間 $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ 上で,

$$\begin{aligned} A^*_\pm(f+g) &= A^*_\pm(f) + A^*_\pm(g), \quad A^*_\pm(\alpha f) = \alpha A^*_\pm(f), \\ A_\pm(f+g) &= A_\pm(f) + A_\pm(g), \quad A_\pm(\alpha f) = \overline{\alpha} A_\pm(f) \end{aligned}$$

が成り立つ. そして生成作用素と消滅作用素の定義 14.117 より任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し $A^*_\pm(f), A_\pm(f)$ は $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ を芯として持つ閉作用素であるから (14.120) が成り立つ.

(3) 命題 14.118 の (3) より,

$$\Gamma_\pm(U)A^\sharp_\pm(f) \subseteq A^\sharp_\pm(Uf)\Gamma_\pm(U)$$

であるから, $\Gamma_\pm(U)$ がユニタリ作用素である (命題 14.115 の (2)) ことから,

$$\Gamma_\pm(U)A^\sharp_\pm(f)\Gamma_\pm(U)^* \subseteq A^\sharp_\pm(Uf)$$

が成り立つ. さらに $U, \Gamma_\pm(U)$ がユニタリ作用素であることから逆の包含関係も成り立つ.

(4) 命題 14.118 の (4) より，

$$A_{\pm}^*(f)A_{\pm}(f) \subseteq d\Gamma_{\pm}(f \odot f),\ \ A_{\pm}(f)A_{\pm}^*(f) \subseteq \|f\|^2 \pm d\Gamma_{\pm}(f \odot f) \tag{14.121}$$

であり，$A_{\pm}^{\sharp}(f)$ は稠密に定義された閉作用素であるから定理 10.28 より $A_{\pm}^*(f)A_{\pm}(f), A_{\pm}(f)A_{\pm}^*(f)$ は自己共役作用素である．また $f \odot f \in B(\mathcal{H})$ は自己共役作用素であるから命題 14.115 の (4) より $d\Gamma_{\pm}(f \odot f)$ は自己共役作用素である．ゆえに (14.121) のそれぞれの両辺は自己共役作用素であるので逆の包含関係も成り立つ．

(5) 命題 14.118 の (5) より $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ 上で，

$$A_{\pm}^*(f)A_{\pm}^*(g) = \pm A_{\pm}^*(g)A_{\pm}^*(f),\ \ A_{\pm}(f)A_{\pm}(g) = \pm A_{\pm}(g)A_{\pm}(f),$$
$$A_{\pm}(f)A_{\pm}^*(g) = (g \mid f) \pm d\Gamma_{\pm}(g \odot f),\ \ A_{\pm}^*(g)A_{\pm}(f) = d\Gamma_{\pm}(g \odot f)$$

であるから $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ 上で，

$$[A_{\pm}^*(f), A_{\pm}^*(g)]_{\pm} = [A_{\pm}(f), A_{\pm}(g)]_{\pm} = 0,\ \ [A_{\pm}(f), A_{\pm}^*(g)]_{\pm} = (g \mid f)$$

が成り立つ．

(6) (5) より任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し $\mathcal{F}_{-,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ 上で，

$$A_{-}^*(f)A_{-}(f) + A_{-}(f)A_{-}^*(f) = \|f\|^2 \tag{14.122}$$

が成り立つ．よって，

$$\|A_{-}^{\sharp}(f)\Psi\|^2 = (A_{-}^*(f)A_{-}(f)\Psi \mid \Psi) + (A_{-}(f)A_{-}^*(f)\Psi \mid \Psi) \leqslant \|f\|^2\|\Psi\|^2\ \ (\forall \Psi \in \mathcal{F}_{-,\mathrm{fin}}(\mathcal{H}))$$

であるから，$A_{-}^{\sharp}(f)$ が閉作用素であることと $\mathcal{F}_{-,\mathrm{fin}}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{F}_{-}(\mathcal{H})$ の稠密性より $A_{-}^{\sharp}(f) \in B(\mathcal{F}_{-}(\mathcal{H}))$ が成り立つ．また (5) より $A_{-}^*(f)^2 = A_{-}(f)^2 = 0$ であるから (14.122) より，

$$(A_{-}^*(f)A_{-}(f))^2 = \|f\|^2 A_{-}^*(f)A_{-}(f) \tag{14.123}$$

が成り立つ．(14.122) より $A_{-}(f) = 0$ ならば $f = 0$ であり，$A_{-}(f) \neq 0$ ならば (14.123) より，

$$\|A_{-}(f)\|^2 = \|A_{-}^*(f)A_{-}(f)\| = \|f\|^2$$

である．f が単位ベクトルならば (14.123) より $A_{-}^*(f)A_{-}(f)$ は射影作用素であり，(14.122) より，

$$A_{-}(f)A_{-}^*(f) = 1 - A_{-}^*(f)A_{-}(f)$$

である．

(7) (4) より，

$$|A_{+}^*(f)|^2 = A_{+}(f)A_{+}^*(f) = \|f\|^2 + d\Gamma_{+}(f \odot f) = \|f\|^2 + A_{+}^*(f)A_{+}(f) = \|f\|^2 + |A_{+}(f)|^2$$

であるから，

$$|A_{+}^*(f)| = \sqrt{\|f\|^2 + |A_{+}(f)|^2}$$

である．よって，

$$D(A_{+}^*(f)) = D(|A_{+}^*(f)|) = D(|A_{+}(f)|) = D(A_{+}(f))$$

(極分解 (定理 10.75) を参照) である．$f \neq 0$ とする．定理 14.116 の (1) より，

$$\sigma(A_{+}^*(f)A_{+}(f)) = \sigma(d\Gamma_{+}(f \odot f)) = \overline{\{0\} \cup \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j : \lambda_1, \cdots, \lambda_N \in \sigma(f \odot f) \right\}}$$

であり $(f \odot f)f = \|f\|^2 f$ より $\|f\|^2 \in \sigma(f \odot f)$ であるから，

$$N\|f\|^2 \in \sigma(A_{+}^*(f)A_{+}(f))\ \ (\forall N \in \mathbb{N})$$

が成り立つ．これより $\sigma(A_{+}^*(f)A_{+}(f))$ は非有界であるので $A_{+}^*(f)A_{+}(f)$ は非有界自己共役作用素であり，従って $A_{+}^*(f), A_{+}(f)$ も非有界作用素である．

□

定義 14.121 (Segal の場の作用素). $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする. 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し, 対称 Fock 空間 $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ 上の閉対称作用素 (実際は次の定理 14.122 より自己共役作用素)

$$\Phi_S(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{A_+^*(f) + A_+(f)}$$

を f に関する Segal の場の作用素と言う.

定理 14.122 (Segal の場の作用素の基本性質). $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする.

(1) 任意の $N \in \mathbb{Z}_+$, $\Psi_N \in \Theta_{N,+}(\bigotimes^N \mathcal{H}) \subseteq \mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ と任意の有限個の $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\|\Phi_S(f_1)\cdots\Phi_S(f_n)\Psi_N\| \leqslant 2^{\frac{n}{2}}\sqrt{(N+n)(N+n-1)\cdots(N+1)}\|f_1\|\cdots\|f_n\|\|\Psi_N\|$$

が成り立つ.

(2) 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し $\Phi_S(f)$ は有限粒子空間 $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ (定義 14.111) を芯とする $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ 上の自己共役作用素である. さらに $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ の任意のベクトルは $\Phi_S(f)$ の全解析ベクトル (定義 10.211) である.

(3) 任意の $f, g \in \mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\Phi_S(f+g) = \overline{\Phi_S(f) + \Phi_S(g)}, \quad \Phi_S(\alpha f) = \alpha\Phi_S(f),$$
$$\Phi_S(if) = \frac{1}{i\sqrt{2}}\overline{A_+(f) - A_+^*(f)}$$

が成り立つ. また $\mathcal{H}$ 上の任意のユニタリ作用素 U に対し,

$$\Gamma_+(U)\Phi_S(f)\Gamma_+(U)^* = \Phi_S(Uf)$$

が成り立つ.

(4) 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し,

$$A_+(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_S(f) + i\Phi_S(if)),$$
$$A_+^*(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_S(f) - i\Phi_S(if))$$

が成り立つ.

(5) 任意の $f, g \in \mathcal{H}$ に対し,

$$e^{i\Phi_S(f)}A_+^*(g)e^{-i\Phi_S(f)} = \frac{i}{\sqrt{2}}(g \mid f) + A_+^*(g),$$
$$e^{i\Phi_S(f)}A_+(g)e^{-i\Phi_S(f)} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(f \mid g) + A_+(g)$$

が成り立つ.

(6) 任意の $f, g \in \mathcal{H}$ に対し,

$$e^{i\Phi_S(f)}\Phi_S(g)e^{-i\Phi_S(f)} = -\mathrm{Im}(g \mid f) + \Phi_S(g),$$
$$e^{i\Phi_S(f)}e^{i\Phi_S(g)}e^{-i\Phi_S(f)} = e^{-i\mathrm{Im}(g|f)}e^{i\Phi_S(g)}$$

が成り立つ.

(7) 任意の $f \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$ に対し $\Phi_S(f)$ のスペクトルは,

$$\sigma(\Phi_S(f)) = \mathbb{R}$$

である. またもし $\mathcal{H}$ が可分ならば $\Phi_S(f)$ の点スペクトル (固有値全体) は,

$$\sigma_{\mathrm{p}}(\Phi_S(f)) = \varnothing$$

である.

証明. (1) 定理 14.120 の (1) による.

(2) 任意の $N \in \mathbb{Z}_+$, 任意の $\Psi_N \in \Theta_{N,+}(\bigotimes^N \mathcal{H})$ を取る. (1) と命題 4.28 より任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{\|\Phi_S(f)^n \Psi_N\|}{n!}|z|^n \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{\sqrt{(N+n)(N+n-1)\cdots(N+1)}}{n!}(\sqrt{2}|z|)^n < \infty$$

であるから Ψ_N は $\Phi_S(f)$ の全解析ベクトルである. よって命題 10.212 より $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H}) = \mathrm{span}\bigcup_{N\in\mathbb{Z}_+}\Theta_{N,+}(\bigotimes^N \mathcal{H})$ の任意の元は $\Phi_S(f)$ の全解析ベクトルである. そして $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ は $\Phi_S(f)$ の作用に対して不変な稠密部分空間であるので Nelson の解析ベクトル定理 10.217 より $\Phi_S(f)$ は $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ を芯とする自己共役作用素である.

(3) 有限粒子空間 $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ 上で $\Phi_S(f+g) = \Phi_S(f) + \Phi_S(g)$ が成り立つことは明らかである. $\Phi_S(f) + \Phi_S(g)$ は対称作用素であるから可閉であり, (2) より $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ は $\Phi_S(f+g)$ の芯であるから,

$$\Phi_S(f+g) \subseteq \overline{\Phi_S(f) + \Phi_S(g)}$$

が成り立つ. $\overline{\Phi_S(f) + \Phi_S(g)}$ は対称作用素であり, (2) より $\Phi_S(f+g)$ は自己共役作用素であるから逆の包含関係も成り立つ. その他の等式は定理 14.120 の (2), (3) より明らかである.

(4) 定理 14.120 の (7) より $D(A_+(f)) = D(A_+^*(f))$ であるから (3) より,

$$A_+(f) \subseteq \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_S(f) + i\Phi_S(if)), \quad A_+^*(f) \subseteq \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_S(f) - i\Phi_S(if))$$

である. よって,

$$A_+^*(f) \subseteq \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_S(f) - i\Phi_S(if)) \subseteq \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_S(f) + i\Phi_S(if))^* \subseteq A_+^*(f),$$
$$A_+(f) \subseteq \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_S(f) + i\Phi_S(if)) \subseteq \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_S(f) - i\Phi_S(if))^* \subseteq A_+(f)$$

であるから,

$$A_+(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_S(f) + i\Phi_S(if)), \quad A_+^*(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_S(f) - i\Phi_S(if))$$

が成り立つ.

(5) 定理 14.120 の (5) より $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ 上で $[\Phi_S(f), A_+^*(g)] = \frac{1}{\sqrt{2}}(g \mid f)$ であるから,

$$\frac{(i\Phi_S(f))^n}{n!}A_+^*(g)\Psi = A_+^*(g)\frac{(i\Phi_S(f))^n}{n!}\Psi + \frac{i}{\sqrt{2}}(g \mid f)\frac{(i\Phi_S(f))^{n-1}}{(n-1)!}\Psi \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall \Psi \in \mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})) \tag{14.124}$$

が成り立つ. (2) より $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ の元は $\Phi_S(f)$ の全解析ベクトルであるから, 定理 10.214 より,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(i\Phi_S(f))^n}{n!}\Psi = e^{i\Phi_S(f)}\Psi \quad (\forall \Psi \in \mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H}))$$

が成り立つ. よって $A_+^*(g)\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ であること, $A_+^*(g)$ が閉作用素であることに注意して (14.124) より,

$$e^{i\Phi_S(f)}A_+^*(g)\Psi = A_+^*(g)e^{i\Phi_S(f)}\Psi + \frac{i}{\sqrt{2}}(g \mid f)e^{i\Phi_S(f)}\Psi \quad (\forall \Psi \in \mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H}))$$

が成り立つことが分かる. $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ は $A_+^*(g)$ の芯であるから,

$$e^{i\Phi_S(f)}A_+^*(g) \subseteq A_+^*(g)e^{i\Phi_S(f)} + \frac{i}{\sqrt{2}}(g \mid f)e^{i\Phi_S(f)}$$

であり, これより,

$$e^{i\Phi_S(f)}A_+^*(g)e^{-i\Phi_S(f)} \subseteq A_+^*(g) + \frac{i}{\sqrt{2}}(g \mid f)$$

が成り立つ. 定理 14.120 の (5) より $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ 上で $[\Phi_S(f), A_+(g)] = -\frac{1}{\sqrt{2}}(f \mid g)$ であるから, 上と全く同様にして,

$$e^{i\Phi_S(f)}A_+(g)e^{-i\Phi_S(f)} \subseteq A_+(g) - \frac{i}{\sqrt{2}}(f \mid g)$$

が成り立つことも分かる．よって，

$$e^{i\Phi_S(f)}A_+^*(g)e^{-i\Phi_S(f)} \subseteq A_+^*(g)+\frac{i}{\sqrt{2}}(g\mid f) \subseteq \left(A_+(g)-\frac{i}{\sqrt{2}}(f\mid g)\right)^* \subseteq e^{i\Phi_S(f)}A_+^*(g)e^{-i\Phi_S(f)},$$
$$e^{i\Phi_S(f)}A_+(g)e^{-i\Phi_S(f)} \subseteq A_+(g)-\frac{i}{\sqrt{2}}(f\mid g) \subseteq \left(A_+^*(g)+\frac{i}{\sqrt{2}}(g\mid f)\right)^* \subseteq e^{i\Phi_S(f)}A_+(g)e^{-i\Phi_S(f)}$$

であるから，

$$e^{i\Phi_S(f)}A_+^*(g)e^{-i\Phi_S(f)} = A_+^*(g)+\frac{i}{\sqrt{2}}(g\mid f),$$
$$e^{i\Phi_S(f)}A_+(g)e^{-i\Phi_S(f)} = A_+(g)-\frac{i}{\sqrt{2}}(f\mid g)$$

が成り立つ．

(6) 定理 14.120 の (5) より $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ 上で

$$[\Phi_S(f),\Phi_S(g)] = \frac{1}{2}(g\mid f)-\frac{1}{2}(f\mid g) = i\mathrm{Im}(g\mid f)$$

であるから，

$$\frac{(i\Phi_S(f))^n}{n!}\Phi_S(g)\Psi = \Phi_S(g)\frac{(i\Phi_S(f))^n}{n!}\Psi - \mathrm{Im}(g\mid f)\frac{(i\Phi_S(f))^{n-1}}{(n-1)!}\Psi \quad (\forall n\in\mathbb{N},\forall\Psi\in\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})) \tag{14.125}$$

が成り立つ．(2) より $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ の元は $\Phi_S(f)$ の全解析ベクトルであるから，定理 10.214 より，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(i\Phi_S(f))^n}{n!}\Psi = e^{i\Phi_S(f)}\Psi \quad (\forall\Psi\in\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H}))$$

が成り立つ．よって $\Phi_S(g)\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})\subseteq\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ であること，$\Phi_S(g)$ が閉作用素であることと (14.125) より，

$$e^{i\Phi_S(f)}\Phi_S(g)\Psi = \Phi_S(g)e^{i\Phi_S(f)}\Psi - \mathrm{Im}(g\mid f)e^{i\Phi_S(f)}\Psi \quad (\forall\Psi\in\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H}))$$

が成り立つことが分かる．(1) より $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ は $\Phi_S(g)$ の芯であるから，

$$e^{i\Phi_S(f)}\Phi_S(g) \subseteq \Phi_S(g)e^{i\Phi_S(f)} - \mathrm{Im}(g\mid f)e^{i\Phi_S(f)}$$

であり，これより，

$$e^{i\Phi_S(f)}\Phi_S(g)e^{-i\Phi_S(f)} \subseteq \Phi_S(g)-\mathrm{Im}(g\mid f)$$

である．よって両辺の自己共役性より，

$$e^{i\Phi_S(f)}\Phi_S(g)e^{-i\Phi_S(f)} = \Phi_S(g)-\mathrm{Im}(g\mid f)$$

が成り立つ．よって定理 10.54 より，

$$e^{i\Phi_S(f)}e^{i\Phi_S(g)}e^{-i\Phi_S(g)} = e^{-i\mathrm{Im}(g|f)}e^{i\Phi_S(g)}$$

が成り立つ．

(7) 任意の $f\in\mathcal{H}\backslash\{0\}$ を取る．(5) より，

$$e^{i\Phi_S(itf)}\Phi_S(f)e^{-i\Phi_S(itf)} = \Phi_S(f)-\mathrm{Im}(itf\mid f) = \Phi_S(f)+t\|f\|^2 \quad (\forall t\in\mathbb{R}) \tag{14.126}$$

であるから，

$$\sigma(\Phi_S(f)) = \sigma(e^{i\Phi_S(itf)}\Phi_S(f)e^{-i\Phi_S(itf)}) = \sigma(\Phi_S(f)+t\|f\|^2) = \sigma(\Phi_S(f))+t\|f\|^2 \quad (\forall t\in\mathbb{R})$$

である．よって $\|f\|\neq 0$ より，

$$\sigma(\Phi_S(f)) = \mathbb{R}$$

が成り立つ. もし $\sigma_{\mathrm{p}}(\Phi_S(f)) \neq \varnothing$ ならば, 任意の $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(\Phi_S(f))$ に対し (14.126) より,

$$\lambda + t\|f\|^2 \in \sigma_{\mathrm{p}}(\Phi_S(f) + t\|f\|^2) = \sigma_{\mathrm{p}}(e^{i\Phi_S(itf)}\Phi_S(f)e^{-i\Phi_S(itf)}) = \sigma_{\mathrm{p}}(\Phi_S(f)) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

となるので, $\sigma_{\mathrm{p}}(\Phi_S(f)) = \mathbb{R}$ である. 従って $\Phi_S(f)$ は非可算無限個の固有値を持つこととなるが, 自己共役作用素の互いに異なる固有値に属する固有ベクトルは直交するので $\mathcal{H}$ が可分であることに矛盾する (命題 5.152 を参照). よって $\sigma_{\mathrm{p}}(\Phi_S(f)) = \varnothing$ である.

□

補題 14.123 (非可換二項定理)**.** $\mathbb{C}$ 上の単位的多元環の元 X, Y がある $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し,

$$XY - YX = \alpha 1$$

を満たすとする. このとき任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k} = \sum_{2p+q=n} \frac{n!}{p!q!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p (X+Y)^p$$

が成り立つ.

証明. n に関する帰納法で示す. $n = 0, 1$ の場合に成り立つことは自明である. そこである $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つと仮定して $n+1$ の場合も成り立つことを示す.

$$\begin{aligned}
&\sum_{2p+q=n+1} \frac{(n+1)!}{p!q!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p (X+Y)^q \\
&= \sum_{\substack{2p+q=n+1,\\ pq=0}} \frac{(n+1)!}{p!q!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p (X+Y)^q + \sum_{\substack{2p+q=n+1,\\ p\geqslant 1, q\geqslant 1}} \frac{(n+1)!}{p!q!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p (X+Y)^q
\end{aligned} \tag{14.127}$$

(14.127) の右辺の第一項は,

$$\sum_{\substack{2p+q=n+1,\\ pq=0}} \frac{(n+1)!}{p!q!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p (X+Y)^q = \begin{cases} (X+Y)^{n+1} + 2\frac{n!}{(\frac{n-1}{2})!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} & (n \text{ は奇数 }) \\ (X+Y)^{n+1} & (n \text{ は偶数 }) \end{cases} \tag{14.128}$$

であり, (14.127) の右辺の第二項は,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{2p+q=n+1,\\ p\geqslant 1, q\geqslant 1}} \frac{(n+1)!}{p!q!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p (X+Y)^q = \sum_{\substack{2p+q=n+1,\\ p\geqslant 1, q\geqslant 1}} (2p+q)\frac{n!}{p!q!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p (X+Y)^q \\
&= \sum_{\substack{2(p-1)+(q+1)=n,\\ p\geqslant 1, q\geqslant 1}} 2\frac{n!}{(p-1)!q!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p (X+Y)^q + \sum_{\substack{2p+(q-1)=n,\\ p\geqslant 1, q\geqslant 1}} \frac{n!}{p!(q-1)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p (X+Y)^q \\
&= \sum_{2p+q=n, q\geqslant 2} 2\frac{n!}{p!(q-1)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p+1} (X+Y)^{q-1} + \sum_{2p+q=n, p\geqslant 1} \frac{n!}{p!q!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p (X+Y)^{q+1}
\end{aligned} \tag{14.129}$$

である. よって (14.127), (14.128), (14.129) より,

$$\begin{aligned}
&\sum_{2p+q=n+1} \frac{(n+1)!}{p!q!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p (X+Y)^q \\
&= \sum_{2p+q=n, q\geqslant 1} 2\frac{n!}{p!(q-1)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p+1} (X+Y)^{q-1} + \sum_{2p+q=n} \frac{n!}{p!q!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p (X+Y)^{q+1} \\
&= \sum_{2p+q=n} \frac{n!}{p!q!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p q\alpha (X+Y)^{q-1} + \sum_{2p+q=n} \frac{n!}{p!q!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p (X+Y)^{q+1}
\end{aligned} \tag{14.130}$$

である. ここで $XY - YX = \alpha 1$ より $X(X+Y) - (X+Y)X = \alpha 1$ であるから,

$$X(X+Y)^q - (X+Y)^q X = q\alpha (X+Y)^{q-1} \quad (\forall q \in \mathbb{N})$$

である．よって (14.130) の右辺の第一項は,

$$\sum_{2p+q=n}\frac{n!}{p!q!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^p q\alpha(X+Y)^{q-1}=\sum_{2p+q=n}\frac{n!}{p!q!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^p(X(X+Y)^q-(X+Y)^qX)$$

であるので,

$$\begin{aligned}
&\sum_{2p+q=n+1}\frac{(n+1)!}{p!q!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^p(X+Y)^q\\
&=\sum_{2p+q=n}\frac{n!}{p!q!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^p(X(X+Y)^q-(X+Y)^qX)+\sum_{2p+q=n}\frac{n!}{p!q!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^p(X+Y)^{q+1}\\
&=\sum_{2p+q=n}\frac{n!}{p!q!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^p(X(X+Y)^q+(X+Y)^qY)\\
&=X\left(\sum_{2p+q=n}\frac{n!}{p!q!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^p(X+Y)^q\right)+\left(\sum_{2p+q=n}\frac{n!}{p!q!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^p(X+Y)^q\right)Y\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{k+1}Y^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^kY^{n+1-k}\\
&=X^{n+1}+Y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)X^kY^{n+1-k}\\
&=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}X^kY^{n+1-k}
\end{aligned}$$

である (4 番目の等号で帰納法の仮定を用いた)．よって $n+1$ の場合も成り立つ． □

定理 14.124. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $\Omega\in\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ を Fock 真空 (定義 14.111) とする．このとき,

(1)
$$\mathcal{H}\ni f\mapsto e^{i\Phi_S(f)}\in\mathcal{U}(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$$
は $\mathcal{H}$ のノルムと $\mathcal{U}(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$[*320]の SOT に関して連続である．

(2) 任意の $f,g\in\mathcal{H}$ に対し,
$$e^{i\Phi_S(f)}e^{i\Phi_S(g)}=e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(g|f)}e^{i\Phi_S(f+g)}$$
が成り立つ．

(3) 任意の $f\in\mathcal{H}$ に対し,
$$e^{i\Phi_S(f)}\Omega=e^{-\frac{\|f\|^2}{4}}\left(\frac{i^N}{\sqrt{N!2^N}}\otimes^N f\right)_{N\in\mathbb{Z}_+}$$
が成り立つ．ただし $\otimes^N f=\overbrace{f\otimes\cdots\otimes f}^{N\text{ 個}}\in\Theta_{N,+}(\bigotimes^N\mathcal{H})$ である．

(4) 任意の $f,g\in\mathcal{H}$ に対し,
$$(e^{i\Phi_S(f)}\Omega\mid e^{i\Phi_S(g)}\Omega)=e^{-\frac{\|f\|^2+\|g\|^2}{4}}e^{-\frac{1}{2}(f|g)}$$
が成り立つ．

証明. (1) 任意の $N\in\mathbb{Z}_+$, $\Psi_N\in\Theta_{N,+}(\bigotimes^N\mathcal{H})\subseteq\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ を取る．定理 14.122 の (2) より Ψ_N は $\Phi_S(f)$ の全解析ベクトルであるから定理 10.214 より,

$$e^{i\Phi_S(f)}\Psi_N=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(i\Phi_S(f))^n}{n!}\Psi_N\quad(\forall f\in\mathcal{H})$$

[*320] $\mathcal{U}(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$ は $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ 上のユニタリ作用素全体．

である. そして各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, 定理 14.122 の (1), (3) より,

$$\mathcal{H} \times \cdots \times \mathcal{H} \ni (f_1, \cdots, f_N) \mapsto \Phi_S(f_1) \cdots \Phi_S(f_N)\Psi_N \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$$

は有界多重線型写像であるから,

$$\mathcal{H} \ni f \mapsto \frac{(i\Phi_S(f))^n}{n!}\Psi_N \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$$

はノルムで連続である. また定理 14.122 の (1) より,

$$\left\| \frac{(i\Phi_S(f))^n}{n!}\Psi_N \right\| \leqslant \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!}\sqrt{(N+n)(N+n-1)\cdots(N+1)}\|f\|^n\|\Psi_N\| \quad (\forall f \in \mathcal{H})$$

であり, 任意の正数 r に対し命題 4.28 より,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!}\sqrt{(N+n)(N+n-1)\cdots(N+1)}r^n\|\Psi_N\| < \infty$$

である. よって Lebesgue 優収束定理より,

$$\mathcal{H} \ni f \mapsto e^{i\Phi_S(f)}\Psi_N = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{(i\Phi_S(f))^n}{n!}\Psi_N \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$$

はノルムで連続である. ゆえに任意の $\Psi \in \mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H}) = \mathrm{span}\bigcup_{N\in\mathbb{Z}_+}\Theta_{N,+}(\bigotimes^N \mathcal{H})$ に対し,

$$\mathcal{H} \ni f \mapsto e^{i\Phi_S(f)}\Psi \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \tag{14.131}$$

はノルムで連続であり, $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ の稠密部分空間で $\|e^{i\Phi_S(f)}\| = 1$ $(\forall f \in \mathcal{H})$ であるので, 任意の $\Psi \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ に対し (14.131) はノルムで連続である. よって $\mathcal{H} \ni f \mapsto e^{i\Phi_S(f)} \in \mathcal{U}(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$ はノルムと SOT に関して連続である.

(2) 任意の $N \in \mathbb{Z}_+$, $\Psi_N \in \Theta_{N,+}(\bigotimes^N \mathcal{H}) \subseteq \mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ を取り固定する. 定理 14.122 の (2) より Ψ_N は $\Phi_S(f)$, $\Phi_S(g)$ の全解析ベクトルであるから, 定理 10.214 より,

$$e^{i\Phi_S(f)}e^{i\Phi_S(g)}\Psi_N = \sum_{m\in\mathbb{Z}_+} e^{i\Phi_S(f)}\frac{(i\Phi_S(g))^m}{m!}\Psi_N = \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(i\Phi_S(f))^n}{n!}\frac{(i\Phi_S(g))^m}{m!}\Psi_N \tag{14.132}$$

である. そして定理 14.122 の (1) と命題 4.28 より,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n,m\in\mathbb{Z}_+}\left\|\frac{(i\Phi_S(f))^n}{n!}\frac{(i\Phi_S(g))^m}{m!}\Psi_N\right\| = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{n!m!}\|\Phi_S(f)^n\Phi_S(g)^m\Psi_N\| \\
&\leqslant \sum_{n,m\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{n!m!}2^{\frac{n+m}{2}}\sqrt{(N+n+m)(N+n+m-1)\cdots(N+1)}\|f\|^n\|g\|^m\|\Psi_N\| \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}2^{\frac{n}{2}}\sqrt{(N+n)(N+n-1)\cdots(N+1)}\|f\|^k\|g\|^{n-k}\|\Psi_N\| \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{n!}2^{\frac{n}{2}}\sqrt{(N+n)(N+n-1)\cdots(N+1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\|f\|^k\|g\|^{n-k}\|\Psi_N\| \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{n!}2^{\frac{n}{2}}\sqrt{(N+n)(N+n-1)\cdots(N+1)}(\|f\|+\|g\|)^n\|\Psi_N\| < \infty
\end{aligned}$$

であるから, Fubini の定理 5.253 より,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\in\mathbb{Z}_+}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(i\Phi_S(f))^n}{n!}\frac{(i\Phi_S(g))^m}{m!}\Psi_N = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}_+}\frac{(i\Phi_S(f))^n}{n!}\frac{(i\Phi_S(g))^m}{m!}\Psi_N \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}(i\Phi_S(f))^k(i\Phi_S(g))^{n-k}\Psi_N = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(i\Phi_S(f))^k(i\Phi_S(g))^{n-k}\Psi_N
\end{aligned}$$

である. よって (14.132) より,

$$e^{i\Phi_S(f)}e^{i\Phi_S(g)}\Psi_N = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(i\Phi_S(f))^k(i\Phi_S(g))^{n-k}\Psi_N$$

が成り立つ. ここで定理 14.120 の (5) より $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ 上で,

$$[i\Phi_S(f), i\Phi_S(g)] = -i\mathrm{Im}(g \mid f)$$

であるから, 補題 14.123 より,

$$\begin{aligned}
e^{i\Phi_S(f)}e^{i\Phi_S(g)}\Psi_N &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(i\Phi_S(f))^k(i\Phi_S(g))^{n-k}\Psi_N \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{2p+q=n}\frac{1}{p!q!}\left(-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(g \mid f)\right)^p(i\Phi_S(f)+i\Phi_S(g))^q\Psi_N \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{p!}\left(-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(g \mid f)\right)^p\sum_{q\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{q!}(i\Phi_S(f+g))^q\Psi_N \\
&= e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(g|f)}e^{i\Phi_S(f+g)}\Psi_N
\end{aligned}$$

が成り立つ. $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H}) = \mathrm{span}\bigcup_{N\in\mathbb{Z}_+}\Theta_{N,+}(\bigotimes^N\mathcal{H})$ は $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ で稠密であるから,

$$e^{i\Phi_S(f)}e^{i\Phi_S(g)}\Psi = e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(g|f)}e^{i\Phi_S(f+g)}\Psi \quad (\forall\Psi\in\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$$

が成り立つ.

(3) 任意の $f\in\mathcal{H}$ に対し定理 14.120 の (1) と命題 4.28 より $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(iA_+^*(f))^n}{n!}\Omega$ は絶対収束する. そして $A_+(f)\Omega = 0$ であるから,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(iA_+^*(f))^n}{n!}\Omega = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(iA_+^*(f))^k(iA_+(f))^{n-k}\Omega$$

と表せる. また命題 14.120 の (5) より $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ 上で,

$$[iA_+^*(f), iA_+(f)] = \|f\|^2$$

であるから, 補題 14.123 より,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(iA_+^*(f))^n}{n!}\Omega &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(iA_+^*(f))^k(iA_+(f))^{n-k}\Omega \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{2p+q=n}\frac{1}{p!q!}\left(\frac{\|f\|^2}{2}\right)^p(iA_+^*(f)+iA_+(f))^q\Omega \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{2p+q=n}\frac{1}{p!q!}\left(\frac{\|f\|^2}{2}\right)^p(i\Phi_S(\sqrt{2}f))^q\Omega \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{p!}\left(\frac{\|f\|^2}{2}\right)^p\sum_{q\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{q!}(i\Phi_S(\sqrt{2}f))^q\Omega \\
&= e^{\frac{\|f\|^2}{2}}e^{i\Phi_S(\sqrt{2}f)}\Omega
\end{aligned}$$

となる. よって $A_+^*(f)^n\Omega = \sqrt{n!}\otimes^n f$ であることに注意して,

$$e^{i\Phi_S(f)}\Omega = e^{-\frac{\|f\|^2}{4}}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(iA_+^*(f))^n}{n!2^n}\Omega = e^{-\frac{\|f\|^2}{4}}\left(\frac{i^n}{\sqrt{n!2^n}}\otimes^n f\right)_{n\in\mathbb{Z}_+}$$

を得る.

(4) (3) より任意の $f,g\in\mathcal{H}$ に対し,

$$
\begin{aligned}
(e^{i\Phi_S(f)}\Omega \mid e^{i\Phi_S(g)}\Omega) &= e^{-\frac{\|f\|^2}{4}}e^{-\frac{\|g\|^2}{4}}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{i^n}{\sqrt{n!2^n}}\otimes^n f \mid \frac{i^n}{\sqrt{n!2^n}}\otimes^n g\right)\\
&= e^{-\frac{\|f\|^2+\|g\|^2}{4}}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(-1)^n}{n!2^n}(f\mid g)^n = e^{-\frac{\|f\|^2+\|g\|^2}{4}}e^{-\frac{1}{2}(f|g)}
\end{aligned}
$$

である.

□

命題 14.125. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $D\subseteq\mathcal{H}$ をノルムで稠密な部分集合とする. このとき,

(1) $\{e^{i\Phi_S(f)}:f\in D\}''=B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$ が成り立つ.
(2) $\{A_-(f),A_-^*(g):f,g\in D\}''=B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$ が成り立つ.

証明. (1) von Neumann 環

$$\mathcal{M}:=\{e^{i\Phi_S(f)}:f\in D\}''\subseteq B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$$

を考え, $\mathcal{M}'=\mathbb{C}1$ が成り立つことを示せばよい. 任意の $f\in\mathcal{H}$ に対し D の稠密性より f にノルムで収束する D の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が取れるので, 定理 14.124 の (1) より,

$$e^{i\Phi_S(f)}=\text{SOT-}\lim_{n\to\infty}e^{i\Phi_S(f_n)}\in\overline{\mathcal{M}}^{\text{SOT}}=\mathcal{M}$$

が成り立つ. よって補題 10.213 より任意の $f\in\mathcal{H}, T'\in\mathcal{M}'$ に対し,

$$T'\Phi_S(f)\Psi=\lim_{t\to0}\frac{1}{it}T'\left(e^{i\Phi_S(tf)}-1\right)\Psi=\lim_{t\to0}\frac{1}{it}\left(e^{i\Phi_S(tf)}-1\right)T'\Psi\quad(\forall\Psi\in D(\Phi_S(f)))$$

であるから,

$$T'\Phi_S(f)\subseteq\Phi_S(f)T'\quad(\forall f\in\mathcal{H},\forall T'\in\mathcal{M}')$$

である. よって,

$$\Phi_S(f)\in\widetilde{\mathcal{M}}\quad(\forall f\in\mathcal{H})$$

($\widetilde{\mathcal{M}}$ については定義 10.181 を参照) であるから, 定理 14.122 の (4) より,

$$A_+^*(f)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_S(f)-i\Phi_S(if))\in\widetilde{\mathcal{M}}\quad(\forall f\in\mathcal{H})\tag{14.133}$$

が成り立つ. 今, 任意の $T'\in\mathcal{M}'$ を取り $T'\in\mathbb{C}1$ が成り立つことを示す. 任意の $N\in\mathbb{N}$, 任意の $f_1,\cdots,f_N\in\mathcal{H}$ に対し (14.133) より,

$$
\begin{aligned}
&(T'\Omega\mid A_+^*(f_1)\cdots A_+^*(f_N)\Omega)=(\Omega\mid T'^*A_+^*(f_1)\cdots A_+^*(f_N)\Omega)\\
&=(\Omega\mid A_+^*(f_1)\cdots A_+^*(f_N)T'\Omega)=(A_+(f_1)\Omega\mid A_+^*(f_2)\cdots A_+^*(f_N)T'\Omega)=0
\end{aligned}
$$

[*321]であり,

$$A_+^*(f_1)\cdots A_+^*(f_N)\Omega=\sqrt{N!}\Theta_{N,+}(f_1\otimes\cdots\otimes f_N)\tag{14.134}$$

であるから,

$$T'\Omega\perp\Theta_{N,+}\left(\bigotimes^N\mathcal{H}\right)\quad(\forall N\in\mathbb{N})$$

が成り立つ. よって $T'\Omega=\alpha\Omega$ なる $\alpha\in\mathbb{C}$ が取れる. 任意の $N\in\mathbb{N}$, 任意の $f_1,\cdots,f_N\in\mathcal{H}$ に対し (14.133) より,

$$T'A_+^*(f_1)\cdots A_+^*(f_N)\Omega=A_+^*(f_1)\cdots A_+^*(f_N)T'\Omega=\alpha A_+^*(f_1)\cdots A_+^*(f_N)\Omega$$

であるから (14.134) より $T'=\alpha1$ である. よって $\mathcal{M}'=\mathbb{C}1$ なので求める結果を得た.

[*321] Ω は Fock 真空 (定義 14.111) である. $A_+(f_1)\Omega=0$ に注意.

(2) von Neumann 環

$$\mathcal{M} := \{A_-(f), A_-^*(g) : f, g \in D\}'' \subseteq B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$$

を考え, $\mathcal{M}' = \mathbb{C}1$ を示せばよい. 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し, $D \subseteq \mathcal{H}$ の稠密性より f にノルムで収束する D の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が取れ, $\mathcal{H} \ni f \mapsto A_-^*(f) \in B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$ は等長線型作用素である (定理 14.120 の (6)) から,

$$A_-^*(f) = \lim_{n\to\infty} A_-^*(f_n) \in \overline{\mathcal{M}}^{\|\cdot\|} = \mathcal{M}$$

である. 後は (1) と全く同様にして示せる.

□

補題 14.126. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $\Omega \in \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$ を Fock 真空, $N, M \in \mathbb{Z}_+$, $f_1, \cdots, f_N, g_1 \cdots, g_M \in \mathcal{H}$ とする. このとき,

$$(A_\pm^*(f_1)\cdots A_\pm^*(f_N)\Omega \mid A_\pm^*(g_1)\cdots A_\pm^*(g_M)\Omega) = \delta_{N,M} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)^{\frac{1\mp 1}{2}} (f_{\sigma(1)} \mid g_1)\cdots(f_{\sigma(N)} \mid g_N)$$

が成り立つ.

証明.

$$A_\pm^*(f_1)\cdots A_\pm^*(f_N)\Omega = \sqrt{N!}\Theta_{N,\pm}(f_1\otimes\cdots\otimes f_N) \in \Theta_{N,\pm}\left(\bigotimes^N \mathcal{H}\right),$$
$$A_\pm^*(g_1)\cdots A_\pm^*(g_M)\Omega = \sqrt{M!}\Theta_{M,\pm}(g_1\otimes\cdots\otimes g_M) \in \Theta_{M,\pm}\left(\bigotimes^M \mathcal{H}\right)$$

であるから, $N \neq M$ ならば $\Theta_{N,\pm}(\bigotimes^N \mathcal{H}) \perp \Theta_{M,\pm}(\bigotimes^M \mathcal{H})$ より,

$$(A_\pm^*(f_1)\cdots A_\pm^*(f_N)\Omega \mid A_\pm^*(g_1)\cdots A_\pm^*(g_M)\Omega) = 0$$

であり, $N = M$ ならば, (反) 対称化作用素 $\Theta_{N,\pm}$ の定義 14.110 より,

$$\begin{aligned}
&(A_\pm^*(f_1)\cdots A_\pm^*(f_N)\Omega \mid A_\pm^*(g_1)\cdots A_\pm^*(g_M)\Omega) = N!(\Theta_{N,\pm}(f_1\otimes\cdots\otimes f_N) \mid \Theta_{N,\pm}(g_1\otimes\cdots\otimes g_N)) \\
&= N!(\Theta_{N,\pm}(f_1\otimes\cdots\otimes f_N) \mid g_1\otimes\cdots\otimes g_N) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)^{\frac{1\mp 1}{2}} (f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(N)} \mid g_1\otimes\cdots\otimes g_N) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)^{\frac{1\mp 1}{2}} (f_{\sigma(1)} \mid g_1)\cdots(f_{\sigma(N)} \mid g_N)
\end{aligned}$$

である.

□

定理 14.127 (Fock 空間のテンソル積)**.** $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ を Hilbert 空間, $\Omega_\mathcal{H} \in \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$, $\Omega_\mathcal{K} \in \mathcal{F}_\pm(\mathcal{K})$, $\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}} \in \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K})$ をそれぞれ Fock 真空とする. このときユニタリ作用素

$$U_\pm : \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})\otimes\mathcal{F}_\pm(\mathcal{K}) \to \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K})$$

で, 任意の $N, M \in \mathbb{Z}_+$, $f_1, \cdots, f_N \in \mathcal{H}$, $g_1, \cdots, g_M \in \mathcal{K}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&U_\pm\left((A_\pm^*(f_1)\cdots A_\pm^*(f_N)\Omega_\mathcal{H})\otimes(A_\pm^*(g_1)\cdots A_\pm^*(g_M)\Omega_\mathcal{K})\right) \\
&= A_\pm^*(f_1,0)\cdots A_\pm^*(f_N,0)A_\pm^*(0,g_1)\cdots A_\pm^*(0,g_M)\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}}
\end{aligned} \tag{14.135}$$

を満たすものが一意存在し,

$$U_\pm(\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H})\odot\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{K})) = \mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}) \tag{14.136}$$

が成り立つ.[*322] ただし,

$$\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H})\odot\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{K}) = \mathrm{span}\{\Psi_1\odot\Psi_2 : \Psi_1 \in \mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H}), \Psi_2 \in \mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{K})\}$$

である. また,

[*322] $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H})$, $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{K})$, $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K})$ については定義 14.111) を参照

(1) 任意の $f\in\mathcal{H}, g\in\mathcal{K}$ に対し,

$$A_\pm^*(f)\otimes 1 = U_\pm^* A_\pm^*(f,0)U_\pm,\ \ \Gamma_\pm(\pm 1)\otimes A_\pm^*(g) = U_\pm^* A_\pm^*(0,g)U_\pm,$$
$$A_\pm(f)\otimes 1 = U_\pm^* A_\pm(f,0)U_\pm,\ \ \Gamma_\pm(\pm 1)\otimes A_\pm(g) = U_\pm^* A_\pm(0,g)U_\pm$$

が成り立つ.

(2) Segal の場の作用素 (定義 14.121) について, 任意の $f\in\mathcal{H}, g\in\mathcal{K}$ に対し,

$$\Phi_S(f)\otimes 1 = U_+^*\Phi_S(f,0)U_+,\ \ 1\otimes\Phi_S(g) = U_+^*\Phi_S(0,g)U_+$$

が成り立つ.

(3) Segal の場の作用素について, 任意の $f\in\mathcal{H}, g\in\mathcal{K}$ に対し,

$$e^{i\Phi_S(f)}\otimes e^{i\Phi_S(g)} = U_+^* e^{i\Phi_S(f,g)}U_+$$

が成り立つ.

証明. $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H}), \mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{K}), \mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K})$ (定義 14.111) は,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H}) &= \mathrm{span}\left\{A_\pm^*(f_1)\cdots A_\pm^*(f_N)\Omega_{\mathcal{H}} : N\in\mathbb{Z}_+, f_1,\cdots,f_N\in\mathcal{H}\right\},\\ \mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{K}) &= \mathrm{span}\left\{A_\pm^*(g_1)\cdots A_\pm^*(g_M)\Omega_{\mathcal{K}} : M\in\mathbb{Z}_+, g_1,\cdots,g_M\in\mathcal{K}\right\},\end{aligned} \tag{14.137}$$

$$\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}) = \mathrm{span}\left\{\begin{array}{c} A_\pm^*(f_1,0)\cdots A_\pm^*(f_N,0)A_\pm^*(0,g_1)\cdots A_\pm^*(0,g_M)\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}} : \\ N,M\in\mathbb{Z}_+, f_1,\cdots,f_N\in\mathcal{H}, g_1,\cdots,g_M\in\mathcal{K}\end{array}\right\} \tag{14.138}$$

であるから, 補題 14.126 より内積を保存する全射線型作用素

$$U_{\pm,0} : \mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H})\odot\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{K}) \to \mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K})$$

で, 任意の $N,M\in\mathbb{Z}_+$, $f_1,\cdots,f_N\in\mathcal{H}$, $g_1,\cdots,g_M\in\mathcal{K}$ に対し,

$$\begin{aligned}&U_{\pm,0}\left((A_\pm^*(f_1)\cdots A_\pm^*(f_N)\Omega_{\mathcal{H}})\otimes(A_\pm^*(g_1)\cdots A_\pm^*(g_M)\Omega_{\mathcal{K}})\right)\\ &= A_\pm^*(f_1,0)\cdots A_\pm^*(f_N,0)A_\pm^*(0,g_1)\cdots A_\pm^*(0,g_M)\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}}\end{aligned}$$

を満たすものが一意存在する. $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H})$, $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{K})$ はそれぞれ $\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$, $\mathcal{F}_\pm(\mathcal{K})$ の稠密部分空間であるから $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H})\odot\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{K})$ は $\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})\otimes\mathcal{F}_\pm(\mathcal{K})$ の稠密部分空間である (命題 10.94). また $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K})$ は $\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K})$ の稠密部分空間であるから, $U_{\pm,0}$ を $\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})\otimes\mathcal{F}_\pm(\mathcal{K})$ 上に一意拡張 (命題 3.19) したものが求めるユニタリ作用素 $U_\pm$ となる. 一意性は $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H})\odot\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{K})\subseteq\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})\otimes\mathcal{F}_\pm(\mathcal{K})$ の稠密性より明らかである.

(1) について. まず (14.137), (14.138), (14.135) より $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H})\odot\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{K})$ 上で成り立つことは直接計算により容易に分かる. また $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H})\odot\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{K})$ は $A_\pm^\sharp(f)\otimes 1, \Gamma_\pm(\pm 1)\otimes A_\pm^\sharp(g)$ の芯であり, $\mathcal{F}_{\pm,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K})$ は $A_\pm^\sharp(f,0)$, $A_\pm^\sharp(0,g)$ の芯である. よって (14.136) より (1) が成り立つ.

(2) について. まず (1) より $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H})\odot\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin},0}(\mathcal{K})$ 上では成り立つ. また定理 14.122 の (2) と (14.136) より $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin},0}(\mathcal{H})\odot\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin},0}(\mathcal{K})$ は両辺の自己共役作用素の芯である. よって (2) が成り立つ.

(3) について. (2) と定理 14.122 の (3) より,

$$\begin{aligned}U_+^*\Phi_S(f,g)U_+ &= U_+^*\overline{(\Phi_S(f,0)+\Phi_S(0,g))}U_+ = \overline{U_+^*\Phi_S(f,0)U_+ + U_+^*\Phi_S(0,g)U_+}\\ &= \overline{\Phi_S(f)\otimes 1 + 1\otimes\Phi_S(g)}\end{aligned}$$

である. また自己共役作用素のテンソル積の Borel 関数カルキュラス (定理 10.104) より,

$$\overline{\Phi_S(f)\otimes 1 + 1\otimes\Phi_S(g)} = \int_{\mathbb{R}}(\lambda_1+\lambda_2)d(E_{\Phi_S(f)}\otimes E_{\Phi_S(g)})(\lambda_1,\lambda_2)$$

($E_{\Phi_S(f)} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\to\mathcal{P}(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$, $E_{\Phi_S(g)} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\to\mathcal{P}(\mathcal{F}_+(\mathcal{K}))$ は $\Phi_S(f), \Phi_S(g)$ のスペクトル測度) であるから,

$$U_+^*\Phi_S(f,g)U_+ = \int_{\mathbb{R}}(\lambda_1+\lambda_2)d(E_{\Phi_S(f)}\otimes E_{\Phi_S(g)})(\lambda_1,\lambda_2)$$

である. よって命題 10.66, 定理 10.104 より,

$$U_+^* e^{i\Phi_S(f,g)} U_+ = \exp\left(iU_+^*\Phi_S(f,g)U_+\right) = \exp\left(i\left(\int_{\mathbb{R}}(\lambda_1+\lambda_2)d(E_{\Phi_S(f)}\otimes E_{\Phi_S(g)})(\lambda_1,\lambda_2)\right)\right)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_1} dE_{\Phi_S(f)}(\lambda_1)\otimes\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_2} dE_{\Phi_S(g)}(\lambda_2) = e^{i\Phi_S(f)}\otimes e^{i\Phi_S(g)}$$

である. ただし 1 番目の等号で定理 10.54 (ユニタリ作用素による射影値測度の変換), 3 番目の等号で命題 10.66 (射影値測度による積分の Borel 関数カルキュラス) を用い, 4 番目の等号で定理 10.104 (自己共役作用素のテンソル積の Borel 関数カルキュラス) を用いた. □

14.8 CCR 環, CAR 環の表現定理

定義 14.128 (Weyl 作用素族)**.** $\mathcal{H},\mathcal{K}$ を Hilbert 空間, $D\subseteq\mathcal{H}$ を線型部分空間とする.

$$D\ni f\mapsto W(f)\in\mathcal{U}(\mathcal{K})$$

($\mathcal{U}(\mathcal{K})$ は $\mathcal{K}$ 上のユニタリ作用素全体) が,

$$W(f)W(g) = e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(g|f)}W(f+g)\quad(\forall f,g\in D) \tag{14.139}$$

を満たすとき, $(W(f))_{f\in D}$ を D 上で定義された $\mathcal{K}$ 上の Weyl 作用素族と言う.

注意 14.129. (14.139) と $W(f)\in\mathcal{U}(\mathcal{K})$ $(\forall f\in D)$ より,

$$W(0)=1,\quad W(f)^* = W(-f)\quad(\forall f\in D)$$

である.

命題 14.130 (典型的な Weyl 作用素族)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする.

(1) Segal の場の作用素 $\Phi_S(f)$ $(\forall f\in\mathcal{H})$ (定義 14.121) に対し, $(e^{i\Phi_S(f)})_{f\in\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ 上で定義された対称 Fock 空間 $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ 上の Weyl 作用素族である.

(2) $D\subseteq\mathcal{H}$ を任意の線型部分空間とする. D を加法によって離散可換群とみなし, D の Hilbert 空間 $\ell^2(D)$ 上への正則表現を,

$$R: D\to\mathcal{U}(\ell^2(D)),\quad R(f)\Psi(g) := \Psi(g-f)\quad(\forall f,g\in D,\forall\Psi\in\ell^2(D))$$

とおく. また任意の $f\in D$ に対し $e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(\cdot|f)}\in\mathcal{U}(\ell^2(D))$ を,

$$(e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(\cdot|f)}\Psi)(g) := e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(g|f)}\Psi(g)\quad(\forall\Psi\in\ell^2(D),\forall g\in D)$$

と定義する. そして,

$$w(f) := e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(\cdot|f)}R(f)\in\mathcal{U}(\ell^2(D))\quad(\forall f\in D)$$

と定義する. このとき $(w(f))_{f\in D}$ は D 上で定義された $\ell^2(D)$ 上の Weyl 作用素族である.

(3) $(Q,P)=(Q_1,\cdots,Q_N,P_1,\cdots,P_N)$ を自由度 N の Weyl 型 CCR の $\mathcal{H}$ 上への表現 (定義 12.184) とすると,

$$W_{(Q,P)}:\mathbb{C}^N=\mathbb{R}^N\oplus i\mathbb{R}^N\ni x+iy\mapsto e^{\frac{i}{2}x\cdot y}e^{ixQ}e^{iyP}\in\mathcal{U}(\mathcal{H})$$

は $\mathbb{C}^N$ 上で定義された $\mathcal{H}$ 上の Weyl 作用素族である.

(4) C を $\mathcal{H}$ 上の共役子 (定義 10.201) とし, 任意の $f\in\mathcal{H}$ に対し $\overline{f}:=Cf$ とおき, $\mathcal{H}$ 上の任意の線型作用素 T に対し $\overline{T}:=CTC$ とおく. そして ρ を $\mathcal{H}$ 上の非負自己共役作用素とする. このとき,

$$W_{\rho,C}(f) := \exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f,\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f}\right)\right)\in\mathcal{U}(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}))\quad(\forall f\in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

とおくと, $(W_{\rho,C}(f))_{f\in D(\rho^{\frac{1}{2}})}$ は $D(\rho^{\frac{1}{2}})$ 上で定義された $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ 上の Weyl 作用素族である. また,

$$W_{\rho,C,\otimes}(f) := e^{i\Phi_S((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f)}\otimes e^{i\Phi_S(\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f})}\in\mathcal{U}(\mathcal{F}_+(\mathcal{H})\otimes\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))\quad(\forall f\in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

とおくと, $(W_{\rho,C,\otimes}(f))_{f\in D(\rho^{\frac{1}{2}})}$ は $D(\rho^{\frac{1}{2}})$ 上で定義された $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})\otimes\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ 上の Weyl 作用素族である.

証明. (1) 定理 14.124 の (2) による.

(2) 任意の $f,g\in D$ に対し,

$$R(f)e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(\cdot|g)}=e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(g|f)}e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(\cdot|g)}R(f),$$
$$R(f)R(g)=R(f+g),\quad e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(\cdot|f)}e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(\cdot|g)}=e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(\cdot|f+g)}$$

であるから,

$$\begin{aligned}w(f)w(g)&=e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(\cdot|f)}R(f)e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}((\cdot|g)}R(g)\\&=e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(g|f)}e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(\cdot|f)}e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(\cdot|g)}R(f)R(g)\\&=e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(g|f)}w(f+g)\end{aligned}$$

である.

(3) 任意の $z=x+iy\in\mathbb{C}^N$, $z'=x'+iy'\in\mathbb{R}^N\oplus i\mathbb{R}^N=\mathbb{C}^N$ に対し,

$$\begin{aligned}W_{(Q,P)}(z)W_{(Q',P')}(z')&=\exp\left(\frac{i}{2}(x\cdot y+x'\cdot y')\right)e^{ixQ}e^{iyP}e^{ix'Q}e^{iy'P}\\&=\exp\left(\frac{i}{2}(x\cdot y+2y\cdot x'+x'\cdot y')\right)e^{ixQ}e^{ix'Q}e^{iyP}e^{iy'P}\\&=\exp\left(-\frac{i}{2}(x\cdot y'-y\cdot x')\right)\exp\left(\frac{i}{2}(x+x')\cdot(y+y')\right)e^{i(x+x')Q}e^{i(y+y')P}\\&=e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(z'|z)}W_{(Q,P)}(z+z')\end{aligned}$$

である.

(4) 定理 10.28 より $D(\rho)$ は $D(\rho^{\frac{1}{2}})$ の芯であるから, 任意の $f,g\in D(\rho^{\frac{1}{2}})=D((1+\rho)^{\frac{1}{2}})$[*323]に対し, $D(\rho)$ の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$(f_n,\rho^{\frac{1}{2}}f_n)\to(f,\rho^{\frac{1}{2}}f),\quad(g_n,\rho^{\frac{1}{2}}g_n)\to(g,\rho^{\frac{1}{2}}g)\quad(n\to\infty)$$

なるものが取れる.

$$\begin{aligned}\left\|(1+\rho)^{\frac{1}{2}}f_n-(1+\rho)^{\frac{1}{2}}f_m\right\|^2&=((1+\rho)(f_n-f_m)\mid f_n-f_m)=\|f_n-f_m\|^2+\|\rho^{\frac{1}{2}}f_n-\rho^{\frac{1}{2}}f_m\|^2\\&\to0\quad(n,m\to\infty),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|(1+\rho)^{\frac{1}{2}}g_n-(1+\rho)^{\frac{1}{2}}g_m\right\|^2&=((1+\rho)(g_n-g_m)\mid g_n-g_m)=\|g_n-g_m\|^2+\|\rho^{\frac{1}{2}}g_n-\rho^{\frac{1}{2}}g_m\|^2\\&\to0\quad(n,m\to\infty)\end{aligned}$$

であるから, $(1+\rho)^{\frac{1}{2}}$ が閉作用素であることにより,

$$(1+\rho)^{\frac{1}{2}}f_n\to(1+\rho)^{\frac{1}{2}}f,\quad(1+\rho)^{\frac{1}{2}}g_n\to(1+\rho)^{\frac{1}{2}}g\quad(n\to\infty)$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned}\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}g\mid(1+\rho)^{\frac{1}{2}}f\right)&=\lim_{n\to\infty}\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}g_n\mid(1+\rho)^{\frac{1}{2}}f_n\right)=\lim_{n\to\infty}((1+\rho)g_n\mid f_n)\\&=\lim_{n\to\infty}\left((g_n\mid f_n)+(\rho^{\frac{1}{2}}g_n\mid\rho^{\frac{1}{2}}f_n)\right)=(g\mid f)+(\rho^{\frac{1}{2}}g\mid\rho^{\frac{1}{2}}f)\end{aligned}$$

が成り立つ. また命題 10.207 (射影値測度の共役子による変換) より,

$$\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}=(C\rho C)^{\frac{1}{2}}=C\rho^{\frac{1}{2}}C=\overline{\rho^{\frac{1}{2}}}$$

[*323] ρ のスペクトル測度 $E:\mathcal{B}_{\sigma(\rho)}\to\mathcal{P}(\mathcal{H})$ に対し $\rho^{\frac{1}{2}}=\int_{\sigma(\rho)}\lambda^{\frac{1}{2}}dE(\lambda)$, $(1+\rho)^{\frac{1}{2}}=\int_{\sigma(\rho)}(1+\lambda)^{\frac{1}{2}}dE(\lambda)$ であるから, $D(\rho^{\frac{1}{2}})=D_E(\mathrm{id}^{\frac{1}{2}})=D_E((1+\mathrm{id})^{\frac{1}{2}})=D((1+\rho)^{\frac{1}{2}})$ (定義 10.52 を参照) である.

であるから,

$$(\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{g} \mid \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f}) = (\rho^{\frac{1}{2}}f \mid \rho^{\frac{1}{2}}g) \ \ (\forall f, g \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

である. よって,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}g \mid (1+\rho)^{\frac{1}{2}}f\right) + \left(\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{g} \mid \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f}\right)\right) &= \mathrm{Im}\left((g \mid f) + (\rho^{\frac{1}{2}}g \mid \rho^{\frac{1}{2}}f) + (\rho^{\frac{1}{2}}f \mid \rho^{\frac{1}{2}}g)\right) \\ &= \mathrm{Im}(g \mid f) \ \ (\forall f, g \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))\end{aligned}$$

が成り立つので, 定理 14.124 の (2) より,

$$W_{\rho,C}(f)W_{\rho,C}(g) = e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(g|f)}W_{\rho,C}(f+g) \ \ (\forall f, g \in D(\rho^{\frac{1}{2}})) \tag{14.140}$$

が成り立つ. 定理 14.127 におけるユニタリ作用素

$$U_+ : \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}_+(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$$

に対し, 定理 14.127 の (3) より,

$$U_+^* W_{\rho,C}(f) U_+ = e^{i\Phi_S((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f)} \otimes e^{i\Phi_S(\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f})} = W_{\rho,C,\otimes}(f) \ \ (\forall f \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

であるから, (14.140) より,

$$W_{\rho,C,\otimes}(f)W_{\rho,C,\otimes}(g) = e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(g|f)}W_{\rho,C,\otimes}(f+g) \ \ (\forall f, g \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

が成り立つ.

□

補題 14.131. $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ を Hilbert 空間, $D \subseteq \mathcal{H}$ を線型部分空間とし, $(W(f))_{f\in D}$ を D 上で定義された $\mathcal{K}$ 上の Weyl 作用素族とする. また $(R(f))_{f\in D}$, $(w(f))_{f\in D}$ を命題 14.130 の (2) における離散群 D の $\ell^2(D)$ 上への正則表現と, D 上で定義された $\ell^2(D)$ 上の Weyl 作用素族とする. このとき,

(1) $\mathcal{K}$ 上の Weyl 作用素族 $(W(f))_{f\in D}$ が生成する C^*-環と, $\mathcal{K} \otimes \ell^2(D)$ 上の Weyl 作用素族 $(W(f) \otimes R(f))_{f\in D}$ が生成する C^*-環は同型, すなわち,

$$C^*\left(\{W(f) : f \in D\}\right) \simeq C^*\left\{W(f) \otimes R(f) : f \in D\right\}$$

であり, C^*-環同型写像で任意の $f \in D$ に対し $W(f)$ を $W(f) \otimes R(f)$ に対応させるようなものが唯一つ存在する.

(2) $\mathcal{K} \otimes \ell^2(D)$ 上のユニタリ作用素 U で,

$$W(f) \otimes R(f) = U(1 \otimes w(f))U^* \ \ (\forall f \in D)$$

を満たすものが存在する.

(3) $\mathcal{K}$ 上の Weyl 作用素族 $(W(f))_{f\in D}$ が生成する C^*-環と, $\ell^2(D)$ 上の Weyl 作用素族 $(w(f))_{f\in D}$ が生成する C^*-環は同型, すなわち,

$$C^*\left(\{W(f) : f \in D\}\right) \simeq C^*\left\{w(f) : f \in D\right\}$$

であり, C^*-環同型写像として任意の $f \in D$ に対し $W(f)$ を $w(f)$ に対応させるようなものが唯一つ存在する.

証明. (1) 非可算離散可換群 D の双対群 (定義 12.147) を $\widehat{D}$ (コンパクト可換群) とおき, $\widehat{D}$ 上の正規化された Haar 測度を μ とおく. そして Fourier 変換 (定理 12.148 を参照)

$$\ell^1(D) \ni \Psi \mapsto \widehat{\Psi} \in C(\widehat{D}), \ \ \widehat{\Psi}(\gamma) = \sum_{g\in D} \Psi(g)\langle g, \gamma\rangle \ \ (\forall \gamma \in \widehat{D})$$

をユニタリ作用素に拡張したもの (定理 12.150 を参照) を,

$$\mathcal{F} : \ell^2(D) \to L^2(\widehat{D}, \mu)$$

とおく. このとき,

$$\mathcal{F}R(f)\mathcal{F}^* = \langle f, \cdot\rangle \quad (\forall f \in D)$$

(右辺は $\langle f, \cdot\rangle \in C(\widehat{D})$ による $L^2(\widehat{D}, \mu)$ 上への掛け算作用素) であるから,

$$(1 \otimes \mathcal{F})(W(f) \otimes R(f))(1 \otimes \mathcal{F})^* = W(f) \otimes \langle f, \cdot\rangle \in \mathcal{U}(\mathcal{K} \otimes L^2(\widehat{D}, \mu)) \quad (\forall f \in D) \tag{14.141}$$

が成り立つ. ここで Bochner 可測関数の Bochner 可測単関数による近似 (定理 5.242) を考えて,

$$\mathcal{K} \otimes L^2(\widehat{D}, \mu) = L^2(\widehat{D}, \mathcal{K}, \mu)$$

とみなす (右辺は Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ 値 L^2 空間 (定義 5.247) である). この同一視のもと, (14.141) の $W(f) \otimes \langle f, \cdot\rangle$ は, 連続関数

$$W(f)\langle f, \cdot\rangle : \widehat{D} \ni \gamma \mapsto W(f)\langle f, \gamma\rangle \in B(\mathcal{K})$$

による $L^2(\widehat{D}, \mathcal{K}, \mu)$ 上への掛け算作用素である. ここで $F \in C(\widehat{D}, B(\mathcal{K}))$ ($\widehat{D} \to B(\mathcal{K})$ の連続関数) による $L^2(\widehat{D}, \mathcal{K}, \mu)$ 上への掛け算作用素とは, Hilbert 空間 $L^2(\widehat{D}, \mathcal{K}, \mu)$ 上の有界線型作用素

$$\widehat{F} : L^2(\widehat{D}, \mathcal{K}, \mu) \ni \Psi(\cdot) \mapsto F(\cdot)\Psi(\cdot) \in L^2(\widehat{D}, \mathcal{K}, \mu)$$

のことである. $\widehat{D} \to B(\mathcal{K})$ の連続関数全体 $C(\widehat{D}, B(\mathcal{K}))$ は各点ごとの演算と sup ノルムにより明らかに C^*-環であり, C^*-環 $C(\widehat{D}, B(\mathcal{K}))$ の $L^2(\widehat{D}, \mathcal{K}, \mu)$ 上の掛け算作用素としての表現

$$C(\widehat{D}, B(\mathcal{K})) \ni F \mapsto \widehat{F} \in B(L^2(\widehat{D}, \mathcal{K}, \mu))$$

は, $L^2(\widehat{D}, \mathcal{K}, \mu)$ が定ベクトル関数を含むことから忠実 (単射) であるので, 定理 9.79 より, $C(\widehat{D}, B(\mathcal{K}))$ の元の sup ノルムは $L^2(\widehat{D}, \mathcal{K}, \mu)$ 上の掛け算作用素としての作用素ノルムと一致する. よって任意の $f_1, \cdots, f_n \in D$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j W(f_j) \otimes R(f_j) \right\| &= \left\| (1 \otimes \mathcal{F}) \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j W(f_j) \otimes R(f_j) \right) (1 \otimes \mathcal{F})^* \right\| \\ &= \sup_{\gamma \in \widehat{D}} \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j W(f_j)\langle f_j, \gamma\rangle \right\| \end{aligned} \tag{14.142}$$

が成り立つ. ここで任意の $f \in D$ に対し,

$$\gamma_f : D \ni g \mapsto e^{-i\mathrm{Im}(g|f)} \in \mathbb{T}$$

とおくと $\gamma_f \in \widehat{D}$ であり, $\{\gamma_f\}_{f \in D}$ は $\widehat{D}$ の部分群である. そして任意の $g \in D \backslash \{0\}$ に対し $\gamma_f(g) \neq 1$ なる $g \in D$ が存在する (例えば $g = \frac{f}{\|f\|^2}$) ので, 定理 12.151 より, $\{\gamma_f\}_{f \in D}$ は $\widehat{D}$ において稠密である. よって (14.142) より, 任意の有限個の $f_1, \cdots, f_n \in D$ と $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j W(f_j) \otimes R(f_j) \right\| &= \sup_{\gamma \in \widehat{D}} \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j W(f_j)\langle f_j, \gamma\rangle \right\| = \sup_{f \in D} \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j W(f_j)\langle f_j, \gamma_f\rangle \right\| \\ &= \sup_{f \in D} \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j W(f_j) e^{-i\mathrm{Im}(f_j|f)} \right\| \\ &= \sup_{f \in D} \left\| W(f) \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j W(f_j) \right) W(-f) \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j W(f_j) \right\| \end{aligned}$$

が成り立つ. これより全射等長線型同型写像

$$\pi : \mathrm{span}\{W(f) : f \in D\} \ni \sum_{j=1}^n \lambda_j W(f_j) \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j W(f_j) \otimes R(f_j) \in \mathrm{span}\{W(f) \otimes R(f) : f \in D\} \tag{14.143}$$

が定義できる. $(W(f))_{f\in D}$, $(W(f)\otimes R(f))_{f\in D}$ が Weyl 作用素族であることから, (14.143) の両辺の線型空間は $C^*(\{W(f) : f\in D\})$, $C^*(\{W(f)\otimes R(f) : f\in D\})$ の稠密な部分 $*$-環であり, π は等長な $*$-環同型写像である. よって π を $C^*(\{W(f) : f\in D\})$ 上に一意拡張したものが求める C^*-環同型写像となる. 一意性は稠密性より明らかである.

(2) 自然に,

$$\mathcal{K}\otimes\ell^2(D) = \bigoplus_{g\in D}\mathcal{K} = \left\{(\Psi(g))_{g\in D} : \sum_{g\in D}\|\Psi(g)\|^2 < \infty\right\}$$

とみなす (右辺は直和 Hilbert 空間である). そして $\mathcal{K}$ 上のユニタリ作用素の族 $(W(g))_{g\in D}$ の直和によってユニタリ作用素

$$U := \bigoplus_{g\in D} W(g) \in \mathcal{U}\left(\bigoplus_{g\in D}\mathcal{K}\right) = \mathcal{U}\left(\mathcal{K}\otimes\ell^2(D)\right)$$

を定義する. このとき, 任意の $f\in D$, 任意の $(\Psi(g))_{g\in D}\in\bigoplus_{g\in D}\mathcal{K} = \mathcal{K}\otimes\ell^2(D)$ に対し,

$$\begin{aligned}
&U^*(W(f)\otimes R(f))U(\Psi(g))_{g\in D} = U^*(W(f)\otimes R(f))(W(g)\Psi(g))_{g\in D}\\
&= U^*(W(f)W(g-f)\Psi(g-f))_{g\in D} = (W(-g)W(f)W(g-f)\Psi(g-f))_{g\in D}\\
&= (e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(g|f)}\Psi(g-f))_{g\in D} = (1\otimes w(f))(\Psi(g))_{g\in D}
\end{aligned}$$

であるから,

$$W(f)\otimes R(f) = U(1\otimes w(f))U^* \quad (\forall f\in D)$$

である.

(3)

$$B(\ell^2(D)) \ni A \mapsto 1\otimes A \in B(\mathcal{K}\otimes\ell^2(D))$$

は C^*-環 $B(\ell^2(D))$ の忠実表現である (定理 10.99 を参照) ので,

$$\pi_0 : C^*(\{w(f) : f\in D\}) \ni A \mapsto 1\otimes A \in C^*(\{1\otimes w(f) : f\in D\})$$

は C^*-環同型写像である. (1) における C^*-環同型写像を,

$$\pi_1 : C^*(\{W(f) : f\in D\}) \ni W(f) \mapsto W(f)\otimes R(f) \in C^*(\{W(f)\otimes R(f) : f\in D\})$$

とおく. (2) におけるユニタリ作用素 $U\in\mathcal{U}(\mathcal{K}\otimes\ell^2(D))$ に対し,

$$\pi_2 : C^*(\{W(f)\otimes R(f) : f\in D\}) \ni A \mapsto U^*AU \in C^*(\{1\otimes w(f) : f\in D\})$$

は C^*-環同型写像である. よって,

$$\pi := \pi_0^{-1}\pi_2\pi_1 : C^*(\{W(f) : f\in D\}) \ni W(f) \mapsto w(f) \in C^*(\{w(f) : f\in D\})$$

が求める C^*-環同型写像である. 一意性は $C^*(\{W(f) : f\in D\})$ における $\mathrm{span}\{W(f) : f\in D\}$ の稠密性による. □

定義 14.132 (CCR 環)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし, $\Phi_S(f)$ $(\forall f\in\mathcal{H})$ を Segal の場の作用素とする. このとき任意の線型部分空間 $D\subseteq\mathcal{H}$ に対し, $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ 上の Weyl 作用素族 $(e^{i\Phi_S(f)})_{f\in D}$ (命題 14.130) が生成する C^*-環

$$\mathrm{CCR}(D) := C^*\left(\left\{e^{i\Phi_S(f)} : f\in D\right\}\right) \subseteq B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$$

を D 上の CCR 環と言う.

定理 14.133 (CCR 環の表現定理)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $D\subseteq\mathcal{H}$ を線型部分空間とする.

(1) D 上で定義された任意の Weyl 作用素族 $(W(f))_{f\in D}$ に対し $(W(f))_{f\in D}$ が生成する C^*-環 $C^*(\{W(f) : f \in D\})$ は $\mathrm{CCR}(D)$ と同型, すなわち,

$$\mathrm{CCR}(D) \simeq C^*(\{W(f) : f \in D\})$$

であり, C^*-環同型写像で任意の $f \in D$ に対し $e^{i\Phi_S(f)}$ に $W(f)$ を対応させるようなものが一意存在する.

(2) $\mathrm{CCR}(D)$ は単純 C^*-環 (定義 14.29) である.

(3) $D' \subseteq \mathcal{H}$ を線型部分空間とし, $f_0 \in D'\backslash D$ が存在するとする. このとき,

$$d\left(e^{i\Phi_S(f_0)},\ \mathrm{CCR}(D)\right) := \inf\left\{\left\|e^{i\Phi_S(f_0)} - A\right\| : A \in \mathrm{CCR}(D)\right\} \geqslant 1$$

が成り立つ. 特に $\mathrm{CCR}(D') \neq \mathrm{CCR}(D)$ である.

証明. (1) $(e^{i\Phi_S(f)})_{f\in D}$, $(W(f))_{f\in D}$ はそれぞれ D 上で定義された Weyl 作用素族であるから, 補題 14.131 の (3) より,

$$\mathrm{CCR}(D) = C^*(\{e^{i\Phi_S(f)} : f \in D\}) \simeq C^*\left(\{W(f) : f \in D\}\right)$$

であり, C^*-環同型写像で任意の f に対し $e^{i\Phi_S(f)}$ と $W(f)$ を対応させるものが存在する. 一意性は $\mathrm{span}\{e^{i\Phi_S(f)} : f \in D\} \subseteq \mathrm{CCR}(D)$ の稠密性による.

(2) 定理 14.30 より C^*-環 $\mathrm{CCR}(D)$ の任意の表現 π が忠実であることを示せばよいが, $(\pi(e^{i\Phi_S(f)}))_{f\in D}$ は D 上で定義された $\mathcal{H}_\pi$ 上の Weyl 作用素族であるから (1) より π は忠実である.

(3) 命題 14.130 の (2) における $\mathcal{H}$ 上で定義された $\ell^2(\mathcal{H})$ 上の Weyl 作用素族 $(w(f))_{f\in\mathcal{H}}$ を考える. $f_0 \in D'\backslash D$ とし, $\Psi \in \ell^2(\mathcal{H})$ を $\mathrm{supp}(\Psi) \subseteq D$, $\|\Psi\|_2 = 1$ なるものとする. 任意の有限個の $f_1, \cdots, f_n \in D$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ を取る. このとき,

$$\mathrm{supp}(w(f_0)\Psi) \cap \mathrm{supp}(w(f_j)\Psi) = (\mathrm{supp}(\Psi) + f_0) \cap (\mathrm{supp}(\Psi) + f_j) \quad (j = 1, \cdots, n)$$

であるから,

$$\left\|\left(w(f_0) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w(f_j)\right)\Psi\right\|_2 \geqslant \|w(f_0)\Psi\|_2 = 1$$

である. よって,

$$\left\|w(f_0) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w(f_j)\right\| \geqslant 1$$

である. (1) より C^*-環同型写像

$$\pi : \mathrm{CCR}(\mathcal{H}) \ni e^{i\Phi_S(f)} \mapsto w(f) \in C^*(\{w(f) : f \in \mathcal{H}\})$$

が取れるので,

$$\begin{aligned}\left\|e^{i\Phi_S(f_0)} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{i\Phi_S(f_j)}\right\| &= \left\|\pi(e^{i\Phi_S(f_0)}) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \pi(e^{i\Phi_S(f_j)})\right\| \\ &\left\|w(f_0) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w(f_j)\right\| \geqslant 1\end{aligned}$$

が成り立つ. よって $\mathrm{span}\{e^{i\Phi_S(f)} : f \in D\}$ の $\mathrm{CCR}(D)$ における稠密性より,

$$\begin{aligned}d\left(e^{i\Phi_S(f_0)},\ \mathrm{CCR}(D)\right) &= \inf\left\{\left\|e^{i\Phi_S(f_0)} - A\right\| : A \in \mathrm{CCR}(D)\right\} \\ &= \inf\left\{\left\|e^{i\Phi_S(f_0)} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{i\Phi_S(f_j)}\right\| : n \in \mathbb{N}, f_1, \cdots, f_n \in D, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}\right\} \geqslant 1\end{aligned}$$

が成り立つ.

□

定義 14.134 (CAR 作用素族)**.** $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ を Hilbert 空間, $D \subseteq \mathcal{H}$ を線型部分空間とする.

$$D \ni f \mapsto A(f) \in B(\mathcal{K})$$

が有界反線型写像であり, 反交換子積 $[\cdot,\cdot]_-$ (定義 14.119) に関して,

$$[A(f), A(g)]_- = [A^*(f), A^*(g)]_- = 0, \ \ [A(f), A^*(g)]_- = (g \mid f) \ \ (\forall f, g \in D)$$

(ただし $A^*(f) = (A(f))^*$) が成り立つとき, $(A(f))_{f\in D}$ を D 上で定義された $\mathcal{K}$ 上の CAR 作用素族と呼ぶこととする.

命題 14.135. $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ を Hilbert 空間, $D \subseteq \mathcal{H}$ を線型部分空間とし, $(A(f))_{f\in D}$ を D 上で定義された $\mathcal{K}$ 上の CAR 作用素族とする. このとき,

$$\|A(f)\| = \|f\| \ \ (\forall f \in D)$$

が成り立つ. また $f \in D$ が単位ベクトルならば $A(f)$ は部分等長作用素であり,

$$A(f)A^*(f) = 1 - A^*(f)A(f)$$

が成り立つ.

証明. CAR 作用素族の定義 14.134 より,

$$A(f)A^*(f) + A^*(f)A(f) = \|f\|^2 \ \ (\forall f \in D) \tag{14.144}$$

であるから $A(f) = 0$ ならば $f = 0$ である. また CAR 作用素族の定義より $A(f)^2 = A^*(f)^2 = 0$ であるから (14.144) より,

$$(A^*(f)A(f))^2 = \|f\|^2 A^*(f)A(f) \ \ (\forall f \in D)$$

である. よって,

$$\|A(f)\|^2 = \|A^*(f)A(f)\| = \|f\|^2 \ \ (\forall f \in D)$$

が成り立つ. また f が単位ベクトルならば (14.144) より,

$$A(f)A^*(f) = \|f\|^2 - A^*(f)A(f) = 1 - A^*(f)A(f)$$

である. □

命題 14.136 (典型的な CAR 作用素族)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする.

(1) 反対称 Fock 空間 $\mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ 上の消滅作用素 (定義 14.117) の族 $(A_-(f))_{f\in\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ 上で定義された $\mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ 上の CAR 作用素族である.

(2) C を $\mathcal{H}$ 上の共役子 (定義 10.201) とし, 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し $\overline{f} := Cf$ とおき, $\mathcal{H}$ 上の任意の線型作用素 T に対し $\overline{T} := CTC$ とおく. そして ρ を $\mathcal{H}$ 上の非負縮小作用素[*324]とする. このとき,

$$A_{\rho,C}(f) := A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f, 0) + A_-^*(0, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f}) \in B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})) \ \ (\forall f \in \mathcal{H})$$

とおけば $(A_{\rho,C}(f))_{f\in\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ 上で定義された $\mathcal{F}_-(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ 上の CAR 作用素族である. また,

$$A_{\rho,C,\otimes}(f) := A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f) \otimes 1 + \Gamma_-(-1) \otimes A_-^*(\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f}) \in B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$$

とおけば $(A_{\rho,C,\otimes}(f))_{f\in\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ 上で定義された $\mathcal{F}_-(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ 上の CAR 作用素族である.

証明. (1) 定理 14.120 の (6) による.

[*324] ρ が $\mathcal{H}$ 上の非負縮小作用素であるとは $\rho \in B(\mathcal{H})_+$ かつ $\|\rho\| \leqslant 1$ であることを言う.

(2) 定理 14.120 の (6), (2) より $\mathcal{H} \ni f \mapsto A_{\rho,C}(f) \in B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}))$ は有界反線型写像である．定理 14.120 の (5) より任意の $f, g \in \mathcal{H}$ に対し，

$$[A_{\rho,C}(f), A_{\rho,C}(g)]_- = [A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f, 0), A_-^*(0, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}} \overline{g})]_- = 0$$

であり，

$$\begin{aligned}[A_{\rho,C}(f), A^*_{\rho,C}(g)]_- &= [A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f, 0), A_-^*((1-\rho)^{\frac{1}{2}} g, 0)]_- + [A_-^*(0, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}} \overline{f}), A_-(0, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}} \overline{g})]_- \\ &= ((1-\rho)g \mid f) + (\overline{\rho}\overline{f} \mid \overline{g}) = ((1-\rho)g \mid f) + (\rho g \mid f) = (g \mid f)\end{aligned}$$

である．よって $(A_{\rho,C}(f))_{f\in\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ 上で定義された $\mathcal{F}_-(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ 上の CAR 作用素族である．定理 14.127 におけるユニタリ作用素

$$U_- : \mathcal{F}_-(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_-(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}_-(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$$

に対し，定理 14.127 の (1) より，

$$U_-^* A_{\rho,C}(f) U_- = A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f) \otimes 1 + \Gamma_-(-1) \otimes A_-^*(\overline{\rho}^{\frac{1}{2}} \overline{f}) = A_{\rho,C,\otimes}(f) \ \ (\forall f \in \mathcal{H})$$

であるから，$(A_{\rho,C,\otimes}(f))_{f\in\mathcal{H}}$ は $\mathcal{F}_-(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ 上の CAR 作用素族である．

□

定義 14.137. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$(A_-(f))_{f\in\mathcal{H}}$ を $\mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ 上の消滅作用素族 (定義 14.117) とする．線型部分空間 $D \subseteq \mathcal{H}$ に対し，

$$\mathrm{CAR}(D) := C^*(\{A_-(f) : f \in D\}) \subseteq B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$$

を D 上の CAR 環と言う．

補題 14.138. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$D \subseteq \mathcal{H}$ を $N \in \mathbb{N}$ 次元部分空間とし，$(A(f))_{f\in D}$ を D 上で定義された $\mathcal{K}$ 上の CAR 作用素族とする．このとき C^*-環として，

$$\mathrm{CAR}(D) \simeq C^*(\{A(f) : f \in D\}) \simeq M_{2^N \times 2^N}(\mathbb{C})$$

であり，C^*-環同型写像

$$\pi : \mathrm{CAR}(D) \to C^*(\{A(f) : f \in D\})$$

で，

$$\pi(A_-(f)) = A(f) \ \ (\forall f \in D)$$

を満たすものが唯一つ存在する．

証明. D の CONS を $(e_1, \cdots, e_N)$ とおき，各 $k \in \{1, \cdots, N\}$ に対し，

$$V_k := \prod_{j=1}^{k-1} (A(e_j)A^*(e_j) - A^*(e_j)A(e_j)),$$

$$E^k_{1,1} := A(e_k)A^*(e_k), \ \ E^k_{1,2} := V_k A(e_k), \ \ E^k_{2,1} := V_k A^*(e_k), \ \ E^k_{2,2} := A^*(e_k)A(e_k)$$

とおく．すると命題 14.135 より，

$$\begin{aligned}&E^k_{i,j} E^k_{l,m} = \delta_{j,l} E^k_{i,m}, \ \ {E^k_{i,j}}^* = E^k_{j,i}, \ \ E^k_{i,j} E^{k'}_{l,m} = E^{k'}_{l,m} E^k_{i,j}, \\ &(\forall k, k' \in \{1, \cdots, N\} : k \neq k', \ \forall i, j, l, m \in \{1, 2\})\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．よって任意の $I = (i_1, \cdots, i_N), J = (j_1, \cdots, j_N) \in \{1, 2\}^N$ に対し，

$$E_{I,J} := E^1_{i_1,j_1} \cdots E^N_{i_N,j_N}$$

とおくと，

$$E_{I,J} E_{L,M} = \delta_{J,L} E_{I,M}, \ \ E^*_{I,J} = E_{J,I} \ \ (\forall I, J, L, M \in \{1, 2\}^N) \tag{14.145}$$

が成り立つ．命題 14.135 より，

$$E^k_{1,1}+E^k_{2,2}=1,\ \ V_k=\prod_{j=1}^{k-1}(E^k_{1,1}-E^k_{2,2}),\ \ A(e_k)=V^kE^k_{1,2}\ \ (\forall k\in\{1,\cdots,N\}) \tag{14.146}$$

であるから，

$$\begin{aligned}C^*(\{A(f):f\in D\})&=C^*(\{A(e_k):k\in\{1,\cdots,N\}\})\\&=C^*(\{E^k_{i,j}:k\in\{1,\cdots,N\},i,j\in\{1,2\}\})\\&=C^*(\{E_{I,J}:I,J\in\{1,2\}^N\})\\&=\mathrm{span}\{E_{I,J}:I,J\in\{1,2\}^N\}\end{aligned}$$

が成り立つ．$C^*(\{A(f):f\in D\})\neq\{0\}$[*325]であるから，(14.145) より任意の $I,J\in\{1,2\}^N$ に対し $E_{I,J}\neq 0$ であり，$(E_{I,J})_{I,J\in\{1,2\}^N}$ は $\mathrm{span}\{E_{I,J}:I,J\in\{1,2\}^N\}$ の基底である．そして (14.145) より $(E_{I,J})_{I,J\in\{1,2\}^N}$ の行列要素とみなせるので，

$$C^*(\{A(f):f\in D\})=C^*(\{E_{I,J}:I,J\in\{1,2\}^N\})\simeq M_{2^N\times 2^N}(\mathbb{C})$$

である．今，$\mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ 上の CAR 作用素族 $(A_-(f))_{f\in D}$ に対し，上と同様にして行列要素 $(E_{-,I,J})_{I,J\in\{1,2\}^N}$ を定義する．すると，

$$\mathrm{CAR}(D)=C^*(\{A_-(f):f\in D\})=\mathrm{span}\{E_{-,I,J}:I,J\in\{1,2\}^N\} \tag{14.147}$$

であり，

$$\pi:\mathrm{CAR}(D)\ni\sum_{I,J\in\{1,2\}^N}\lambda_{I,J}E_{-,I,J}\mapsto\sum_{I,J\in\{1,2\}^N}\lambda_{I,J}E_{I,J}\in C^*(\{A(f):f\in D\})$$

は C^*-環同型写像であるから，(14.146) より，

$$\pi(A_-(e_k))=A(e_k)\ \ (\forall k\in\{1,\cdots,N\})$$

が成り立つ．よって π が求める C^*-環同型写像である．一意性は (14.147) より，

$$\begin{aligned}&\mathrm{CAR}(D)=\mathrm{span}\{E_{-,I,J}:I,J\in\{1,2\}^N\}\\&=\mathrm{span}\{A^*_-(f_1)\cdots A^*_-(f_N)A_-(g_1)\cdots A_-(g_M):N,M\in\mathbb{Z}_+,f_1,\cdots,f_N,g_1,\cdots,g_M\in D\}\end{aligned}$$

であることによる． □

定理 14.139 (CAR 環の表現定理)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$D\subseteq\mathcal{H}$ を線型部分空間とする．このとき，

(1) $\mathrm{CAR}(D)=\mathrm{CAR}(\overline{D})$ が成り立つ．

(2) D 上で定義された任意の CAR 作用素族 $(A(f))_{f\in D}$ に対し $(A(f))_{f\in D}$ が生成する C^*-環 $C^*(\{A(f):f\in D\})$ は $\mathrm{CAR}(D)$ と同型，すなわち，

$$\mathrm{CAR}(D)\simeq C^*(\{A(f):f\in D\})$$

であり，C^*-環同型写像で任意の $f\in D$ に対し $A_-(f)$ を $A(f)$ にさせるようなものが一意存在する．

(3) $\mathrm{CAR}(D)$ は単純 C^*-環である．

証明． (1) $\mathcal{H}\ni f\mapsto A_-(f)\in B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$ が有界反線型写像であることより明らかである．

(2) $A(f)_{f\in D}$ を D 上で定義された Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ 上の CAR 作用素族とする．$D\ni f\mapsto A(f)\in B(\mathcal{K})$ は有界反線型写像であるから $(A(f))_{f\in D}$ は $\overline{D}$ 上で定義された $\mathcal{K}$ 上の CAR 作用素族 $(A(f))_{f\in\overline{D}}$ に一意拡張できる．Hilbert 空間 $\overline{D}$ の CONS を $\{e_j\}_{j\in J}$ とおき，J の空でない有限部分集合全体を $\mathcal{F}_J$ とおく．

$$D_F:=\mathrm{span}\{e_j:j\in F\}\subseteq\overline{D}\ \ (\forall F\in\mathcal{F}_J)$$

[*325] $\|A(e_j)\|=\|e_j\|=1$ (命題 14.135) であることに注意．

とおくと, 補題 14.138 より, 各 $F \in \mathcal{F}_J$ に対し C^*-環同型写像

$$\pi_F : \mathrm{CAR}(D_F) \to C^*(\{A(f) : f \in D_F\}), \quad \pi_F(A_-(f)) = A(f) \quad (\forall f \in D_F) \tag{14.148}$$

が定まる. $F, F' \in \mathcal{F}_J$ が $F \subseteq F'$ を満たすならば, 明らかに,

$$\mathrm{CAR}(D_F) \subseteq \mathrm{CAR}(D_{F'}), \quad \pi_{F'}|_{\mathrm{CAR}(D_F)} = \pi_F$$

であるから, 写像

$$\pi : \bigcup_{F \in \mathcal{F}_J} \mathrm{CAR}(D_F) \to \bigcup_{F \in \mathcal{F}_J} C^*(\{A(f) : f \in D_F\})$$

で,

$$\pi|_{\mathrm{CAR}(D_F)} = \pi_F \quad (\forall F \in \mathcal{F}_J)$$

なるものが定義でき, 各 π_F が等長 $*$-環同型写像である[*326]ことから π も等長 $*$-環同型写像である. そして $\{e_j\}_{j \in J}$ は $\overline{D}$ の CONS であるから,

$$\mathrm{CAR}(D) = \mathrm{CAR}(\overline{D}) = \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}_J} \mathrm{CAR}(D_F)},$$

$$C^*(\{A(f) : f \in D\}) = C^*(\{A(f) : f \in \overline{D}\}) = \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}_J} C^*(\{A(f) : f \in D_F\})}$$

である. よって π を $\mathrm{CAR}(D) = \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}_J} \mathrm{CAR}(D_F)}$ 上に一拡張したもの (そのまま π と表す) は, $\mathrm{CAR}(D)$ から $C^*(\{A(f) : f \in D\}) = \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}_J} C^*(\{A(f) : f \in D_F\})}$ への C^*-環同型写像である. $\{e_j\}_{j \in J}$ が $\overline{D}$ の CONS であることから, 任意の $f \in D$ に対し, ネット $(f_F)_{F \in \mathcal{F}_J}$ で,

$$f_F \in D_F \quad (\forall F \in \mathcal{F}_J), \quad \lim_{F \to J} \|f_F - f\| = 0$$

なるものが取れる. よって (14.148) より,

$$\pi(A_-(f)) = \lim_{F \to J} \pi(A_-(f_F)) = \lim_{F \to J} \pi_F((A_-(f_F))) = \lim_{F \to J} A(f_F) = A(f)$$

であるので π が求める C^*-環同型写像である. 一意性は $\mathrm{CAR}(D)$ における

$$\mathrm{span}\{A_-^*(f_1) \cdots A_-^*(f_N) A_-(g_1) \cdots A_-(g_M) : N, M \in \mathbb{Z}_+, f_1, \cdots, f_N, g_1, \cdots, g_M \in D\}$$

の稠密性による.

(3) 定理 14.30 より $\mathrm{CAR}(D)$ の任意の表現 π が忠実であることを示せばよいが, $(\pi(A_-(f)))_{f \in D}$ は D 上で定義された $\mathcal{H}_\pi$ 上の CAR 作用素族であるので, (2) より π は忠実である.

□

14.9 自由 Bose 粒子系, 自由 Fermi 粒子系の粒子数密度と準自由状態

定理 14.140. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする.

(1) $\mathcal{H}$ 上の任意の非負自己共役作用素 ρ に対し, CCR 環 $\mathrm{CCR}(D(\rho^{\frac{1}{2}}))$ (定義 14.132) 上の状態 (定義 14.25) $\varphi_\rho : \mathrm{CCR}(D(\rho^{\frac{1}{2}})) \to \mathbb{C}$ で,

$$\varphi_\rho(e^{i\Phi_S(f)}) = e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho+1)^{\frac{1}{2}} f\|^2} \quad (\forall f \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

を満たすものが唯一つ存在する.

[*326] 定理 9.79 より C^*-環同型写像はノルムを保存する.

(2) $\mathcal{H}$ 上の任意の非負縮小作用素 ρ に対し, CAR 環 $\mathrm{CAR}(\mathcal{H})$ (定義 14.137) 上の状態 $\varphi_\rho : \mathrm{CAR}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ で,

$$\varphi_\rho(A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_M)) = \delta_{N,M}\mathrm{det}((\rho f_i \mid g_j))_{i,j}$$
$$(\forall N, M \in \mathbb{Z}_+, \forall f_1, \cdots, f_N, g_1, \cdots, g_M \in \mathcal{H})$$

を満たすものが唯一つ存在する.

証明. (1) 一意性は $\mathrm{span}\{e^{i\Phi_S(f)} : f \in D(\rho^{\frac{1}{2}})\}$ が $\mathrm{CCR}(D(\rho^{\frac{1}{2}}))$ において稠密であることによる. 存在を示す. 命題 14.130 の (4) における Weyl 作用素族

$$D(\rho^{\frac{1}{2}}) \ni f \mapsto \exp\left(\Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}\overline{f}}\right)\right) \in \mathcal{U}(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}))$$

を考えると, 定理 14.133 より, $\mathrm{CCR}(D(\rho^{\frac{1}{2}}))$ の $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ 上への忠実表現

$$\pi_\rho : \mathrm{CCR}(D(\rho^{\frac{1}{2}})) \to B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}))$$

で,

$$\pi_\rho(e^{i\Phi_S(f)}) = \exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}\overline{f}}\right)\right) \quad (\forall f \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

を満たすものが唯一つ存在する. そこで Fock 真空 (定義 14.111) $\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \ni \mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ に対し,

$$\varphi_\rho(A) := (\pi_\rho(A)\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \mid \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}) \quad (\forall A \in \mathrm{CCR}(D(\rho^{\frac{1}{2}})))$$

として $\mathrm{CCR}(D(\rho^{\frac{1}{2}}))$ 上の状態 φ_ρ を定義すると, 定理 14.124 の (4) より,

$$\begin{aligned}\varphi_\rho(e^{i\Phi_S(f)}) &= \left(\exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}\overline{f}}\right)\right)\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \mid \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}\right)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{4}\left(\|(1+\rho)^{\frac{1}{2}}f\|^2 + \|\rho^{\frac{1}{2}}f\|^2\right)\right) \quad (\forall f \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $D(\rho)$ は $\rho^{\frac{1}{2}}$ の芯である (定理 10.28) ので,

$$\|(1+\rho)^{\frac{1}{2}}f\|^2 + \|\rho^{\frac{1}{2}}f\|^2 = \|(2\rho+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2 \quad (\forall f \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

である*327から,

$$\varphi_\rho(e^{i\Phi_S(f)}) = e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2} \quad (\forall f \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

である. よって存在が示せた.

(2) 一意性は,

$$\mathrm{span}\{A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_M) : N, M \in \mathbb{Z}_+, f_1, \cdots, f_N, g_1, \cdots, g_M \in \mathcal{H}\}$$

が $\mathrm{CAR}(\mathcal{H})$ において稠密であることによる. 存在を示す. 命題 14.136 の (2) における CAR 作用素族

$$\mathcal{H} \ni f \mapsto A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f, 0) + A_-^*(0, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}\overline{f}}) \in B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}))$$

を考えると, 定理 14.139 より, $\mathrm{CAR}(\mathcal{H})$ の $\mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ 上への忠実表現 π_ρ で,

$$\pi_\rho(A_-(f)) = A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f, 0) + A_-^*(0, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}\overline{f}}) \quad (\forall f \in \mathcal{H})$$

を満たすものが唯一つ存在する. そこで Fock 真空 $\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \in \mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ に対し,

$$\varphi_\rho(A) := (\pi_\rho(A)\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \mid \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}) \quad (\forall A \in \mathrm{CAR}(\mathcal{H}))$$

として $\mathrm{CAR}(\mathcal{H})$ 上の状態 φ_ρ を定義すれば, 任意の $N \in \mathbb{Z}_+$, 任意の $f_1, \cdots, f_N \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\pi_\rho(A_-(f_1)\cdots A_-(f_N))\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} = A_-^*(0, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}\overline{f_1}})\cdots A_-^*(0, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}\overline{f_N}})\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$$

*327 命題 14.130 の (4) の証明と同様に議論により分かる.

であるから, 補題 14.126 より, 任意の $N,M\in\mathbb{Z}_+$, 任意の $f_1,\cdots,f_N,g_1,\cdots,g_M\in\mathcal{H}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\varphi(A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_M))\\&=(\pi_\rho(A_-(g_1))\cdots\pi_\rho(A_-(g_M))\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}\mid\pi_\rho(A_-(f_1))\cdots\pi_\rho(A_-(f_N))\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}})\\&=(A_-^*(0,\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{g_1})\cdots A_-^*(0,\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{g_M})\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}\mid A_-^*(0,\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f_1})\cdots A_-^*(0,\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f_N})\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}})\\&=\delta_{N,M}\det((\overline{\rho g_i}\mid\overline{f_j}))_{i,j}=\delta_{N,M}\det((\rho f_i\mid g_j))_{i,j}\end{aligned}$$

である. よって存在が示せた.

□

定義 14.141 (1 粒子 Hamiltonian と逆温度に対する自由 Bose (Fermi) 粒子系の粒子数密度と準自由状態)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, H を $\mathcal{H}$ 上の単射非負自己共役作用素, β を正数とし, $\mathcal{H}$ 上の単射非負自己共役作用素*[328]

$$\rho_{H,\beta,\pm}=(e^{\beta H}\mp 1)^{-1}$$

を定義する. $\rho_{H,\beta,+}=(e^{\beta H}-1)^{-1}$ を 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Bose 粒子系の粒子数密度と言い, $\rho_{H,\beta,-}=(e^{\beta H}+1)^{-1}$ を 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Fermi 粒子系の粒子数密度と言う. 定理 14.140 の (1) より CCR 環 $\mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta,+}^{\frac{1}{2}}))$ 上の状態 $\varphi_{H,\beta,+}:\mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta,+}^{\frac{1}{2}}))\to\mathbb{C}$ で,

$$\varphi_{H,\beta,+}(e^{i\Phi_S(f)})=e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho_{H,\beta,+}+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2}\quad(\forall f\in D(\rho_{H,\beta,+}^{\frac{1}{2}}))$$

を満たすものが唯一つ存在する. $\varphi_{H,\beta,+}$ を 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Bose 粒子系の準自由状態と言う. また $\rho_{H,\beta,-}$ が縮小作用素であること*[329]と定理 14.140 の (2) より, CAR 環 $\mathrm{CAR}(\mathcal{H})$ 上の状態 $\varphi_{H,\beta,-}:\mathrm{CAR}(\mathcal{H})\to\mathbb{C}$ で,

$$\varphi_{H,\beta,-}:\mathrm{CAR}(\mathcal{H})\to\mathbb{C},\quad A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_M)\mapsto\delta_{N,M}\det((\rho_{H,\beta,-}f_i\mid g_j))_{i,j}$$

を満たすものが唯一つ存在する. $\varphi_{H,\beta,-}$ を 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Fermi 粒子系の準自由状態と言う.

定理 14.142 (準自由状態と Gibbs 状態)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, H を $\mathcal{H}$ 上の単射非負自己共役作用素, β を正数とし,

$$e^{-\beta H}\in B^1(\mathcal{H})$$

が成り立つと仮定する. 従って定理 14.116 の (3) より,

$$e^{-\beta d\Gamma_\pm(H)}\in B^1(\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}))$$

である. そこで $(d\Gamma_\pm(H),\beta)$ に対する Gibbs 状態 (定義 14.95) を,

$$\varphi_{\beta,\pm}:B(\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}))\ni A\mapsto\frac{1}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta d\Gamma_\pm(H)})}\mathrm{Tr}(Ae^{-\beta d\Gamma_\pm(H)})\in\mathbb{C}$$

とおく. また 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Bose (Fermi) 粒子系の粒子数密度を,

$$\rho_{\beta,\pm}:=(e^{\beta H}\mp 1)^{-1}=(1\mp e^{-\beta H})^{-1}e^{-\beta H}$$

とおく. このとき,

(1) $\rho_{\beta,\pm}\in B^1(\mathcal{H})$ が成り立つ.

(2) $\varphi_{\beta,+}$ は 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Bose 粒子系の準自由状態 (定義 14.141) である.

(3) $\varphi_{\beta,-}$ は 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Fermi 粒子系の準自由状態 (定義 14.141) である.

*328 定理 10.68 の (3) より $\mathrm{Ker}(e^{\beta H}-1)=\mathrm{Ker}(H)=\{0\}$ であることに注意.

*329 Borel 関数カルキュラスのスペクトルの性質 (定理 10.68 の (6)) より $\sigma(\rho_{H,\beta,-})=\sigma((e^{\beta H}+1)^{-1})\subseteq[0,1]$ であるから $\rho_{H,\beta,-}$ は縮小作用素である.

証明. (1) $e^{-\beta H} \in B^1(\mathcal{H})$ であるから命題 10.127 の (2) より H のスペクトル $\sigma(H)$ は離散固有値のみからなる．そして H は単射非負自己共役作用素であるから，

$$\lambda_1 := \min(\sigma(H)) > 0$$

である．よって定理 10.68 の (6) より，

$$\sigma((1-e^{-\beta H})^{-1}) \subseteq [0, (1-e^{-\beta\lambda_1})^{-1}]$$

であるから，$(1-e^{-\beta H})^{-1} \in B(\mathcal{H})$ である．$B^1(\mathcal{H})$ は $B(\mathcal{H})$ のイデアルである (命題 10.147) から，

$$\rho_{\beta,\pm} = (1 \mp e^{-\beta H})^{-1}e^{-\beta H} \in B(\mathcal{H})B^1(\mathcal{H}) = B^1(\mathcal{H})$$

である．

(2) 定理 14.140 より，

$$\varphi_{\beta,+}(e^{i\Phi_S(f)}) = e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2} \quad (\forall f \in \mathcal{H}) \tag{14.149}$$

が成り立つことを示せばよい．任意の $\beta' \in (\beta,\infty)$ に対し $e^{-\beta' H} \leqslant e^{-\beta H}$ である[*330]から $\mathrm{Tr}(e^{-\beta' H}) \leqslant \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}) < \infty$ である．よって定理 14.116 の (3) より $e^{-\beta' d\Gamma_+(H)} \in B^1(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$ (従って $e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)} \in B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$) であるから，$(d\Gamma_+(H), \beta')$ に対する Gibbs 状態 (定義 14.95)

$$\varphi_{\beta',+} : B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H})) \ni A \mapsto \frac{1}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta' d\Gamma_+(H)})}\mathrm{Tr}(Ae^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) \in \mathbb{C}$$

が定義できる．Lebesgue 優収束定理より Hilbert-Schmidt クラス $B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$ において，

$$\lim_{\beta' \to \beta+0} e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)} = e^{-\frac{\beta}{2}d\Gamma_+(H)}$$

が成り立つ[*331]ので，任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(e^{i\Phi_S(f)}e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}\right) &= \mathrm{Tr}\left(e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)}e^{i\Phi_S(f)}e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)}\right) \\
&= \left(e^{i\Phi_S(f)}e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)} \mid e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)}\right)_{\text{H-S}} \\
&\to \left(e^{i\Phi_S(f)}e^{-\frac{\beta}{2}d\Gamma_+(H)} \mid e^{-\frac{\beta}{2}d\Gamma_+(H)}\right)_{\text{H-S}} \\
&= \mathrm{Tr}\left(e^{i\Phi_S(f)}e^{-\beta d\Gamma_+(H)}\right) \quad (\beta' \to \beta+0)
\end{aligned}$$

が成り立つ (最初の等号でトレースの性質 (命題 10.152) を用いた)．また任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し Lebesgue 優収束定理より，

$$\begin{aligned}
\|(2\rho_{\beta',+}+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2 &= ((2\rho_{\beta',+}+1)f \mid f) = \left(\left((1-e^{-\beta' H})^{-1}(1+e^{-\beta' H})\right)f \mid f\right) \\
&= \int_{\sigma(H)} \frac{1+e^{-\beta'\lambda}}{1-e^{-\beta'\lambda}}dE_{H,f,f}(\lambda) \to \int_{\sigma(H)} \frac{1+e^{-\beta\lambda}}{1-e^{-\beta\lambda}}dE_{H,f,f}(\lambda) \\
&= \|(2\rho_{\beta,+}+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2 \quad (\beta' \to \beta+0)
\end{aligned}$$

が成り立つ．これより，任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し，

$$\lim_{\beta' \to \beta+0} \varphi_{\beta',+}(e^{i\Phi_S(f)}) = \varphi_{\beta,+}(e^{i\Phi_S(f)}),$$

$$\lim_{\beta' \to \beta+0} e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho_{\beta',+}+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2} = e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho_{\beta,+}+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2}$$

[*330] 任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し $(e^{-\beta' H}v \mid v) = \int_{\sigma(H)} e^{-\beta'\lambda}dE_{H,v,v}(\lambda) \leqslant \int_{\sigma(H)} e^{-\beta\lambda}dE_{H,v,v}(\lambda) = (e^{-\beta H}v \mid v)$ であることによる．

[*331] $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ の CONS とすると，$\|e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)} - e^{-\frac{\beta}{2}d\Gamma_+(H)}\|_{\text{H-S}}^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}\|(e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)} - e^{-\frac{\beta}{2}d\Gamma_+(H)})e_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\sigma(d\Gamma_+(H))}|e^{-\frac{\beta}{2}\lambda} - e^{-\frac{\beta'}{2}\lambda}|^2 dE_{d\Gamma_+(H),e_n,e_n}(\lambda)$ であり，Lebesgue 優収束定理よりこれは $\beta' \to \beta+0$ で 0 に収束する．

が成り立つ．よって (14.149) を示すには，任意の $\beta' \in (\beta, \infty)$ を取り固定し，

$$\varphi_{\beta',+}(e^{i\Phi_S(f)}) = e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho_{\beta',+}+1)^{\frac{1}{2}} f\|^2} \quad (\forall f \in \mathcal{H}) \tag{14.150}$$

が成り立つことを示せばよい．

$$\varepsilon := \beta' - \beta > 0$$

とおく．任意の $f \in \mathcal{H}, N \in \mathbb{Z}_+, \Psi_N \in \Theta_{N,+}(\bigotimes^N \mathcal{H})$ に対し，14.115 の (4) と命題 14.118 の (1), (2) より，

$$\begin{aligned}\|A_+^\sharp(f)e^{-\frac{\varepsilon}{2}d\Gamma_+(H)}\Psi_N\| &= \|A_+^\sharp(f)\Gamma_+(e^{-\frac{\varepsilon}{2}H})\Psi_N\| \leqslant \sqrt{N+1}\|f\|\|\Gamma_+(e^{-\frac{\varepsilon}{2}H})\Psi_N\| \\ &\leqslant \sqrt{N+1}e^{-N\frac{\varepsilon}{2}\lambda_1}\|f\|\|\Psi_N\|\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $A_+^\sharp(f)$ は $A_+^*(f)$ か $A_+(f)$ であり，$\lambda_1 = \min(\sigma(H)) > 0$ である．

$$\sup_{N\in\mathbb{Z}_+} \sqrt{N+1}e^{-N\frac{\varepsilon}{2}\lambda_1}\|f\| < \infty$$

であるから，$A_+^\sharp(f)e^{-\frac{\varepsilon}{2}d\Gamma_+(H)}$ は有限粒子空間 $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ 上で有界であり，$A_+^\sharp(f)e^{-\frac{\varepsilon}{2}d\Gamma_+(H)}$ は閉作用素なので，$A_+^\sharp(f)e^{-\frac{\varepsilon}{2}d\Gamma_+(H)} \in B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$ である．ここで $e^{-\frac{\beta}{2}d\Gamma_+(H)} \in B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$ であり，$B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$ は $B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$ のイデアルである (命題 10.148) から，

$$A_+^\sharp(f)e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)} = \left(A_+^\sharp(f)e^{-\frac{\varepsilon}{2}d\Gamma_+(H)}\right)e^{-\frac{\beta}{2}d\Gamma_+(H)} \in B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H})) \quad (\forall f \in \mathcal{H})$$

であり，従って，

$$\Phi_S(f)e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_+(f) + A_+^*(f))e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)} \in B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H})) \quad (\forall f \in \mathcal{H}) \tag{14.151}$$

が成り立つ．定理 14.120 の (5) より，

$$\begin{aligned}e^{i\Phi_S(f)}A_+^*(g) &= \frac{i}{\sqrt{2}}(g \mid f)e^{i\Phi_S(f)} + A_+^*(g)e^{i\Phi_S(f)} \quad (\forall f, g \in \mathcal{H}), \\ e^{i\Phi_S(f)}A_+(g) &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(f \mid g)e^{i\Phi_S(f)} + A_+(g)e^{i\Phi_S(f)} \quad (\forall f, g \in \mathcal{H})\end{aligned}$$

であるから，命題 14.118 の (1), (2) より，

$$\begin{aligned}e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)}A_+^*(g) &= \Gamma_+(e^{-\frac{\beta'}{2}H})A_+^*(g) \subseteq A_+^*(e^{-\frac{\beta'}{2}H}g)e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)} \quad (\forall g, \in \mathcal{H}), \\ e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)}A_+(g) &= \Gamma_+(e^{-\frac{\beta'}{2}H})A_+(e^{\frac{\beta'}{2}}g)e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)} \quad (\forall g \in D(e^{\frac{\beta'}{2}H}))\end{aligned}$$

が成り立つ．よってトレースの性質 (命題 10.152) より，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}A_+^*(g)e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}}(g \mid f)\mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) + \mathrm{Tr}(A_+^*(e^{-\frac{\beta'}{2}H}g)e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)}e^{i\Phi_S(f)}e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)}) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}}(g \mid f)\mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) + \mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}A_+^*(e^{-\beta' H}g)e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) \quad (\forall f, g \in \mathcal{H}),\end{aligned} \tag{14.152}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}A_+(g)e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(f \mid g)\mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) + \mathrm{Tr}(A_+(e^{\frac{\beta'}{2}H}g)e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)}e^{i\Phi_S(f)}e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)}) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(f \mid g)\mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) + \mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}A_+(e^{\beta' H}g)e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) \quad (\forall f \in \mathcal{H}, \forall g \in D(e^{\beta' H}))\end{aligned} \tag{14.153}$$

が成り立つ. (14.152) を整理して,

$$\mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}A_+^*((1-e^{-\beta' H})g)e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) = \frac{i}{\sqrt{2}}(g \mid f)\mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) \ \ (\forall f, g \in \mathcal{H}) \tag{14.154}$$

を得て, (14.153) を整理して,

$$\mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}A_+((e^{\beta' H}-1)g)e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) = \frac{i}{\sqrt{2}}(f \mid g)\mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) \ \ (\forall f \in \mathcal{H}, \forall g \in D(e^{\beta' H})) \tag{14.155}$$

を得る. ここで,

$$(1-e^{-\beta' H})^{-1} = \rho_{\beta',+}+1, \ \ (e^{\beta' H}-1)^{-1} = \rho_{\beta',+}$$

であるから, (14.154), (14.155) より, 任意の $f, g \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}A_+^*(g)e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) = \frac{i}{\sqrt{2}}((\rho_{\beta',+}+1)g \mid f)\mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) \ \ (\forall f, g \in \mathcal{H}) \\
&= \mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}A_+(g)e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) = \frac{i}{\sqrt{2}}(f \mid \rho_{\beta',+}g)\mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) \ \ (\forall f, g \in \mathcal{H})
\end{aligned} \tag{14.156}$$

が成り立つ. 任意の $f \in \mathcal{H}$ と任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し, (14.156) の 2 つの式において f を tf, g を f とし, 辺々足し合わせると,

$$\mathrm{Tr}(e^{it\Phi_S(f)}\Phi_S(f)e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) = \frac{it}{2}((2\rho_{\beta',+}+1)f \mid f)\mathrm{Tr}(e^{it\Phi_S(f)}e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) \tag{14.157}$$

を得る. 今, 任意の $f \in \mathcal{H}$ を取り固定し,

$$F(t) := \mathrm{Tr}(e^{it\Phi_S(f)}e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) \ \ (\forall t \in \mathbb{R})$$

とおく. (14.151) より $\Phi_S(f)e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)} \in B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$ であるから, Lebesgue 優収束定理より, $B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$ において,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^{it\Phi_S(f)}-1)e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)} = i\Phi_S(f)e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)}$$

が成り立つ.*332 よって,

$$\frac{dF}{dt}(t) = i\mathrm{Tr}(e^{it\Phi_S(f)}\Phi_S(f)e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) \ \ (\forall t \in \mathbb{R})$$

であるので, (14.157) より,

$$\frac{dF}{dt}(t) = -\frac{t}{2}((2\rho_{\beta',+}+1)f \mid f)F(t) = -\frac{t}{2}\|(2\rho_{\beta',+}+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2F(t) \ \ (\forall t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. ゆえに,

$$F(t) = e^{-\frac{t^2}{4}\|(2\rho_{\beta'}+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2}F(0) \ \ (\forall t \in \mathbb{R})$$

であるから,

$$\varphi_{\beta',+}(e^{i\Phi_S(f)}) = \frac{1}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta' d\Gamma_+(H)})}\mathrm{Tr}(e^{i\Phi_S(f)}e^{-\beta' d\Gamma_+(H)}) = \frac{F(1)}{F(0)} = e^{-\frac{t^2}{4}\|(2\rho_{\beta'}+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2}$$

である. よって (14.150) が成り立つ.

(3) 定理 14.140 より, 任意の $N, M \in \mathbb{Z}_+$ と任意の $f_1, \cdots, f_N, g_1, \cdots, g_M \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\varphi_{\beta,-}(A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_M)) = \delta_{N,M}\det((\rho f_i \mid g_j))_{i,j}$$

が成り立つことを示せばよい. 任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ に対し N 粒子空間 $\Theta_{N,-}(\bigotimes^N \mathcal{H})$ は $e^{-\beta d\Gamma_-(H)} = \Gamma_-(e^{-\beta H})$ の作用に対して不変であるので, $N \neq M$ ならば, 任意の $f_1, \cdots, f_N, g_1, \cdots, g_M \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(A_-(g_1)\cdots A_-(g_M)\Psi \mid A_-(f_1)\cdots A_-(f_N)\Psi) = 0 \ \ (\forall \Psi \in \mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$$

*332 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ の CONS とすると, $\|\left(\frac{1}{it}(e^{i\Phi_S(f)}-1)-\Phi_S(f)\right)e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)}\|_{\text{H-S}}^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}\|\left(\frac{1}{it}(e^{i\Phi_S(f)}-1)-\Phi_S(f)\right)e^{-\frac{\beta'}{2}d\Gamma_+(H)}e_n\|^2$ であり, Lebesgue 優収束定理よりこれは $t \to 0$ で 0 に収束する.

である. よって $N \neq M$ ならば,

$$\begin{aligned}&\varphi_{\beta,-}(A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_M))\\&=\mathrm{Tr}(A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_M)e^{-\beta d\Gamma_-(H)})\\&=\mathrm{Tr}(e^{-\frac{\beta}{2}d\Gamma_-(H)}A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_M)e^{-\frac{\beta}{2}d\Gamma_-(H)})=0\end{aligned}$$

である[*333]. これより任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\varphi_{\beta,-}(A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_N))=\det((\rho_-f_i \mid g_j))_{i,j} \quad (\forall f_1,g_1,\cdots,f_N,g_N\in\mathcal{H}) \tag{14.158}$$

が成り立つことを示せばよい. $N \in \mathbb{N}$ に関する帰納法で示す. 命題 14.118 の (1), (2) より,

$$e^{-\beta d\Gamma_-(H)}A_-^*(f)=\Gamma_-(e^{-\beta H})A_-^*(f)=A_-^*(e^{-\beta H}f)e^{-\beta d\Gamma_-(H)} \quad (\forall f\in\mathcal{H}) \tag{14.159}$$

であり, 定理 14.120 の (5) より,

$$A_-(g)A_-^*(e^{-\beta H}f)+A_-^*(e^{-\beta H}f)A_-(g)=(e^{-\beta H}f \mid g) \quad (\forall f,g\in\mathcal{H}) \tag{14.160}$$

であるから,

$$\begin{aligned}&\varphi_{\beta,-}(A_-^*(f)A_-(g))=\varphi_{\beta,-}(A_-(g)A_-^*(e^{-\beta H}f))\\&=(e^{-\beta H}f \mid g)-\varphi_{\beta,-}(A_-^*(e^{-\beta H}f)A_-(g)) \quad (\forall f,g\in\mathcal{H})\end{aligned}$$

である. よって,

$$\varphi_{\beta,-}(A_-^*((1+e^{-\beta H})f)A_-(g))=(e^{-\beta H}f \mid g) \quad (\forall f,g\in\mathcal{H})$$

であるから, $\rho_{\beta,-}=e^{-\beta H}(1+e^{-\beta H})^{-1}$ より,

$$\varphi_{\beta,-}(A_-^*(f)A_-(g))=(\rho_{\beta,-}f \mid g) \quad (\forall f,g\in\mathcal{H})$$

を得る. これより $N=1$ の場合は (14.158) は成り立つ. ある $N\in\mathbb{N}$ に対し (14.158) が成り立つと仮定して $N+1$ の場合も成り立つことを示す. 任意の $f_1,\cdots,f_{N+1},g_1,\cdots,g_{N+1}\in\mathcal{H}$ に対し, (14.159), (14.160) より,

$$\begin{aligned}&\varphi_{\beta,-}(A_-^*(f_{N+1})\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_{N+1}))\\&=\varphi_{\beta,-}(A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_{N+1})A_-^*(e^{-\beta H}f_{N+1}))\\&=\sum_{j=1}^{N+1}(-1)^{N+1-j}(e^{-\beta H}f_{N+1} \mid g_j)\varphi_{\beta,-}(A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots\widehat{A_-(g_j)}\cdots A_-(g_{N+1}))\\&-\varphi_{\beta,-}(A_-^*(e^{-\beta H}f_{N+1})A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_{N+1}))\end{aligned}$$

である ($\widehat{A_-(g_j)}$ は $A_-(g_j)$ を飛ばすことを意味する) から,

$$\begin{aligned}&\varphi_{\beta,-}(A_-^*((1+e^{-\beta H})f_{N+1})\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_{N+1}))\\&=\sum_{j=1}^{N+1}(-1)^{N+1-j}(e^{-\beta H}f_{N+1} \mid g_j)\varphi_{\beta,-}(A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots\widehat{A_-(g_j)}\cdots A_-(g_{N+1}))\end{aligned}$$

である. よって $\rho_{\beta,-}=e^{-\beta H}(1+e^{-\beta H})^{-1}$ より,

$$\begin{aligned}&\varphi_{\beta,-}(A_-^*(f_{N+1})\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_{N+1}))\\&=\sum_{j=1}^{N+1}(-1)^{N+1-j}(\rho_{\beta,-}f_{N+1} \mid g_j)\varphi_{\beta,-}(A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots\widehat{A_-(g_j)}\cdots A_-(g_{N+1}))\end{aligned}$$

である. よって帰納法の仮定より $N+1$ の場合も成り立つ.

□

[*333] $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ の CONS とすると, $\mathrm{Tr}(e^{-\frac{\beta}{2}d\Gamma_-(H)}A^*Be^{-\frac{\beta}{2}d\Gamma_-(H)})=\sum_{n\in\mathbb{N}}(Be^{-\frac{\beta}{2}d\Gamma_-(H)}e_n \mid Ae^{-\frac{\beta}{2}d\Gamma_-(H)}e_n)$ となることに注意.

14.10 自由 Bose 粒子系の準自由状態に対する荒木-Woods 表現

定理 14.143. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, H を $\mathcal{H}$ 上の単射非負自己共役作用素, β を正数とし, 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Bose 粒子系の粒子数密度 (定義 14.141) を,

$$\rho = (e^{\beta H} - 1)^{-1} = (1 - e^{-\beta H})^{-1} e^{-\beta H}$$

とおく. C を $\mathcal{H}$ 上の共役子 (定義 10.201) とし, 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し $\overline{f} := Cf$ とおき, $\mathcal{H}$ 上の任意の線型作用素 T に対し $\overline{T} := CTC$ とおく. そして $\mathcal{F}_+(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ 上の Weyl 作用素族 (命題 14.130 の (4) を参照)

$$D(\rho^{\frac{1}{2}}) \ni f \mapsto W_{\rho,C,l}(f) := \exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}} f, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}} \overline{f}\right)\right) \in \mathcal{U}(\mathcal{F}_+(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})),$$
$$D(\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}) \ni \overline{f} \mapsto W_{\rho,C,r}(\overline{f}) := \exp\left(i\Phi_S(\rho^{\frac{1}{2}}, (1+\overline{\rho})^{\frac{1}{2}} \overline{f})\right) \in \mathcal{U}(\mathcal{F}_+(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}))$$

を考え, これらが生成する von Neumann 環を,

$$\mathcal{M}_{\rho,C,l} := \{W_{\rho,C,l}(f) : f \in D(\rho^{\frac{1}{2}})\}'' \subseteq B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})),$$
$$\mathcal{M}_{\rho,C,r} := \{W_{\rho,C,r}(\overline{f}) : \overline{f} \in D(\overline{\rho}^{\frac{1}{2}})\}'' \subseteq B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}))$$

とおく. また $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 上の共役子

$$E_C : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \ni (f, g) \mapsto (\overline{g}, \overline{f}) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$$

に対し, $\mathcal{F}_+(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ 上の共役子

$$J_C := \Gamma_+(E_C)$$

を定義し, $\mathcal{F}_+(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ 上の自己共役作用素

$$L_C := d\Gamma_+(H \oplus (-\overline{H}))$$

を定義する. そして

$$\Omega \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$$

を Fock 真空 (定義 14.111) とする. このとき,

(1)
$$J_C W_{\rho,C,l}(f) J_C = W_{\rho,C,r}(\overline{f}) \quad (\forall f \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

が成り立つ.

(2)
$$W_{\rho,C,l}(f) W_{\rho,C,r}(\overline{g}) = W_{\rho,C,r}(\overline{g}) W_{\rho,C,l}(f)$$
$$= \exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}} f + \rho^{\frac{1}{2}} g,\ \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f + (1+\rho)^{\frac{1}{2}} g}\right)\right) \quad (\forall f, g \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

が成り立つ.

(3) $\mathcal{M}_{\rho,C,l}, \mathcal{M}_{\rho,C,r}$ は共に因子環 (定義 14.47) である.

(4)
$$\Phi_{\rho,C,l}(f) := \Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}} f, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}} \overline{f}\right) \quad (\forall f \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

とおき,

$$A_{\rho,C,l}(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{\rho,C,l}(f) + i\Phi_{\rho,C,l}(if)) \quad (\forall f \in D(\rho^{\frac{1}{2}})),$$
$$A^*_{\rho,C,l}(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{\rho,C,l}(f) - i\Phi_{\rho,C,l}(if)) \quad (\forall f \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

と定義すると, 有限粒子空間 $\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin}}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ (定義 14.111) 上で,

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\rho,C,l}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{\rho,C,l}(f) + A^*_{\rho,C,l}(f)),\\
&A_{\rho,C,l}(f) = A_+((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f, 0) + A^*_+(0, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f}),\\
&A^*_{\rho,C,l}(f) = A^*_+((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f, 0) + A_+(0, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f}),\\
&[A_{\rho,C,l}(f), A_{\rho,C,l}(g)] = [A^*_{\rho,C,l}(f), A^*_{\rho,C,l}(g)] = 0,\\
&[A_{\rho,C,l}(f), A^*_{\rho,C,l}(g)] = (g \mid f) \quad (\forall f, g \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))
\end{aligned}$$

が成り立つ.

(5) 任意の $N, M \in \mathbb{Z}_+$, $f_1, \cdots, f_N, g_1, \cdots, g_M \in D(\rho^{\frac{1}{2}})$ に対し,

$$(A^*_{\rho,C,l}(f_N)\cdots A^*_{\rho,C,l}(f_1)A_{\rho,C,l}(g_1)\cdots A_{\rho,C,l}(g_M)\Omega \mid \Omega) = \delta_{N,M}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\prod_{j=1}^{N}(\rho f_j \mid g_{\sigma(j)})$$

が成り立つ.

(6) 任意の $N \in \mathbb{Z}_+$, $f_1, \cdots, f_N \in D(\rho^{\frac{1}{2}})$ に対し,

$$\Phi_{\rho,C,l}(f_1)\cdots\Phi_{\rho,C,l}(f_N)\Omega \in \overline{\mathcal{M}_{\rho,C,l}\Omega}$$

が成り立つ.

(7)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{span}\left\{\begin{array}{l} A^*_{\rho,C,l}(f_N)\cdots A^*_{\rho,C,l}(f_1)A_{\rho,C,l}(g_1)\cdots A_{\rho,C,l}(g_M)\Omega : \\ N, M \in \mathbb{Z}_+, f_1, \cdots, f_N, g_1, \cdots, g_M \in D(\rho^{\frac{1}{2}}) \end{array}\right\}\\
&= \mathrm{span}\left\{\Phi_{\rho,C,l}(f_1)\cdots\Phi_{\rho,C,l}(f_N)\Omega : N \in \mathbb{Z}_+, f_1, \cdots, f_N \in D(\rho^{\frac{1}{2}})\right\}
\end{aligned}$$

は $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ において稠密である.

(8) Fock 真空 $\Omega \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ は von Neumann 環 $\mathcal{M}_{\rho,C,l}, \mathcal{M}_{\rho,C,r}$ の共通の巡回分離ベクトル (定義 14.57) である.

(9)

$$e^{itL_C}W_{\rho,C,l}(f)e^{-itL_C} = W_{\rho,C,l}(e^{itH}f) \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

が成り立つ. そして,

$$\alpha_t(A) := e^{itL_C}Ae^{-itL_C} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{\rho,C,l})$$

によって von Neumann 環 $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群 (定義 14.79) $\alpha = (\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を定義すると, Fock 真空 Ω が誘導する $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ 上の正規状態

$$\omega : \mathcal{M}_{\rho,C,l} \ni A \mapsto (A\Omega \mid \Omega) \in \mathbb{C}$$

は (α, β)-KMS 条件 (定義 14.84) を満たす.

(10)

$$e^{-\beta L_C} = \Gamma_+(e^{-\beta H} \oplus e^{\beta\overline{H}})$$

が成り立つ. そして $e^{-\beta L_C}$ は $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ の巡回分離ベクトル Ω に付随するモジュラー作用素 (定義 14.99) である.

(11) $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ の巡回分離ベクトル Ω に付随するモジュラー共役子 (定義 14.99) は J_C である.

証明. (1) 定理 14.120 の (3) はユニタリ作用素が反線型ユニタリ作用素であっても成り立つので, 定理 14.122 の (3) もユニタリ作用素が反線型ユニタリ作用素であっても成り立つ. よって,

$$J_C\Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f}\right)J_C = \Phi_S\left(\rho^{\frac{1}{2}}f, (1+\overline{\rho})^{\frac{1}{2}}\overline{f}\right) \quad (\forall f \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

であるから, 共役子による射影値測度の変換 (命題 10.207) より,

$$\begin{aligned} J_C W_{\rho,C,l}(f) J_C &= J_C \exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}} f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}\overline{f}}\right)\right) J_C \\ &= \exp\left(-iJ_C\Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}} f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}\overline{f}}\right) J_C\right) \\ &= \exp\left(-i\Phi_S\left(\rho^{\frac{1}{2}} f, (1+\overline{\rho})^{\frac{1}{2}}\overline{f}\right)\right) \\ &= W_{\rho,C,r}(-\overline{f}) \quad (\forall f \in D(\rho^{\frac{1}{2}})) \end{aligned}$$

である.

(2) $D(\rho)$ が $\rho^{\frac{1}{2}}$ の芯である (定理 10.28) ことから,

$$(\rho^{\frac{1}{2}} g \mid (1+\rho)^{\frac{1}{2}} f) = ((1+\rho)^{\frac{1}{2}} g \mid \rho^{\frac{1}{2}} f)$$

であるので,

$$\begin{aligned} &\left(\left(\rho^{\frac{1}{2}} g, (1+\overline{\rho})^{\frac{1}{2}}\overline{g}\right) \mid \left((1+\rho)^{\frac{1}{2}} f, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f}\right)\right) = (\rho^{\frac{1}{2}} g \mid (1+\rho)^{\frac{1}{2}} f) + ((1+\overline{\rho})^{\frac{1}{2}}\overline{g} \mid \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f}) \\ &= (\rho^{\frac{1}{2}} g \mid (1+\rho)^{\frac{1}{2}} f) + (\rho^{\frac{1}{2}} f \mid (1+\rho)^{\frac{1}{2}} g) \\ &= (\rho^{\frac{1}{2}} g \mid (1+\rho)^{\frac{1}{2}} f) + ((1+\rho)^{\frac{1}{2}} f \mid \rho^{\frac{1}{2}} g) \in \mathbb{R} \quad (\forall f, g \in D(\rho^{\frac{1}{2}})) \end{aligned}$$

である. よって $(e^{i\Phi_S(f,g)})_{(f,g)\in\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$ が Weyl 作用素族である (命題 14.130 の (1)) ことから,

$$\begin{aligned} &W_{\rho,C,l}(f) W_{\rho,C,r}(\overline{g}) = W_{\rho,C,r}(\overline{g}) W_{\rho,C,l}(f) \\ &= \exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}} f + \rho^{\frac{1}{2}} g,\ \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f + (1+\rho)^{\frac{1}{2}} g}\right)\right) \quad (\forall f, g \in D(\rho^{\frac{1}{2}})) \end{aligned}$$

が成り立つ.

(3) (2) より $\mathcal{M}_{\rho,C,l} \subseteq \mathcal{M}'_{\rho,C,r}$, $\mathcal{M}_{\rho,C,r} \subseteq \mathcal{M}'_{\rho,C,l}$ であるので,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\rho,C,l} \cap \mathcal{M}'_{\rho,C,l} &= \left(\mathcal{M}'_{\rho,C,l} \cup \mathcal{M}_{\rho,C,l}\right)' \subseteq (\mathcal{M}_{\rho,C,r} \cup \mathcal{M}_{\rho,C,l})', \\ \mathcal{M}_{\rho,C,r} \cap \mathcal{M}'_{\rho,C,r} &= \left(\mathcal{M}'_{\rho,C,r} \cup \mathcal{M}_{\rho,C,r}\right)' \subseteq (\mathcal{M}_{\rho,C,l} \cup \mathcal{M}_{\rho,C,r})' \end{aligned}$$

である. よって $\mathcal{M}_{\rho,C,l}, \mathcal{M}_{\rho,C,r}$ が因子環であることを示すには, $(\mathcal{M}_{\rho,C,l} \cup \mathcal{M}_{\rho,C,r})'' = B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}))$ であることを示せばよい. (2) より,

$$\begin{aligned} &(\mathcal{M}_{\rho,C,l} \cup \mathcal{M}_{\rho,C,r})'' = \left\{W_{\rho,C,l}(f) W_{\rho,C,r}(\overline{g}) : f, g \in D(\rho^{\frac{1}{2}})\right\}'' \\ &= \left\{\exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}} f + \rho^{\frac{1}{2}} g,\ \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f + (1+\rho)^{\frac{1}{2}} g}\right)\right) : f, g \in D(\rho^{\frac{1}{2}})\right\}'' \end{aligned}$$

であるから, 命題 14.125 より,

$$D := \left\{\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}} f + \rho^{\frac{1}{2}} g,\ \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f + (1+\rho)^{\frac{1}{2}} g}\right) : f, g \in D(\rho^{\frac{1}{2}})\right\}$$

が $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ で稠密であることを示せばよい. そこで $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ 上の線型作用素

$$A_\pm := \begin{pmatrix} (1+\rho)^{\frac{1}{2}} & \pm\rho^{\frac{1}{2}} \\ \pm\rho^{\frac{1}{2}} & (1+\rho)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} : D(\rho^{\frac{1}{2}}) \oplus D(\rho^{\frac{1}{2}}) \to \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$$

を定義すると, 任意の $f, g \in D(\rho)$ に対し,

$$A_+ A_- \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

であるから,

$$D(\rho) \oplus D(\rho) \subseteq \mathrm{Ran}(A_+)$$

である. よって $\mathrm{Ran}(A_+)$ は $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ で稠密である. そして,

$$D = (1 \oplus C)\,\mathrm{Ran}(A_+)$$

であるから D は $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ で稠密である.

(4) 定理 14.122 の (3), (4) と定理 14.120 の (5) による.

(5) (4) より任意の $N \in \mathbb{Z}_+$, $f_1, \cdots, f_N \in D(\rho^{\frac{1}{2}})$ に対し,

$$A_{\rho,C,l}(f_1)\cdots A_{\rho,C,l}(f_N)\Omega = A_+^*(0, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f_1})\cdots A_+^*(0, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f_N})\Omega$$

であるから, 補題 14.126 より, 任意の $N, M \in \mathbb{Z}_+$, 任意の $f_1, \cdots, f_N, g_1, \cdots, g_N \in D(\rho^{\frac{1}{2}})$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\left(A_{\rho,C,l}^*(f_N)\cdots A_{\rho,C,l}^*(f_1)A_{\rho,C,l}(g_1)\cdots A_{\rho,C,l}(g_M)\Omega \mid \Omega\right)\\
&= (A_{\rho,C,l}(g_1)\cdots A_{\rho,C,l}(g_M)\Omega \mid A_{\rho,C,l}(f_1)\cdots A_{\rho,C,l}(f_N)\Omega)\\
&= \left(A_+^*(0, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{g_1})\cdots A_+^*(0, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{g_M})\Omega \mid A_+^*(0, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f_1})\cdots A_+^*(0, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f_N})\Omega\right)\\
&= \delta_{N,M}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\prod_{j=1}^{N}(\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{g_{\sigma(j)}} \mid \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f_j}) = \delta_{N,M}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\prod_{j=1}^{N}(\rho f_j \mid g_{\sigma(j)})
\end{aligned}$$

である.

(6)

$$e^{it\Phi_{\rho,C,l}(f)} = W_{\rho,C,l}(tf) \in \mathcal{M}_{\rho,C,l} \quad (\forall f \in D(\rho^{\frac{1}{2}}), \forall t \in \mathbb{R})$$

であるから, 補題 10.213 より,

$$\Phi_{\rho,C,l}(f)\Omega = \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}W_{\rho,C,l}(tf)\Omega\right)\Big|_{t=0} \in \overline{\mathcal{M}_{\rho,C,l}\Omega} \quad (\forall f \in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

である. ある $N \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\Phi_{\rho,C,l}(f_1)\cdots\Phi_{\rho,C,l}(f_N)\Omega \in \overline{\mathcal{M}_{\rho,C,l}\Omega} \quad (\forall f_1, \cdots, f_N \in D(\rho^{\frac{1}{2}})) \tag{14.161}$$

が成り立つと仮定すると, 補題 10.213 より, 任意の $f, f_1, \cdots, f_N \in D(\rho^{\frac{1}{2}})$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\rho,C,l}(f)\Phi_{\rho,C,l}(f_1)\cdots\Phi_{\rho,C,l}(f_N)\Omega\\
&= \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}W_{\rho,C,l}(tf)\left(\Phi_{\rho,C,l}(f_1)\cdots\Phi_{\rho,C,l}(f_N)\Omega\right)\right)\Big|_{t=0} \in \overline{\mathcal{M}_{\rho,C,l}\Omega}
\end{aligned}$$

である. よって帰納法より (14.161) は任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ.

(7)

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} :&= \mathrm{span}\left\{\begin{array}{l} A_{\rho,C,l}^*(f_N)\cdots A_{\rho,C,l}^*(f_1)A_{\rho,C,l}(g_1)\cdots A_{\rho,C,l}(g_M)\Omega : \\ N, M \in \mathbb{Z}_+, f_1, \cdots, f_N, g_1, \cdots, g_M \in D(\rho^{\frac{1}{2}}) \end{array}\right\}\\
&= \mathrm{span}\left\{\Phi_{\rho,C,l}(f_1)\cdots\Phi_{\rho,C,l}(f_N)\Omega : N \in \mathbb{Z}_+, f_1, \cdots, f_N \in D(\rho^{\frac{1}{2}})\right\}
\end{aligned}$$

とおく. ρ は単射非負自己共役作用素であるから, $(1+\rho)^{\frac{1}{2}}, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}$ も単射自己共役作用素である. よって,

$$R := \mathrm{Ran}((1+\rho)^{\frac{1}{2}}) \oplus \mathrm{Ran}(\overline{\rho}^{\frac{1}{2}})$$

は $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ の稠密部分空間であるから,

$$\mathcal{F}_{+,\mathrm{fin},0} = \mathrm{span}\bigcup_{N\in\mathbb{Z}_+}\Theta_{N,+}\left(\bigodot^{N} R\right)$$

[*334] は $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ の稠密部分空間である. これより $\mathcal{K}$ が $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ において稠密であることを示すには, 任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ に対し,

$$\Theta_{N,+}\left(\bigodot^{N} R\right) \subseteq \mathcal{K} \tag{14.162}$$

[*334] $\bigodot^N R$ は N 個の R の線型空間としてのテンソル積である.

が成り立つことを示せばよい. これを N に関する帰納法で示す.

$$((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f,0)=A^*_{\rho,C,l}(f)\Omega\in\mathcal{K},\quad (0,\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{g})=A_{\rho,C,l}(g)\Omega\in\mathcal{K}\quad(\forall f,g\in D(\rho^{\frac{1}{2}}))$$

であるから, (14.162) は $N=0,1$ の場合は成り立つ. ある $N\in\mathbb{N}$ まで成り立つと仮定し, $N+1$ の場合に成り立つことを示す. 任意の $\Psi\in\Theta_{N,+}(\bigodot^N R)\subseteq\mathcal{K}$, 任意の $f\in D(\rho^{\frac{1}{2}})$ に対し,

$$\begin{aligned}A^*_+((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f,0)\Psi&=A^*_{\rho,C,l}(f)\Psi-A_+(0,\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f})\Psi\in\mathcal{K}+\Theta_{N-1,+}\left(\bigodot^{N-1}R\right)\subseteq\mathcal{K},\\ A^*_+(0,\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f})\Psi&=A_{\rho,C,l}(f)\Psi-A_+((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f,0)\Psi\in\mathcal{K}+\Theta_{N-1,+}\left(\bigodot^{N-1}R\right)\subseteq\mathcal{K}\end{aligned}$$

であるから, (14.162) は $N+1$ の場合も成り立つ. よって (14.162) は任意の $N\in\mathbb{Z}_+$ に対して成り立つ.

(8) (6), (7) より $\overline{\mathcal{M}_{\rho,C,l}\Omega}=\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ であるから, Ω は $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ の巡回ベクトルである. (1) より,

$$J_C\mathcal{M}_{\rho,C,l}J_C=\mathcal{M}_{\rho,C,r},\quad J_C\mathcal{M}_{\rho,C,r}J_C=\mathcal{M}_{\rho,C,l},$$

(2) より,

$$\mathcal{M}_{\rho,C,l}\subseteq\mathcal{M}'_{\rho,C,r},\quad \mathcal{M}_{\rho,C,r}\subseteq\mathcal{M}'_{\rho,C,l}$$

であり, $J_C\Omega=\Omega$ であるから,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\rho,C,l}\Omega&=J_C\mathcal{M}_{\rho,C,r}J_C\Omega=J_C\mathcal{M}_{\rho,C,r}\Omega\subseteq J_C\mathcal{M}'_{\rho,C,l}\Omega,\\ \mathcal{M}_{\rho,C,r}\Omega&=J_C\mathcal{M}_{\rho,C,l}J_C\Omega=J_C\mathcal{M}_{\rho,C,l}\Omega\subseteq J_C\mathcal{M}'_{\rho,C,r}\Omega\end{aligned}$$

である. Ω が $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ の巡回ベクトルであることと 1 段目の式より Ω が $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ の巡回分離ベクトルであることが言えて, Ω が $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ の巡回ベクトルであることと 2 段目の式より Ω が $\mathcal{M}_{\rho,C,r}$ の巡回分離ベクトルであることが言える.

(9) 命題 14.115 の (4) と自己共役作用素の直和の Borel 関数カルキュラス (定理 10.87), および共役子による射影値測度の変換 (命題 10.207) より,

$$e^{itL_C}=\exp(itd\Gamma_+(H\oplus(-\overline{H})))=\Gamma_+(\exp(it(H\oplus(-\overline{H}))))=\Gamma_+(e^{itH}\oplus\overline{e^{itH}})\quad(\forall t\in\mathbb{R})$$

である. よってユニタリ作用素による射影値測度の変換 (定理 10.54) と定理 14.122 の (3) より,

$$\begin{aligned}e^{itL_C}W_{\rho,C,l}(f)e^{-itL_C}&=\exp\left(ie^{itL_C}\Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f,\ \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f}\right)e^{-itL_C}\right)\\&=\exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}e^{itH}f,\ \overline{\rho^{\frac{1}{2}}e^{itH}f}\right)\right)\\&=W_{\rho,C,l}(e^{itH}f)\quad(\forall t\in\mathbb{R},\forall f\in D(\rho^{\frac{1}{2}}))\end{aligned}$$

である. E_H を H のスペクトル測度とし, 任意の $\varepsilon\in(0,1)$ に対し,

$$\mathcal{D}_\varepsilon:=\mathrm{span}\{W_{\rho,C,l}(f):f\in\mathrm{Ran}\,E_H([\varepsilon,\varepsilon^{-1}])\}$$

とおき,

$$\mathcal{D}=\bigcup_{\varepsilon\in(0,1)}\mathcal{D}_\varepsilon$$

とおく. このとき $\mathcal{D}$ は $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ の部分 $*$-環である. また SOT-$\lim_{\varepsilon\to+0}E_H([\varepsilon,\varepsilon^{-1}])=1$ より,

$$\bigcup_{\varepsilon\in[\varepsilon,\varepsilon^{-1}]}\mathrm{Ran}\,E_H([\varepsilon,\varepsilon^{-1}])$$

は $\mathcal{H}$ において稠密であるので, 定理 14.124 の (1) より, $\mathcal{D}$ は $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ において SOT で稠密な部分 $*$-環である. 今, 任意の $\varepsilon \in (0,1)$, 任意の $f,g \in \mathrm{Ran}\, E_H([\varepsilon,\varepsilon^{-1}])$ を取り固定する. 定理 14.124 の (4) より, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\omega(W_{\rho,C,l}(g)\alpha_t(W_{\rho,C,l}(f))) = (W_{\rho,C,l}(e^{itH}f)\Omega \mid W_{\rho,C,l}(-g)\Omega)\\
&= \left(\exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}e^{itH}f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}e^{itH}f}\right)\right)\Omega \mid \exp\left(i\Phi_S\left(-(1+\rho)^{\frac{1}{2}}g, -\overline{\rho^{\frac{1}{2}}g}\right)\right)\Omega\right)\\
&= e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2}e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho+1)^{\frac{1}{2}}g\|^2}\exp\left(\frac{1}{2}(e^{itH}f \mid (1+\rho)g) + \frac{1}{2}(e^{-itH}g \mid \rho f)\right),
\end{aligned} \tag{14.163}$$

$$\begin{aligned}
&\omega(\alpha_t(W_{\rho,C,l}(f))W_{\rho,C,l}(g)) = (W_{\rho,C,l}(g)\Omega \mid W_{\rho,C,l}(-e^{itH}f)\Omega)\\
&= \left(\exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}g, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}g}\right)\right)\Omega \mid \exp\left(i\Phi_S\left(-(1+\rho)^{\frac{1}{2}}e^{itH}f, -\overline{\rho^{\frac{1}{2}}e^{itH}f}\right)\right)\Omega\right)\\
&= e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2}e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho+1)^{\frac{1}{2}}g\|^2}\exp\left(\frac{1}{2}(e^{-itH}g \mid (1+\rho)f) + \frac{1}{2}(e^{itH}f \mid \rho g)\right)
\end{aligned} \tag{14.164}$$

が成り立つ. $f,g \in \mathrm{Ran}\, E_H([\varepsilon,\varepsilon^{-1}])$ は H の全解析ベクトルである[*335]から, 定理 10.214 の (3) より, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$F(z) := e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2}e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho+1)^{\frac{1}{2}}g\|^2}\exp\left(\frac{1}{2}(e^{izH}f \mid (1+\rho)g) + \frac{1}{2}(e^{-izH}g \mid \rho f)\right)$$

とおいて整関数 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が定義できる.

$$\|e^{izH}f\| \leqslant \|f\|,\quad \|e^{-izH}g\| \leqslant e^{\beta\varepsilon^{-1}}\|g\| \quad (\forall z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant \beta)$$

であるから F は $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant \beta\}$ 上で有界であり,

$$e^{-\beta H}(1+\rho) = \rho,\quad e^{\beta H}\rho = 1+\rho$$

であることと, (14.163), (14.164) より, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$F(t) = \omega(W_{\rho,C,l}(g)\alpha_t(W_{\rho,C,l}(f))),\quad F(t+i\beta) = \omega(\alpha_t(W_{\rho,C,l}(f))W_{\rho,C,l}(g))$$

が成り立つ. よって定理 14.93 より, ω は (α,β)-KMS 条件を満たす.

(10) 命題 14.115 の (4) と自己共役作用素の直和の Borel 関数カルキュラス (定理 10.87) より,

$$e^{-\beta L_C} = \exp\left(-\beta d\Gamma_+(H \oplus (-\overline{H}))\right) = \Gamma_+(e^{-\beta H} \oplus e^{\beta\overline{H}})$$

である. Δ を $(\mathcal{M}_{\rho,C,l},\Omega)$ に付随するモジュラー作用素 (定義 14.99) とすると, (9) と冨田-竹崎の定理 14.103 より,

$$e^{itL_C}Ae^{-itL_C} = \alpha_t(A) = \Delta^{-i\frac{t}{\beta}}A\Delta^{i\frac{t}{\beta}} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{\rho,C,l})$$

が成り立つ. 両辺を Ω に作用させて,

$$e^{itL_C}A\Omega = \Delta^{-i\frac{t}{\beta}}A\Omega \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{\rho,C,l})$$

を得る. $\mathcal{M}_{\rho,C,l}\Omega$ は $\mathcal{F}_+(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ において稠密であるので,

$$e^{itL_C} = \Delta^{-i\frac{t}{\beta}} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. よって補題 10.213 より,

$$L_C = -\frac{1}{\beta}\log(\Delta)$$

が成り立つので, Borel 関数カルキュラス (定理 10.68) より,

$$e^{-\beta L_C} = \Delta$$

が成り立つ.

[*335] 定理 10.214 の (1) の証明を参照.

(11) J を $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ に付随するモジュラー共役子 (定義 14.99) とする. 極分解の一意性 (定理 10.204) より $J\Delta^{\frac{1}{2}} = J_C\Delta^{\frac{1}{2}}$ が成り立つことを示せばよい.

$$\mathrm{span}\left\{W_{\rho,C,l}(f) : f \in D(\rho^{\frac{1}{2}})\right\}$$

は $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ の WOT 稠密な部分 $*$-環であるので, 命題 14.108 より, $\Delta^{\frac{1}{2}}$ は,

$$\mathrm{span}\left\{W_{\rho,C,l}(f)\Omega : f \in D(\rho^{\frac{1}{2}})\right\}$$

を芯として持つ. よって $J\Delta^{\frac{1}{2}} = J_C\Delta^{\frac{1}{2}}$ を示すには, 任意の $f \in D(\rho^{\frac{1}{2}})$ を取り,

$$J\Delta^{\frac{1}{2}}W_{\rho,C,l}(f)\Omega = J_C\Delta^{\frac{1}{2}}W_{\rho,C,l}(f)\Omega \tag{14.165}$$

が成り立つことを示せばよい. 定理 14.124 の (3) より,

$$\begin{aligned} W_{\rho,C,l}(f)\Omega &= \exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}f}\right)\right)\Omega \\ &= e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2}\left(\frac{i^N}{\sqrt{N!2^N}}\otimes^N\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}f}\right)\right)_{N\in\mathbb{Z}_+} \end{aligned} \tag{14.166}$$

であり, (10) と命題 14.115 の (4) より,

$$\Delta^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{\beta}{2}L_C} = \exp\left(-\frac{\beta}{2}d\Gamma_+(H\oplus(-\overline{H}))\right) = \Gamma_+(e^{-\frac{\beta}{2}H}\oplus\overline{e^{\frac{\beta}{2}H}}) \tag{14.167}$$

である. ここで,

$$e^{-\frac{\beta}{2}H}(1+\rho)^{\frac{1}{2}}f = \rho^{\frac{1}{2}}f,\ \ e^{\frac{\beta}{2}H}\rho^{\frac{1}{2}}f = (1+\rho)^{\frac{1}{2}}f$$

であるから, (14.166), (14.167) より,

$$\begin{aligned} \Delta^{\frac{1}{2}}W_{\rho,C,l}(f)\Omega &= e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2}\Gamma_+(e^{-\frac{\beta}{2}H}\oplus\overline{e^{\frac{\beta}{2}H}})\left(\frac{i^N}{\sqrt{N!2^N}}\otimes^N\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}f}\right)\right)_{N\in\mathbb{Z}_+} \\ &= e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2}\left(\frac{i^N}{\sqrt{N!2^N}}\otimes^N\left(e^{-\frac{\beta}{2}H}(1+\rho)^{\frac{1}{2}}f, \overline{e^{\frac{\beta}{2}H}\rho^{\frac{1}{2}}f}\right)\right)_{N\in\mathbb{Z}_+} \\ &= e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2}\left(\frac{i^N}{\sqrt{N!2^N}}\otimes^N\left(\rho^{\frac{1}{2}}f, \overline{(1+\rho)^{\frac{1}{2}}f}\right)\right)_{N\in\mathbb{Z}_+} \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} J_C\Delta^{\frac{1}{2}}W_{\rho,C,l}(f) &= e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2}\left(\frac{(-i)^N}{\sqrt{N!2^N}}\otimes^N\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}}f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}f}\right)\right)_{N\in\mathbb{Z}_+} \\ &= W_{\rho,C,l}(-f)\Omega = W_{\rho,C,l}(f)^*\Omega = J\Delta^{\frac{1}{2}}W_{\rho,C,l}(f)\Omega \end{aligned}$$

であるから (14.165) が成り立つ.

□

定理 14.144. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, H を $\mathcal{H}$ 上の単射非負自己共役作用素, β を正数とし, 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Bose 粒子系の粒子数密度と準自由状態 (定義 14.141) を,

$$\rho_{H,\beta} := (e^{\beta H}-1)^{-1} = (1-e^{-\beta H})^{-1}e^{-\beta H},$$

$$\varphi_{H,\beta} : \mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})) \ni e^{i\Phi_S(f)} \mapsto e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho_{H,\beta}+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2} \in \mathbb{C}$$

とおく. そして (π,Ω) を $\varphi_{H,\beta}$ に対する GNS 表現 (定義 14.21)

$$\varphi_{H,\beta}(A) = (\pi(A)\Omega \mid \Omega)\ \ (\forall A \in \mathrm{CCR}(D(\rho^{\frac{1}{2}})))$$

とし, その像が生成する von Neumann 環を,

$$\mathcal{M}_\pi = \pi(\mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})))'' \subseteq B(\mathcal{H}_\pi)$$

とおき, さらに,

$$\widetilde{\mathcal{M}_{\pi,\Omega}} = \{T \in \widetilde{\mathcal{M}_\pi} : \Omega \in D(T)\}$$

とおく ($\widetilde{\mathcal{M}_\pi}$ は $\mathcal{M}_\pi$ にアフィリエイトする $\mathcal{H}_\pi$ 上の線型作用素 (定義 10.181) 全体である). 準自由状態 $\varphi_{H,\beta}$ の

$$\mathcal{M}_\pi \supseteq \pi(\mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))) \simeq \mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))$$

(定理 14.133 より π は忠実であることに注意) 上の正規状態としての一意拡張を,

$$\varphi_{H,\beta,\pi} : \mathcal{M}_\pi \ni A \mapsto (A\Omega \mid \Omega) \in \mathbb{C}$$

とおき, さらにこれを $\widetilde{\mathcal{M}_{\pi,\Omega}}$ 上に拡張したものを,

$$\widetilde{\varphi_{H,\beta,\pi}} : \widetilde{\mathcal{M}_{\pi,\Omega}} \ni T \mapsto (T\Omega \mid \Omega) \in \mathbb{C}$$

とおく. このとき,

(1) $\mathcal{M}_\pi$ は因子環 (定義 14.47) であり, Ω は $\mathcal{M}_\pi$ の巡回分離ベクトル (定義 14.57) である.

(2) $\mathcal{H}_\pi$ 上の自己共役作用素 L_π で,

$$e^{itL_\pi}\pi(\exp(i\Phi_S(f)))e^{-itL_\pi} = \pi(\exp(i\Phi_S(e^{itH}f))), \quad e^{itL_\pi}\Omega = \Omega \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})) \tag{14.168}$$

を満たすものが唯一つ存在する.

(3)

$$\alpha_t^\pi(A) = e^{itL_\pi}Ae^{-itL_\pi} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_\pi)$$

によって $\mathcal{M}_\pi$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群 $\alpha^\pi = (\alpha_t^\pi)_{t\in\mathbb{R}}$ を定義すると, 準自由状態 $\varphi_{H,\beta,\pi}$ は (α^π, β)-KMS 条件 (定義 14.84) を満たす唯一つの正規状態である. また $(\mathcal{M}_\pi, \Omega)$ に付随するモジュラー作用素 (定義 14.99) は $e^{-\beta L_\pi}$ である.

(4) 任意の $f \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})$ に対し, $\mathcal{H}_\pi$ 上の自己共役作用素 $\Phi_\pi(f)$ で,

$$\exp(it\Phi_\pi(f)) = \pi(\exp(it\Phi_S(f))) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

を満たすものが唯一つ存在する. そして,

$$A_\pi(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_\pi(f) + i\Phi_\pi(if)), \quad A_\pi^*(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_\pi(f) - i\Phi_\pi(if))$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
&\Phi_\pi(f_1)\cdots\varphi_\pi(f_N) \in \widetilde{\mathcal{M}_{\pi,\Omega}}, \\
&A_\pi^*(f_N)\cdots A_\pi^*(f_1)A_\pi(g_1)\cdots A_\pi(g_M) \in \widetilde{\mathcal{M}_{\pi,\Omega}} \\
&(\forall N, M \in \mathbb{Z}_+, \forall f_1, \cdots, f_N, g_1, \cdots, g_M \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))
\end{aligned}$$

が成り立ち,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{span}\left\{\begin{array}{l} A_\pi^*(f_N)\cdots A_\pi^*(f_1)A_\pi(g_1)\cdots A_\pi(g_M)\Omega : \\ N, M \in \mathbb{Z}_+, \forall f_1, \cdots, f_N, g_1, \cdots, g_M \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}) \end{array}\right\} \\
&= \mathrm{span}\left\{\Phi_\pi(f_1)\cdots\Phi_\pi(f_N)\Omega : N \in \mathbb{Z}_+, f_1, \cdots, f_N \in D((\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})\right\}
\end{aligned}$$

は $\mathcal{H}_\pi$ の稠密部分空間である. また任意の $N, M \in \mathbb{Z}_+, f_1, \cdots, f_N, g_1, \cdots, g_M \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})$ に対し,

$$\widetilde{\varphi_{H,\beta,\pi}}(A_\pi^*(f_N)\cdots A_\pi^*(f_1)A_\pi(g_1)\cdots A_\pi(g_M)) = \delta_{N,M}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\prod_{j=1}^N(\rho_{H,\beta}f_j \mid g_{\sigma(j)})$$

が成り立つ.

証明. (1) C を $\mathcal{H}$ 上の共役子 (定義 10.201) とし, 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し $\overline{f} := Cf$ とおき, $\mathcal{H}$ 上の任意の線型作用素 T に対し $\overline{T} := CTC$ とおく. 命題 14.130 の (4) と定理 14.133 より, $\mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))$ の $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ 上への表現

$$\pi_\oplus : \mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})) \to B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}))$$

で,

$$\pi_\oplus(\exp(i\Phi_S(f))) = \exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho_{H,\beta})^{\frac{1}{2}}f, \overline{\rho_{H,\beta}}^{\frac{1}{2}}\overline{f}\right)\right) \quad (\forall f \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})) \tag{14.169}$$

を満たすものが定まる. そして定理 14.124 の (4) より, Fock 真空 $\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ に対し,

$$\begin{aligned}(\pi_\oplus(e^{i\Phi_S(f)})\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \mid \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}) &= \exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho_{H,\beta})^{\frac{1}{2}}f, \overline{\rho_{H,\beta}}^{\frac{1}{2}}\overline{f}\right)\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \mid \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}\right)\\ &= e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho_{H,\beta}+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2} = \varphi_{H,\beta}(e^{i\Phi_S(f)}) \quad (\forall f \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))\end{aligned}$$

であり, 定理 14.143 の (8) より $\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$ は $\pi(\mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})))$ の巡回ベクトルである. よって $(\pi_{\oplus,\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}})$ は $\varphi_{H,\beta}$ の GNS 表現である. ゆえに命題 14.15 よりユニタリ作用素

$$U_\pi : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$$

で,

$$U_\pi\pi(A)U_\pi^* = \pi_\oplus(A) \quad (\forall A \in \mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))), \quad U_\pi\Omega = \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \tag{14.170}$$

を満たすものが定まる. 定理 14.143 の (3) より von Neumann 環

$$\mathcal{M}_{\pi_\oplus} = \pi_\oplus(\mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})))'' \subseteq B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}))$$

は因子環であり, 定理 14.143 の (8) より $\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$ は $\mathcal{M}_{\pi_\oplus}$ の巡回分離ベクトルである. そして (14.170) より,

$$\mathcal{M}_\pi = U_\pi^*\mathcal{M}_{\pi_\oplus}U_\pi, \quad \mathcal{M}_\pi' = U_\pi^*\mathcal{M}_{\pi_\oplus}'U_\pi$$

であるから $\mathcal{M}_\pi$ も因子環であり, Ω は $\mathcal{M}_\pi$ の巡回分離ベクトルである.

(2)

$$L_{\pi_\oplus} := d\Gamma_+(H \oplus (-\overline{H}))$$

とおけば, 定理 14.143 の (9) より,

$$\begin{aligned}&e^{itL_{\pi_\oplus}}\pi_\oplus(\exp(i\Phi_S(f)))e^{-itL_{\pi_\oplus}} = \pi_\oplus(\exp(i\Phi_S(e^{itH}f))),\\ &e^{itL_\pi}\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} = \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))\end{aligned} \tag{14.171}$$

が成り立つ. $\mathcal{H}_\pi$ 上の自己共役作用素

$$L_\pi := U_\pi^* L_{\pi_\oplus} U_\pi$$

を考えれば, ユニタリ作用素による射影値測度の変換 (定理 10.54) より,

$$e^{itL_\pi} = U_\pi^* e^{itL_{\pi_\oplus}} U_\pi \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であるから, (14.170), (14.171) より,

$$\begin{aligned}e^{itL_\pi}\pi(\exp(i\Phi_S(f)))e^{-itL_\pi} &= U_\pi^*e^{itL_{\pi_\oplus}}U_\pi\pi(\exp(i\Phi_S(f)))U_\pi^*e^{-itL_{\pi_\oplus}}U_\pi\\ &= U_\pi^*e^{itL_{\pi_\oplus}}\pi_\oplus(\exp(i\Phi_S(f)))e^{-itL_{\pi_\oplus}}U_\pi\\ &= U_\pi^*\pi_\oplus(\exp(i\Phi_S(e^{itH}f)))U_\pi\\ &= \pi(\exp(i\Phi_S(e^{itH}f))) \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})),\end{aligned}$$

$$e^{itL_\pi}\Omega = U_\pi^*e^{itL_{\pi_\oplus}}U_\pi\Omega = U_\pi^*e^{itL_{\pi_\oplus}}\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} = U_\pi^*\Omega = \Omega \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

である. よって存在が示せた. (14.168) を満たす自己共役作用素 L_π の一意性は,

$$e^{itL_\pi}\pi(\exp(i\Phi_S(f)))\Omega = e^{itL_\pi}\pi(\exp(i\Phi_S(f)))e^{itL_\pi}\Omega = \pi(\exp(i\Phi_S(e^{itH}f)))\Omega \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))$$

であることと, Ω が π の巡回ベクトルであることによる.

(3)
$$\alpha_t^{\pi_\oplus}(A) = e^{itL_{\pi_\oplus}} A e^{-itL_{\pi_\oplus}} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{\pi_\oplus})$$
に対し,
$$\alpha_t^{\pi}(\,\cdot\,) = U_\pi^* \alpha_t^{\pi_\oplus}(U_\pi(\,\cdot\,)U_\pi^*)U_\pi \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$
であり, 定理 14.143 の (9) より $\varphi_{H,\beta,\pi_\oplus} = (\,\cdot\,\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \mid \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}})$ は $(\alpha^{\pi_\oplus}, \beta)$-KMS 条件を満たすので,
$$\varphi_{H,\beta,\pi} = (\,\cdot\,\Omega \mid \Omega) = (U_\pi(\,\cdot\,)U_\pi^*\Omega_\oplus \mid \Omega_\oplus) = \varphi_{H,\beta,\pi_\oplus}(U_\pi(\,\cdot\,)U_\pi^*)$$
は (α^π, β)-KMS 条件を満たす. 定理 14.143 の (9) より $\mathcal{M}_\pi$ は因子環であるから, 定理 14.90 より, (α^π, β)-KMS 条件を満たす正規状態は $\varphi_{H,\beta,\pi}$ のみである. 定理 14.143 の (10) より $e^{-\beta L_{\pi_\oplus}}$ は $(\mathcal{M}_{\pi_\oplus}, \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}})$ に付随するモジュラー作用素であるので, $e^{-\beta L_\pi} = U_\pi^* e^{-\beta L_{\pi_\oplus}} U_\pi$ は $(\mathcal{M}_\pi, \Omega) = (U_\pi^*\mathcal{M}_{\pi_\oplus}U_\pi, U_\pi^*\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}})$ に付随するモジュラー作用素である.

(4) 任意の $f \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})$ に対し,
$$\Phi_{\pi_\oplus}(f) := \Phi_S\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}} f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f}\right)$$
とおけば, (14.170), (14.169) とユニタリ作用素による射影値測度の変換 (定理 10.54) より,
$$\begin{aligned}\pi(\exp(it\Phi_S(f))) &= U_\pi^* \pi_\oplus(\exp(it\Phi_S(f)))U_\pi = U_\pi^* \exp(it\Phi_{\pi_\oplus}(f))U_\pi \\ &= \exp(itU_\pi^*\Phi_{\pi_\oplus}(f)U_\pi) \quad (\forall t \in \mathbb{R})\end{aligned}$$
であるから,
$$\Phi_\pi(f) := U_\pi^* \Phi_{\pi_\oplus}(f) U_\pi \tag{14.172}$$
とおけば,
$$\pi(\exp(it\Phi_S(f))) = \exp(it\Phi_\pi(f)) \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \tag{14.173}$$
である. (14.173) を満たす自己共役作用素 $\Phi_\pi(f)$ の一意性は補題 10.213 による. また (14.173) と補題 10.213 より, 任意の $T' \in \mathcal{M}_\pi'$ に対し,
$$\begin{aligned}T'\Phi_\pi(f)v &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{it}T'(\exp(it\Phi_\pi(f)) - 1)v = \lim_{t\to 0}\frac{1}{it}T'(\pi(\exp(it\Phi_S(f))) - 1)v \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{it}(\pi(\exp(it\Phi_S(f))) - 1)T'v = \Phi_\pi(f)T'v \quad (\forall v \in D(\Phi_\pi(f)))\end{aligned}$$
であるから,
$$\Phi_\pi(f) \in \widetilde{\mathcal{M}_\pi}$$
である. 任意の $N \in \mathbb{N}$, $f_1, \cdots, f_N \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})$ に対し,
$$\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \in D(\Phi_{\pi_\oplus}(f_1)\cdots\Phi_{\pi_\oplus}(f_N))$$
なので, (14.172) より,
$$\Omega_\pi = U_\pi^*\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \in D(\Phi_\pi(f_1)\cdots\Phi_\pi(f_N))$$
である. よって,
$$\begin{aligned}&\Phi_\pi(f_1)\cdots\varphi_\pi(f_N)\widetilde{\mathcal{M}_{\pi,\Omega}}, \\ &A_\pi^*(f_N)\cdots A_\pi^*(f_1)A_\pi(g_1)\cdots A_\pi(g_M) \in \widetilde{\mathcal{M}_{\pi,\Omega}} \\ &(\forall N, M \in \mathbb{Z}_+, \forall f_1, \cdots, f_N, g_1, \cdots, g_M \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))\end{aligned}$$
が成り立つ.
$$\begin{aligned}A_{\pi_\oplus}(f) &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{\pi_\oplus}(f) + i\Phi_{\pi_\oplus}(if)), \\ A_{\pi_\oplus}^*(f) &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{\pi_\oplus}(f) - i\Phi_{\pi_\oplus}(if)) \quad (\forall f \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))\end{aligned}$$

に対し, (14.172) より,

$$A_\pi(f) = U_\pi^* A_{\pi_\oplus}(f) U_\pi, \quad A_\pi^*(f) = U_\pi^* A_{\pi_\oplus}^*(f) U_\pi \quad (\forall f \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))$$

であるから, 定理 14.143 の (7) より,

$$\begin{aligned} &\mathrm{span}\left\{ \begin{array}{l} A_\pi^*(f_N)\cdots A_\pi^*(f_1)A_\pi(g_1)\cdots A_\pi(g_M)\Omega : \\ N, M \in \mathbb{Z}_+, \forall f_1,\cdots,f_N, g_1,\cdots,g_M \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}) \end{array} \right\} \\ &= \mathrm{span}\left\{\Phi_\pi(f_1)\cdots\Phi_\pi(f_N)\Omega : N \in \mathbb{Z}_+, f_1,\cdots,f_N \in D((\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})\right\} \end{aligned}$$

は $\mathcal{H}_\pi$ の稠密部分空間である. また定理 14.143 の (5) より, 任意の $N, M \in \mathbb{Z}_+$, 任意の $f_1,\cdots,f_N, g_1,\cdots,g_M \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})$ に対し,

$$\begin{aligned} &\widetilde{\varphi_{H,\beta,\pi}}(A_\pi^*(f_N)\cdots A_\pi^*(f_1)A_\pi(g_1)\cdots A_\pi(g_M)) \\ &= \left(A_{\pi_\oplus}^*(f_N)\cdots A_{\pi_\oplus}^*(f_1)A_{\pi_\oplus}(g_1)\cdots A_{\pi_\oplus}(g_M)\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \mid \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}\right) \\ &= \delta_{N,M}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\prod_{j=1}^N(\rho f_j \mid g_{\sigma(j)}) \end{aligned}$$

である.

□

定義 14.145 (自由 Bose 粒子系の準自由状態に対する荒木-Woods 表現, 荒木-Woods 因子環, Liouvillian, 場の作用素, 生成消滅作用素). $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, H を $\mathcal{H}$ 上の単射非負自己共役作用素, β を正数とし, 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Bose 粒子系の粒子数密度と準自由状態 (定義 14.141) を,

$$\rho_{H,\beta} := (e^{\beta H}-1)^{-1} = (1-e^{-\beta H})^{-1}e^{-\beta H},$$

$$\varphi_{H,\beta} : \mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})) \ni e^{i\Phi_S(f)} \mapsto e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho_{H,\beta}+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2} \in \mathbb{C}$$

とおく. このとき $\varphi_{H,\beta}$ に対する GNS 表現 (π,Ω) (定義 14.21)

$$\varphi_{H,\beta}(A) = (\pi(A)\Omega \mid \Omega) \quad (\forall A \in \mathrm{CCR}(D(\rho^{\frac{1}{2}})))$$

を, 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Bose 粒子系の準自由状態 $\varphi_{H,\beta}$ に対する荒木-Woods 表現と言い, その像が生成する von Neumann 環

$$\mathcal{M}_\pi = \pi(\mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))) \subseteq B(\mathcal{H}_\pi)$$

を荒木-Woods 環と言う. 定理 14.144 の (1) より荒木-Woods 環 $\mathcal{M}_\pi$ は因子環であり, 定理 14.144 の (2) より Ω は $\mathcal{M}_\pi$ の巡回分離ベクトルである.
荒木-Woods 表現 (π,Ω) に対し, 定理 14.144 の (2) より, $\mathcal{H}_\pi$ 上の自己共役作用素 L_π で,

$$\begin{aligned} &e^{itL_\pi}\pi(\exp(i\Phi_S(f)))e^{-itL_\pi} = \pi(\exp(i\Phi_S(e^{itH}f))), \\ &e^{itL_\pi}\Omega = \Omega \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})) \end{aligned}$$

を満たすものが唯一つ存在する. L_π を荒木-Woods 表現 (π,Ω) に対する Liouvillian と言う.
定理 14.144 の (3) より,

$$\alpha_t^\pi(A) := e^{itL_\pi}Ae^{-itL_\pi} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_\pi)$$

によって $\mathcal{M}_\pi$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群 $\alpha^\pi = (\alpha_t^\pi)_{t\in\mathbb{R}}$ が定義でき, 準自由状態 $\varphi_{H,\beta} : \mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})) \to \mathbb{C}$ の荒木-Woods 環 $\mathcal{M}_\pi$ 上の正規状態としての一意拡張

$$\varphi_{H,\beta,\pi} : \mathcal{M}_\pi \ni A \mapsto (A\Omega \mid \Omega) \in \mathbb{C}$$

は (α^{π},β)-KMS 条件を満たす唯一つの正規状態である.
定理 14.144 の (4) より, 荒木-Woods 表現 (π,Ω) に対し, 各 $f\in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})$ について,

$$\exp(it\Phi_{\pi}(f))=\pi(\exp(it\Phi_S(f)))\ \ (\forall t\in\mathbb{R})$$

を満たす $\mathcal{H}_{\pi}$ 上の自己共役作用素 $\Phi_{\pi}(f)$ が定まる. $\Phi_{\pi}(f)$ を荒木-Woods 表現 (π,Ω) に対する場の作用素と言う. また,

$$A_{\pi}(f):=\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{\pi}(f)+i\Phi_{\pi}(if)),\ \ A_{\pi}^{*}(f):=\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{\pi}(f)-i\Phi_{\pi}(if))$$

をそれぞれ荒木-Woods 表現 (π,Ω) に対する消滅作用素, 生成作用素と言う. 定理 14.144 の (4) より任意の $N,M\in\mathbb{Z}_+$, $f_1,\cdots,f_N,g_1,\cdots,g_M\in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})$ に対し,

$$(A_{\pi}^{*}(f_N)\cdots A_{\pi}^{*}(f_1)A_{\pi}(g_1)\cdots A_{\pi}(g_M)\Omega\mid\Omega)=\delta_{N,M}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\prod_{j=1}^{N}(\rho_{H,\beta}f_j\mid g_{\sigma(j)})$$

である.

定理 14.146 (典型的な荒木-Woods 表現)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, H を $\mathcal{H}$ 上の単射非負自己共役作用素, β を正数とし, 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Bose 粒子系の粒子数密度と準自由状態 (定義 14.141) を,

$$\rho_{H,\beta}:=(e^{\beta H}-1)^{-1}=(1-e^{-\beta H})^{-1}e^{-\beta H},$$

$$\varphi_{H,\beta}:\mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))\ni e^{i\Phi_S(f)}\mapsto e^{-\frac{1}{4}\|(2\rho_{H,\beta}+1)^{\frac{1}{2}}f\|^2}\in\mathbb{C}$$

とおく. また C を $\mathcal{H}$ 上の共役子 (定義 10.201) とし, 任意の $f\in\mathcal{H}$ に対し $\overline{f}:=Cf$ とおき, $\mathcal{H}$ 上の任意の線型作用素 T に対し $\overline{T}:=CTC$ とおく. このとき,

(1) $\mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))$ の $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ 上への表現

$$\pi_{\oplus}:\mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))\to B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}))$$

で,

$$\pi_{\oplus}(e^{i\Phi_S(f)})=\exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho_{H,\beta})^{\frac{1}{2}},\overline{\rho_{H,\beta}}^{\frac{1}{2}}\overline{f}\right)\right)\ \ (\forall f\in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))$$

なるものが定まり, Fock 真空 (定義 14.111) $\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}\in\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ に対し, $(\pi_{\oplus},\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}})$ は準自由状態 $\varphi_{H,\beta}$ に対する荒木-Woods 表現である. そしてこの荒木-Woods 表現に対する Liouvillian と場の作用素 (定義 14.145) は,

$$L_{\pi_{\oplus}}=d\Gamma_+(H\oplus(-\overline{H})),\ \ \Phi_{\pi_{\oplus}}(f)=\Phi_S\left((1+\rho_{H,\beta})^{\frac{1}{2}}f,\overline{\rho_{H,\beta}}^{\frac{1}{2}}\overline{f}\right)\ \ (\forall f\in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))$$

である.

(2) $\mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))$ の $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ 上への表現

$$\pi_{\otimes}:\mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))\to B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H})\otimes\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$$

で,

$$\pi_{\otimes}(e^{i\Phi_S(f)})=\exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho_{H,\beta})^{\frac{1}{2}}f\right)\right)\otimes\exp\left(i\Phi_S\left(\overline{\rho_{H,\beta}}^{\frac{1}{2}}\overline{f}\right)\right)\ \ (\forall f\in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))\tag{14.174}$$

なるものが定まり, Fock 真空 (定義 14.111) $\Omega_{\mathcal{H}}\in\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ に対し, $(\pi_{\otimes},\Omega_{\mathcal{H}}\otimes\Omega_{\mathcal{H}})$ は準自由状態 $\varphi_{H,\beta}$ に対する荒木-Woods 表現である. そしてこの荒木-Woods 表現に対する Liouvillian と場の作用素は,

$$L_{\pi_{\otimes}}=\overline{d\Gamma_+(H)\otimes 1-1\otimes d\Gamma_+(\overline{H})},\tag{14.175}$$

$$\Phi_{\pi_{\otimes}}(f)=\overline{\Phi_S\left((1+\rho_{H,\beta})^{\frac{1}{2}}f\right)\otimes 1-1\otimes\Phi_S\left(\overline{\rho_{H,\beta}}^{\frac{1}{2}}\overline{f}\right)}\ \ (\forall f\in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))\tag{14.176}$$

である.

(3) $e^{-\beta H} \in B^1(\mathcal{H})$ であると仮定する (従って定理 14.116 の (3) より $e^{-\beta d\Gamma_+(H)} \in B^1(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$ である). このとき $\mathrm{CCR}(\mathcal{H}) = \mathrm{CCR}(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})$ の Hilbert-Schmidt クラス $B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$ 上への表現

$$\pi_{\mathrm{fin}} : \mathrm{CCR}(\mathcal{H}) \to B(B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))),$$
$$\pi_{\mathrm{fin}}(A)S = AS \quad (\forall A \in \mathrm{CCR}(\mathcal{H}), \forall S \in B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H})))$$

と,

$$\Omega_{\mathrm{fin}} := \frac{1}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta d\Gamma_+(H)})} e^{-\frac{\beta}{2} d\Gamma_+(H)} \in B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$$

に対し, $(\pi_{\mathrm{fin}}, \Omega_{\mathrm{fin}})$ は準自由状態 $\varphi_{H,\beta}$ に対する荒木-Woods 表現である. そしてユニタリ作用素

$$V : \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \ni \Psi_1 \otimes \Psi_2 \mapsto \Psi_1 \odot \Gamma_+(C)\Psi_2 \in B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$$

($\odot$ は Schatten 形式 (定義 10.109)) を定義すると, 荒木-Woods 表現 $(\pi_{\mathrm{fin}}, \Omega_{\mathrm{fin}})$ に対する Liouvillian と場の作用素は,

$$L_{\pi_{\mathrm{fin}}} = V(\overline{d\Gamma_+(H) \otimes 1 - 1 \otimes d\Gamma_+(\overline{H})})V^*,$$
$$\Phi_{\pi_{\mathrm{fin}}}(f) = V(\Phi_S(f) \otimes 1)V^* \quad (\forall f \in \mathcal{H})$$

である.

証明. (1) 定理 14.144 の証明の中で示してある.

(2) 定理 14.127 におけるユニタリ作用素

$$U : \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}_+(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$$

に対し, $U\Omega_{\mathcal{H}} \otimes \Omega_{\mathcal{H}} = \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$ であり,

$$\exp\left(i\Phi_S\left((1+\rho_{H,\beta})^{\frac{1}{2}} f\right)\right) \otimes \exp\left(i\Phi_S\left(\overline{\rho_{H,\beta}{}^{\frac{1}{2}} f}\right)\right) = U^* \pi_{\oplus}(e^{i\Phi_S(f)})U \quad (\forall f \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))$$

であるから, (14.174) によって $\mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))$ の $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ 上への表現が定まり, $(\pi_{\otimes}, \Omega_{\mathcal{H}} \otimes \Omega_{\mathcal{H}})$ は $\varphi_{H,\beta}$ に対する GNS 表現である. 定理 14.127 より,

$$\overline{d\Gamma_+(H) \otimes 1 - 1 \otimes d\Gamma_+(\overline{H})} = UL_{\pi_{\oplus}}U^*,$$
$$\overline{\Phi_S\left((1+\rho_{H,\beta})^{\frac{1}{2}} f\right) \otimes 1 - 1 \otimes \Phi_S\left(\overline{\rho_{H,\beta}{}^{\frac{1}{2}} f}\right)} = U\Phi_{\pi_{\oplus}}(f)U^* \quad (\forall f \in D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}}))$$

であるから, (14.175), (14.176) は荒木-Woods 表現 $(\pi_{\otimes}, \Omega_{\mathcal{H}} \otimes \Omega_{\mathcal{H}})$ に対する Liouvillian と場の作用素である.

(3) 命題 14.125 より $\mathrm{CCR}(\mathcal{H})$ は $B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$ において SOT 稠密であるから,

$$\overline{\pi_{\mathrm{fin}}(\mathrm{CCR}(\mathcal{H}))\Omega_{\mathrm{fin}}} = \overline{B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))\Omega_{\mathrm{fin}}}$$

であり, $\Omega_{\mathrm{fin}} = \frac{1}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta d\Gamma_+(H)})} e^{-\frac{\beta}{2} d\Gamma_+(H)} \in B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$ が $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ 上の単射自己共役作用素であることから,

$$\overline{B(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))\Omega_{\mathrm{fin}}} = B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$$

である. よって Ω_{fin} は π_{fin} の巡回ベクトルである. そして定理 14.142 より, $(\pi_{\mathrm{fin}}, \Omega_{\mathrm{fin}})$ は $\varphi_{H,\beta}$ に対する GNS 表現である.

$$L := V(\overline{d\Gamma_+(H) \otimes 1 - 1 \otimes d\Gamma_+(\overline{H})})V^*$$

とおけば,

$$\begin{aligned} e^{itL} &= V \exp\left(it\left(\overline{d\Gamma_+(H) \otimes 1 - 1 \otimes d\Gamma_+(\overline{H})}\right)\right) V^* \\ &= V\left(e^{itd\Gamma_+(H)} \otimes e^{-itd\Gamma_+(\overline{H})}\right) V^* \\ &= V\left(e^{itd\Gamma_+(H)} \otimes \left(\Gamma_+(C)e^{itd\Gamma_+(H)}\Gamma_+(C)\right)\right) V^* \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

[*336] であるから，

$$e^{itL}(\Psi_1 \odot \Psi_2) = e^{itd\Gamma_+(H)}\Psi_1 \odot e^{itd\Gamma_+(H)}\Psi_2 = e^{itd\Gamma_+(H)}(\Psi_1 \odot \Psi_2)e^{-itd\Gamma_+(H)}$$
$$(\forall t \in \mathbb{R}, \forall \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$$

である．よって，

$$e^{itL}S = e^{itd\Gamma_+(H)}Se^{-itd\Gamma_+(H)} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall S \in B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))) \tag{14.177}$$

であるので，

$$\begin{aligned} e^{itL}\pi_{\mathrm{fin}}(\exp(i\Phi_S(f)))e^{-itL}S &= e^{itd\Gamma_+(H)}\exp(i\Phi_S(f))e^{-itd\Gamma_+(H)}S \\ &= \pi(\exp(i\Phi_S(e^{itH}f)))S \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{H}, \forall S \in B^2(\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))). \end{aligned}$$

ゆえに，

$$e^{itL}\pi_{\mathrm{fin}}(\exp(i\Phi_S(f)))e^{-itL} = \pi(\exp(i\Phi_S(e^{itH}f))) \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{H})$$

が成り立つ．また (14.177) より，

$$e^{itL}\Omega_{\mathrm{fin}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Tr}(e^{-\beta d\Gamma_+(H)})}}e^{itd\Gamma_+(H)}e^{-\frac{\beta}{2}d\Gamma_+(H)}e^{-itd\Gamma_+(H)} = \Omega_{\mathrm{fin}} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

である．よって定理 14.144 の (2) より荒木-Woods 表現 $(\pi_{\mathrm{fin}}, \Omega_{\mathrm{fin}})$ に対する Liouvillian は，

$$L_{\pi_{\mathrm{fin}}} = V(\overline{d\Gamma_+(H) \otimes 1 - 1 \otimes d\Gamma_+(\overline{H})})V^*$$

である．そして，

$$\pi_{\mathrm{fin}}(e^{it\Phi_S(f)}) = V(e^{it\Phi_S(f)} \otimes 1)V^* \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{H})$$

であるから，自己共役作用素のテンソル積の Borel 関数カルキュラス (定理 10.104 より，荒木-Woods 表現 $(\pi_{\mathrm{fin}}, \Omega_{\mathrm{fin}})$ に対する場の作用素は，

$$\Phi_{\pi_{\mathrm{fin}}}(f) = V(\Phi_S(f) \otimes 1)V^* \quad (\forall f \in \mathcal{H})$$

である．

□

定義 14.147 (荒木-Woods の二重 Fock 表現, テンソル積 Fock 表現, Hilbert-Schmidt クラス表現)**.** 自由 Bose 粒子系の準自由状態 $\varphi_{H,\beta} : \mathrm{CCR}(D(\rho_{H,\beta}^{\frac{1}{2}})) \to \mathbb{C}$ の荒木-Woods 表現で, 定理 14.146 の (1), (2), (3) におけるものをそれぞれ二重 Fock 表現, テンソル積 Fock 表現, Hilbert-Scmidt クラス表現と言う．

14.11　自由 Fermi 粒子系の準自由状態に対する荒木-Wyss 表現

定義 14.148. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．反対称 Fock 空間 $\mathcal{F}_-(\mathcal{H}) = \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}_+}\Theta_{N,-}(\bigotimes^N \mathcal{H})$ 上のユニタリ作用素

$$\Lambda := \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}_+}(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}$$

を定義する．

注意 14.149. 定義 14.148 におけるユニタリ作用素 Λ と $\mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ 上の消滅作用素 $A_-(f)$, 生成作用素 $A_-^*(f)$ に対し，

$$\Lambda A_-(f)\Lambda = \Gamma_-(-1)A_-(f) = -A_-(f)\Gamma_-(-1) \quad (\forall f \in \mathcal{H}),$$
$$\Lambda A_-^*(f)\Lambda = A_-^*(f)\Gamma_-(-1) = -\Gamma_-(-1)A_-^*(f) \quad (\forall f \in \mathcal{H})$$

である．

[*336] 1 番目の等号で定理 10.54 (射影値測度のユニタリ作用素による変換) を, 2 番目の等号で定理 10.104 (自己共役作用素のテンソル積の Borel 関数カルキュラス) を, 3 番目の等号で命題 10.207 (射影値測度の共役子による変換) を用いた．

定理 14.150. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, H を $\mathcal{H}$ 上の単射非負自己共役作用素, β を正数とし, 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Fermi 粒子系の粒子数密度と準自由状態 (定義 14.141) を,

$$\rho := (e^{\beta H}+1)^{-1} = (1+e^{-\beta H})^{-1}e^{-\beta H}$$

とおく. また C を $\mathcal{H}$ 上の共役子 (定義 10.201) とし, 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し $\overline{f} := Cf$ とおき, $\mathcal{H}$ 上の任意の線型作用素 T に対し $\overline{T} := CTC$ とおく. そして $\mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ 上の CAR 作用素族 (命題 14.136 の (2) を参照)

$$\mathcal{H} \ni f \mapsto A_{\rho,C,l}(f) := A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f, 0) + A_-^*(0, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f}) \in B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})),$$
$$\mathcal{H} \ni \overline{f} \mapsto A_{\rho,C,r}(\overline{f}) := \Lambda\left(A_-(0, (1-\overline{\rho})^{\frac{1}{2}}\overline{f}) + A_-^*(\rho^{\frac{1}{2}}f, 0)\right)\Lambda \in B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}))$$

を考え, これらが生成する von Neumann 環を,

$$\mathcal{M}_{\rho,C,l} := \{A_{\rho,C,l}(f), A_{\rho,C,l}^*(g) : f, g \in \mathcal{H}\}'',$$
$$\mathcal{M}_{\rho,C,r} := \{A_{\rho,C,r}(f), A_{\rho,C,r}^*(g) : f, g \in \mathcal{H}\}''$$

とおく. また, $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ 上の共役子

$$E_C : \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \ni (f, g) \mapsto (\overline{g}, \overline{f}) \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$$

に対し, $\mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ 上の共役子

$$J_C := \Lambda\Gamma_-(E_C) = \Gamma_-(E_C)\Lambda$$

を定義し, $\mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ 上の自己共役作用素

$$L_C := d\Gamma_-(H \oplus (-\overline{H}))$$

を定義する. そして,

$$\Omega \in \mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$$

を Fock 真空 (定義 14.111) とする. このとき,

(1)
$$J_C A_{\rho,C,l}(f) J_C = A_{\rho,C,r}(\overline{f}) \quad (\forall f \in \mathcal{H})$$
が成り立つ.

(2)
$$A_{\rho,C,l}(f)A_{\rho,C,r}^*(\overline{g}) = A_{\rho,C,r}^*(\overline{g})A_{\rho,C,l}(f) \quad (\forall f, g \in \mathcal{H}),$$
$$A_{\rho,C,l}(f)A_{\rho,C,r}(\overline{g}) = A_{\rho,C,r}(\overline{g})A_{\rho,C,l}(f) \quad (\forall f, g \in \mathcal{H})$$
が成り立つ.

(3) Fock 真空 Ω は $\mathcal{M}_{\rho,C,l}, \mathcal{M}_{\rho,C,r}$ の共通の巡回分離ベクトル (定義 14.57) である.

(4) $\mathcal{M}_{\rho,C,l}, \mathcal{M}_{\rho,C,r}$ は共に因子環である.

(5)
$$\Phi_S(f, g) := A_-(f, g) + A_-^*(f, g) \quad (\forall (f, g) \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}),$$
$$\Phi_{\rho,C,l}(f) := A_{\rho,C,l}(f) + A_{\rho,C,l}^*(f) = \Phi_S((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f}) \quad (\forall f \in \mathcal{H})$$
とおくと,
$$A_{\rho,C,l}(f) = \frac{1}{2}(\Phi_{\rho,C,l}(f) + i\Phi_{\rho,C,l}(if)) \quad (\forall f \in \mathcal{H}) \tag{14.178}$$
であり,
$$(\Phi_{\rho,C,l}(f)\Phi_{\rho,C,l}(g)\Omega \mid \Omega) = ((1-\rho)g \mid f) + (\rho f \mid g) \quad (\forall f, g \in \mathcal{H}) \tag{14.179}$$
が成り立つ. また任意の $N \in \mathbb{N}$, 任意の $f_1, \cdots, f_{2N} \in \mathcal{H}$ に対し,
$$(\Phi_{\rho,C,l}(f_1)\cdots\Phi_{\rho,C,l}(f_{2N-1})\Omega \mid \Omega) = 0, \tag{14.180}$$

$$
\begin{aligned}
&(\Phi_{\rho,C,l}(f_1)\cdots\Phi_{\rho,C,l}(f_{2N})\Omega \mid \Omega) \\
&= \sum_{\sigma\in \mathrm{Pairs}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^{N}(\Phi_{\rho,C,l}(f_{\sigma(2j-1)})\Phi_{\rho,C,l}(f_{\sigma(2j)})\Omega \mid \Omega)
\end{aligned}
\tag{14.181}
$$

が成り立つ. ただし,

$$
\mathrm{Pairs}_N := \{\sigma \in \mathfrak{S}_{2N} : \sigma(2j-1) < \sigma(2j),\ \sigma(2j-1) < \sigma(2j+1)\ (\forall j \in \{1,\cdots,N\})\}
$$

である.

(6)

$$
e^{itL_C}A_{\rho,C,l}(f)e^{-itL_C} = A_{\rho,C,l}(e^{itH}f)\quad (\forall t\in\mathbb{R}, \forall f\in\mathcal{H})
$$

が成り立つ. そこで,

$$
\alpha_t(A) := e^{itL_C}Ae^{-itL_C}\quad (\forall t\in\mathbb{R}, \forall A\in\mathcal{M}_{\rho,C,l})
$$

によって $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群 $\alpha = (\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を定義すると, Fock 真空 Ω が誘導する $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ 上の正規状態

$$
\omega : \mathcal{M}_{\rho,C,l} \ni A \mapsto (A\Omega \mid \Omega) \in \mathbb{C}
$$

は (α,β)-KMS 条件を満たす.

(7)

$$
e^{-\beta L_C} = \Gamma_-(e^{-\beta H}\oplus e^{\beta\overline{H}})
$$

が成り立つ. そして $e^{-\beta L_C}$ は $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ の巡回分離ベクトル Ω に付随するモジュラー作用素 (定義 14.99) である.

(8) $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ の巡回分離ベクトル Ω に付随するモジュラー共役子 (定義 14.99) は J_C である.

証明. (1) 定理 14.120 の (3) はユニタリ作用素が反線型ユニタリ作用素であっても成り立つので,

$$
\begin{aligned}
J_CA_{\rho,C,l}(f)J_C &= \Lambda\Gamma_-(E_C)\left(A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f,0) + A_-^*(0,\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f})\right)\Gamma_-(E_C)\Lambda \\
&= \Lambda\left(A_-((1-\overline{\rho})^{\frac{1}{2}}\overline{f},0) + A_-^*(0,\rho^{\frac{1}{2}}f)\right)\Lambda = A_{\rho,C,r}(f)\quad (\forall f\in\mathcal{H})
\end{aligned}
$$

である.

(2) 注意 14.149 より任意の $f\in\mathcal{H}$ に対し,

$$
\begin{aligned}
A_{\rho,C,r}(\overline{f}) &= \left(-A_-((1-\overline{\rho})^{\frac{1}{2}}\overline{f},0) + A_-^*(0,\rho^{\frac{1}{2}}f)\right)\Gamma_-(-1), \\
A_{\rho,C,r}^*(\overline{f}) &= \left(A_-^*((1-\overline{\rho})^{\frac{1}{2}}\overline{f},0) - A_-(0,\rho^{\frac{1}{2}}f)\right)\Gamma_-(-1)
\end{aligned}
$$

である. これより明らかである.

(3) (1) より $J_C\mathcal{M}_{\rho,C,l}J_C = \mathcal{M}_{\rho,C,r}$ であり, (2) より $\mathcal{M}_{\rho,C,r}\subseteq\mathcal{M}_{\rho,C,l}'$ であるから, $J_C\Omega = \Omega$ より,

$$
\mathcal{M}_{\rho,C,r}\Omega = J_C\mathcal{M}_{\rho,C,l}\Omega,\quad \mathcal{M}_{\rho,C,r}\Omega\subseteq\mathcal{M}_{\rho,C,l}\Omega,\quad \mathcal{M}_{\rho,C,l}\Omega\subseteq\mathcal{M}_{\rho,C,r}'\Omega
$$

である. よって Ω が $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ の巡回ベクトルであることを示せば十分である. そのためには,

$$
\mathcal{K} := \mathrm{span}\left\{\begin{array}{l} A_{\rho,C,l}^*(f_N)\cdots A_{\rho,C,l}^*(f_1)A_{\rho,C,l}(g_1)\cdots A_{\rho,C,l}(g_M)\Omega : \\ N,M\in\mathbb{Z}_+, f_1,\cdots,f_N,g_1,\cdots,g_M\in\mathcal{H}\end{array}\right\}\subseteq\mathcal{M}_{\rho,C,l}\Omega
$$

とおいて $\mathcal{K}$ が $\mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ で稠密であることを示せばよい. $\rho = (e^{\beta H}+1)^{-1}$ と $1-\rho = (1+e^{-\beta H})^{-1}$ は単射な自己共役作用素であるから,

$$
R := \mathrm{Ran}((1-\rho)^{\frac{1}{2}})\oplus\mathrm{Ran}(\overline{\rho}^{\frac{1}{2}})
$$

は $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ の稠密部分空間である. よって,

$$
\mathcal{F}_{-,\mathrm{fin},0}(R) = \mathrm{span}\bigcup_{N\in\mathbb{Z}_+}\Theta_{N,-}\left(\bigodot^{N}R\right)
$$

[*337]は $\mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ で稠密である．これより $\mathcal{K}$ が $\mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ において稠密であることを示すには，任意の $N\in\mathbb{Z}_+$ に対し，

$$\Theta_{N,-}\left(\bigodot^N R\right)\subseteq\mathcal{K} \tag{14.182}$$

が成り立つことを示せばよい．これを N に関する帰納法で示す．

$$((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f,0)=A^*_{\rho,C,l}(f)\Omega\in\mathcal{K},\quad (0,\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{g})=A_{\rho,C,l}(g)\Omega\in\mathcal{K}\ \ (\forall f,g\in\mathcal{H})$$

であるから，(14.182) は $N=0,1$ の場合は成り立つ．ある $N\in\mathbb{N}$ まで成り立つと仮定すると，任意の $\Psi\in\Theta_{N,-}(\bigodot^N R)\subseteq\mathcal{K}$ に対し，

$$\begin{aligned}
A^*_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f,0)\Psi&=A^*_{\rho,C,l}(f)\Psi-A_-(0,\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f})\Psi\in\mathcal{K}+\Theta_{N-1,-}\left(\bigodot^{N-1}R\right)\subseteq\mathcal{K},\\
A^*_-(0,\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f})\Psi&=A_{\rho,C,l}(f)\Psi-A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f,0)\Psi\in\mathcal{K}+\Theta_{N-1,-}\left(\bigodot^{N-1}R\right)\subseteq\mathcal{K}
\end{aligned}$$

であるから，(14.182) は $N+1$ の場合も成り立つ．よって (14.182) は任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して成り立つ．

(4) (2) より $\mathcal{M}_{\rho,C,r}\subseteq\mathcal{M}'_{\rho,C,l}$ であるから，

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\rho,C,l}\cap\mathcal{M}'_{\rho,C,l}&=(\mathcal{M}'_{\rho,C,l}\cup\mathcal{M}_{\rho,C,l})'\subseteq(\mathcal{M}_{\rho,C,r}\cup\mathcal{M}_{\rho,C,l})',\\
\mathcal{M}_{\rho,C,r}\cap\mathcal{M}'_{\rho,C,r}&=(\mathcal{M}'_{\rho,C,r}\cup\mathcal{M}_{\rho,C,r})'\subseteq(\mathcal{M}_{\rho,C,l}\cup\mathcal{M}_{\rho,C,r})'
\end{aligned}$$

である．よって $\mathcal{M}_{\rho,C,l},\mathcal{M}_{\rho,C,r}$ が因子環であることを示すには，

$$(\mathcal{M}_{\rho,C,l}\cup\mathcal{M}_{\rho,C,r})'=\mathbb{C}1$$

であることを示せばよい．任意の $T'\in(\mathcal{M}_{\rho,C,l}\cup\mathcal{M}_{\rho,C,r})'$ を取り固定し，$T'\in\mathbb{C}1$ を示す．(3) より Ω は $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ の巡回ベクトルなので特に，

$$\overline{(\mathcal{M}_{\rho,C,l}\cup\mathcal{M}_{\rho,C,r})''\Omega}=\mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$$

であり，

$$T'A''\Omega=A''T'\Omega\ \ (\forall A''\in(\mathcal{M}_{\rho,C,l}\cup\mathcal{M}_{\rho,C,r})'')$$

であるから，

$$T'\Omega\in\mathbb{C}\Omega$$

を示せば十分である．今，任意の $f\in\mathcal{H}$ に対し，

$$\begin{aligned}
A_{\rho,C,l}((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f)&=A_-(f,0)-A(\rho f,0)+A^*_-(0,\overline{(1-\rho)^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}f}),\\
A^*_{\rho,C,r}(\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f})&=\left(-A_-(\rho f,0)+A^*_-(0,\overline{(1-\rho)^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}f})\right)\Gamma_-(-1),\\
A^*_{\rho,C,l}(\rho^{\frac{1}{2}}f)&=A_-(0,\overline{f})-A_-(0,(1-\overline{\rho})\overline{f})+A^*_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}f,0),\\
A_{\rho,C,r}((1-\overline{\rho})^{\frac{1}{2}}\overline{f})&=\left(-A_-(0,(1-\overline{\rho})\overline{f})+A^*_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}f,0)\right)\Gamma_-(-1)
\end{aligned}$$

である．そこで任意の $f\in\mathcal{H}$ に対し，

$$\begin{aligned}
B_1(f)&:=A_{\rho,C,l}((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f)-A^*_{\rho,C,r}(\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f})\in(\mathcal{M}_{\rho,C,l}\cup\mathcal{M}_{\rho,C,r})'',\\
B_2(f)&:=A^*_{\rho,C,l}(\rho^{\frac{1}{2}}f)-A_{\rho,C,r}((1-\overline{\rho})^{\frac{1}{2}}\overline{f})\in(\mathcal{M}_{\rho,C,l}\cup\mathcal{M}_{\rho,C,r})''
\end{aligned}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
B_1(f)&=A_-(f,0)-A^*_{\rho,C,r}(\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f})(1-\Gamma_-(-1)),\\
B_2(f)&=A_-(0,\overline{f})-A_{\rho,C,r}((1-\overline{\rho})^{\frac{1}{2}}\overline{f})(1-\Gamma_-(-1))
\end{aligned}$$

[*337] $\bigodot^N R$ は N 個の R の線型空間としてのテンソル積である．

である. $(1-\Gamma_-(-1))\Omega = 0$ より,

$$B_1(f)\Omega = B_2(f)\Omega = 0 \ \ (\forall f \in \mathcal{H})$$

であり,

$$\Gamma_-(-1)B_k(f) = -B_k(f)\Gamma_-(-1) \ \ (\forall f \in \mathcal{H}, k = 1,2)$$

であるから,

$$B_k(f)(1 \pm \Gamma_-(-1))T'\Omega = (1 \mp \Gamma_-(-1))T'B_k(f)\Omega \ \ (\forall f \in \mathcal{H}, k = 1,2)$$

である. よって,

$$\Psi_\pm := \frac{1}{2}(1 \pm \Gamma_-(-1))T'\Omega$$

とおくと,

$$T'\Omega = \Psi_+ + \Psi_-, \ \ B_k(f)\Psi_\pm = 0 \ \ (\forall f \in \mathcal{H}, k = 1,2) \tag{14.183}$$

である.

$$(1-\Gamma_-(-1))(1+\Gamma_-(-1)) = 0$$

より,

$$(1-\Gamma_-(-1))\Psi_+ = 0$$

であるから,

$$0 = B_1(f)\Psi_+ = A_-(f,0)\Psi_+, \ \ 0 = B_2(f)\Psi_+ = A_-(0,\overline{f})\Psi_+ \ \ (\forall f \in \mathcal{H})$$

である. よって,

$$\Psi_+ \perp \Theta_{N,-}\left(\bigotimes^N(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})\right) \ \ (\forall N \in \mathbb{Z}_+)$$

であるから,

$$\Psi_+ \in \mathbb{C}\Omega \tag{14.184}$$

である. また,

$$(1-\Gamma_-(-1))^2 = 2(1-\Gamma_-(-1))$$

より,

$$(1-\Gamma_-(-1))\Psi_- = 2\Psi_-, \ \ \Gamma_-(-1)\Psi_- = -\Psi_-$$

であるから,

$$\begin{aligned}
0 = B_1(f)\Psi_- &= A_-(f,0)\Psi_- - 2A^*_{\rho,C,r}(\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f})\Psi_- \\
&= A_-(f,0)\Psi_- + 2\left(-A_-(\rho f, 0) + A^*_-(0, \overline{(1-\rho)^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}f})\right)\Psi_- \\
&= A_-((1-2\rho)f,0)\Psi_- + A^*_-(0, 2\overline{(1-\rho)^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}f})\Psi_- \ \ (\forall f \in \mathcal{H}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = B_2(f)\Psi_- &= A_-(0,\overline{f})\Psi_- - 2A_{\rho,C,r}((1-\overline{\rho})^{\frac{1}{2}}\overline{f})\Psi_- \\
&= A_-(0,\overline{f})\Psi_- + 2\left(-A_-(0,(1-\overline{\rho})f) + A^*_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}f, 0)\right)\Psi_- \\
&= A_-(0,(2\overline{\rho}-1)\overline{f})\Psi_- + A^*_-(0, 2\overline{(1-\rho)^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}f}) \ \ (\forall f \in \mathcal{H})
\end{aligned}$$

である. これより任意の $f, g \in \mathcal{H}$ に対し, $f', g' \in \mathcal{H}$ で,

$$A_-((2\rho-1)f, (2\overline{\rho}-1)\overline{g})\Psi_- = A^*_-(f', g')\Psi_-$$

なるものが存在する. よって,

$$R := \mathrm{Ran}(2\rho - 1) \oplus (2\overline{\rho} - 1)$$

とおけば,

$$\Psi_- \perp \Theta_{2N+1}\left(\bigodot^{2N+1} R\right) \quad (\forall N \in \mathbb{Z}_*) \tag{14.185}$$

が成り立つ. ここで Borel 関数カルキュラスの性質 (定理 10.68) より,

$$\mathrm{Ker}(2\rho - 1) = \mathrm{Ker}\left((e^{-\beta H} - 1)(e^{\beta H} + 1)^{-1}\right) = \mathrm{Ker}(H) = \{0\}$$

であるから, $2\rho - 1$ は単射自己共役作用素である. よって R は $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ において稠密であるので, (14.185) より,

$$\Psi_- \perp \Theta_{2N+1}\left(\bigotimes^{N}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})\right) \quad (\forall N \in \mathbb{Z}_+)$$

が成り立つ. また $1 - \Gamma_-(-1)$ は任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ に対し $\Theta_{2N}(\bigotimes^{2N}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}))$ 上で 0 であるので,

$$\Psi_- \perp \Theta_{2N}\left(\bigotimes^{N}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})\right) \quad (\forall N \in \mathbb{Z}_+)$$

も成り立つ. ゆえに $\Psi_- = 0$ なので, (14.183), (14.184) より,

$$T'\Omega = \Psi_+ + \Psi_- = \Psi_+ \in \mathbb{C}\Omega$$

である.

(5)

$$\Phi_{\rho,C,l}(if) = -iA_{\rho,C,l}(f) + iA^*_{\rho,C,l}(f) = \frac{1}{i}(A_{\rho,C,l}(f) - A^*_{\rho,C,l}(f)) \quad (\forall f \in \mathcal{H})$$

であるから,

$$\Phi_{\rho,C,l}(f) + i\Phi_{\rho,C,l}(if) = 2A_{\rho,C,l}(f) \quad (\forall f \in \mathcal{H})$$

である. また,

$$\Phi_{\rho,C,l}(f) = A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}f}) + A_-^*((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}f}) \quad (\forall f \in \mathcal{H})$$

であるから,

$$(\Phi_{\rho,C,l}(f)\Omega \mid \Omega) = 0 \quad (\forall f \in \mathcal{H}),$$

$$\begin{aligned}(\Phi_{\rho,C,l}(f)\Phi_{\rho,C,l}(g)\Omega \mid \Omega) &= (A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}f})\Phi_{\rho,C,l}(g)\Omega \mid \Omega) \\ &= \left[(A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}f}),\ \Phi_{\rho,C,l}(g)\right]_- \\ &= ((1-\rho)g \mid f) + (\rho f \mid g) \quad (\forall f, g \in \mathcal{H})\end{aligned}$$

である. 同様に, 任意の $f_1, \cdots, f_{2N} \in \mathcal{H}$ に対し,

$$(\Phi_{\rho,C,l}(f_1)\cdots\Phi_{\rho,C,l}(f_{2N-1})\Omega \mid \Omega) = (A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f_1, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}f_1})\Phi_{\rho,C,l}(f_2)\cdots\Phi_{\rho,C,l}(f_{2N-1})\Omega \mid \Omega) = 0$$

であり,

$$\begin{aligned}&(\Phi_{\rho,C,l}(f_1)\cdots\Phi_{\rho,C,l}(f_{2N})\Omega \mid \Omega) = (A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f_1, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}f_1})\Phi_{\rho,C,l}(f_2)\cdots\Phi_{\rho,C,l}(f_{2N})\Omega \mid \Omega) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Pairs}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{N} \left[A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f_{2j-1}, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}f_{2j-1}}),\ \Phi_{\rho,C,l}(f_{\sigma(2j)})\right]_- \\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Pairs}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{N} (\Phi_{\rho,C,l}(f_{\sigma(2j-1)})\Phi_{\rho,C,l}(f_{\sigma(2j)})\Omega \mid \Omega)\end{aligned}$$

である.

(6) 命題 14.115 の (4) と自己共役作用素の直和の Borel 関数カルキュラス (定理 10.87), および共役子による射影値測度の変換 (命題 10.207) より,

$$e^{itL_C} = \exp(itd\Gamma_-(H \oplus (-\overline{H}))) = \Gamma_-(\exp(it(H \oplus (-\overline{H})))) = \Gamma_-(e^{itH} \oplus \overline{e^{itH}}) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であるから, 定理 14.120 の (3) より,

$$\begin{aligned} e^{itL_C} A_{\rho,C,l}(f) e^{-itL_C} &= A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}} e^{itH} f, 0) + A_-^*(0, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} e^{itH} f}) \\ &= A_{\rho,C,l}(e^{itH} f) \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{H}) \end{aligned}$$

であり, 従って,

$$\alpha_t(\Phi_{\rho,C,l}(f)) = e^{itL_C} \Phi_{\rho,C,l}(f) e^{-itL_C} = \Phi_{\rho,C,l}(e^{itH} f) \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{H})$$

である. E_H を H のスペクトル測度とし, 任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対し,

$$\mathcal{D}_\varepsilon := \mathrm{span}\{\Phi_{\rho,C,l}(f_1) \cdots \Phi_{\rho,C,l}(f_N) : N \in \mathbb{Z}_+, f_1, \cdots, f_N \in \mathrm{Ran}\, E_H([\varepsilon, \varepsilon^{-1}])\}$$

とおき,

$$\mathcal{D} := \bigcup_{\varepsilon \in (0,1)} \mathcal{D}_\varepsilon \tag{14.186}$$

とおく. (14.178) より,

$$\mathcal{M}_{\rho,C,l} = \overline{\mathrm{span}\{\Phi_{\rho,C,l}(f_1) \cdots \Phi_{\rho,C,l}(f_N) : N \in \mathbb{Z}_+, f_1, \cdots, f_N \in \mathcal{H}\}}^{\mathrm{SOT}}$$

であり, SOT-$\lim_{\varepsilon \to +0} E_H([\varepsilon, \varepsilon^{-1}]) = 1$ であるから, $\mathcal{D}$ は $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ の SOT 稠密な部分 $*$-環である. 任意の $\varepsilon \in (0,1)$, 任意の $f, g \in \mathrm{Ran}\, E_H([\varepsilon, \varepsilon^{-1}])$ を取り固定する. (14.179) より,

$$\begin{aligned} \omega(\varphi_{\rho,C,l}(g) \alpha_t(\Phi_{\rho,C,l}(f))) &= (\Phi_{\rho,C,l}(g) \Phi_{\rho,C,l}(e^{itH} f)\Omega \mid \Omega) \\ &= (e^{itH} f \mid (1-\rho) g) + (e^{-itH} g \mid \rho f) \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{H}) \end{aligned} \tag{14.187}$$

であり, 従って,

$$\begin{aligned} \omega(\alpha_t(\Phi_{\rho,C,l}(f)) \Phi_{\rho,C,l}(g)) &= (\Phi_{\rho,C,l}(e^{itH} f) \Phi_{\rho,C,l}(g)\Omega \mid \Omega) \\ &= (e^{-itH} g \mid (1-\rho) f) + (e^{itH} f \mid \rho g) \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{H}) \end{aligned} \tag{14.188}$$

である. $f, g \in \mathrm{Ran}\, E_H([\varepsilon, \varepsilon^{-1}])$ は H の全解析ベクトルであるから, 定理 10.214 の (3) より,

$$F(z) := (e^{izH} f \mid (1-\rho) g) + (e^{-izH} g \mid \rho f) \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

として整関数 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が定義できる.

$$\|e^{izH} f\| \leqslant \|f\|, \quad \|e^{-izH} g\| \leqslant e^{\beta \varepsilon^{-1}} \|g\| \quad (\forall z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant \beta)$$

であるから F は $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant \beta\}$ 上で有界であり,

$$e^{-\beta H}(1-\rho) = \rho, \quad e^{\beta H} \rho = 1 - \rho \tag{14.189}$$

であることと, (14.187), (14.188) より,

$$F(t) = \omega(\varphi_{\rho,C,l}(g) \alpha_t(\Phi_{\rho,C,l}(f))), \quad F(t + i\beta) = \omega(\alpha_t(\Phi_{\rho,C,l}(f)) \Phi_{\rho,C,l}(g)) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

である. よって (14.180), (14.181) と定理 14.93 より ω は (α, β)-KMS 条件を満たす.

(7) 命題 14.115 の (4) と自己共役作用素の直和の Borel 関数カルキュラス (定理 10.87) より,

$$e^{-\beta L_C} = \exp\left(-\beta d\Gamma_-(H \oplus (-\overline{H}))\right) = \Gamma_-(e^{-\beta H} \oplus e^{\beta\overline{H}})$$

である. Δ を $(\mathcal{M}_{\rho,C,l}, \Omega)$ に付随するモジュラー作用素 (定義 14.99) とすると, (6) と冨田-竹崎の定理 14.103 より,

$$e^{itL_C} A e^{-itL_C} = \alpha_t(A) = \Delta^{-i\frac{t}{\beta}} A \Delta^{i\frac{t}{\beta}} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{\rho,C,l})$$

が成り立つ. 両辺を Ω に作用させて,

$$e^{itL_C} A\Omega = \Delta^{-i\frac{t}{\beta}} A\Omega \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{\rho,C,l})$$

を得る. $\mathcal{M}_{\rho,C,l}\Omega$ は $\mathcal{F}_-(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ において稠密であるので,

$$e^{itL_C} = \Delta^{-i\frac{t}{\beta}} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. よって補題 10.213 より,

$$L_C = -\frac{1}{\beta}\log(\Delta)$$

が成り立つので, Borel 関数カルキュラス (定理 10.68) より,

$$e^{-\beta L_C} = \Delta$$

が成り立つ.

(8) J を $(\mathcal{M}_{\rho,C,l}, \Omega)$ に付随するモジュラー共役子 (定義 14.99) とする. 極分解の一意性 (定理 10.204) より,

$$J\Delta^{\frac{1}{2}} = J_C \Delta^{\frac{1}{2}} \tag{14.190}$$

が成り立つことを示せばよい. (6) における $\mathcal{D}$ は $\mathcal{M}_{\rho,C,l}$ の SOT 稠密な部分 $*$-環 $\mathcal{D}$ であるから, 命題 14.108 より, $\mathcal{D}\Omega$ は $\Delta^{\frac{1}{2}}$ の芯である. よって (14.190) が $\mathcal{D}\Omega$ 上で成り立つことを示せばよい. そしてそのためには $\mathcal{D}$ の定義 (14.186) より, 任意の $\varepsilon \in (0,1)$ を取り固定し, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し,

$$J\Delta^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N} \Phi_{\rho,C,l}(f_j)\Omega = J_C \Delta^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N} \Phi_{\rho,C,l}(f_j)\Omega \quad (\forall f_1, \cdots, f_N \in \operatorname{Ran} E_H([\varepsilon, \varepsilon^{-1}])) \tag{14.191}$$

が成り立つことを示せばよい. これを N に関する帰納法で示す. (7) より $\Delta = e^{-\beta L_C}$ であるから, 命題 14.115 の (4) より,

$$\Delta^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{\beta}{2}L_C} = \exp\left(-\frac{\beta}{2} d\Gamma_-(H \oplus (-\overline{H}))\right) = \Gamma_-(e^{-\frac{\beta}{2}H} \oplus \overline{e^{\frac{\beta}{2}H}}) \tag{14.192}$$

である. よって任意の $f \in \operatorname{Ran} E_H([\varepsilon, \varepsilon^{-1}])$ に対し, (14.189) より,

$$\begin{aligned} J_C \Delta^{\frac{1}{2}} \Phi_{\rho,C,l}(f)\Omega &= \Lambda\Gamma_-(E_C)\Gamma_-(e^{-\frac{\beta}{2}H} \oplus e^{\frac{\beta}{2}\overline{H}})((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f}) \\ &= \Gamma_-(E_C)(\rho^{\frac{1}{2}} f, \overline{(1-\rho)^{\frac{1}{2}} f}) = (1-\rho^{\frac{1}{2}} f, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f}) \\ &= \Phi_{\rho,C,l}(f)\Omega = \Phi_{\rho,C,l}(f)^*\Omega = J\Delta^{\frac{1}{2}} \Phi_{\rho,C,l}(f)\Omega \end{aligned}$$

である. これより $N = 1$ の場合は (14.191) は成り立つ. (14.191) がある $N \in \mathbb{N}$ まで成り立つと仮定し, $N+1$ の場合も成り立つことを示す.

$$\operatorname{Ran} E_H([\varepsilon, \varepsilon^{-1}]) \ni f \mapsto \Phi_{\rho,C,l}(f) \in B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}))$$

は実線型写像であり, 反交換子積 $[\cdot,\cdot]_-$ に対し,

$$[\Phi_{\rho,C,l}(f), \Phi_{\rho,C,l}(g)]_- = 2\mathrm{Re}(g \mid f) \quad (\forall f, g \in \operatorname{Ran} E_H([\varepsilon, \varepsilon^{-1}])) \tag{14.193}$$

であるから, 実内積 $\mathrm{Re}(\cdot \mid \cdot)$ に関して互いに直交する単位ベクトル $f_1, \cdots, f_{N+1} \in \operatorname{Ran} E_H([\varepsilon, \varepsilon^{-1}])$ を取り,

$$J\Delta^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N+1} \Phi_{\rho,C,l}(f_j)\Omega = J_C\Delta^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N+1} \Phi_{\rho,C,l}(f_j)\Omega \tag{14.194}$$

が成り立つことを示せば十分である. このとき (14.193) より,

$$[\Phi_{\rho,C,l}(f_j), \Phi_{\rho,C,l}(f_k)]_- = 2\mathrm{Re}(f_k \mid f_j) = 0 \ \ (\forall j,k \in \{1,\cdots,N\} : j \neq k) \tag{14.195}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
J\Delta^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N+1} \Phi_{\rho,C,l}(f_j)\Omega &= \left(\prod_{j=1}^{N+1} \Phi_{\rho,C,l}(f_j)\right)^* \Omega \\
&= \prod_{j=1}^{N+1} \Phi_{\rho,C,l}(f_{N+2-j})\Omega = (-1)^{\frac{N(N+1)}{2}} \prod_{j=1}^{N+1} \Phi_{\rho,C,l}(f_j)\Omega \\
&= (-1)^{\frac{N(N+1)}{2}} \prod_{j=1}^{N+1} \left(A_-^*((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f_j}) + A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f_j})\right)\Omega
\end{aligned}$$

であり, (14.192) と (14.189) より,

$$\begin{aligned}
&J_C\Delta^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N+1} \Phi_{\rho,C,l}(f_j)\Omega \\
&= J_C\Gamma_-(e^{-\frac{\beta}{2}H} \oplus \overline{e^{\frac{\beta}{2}H}}) \prod_{j=1}^{N+1} \left(A_-^*((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f_j}) + A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f_j})\right)\Omega \\
&= \Lambda\Gamma_-(E_C) \prod_{j=1}^{N+1} \left(A_-^*(\rho^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{(1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j}) + A_-(e^{\frac{\beta}{2}H}(1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{e^{-\frac{\beta}{2}H}\rho^{\frac{1}{2}} f_j})\right)\Omega \\
&= \Lambda \prod_{j=1}^{N+1} \left(A_-^*((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f_j}) + A_-(e^{-\frac{\beta}{2}H}\rho^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{e^{\frac{\beta}{2}H}(1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j})\right)\Omega \\
&= \prod_{j=1}^{N+1} \left(\left(A_-^*((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f_j}) - A_-(e^{-\frac{\beta}{2}H}\rho^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{e^{\frac{\beta}{2}H}(1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j})\right)\Gamma_-(-1)\right)\Omega \\
&= (-1)^{\frac{N(N+1)}{2}} \prod_{j=1}^{N+1} \left(A_-^*((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f_j}) - A_-(e^{-\frac{\beta}{2}H}\rho^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{e^{\frac{\beta}{2}H}(1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j})\right)\Omega
\end{aligned}$$

(4 番目の等号は注意 14.149 による) であるから,

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{N+1} \left(A_-^*((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f_j}) + A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f_j})\right)\Omega \\
&= \prod_{j=1}^{N+1} \left(A_-^*((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f_j}) - A_-(e^{-\frac{\beta}{2}H}\rho^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{e^{\frac{\beta}{2}H}(1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j})\right)\Omega
\end{aligned}$$

が成り立つことを示せばよい. ここで帰納法の仮定より,

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=2}^{N+1} \left(A_-^*((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f_j}) + A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f_j})\right)\Omega \\
&= \prod_{j=2}^{N+1} \left(A_-^*((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f_j}) - A_-(e^{-\frac{\beta}{2}H}\rho^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{e^{\frac{\beta}{2}H}(1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j})\right)\Omega
\end{aligned}$$

は成り立つので,

$$\prod_{j=2}^{N+1}(\cdots)\Omega := \prod_{j=2}^{N+1} \left(A_-^*((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f_j}) + A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}} f_j})\right)\Omega$$

に対し,

$$A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f_1, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}f_1})\prod_{j=2}^{N+1}(\cdots)\Omega = -A_-(e^{-\frac{\beta}{2}H}\rho^{\frac{1}{2}}f_1, \overline{e^{\frac{\beta}{2}H}(1-\rho)^{\frac{1}{2}}f_1})\prod_{j=2}^{N+1}(\cdots)\Omega$$

が成り立つことを示せばよい. そのためには各 $j \in \{2, \cdots, N+1\}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\left[A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f_1, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}f_1}),\ A_-^*((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}f_j})\right]_- \\ &= -\left[A_-(e^{-\frac{\beta}{2}H}\rho^{\frac{1}{2}}f_1, \overline{e^{\frac{\beta}{2}H}(1-\rho)^{\frac{1}{2}}f_1}),\ A_-^*((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f_j, \overline{\rho^{\frac{1}{2}}f_j})\right]_- \end{aligned} \tag{14.196}$$

が成り立つことを示せば十分である.

$$\begin{aligned}((14.196)\text{ の左辺}) &= ((1-\rho)f_j \mid f_1) + (\rho f_1 \mid f_j) \\ &= (f_j \mid f_1) - (\rho f_j \mid f_1) + (\rho f_1 \mid f_j)\end{aligned}$$

であり, (14.189) より,

$$\begin{aligned}((14.196)\text{ の右辺}) &= -((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f_j \mid e^{\frac{\beta}{2}H}\rho^{\frac{1}{2}}f_1) - (e^{-\frac{\beta}{2}H}(1-\rho)^{\frac{1}{2}}f_1 \mid \rho^{\frac{1}{2}}f_j) \\ &= -(\rho f_j \mid f_1) - ((1-\rho)f_1 \mid f_j) \\ &= (\rho f_1 \mid f_j) - (\rho f_j \mid f_1) - (f_1 \mid f_j)\end{aligned}$$

である. ここで (14.195) より,

$$(f_j \mid f_1) = -(f_1 \mid f_j)$$

であるから, (14.196) は成り立つ. よって求める結果を得た.

□

定理 14.151. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, H を $\mathcal{H}$ 上の単射非負自己共役作用素, β を正数とし, 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Fermi 粒子系の粒子数密度と準自由状態 (定義 14.141) を,

$$\rho_{H,\beta} := (e^{\beta H}+1)^{-1} = (1+e^{-\beta H})^{-1}e^{-\beta H},$$

$$\varphi_{H,\beta} : \mathrm{CAR}(\mathcal{H}) \ni A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_M) \mapsto \delta_{N,M}\det((\rho f_i \mid g_j))_{i,j} \in \mathbb{C}$$

とおく. そして (π, Ω) を $\varphi_{H,\beta}$ に対する GNS 表現 (定義 14.21)

$$\varphi_{H,\beta}(A) = (\pi(A)\Omega \mid \Omega) \quad (\forall A \in \mathrm{CAR}(\mathcal{H}))$$

とし, その像が生成する von Neumann 環を,

$$\mathcal{M}_\pi = \pi(\mathrm{CAR}(\mathcal{H}))'' \subseteq B(\mathcal{H}_\pi)$$

とおく. また準自由状態 $\varphi_{H,\beta}$ の

$$\mathcal{M}_\pi \supseteq \pi(\mathrm{CAR}(\mathcal{H})) \simeq \mathrm{CAR}(\mathcal{H})$$

(定理 14.139 より π は忠実であることに注意) 上の正規状態としての一意拡張を,

$$\varphi_{H,\beta,\pi} : \mathcal{M}_\pi \ni A \mapsto (A\Omega \mid \Omega) \in \mathbb{C}$$

とおく. このとき,

(1) $\mathcal{M}_\pi$ は因子環であり, Ω は $\mathcal{M}_\pi$ の巡回分離ベクトル (定義 14.57) である.
(2) $\mathcal{H}_\pi$ 上の自己共役作用素 L_π で,

$$e^{itL_\pi}\pi(A_-(f))e^{-itL_\pi} = \pi(A_-(e^{itH}f)), \quad e^{itL_\pi}\Omega = \Omega \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{H})$$

を満たすものが唯一つ存在する.

(3)

$$\alpha_t^\pi(A) = e^{itL_\pi} A e^{-itL_\pi} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_\pi)$$

によって $\mathcal{M}_\pi$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群 $\alpha^\pi = (\alpha_t^\pi)_{t\in\mathbb{R}}$ を定義すると, 準自由状態 $\varphi_{H,\beta,\pi}$ は (α^π, β)-KMS 条件 (定義 14.84) を満たす唯一つの正規状態である. また $(\mathcal{M}_\pi, \Omega)$ に付随するモジュラー作用素 (定義 14.99) は $e^{-\beta L_\pi}$ である.

証明. (1) C を $\mathcal{H}$ 上の共役子 (定義 10.201) とし, 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し $\overline{f} := Cf$ とおき, $\mathcal{H}$ 上の任意の線型作用素 T に対し $\overline{T} := CTC$ とおく. 命題 14.136 の (2) と定理 14.139 より, $\mathrm{CAR}(\mathcal{H})$ の $\mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ 上への表現

$$\pi_\oplus : \mathrm{CAR}(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}))$$

で,

$$\pi_\oplus(A_-(f)) = A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f, 0) + A_-^*(0, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}} \overline{f}) \quad (\forall f \in \mathcal{H})$$

を満たすものが定まる. そして補題 14.127 より Fock 真空 $\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \in \mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\left(\pi_\oplus\left(A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_M)\right)\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \mid \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}\right) \\
&= \left(A_-^*(0,\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{g_1})\cdots A_-^*(0,\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{g_M})\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \mid A_-^*(0,\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f_1})\cdots A_-^*(0,\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f_N})\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}\right) \\
&= \delta_{N,M}\det\left((\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{g_i} \mid \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f_j})\right)_{i,j} = \delta_{N,M}\det((\rho f_i \mid g_j))_{i,j} \\
&= \varphi_{H,\beta}(A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_M)) \quad (\forall f_1,\cdots,f_N,g_1,\cdots,g_M \in \mathcal{H})
\end{aligned}$$

であり, 定理 14.150 の (3) より $\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$ は $\pi_\oplus$ の巡回ベクトルである. よって $(\pi_\oplus, \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}})$ は $\varphi_{H,\beta}$ の GNS 表現である. ゆえに命題 14.15 よりユニタリ作用素

$$U_\pi : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$$

で,

$$U_\pi \pi(A) U_\pi^* = \pi_\oplus(A) \quad (\forall A \in \mathrm{CAR}(\mathcal{H})), \quad U_\pi\Omega = \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \tag{14.197}$$

を満たすものが定まる. 定理 14.150 の (3) より von Neumann 環

$$\mathcal{M}_{\pi_\oplus} = \pi_\oplus(\mathrm{CAR}(\mathcal{H}))'' \subseteq B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}))$$

は因子環であり, 定理 14.143 の (4) より $\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$ は $\mathcal{M}_{\pi_\oplus}$ の巡回分離ベクトルである. そして (14.197) より,

$$\mathcal{M}_\pi = U_\pi^* \mathcal{M}_{\pi_\oplus} U_\pi, \quad \mathcal{M}_\pi' = U_\pi^* \mathcal{M}_{\pi_\oplus}' U_\pi$$

であるから $\mathcal{M}_\pi$ も因子環であり, Ω は $\mathcal{M}_\pi$ の巡回分離ベクトルである.

(2)

$$L_{\pi_\oplus} := d\Gamma_-(H \oplus (-\overline{H}))$$

とおけば, 定理 14.150 の (6) より,

$$\begin{aligned}
&e^{itL_{\pi_\oplus}} \pi_\oplus(A_-(f)) e^{-itL_{\pi_\oplus}} = \pi_\oplus(A_-(e^{itH} f)), \\
&e^{itL_{\pi_\oplus}} \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} = \Gamma_-(e^{itH} \oplus \overline{e^{itH}})\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} = \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{H})
\end{aligned} \tag{14.198}$$

が成り立つから, $\mathcal{H}_\pi$ 上の自己共役作用素

$$L_\pi := U_\pi^* L_{\pi_\oplus} U_\pi$$

を考えれば, ユニタリ作用素による射影値測度の変換 (定理 10.54) より,

$$e^{itL_\pi} = U_\pi^* e^{itL_{\pi_\oplus}} U_\pi \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であるから, (14.197), (14.198) より,

$$\begin{aligned} e^{itL_\pi}\pi(A_-(f))e^{-itL_\pi} &= U_\pi^* e^{itL_{\pi\oplus}} U_\pi \pi(A_-(f)) U_\pi^* e^{-itL_{\pi\oplus}} U_\pi \\ &= U_\pi^* e^{itL_{\pi\oplus}} \pi_\oplus(A_-(f)) e^{-itL_{\pi\oplus}} U_\pi \\ &= U_\pi^* \pi_\oplus(A_-(e^{itH} f)) U_\pi \\ &= \pi(A_-(e^{itH} f)) \ \ (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{H}), \end{aligned}$$

$$e^{itL_\pi}\Omega = U_\pi^* e^{itL_{\pi\oplus}} U_\pi \Omega = U_\pi^* e^{itL_{\pi\oplus}} \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} = U_\pi^* \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} = \Omega \ \ (\forall t \in \mathbb{R})$$

である. よって存在が示せた. 一意性は条件を満たす自己共役作用素 L_π に対し,

$$\begin{aligned} &e^{itL_\pi}\pi(A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_M))\Omega \\ &= e^{itL_\pi}\pi(A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_M))e^{-itL_\pi}\Omega \\ &= \pi(A_-^*(e^{itH}f_N)\cdots A_-^*(e^{itH}f_1)A_-(e^{itH}g_1)\cdots A_-(e^{itH}g_M))\Omega \\ &(\forall t \in \mathbb{R}, \forall N, M \in \mathbb{Z}_+, \forall f_1, \cdots, f_N, g_1, \cdots, g_M \in \mathcal{H}) \end{aligned}$$

であることと, Ω が π の巡回ベクトルであることによる.

(3)

$$\alpha_t^{\pi\oplus}(A) = e^{itL_{\pi\oplus}} A e^{-itL_{\pi\oplus}} \ \ (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{\pi\oplus})$$

に対し,

$$\alpha_t^{\pi}(\,\cdot\,) = U_\pi^* \alpha_t^{\pi\oplus}(U_\pi(\,\cdot\,)U_\pi^*)U_\pi \ \ (\forall t \in \mathbb{R})$$

であり, 定理 14.150 の (6) より $\varphi_{H,\beta,\pi_\oplus} = (\,\cdot\,\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \mid \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}})$ は $(\alpha^{\pi\oplus}, \beta)$-KMS 条件を満たすので,

$$\varphi_{H,\beta,\pi} = (\,\cdot\,\Omega \mid \Omega) = (U_\pi(\,\cdot\,)U_\pi^*\Omega_\oplus \mid \Omega_\oplus) = \varphi_{H,\beta,\pi_\oplus}(U_\pi(\,\cdot\,)U_\pi^*)$$

は (α^π, β)-KMS 条件を満たす. 定理 14.150 の (6) より $\mathcal{M}_\pi$ は因子環であるから, 定理 14.90 より, (α^π, β)-KMS 条件を満たす正規状態は $\varphi_{H,\beta,\pi}$ のみである. 定理 14.150 の (7) より $e^{-\beta L_{\pi\oplus}}$ は $(\mathcal{M}_{\pi_\oplus}, \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}})$ に付随するモジュラー作用素であるので, $e^{-\beta L_\pi} = U_\pi^* e^{-\beta L_{\pi\oplus}} U_\pi$ は $(\mathcal{M}_\pi, \Omega) = (U_\pi^* \mathcal{M}_{\pi_\oplus} U_\pi, U_\pi^* \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}})$ に付随するモジュラー作用素である.

□

定義 14.152 (荒木-Wyss 表現)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, H を $\mathcal{H}$ 上の単射非負自己共役作用素, β を正数とし, 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Fermi 粒子系の粒子数密度と準自由状態 (定義 14.141) を,

$$\rho_{H,\beta} := (e^{\beta H} + 1)^{-1} = (1 + e^{-\beta H})^{-1} e^{-\beta H},$$

$$\varphi_{H,\beta} : \mathrm{CAR}(\mathcal{H}) \ni A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_M) \mapsto \delta_{N,M}\det((\rho f_i \mid g_j))_{i,j} \in \mathbb{C}$$

とおく. このとき $\varphi_{H,\beta}$ に対する GNS 表現 (π, Ω) (定義 14.21)

$$\varphi_{H,\beta}(A) = (\pi(A)\Omega \mid \Omega) \ \ (\forall A \in \mathrm{CAR}(\mathcal{H}))$$

を, 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Fermi 粒子系の準自由状態 $\varphi_{H,\beta}$ に対する荒木-Wyss 表現と言い, その像が生成する von Neumann 環を,

$$\mathcal{M}_\pi = \pi(\mathrm{CAR}(\mathcal{H}))'' \subseteq B(\mathcal{H}_\pi)$$

を荒木-Wyss 環と言う. 定理 14.151 の (1) より荒木-Wyss 環 $\mathcal{M}_\pi$ は因子環であり, 定理 14.151 の (2) より Ω は $\mathcal{M}_\pi$ の巡回分離ベクトルである.

荒木-Wyss 表現 (π, Ω) に対し, 定理 14.151 の (2) より $\mathcal{H}_\pi$ 上の自己共役作用素 L_π で,

$$e^{itL_\pi}\pi(A_-(f))e^{-itL_\pi} = \pi(A_-(e^{itH}f)), \ \ e^{itL_\pi}\Omega = \Omega \ \ (\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{H})$$

を満たすものが唯一つ存在する．L_π を荒木-Wyss 表現 (π,Ω) に対する Liouvillian と言う．
定理 14.151 の (3) より，

$$\alpha_t^\pi(A) := e^{itL_\pi}Ae^{-itL_\pi} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_\pi)$$

によって $\mathcal{M}_\pi$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群 $\alpha^\pi = (\alpha_t^\pi)_{t\in\mathbb{R}}$ を定義すると，準自由状態 $\varphi_{H,\beta} : \mathrm{CAR}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ の荒木-Wyss 環 $\mathcal{M}_\pi$ 上の正規状態としての一意拡張

$$\varphi_{H,\beta,\pi} : \mathcal{M}_\pi \ni A \mapsto (A\Omega \mid \Omega) \in \mathbb{C}$$

は (α^π,β)-KMS 条件を満たす唯一つの正規状態である．

定理 14.153 (典型的な荒木-Wyss 表現)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, H を $\mathcal{H}$ 上の単射非負自己共役作用素, β を正数とし, 1 粒子 Hamiltonian H, 逆温度 β に対する自由 Fermi 粒子系の粒子数密度と準自由状態 (定義 14.141) を,

$$\rho_{H,\beta} := (e^{\beta H}+1)^{-1} = (1+e^{-\beta H})^{-1}e^{-\beta H},$$

$$\varphi_{H,\beta} : \mathrm{CAR}(\mathcal{H}) \ni A_-^*(f_N)\cdots A_-^*(f_1)A_-(g_1)\cdots A_-(g_M) \mapsto \delta_{N,M}\det((\rho f_i \mid g_j))_{i,j} \in \mathbb{C}$$

とおく．

(1) C を $\mathcal{H}$ 上の共役子 (定義 10.201) とし, 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し $\overline{f} := Cf$ とおき, $\mathcal{H}$ 上の任意の線型作用素 T に対し $\overline{T} := CTC$ とおくと, $\mathrm{CAR}(\mathcal{H})$ の $\mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ 上への表現

$$\pi_\oplus : \mathrm{CAR}(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}))$$

で,

$$\pi_\oplus(A_-(f)) = A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f, 0) + A_-^*(0, \overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f}) \quad (\forall f \in \mathcal{H})$$

を満たすものが定まり, Fock 真空 $\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \in \mathcal{F}_-(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ に対し, $(\pi_\oplus, \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}})$ は準自由状態 $\varphi_{H,\beta}$ に対する荒木-Wyss 表現である．そしてこの荒木-Wyss 表現に対する Liouvillian (定義 14.152) は,

$$L_{\pi_\oplus} = d\Gamma_-(H \oplus (-\overline{H}))$$

である．

(2) $\mathrm{CAR}(\mathcal{H})$ の $\mathcal{F}_-(\mathcal{H})\otimes\mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ 上への表現

$$\pi_\otimes : \mathrm{CAR}(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H})\otimes\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$$

で,

$$\pi_\otimes(A_-(f)) = A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}}f)\otimes 1 + \Gamma_-(-1)\otimes A_-(\overline{\rho}^{\frac{1}{2}}\overline{f}) \quad (\forall f \in \mathcal{H}) \tag{14.199}$$

を満たすものが定まり, Fock 真空 $\Omega_\mathcal{H} \in \mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ に対し, $(\pi_\otimes, \Omega_\mathcal{H}\otimes\Omega_\mathcal{H})$ は準自由状態 $\varphi_{H,\beta}$ に対する荒木-Wyss 表現である．そしてこの荒木-Wyss 表現に対する Liouvillian は,

$$L_{\pi_\otimes} = \overline{d\Gamma_-(H)\otimes 1 - 1\otimes d\Gamma_-(\overline{H})} \tag{14.200}$$

である．

(3) $e^{-\beta H} \in B^1(\mathcal{H})$ であると仮定する (従って定理 14.116 の (3) より $e^{-\beta d\Gamma_-(H)} \in B^1(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$ である)．このとき $\mathrm{CAR}(\mathcal{H})$ の Hilbert-Schmidt クラス $B^2(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$ 上への表現

$$\pi_{\mathrm{fin}} : \mathrm{CAR}(\mathcal{H}) \to B(B^2(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))),$$
$$\pi_{\mathrm{fin}}(A)S = AS \quad (\forall A \in \mathrm{CAR}(\mathcal{H}), \forall S \in B^2(\mathcal{F}_-(\mathcal{H})))$$

と,

$$\Omega_{\mathrm{fin}} := \frac{1}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta d\Gamma_-(H)})}e^{-\frac{\beta}{2}d\Gamma_-(H)} \in B^2(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$$

に対し, $(\pi_{\mathrm{fin}}, \Omega_{\mathrm{fin}})$ は準自由状態 $\varphi_{H,\beta}$ に対する荒木-Wyss 表現である. そしてユニタリ作用素

$$V : \mathcal{F}_-(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_-(\mathcal{H}) \ni \Psi_1 \otimes \Psi_2 \mapsto \Psi_1 \odot \Gamma_+(C)\Psi_2 \in B^2(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$$

($\odot$ は Schatten 形式 (定義 10.109)) を定義すると, 荒木-Wyss 表現 $(\pi_{\mathrm{fin}}, \Omega_{\mathrm{fin}})$ に対する Liouvillian は,

$$L_{\pi_{\mathrm{fin}}} = V(\overline{d\Gamma_-(H) \otimes 1 - 1 \otimes d\Gamma_-(\overline{H})})V^*$$

である.

証明. (1) 定理 14.151 の証明の中で示してある.

(2) 定理 14.127 におけるユニタリ作用素

$$U : \mathcal{F}_-(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_-(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}_-(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$$

に対し, $U\Omega_{\mathcal{H}} \otimes \Omega_{\mathcal{H}} = \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$ であり,

$$A_-((1-\rho)^{\frac{1}{2}} f) \otimes 1 + \Gamma_-(-1) \otimes A_-(\overline{\rho^{\frac{1}{2}} f}) = U^* \pi_{\oplus}(A_-(f))U \quad (\forall f \in \mathcal{H})$$

であるから, (14.199) によって CAR$(\mathcal{H})$ の $\mathcal{F}_-(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ 上への表現が定まり, $(\pi_{\otimes}, \Omega_{\mathcal{H}} \otimes \Omega_{\mathcal{H}})$ は $\varphi_{H,\beta}$ に対する GNS 表現である. 定理 14.127 より,

$$\overline{d\Gamma_-(H) \otimes 1 - 1 \otimes d\Gamma_-(\overline{H})} = UL_{\pi_{\oplus}}U^*$$

であるから, (14.200) は荒木-Wyss 表現 $(\pi_{\otimes}, \Omega_{\mathcal{H}} \otimes \Omega_{\mathcal{H}})$ に対する Liouvillian である.

(3) 命題 14.125 より CAR$(\mathcal{H})$ は $B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$ において SOT 稠密であるから,

$$\overline{\pi_{\mathrm{fin}}(\mathrm{CAR}(\mathcal{H}))\Omega_{\mathrm{fin}}} = \overline{B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))\Omega_{\mathrm{fin}}}$$

であり, $\Omega_{\mathrm{fin}} = \frac{1}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta d\Gamma_-(H)})} e^{-\frac{\beta}{2} d\Gamma_-(H)} \in B^2(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$ が $\mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ 上の単射自己共役作用素であることから,

$$\overline{B(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))\Omega_{\mathrm{fin}}} = B^2(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$$

である. よって Ω_{fin} は π_{fin} の巡回ベクトルである. そして定理 14.142 より, $(\pi_{\mathrm{fin}}, \Omega_{\mathrm{fin}})$ は $\varphi_{H,\beta}$ の GNS 表現である.

$$L := V(\overline{d\Gamma_-(H) \otimes 1 - 1 \otimes d\Gamma_-(\overline{H})})V^*$$

とおけば,

$$\begin{aligned} e^{itL} &= V \exp\left(it\left(\overline{d\Gamma_-(H) \otimes 1 - 1 \otimes d\Gamma_-(\overline{H})}\right)\right) V^* \\ &= V\left(e^{itd\Gamma_-(H)} \otimes e^{-itd\Gamma_-(\overline{H})}\right) V^* \\ &= V\left(e^{itd\Gamma_-(H)} \otimes \left(\Gamma_-(C)e^{itd\Gamma_-(H)}\Gamma_-(C)\right)\right) V^* \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

[*338] であるから,

$$e^{itL}(\Psi_1 \odot \Psi_2) = e^{itd\Gamma_-(H)}\Psi_1 \odot e^{itd\Gamma_-(H)}\Psi_2 = e^{itd\Gamma_-(H)}(\Psi_1 \odot \Psi_2)e^{-itd\Gamma_-(H)}$$
$$(\forall t \in \mathbb{R}, \forall \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{F}_-(\mathcal{H}))$$

である. よって,

$$e^{itL}S = e^{itd\Gamma_-(H)}Se^{-itd\Gamma_-(H)} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall S \in B^2(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))) \tag{14.201}$$

[*338] 1 番目の等号で定理 10.54 (射影値測度のユニタリ作用素による変換) を, 2 番目の等号で定理 10.104 (自己共役作用素のテンソル積の Borel 関数カルキュラス) を, 3 番目の等号で命題 10.207 (射影値測度の共役子による変換) を用いた.

であるので,

$$\begin{aligned}e^{itL}\pi_{\mathrm{fin}}(A_-(f))e^{-itL}S &= e^{itd\Gamma_-(H)}A_-(f)e^{-itd\Gamma_-(H)}S\\ &= \pi_{\mathrm{fin}}(A_-(e^{itH}f))S \quad (\forall f\in\mathcal{H},\forall S\in B^2(\mathcal{F}_-(\mathcal{H}))).\end{aligned}$$

ゆえに,

$$e^{itL}\pi_{\mathrm{fin}}(A_-(f))e^{-itL} = \pi_{\mathrm{fin}}(A_-(e^{itH}f)) \quad (\forall f\in\mathcal{H})$$

が成り立つ. また (14.201) より,

$$e^{itL}\Omega_{\mathrm{fin}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Tr}(e^{-\beta d\Gamma_-(H)})}}e^{itd\Gamma_-(H)}e^{-\frac{\beta}{2}d\Gamma_-(H)}e^{-itd\Gamma_-(H)} = \Omega_{\mathrm{fin}} \quad (\forall t\in\mathbb{R})$$

である. よって定理 14.151 の (2) より荒木-Wyss 表現 $(\pi_{\mathrm{fin}},\Omega_{\mathrm{fin}})$ に対する Liouvillian は,

$$L_{\pi_{\mathrm{fin}}} = V(\overline{d\Gamma_-(H)\otimes 1 - 1\otimes d\Gamma_-(\overline{H})})V^*$$

である.

□

定義 14.154 (荒木-Wyss の二重 Fock 表現, テンソル積 Fock 表現, Hilbert-Schmidt クラス表現)**.** 自由 Fermi 粒子系の準自由状態 $\varphi_{H,\beta}:\mathrm{CAR}(\mathcal{H})\to\mathbb{C}$ の荒木-Wyss 表現で, 定理 14.153 の (1), (2), (3) におけるものをそれぞれ二重 Fock 表現, テンソル積 Fock 表現, Hilbert-Scmidt クラス表現と言う.

14.12 準自由状態への緩和

補題 14.155. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, L を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし, E_L を L のスペクトル測度とする. このとき,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}e^{itL}dt = E_L(\{0\}) \quad (\text{in WOT}) \tag{14.202}$$

が成り立つ. ただし,

$$\left(\int_{-T}^{T}e^{itL}dt\right)v = \int_{-T}^{T}e^{itL}v\,dt \quad (\forall T\in(0,\infty),\forall v\in\mathcal{H})$$

である.

証明. 任意の $u,v\in\mathcal{H}$ に対し,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{T}e^{itL}dt\right)u \;\middle|\; v\right) &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(e^{itL}u\mid v)dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{it\lambda}dE_{L,u,v}(\lambda)\right)dt\\ &= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{T}e^{it\lambda}dt\right)dE_{L,u,v}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}}\frac{\sin(T\lambda)}{T\lambda}dE_{L,u,v}(\lambda)\\ &\to (E_L(\{0\})u\mid v) \quad (T\to\infty)\end{aligned}$$

である. よって (14.202) が成り立つ. □

定理 14.156 (準自由状態への緩和)**.** 逆温度 β に対する自由 Bose 粒子系 (resp. 自由 Fermi 粒子系) の準自由状態 (定義 14.141) φ の荒木-Woods 表現 (resp. 荒木-Wyss 表現) (π,Ω) を考え, 対応する荒木-Woods 環 (resp. 荒木-Wyss 環) を $\mathcal{M}_\pi\subseteq B(\mathcal{H}_\pi)$ とし, Liouvillian を L_π とする. そして,

$$\alpha_t^\pi(A) = e^{itL_\pi}Ae^{-itL_\pi} \quad (\forall t\in\mathbb{R},\forall A\in\mathcal{M}_\pi)$$

として $\mathcal{M}_\pi$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群を $\alpha^\pi=(\alpha_t^\pi)_{t\in\mathbb{R}}$ を定義する. また φ の $\mathcal{M}_\pi$ 上の (α^π,β)-KMS 状態としての一意拡張もそのまま

$$\varphi:\mathcal{M}_\pi\ni A\mapsto(A\Omega\mid\Omega)\in\mathbb{C}$$

と表す (定義 14.144, 定義 14.151 を参照). このとき次は互いに同値である.

(1) $\mathrm{Ker}(L) = \mathbb{C}\Omega$ が成り立つ.

(2) 任意の $\psi \in NS(\mathcal{M}_\pi)$*339, 任意の $A \in \mathcal{M}_\pi$ に対し,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \psi(\alpha_t^\pi(A))dt = \varphi(A)$$

が成り立つ.

(3) 任意の $A, B \in \mathcal{M}_\pi$ に対し,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(B\alpha_t^\pi(A))dt = \varphi(A)\varphi(B)$$

が成り立つ.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. このとき定理 10.68 の (3) より,

$$E_{L_\pi}(\{0\}) = \Omega \odot \Omega$$

($\odot$ は Schatten 形式 (定義 10.109)) であるから, $e^{itL}\Omega = \Omega$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ であることと補題 14.155 より,

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (\alpha_t^\pi(A)B'\Omega \mid B'\Omega)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (\alpha_t^\pi(A)\Omega \mid B'^*B'\Omega)dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (e^{itL_\pi}A\Omega \mid B'^*B'\Omega)dt = (A\Omega \mid \Omega)(\Omega \mid B'^*B'\Omega) \\
&= (B'\Omega \mid B'\Omega)\varphi(A) \quad (\forall A \in \mathcal{M}_\pi, \forall B' \in \mathcal{M}_\pi') \qquad (14.203)
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで Ω は $\mathcal{M}_\pi$ の分離ベクトルであるから $\overline{\mathcal{M}_\pi'\Omega} = \mathcal{H}_\pi$ であるので, (14.203) は,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (\alpha_t^\pi(A)v \mid v) = (v \mid v)\varphi(A) \quad (\forall A \in \mathcal{M}_\pi, \forall v \in \mathcal{H}_\pi)$$

を意味する. よって任意の $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ に対し,

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha_t^\pi(A)v_n \mid v_n)dt &= \lim_{T\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (\alpha_t^\pi(A)v_n \mid v_n)dt \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (v_n \mid v_n)\varphi(A) \quad (\forall A \in \mathcal{M}_\pi) \qquad (14.204)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 任意の $\psi \in NS(\mathcal{M}_\pi)$ に対し, 定理 10.158 の (4) より, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ で,

$$\psi(C) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (Cv_n \mid v_n) \quad (\forall C \in \mathcal{M}_\pi)$$

なるものが存在するから, (14.204) より,

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \psi(\alpha_t^\pi(A))dt &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha_t^\pi(A)v_n \mid v_n)dt \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (v_n \mid v_n)\varphi(A) = \varphi(A) \quad (\forall A \in \mathcal{M}_\pi)
\end{aligned}$$

が成り立つ.

(2) $\Rightarrow$ (3) は任意の $B \in \mathcal{M}_\pi$ に対し,

$$\varphi(B\,\cdot\,) : \mathcal{M}_\pi \ni A \mapsto \varphi(BA) \in \mathbb{C}$$

*339 $NS(\mathcal{M}_\pi)$ は $\mathcal{M}_\pi$ 上の正規状態全体.

が $\mathcal{M}_{\pi,*} = \mathrm{span}(NS(\mathcal{M}_\pi))$ (命題 14.36) に属することと, 任意の $\psi \in NS(\mathcal{M}_\pi)$ に対し $\psi(1) = 1$ であることによる.
(3) ⇒ (1) を示す. (3) が成り立つとする. 任意の $A, B \in \mathcal{M}_\pi$ に対し, 補題 14.155 より,

$$(A\Omega \mid (\Omega \odot \Omega)B^*\Omega) = \varphi(A)\varphi(B) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(B\alpha_t^\pi(A))dt$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (e^{itL}A\Omega \mid B^*\Omega)dt = (A\Omega \mid E_{L_\pi}(\{0\})B^*\Omega)$$

である. Ω は $\mathcal{M}_\pi$ の巡回ベクトルであるからこれは $E_{L_\pi}(\{0\}) = \Omega \odot \Omega$ を意味する. よって $\mathrm{Ker}(L_\pi) = \mathbb{C}\Omega$ である. □

定義 14.157 (純粋に絶対連続)**.** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, L を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし, E_L を L のスペクトル測度, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ を線型部分空間とする. 任意の $u, v \in \mathcal{K}$ に対し, 複素 Borel 測度

$$E_{L,u,v} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \ni B \mapsto (E_L(B)u \mid v) \in \mathbb{C}$$

が Lebesgue 測度に関して絶対連続 (定義 5.100) であるとき, L は $\mathcal{K}$ 上で純粋に絶対連続であると言う. また L が $\mathcal{H}$ 上で純粋に絶対連続であることを, 単に L は純粋に絶対連続であると言う.

補題 14.158. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, L を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし, E_L を L のスペクトル測度とする. もし L が $(\mathrm{Ker}(L))^\perp = \mathrm{Ran}\, E_L(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ (定理 10.68 の (3) を参照) 上で純粋に絶対連続であるならば,

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{itL} = E_L(\{0\}) \quad (\text{in WOT})$$

が成り立つ.

証明. 任意の $v \in \mathcal{H}$ を取り固定する. $u := E_L(\mathbb{R}\backslash\{0\})v$ とおくと,

$$(e^{itL}v \mid v) = (e^{itL}u \mid u) + (E_L(\{0\})v \mid v) \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \tag{14.205}$$

である. 仮定より,

$$E_{L,u,u} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \ni B \mapsto (E_L(B)u \mid u) \in \mathbb{R}$$

は Lebesgue 測度に関して絶対連続であるから, Radon-Nikodym の定理 5.106 より, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ で,

$$E_{L,u,u}(B) = \int_B f(\lambda)d\lambda \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$$

を満たすものが存在する. よって,

$$(e^{itL}u \mid u) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda}dE_{L,u,u}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)e^{it\lambda}d\lambda \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であり, $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ の元の Fourier 変換は $C_0(\mathbb{R})$ に属する (命題 8.58 の (6)) ので,

$$\lim_{t\to\pm\infty}(e^{itL}u \mid u) = \lim_{t\to\pm\infty}\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)e^{it\lambda}d\lambda = 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

である. ゆえに (14.205) より,

$$\lim_{t\to\pm\infty}(e^{itL}v \mid v) = (E_L(\{0\})v \mid v)$$

であるから, 偏極恒等式 (10.4) より WOT で $\lim_{t\to\pm\infty} e^{itL} = E_L(\{0\})$ が成り立つ. □

補題 14.159. $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, H を純粋に絶対連続な自己共役作用素とする. このとき,

(1) $\mathrm{Ker}(d\Gamma_\pm(H)) = \mathbb{C}\Omega$ が成り立つ. ただし $\Omega \in \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$ は Fock 真空である.
(2) $d\Gamma_\pm(H)$ は $(\mathrm{Ker}(d\Gamma_\pm(H)))^\perp$ 上で純粋に絶対連続である.

証明. $E_H : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を H のスペクトル測度とすると, 仮定より任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し,

$$E_{H,u,v} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \ni B \mapsto (E_H(B)u \mid v) \in \mathbb{C}$$

は Lebesgue 測度に関して絶対連続である. 命題 14.115 の (3) より, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し,

$$d\Gamma_N(H) = \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^N \lambda_j d \bigotimes^N E_H(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$$

であるから, $E_{d\Gamma_N(H)} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}(\bigotimes^N \mathcal{H})$ を $d\Gamma_N(H)$ のスペクトル測度とすると, 命題 10.66 より,

$$E_{d\Gamma_N(H)}(B) = \chi_B(d\Gamma_N(H)) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_B \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j \right) d \bigotimes^N E_H(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$$

である. よって任意の $u_1, \cdots, u_N, v_1, \cdots, v_N \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\begin{aligned} E_{d\Gamma_N(H), \otimes_{j=1}^N u_j, \otimes_{j=1}^N v_j}(B) &= (E_{d\Gamma_N(H)}(B) \otimes_{j=1}^N u_j \mid \otimes_{j=1}^N v_j) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \chi_B \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j \right) d(E_{H,u_1,v_1} \otimes \cdots \otimes E_{H,u_N,v_N})(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \end{aligned}$$

である. これより,

$$E_{d\Gamma_N(H), \otimes_{j=1}^N u_j, \otimes_{j=1}^N v_j} = E_{H,u_1,v_1} * \cdots * E_{H,u_N,v_N}$$

が成り立つ. ただし右辺は $\mathbb{R}$ 上の測度群環 $M(\mathbb{R})$ における合成積 (定義 12.30) である. Radon-Nikodym の定理 5.106 と定理 12.32 より, Lebesgue 測度に関して絶対連続な $M(\mathbb{R})$ の元全体 $M_{\mathrm{ac}}(\mathbb{R})$ は, 測度群環 $M(\mathbb{R})$ の閉部分 $*$-環 (L^1 群環 $L^1(\mathbb{R})$ と等長同型) であるので, 任意の $u, v \in \bigotimes^N \mathcal{H} = \overline{\mathrm{span}\left\{\otimes_{j=1}^N v_j : v_1, \cdots, v_N \in \mathcal{H}\right\}}$ に対し,

$$\begin{aligned} E_{d\Gamma_N(H),u,v} &\in \overline{\mathrm{span}\left\{ E_{d\Gamma_N(H), \otimes_{j=1}^N u_j, \otimes_{j=1}^N v_j} : u_1, v_1, \cdots, u_N, v_N \in \mathcal{H} \right\}} \\ &= \overline{\mathrm{span}\left\{ E_{H,u_1,v_1} * \cdots * E_{H,u_N,v_N} : u_1, v_1, \cdots, u_N, v_N \in \mathcal{H} \right\}} \subseteq M_{\mathrm{ac}}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

が成り立つ. これより $d\Gamma_N(H)$ は純粋に絶対連続であるから, その簡約部分である $d\Gamma_{N,\pm}(H)$ (定義 14.114 を参照) も純粋に絶対連続である. 純粋に絶対連続な自己共役作用素は単射である*340から,

$$\mathrm{Ker}(d\Gamma_{N,\pm}(H)) = \{0\} \quad (\forall N \in \mathbb{N})$$

より,

$$\mathrm{Ker}(d\Gamma_\pm(H)) = \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}_+} \mathrm{Ker}(d\Gamma_{N,\pm}(H)) = \mathbb{C}\Omega$$

である. また $d\Gamma_\pm(H)$ のスペクトル測度を $E_{d\Gamma_\pm(H)} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}(\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}))$ とすると, 自己共役作用素の直和の Borel 関数カルキュラス (定理 10.87) より,

$$E_{d\Gamma_\pm(H)}(B) = \chi_B(d\Gamma_\pm(H)) = \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}_+} \chi_B(d\Gamma_{N,\pm}(H)) = \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}_+} E_{d\Gamma_{N,\pm}(H)}(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$$

であるから, 任意の $\Psi = (0, \Psi_1, \Psi_2, \cdots) \in (\mathrm{Ker}(d\Gamma_\pm(H)))^\perp = (\mathbb{C}\Omega)^\perp$ に対し,

$$(E_{d\Gamma_\pm(H)}(B)\Psi \mid \Psi) = \sum_{N \in \mathbb{N}} (E_{d\Gamma_{N,\pm}(H)}(B)\Psi_N \mid \Psi_N) \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$$

である. よって任意の $\Psi \in (\mathrm{Ker}(d\Gamma_\pm(H)))^\perp = (\mathbb{C}\Omega)^\perp$ に対し,

$$E_{d\Gamma_\pm(H),\Psi,\Psi} = \sum_{N \in \mathbb{N}} E_{d\Gamma_{N,\pm}(H),\Psi_N,\Psi_N} \in M_{\mathrm{ac}}(\mathbb{R})$$

であるから, $d\Gamma_\pm(H)$ は $(\mathrm{Ker}(d\Gamma_\pm(H)))^\perp = (\mathbb{C}\Omega)^\perp$ 上で純粋に絶対連続である. □

*340 定理 10.68 の (3) と一点集合の Lebesgue 測度が 0 であることによる.

定理 14.160 (準自由状態への緩和)**.** 逆温度 β に対する自由 Bose 粒子系 (resp. 自由 Fermi 粒子系) の準自由状態 (定義 14.141) φ の荒木-Woods 表現 (resp. 荒木-Wyss 表現) (π, Ω) を考え, 対応する荒木-Woods 環 (resp. 荒木-Wyss 環) を $\mathcal{M}_\pi \subseteq B(\mathcal{H}_\pi)$ とし, Liouvillian を L_π とする. そして,

$$\alpha_t^\pi(A) = e^{itL_\pi} A e^{-itL_\pi} \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_\pi)$$

として $\mathcal{M}_\pi$ 上の弱連続な 1 径数自己同型群を $\alpha^\pi = (\alpha_t^\pi)_{t\in\mathbb{R}}$ を定義する. また φ の $\mathcal{M}_\pi$ 上の (α^π, β)-KMS 状態としての一意拡張もそのまま

$$\varphi : \mathcal{M}_\pi \ni A \mapsto (A\Omega \mid \Omega) \in \mathbb{C}$$

と表す (定義 14.144, 定義 14.151 を参照). このとき次の (3), (4), (5) は互いに同値であり, (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) が成り立つ.

(1) H は純粋に絶対連続 (定義 14.157) である.
(2) $\mathrm{Ker}(L_\pi) = \mathbb{C}\Omega$ であり, L_π は $(\mathrm{Ker}(L_\pi))^\perp$ 上で純粋に絶対連続である.
(3) WOT で $\lim_{t\to\pm\infty} e^{itL_\pi} = \Omega \odot \Omega$ が成り立つ. ただし $\odot$ は Schatten 形式 (定義 10.109) である.
(4) 任意の $\psi \in NS(\mathcal{M}_\pi)$ (正規状態), 任意の $A \in \mathcal{M}_\pi$ に対し, $\lim_{t\to\pm\infty} \psi(\alpha_t^\pi(A)) = \varphi(A)$ が成り立つ.
(5) 任意の $A, B \in \mathcal{M}_\pi$ に対し, $\lim_{t\to\pm\infty} \varphi(B\alpha_t^\pi(A)) = \varphi(A)\varphi(B)$ が成り立つ.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. φ に対する荒木-Woods (荒木-Wyss) の二重 Fock 表現 $(\pi_\oplus, \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}})$ を考える[*341] このとき H が純粋に絶対連続であることから $H \oplus (-\overline{H})$ も純粋に絶対連続であるので, 補題 14.159 より,

$$\mathrm{Ker}(d\Gamma_\pm(H \oplus (-\overline{H}))) = \mathbb{C}\Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$$

であり, $d\Gamma_\pm(H \oplus (-\overline{H}))$ は $(\mathrm{Ker}(d\Gamma_\pm(H \oplus (-\overline{H}))))^\perp$ 上で純粋に絶対連続である. 定理 14.146 と定理 14.153 より, ユニタリ作用素 $U : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ で,

$$L_\pi = U^* d\Gamma_\pm(H \oplus (-\overline{H}))U, \quad U\Omega = \Omega_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$$

なるものが取れるから,

$$\mathrm{Ker}(L_\pi) = U^* \mathrm{Ker}(d\Gamma_\pm(H \oplus (-\overline{H}))) = \mathbb{C}\Omega$$

であり, 射影値測度のユニタリ作用素による変換 (定理 10.54) より, L_π は $(\mathrm{Ker}(L_\pi))^\perp$ 上で純粋に絶対連続である. よって (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (3) は補題 14.158 による.
(3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (3) は定理 14.156 と全く同様にして (より簡単に) 示せる. □

[*341] 定理 14.146 の (1), 定理 14.153 の (1) を参照.

15 古典力学の考察

15.1 Newton の運動法則

定義 15.1 (質点系の運動)**.** 点とみなし得る物体のことを質点と呼ぶ. 物体には質量と呼ばれる固有の正数が付随する. 質量 m を持つ質点のことを簡単のため質点 m と呼ぶ. 有限個の質点 $m_1, \cdots, m_n$ の集まりのことを質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ と呼ぶこととする. 古典力学においては物体の位置の時間に対する変化の仕方を考える. 物体は, 例えその広がりが無視できない場合でも, それを十分小さいパーツに分割したりすることにより質点系として扱う. 従って古典力学においては質点系の位置の時間に対する変化の仕方を考える. 質点の位置は, 直交座標系 (原点と右手系 (定義 6.123) の直交座標軸) を設定することにより $\mathbb{R}^3$ の点で表せる. そして質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ の位置は, 各質点 m_j の位置を $r_j \in \mathbb{R}^3$ として, $\mathbb{R}^{3n}$ の点 $r = (r_1, \cdots, r_n)$ によって表せる. $I \subseteq \mathbb{R}$ を区間とする. 時間区間 I における質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ の運動とは, 各 $t \in I$ に対し, 質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ の時刻 t における位置 $r(t) = (r_1(t), \cdots, r_n(t)) \in \mathbb{R}^{3n}$ を対応させる関数 $r(t) : I \to \mathbb{R}^{3n}$ のことである. 質点系の運動

$$I \ni t \mapsto r(t) = (r_1(t), \cdots, r_n(t)) \in \mathbb{R}^{3n}$$

は少なくとも C^2 級程度には滑らかであるとする. 従って, 各時刻 $t \in I$ に対し,

$$\begin{aligned} v(t) = (v_1(t), \cdots, v_n(t)) &:= \frac{d}{dt}r(t) = \left(\frac{d}{dt}r_1(t), \cdots, \frac{d}{dt}r_n(t)\right) \in \mathbb{R}^{3n}, \\ \frac{d}{dt}v(t) = \left(\frac{d}{dt}v_1(t), \cdots, \frac{d}{dt}v_n(t)\right) &= \left(\frac{d^2}{dt^2}r_1(t), \cdots, \frac{d^2}{dt^2}r_n(t)\right) \in \mathbb{R}^{3n} \end{aligned}$$

が定義できる. $v(t) : I \to \mathbb{R}^{3n}$, $\frac{d}{dt}v(t) : I \to \mathbb{R}^{3n}$ をそれぞれ質点系の運動 $r(t) : I \to \mathbb{R}^{3n}$ の速度, 加速度と呼ぶ.

定義 15.2 (Newton の運動法則)**.** ある直交座標系 (原点と右手系 (定義 6.123) の直交座標軸) を設定すれば, 他から全く影響を受けていない孤立した質点の運動は等速直線運動 (速度が時間に依らず一定である運動) であるとする. このような直交座標系のことを "慣性系" と呼び, 慣性系が存在すると言う法則を Newton の慣性の法則と呼ぶ. 通常, 地球上の物体の運動を考えるとき, 地表に固定した直交座標系は十分良い精度で慣性系とみなせる.
慣性系において, 質点 m の運動 $r(t) : I \to \mathbb{R}^3$ が等速直線運動ではないとする. このとき, この質点には, その運動の仕方を変化させる "力" と呼ばれる作用が加わっていると考え, 時刻 $t \in I$ において質点 m に加わる力 $F(t)$ は,

$$F(t) = m\frac{d^2}{dt^2}r(t) = m\frac{d}{dt}v(t)$$

と表される. これを Newton の運動方程式と言う. Newton の運動方程式は, 質点 m に加わる力の定義式とみなせる. また一方で, 各時刻 $t \in I$ において質点に加わる力 $F(t)$ が, 質点の位置 $r(t)$ と速度 $v(t)$ の関数として既知であるならば, Newton の運動方程式は, 質点の運動を規定する常微分方程式とみなせる. 質点に複数の力 $F_1, \cdots, F_n$ が加わっているとき, その効果は 1 つの力 $F_1 + \cdot + F_n$ によって表せる.
質点 m_1, m_2 があるとする. もし m_1 が m_2 に力 F を及ぼしているならば, m_2 は m_1 に力 $-F$ を及ぼしている. これを作用反作用の法則と言う.
質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ が位置 $(r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ にあるとき,

$$R := \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j r_j}{\sum_{j=1}^{n} m_j} \in \mathbb{R}^3$$

を質点系の重心と呼ぶ. 質点系の運動 $r(t) = (r_1(t), \cdots, r_n(t)) : I \to \mathbb{R}^{3n}$ に対し, 重心の運動

$$R(t) := \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j r_j(t)}{\sum_{j=1}^{n} m_j} : I \to \mathbb{R}^3$$

が伴う. 運動が慣性系におけるものであるとすると, Newton の運動方程式より,

$$m_j\frac{d^2}{dt^2}r_j(t) = F_j(t) \quad (j = 1, \cdots, n)$$

であるから,

$$M := \sum_{j=1}^{n} m_j, \quad F(t) := \sum_{j=1}^{n} F_j(t)$$

とおけば,

$$M\frac{d^2}{dt^2}R(t) = F(t)$$

が成り立つ. 従って, 質点系の重心の運動 $R(t) : I \to \mathbb{R}^3$ は, 質点系の全質量 M を持ち, 質点系に加わる力の総和を受ける質点の運動と同じものである.

万有引力定数と呼ばれる正の物理定数 G がある. 質点 m_1, m_2 が位置 $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^3$ にあるとする. このとき m_1 は m_2 に力

$$-Gm_1m_2\frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3}$$

を及ぼし, m_2 は m_1 に力

$$-Gm_1m_2\frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|^3}$$

を及ぼしている. この力を万有引力と呼ぶ. 位置 $r \in \mathbb{R}^3$ にある質点 m が位置 $(r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ にある質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ から及ぼされる万有引力は,

$$-\sum_{j=1}^{n} Gmm_j\frac{r - r_j}{|r - r_j|^3}$$

である. この類推で, 有界 Borel 集合 $B \subseteq \mathbb{R}^3$ に質量密度 $\rho : B \to [0, \infty)$ で分布する物体が位置 $r \in \mathbb{R}^3 \backslash B$ にある質点 m に及ぼす万有引力は,

$$F = -Gm\int_B \rho(x)\frac{r - x}{|r - x|^3}dx$$

であると考えられる. 定理 11.59 よりこれは,

$$F = Gm\nabla_r\int_B \frac{\rho(x)}{|r - x|}dx$$

と表せる. よってもし物体 B が球体であり, 質量密度 $\rho : B \to [0, \infty)$ が B の中心 $a \in \mathbb{R}^3$ に関して球対称であるならば, 次の命題 15.3 より,

$$M := \int_B \rho(x)dx$$

とおけば,

$$F = GmM\nabla_r\frac{1}{|x - a|} = -GmM\frac{r - a}{|r - a|^3}$$

が成り立つ. ゆえにこの場合, 質点 m がこの球体から受ける万有引力は, 球体の全質量 M を持ち, 球体の中心 a に位置する質点から受ける万有引力と同じものである.

命題 15.3 (球対称な質量分布を持つ物体から受ける万有引力)**.** $a \in \mathbb{R}^3$, $R \in (0, \infty)$ とし, $CB(a, R) \subseteq \mathbb{R}^3$ を中心 a, 半径 R の閉球とする. $\rho : CB(a, R) \to \mathbb{C}$ を有界 Borel 関数で, a に関して球対称であるとする. このとき任意の $x \in \mathbb{R}^3 \backslash CB(a, R)$ に対し,

$$\int_{CB(a,R)} \frac{\rho(y)}{|x - y|}dy = \frac{1}{|x - a|}\int_{CB(a,R)} \rho(y)dy$$

が成り立つ.

証明. $l := |x - a|$ とおき, $k(r) : [0, R] \to \mathbb{C}$ を,

$$k(r) := \rho(a + r\omega) \quad (\forall (r, \omega) \in [0, R] \times S_2)$$

(ρ が a に関して球対称であることに注意) とおく. $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 (e_1, e_2, e_3) で $x - a = le_1$ なるものを取り,

$$[0, R] \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \ni (r, \theta, \theta') \mapsto a + r\cos(\theta)e_1 + r\sin(\theta)\cos(\theta')e_2 + r\sin(\theta)\sin(\theta')e_3 \in CB(a, R)$$

なる極座標変換 (定理 6.99) を考えれば,

$$\int_{CB(a,R)} \frac{\rho(y)}{|x-y|}dy = \int_0^R 2\pi r^2 k(r) \left(\int_0^\pi \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{l^2+r^2-2lr\cos(\theta)}} \right) dr$$
$$= \int_0^R 2\pi r^2 k(r) \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{l^2+r^2-2lrt}} dt \right) dr$$
$$= \int_0^R 2\pi r^2 k(r) \frac{1}{lr} \left(\sqrt{l^2+r^2+2lr} - \sqrt{l^2+r^2-2lr} \right) dr$$
$$= \int_0^R \frac{2\pi r k(r)}{l}((l+r)-(l-r))dr = \frac{1}{l}\int_0^R 4\pi r^2 k(r) dr$$
$$= \frac{1}{l}\int_0^R r^2 \int_{S_2} \rho(a+r\omega) d\mu_{S_2}(\omega) dr = \frac{1}{|x-a|}\int_{CB(a,R)} \rho(y)dy$$

である. □

定義 15.4 (慣性力)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ を時間区間とし, $b(t): I \to \mathbb{R}^3$, $A(t) = (e_1(t), e_2(t), e_3(t)): I \to SO(3)$ をそれぞれ滑らかな関数とする. 今, 慣性系 Σ_0 から見て, 各時刻 $t \in I$ において原点が $b(t) \in \mathbb{R}^3$ にあり, 右手系の直交座標軸が $(e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ であるような直交座標系 Σ を考える. Σ を Σ_0 から見て $b(t): I \to \mathbb{R}^3$ によって並進し, $A(t): I \to SO(3)$ によって回転する直交座標系と言う. 質点 m の運動を Σ から見たものを $r(t): I \to \mathbb{R}^3$, Σ_0 から見たものを $R(t): I \to \mathbb{R}^3$ とする. すなわち,

$$R(t) = A(t)r(t) + b(t) \quad (\forall t \in I) \tag{15.1}$$

である. 各時刻 $t \in I$ において質点 m に加わる力が慣性系 Σ_0 から見て $F(t) \in \mathbb{R}^3$ であるとすると, Newton の運動方程式より,

$$F(t) = m\frac{d^2}{dt^2}R(t) \tag{15.2}$$

である. ここで (15.1) より,

$$\frac{d^2}{dt^2}R(t) = A(t)\frac{d^2}{dt^2}r(t) + \left(\frac{d^2}{dt^2}A(t)\right)r(t) + 2\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)\frac{d}{dt}r(t) + \frac{d^2}{dt^2}b(t)$$

であるから, (15.2) より,

$$m\frac{d^2}{dt^2}r(t) = A(t)^{-1}F(t) - mA(t)^{-1}\left(\frac{d^2}{dt^2}A(t)\right)r(t) - 2mA(t)^{-1}\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)\frac{d}{dt}r(t) - mA(t)^{-1}\frac{d^2}{dt^2}b(t) \tag{15.3}$$

が成り立つ. (15.3) の右辺の第一項 $A(t)^{-1}F(t) \in \mathbb{R}^3$ は, 質点 m に加わる力を直交座標系 Σ の座標で表したものである. もし (15.3) を直交座標系 Σ における Newton の運動方程式とみなすならば, (15.3) の右辺の第二項, 第三項, 第四項は Σ が慣性系 Σ_0 に対して動いていることによる見かけ上の力である. これらの見かけ上の力を慣性力と呼ぶ. 特に右辺の第二項を遠心力, 第三項を Coriolis の力と呼ぶ.

定義 15.5 (ベクトルに対応する回転の生成子)**.** Lie$(SO(3))$ の標準基底 (F_1, F_2, F_3) (定義 12.171)

$$F_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を考え, 任意の $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ に対し,

$$\widehat{v} := v_1F_1 + v_2F_2 + v_3F_3 \in \mathrm{Lie}(SO(3))$$

とおく. これをベクトル $v \in \mathbb{R}^3$ に対応する回転の生成子と呼ぶこととする. 任意の $v \in \mathbb{R}^3$, $\theta \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\exp(\theta\widehat{v}) \in SO(3)$$

を, v 方向の $\theta\|v\|$ 回転と呼ぶこととする (この呼び方の妥当性については次の命題 15.6 の (3) を参照).

命題 15.6 (ベクトルに対応する回転の生成子の基本性質)**.** 任意の $u, v \in \mathbb{R}^3$ に対し, $\hat{u} \in \mathrm{Lie}(SO(3))$ を u に対応する回転の生成子 (定義 15.5), $u \times v \in \mathbb{R}^3$ を u, v のベクトル積 (定義 6.65) とする. このとき,

(1) 任意の $u, v \in \mathbb{R}^3$ に対し,
$$\hat{u}v = u \times v$$
が成り立つ.

(2) 任意の $u \in \mathbb{R}^3$, $A \in SO(3)$ に対し,
$$\widehat{(Au)} = A\hat{u}A^{-1}$$
が成り立つ.

(3) 任意の単位ベクトル $u \in \mathbb{R}^3$ と任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対し, $\exp(\theta\hat{u})$ の $\mathbb{R}^3$ への作用は, $\mathbb{R}^3$ のベクトルを u を軸に u の方向を向いて反時計回りに角度 θ 回転させるものである. すなわち, $(e_1, e_2, u) \in SO(3)$[*342]なる任意の $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ と任意の $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 u \in \mathbb{R}^3$ に対し,
$$\exp(\theta\hat{u})(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 u) = (\lambda_1 \cos(\theta) - \lambda_2 \sin(\theta))e_1 + (\lambda_1 \sin(\theta) + \lambda_2 \cos(\theta))e_2 + \lambda_3 e_3$$
が成り立つ.

証明. (1) 任意の $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ に対し,
$$\hat{u}v = (u_1F_1 + u_2F_2 + u_3F_3)v = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} = u \times v$$
である.

(2) $A \in SO(3)$ に対し $A^{-1} = (e_1, e_2, e_3)$ なる正規直交基底 $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ を取ると, (1) より,
$$\begin{aligned} A\hat{u}A^{-1} &= \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \hat{u}(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} (\hat{u}e_1, \hat{u}e_2, \hat{u}e_3) = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} (u \times e_1, u \times e_2, u \times e_3) \\ &= \begin{pmatrix} e_1 \cdot (u \times e_1) & e_1 \cdot (u \times e_2) & e_1 \cdot (u \times e_3) \\ e_2 \cdot (u \times e_1) & e_2 \cdot (u \times e_2) & e_2 \cdot (u \times e_3) \\ e_3 \cdot (u \times e_1) & e_3 \cdot (u \times e_2) & e_3 \cdot (u \times e_3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$
となる. ここでベクトル積の基本性質 (命題 6.66) より任意の $j, k \in \{1, 2, 3\}$ に対し,
$$e_k \cdot (u \times e_j) = (e_j \times e_k) \cdot u = \sum_l \varepsilon_{j,k,l} e_l \cdot u$$
($\varepsilon_{j,k,l}$ は Levi-Civita の記号 (定義 6.79)) であるから,
$$A\hat{u}A^{-1} = \begin{pmatrix} e_1 \cdot (u \times e_1) & e_1 \cdot (u \times e_2) & e_1 \cdot (u \times e_3) \\ e_2 \cdot (u \times e_1) & e_2 \cdot (u \times e_2) & e_2 \cdot (u \times e_3) \\ e_3 \cdot (u \times e_1) & e_3 \cdot (u \times e_2) & e_3 \cdot (u \times e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -e_3 \cdot u & e_2 \cdot u \\ e_3 \cdot u & 0 & -e_1 \cdot u \\ -e_2 \cdot u & e_1 \cdot u & 0 \end{pmatrix} = \widehat{(Au)}$$
である.

(3) $A = (e_1, e_2, u) \in SO(3)$ とおく. $e_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ とおくと, $u = Ae_3$ であるから, (2) と命題 12.172 より,
$$\exp(\theta\hat{u}) = \exp(\theta A\hat{e_3}A^{-1}) = A\exp(\theta\hat{e_3})A^{-1} = A\exp(\theta F_3)A^{-1} = A\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1}$$

[*342] すなわち (e_1, e_2, u) が右手系 (定義 6.123) をなすということ.

であるから,

$$\exp(\theta\hat{u})(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 u) = \exp(\theta\hat{u})A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}$$
$$= A\begin{pmatrix}\lambda_1\cos(\theta) - \lambda_2\sin(\theta)\\ \lambda_1\sin(\theta) + \lambda_2\cos(\theta)\\ \lambda_3\end{pmatrix} = (\lambda_1\cos(\theta) - \lambda_2\sin(\theta))e_1 + (\lambda_1\sin(\theta) + \lambda_2\cos(\theta))e_2 + \lambda_3 eu$$

である.

□

命題 15.7 (ベクトルとベクトル積のベクトル積)**.** 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ に対し,

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$$

が成り立つ.

証明. $\varepsilon_{j,k,l}$ を Levi-Civita の記号 (定義 6.79) とする. このとき任意の $u, v \in \mathbb{R}^3$ に対し, $u \times v \in \mathbb{R}^3$ の各成分は,

$$(u \times v)_j = \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l} u_k v_l \quad (j = 1, 2, 3)$$

と表せるから, $a \times (b \times c) \in \mathbb{R}^3$ の各成分は,

$$(a \times (b \times c))_j = \sum_{k,l} \varepsilon_{j,k,l} a_k (b \times c)_l = \sum_{k,l,r,m} \varepsilon_{j,k,l}\varepsilon_{l,r,m} a_k b_r c_m \quad (j = 1, 2, 3)$$

である. ここで,

$$\sum_{l} \varepsilon_{j,k,l}\varepsilon_{l,r,m} = \delta_{j,r}\delta_{k,m} - \delta_{j,m}\delta_{k,r}$$

であるから,

$$(a \times (b \times c))_j = \sum_{k,l,r,m} \varepsilon_{j,k,l}\varepsilon_{l,r,m} a_k b_r c_m = \sum_{k,r,m} (\delta_{j,r}\delta_{k,m} - \delta_{j,m}\delta_{k,r}) a_k b_r c_m$$
$$= \sum_k a_k b_j c_k - \sum_k a_k b_k c_j = (a \cdot c)b_j - (a \cdot b)c_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

である. よって $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ が成り立つ. □

命題 15.8 (慣性系に対して一定の方向に回転する座標系における遠心力と Coriolis の力)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ を時間区間, $\theta(t) : I \to \mathbb{R}$ を滑らかな関数, $u \in \mathbb{R}^3$ を単位ベクトルとする. 慣性系に対して,

$$A(t) = (e_1(t), e_2(t), e_3(t)) = \exp(\theta(t)\hat{u}) : I \to SO(3)$$

によって u 方向に回転する (定義 15.5 と命題 15.5 の (3) を参照) 座標系 Σ を考え, Σ から見た質点 m の運動を $r(t) : I \to \mathbb{R}^3$, 速度を $v(t) : I \to \mathbb{R}^3$ とする. このとき質点 m に加わる遠心力 (定義 15.4) は,

$$-mA(t)^{-1}\left(\frac{d^2}{dt^2}A(t)\right)r(t) = m\left(\frac{d\theta}{dt}(t)\right)^2 (r(t) - (r(t)\cdot u)u) - m\frac{d^2\theta}{dt^2}(t)(u \times r(t)) \tag{15.4}$$

であり, Coriolis の力 (定義 15.4) は,

$$-2m\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)v(t) = -2m\frac{d\theta}{dt}(t)(u \times v(t))$$

である. 従って遠心力と Coriolis の力は u の直交平面 $\{u\}^\perp$ 内のベクトルである. そして遠心力 (15.4) の右辺の第一項は位置ベクトル $r(t)$ の $\{u\}^\perp$ 上への射影の方向に働き, 第二項は $\{u\}^\perp$ 内で位置ベクトル $r(t)$ と直交する方向に働く. また Coriolis の力は $\{u\}^\perp$ 内で速度ベクトル $v(t)$ に直交する方向に働く.

証明.

$$\frac{d}{dt}A(t) = \frac{d\theta}{dt}(t)A(t)\widehat{u},$$
$$\frac{d^2}{dt^2}A(t) = \left(\frac{d\theta}{dt}(t)\right)^2 A(t)\widehat{u}\widehat{u} + \frac{d^2\theta}{dt^2}(t)A(t)\widehat{u}$$

である. よって命題 15.6 の (1) より Coriolis の力は,

$$-2m\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)v(t) = -2m\frac{d\theta}{dt}(t)\widehat{u}v(t) = -2m\frac{d\theta}{dt}(t)(u \times v(t))$$

であり, 命題 15.6 の (1) と命題 15.7 より遠心力は,

$$\begin{aligned}
-mA(t)^{-1}\frac{d^2}{dt^2}A(t)r(t) &= -m\frac{d^2\theta}{dt^2}(t)\widehat{u}r(t) - m\left(\frac{d\theta}{dt}(t)\right)^2 \widehat{u}\widehat{u}r(t) \\
&= -m\frac{d^2\theta}{dt^2}(t)(u \times r(t)) - m\left(\frac{d\theta}{dt}(t)\right)^2 (u \times (u \times r(t))) \\
&= m\left(\frac{d\theta}{dt}(t)\right)^2 (r(t) - (r(t)\cdot u)u) - m\frac{d^2\theta}{dt^2}(t)(u \times r(t))
\end{aligned}$$

である. □

定義 15.9 (質点系の (全) 運動量, (全) 角運動量, 運動エネルギー)**.** 質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ の運動

$$r(t) = (r_1(t), \cdots, r_n(t)) : I \to \mathbb{R}^{3n}, \quad v(t) = \frac{d}{dt}r(t) = (v_1(t), \cdots, v_n(t)) : I \to \mathbb{R}^{3n}$$

に対し,

$$(m_1v_1(t), \cdots, m_nv_n(t)) \in \mathbb{R}^{3n}, \quad (m_1r_1(t) \times v_1(t), \cdots, m_nr_n(t) \times v_n(t)) \in \mathbb{R}^{3n}$$

をそれぞれ時刻 $t \in I$ における質点系の運動量, 角運動量と言う. また,

$$\sum_{j=1}^{n} m_jv_j(t) \in \mathbb{R}^3, \quad \sum_{j=1}^{n} m_j(r_j(t) \times v_j(t)) \in \mathbb{R}^3$$

をそれぞれ時刻 $t \in I$ における質点系の全運動量, 全角運動量と言う. そして,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}m_j|v_j(t)|^2 \in [0, \infty)$$

を質点系の時刻 $t \in I$ における運動エネルギーと言う.

定義 15.10 (力のモーメント)**.** 質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ の運動

$$r(t) = (r_1(t), \cdots, r_n(t)) : I \to \mathbb{R}^{3n}, \quad v(t) = \frac{d}{dt}r(t) = (v_1(t), \cdots, v_n(t)) : I \to \mathbb{R}^{3n}$$

に対し, 各時刻 $t \in I$ において質点系に加わる力を,

$$F(t) = (F_1(t), \cdots, F_n(t)) = \left(m_1\frac{d}{dt}v_1(t), \cdots, m_n\frac{d}{dt}v_n(t)\right)$$

とする. このとき,

$$\sum_{j=1}^{n} r_j(t) \times F_j(t) \in \mathbb{R}^3$$

を力 $F(t)$ のモーメントと言う.

注意 15.11 (力のモーメントは全角運動量の時間増加率)**.**

$$\sum_{j=1}^{n} r_j(t) \times F_j(t) = \sum_{j=1}^{n} r_j(t) \times m_j \frac{d}{dt} v_j(t) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n} m_j (r_j(t) \times v_j(t))$$

であるから, 力のモーメントは全角運動量の時間増加率に等しい.

定義 15.12 (力のする仕事)**.** 質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ の運動

$$r(t) = (r_1(t), \cdots, r_n(t)) : I \to \mathbb{R}^{3n}, \quad v(t) = \frac{d}{dt} r(t) = (v_1(t), \cdots, v_n(t)) : I \to \mathbb{R}^{3n}$$

に対し, 各時刻 $t \in I$ において質点系に加わる力を,

$$F(t) = (F_1(t), \cdots, F_n(t)) = \left(m_1 \frac{d}{dt} v_1(t), \cdots, m_n \frac{d}{dt} v_n(t) \right)$$

とする. このとき任意の時間区間 $[a, b] \subseteq I$ に対し,

$$\int_a^b F(t) \cdot v(t) dt = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b F_j(t) \cdot v_j(t) dt \in \mathbb{R}$$

を力 $F(t)$ が時間 $[a, b]$ においてする仕事と言う.

注意 15.13 (力のする仕事は運動エネルギーの増加)**.**

$$\int_a^b F(t) \cdot v(t) dt = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b F_j(t) \cdot v_j(t) dt = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b m_j \frac{d}{dt} v_j(t) \cdot v_j(t) dt = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j |v_j(t)|^2 dt$$

であるから, 力のする仕事は運動エネルギーの増加に等しい.

15.2 拘束系の Lagrange の運動方程式, 基本的な物理量, Noether の定理

定義 15.14 (Euclid 空間内の多様体の接バンドル)**.** $M \subseteq \mathbb{R}^N$ を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体 (定義 6.7) とし, 各 $r \in M$ における接ベクトル空間を $T_r(M) \subseteq \mathbb{R}^N$ (定義 6.23) とする. そして,

$$TM := \bigcup_{r \in M} \{r\} \times T_r(M) \subseteq \mathbb{R}^{2N}$$

とおく. TM を M の接バンドルと言う. M の任意の空でない開集合 U に対し, $\mathbb{R}^N$ の開集合 V で $U = V \cap M$ なるものが取れて,

$$TU = \bigcup_{r \in U} \{r\} \times T_r(U) = \bigcup_{r \in U} \{r\} \times T_r(M) = (V \times \mathbb{R}^N) \cap TM$$

であるから, TU は TM の開集合である. M の任意の局所座標 (定義 6.3) $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_n)$ に対し,

$$\varphi(U) \times \mathbb{R}^n \ni (x_1(r), \cdots, x_n(r), \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n) \mapsto \left(r, \sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k \frac{\partial}{\partial x_k} r \right) \in \mathbb{R}^{2N}$$

は単射な C^∞ 級写像で微分のランクは $2n$ であり, 像は TM の開集合 TU である. よって TM は $\mathbb{R}^{2N}$ 内の $2n$ 次元多様体 (定義 6.7) であり,

$$(x_1, \cdots, x_n, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n) : TU \ni \left(r, \sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k \frac{\partial}{\partial x_k} r \right) \mapsto (x_1(r), \cdots, x_n(r), \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n) \in \mathbb{R}^{2n}$$

は TM の局所座標である. こうして Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体 M の接バンドル TM は Euclid 空間 $\mathbb{R}^{2N}$ 内の $2n$ 次元多様体であり, M の任意の局所座標 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ に対し TM の局所座標 $(TU, x_1, \cdots, x_n, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n)$ が対応する.

命題 15.15 (接バンドルの局所座標の基本的性質)**.** M を Euclid 空間内の多様体とし, TM をその接バンドル (定義 15.14) とする. このとき任意の $(r,v)\in TM$ と $r\in M$ の周りの任意の局所座標 $(x_k)_k$, $(y_l)_l$ に対し,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}v=\frac{\partial}{\partial x_k}r,\quad \frac{\partial}{\partial x_k}v=\sum_l \dot{x}_k\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}r,\quad \dot{y}_l(r,v)=\sum_k \dot{x}_k(r,v)\frac{\partial y_l}{\partial x_k}(r)$$

が成り立つ.

証明.

$$v=\sum_k \dot{x}_k(r,v)\frac{\partial}{\partial x_k}r$$

であるから,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}v=\frac{\partial}{\partial x_k}r,\quad \frac{\partial}{\partial x_k}v=\sum_l \dot{x}_l(r,v)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}r$$

である. また命題 6.20 の (8) より,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}r=\sum_l \frac{\partial y_l}{\partial x_k}(r)\frac{\partial}{\partial y_l}r$$

であるから,

$$\sum_l \dot{y}_l(r,v)\frac{\partial}{\partial y_l}r=v=\sum_k \dot{x}_k(r,v)\frac{\partial}{\partial x_k}r=\sum_l \dot{x}_k(r,v)\frac{\partial y_l}{\partial x_k}(r)\frac{\partial}{\partial y_l}r.$$

よって,

$$\dot{y}_l(r,v)=\dot{x}_k(r,v)\frac{\partial y_l}{\partial x_k}(r)$$

である. □

定義 15.16 (質点系の運動の配位空間, 運動エネルギー関数)**.** 質点系 $(m_1,\cdots,m_n)$ の運動 $r(t)=(r_1(t),\cdots,r_n(t)):I\to\mathbb{R}^{3n}$ と多様体 $M\subseteq\mathbb{R}^{3n}$ に対し,

$$r(t)\in M\quad(\forall r\in I)$$

が成り立つとき, M をこの質点系の運動の配位空間と呼ぶ. 任意の $t\in I$ と $r(t)\in M$ の周りの M の任意の局所座標 $(x_k)_k$ に対し, 時刻 t における質点系の速度は,

$$v(t)=\frac{d}{dt}r(t)=\sum_k \frac{d}{dt}x_k(r(t))\frac{\partial}{\partial x_k}r(t)\in T_{r(t)}(M) \tag{15.5}$$

[*343]であるから,

$$(r(t),v(t))\in TM,\quad \dot{x}_k(r(t),v(t))=\frac{d}{dt}x_k(r(t)) \tag{15.6}$$

である. よって M を配位空間とする質点系の位置と速度の時間発展 $I\ni t\mapsto(r(t),v(t))$ は M の接バンドル TM に値を取る関数である. TM 上の関数

$$T(r,v):TM\ni(r,v)\mapsto\sum_{j=1}^n\frac{1}{2}m_j|v_j|^2\in\mathbb{R}$$

をこの質点系の運動に対する運動エネルギー関数と呼ぶこととする. T の $(r(t),v(t))\in TM$ における値は時刻 t における質点系の運動エネルギー (定義 15.9) である.

命題 15.17. 質点系 $(m_1,\cdots,m_n)$ の運動の配位空間を $M\subseteq\mathbb{R}^{3n}$, 運動エネルギー関数を $T(r,v):TM\to\mathbb{R}$ とおき, 位置と速度の時間発展を $I\ni t\mapsto(r(t),v(t))\in TM$, 各時刻 $t\in I$ において質点系に加わる力を,

$$F(t)=(F_1(t),\cdots,F_n(t))=\frac{d}{dt}(m_1v_1(t),\cdots,m_nv_n(t))$$

とおく. このとき,

[*343] $\varphi=(x_k)_k$ とおくと, $\frac{d}{dt}r(t)=\frac{d}{dt}\varphi^{-1}(\varphi(t))=\sum_k\partial_k\varphi^{-1}(\varphi(r(t)))\frac{d}{dt}x_k(r(t))=\sum_k\frac{d}{dt}x_k(r(t))\frac{\partial}{\partial x_k}r(t)$ である.

(1) 任意の $(r,v)\in TM$ と $r\in M$ の周りの M の任意の局所座標 $(x_k)_k$ に対し,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}(r,v)=(m_1v_1,\cdots,m_nv_n)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}r$$

が成り立つ.

(2) 任意の $t\in I$ と $r(t)\in M$ の周りの M の任意の局所座標 $(x_k)_k$ に対し,

$$F(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}r(t)=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}(r(t),v(t))-\frac{\partial T}{\partial x_k}(r(t),v(t))$$

が成り立つ.

証明. (1) 任意の $(r,v)\in TM$ と $r\in M$ の周りの M の任意の局所座標 $(x_k)_k$ に対し, 命題 15.15 より,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}v=\frac{\partial}{\partial x_k}r$$

であるので,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}(r,v)&=\sum_{j=1}^n m_jv_j\cdot\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}v_j=(m_1v_1,\cdots,m_nv_n)\cdot\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}v\\&=(m_1v_1,\cdots,m_nv_n)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}r\end{aligned}$$

である.

(2) 命題 15.15 より,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}v=\sum_l \dot{x}_l(r,v)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}r$$

であるので,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x_k}(r,v)&=\sum_{j=1}^n m_jv_j\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}v_j=(m_1v_1,\cdots,m_nv_n)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}v\\&=(m_1v_1,\cdots,m_nv_n)\cdot\sum_l \dot{x}_l(r,v)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}r\end{aligned}$$

である. また (15.6) より,

$$\dot{x}_l(r(t),v(t))=\frac{d}{dt}x_l(r(t))$$

であるから,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x_k}(r(t),v(t))&=(m_1v_1(t),\cdots,m_nv_n(t))\cdot\sum_l \dot{x}_l(r(t),v(t))\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}r(t)\\&=(m_1v_1(t),\cdots,m_nv_n(t))\cdot\sum_l \frac{d}{dt}x_l(r(t))\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}r(t)\\&=(m_1v_1(t),\cdots,m_nv_n(t))\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial x_k}r(t)\end{aligned}\tag{15.7}$$

である. そして (1) より,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}(r(t),v(t))=(m_1v_1(t),\cdots,m_nv_n(t))\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}r(t)\tag{15.8}$$

であるから, (15.7), (15.8) より,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}(r(t),v(t))-\frac{\partial T}{\partial x_k}(r(t),v(t))\\&=\frac{d}{dt}\left((m_1v_1(t),\cdots,m_nv_n(t))\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}r(t)\right)-(m_1v_1(t),\cdots,m_nv_n(t))\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial x_k}r(t)\\&=\left(\frac{d}{dt}(m_1v_1(t),\cdots,m_nv_n(t))\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}r(t)=F(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}r(t)\end{aligned}$$

である.

□

定義 15.18 (拘束力, ポテンシャル, 保存力, 外力, Lagrangian, Lagrange の運動方程式)**.** 質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ の運動の配位空間を $M \subseteq \mathbb{R}^{3n}$ とし, 運動エネルギー関数を $T(r,v) : TM \to \mathbb{R}$, 位置と速度の時間発展を $I \ni t \mapsto (r(t), v(t)) \in TM$, 各時刻 $t \in I$ において質点系に加わる力を,

$$F(t) = (F_1(t), \cdots, F_n(t)) = \frac{d}{dt}(m_1 v_1(t), \cdots, m_n v_n(t)) \in \mathbb{R}^{3n}$$

とおく. 各 $t \in I$ に対し力 $F(t)$ を,

$$F(t) = F_{\mathrm{a}}(t) + F_{\mathrm{c}}(t) \in T_{r(t)}(M) \oplus (T_{r(t)}(M))^{\perp}$$

と直交分解する. このとき $F_{\mathrm{c}}(t) \in (T_{r(t)}(M))^{\perp}$ は質点系を M に拘束するための力と言うことで拘束力と言う. 今, 拘束力以外の力 $F_{\mathrm{a}}(t)$ が, ある滑らかな関数 $U : M \to \mathbb{R}$ に対し,

$$F_{\mathrm{a}}(t) = F_{\mathrm{ext}}(t) - \mathrm{grad}(U)(r(t)) \in T_{r(t)}(M) \quad (\forall t \in I)$$

と表されるとする. このとき U をこの質点系の運動のポテンシャル, $-\mathrm{grad}(U)(r(t)) \in T_{r(t)}(M)$ をポテンシャル U による保存力と言う. そして拘束力と保存力以外の力 $F_{\mathrm{ext}}(t) \in T_{r(t)}(M)$ を外力と言う. 任意の $t \in I$ と $r(t) \in M$ の周りの M の任意の局所座標 $(x_k)_k$ に対し,

$$\begin{aligned} F(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} r(t) &= F_{\mathrm{a}}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} r(t) \\ &= F_{\mathrm{ext}}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} r(t) - \mathrm{grad}(U)(r(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} r(t) \\ &= F_{\mathrm{ext}}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} r(t) - \frac{\partial U}{\partial x_k}(r(t)) \end{aligned} \tag{15.9}$$

である. 一方, 命題 15.17 の (2) より,

$$F(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} r(t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}(r(t), v(t)) - \frac{\partial T}{\partial x_k}(r(t), v(t)) \tag{15.10}$$

であるから, (15.9), (15.10) より,

$$F_{\mathrm{ext}}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} r(t) - \frac{\partial U}{\partial x_k}(r(t)) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}(r(t), v(t)) - \frac{\partial T}{\partial x_k}(r(t), v(t)) \tag{15.11}$$

が成り立つ. そこで,

$$L(r,v) := T(r,v) - U(r) : TM \to \mathbb{R} \tag{15.12}$$

なる関数を定義すれば, (15.11) より,

$$F_{\mathrm{ext}}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} r(t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}(r(t), v(t)) - \frac{\partial L}{\partial x_k}(r(t), v(t)) \tag{15.13}$$

となる. (15.12) をこの質点系の運動の Lagrangian と言い, (15.13) を M の局所座標 $(x_k)_k$ に関する Lagrange の運動方程式と言う. もし質点系に加わる外力 $F_{\mathrm{ext}}(t) \in T_{r(t)}(M)$ が常に 0, すなわち, 質点系に加わる力が拘束力とポテンシャルによる保存力のみであるとすると, Lagrange の運動方程式は,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}(r(t), v(t)) - \frac{\partial L}{\partial x_k}(r(t), v(t)) = 0 \tag{15.14}$$

となる. そしてもし Lagrangian $L(r,v) : TM \to \mathbb{R}$ が既知であるならば, (15.14) はこの質点系の運動を規定する常微分方程式である.

定義 15.19 (エネルギー関数, エネルギー, ポテンシャルエネルギー)**.** 質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ の運動の配位空間を $M \subseteq \mathbb{R}^{3n}$, 運動エネルギー関数を $T(r,v) : TM \to \mathbb{R}$, ポテンシャルを $U(r) : M \to \mathbb{R}$ とする. このとき,

$$E(r,v) := T(r,v) + U(r) : TM \to \mathbb{R}$$

をこの質点系の運動のエネルギー関数と呼ぶこととする. そして位置と速度の時間発展 $I \ni t \mapsto (r(t), v(t)) \in TM$ に対し, $E(r(t), v(t)) = T(r(t), v(t)) + U(r(t))$ を時刻 $t \in I$ における質点系のエネルギーと言い, $U(r(t))$ を時刻 $t \in I$ における質点系のポテンシャルエネルギーと言う.

定理 15.20 (外力がする仕事はエネルギーの増加)**.** 質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ の運動の配位空間を $M \subseteq \mathbb{R}^{3n}$, エネルギー関数を $E(r,v) = T(r,v) + U(r) : TM \to \mathbb{R}$, 位置と速度の時間発展を $r(t) : I \to M$ とし, 各時刻 $t \in I$ において質点系に加わる外力を $F_{\mathrm{ext}}(t) \in T_{r(t)}(M)$ とおく. このとき任意の $[a,b] \subseteq I$ に対し,

$$\int_a^b F_{\mathrm{ext}}(t) \cdot v(t) dt = E(r(b), v(b)) - E(r(a), v(a))$$

が成り立つ. すなわち外力がする仕事はエネルギーの増加に等しい. また外力が常に 0 であるならば, エネルギーは保存する (つまりエネルギー $E(r(t), v(t))$ は時間 $t \in I$ によらない).

証明. 各時刻 $t \in I$ における拘束力を $F_{\mathrm{c}}(t) \in (T_{r(t)}(M))^{\perp}$ とおくと, 質点系の加わる力は,

$$F(t) = F_{\mathrm{ext}}(t) - \mathrm{grad}(U)(r(t)) + F_{\mathrm{c}}(t) \quad (\forall t \in I) \tag{15.15}$$

であり, 注意 15.13 より,

$$\int_a^b F(t) \cdot v(t) dt = T(r(b), v(b)) - T(r(a), v(a)) \tag{15.16}$$

である. 任意の $t \in I$ と $r(t) \in M$ の周りの M の任意の局所座標 $(x_k)_k$ を取ると, (15.5) より,

$$v(t) = \sum_k \frac{d}{dt} x_k(r(t)) \frac{\partial}{\partial x_k} r(t) \in T_{r(t)}(M)$$

であるから,

$$\mathrm{grad}(U)(r(t)) \cdot v(t) = \sum_k \frac{d}{dt} x_k(r(t)) \left(\mathrm{grad}(U)(r(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} r(t) \right) = \sum_k \frac{d}{dt} x_k(r(t)) \frac{\partial U}{\partial x_k}(r(t)) = \frac{d}{dt} U(r(t))$$

である. よって (15.15) より,

$$F(t) \cdot v(t) = F_{\mathrm{ext}}(t) \cdot v(t) - \mathrm{grad}(U)(r(t)) \cdot v(t) = F_{\mathrm{ext}}(t) \cdot v(t) - \frac{d}{dt} U(r(t)),$$

従って,

$$F_{\mathrm{ext}}(t) \cdot v(t) = F(t) \cdot v(t) + \frac{d}{dt} U(r(t))$$

であるので, (15.16) より,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b F_{\mathrm{ext}}(t) \cdot v(t) dt = \int_a^b F(t) \cdot v(t) dt + \int_a^b \frac{d}{dt} U(r(t)) dt \\
&= T(r(b), v(b)) - T(r(a), v(a)) + U(r(b)) - U(r(a)) \\
&= E(r(b), v(a)) - E(r(a), v(a))
\end{aligned}$$

である. □

定理 15.21 (Neother の定理)**.** 質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ の運動の配位空間を $M \subseteq \mathbb{R}^{3n}$, Lagrangian を $L(r,v) = T(r,v) - U(r) : TM \to \mathbb{R}$, 位置と速度の時間発展を $I \ni t \mapsto (r(t), v(t)) \in TM$ とし, 各時刻 $t \in I$ において質点系に加わる外力を $F_{\mathrm{ext}}(t) \in T_{r(t)}(M)$ とする. そして C^2 級関数

$$\varphi(s, r) : \mathbb{R} \times M \to M$$

に対し,

$$\varphi(0,r)=r,\quad \frac{\partial}{\partial s}L(\varphi(s,r),d\varphi_r(s,r)v)\Big|_{s=0}=0\ \ (\forall(r,v)\in TM)$$

が成り立つと仮定する. ただし $d\varphi_r(s,r):T_r(M)\to T_{\varphi(s,r)}(M)$ は $s\in\mathbb{R}$ を固定した関数 $M\ni r\mapsto\varphi_r(s,r)$ の全微分 (定義 6.26) である. このとき $r(t)\in M$ の周りの M の任意の局所座標 $(x_k)_k$ に関して,

$$\begin{aligned}F_{\mathrm{ext}}(t)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}(0,r(t))&=\frac{d}{dt}\sum_k\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_k}(r(t),v(t))\frac{\partial(x_k\circ\varphi)}{\partial s}(0,r(t))\\&=\frac{d}{dt}\left((m_1v_1(t),\cdots,m_nv_n(t))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}(0,r(t))\right)\end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. $|s|$ が十分小さいとき $\varphi(s,r(t))$ は M の局所座標 $(x_k)_k$ の定義域に属する. よって $|s|$ が十分小さいとき, 全微分の定義 6.26 より,

$$\begin{aligned}d\varphi_r(s,r(t))v(t)&=d\varphi_r(s,r(t))\left(\sum_l\frac{d}{dt}x_l(r(t))\frac{\partial}{\partial x_l}r(t)\right)\\&=\sum_l\frac{d}{dt}x_l(r(t))\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}(s,r(t))\\&=\sum_k\left(\sum_l\frac{d}{dt}x_l(r(t))\frac{\partial(x_k\circ\varphi)}{\partial x_l}(s,r(t))\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi(s,r(t))\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial}{\partial s}L(\varphi(s,r(t)),d\varphi_r(s,r(t))v(t))\Big|_{s=0}\\&=\sum_k\left(\frac{\partial L}{\partial x_k}(r(t),v(t))\frac{\partial(x_k\circ\varphi)}{\partial s}(0,r(t))+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_k}(r(t),v(t))\sum_l\frac{d}{dt}x_l(r(t))\frac{\partial^2(x_k\circ\varphi)}{\partial s\partial x_l}(0,r(t))\right)\\&=\sum_k\left(\frac{\partial L}{\partial x_k}(r(t),v(t))\frac{\partial(x_k\circ\varphi)}{\partial s}(0,r(t))+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_k}(r(t),v(t))\frac{d}{dt}\frac{\partial(x_k\circ\varphi)}{\partial s}(0,r(t))\right)\end{aligned}\tag{15.17}$$

となる. Lagrange の運動方程式 (定義 15.18) より,

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}(r(t),v(t))=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_k}(r(t),v(t))-F_{\mathrm{ext}}(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}r(t)$$

であり, これを (15.17) の右辺に代入すると,

$$0=\frac{d}{dt}\sum_k\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_k}(r(t),v(t))\frac{\partial(x_k\circ\varphi)}{\partial s}(0,r(t))-F_{\mathrm{ext}}(t)\cdot\sum_k\frac{\partial(x_k\circ\varphi)}{\partial s}(0,r(t))\frac{\partial}{\partial x_k}r(t)\tag{15.18}$$

となる. ここで,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(0,r(t))=\sum_k\frac{\partial(x_k\circ\varphi)}{\partial s}(0,r(t))\frac{\partial}{\partial x_k}r(t)\tag{15.19}$$

であるから, (15.18) の右辺の第二項は,

$$F_{\mathrm{ext}}(t)\cdot\sum_k\frac{\partial(x_k\circ\varphi)}{\partial s}(0,r(t))\frac{\partial}{\partial x_k}r(t)=F_{\mathrm{ext}}(t)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}(0,r(t))\tag{15.20}$$

である. そして命題 15.17 の (1) より,

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_k}(r(t),v(t))=\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_k}(r(t),v(t))=(m_1v_1(t),\cdots,m_nv_n(t))\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}r(t)\tag{15.21}$$

であるから, (15.18) の右辺の第一項の $\frac{d}{dt}(\cdots)$ の中身は, (15.20), (15.21) より,

$$\begin{aligned}\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}(r(t),v(t))\frac{\partial (x_k\circ\varphi)}{\partial s}(0,r(t)) &= \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}(r(t),v(t))\frac{\partial (x_k\circ\varphi)}{\partial s}(0,r(t))\\ &= (m_1v_1(t),\cdots,m_nv_n(t))\cdot\sum_k \frac{\partial (x_k\circ\varphi)}{\partial s}(0,r(t))\frac{\partial}{\partial x_k}r(t)\\ &= (m_1v_1(t),\cdots,m_nv_n(t))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}(0,r(t)) \qquad (15.22)\end{aligned}$$

である. よって (15.18), (15.20), (15.22) より,

$$\begin{aligned}F_{\mathrm{ext}}(t)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}(0,r(t)) &= \frac{d}{dt}\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}(r(t),v(t))\frac{\partial (x_k\circ\varphi)}{\partial s}(0,r(t))\\ &= \frac{d}{dt}\left((m_1v_1(t),\cdots,m_nv_n(t))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}(0,r(t))\right)\end{aligned}$$

が成り立つ. □

系 15.22 (Neother の定理の系)**.** 質点系 $(m_1,\cdots,m_n)$ の運動の配位空間を $M\subseteq\mathbb{R}^{3n}$, Lagrangian を $L(r,v)=T(r,v)-U(r):TM\to\mathbb{R}$, 位置と速度の時間発展を $I\ni t\mapsto(r(t),v(t))\in TM$ とし, 各時刻 $t\in I$ において質点系に加わる外力を $F_{\mathrm{ext}}(t)=(F_{\mathrm{ext},1}(t),\cdots,F_{\mathrm{ext},n}(t))\in T_{r(t)}(M)$ とし, 質点系の運動量, 角運動量を,

$$p(t)=(m_1v_1(t),\cdots,m_nv_n(t)),\quad \ell(t)=(m_1r_1(t)\times v_1(t),\cdots,m_nr_n(t)\times v_n(t))\ \ (\forall t\in I)$$

とおく.

(1) $u\in\mathbb{R}^{3n}$ に対し,

$$r+su\in M,\quad L(r+su,v)=L(r,v)\ \ (\forall s\in\mathbb{R},\forall(r,v)\in TM)$$

が成り立つとすると,

$$F_{\mathrm{ext}}(t)\cdot u=\frac{d}{dt}p(t)\cdot u \qquad (15.23)$$

が成り立つ.

(2) $u=(u_1,\cdots,u_n)\in\mathbb{R}^{3n}$ に対し,

$$R(\theta,r):=(\exp(\theta\hat{u}_1)r_1,\cdots,\exp(\theta\hat{u}_n)r_n)\ \ (\forall(\theta,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{3n})$$

とおく. ただし $\hat{u}_j\in\mathrm{Lie}(SO(3))$ は $u_j\in\mathbb{R}^3$ に対応する回転の生成子 (定義 15.5) である. もし,

$$R(\theta,r)\in M,\quad L(R(\theta,r),R(\theta,v))=L(r,v)\ \ (\forall\theta\in\mathbb{R},\forall(r,v)\in TM)$$

が成り立つならば,

$$\sum_{j=1}^n(r_j(t)\times F_{\mathrm{ext},j}(t))\cdot u_j=\frac{d}{dt}\ell(t)\cdot u \qquad (15.24)$$

が成り立つ.

証明. (1)

$$\varphi(s,r)=r+su\in M\ \ (\forall(s,r)\in\mathbb{R}\times M)$$

とおくと,

$$d\varphi_r(s,r)v=v\ \ (\forall s\in\mathbb{R},\forall(r,v)\in TM)$$

であり,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(0,r)=u\ \ (\forall r\in M)$$

である. よって Neother の定理 15.21 より (15.23) を得る.

(2)

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \ni (\theta, r) \mapsto R(\theta, r) \in M$$

とおくと,

$$d\varphi_r(\theta, r)v = R(\theta, v) \quad (\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall (r, v) \in TM)$$

であり, 命題 15.6 の (1) より,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(0, r) = (\widehat{u}_1 r_1, \cdots, \widehat{u}_n r_n) = (u_1 \times r_1, \cdots, u_n \times r_n) \quad (\forall r = (r_1, \cdots, r_n) \in M) \tag{15.25}$$

である. そして (15.25) より,

$$F_{\mathrm{ext}}(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(0, r) = \sum_{j=1}^{n} (F_{\mathrm{ext},j}(t) \cdot (u_j \times r_j) = \sum_{j=1}^{n} (r_j(t) \times F_{\mathrm{ext},j}(t)) \cdot u_j,$$

$$(m_1 v_1(t), \cdots, m_n v_n(t)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(0, r) = \sum_{j=1}^{n} m_j v_j(t) \cdot (u_j \times r_j(t)) = \sum_{j=1}^{n} (m_j r_j(t) \times v_j(t)) \cdot u_j = \ell(t) \cdot u$$

であるから, Neother の定理 15.21 より (15.24) を得る.

□

15.3 剛体の運動と回転群

命題 15.23 (多様体としての回転群 $SO(3)$)**.** 回転群 $SO(3) \subseteq M_{3\times3}(\mathbb{R})$ について,

(1) $SO(3)$ は $M_{3\times3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ 内の 3 次元多様体 (定義 6.7) である.

(2) $A, (e_1, e_2, e_3) \in SO(3)$ とし, Ae_3 と e_3 が線型独立であるとすると, $(\varphi, \theta, \psi) \in (-\pi, \pi] \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$ で,

$$A = \exp(\varphi \widehat{e}_3) \exp(\theta \widehat{e}_2) \exp(\psi \widehat{e}_3)$$

を満たすものが唯一つ存在する. ただし $\widehat{e}_j \in \mathrm{Lie}(SO(3))$ は $e_j \in \mathbb{R}^3$ に対応する回転の生成子 (定義 15.5) である. また任意の $\delta \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(e_1', e_2', e_3) = \exp(\delta \widehat{e}_3)(e_1, e_2, e_3) \in SO(3)$$

とおくと,

$$A = \exp((\varphi - \delta)\widehat{e}_3) \exp(\theta \widehat{e_2'}) \exp((\psi + \delta)\widehat{e}_3)$$

が成り立つ.

(3) 任意の $(e_1, e_2, e_3) \in SO(3)$ に対し,

$$(-\pi, \pi) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \ni (\varphi, \theta, \psi) \mapsto \exp(\varphi \widehat{e}_3) \exp(\theta \widehat{e}_2) \exp(\psi \widehat{e}_3) \in SO(3)$$

は埋め込み (定義 6.31) である (従って定理 6.32 よりこの像からの逆写像は $SO(3)$ の局所座標である).

証明. (1)

$$O(3) = \{(a_1, a_2, a_3) \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) : a_j \cdot a_k = \delta_{j,k} \ (\forall j, k \in \{1, 2, 3\})\}$$

であるから, 定理 6.36 より $O(3)$ は $M_{3\times3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ 内の $9 - 6 = 3$ 次元多様体である.

$$SO(3) = \{A \in O(3) : \det(A) > 0\}$$

より $SO(3)$ は $O(3)$ の開集合なので, $SO(3)$ も $M_{3\times3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ 内の 3 次元多様体である.

(2) Ae_3 と e_3 は線型独立であるから, $\theta \in (0, \pi)$ と $\varphi \in (-\pi, \pi]$ で,

$$Ae_3 = \sin(\theta)(\cos(\varphi)e_1 + \sin(\varphi)e_2) + \cos(\theta)e_3$$

なるものが一意的に定まる. よって命題 15.6 の (3) より,

$$\exp(-\varphi\widehat{e}_3)Ae_3 = \sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_3$$

であり,

$$\exp(-\theta\widehat{e}_2)\exp(-\varphi\widehat{e}_3)Ae_3 = e_3 \tag{15.26}$$

である. $\exp(-\theta\widehat{e}_2)\exp(-\varphi\widehat{e}_3)A \in SO(3)$ であることと (15.26) より,

$$\exp(-\theta\widehat{e}_2)\exp(-\varphi\widehat{e}_3)A(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なる $\psi \in (-\pi, \pi]$ が一意的に定まる. よって命題 12.172 と命題 15.5 の (2) より,

$$\exp(-\theta\widehat{e}_2)\exp(-\varphi\widehat{e}_3)A = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \exp(\psi\widehat{e}_3)$$

であるから,

$$A = \exp(\varphi\widehat{e}_3)\exp(\theta\widehat{e}_2)\exp(\psi\widehat{e}_3)$$

である.

$$(e_1', e_2', e_3) = \exp(\delta\widehat{e}_3)(e_1, e_2, e_3)$$

ならば, $e_2 = \exp(-\delta\widehat{e}_3)e_2'$ であるので, 命題 15.6 の (2) より,

$$\widehat{e}_2 = \exp(-\delta\widehat{e}_3)\widehat{e_2'}\exp(\delta\widehat{e}_3), \quad \exp(\theta\widehat{e}_2) = \exp(-\delta\widehat{e}_3)\exp(\theta\widehat{e_2'})\exp(\delta\widehat{e}_3)$$

である. よって,

$$A = \exp(\varphi\widehat{e}_3)\exp(\theta\widehat{e}_2)\exp(\psi\widehat{e}_3) = \exp((\varphi - \delta)\widehat{e}_3)\exp(\theta\widehat{e_2'})\exp((\psi + \delta)\widehat{e}_3)$$

である.

(3)

$$f : (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \ni (\varphi, \theta, \psi) \mapsto \exp(\varphi\widehat{e}_3)\exp(\theta\widehat{e}_2)\exp(\psi\widehat{e}_3) \in SO(3)$$

とおく. 命題 15.6 の (3) より,

$$\begin{aligned} f(\varphi, \theta, \psi)e_3 &= \exp(\varphi\widehat{e}_3)\exp(\theta\widehat{e}_2)e_3 = \exp(\varphi\widehat{e}_3)(\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_3) \\ &= \sin(\theta)(\cos(\varphi)e_1 + \sin(\varphi)e_2) + \cos(\theta)e_3 \end{aligned} \tag{15.27}$$

であるから f は像の上への同相写像である. 埋め込みの定義 6.31 より後は f の各点での全微分 (定義 6.26) が単射であることを示せばよい. よって任意の $(\varphi, \theta, \psi) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi)$ を取り,

$$a_\varphi, a_\theta, a_\psi \in \mathbb{R}, \quad a_\varphi\frac{\partial f}{\partial\varphi}(\varphi, \theta, \psi) + a_\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}(\varphi, \theta, \psi) + a_\psi\frac{\partial f}{\partial\psi}(\varphi, \theta, \psi) = 0 \tag{15.28}$$

として, $a_\varphi = a_\theta = a_\psi = 0$ が成り立つことを示せばよい. (15.27) と (15.28) より,

$$a_\varphi\sin(\theta)(-\sin(\varphi)e_1 + \cos(\varphi)e_2) + a_\theta\cos(\theta)(\cos(\varphi)e_1 + \sin(\varphi)e_2) - a_\theta\sin(\theta)e_3 = 0$$

であるから $a_\theta = a_\varphi = 0$ である. よって (15.28) より,

$$0 = a_\psi\frac{\partial f}{\partial\psi}(\varphi, \theta, \psi) = a_\psi f(\varphi, \theta, \psi)\widehat{e}_3$$

であり, この両辺に右から e_1 を作用させれば, 命題 15.6 の (1) より,

$$a_\psi f(\varphi,\theta,\psi)e_2 = 0$$

を得る. ゆえに $a_\psi = 0$ である. これより f は埋め込みである.

□

注意 15.24 (Schatten 形式の行列表現)**.** 任意の $u = (u_1,\cdots,u_N), v = (v_1,\cdots,v_N) \in \mathbb{R}^N$ に対し, u と v の Schatten 形式 (定義 10.109)

$$u \odot v : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto (x\cdot v)u \in \mathbb{R}^N$$

の $\mathbb{R}^N$ の標準基底 $(e_1,\cdots,e_N)$ に関する行列表現は (i,j) 成分が $u_i v_j$ である $N\times N$ 行列である. 実際, Schatten 形式の双線型性より,

$$u \odot v = \sum_{i,j} u_i v_j (e_i \odot e_j)$$

であり, $e_i \odot e_j$ は (i,j) 成分が 1 でそれ以外の成分が 0 の行列である.

定義 15.25 (慣性モーメントとその主軸)**.** 質点系 $(m_1,\cdots,m_n)$ を考える. 任意の $(r_1,\cdots,r_n)\in\mathbb{R}^{3n}$ に対し,

$$I(r_1,\cdots,r_n) := \sum_{j=1}^n m_j(|r_j|^2 - r_j\odot r_j) \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$$

を質点系 $(m_1,\cdots,m_n)$ が位置 $(r_1,\cdots,r_n)\in\mathbb{R}^{3n}$ にある時の慣性モーメントと言う. ただし $r_j\odot r_j \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ は Schatten 形式 (の標準基底に関する行列表現) である (注意 15.24 を参照). 各 $j\in\{1,\cdots,n\}$ について $|r_j|^2 - r_j\odot r_j$ は非負実対称行列である[*344]から, 慣性モーメント $I(r_1,\cdots,r_n)$ は非負実対称行列である. よって右手系の直交座標軸 $(e_1,e_2,e_3)\in SO(3)$ と非負実数 I_1,I_2,I_3 で,

$$I(r_1,\cdots,r_n)e_k = I_k e_k \quad (k=1,2,3)$$

なるものが存在する.[*345] (e_1,e_2,e_3) を慣性モーメント $I(r_1,\cdots,r_n)$ の主軸と言い, I_1,I_2,I_3 をそれぞれ $I(r_1,\cdots,r_n)$ の e_1,e_2,e_3 方向の成分と言う.

注意 15.26 (質点系の位置の回転に伴う慣性モーメントの変換)**.** 質点系 $(m_1,\cdots,m_n)$ の位置 $(r_1,\cdots,r_n)\in\mathbb{R}^{3n}$ に対する慣性モーメント $I(r_1,\cdots,r_n)$ と, 質点系の位置を $A\in SO(3)$ によって回転させた位置 $(Ar_1,\cdots,Ar_n)\in\mathbb{R}^{3n}$ に対する慣性モーメント $I(Ar_1,\cdots,Ar_n)$ の間には,

$$I(Ar_1,\cdots,Ar_n) = AI(r_1,\cdots,r_n)A^{-1}$$

なる関係がある. 実際, Schatten 形式の性質 10.110 より $Ar_j\odot Ar_j = A(r_j\odot r_j)A^{-1}$ であるから,

$$\begin{aligned}
I(Ar_1,\cdots,Ar_n) &= \sum_{j=1}^n m_j(|Ar_j|^2 - Ar_j\odot Ar_j)\\
&= \sum_{j=1}^n m_j A(|r_j|^2 - r_j\odot r_j)A^{-1}\\
&= AI(r_1,\cdots,r_n)A^{-1}
\end{aligned}$$

である. よって (e_1,e_2,e_3) が $I(r_1,\cdots,r_n)$ の主軸でその成分が I_1,I_2,I_3 であるならば, (Ae_1,Ae_2,Ae_3) は $I(Ar_1,\cdots,Ar_n)$ の主軸でその成分は I_1,I_2,I_3 である.

[*344] 命題 10.5 を参照.
[*345] 非負対称行列は対角化可能 (定理 10.122) であり固有値は非負であること, および命題 12.166 による.

定義 15.27 (慣性モーメントの軸対称性)**.** 質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ の位置 $(r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ に対する慣性モーメント $I(r_1, \cdots, r_n)$ が, 単位ベクトル $e \in \mathbb{R}^3$ に関して軸対称であるとは, 慣性モーメントが e 方向の回転 (定義 15.5) に対して不変である, すなわち,

$$I(\exp(\theta\hat{e})r_1, \cdots, \exp(\theta\hat{e})r_n) = I(r_1, \cdots, r_n) \quad (\forall\theta \in \mathbb{R})$$

が成り立つことを言う.

命題 15.28 (慣性モーメントが軸対称であるための条件)**.** 質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ が位置 $(r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ にある時の慣性モーメント $I(r_1, \cdots, r_n)$ と単位ベクトル $e \in \mathbb{R}^3$ について次は互いに同値である.

(1) $I(r_1, \cdots, r_n)$ は e に関して軸対称である.
(2) ある非負実数 $I_\perp$ が存在し, $I(r_1, \cdots, r_n)v = I_\perp v$ $(\forall v \in \{e\}^\perp)$ が成り立つ.

そして (1), (2) が成り立つとき, $(e_1, e_2, e) \in SO(3)$ となるような任意の $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ に対し (e_1, e_2, e) は $I(r_1, \cdots, r_n)$ の主軸である.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) が成り立つとする. 命題 15.6 の (3) より $\exp(\theta\hat{e})e = e$ であるので, 注意 15.26 より,

$$\begin{aligned}I(r_1, \cdots, r_n)e &= I(\exp(\theta\hat{e})r_1, \cdots, \exp(\theta\hat{e})r_n)e = \exp(\theta\hat{e})I(r_1, \cdots, r_n)\exp(-\theta\hat{e})e \\ &= \exp(\theta\hat{e})I(r_1, \cdots, r_n)e \quad (\forall\theta \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

である. よって θ に関する 0 における微分を考えれば, 命題 15.6 の (1) より,

$$e \times I(r_1, \cdots, r_n)e = \hat{e}I(r_1, \cdots, r_n)e = 0$$

を得る. よって命題 6.66 の (2) より e と $I(r_1, \cdots, r_n)e$ は線型従属であるから, e は $I(r_1, \cdots, r_n)$ の固有ベクトルである. ゆえに $I(r_1, \cdots, r_n)$ の固有ベクトル $e_1, e_2 \in \{e\}^\perp$ で $(e_1, e_2, e) \in SO(3)$ なるものが取れる.

$$I(r_1, \cdots, r_n)e_k = I_k e_k \quad (k = 1, 2)$$

とおくと, 命題 15.6 の (3) より,

$$\begin{aligned}I_2 e_2 = I(r_1, \cdots, r_n)e_2 &= \exp\left(\frac{\pi}{2}\hat{e}\right) I(r_1, \cdots, r_n) \exp\left(-\frac{\pi}{2}\hat{e}\right) e_2 \\ &= \exp\left(\frac{\pi}{2}\hat{e}\right) I(r_1, \cdots, r_n)e_1 = I_1 \exp\left(\frac{\pi}{2}\hat{e}\right) e_1 = I_1 e_2\end{aligned}$$

であるから $I_1 = I_2$ である. よって (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. (1) が成り立つことを示すには,

$$\exp(\theta\hat{e})I(r_1, \cdots, r_n) = I(r_1, \cdots, r_n)\exp(\theta\hat{e}) \quad (\forall\theta \in \mathbb{R}) \tag{15.29}$$

が成り立つことを示せばよい. $\exp(\theta\hat{e})e = e$ (命題 15.6 の (3)) より,

$$\exp(\theta\hat{e})\{e\}^\perp = \{e\}^\perp$$

であるから,

$$\exp(\theta\hat{e})I(r_1, \cdots, r_n)v = I_\perp \exp(\theta\hat{e})v = I(r_1, \cdots, r_n)\exp(\theta\hat{e})v \quad (\forall v \in \{e\}^\perp) \tag{15.30}$$

である. また,

$$(I(r_1, \cdots, r_n)e) \cdot v = I_\perp e \cdot v = 0 \quad (\forall v \in \{e\}^\perp)$$

であるから,

$$I(r_1, \cdots, r_n)e \in \{e\}^{\perp\perp} = \mathbb{R}e$$

である. よって $\exp(\theta\hat{e})e = e$ より,

$$\exp(\theta\hat{e})I(r_1, \cdots, r_n)e = I(r_1, \cdots, r_n)e = I(r_1, \cdots, r_n)\exp(\theta\hat{e})e$$

である. これと (15.30) より (15.29) が成り立つ. □

定義 15.29 (剛体の回転と角速度)**.** $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ が,

$$\mathrm{span}\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\} = \mathbb{R}^3 \tag{15.31}$$

を満たすとき,

$$SO(3) \ni A \mapsto (A\gamma_1, \cdots, A\gamma_n) \in \mathbb{R}^{3n}$$

は 3 次元多様体 $SO(3)$ (命題 15.23) の $\mathbb{R}^{3n}$ への埋め込み (定義 6.31) であるから, 定理 6.32 よりその像

$$M_\gamma = \{(A\gamma_1, \cdots, A\gamma_n) : A \in SO(3)\}$$

は $\mathbb{R}^{3n}$ 内の 3 次元多様体であり,

$$SO(3) \ni A \mapsto (A\gamma_1, \cdots, A\gamma_n) \in M_\gamma \tag{15.32}$$

は C^∞ 級同相写像である. 質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ の運動の配位空間が M_γ であるとき, この質点系の運動を γ を初期位置とする剛体の回転運動と呼ぶこととする. このとき C^∞ 級同相写像 (15.32) の逆写像

$$M_\gamma \ni r \mapsto A(r) \in SO(3), \quad r = (A(r)\gamma_1, \cdots, A(r)\gamma_n) \quad (\forall r \in M_\gamma) \tag{15.33}$$

をこの剛体の回転運動の初期位置 γ からの回転と呼ぶ.

任意の $(r, v) \in TM_\gamma$ に対し, $\omega(r, v) \in \mathbb{R}^3$ で,

$$v = (\omega(r, v) \times r_1, \cdots, \omega(r, v) \times r_n) \tag{15.34}$$

を満たすものが唯一つ存在する. 実際, 一意性は (15.31) より,

$$\mathrm{span}\{r_1, \cdots, r_n\} = \mathrm{span}\{A(r)\gamma_1, \cdots, A(r)\gamma_n\} = \mathbb{R}^3$$

であることから明らかであり, 点 $r \in M_\gamma$ を $t = t_0$ において速度 v で通過する滑らかな曲線 $t \mapsto r(t) \in M_\gamma$ を取り,[*346] $\omega(r, v) \in \mathbb{R}^3$ を, 対応する回転の生成子 (定義 15.5) が,

$$\widehat{\omega(r, v)} = \left(\frac{d}{dt} A(r(t_0))\right) A(r(t_0))^{-1} \in \mathrm{Lie}(SO(3))$$

であるものとして定義すれば,

$$r = r(t_0) = (A(r(t_0))\gamma_1, \cdots, A(r(t_0))\gamma_n)$$

であり,

$$\begin{aligned} v = (v_1, \cdots, v_n) = \frac{d}{dt} r(t_0) &= \left(\frac{d}{dt} A(r(t_0))\gamma_1, \cdots, \frac{d}{dt} A(r(t_0))\gamma_n\right) \\ &= \left(\widehat{\omega(r, v)} A(r(t_0))\gamma_1, \cdots, \widehat{\omega(r, v)} A(r(t_0))\gamma_n\right) = (\widehat{\omega(r, v)} r_1, \cdots, \widehat{\omega(r, v)} r_n) \\ &= (\omega(r, v) \times r_1, \cdots, \omega(r, v) \times r_n) \end{aligned}$$

である (最後の等号は命題 15.6 の (1) による). よって任意の $(r, v) \in TM_\gamma$ に対し, (15.34) を満たす $\omega(r, v) \in \mathbb{R}^3$ が唯一つ存在する. よって関数

$$\omega : TM_\gamma \ni (r, v) \mapsto \omega(r, v) \in \mathbb{R}^3$$

が定義できる. これをこの剛体の回転運動の角速度と呼ぶ.

任意の右手系の直交座標軸 $(e_1, e_2, e_3) \in SO(3)$ に対し, 命題 15.23 の (3) と回転 (15.33) が C^∞ 級同相写像であることから,

$$A(r) = \exp(\varphi(r)\widehat{e}_3) \exp(\theta(r)\widehat{e}_2) \exp(\psi(r)\widehat{e}_3)$$

として M_γ の局所座標

$$r \mapsto (\varphi(r), \theta(r), \psi(r)) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi)$$

[*346] 常微分方程式の解の存在定理 11.6 よりそのような曲線は存在する.

が定まる. これを (e_1, e_2, e_3) に関する M_γ の Euler 角局所座標と呼ぶ. 命題 15.23 の (2) の証明より,

$$A(r)e_3 = \sin(\theta(r))(\cos(\varphi(r))e_1 + \sin(\varphi(r))e_2) + \cos(\theta(r))e_3$$

であるから, $\dot{\varphi}(r,v)$ は $A(r)e_3$ の e_3 の周りの方位角の角速度を表し, $\theta(r)$ は $A(r)e_3$ と e_3 のなす角度を表す. そして命題 15.23 の (2) の証明より,

$$\exp(-\theta(r)\widehat{e}_2)\exp(-\varphi(r)\widehat{e}_3)A(r)(e_1,e_2,e_3) = (e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}\cos(\psi(r)) & -\sin(\psi(r)) & 0\\ \sin(\psi(r)) & \cos(\psi(r)) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

であるから, $\dot{\psi}(r,v)$ は $A(r)e_1, A(r)e_2$ の $A(r)e_3$ の周りの回転の角速度を表す.

命題 15.30 (剛体の回転運動の全角運動量と運動エネルギー)**.** 質点系 $(m_1,\cdots,m_n)$ の運動が, $\gamma = (\gamma_1,\cdots,\gamma_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ を初期位置とする剛体の回転運動であるとし, 初期位置 γ からの回転と角速度 (定義 15.29) を,

$$A(r) : M_\gamma \to SO(3),\quad \omega(r,v) : TM_\gamma \to \mathbb{R}^3$$

とおく. そして質点系 $(m_1,\cdots,m_n)$ が初期位置 γ にある時の慣性モーメント $I(\gamma)$ の主軸 $(e_1,e_2,e_3) \in SO(3)$ (定義 15.25) を取り, $I(\gamma) \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ の e_1, e_2, e_3 方向の成分を I_1, I_2, I_3 とおく (すなわち $I(\gamma)e_k = I_k e_k$ $(k = 1,2,3)$ である). そして (e_1,e_2,e_3) に関する Euler 角局所座標を (φ,θ,ψ) (定義 15.29) とおく. このとき,

(1) 質点系の位置と運動量が $(r,v) \in TM_\gamma$ であるときの全角運動量は, 質点系の位置が $r \in M_\gamma$ にあるときの慣性モーメント $I(r)$ を用いて,

$$\Omega(r,v) = I(r)\omega(r,v)$$

と表され, 運動エネルギーは,

$$T(r,v) = \frac{1}{2}\Omega(r,v)\cdot\omega(r,v) = \frac{1}{2}(I(r)\omega(r,v))\cdot\omega(r,v)$$

と表される.

(2) M_γ の Euler 角局所座標 (φ,θ,ψ) により, 角速度は,

$$\begin{aligned}\omega(r,v) = &\left(-\dot{\varphi}(r,v)\sin(\theta(r))\cos(\psi(r)) + \dot{\theta}(r,v)\sin(\psi(r))\right)A(r)e_1\\ &+\left(\dot{\varphi}(r,v)\sin(\theta(r))\sin(\psi(r)) + \dot{\theta}(r,v)\cos(\psi(r))\right)A(r)e_2\\ &+\left(\dot{\varphi}(r,v)\cos(\theta(r)) + \dot{\psi}(r,v)\right)A(r)e_3\end{aligned}$$

と表される. また全角運動量は,

$$\begin{aligned}\Omega(r,v) = &I_1\left(-\dot{\varphi}(r,v)\sin(\theta(r))\cos(\psi(r)) + \dot{\theta}(r,v)\sin(\psi(r))\right)A(r)e_1\\ &+I_2\left(\dot{\varphi}(r,v)\sin(\theta(r))\sin(\psi(r)) + \dot{\theta}(r,v)\cos(\psi(r))\right)A(r)e_2\\ &+I_3\left(\dot{\varphi}(r,v)\cos(\theta(r)) + \dot{\psi}(r,v)\right)A(r)e_3\end{aligned}$$

と表される. さらに $I_1 = I_2$ であるとき, すなわち初期位置における慣性モーメント $I(\gamma)$ が e_3 に関して軸対称である (定義 15.27 と命題 15.28 を参照) とき, 運動エネルギーは,

$$T(r,v) = \frac{1}{2}I_1\left(\dot{\varphi}(r,v)^2\sin(\theta(r))^2 + \dot{\theta}(r,v)^2\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\varphi}(r,v)\cos(\theta)(r,v) + \dot{\psi}(r,v)\right)^2$$

と表される.

証明. (1) 角速度の定義 15.29 より,

$$(v_1,\cdots,v_n) = (\omega(r,v)\times r_1,\cdots,\omega(r,v)\times r_n)$$

であるから, 命題 15.7 より,

$$\begin{aligned}\Omega(r,v) &= \sum_{j=1}^{n} m_j(r_j \times v_j) = \sum_{j=1}^{n} m_j(r_j \times (\omega(r,v) \times r_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} m_j \left(|r_j|^2 - (\omega(r,v)\cdot r_j)\cdot r_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} m_j \left(|r_j|^2 - r_j \odot r_j\right) \omega(r,v) = I(r)\omega(r,v)\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}T(r,v) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j |v_j|^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j v_j \cdot (\omega(r,v) \times r_j) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j (r_j \times v_j)\cdot \omega(r,v) = \frac{1}{2}\Omega(r,v)\cdot\omega(r,v) \\ &= \frac{1}{2}(I(r)\omega(r,v))\cdot\omega(r,v)\end{aligned}$$

である.

(2) 点 $r \in M_\gamma$ を速度 v で通過する曲線 $t \mapsto r(t) \in M_\gamma$ を考えれば[*347]定義 15.29 で述べたように $\omega(r,v) \in \mathbb{R}^3$ に対応する回転の生成子 (定義 15.5) は,

$$\widehat{\omega(r,v)} = \left(\frac{d}{dt}A(r)\right) A(r)^{-1} \in \mathrm{Lie}(SO(3))$$

であるから, 命題 15.6 の (2) より,

$$(A(r)^{-1}\widehat{\omega(r,v)}) = A(r)^{-1}\widehat{\omega(r,v)}A(r) = A(r)^{-1}\frac{d}{dt}A(r)$$

である. そして $A(r) = \exp(\varphi(r)\widehat{e}_3)\exp(\theta(r)\widehat{e}_2)\exp(\psi(r)\widehat{e}_3)$ であり,

$$\dot{\varphi}(r,v) = \frac{d}{dt}\varphi(r), \quad \dot{\theta}(r,v) = \frac{d}{dt}\theta(r), \quad \dot{\psi}(r,v) = \frac{d}{dt}\psi(r)$$

である (定義 15.16 における (15.6) を参照) から, 命題 15.6 の (2), (3) より,

$$\begin{aligned}&(A(r)^{-1}\widehat{\omega(r,v)}) = A(r)^{-1}\frac{d}{dt}A(r) \\ &= \exp(-\psi(r)\widehat{e}_3)\exp(-\theta(r)\widehat{e}_2)\exp(-\varphi(r)\widehat{e}_3)\frac{d}{dt}\exp(\varphi(r)\widehat{e}_3)\exp(\theta(r)\widehat{e}_2)\exp(\psi(r)\widehat{e}_3) \\ &= \dot{\psi}(r,v)\widehat{e}_3 + \dot{\theta}(r,v)\exp(-\psi(r)\widehat{e}_3)\widehat{e}_2\exp(\psi(r)\widehat{e}_3) \\ &+ \dot{\varphi}(r,v)\exp(-\psi(r)\widehat{e}_3)\exp(-\theta(r)\widehat{e}_2)\widehat{e}_3\exp(\theta(r)\widehat{e}_2)\exp(\psi(r)\widehat{e}_3) \\ &= \dot{\psi}(r,v)\widehat{e}_3 + \dot{\theta}(r,v)(\sin(\psi(r))\widehat{e}_1 + \cos(\psi(r))\widehat{e}_2 \\ &+ \dot{\varphi}(r,v)\left(-\sin(\theta(r))(\cos(\psi(r))\widehat{e}_1 - \sin(\psi(r))\widehat{e}_2) + \cos(\theta(r))\widehat{e}_3\right) \\ &= \left(-\dot{\varphi}(r,v)\sin(\theta(r))\cos(\psi(r)) + \dot{\theta}(r,v)\sin(\psi(r))\right)\widehat{e}_1 \\ &+ \left(\dot{\varphi}(r,v)\sin(\theta(r))\sin(\psi(r)) + \dot{\theta}(r,v)\cos(\psi(r))\right)\widehat{e}_2 \\ &+ \left(\dot{\varphi}(r,v)\cos(\theta(r)) + \dot{\psi}(r,v)\right)\widehat{e}_3\end{aligned}$$

[*347] 常微分方程式の解の存在定理 11.6 よりそのような曲線は存在する.

であるから,

$$\begin{aligned}\omega(r,v) = &\left(-\dot{\varphi}(r,v)\sin(\theta(r))\cos(\psi(r)) + \dot{\theta}(r,v)\sin(\psi(r))\right) A(r)e_1 \\ &+ \left(\dot{\varphi}(r,v)\sin(\theta(r))\sin(\psi(r)) + \dot{\theta}(r,v)\cos(\psi(r))\right) A(r)e_2 \\ &+ \left(\dot{\varphi}(r,v)\cos(\theta(r)) + \dot{\psi}(r,v)\right) A(r)e_3\end{aligned} \tag{15.35}$$

である. 注意 15.26 より,

$$I(r) = I(A(r)\gamma) = A(r)I(\gamma)A(r)^{-1}$$

であるから,

$$I(r)A(r)e_k = A(r)I(\gamma)e_k = I_kA(r)e_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

である. よって (1) と (15.35) より,

$$\begin{aligned}\Omega(r,v) = I(r)\omega(r,v) = &I_1\left(-\dot{\varphi}(r,v)\sin(\theta(r))\cos(\psi(r)) + \dot{\theta}(r,v)\sin(\psi(r))\right) A(r)e_1 \\ &+ I_2\left(\dot{\varphi}(r,v)\sin(\theta(r))\sin(\psi(r)) + \dot{\theta}(r,v)\cos(\psi(r))\right) A(r)e_2 \\ &+ I_3\left(\dot{\varphi}(r,v)\cos(\theta(r)) + \dot{\psi}(r,v)\right) A(r)e_3\end{aligned} \tag{15.36}$$

である. また (1) と (15.36) より,

$$\begin{aligned}T(r,v) = \frac{1}{2}\Omega(r,v)\cdot\omega(r,v) = &I_1\left(-\dot{\varphi}(r,v)\sin(\theta(r))\cos(\psi(r)) + \dot{\theta}(r,v)\sin(\psi(r))\right)^2 \\ &+ I_2\left(\dot{\varphi}(r,v)\sin(\theta(r))\sin(\psi(r)) + \dot{\theta}(r,v)\cos(\psi(r))\right)^2 \\ &+ I_3\left(\dot{\varphi}(r,v)\cos(\theta(r)) + \dot{\psi}(r,v)\right)^2\end{aligned}$$

であるから, $I_1 = I_2$ ならば,

$$T(r,v) = \frac{1}{2}I_1\left(\dot{\varphi}(r,v)^2\sin(\theta(r))^2 + \dot{\theta}(r,v)^2\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\varphi}(r,v)\cos(\theta)(r,v) + \dot{\psi}(r,v)\right)^2$$

である.

□

定義 15.31 (重力ポテンシャル)**.** 地表に固定した慣性系で考える. $e \in \mathbb{R}^3$ を鉛直上向きの単位ベクトルとする. 質点 m が地球から受ける万有引力は, 命題 15.3 において述べたように, 地球の中心から質点 m までの距離の逆 2 乗と m の積に比例した大きさを持ち, $-e$ の方向を向いている. ここで通常考え得る運動では, 質点 m の位置の地表からの高さは地球の半径に比べて無視し得るくらい小さい. 従って質点 m が地球から受ける万有引力は, ある正の定数 g により, $-mge$ と表せる. これを質点 m に加わる重力と言い, g を重力定数と言う.
今, この地表に固定した慣性系において $M \subseteq \mathbb{R}^{3n}$ を配位空間とする質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ の運動 $r(t) : I \to M$ を考える.

$$U(r) := U(r_1, \cdots, r_n) = \sum_{j=1}^{n} m_j g(r_j \cdot e) \quad (\forall r \in M) \tag{15.37}$$

として滑らかな関数 $U(r) : M \to \mathbb{R}$ を定義すると, 任意の $r \in M$ に対し,

$$(-m_1ge, \cdots, -m_nge) \in \mathbb{R}^{3n} = T_r(M) \oplus (T_r(M))^\perp$$

の $T_r(M)$ への射影は $-\mathrm{grad}(U)(r) \in T_r(M)$ である. 実際, $r \in M$ の周りの M の任意の局所座標 $(x_k)_k$ に対し,

$$(-m_1ge, \cdots, -m_nge)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}r = -\sum_{j=1}^{n} m_j g\left(\frac{\partial}{\partial x_k}r_j \cdot e\right) = -\frac{\partial U}{\partial x_k}(r) = -\mathrm{grad}(U)(r)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}r$$

である. よって質点系が時刻 $t \in I$ に受ける力 $F(t)$ から拘束力 (定義 15.18) $F_c(t)$ を除いたもの $F(t) - F_c(t) \in T_{r(t)}(M)$ への重力の寄与は $-\mathrm{grad}(U)(r(t))$ である. ゆえに (15.37) はこの質点系の運動のポテンシャルである. ポテンシャル (15.37) を重力ポテンシャルと言う.

命題 15.32 (重力下でのコマ運動)**.** 地表に固定した慣性系における質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ の運動が, $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ を初期位置とする剛体の回転運動 (定義 15.29) であるとする. $e \in \mathbb{R}^3$ を鉛直上向きの単位ベクトルとする. 質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ が初期位置 γ にある時の慣性モーメント $I(\gamma)$ は e に関して軸対称 (定義 15.27) であるとする. そして,

$$I(\gamma)e = I_\perp e, \quad I(\gamma)v = I_\parallel v \quad (\forall v \in \{e\}^\perp)$$

なる非負実数 $I_\perp, I_\parallel$ を取る (命題 15.28 を参照). さらに質点系 $(m_1, \cdots, m_n)$ が初期位置 γ にある時の重心は, ある正数 l によって,

$$\frac{\sum_{j=1}^n m_j \gamma_j}{m} = le, \quad m := \sum_{j=1}^n m_j \tag{15.38}$$

と表せるとする. 初期位置 γ からの回転と角速度 (定義 15.29) を,

$$A(r) : M_\gamma \to SO(3), \quad \omega(r, v) : TM_\gamma \to \mathbb{R}^3$$

とおく. $(e_1, e_2, e) \in SO(3)$ なる $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ を取り, これに関する Euler 角局所座標を (φ, θ, ψ)[*348] とする. このとき,

(1) 重力ポテンシャル $U(r) : M_\gamma \to \mathbb{R}$ は,

$$U(r) = mgl\cos(\theta(r))$$

と表せる.

(2) Lagrangian $L(r, v) = T(r, v) - U(r) : TM_\gamma \to \mathbb{R}$ は,

$$\begin{aligned} L(r, v) &= T(r, v) - U(r) \\ &= \frac{1}{2} I_\parallel \left(\dot\varphi(r, v)^2 \sin(\theta(r))^2 + \dot\theta(r, v)^2 \right) + \frac{1}{2} I_\perp \left(\dot\varphi(r, v) \cos(\theta)(r, v) + \dot\psi(r, v) \right)^2 - mgl\cos(\theta(r)) \end{aligned} \tag{15.39}$$

と表せる.

(3) 位置と速度の時間発展を $t \mapsto (r(t), v(t)) \in TM_\gamma$ とし, 外力 $F_{\mathrm{ext}}(t)$ のモーメント (定義 15.10) が 0, すなわち,

$$\sum_{j=1}^n r_j(t) \times F_{\mathrm{ext}, j}(t) = 0 \tag{15.40}$$

であると仮定する. そして,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(r(t)), \quad \dot\varphi(t) = \dot\varphi(r(t), v(t)) = \frac{d}{dt}\varphi(t), \\ \theta(t) &= \theta(r(t)), \quad \dot\theta(t) = \dot\theta(r(t), v(t)) = \frac{d}{dt}\theta(t), \\ \psi(t) &= \psi(r(t)), \quad \dot\psi(t) = \dot\psi(r(t), v(t)) = \frac{d}{dt}\psi(t) \end{aligned}$$

(定義 15.16 における (15.6) を参照) とおく. このとき角速度 $\omega(r(t), v(t))$ の $A(r(t))e$ 方向の成分は保存し, それは,

$$\omega_{Ae} = \omega(r(t), v(t)) \cdot A(r(t))e = \dot\psi(t) + \dot\varphi(t)\cos(\theta(t))$$

と表される. また全角運動量 $\Omega(r(t), v(t))$ の e 方向の成分は保存し, それは,

$$\Omega_e = \Omega(r(t), v(t)) \cdot e = I_\parallel \dot\varphi(t) \sin(\theta(t))^2 + I_\perp \omega_{Ae} \cos(\theta(t))$$

と表される.

(4) エネルギーは,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} I_\parallel \left(\dot\varphi(t)^2 \sin(\theta(t))^2 + \dot\theta(t)^2 \right) + \frac{1}{2} I_\perp \omega_{Ae}^2 + mgl\cos(\theta(t)) \\ &= \frac{(\Omega_e - I_\perp \omega_{Ae} \cos(\theta(t)))^2}{2 I_\parallel \sin(\theta(t))^2} + \frac{I_\parallel}{2} \dot\theta(t)^2 + \frac{I_\perp}{2} \omega_{Ae}^2 + mgl\cos(\theta(t)) \end{aligned}$$

と表される.

[*348] 定義 15.29 で述べたように $\dot\varphi(r, v)$ は $A(r)e$ の e の周りの方位角の角速度を表し, $\theta(r)$ は $A(r)e$ と e のなす角度であり, $\dot\psi(r, v)$ は $A(r)e_1, A(r)e_2$ の $A(r)e$ の周りの回転の角速度を表す.

(5) 外力は仕事をしない, すなわちエネルギー E は保存する (定理 15.20) とする. そして e の周りの $A(r(t))e$ の方位角の角速度 $\dot{\varphi}(t)$ と, $A(r(t))e$ と e のなす角 $\theta(t)$ の角速度 $\dot{\theta}(t)$ が, $A(r(t))e$ の周りの回転の角速度 $\dot{\psi}(t)$ に比べて無視し得るくらいに小さく, さらに $A(r(t))e$ と e のなす角度 $\theta(t)$ はほぼ 0 になる瞬間があるとする. このときエネルギー E は,

$$E \simeq \frac{1}{2} I_\perp \omega_{Ae}^2 + mgl$$

と表せる. そして,

$$\omega_{Ae}^2 > \frac{4mglI_\parallel}{I_\perp^2}$$

が成り立つならば, $A(r(t))e$ と e のなす角度 $\theta(t)$ はほぼ 0 に留まり安定する.

証明. (1)

$$A(r) = \exp(\varphi\hat{e}) \exp(\theta\hat{e}_2) \exp(\psi\hat{e}), \quad r = (r_1, \cdots, r_n) = (A(r)\gamma_1, \cdots, A(r)\gamma_n) \tag{15.41}$$

であるから, 重力ポテンシャル (定義 15.31) は (15.38) と命題 15.6 の (3) より,

$$U(r) = \sum_{j=1}^n m_j g(r_j \cdot e) = g\left(A(r) \sum_{j=1}^n m_j \gamma_j\right) \cdot e = gml(A(r)e) \cdot e = gml\cos(\theta)$$

である. また運動エネルギーは命題 15.30 の (2) より,

$$T(r, v) = \frac{1}{2} I_\parallel \left((\dot{\varphi}(r, v) \sin(\theta(r)))^2 + \dot{\theta}(r, v)^2\right) + \frac{1}{2} I_\perp \left(\dot{\psi}(r, v) + \dot{\varphi}(r, v) \cos(\theta(r))\right)^2$$

である. よって Lagrangian $L(r, v) = T(r, v) - U(r)$ は (15.39) によって表される.

(2) (15.41) と命題 15.6 の (1) より,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \varphi} r = (e \times r_1, \cdots, e \times r_n), \\ &\frac{\partial}{\partial \psi} r = (A(r)(e \times \gamma_1), \cdots, A(r)(e \times \gamma)) = (A(r)e \times r_1, \cdots, A(r)e \times r_n) \end{aligned}$$

であるから, (15.40) より,

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{ext}}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} r(t) &= \sum_{j=1}^n F_{\mathrm{ext},j}(t) \cdot (e \times r_j(t)) = e \cdot \sum_{j=1}^n r_j(t) \times F_{\mathrm{ext},j}(t) = 0, \\ F_{\mathrm{ext}}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} r(t) &= \sum_{j=1}^n F_{\mathrm{ext},j}(t) \cdot (A(r(t))e \times r_j(t)) = A(r(t))e \cdot \sum_{j=1}^n r_j(t) \times F_{\mathrm{ext},j}(t) = 0 \end{aligned}$$

である. また (15.39) より Lagrangian は φ, ψ によらないので,

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}(r(t), v(t)) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi}(r(t), v(t)) = 0$$

である. よって Lagrange の運動方程式 (定義 15.18) より,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}(r(t), v(t)) = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}(r(t), v(t)) = 0 \tag{15.42}$$

が成り立つ. (15.39) より,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}(r(t), v(t)) = I_\perp(\dot{\varphi}(t) \cos(\theta(t)) + \dot{\psi}(t))$$

であり, 命題 15.30 の (1) よりこれは角速度 $\omega(r(t), v(t))$ の $A(r(t))e$ 方向の成分の $I_\perp$ 倍である. よって (15.42) より,

$$\omega_{Ae} = \omega(r(t), v(t)) \cdot A(r(t))e = \dot{\varphi}(t) \cos(\theta(t)) + \dot{\psi}(t)$$

は保存する．また命題 15.17 の (1) より全角運動量の e 方向の成分は,

$$\begin{aligned}\Omega(r(t),v(t))\cdot e &= \sum_{j=1}^{n}(m_j r_j(t)\times v_j(t))\cdot e = \sum_{j=1}^{n} m_j v_j(t)\cdot(e\times r_j(t)) \\ &= (m_1v_1(t),\cdots,m_nv_n(t))\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}r(t) = \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}(r(t),v(t)) = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}(r(t),v(t))\end{aligned}$$

であるから (15.42) よりこれは保存する．そして (15.39) より,

$$\Omega_e = \Omega(r(t),v(t))\cdot e = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}(r(t),v(t)) = I_\parallel\dot\varphi(t)\sin(\theta(t))^2 + I_\perp\omega_{Ae}\cos(\theta(t))$$

である．

(3) 運動エネルギーは (3) より,

$$\begin{aligned}T(r(t),v(t)) &= \frac{1}{2}I_\parallel\left(\dot\varphi(t)^2\sin(\theta(t))^2+\dot\theta(t)^2\right)+\frac{1}{2}I_\perp\left(\dot\varphi(t)\cos(\theta(t))+\dot\psi(t)\right)^2 \\ &= \frac{(\Omega_e - I_\perp\omega_{Ae}\cos(\theta(t)))^2}{2I_\parallel\sin(\theta(t))^2}+\frac{1}{2}I_\parallel\dot\theta(t)^2+\frac{1}{2}I_\perp\omega_{Ae}^2\end{aligned}$$

であり, (1) よりポテンシャルエネルギーは $U(r(t)) = mgl\cos(\theta(t))$ である．よってエネルギーは,

$$E = T(r(t),v(t))+U(r(t)) = \frac{(\Omega_e - I_\perp\omega_{Ae}\cos(\theta(t)))^2}{2I_\parallel\sin(\theta(t))^2}+\frac{1}{2}I_\parallel\dot\theta(t)^2+\frac{1}{2}I_\perp\omega_{Ae}^2+mgl\cos(\theta(t))$$

である．

(4) エネルギー E は保存し, $\dot\varphi(t)$ と $\dot\theta(t)$ は $\dot\psi(t)$ に比べて無視し得るくらい小さく, $\theta(t)$ はほぼ 0 になる瞬間があるので,

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}I_\parallel\left(\dot\varphi(t)^2\sin(\theta(t))^2+\dot\theta(t)^2\right)+\frac{1}{2}I_\perp\left(\dot\varphi(t)\cos(\theta(t))+\dot\psi(t)\right)^2+mgl\cos(\theta(t)) \\ &\simeq \frac{1}{2}I_\perp\left(\dot\varphi(t)\cos(\theta(t))+\dot\psi(t)\right)^2+mgl = \frac{1}{2}I_\perp\omega_{Ae}^2+mgl\end{aligned}$$

である．また (2) より全角運動量の e 方向の成分 Ω_e は保存し, $\theta(t)$ はほぼ 0 になる瞬間があるので,

$$\Omega_e = \Omega(r(t),v(t))\cdot e \simeq \Omega(r(t),v(t))\cdot A(r(t))e = I_\perp\omega_{Ae}$$

である．よって,

$$E\simeq\frac{1}{2}I_\perp\omega_{Ae}^2+mgl,\quad \Omega_e\simeq I_\perp\omega_{Ae} \tag{15.43}$$

である．今,

$$u(t) := \cos(\theta(t)),\quad \dot u(t) := \frac{d}{dt}u(t) = -\sin(\theta(t))\dot\theta(t)$$

とおくと, (3) より,

$$\begin{aligned}E &= \frac{(\Omega_e - I_\perp\omega_{Ae}\cos(\theta(t)))^2}{2I_\parallel\sin(\theta(t))^2}+\frac{1}{2}I_\parallel\dot\theta(t)^2+\frac{1}{2}I_\perp\omega_{Ae}^2+mgl\cos(\theta(t)) \\ &= \frac{(\Omega_e - I_\perp\omega_{Ae}u(t))^2}{2I_\parallel(1-u(t)^2)}+\frac{I_\parallel}{2(1-u(t)^2)}\dot u(t)+\frac{I_\perp}{2}\omega_{Ae}^2+mglu(t)\end{aligned}$$

であるから, (15.43) より,

$$mgl(1-u(t))\simeq\frac{(I_\perp\omega_{Ae})^2(1-u(t))^2}{2I_\parallel(1-u(t)^2)}+\frac{I_\parallel}{2(1-u(t)^2)}\dot u(t)^2$$

である．よって,

$$\frac{I_\parallel}{2}\dot u(t)^2\simeq mgl(1-u(t))^2\left((1+u(t))-\frac{(I_\perp\omega_{Ae})^2}{2I_\parallel mgl}\right)$$

となる. 左辺は非負であるから, u に関する 3 次方程式

$$mgl(1-u)^2\left((1+u)-\frac{(I_\perp\omega_{Ae})^2}{2I_\parallel mgl}\right)$$

が零点を $(1,\infty)$ の範囲に持つならば, $u(t)$ はほぼ 1 に留まり, 従って $\theta(t)$ はほぼ 0 に留まる. そのための条件は,

$$\frac{(I_\perp\omega_{Ae})^2}{2I_\parallel mgl}-1>1$$

であること, すなわち,

$$\omega_{Ae}^2>\frac{4I_\parallel mgl}{I_\perp^2}$$

であることである.

□

15.4 Kepler 問題

補題 15.33. α を正数, $A\in\mathbb{R}^3$ とし,

$$M:=\{r\in\mathbb{R}^3 : A\cdot r+|r|=\alpha\}$$

とおく. このとき M は $\mathbb{R}^3$ 内の 2 次元多様体 (定義 6.7) である. そして $|r|$ は M 上で最小値 $\frac{\alpha}{1+|A|}$ を持ち, もし $|A|<1$ ならば $|r|$ は M 上で最大値 $\frac{\alpha}{1-|A|}$ も持つ. また $A=|A|e_1$, $(e_1,e_2,e_3)\in SO(3)$ なる $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 e_1,e_2,e_3 を取り, 任意の $r\in\mathbb{R}^3$ に対し $r=xe_1+ye_2+ze_3$ と表すこととし, $L:=\mathbb{R}e_1$ とおく. このとき,

(1) $|A|<1$ ならば,

$$r\in M \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(1-|A|^2)^2}{\alpha^2}\left(x+\frac{\alpha|A|}{1-|A|^2}\right)^2+\frac{1-|A|^2}{\alpha^2}(y^2+z^2)=1$$

である. よって M は直線 L 上に長軸がある楕円面であり, L に関して軸対称である. そして長軸の長さは $\frac{\alpha}{1-|A|^2}$, 短軸の長さは $\frac{\alpha}{\sqrt{1-|A|^2}}$ であり, M 上で $|r|$ が最小, 最大となるのは $r\in M\cap L$ であるとき, すなわち r が楕円面 M の長軸上にあるときである.

(2) $|A|=1$ ならば,

$$r\in M \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2\alpha}(y^2+z^2)$$

である. よって M は L 上に軸があり, $-A$ の方向に広がった放物面であり, 直線 L に関して軸対称である. そして M 上で $|r|$ が最小となるのは $r\in M\cap L$ であるとき, すなわち r が放物面 M の頂点にあるときである.

(3) $|A|>1$ ならば,

$$r\in M \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(|A|^2-1)^2}{\alpha^2}\left(x-\frac{\alpha|A|}{|A|^2-1}\right)^2-\frac{|A|^2-1}{\alpha^2}(y^2+z^2)=1,\quad x\leqslant\frac{\alpha}{|A|+1}$$

である. よって M は L 上に軸があり, $-A$ の方向に広がった双曲面であり, L に関して軸対称である. そして M 上で $|r|$ が最小となるのは $r\in M\cap L$ であるとき, すなわち r が双曲面 M の頂点にあるときである.

証明.

$$f(r):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\quad f(r):=A\cdot r+|r|$$

とおくと,

$$\mathrm{grad}(f)(r)=A+\frac{r}{|r|}\quad(\forall r\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$$

である. $\alpha>0$ より $r\in M$ ならば $\mathrm{grad}(f)(r)\neq 0$, 従って $df_r\neq 0$ である. よって定理 6.36 より M は $\mathbb{R}^3$ 内の 2 次元多様体である.

$$g(r):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\quad g(r):=|r|$$

とおく．M は閉集合であるので任意の $R \in (0,\infty)$ に対し $M_R := \{r \in M : r \leqslant R\}$ はコンパクトである．よって $M_R \neq \varnothing$ なる $R \in (0,\infty)$ を取れば g の連続性より g は M_R 上で最小値を取り，g の定義よりそれは g の M 上での最小値である．また，

$$r \in M \quad \Rightarrow \quad (1-|A|)|r| \leqslant \alpha$$

より，$|A| < 1$ ならば M は $\mathbb{R}^3$ の有界閉集合なのでコンパクトである．よって $|A| < 1$ のとき g は M 上で最大値も取る．$M \ni r \mapsto g(r) = |r| \in \mathbb{R}$ が $r_0 \in M$ において最小値か最大値を取るとする．$df_{r_0} \neq 0$ であるから，定理 6.36 より r_0 の周りの $\mathbb{R}^3$ の局所座標 (w_1, w_1, w_3) で $w_3 = f$ であり，(w_1, w_2) が M の局所座標であるようなものが取れる．$M \ni r \mapsto g(r) \in \mathbb{R}$ は r_0 において極値を取るので，

$$\frac{\partial g}{\partial w_1}(r_0) = \frac{\partial g}{\partial w_2}(r_0) = 0$$

である．よって，

$$dg_{r_0} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial w_j}(r_0) dw_{j,r_0} = \frac{\partial g}{\partial w_3}(r_0) df_{r_0}$$

であるから，dg_{r_0} と df_{r_0} は線型従属である．従って，

$$\operatorname{grad}(g)(r_0) = \frac{r_0}{|r_0|}, \quad \operatorname{grad}(f)(r_0) = A + \frac{r_0}{|r_0|}$$

は線型従属であるから，A と r_0 は線型従属である．ゆえに $A \cdot r_0$ は $|A||r_0|$ か $-|A||r_0|$ である．これより g の M 上での最小値は $\frac{\alpha}{|A|+1}$ であり，$|A| < 1$ であるとき g の M 上での最大値は $\frac{\alpha}{1-|A|}$ である．

$$\begin{aligned} r \in M \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = (\alpha - |A|x)^2, \quad |A|x \leqslant \alpha \\ &\Leftrightarrow \quad (1-|A|^2)x^2 + 2\alpha|A|x + y^2 + z^2 = \alpha^2, \quad |A|x \leqslant \alpha \end{aligned} \tag{15.44}$$

である．$|A| \leqslant 1$ のとき，

$$(1-|A|^2)x^2 + 2\alpha|A|x + y^2 + z^2 = \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha|A| \leqslant \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad |A|x \leqslant \alpha$$

であるから，$|A| < 1$ のとき，(15.44) より，

$$\begin{aligned} r \in M \quad &\Leftrightarrow \quad (1-|A|^2)x^2 + 2\alpha|A|x + y^2 + z^2 = \alpha^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (1-|A|^2)\left(x + \frac{\alpha|A|}{1-|A|^2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{\alpha^2}{1-|A|^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(1-|A|^2)^2}{\alpha^2}\left(x + \frac{\alpha|A|}{1-|A|^2}\right)^2 + \frac{1-|A|^2}{\alpha^2}(y^2+z^2) = 1 \end{aligned}$$

であり，$|A| = 1$ のとき，(15.44) より，

$$r \in M \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha x + y^2 + z^2 = \alpha^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\alpha}(y^2+z^2)$$

である．また $|A| > 1$ のとき，(15.44) より，

$$\begin{aligned} r \in M \quad &\Leftrightarrow \quad (|A|^2-1)x^2 - 2\alpha|A|x - (y^2+z^2) = -\alpha^2, \quad |A|x \leqslant \alpha \\ &\Leftrightarrow \quad (|A|^2-1)\left(x - \frac{\alpha|A|}{|A|^2-1}\right)^2 - (y^2+z^2) = \frac{\alpha^2}{|A|^2-1}, \quad |A|x \leqslant \alpha \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(|A|^2-1)^2}{\alpha^2}\left(x - \frac{\alpha|A|}{|A|^2-1}\right)^2 - \frac{|A|^2-1}{\alpha^2}(y^2+z^2) = 1, \quad |A|x \leqslant \alpha \end{aligned}$$

であり，

$$\frac{(|A|^2-1)^2}{\alpha^2}\left(x - \frac{\alpha|A|}{|A|^2-1}\right)^2 - \frac{|A|^2-1}{\alpha^2}(y^2+z^2) = 1$$

を満たす $xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$ 全体は L を軸とした 2 つの双曲線の合併で，一方の双曲線は $x \geqslant \frac{\alpha}{|A|-1}$，もう一方の双曲線は $x \leqslant \frac{\alpha}{|A|+1}$ を満たす．このうち $|A|x \leqslant \alpha$ を満たすのは後者である．$\square$

定理 15.34 (Kepler 問題)**.** 2 質点系 (m_1, m_2) の運動の配位空間が,

$$M := \{r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^6 : r_1 \neq r_2\}$$

であり, ポテンシャル $U(r) : M \to \mathbb{R}$ がある正数 α に対し,

$$U(r) = U(r_1, r_2) = -\frac{\alpha}{|r_1 - r_2|} \quad (\forall r = (r_1, r_2) \in M)$$

と表されるとする．そして外力 (定義 15.18) は加わっていない (つまりポテンシャル U による保存力しか加わらない) とする．M の局所座標として, 重心と, m_1 から見た m_2 の相対位置

$$(R(r), \gamma(r)) : M \ni r = (r_1, r_2) \mapsto \left(\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2},\ r_2 - r_1\right) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$$

を考える．そして位置と速度の時間発展 $I \ni t \mapsto (r(t), v(t)) \in TM$ に伴う重心と相対位置の時間発展を,

$$R(t) := R(r(t)) = \frac{m_1 r_1(t) + m_2 r_2(t)}{m_1 + m_2}, \quad \gamma(t) := \gamma(r(t)) = r_2(t) - r_1(t),$$

対応する速度を,

$$V(t) := \dot{R}(r(t), v(t)) = \frac{d}{dt} R(t) = \frac{m_1 v_1(t) + m_2 v_2(t)}{m_1 + m_2},$$
$$\nu(t) := \dot{\gamma}(r(t), v(t)) = \frac{d}{dt}\gamma(t) = v_2(t) - v_1(t)$$

とおく．また,

$$m := m_1 + m_2 \ \text{(全質量)}, \quad \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ \text{(換算質量)}$$

とおく．このとき,

(1) 運動エネルギー関数 $T(r, v) : TM \to \mathbb{R}$ は,

$$T(r, v) = \frac{1}{2} m |\dot{R}(r, v)|^2 + \frac{1}{2} \mu |\dot{\gamma}(r, v)|^2$$

と表せて, Lagrangian $L(r, v) : TM \to \mathbb{R}$ は,

$$L(r, v) = \frac{1}{2} m |\dot{R}(r, v)|^2 + \frac{1}{2} \mu |\dot{\gamma}(r, v)|^2 + \frac{\alpha}{|\gamma(r)|}$$

と表せる．

(2) 重心の速度 $V := V(t)$ は保存する．また,

$$E := \frac{1}{2} \mu |\nu(t)|^2 - \frac{\alpha}{|\gamma(t)|}$$

は保存する．

(3)

$$S := \gamma(t) \times \nu(t) \in \mathbb{R}^3$$

は保存する．よって m_1 から見た m_2 の相対運動 $\gamma(t) : I \to \mathbb{R}^3$ は定ベクトル $S \in \mathbb{R}^3$ の直交平面 $\{S\}^\perp$ 内に制限され, $\gamma(t)$ が単位時間当たりに掃く面積は一定である (Kepler の第二法則).

(4)

$$A := -\frac{\gamma(t)}{|\gamma|} + \frac{\mu}{\alpha}(\nu(t) \times S) \in \{S\}^\perp$$

(Runge-Lenz ベクトル) は保存する．そして,

$$A \cdot \gamma(t) + |\gamma(t)| = \frac{\mu |S|^2}{\alpha}, \tag{15.45}$$

$$|A|^2 = 1 + \frac{2\mu |S|^2}{\alpha^2} E \tag{15.46}$$

が成り立つ．

(5) m_1 から見た m_2 の相対運動 $\gamma(t) : I \to \mathbb{R}^3$ は, $E < 0$ ならば楕円, $E = 0$ ならば放物線, $E > 0$ ならば双曲線を描き (Kepler の第一法則), 定ベクトル A はこれらの軸上にある. また $|\gamma(t)|$ の最小値は,

$$\frac{\mu|S|^2}{\alpha(1+|A|)} \tag{15.47}$$

であり, $E < 0$ の場合は $|\gamma(t)|$ の最大値は,

$$\frac{\mu|S|^2}{\alpha(1-|A|)} \tag{15.48}$$

である. そして $E < 0$ の場合, 周期は楕円の長軸の長さの $\frac{3}{2}$ 乗に比例し, その比例定数は $\frac{\alpha}{\mu}$ のみによる (Keper の第三法則).

証明. (1)

$$\dot{R}(r,v) = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m}, \quad \dot{\gamma}(r,v) = v_2 - v_1$$

であるから,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m|\dot{R}(r,v)|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\gamma}(r,v)|^2 &= \frac{1}{2m}|m_1v_1 + m_2v_2|^2 + \frac{1}{2m}m_1m_2|v_2 - v_1|^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1|v_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|v_2|^2 = T(r,v)\end{aligned}$$

である. また,

$$U(r) = -\frac{\alpha}{|r_1 - r_2|} = -\frac{\alpha}{|\gamma(r)|}$$

であるから,

$$L(r,v) = T(r,v) - U(r) = \frac{1}{2}m|\dot{R}(r,v)|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\gamma}(r,v)|^2 + \frac{\alpha}{|\gamma(r)|}$$

である.

(2) Lagrange の運動方程式 (定義 15.18) より,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}}(r(t),v(t)) = \frac{\partial L}{\partial R}(r(t),v(t))$$

であり, (1) より,

$$\frac{\partial L}{\partial R}(r(t),v(t)) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{R}}(r(t),v(t)) = m\dot{R}(r(t),v(t)) = mV(t)$$

であるから,

$$\frac{d}{dt}(mV(t)) = 0$$

である. よって $V = V(t)$ は保存する. また外力は 0 であるからエネルギー

$$\frac{1}{2}m|V|^2 + \frac{1}{2}\mu|\nu(t)|^2 - \frac{\alpha}{|\gamma(r(t))|}$$

は保存する (定理 15.20). よって,

$$E := \frac{1}{2}\mu|\nu(t)|^2 - \frac{\alpha}{|\gamma(r(t))|}$$

は保存する.

(3) 任意の $u \in \mathbb{R}^3$ に対し,

$$\varphi(\theta,r) : \mathbb{R} \times M \ni (\theta,r) \mapsto (R,\gamma)^{-1}(R(r), \exp(\theta\hat{u})\gamma(r)) \in M$$

を定義すると, $\varphi(0,r) = r$ $(\forall r \in M)$ であり,

$$d\varphi_r(\theta,r)v = (R,\gamma)^{-1}(\dot{R}(r,v), \exp(\theta\hat{u})\dot{\gamma}(r,v)) \quad (\forall (r,v) \in TM, \forall\theta \in \mathbb{R})$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
L(\varphi(\theta,r),d\varphi_r(\theta,r)v) &= \frac{1}{2}m|\dot{R}(r,v)|^2 + \frac{1}{2}\mu|\exp(\theta\hat{u})\dot{\gamma}(r,v)|^2 + \frac{\alpha}{|\exp(\theta\hat{u})\gamma(r)|} \\
&= \frac{1}{2}m|\dot{R}(r,v)|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\gamma}(r,v)|^2 + \frac{\alpha}{|\gamma(r)|} \\
&= L(r,v) \quad (\forall\theta\in\mathbb{R},\forall(r,v)\in TM)
\end{aligned}
$$

である．よって Neother の定理 15.21 より,

$$
\frac{\partial T}{\partial\dot{\gamma}}(r(t),v(t))\frac{\partial(\gamma\circ\varphi)}{\partial\theta}(0,r(t)) = \mu\nu(t)\cdot(\hat{u}\gamma(t)) = \mu\nu(t)\cdot(u\times\gamma(t)) = \mu(\gamma(t)\times\nu(t))\cdot u
$$

は保存する．ここで $u\in\mathbb{R}^3$ は任意なので $S=\gamma(t)\times\nu(t)\in\mathbb{R}^3$ は保存する．

(4)

$$
\frac{\partial L}{\partial\dot{\gamma}}(r,v) = \mu\gamma(r,v),\quad \frac{\partial L}{\partial\gamma}(r,v) = -\alpha\frac{\gamma}{|\gamma|^3}
$$

であり, Lagrange の運動方程式 (定義 15.18) より,

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\gamma}}(r(t),v(t)) = \frac{\partial L}{\partial\gamma}(r(t),v(t))
$$

であるから,

$$
\mu\frac{d}{dt}\nu(t) = -\alpha\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|^3} \tag{15.49}
$$

である．また命題 15.7 より,

$$
\frac{d}{dt}\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} = \frac{|\gamma(t)|^2\nu(t)}{|\gamma(t)|^3} - \frac{(\gamma(t)\cdot\nu(t))\gamma(t)}{|\gamma(t)|^3} = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|^3}\times(\nu(t)\times\gamma(t)) = -\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|^3}\times S \tag{15.50}
$$

であるから, (15.49), (15.50) より,

$$
\frac{d}{dt}\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} = -\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|^3}\times S = \frac{\mu}{\alpha}\frac{d}{dt}(\nu(t)\times S)
$$

である．よって,

$$
\frac{d}{dt}\left(-\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} + \frac{\mu}{\alpha}(\nu(t)\times S)\right) = 0
$$

であるから,

$$
A = -\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} + \frac{\mu}{\alpha}(\nu(t)\times S)
$$

は保存する．$S=\gamma(t)\times\nu(t)$ と $\gamma(t)$ は直交するので,

$$
A\cdot\gamma(t) + |\gamma(t)| = \frac{\mu}{\alpha}(\nu(t)\times S)\cdot\gamma(t) = \frac{\mu|S|^2}{\alpha}
$$

である．また $\nu(t)$ と $S=\gamma(t)\times\nu(t)$ は直交するので $|\nu(t)\times S| = |\nu(t)||S|$ であるから,

$$
|A|^2 = 1 + \frac{\mu^2}{\alpha^2}|\nu(t)|^2|S|^2 - 2\frac{\mu|S|^2}{\alpha|\gamma(t)|} = 1 + \frac{2\mu|S|^2}{\alpha^2}\left(\frac{1}{2}\mu|\nu(t)|^2 - \frac{\alpha}{|\gamma(t)|}\right) = 1 + \frac{2\mu|S|^2}{\alpha^2}E
$$

である．

(5) $\gamma(t)$ と定ベクトル A は定ベクトル S の直交平面 $\{S\}^{\perp}$ 内にある．よって補題 15.33 と (15.46) より $E<0$, $E=0$, $E>0$ に応じて $\gamma(t):I\to\mathbb{R}^3$ は $\{S\}^{\perp}$ 内で A 方向に軸を持つ楕円, 放物線, 双曲線を描く．また補題 15.33 より $|\gamma(t)|$ の最小値は (15.47) であり, $E<0$ の場合 $|\gamma(t)|$ の最大値は (15.48) である．そして $E<0$ のとき補題 15.33 と (15.45) より $\gamma(t)$ が描く楕円の長軸の長さは,

$$
a := \frac{\mu|S|^2}{\alpha(1-|A|^2)},
$$

短軸の長さは,

$$b := \frac{\mu|S|^2}{\alpha\sqrt{1-|A|^2}}$$

であり, 従って楕円の面積は,

$$\pi ab = \pi\frac{\mu^2|S|^4}{\alpha^2(1-|A|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

である. $\gamma(t)$ が単位時間当たりに掃く面積は $\frac{1}{2}|\gamma(t)\times\nu(t)| = \frac{1}{2}|S|$ であるから, 周期は,

$$(\pi ab)\left(\frac{1}{2}|S|\right)^{-1} = 2\pi\frac{\mu^2|S|^3}{\alpha^2(1-|A|^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}\right)a^{\frac{3}{2}}$$

である. よって周期は楕円の長軸の長さ a の $\frac{3}{2}$ 乗に比例し, その比例定数は $\frac{\mu}{\alpha}$ のみによる.

□

15.5 Hamilton 力学系, Hamilton フロー, Liouville の定理, 等エネルギー面上の Liouville 測度

定義 15.35 (Hamilton 力学系, Hamilton 方程式, Hamilton フロー, (完備な) 不変空間)**.** 質点系 $(m_1,\cdots,m_n)$ の運動で, 配位空間 (定義 15.16) が $\mathbb{R}^{3n}$ の開集合 D であり, (滑らかな) ポテンシャル $U(r): D\to\mathbb{R}$ を持ち, 加わる力がポテンシャル U による保存力 (定義 15.18) のみであるようなものを考える. このとき,

$$H(r,p): D\times\mathbb{R}^{3n}\times(r,p)\mapsto\sum_{j=1}^{n}\frac{|p_j|^2}{2m_j}+U(r)\in\mathbb{R}$$

なる関数を, この運動に対する Hamiltonian と言い, Hamiltonian H の定義域

$$\Gamma^H := D\times\mathbb{R}^{3n}$$

をこの運動の相空間と言う. そして Hamiltonian $H:\Gamma^H\to\mathbb{R}$ を持つ質点系の運動を Hamilton 力学系 (H,Γ^H) と呼ぶこととする.

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p}(r,p) &:= \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}(r,p),\cdots,\frac{\partial H}{\partial p_n}(r,p)\right) = \left(\frac{p_1}{m_1},\cdots,\frac{p_n}{m_n}\right),\\ -\frac{\partial H}{\partial r}(r,p) &:= \left(\frac{\partial H}{\partial r_1}(r,p),\cdots,\frac{\partial H}{\partial r_n}(r,p)\right) = -\mathrm{grad}(U)(r)\end{aligned}$$

であるから, Hamilton 力学系 (H,Γ^H) の位置と運動量の時間発展を $I\ni t\mapsto(r(t),p(t))\in\Gamma^H$ とおくと,

$$\frac{\partial H}{\partial p}(r(t),p(t)) = \left(\frac{p_1(t)}{m_1},\cdots,\frac{p_n(t)}{m_n}\right) = (v_1(t),\cdots,v_n(t)) = v(t) = \frac{d}{dt}r(t)$$

であり, Newton の運動方程式より,

$$-\frac{\partial H}{\partial r}(r(t),p(t)) = -\mathrm{grad}(U)(r(t)) = \frac{d}{dt}p(t)$$

である. よって,

$$J := \begin{pmatrix}0_{3n} & 1_{3n}\\ -1_{3n} & 0_{3n}\end{pmatrix}\in M_{6n\times 6n}(\mathbb{R})$$

とおき, Hamilton 力学系 (H,Γ^H) の位置と運動量の時間発展を $x(t) := (r(t),p(t)) : I\to\Gamma^H$ とおけば,

$$\frac{d}{dt}x(t) = J\mathrm{grad}(H)(x(t)) \tag{15.51}$$

が成り立つ. 従って, Hamilton 力学系 (H,Γ^H) の位置と運動量の時間発展は常微分方程式 (15.51) の解である. 常微分方程式 (15.51) を Hamiltonian H に対する Hamilton 方程式と言う. 常微分方程式の初期値問題の解の存在と一意性 (定

理 11.6) より, 相空間の任意の点 $\xi \in \Gamma^H$ に対し, ξ を初期値 ($t=0$ における値) とする Hamilton 方程式 (15.51) の大域解 $x(\cdot,\xi) : I_\xi \ni t \mapsto x(t,\xi) \in \Gamma^H$ が唯一つ存在する. そして定理 11.11 より,

$$\Omega^H := \{(t,\xi) \in \mathbb{R} \times \Gamma^H : t \in I_\xi\} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{t\} \times \Omega_t^H,$$
$$\Omega_t^H := \{\xi \in \Gamma^H : t \in I_\xi\} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

とおくと, $\Omega^H \subseteq \mathbb{R} \times \Gamma^H$, $\Omega_t^H \subseteq \Gamma^H$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ はそれぞれ開集合であり, $\Omega_t^H \neq \varnothing$ なる任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\varphi_t^H : \Omega_t^H \ni \xi \mapsto x(t,\xi) \in \Omega_{-t}^H \tag{15.52}$$

は C^∞ 級同相写像で, その逆写像は φ_{-t}^H である. (15.52) を Hamiltonian H が生成する時刻 t における Hamilton フローと言う. 空でない $M \subseteq \Gamma^H$ で,

$$x(t,\xi) \in M \quad (\forall \xi \in M, \forall t \in I_\xi)$$

なるものを Hamilton 力学系 (H,Γ^H) の不変空間と言う. そして (H,Γ^H) の不変空間 M で,

$$\mathbb{R} \times M \subseteq \Omega^H$$

を満たすものを (H,Γ^H) の完備な不変空間と言う.

命題 15.36 (Hamilton 力学系の不変空間について)**.** Hamilton 力学系 (H,Γ^H) (定義 15.35) について,

(1) $\Sigma_E^H = H^{-1}(\{E\}) \neq \varnothing$ ならば, Σ_E^H は (H,Γ^H) の不変空間である.
(2) $M \subseteq \Gamma^H$ が (H,Γ^H) の不変空間であり, かつコンパクトであるならば, M は (H,Γ^H) の完備な不変空間である.

証明. (1) 任意の $\xi \in \Sigma^H$ を取る. ξ を初期値とする Hamilton 方程式 (15.51) の大域解 $x(\cdot,\xi) : I_\xi \ni t \mapsto x(t,\xi) \in \Gamma^H$ に対し, $H(x(t,\xi))$ は時刻 t におけるエネルギーを表し, 定義 15.35 よりこの質点系には外力は加わっていないため定理 15.20 よりエネルギーは保存するので,

$$H(x(t,\xi)) = H(x(0,\xi)) = H(\xi) = E \quad (\forall t \in I_\xi)$$

である. よって,

$$x(t,\xi) \in \Sigma_E^H \quad (\forall \xi \in \Sigma_E^H, \forall t \in I_\xi)$$

であるから Σ_E^H は (H,Γ^H) の不変空間である.

(2) $M \subseteq \Gamma^H$ を (H,Γ^H) のコンパクトな不変空間とする. $\mathbb{R} \times \Gamma^H$ の開集合

$$\Omega^H = \{(t,\xi) \in \mathbb{R} \times \Gamma^H : t \in I_\xi\}$$

に対し,

$$\{0\} \times M \subseteq \Omega^H$$

であり, $\{0\} \times M$ はコンパクトであるから, 十分小さい正数 ε を取れば,

$$[-\varepsilon,\varepsilon] \times M \subseteq \Omega^H \tag{15.53}$$

が成り立つ. 今, ある $n \in \mathbb{N}$ について,

$$[-n\varepsilon,n\varepsilon] \times M \subseteq \Omega^H \tag{15.54}$$

が成り立つと仮定する. M は不変空間であるから (15.54) より任意の $\xi \in M$ に対し $x(\pm n\varepsilon,\xi) \in M$ である. よって (15.53) より,

$$(t, x(\pm n\varepsilon,\xi)) \in \Omega^H \quad (\forall \xi \in M, \forall t \in [-\varepsilon,\varepsilon])$$

であり, 常微分方程式の初期値問題の解の存在と一意性 (定理 11.6) より,

$$x(t, x(\pm n\varepsilon,\xi)) = x(t \pm n\varepsilon,\xi) \quad (\forall \xi \in M, \forall t \in [-\varepsilon,\varepsilon])$$

であるから,

$$(t, \pm n\varepsilon, \xi) \in \Omega^H \quad (\forall \xi \in M, \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon])$$

である. ゆえに,

$$[-(n+1)\varepsilon, (n+1)\varepsilon] \times M \subseteq \Omega^H$$

であるから, 帰納法より (15.54) は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ. よって,

$$\mathbb{R} \times M \subseteq \Omega^H$$

であるから M は (H, Γ^H) の完備な不変空間である.

□

定理 15.37 (Hamilton フローに関する Liouville の定理)**.** Hamilton 力学系 (H, Γ^H) における各 Hamilton フロー (定義 15.35) $\varphi_t^H : \Omega_t^H \to \Omega_{-t}^H$ は, Lebesgue 測度に関して保測写像 (定義 13.33) である.

証明.

$$f(x) := \mathrm{grad}(H)(x) \ \ (\forall x \in \Gamma^H), \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと, Hamilton 方程式 (15.51) は,

$$\frac{d}{dt}x(t) = Jf(x(t))$$

である. 任意の $\xi \in \Gamma^H$ に対し ξ を初期値とする Hamilton 方程式の大域解を $x(\cdot, \xi) : I_\xi \ni t \mapsto x(t, \xi) \in \Gamma^H$ とすると, 定理 11.10 より,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi) = J\frac{\partial f}{\partial x}(x(t, \xi))\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi) \ \ (\forall \xi \in \Gamma^H, \forall t \in I_\xi)$$

が成り立つ. これより, 上付きの添え字 t は転置行列を表すものとして,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)\right)^t J\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)\right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)\right)^t \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t, \xi))\right)^t J^t J + JJ\frac{\partial f}{\partial x}(x(t, \xi))\right)\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi) \ \ (\forall \xi \in \Gamma^H, \forall t \in I_\xi) \end{aligned}$$

である. ここで,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$$

より $\frac{\partial f}{\partial x}(x(t, \xi))$ は対称行列であり,

$$J^t J = 1, \quad JJ = -1$$

であるから,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)\right)^t J\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)\right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)\right)^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t, \xi)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x(t, \xi))\right)\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi) = 0 \ \ (\forall \xi \in \Gamma^H, \forall t \in I_\xi) \end{aligned}$$

である. ゆえに,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)\right)^t J\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi) = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}(0, \xi)\right)^t J\frac{\partial x}{\partial \xi}(0, \xi) = J \ \ (\forall \xi \in \Gamma^H, \forall t \in I_\xi)$$

であるから,

$$\left|\det\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)\right| = 1 \ \ (\forall \xi \in \Gamma^H, \forall t \in I_\xi)$$

が成り立つ．ここで Hamilton フロー $\varphi_t^H:\Omega_t^H\to\Omega_{-t}^H$ は定義 15.35 より，

$$\varphi_t^H(\xi)=x(t,\xi)\quad(\forall\xi\in\Omega_t^H)$$

と表されるから，

$$\left|\det(\varphi_t^H)'(\xi)\right|=\left|\det\frac{\partial x}{\partial\xi}(t,\xi)\right|=1\quad(\forall\xi\in\Omega_t^H)$$

である．よって変数変換公式 (定理 5.229) より $\varphi_t^H:\Omega_t^H\to\Omega_{-t}^H$ は Lebesgue 測度に関して保測写像である．□

定理 15.38 (等エネルギー面上の Liouville 測度)**.** n 個の質点による Hamilton 力学系 (H,Γ^H) (定義 15.35) を考える．ある $E\in\mathbb{R}$ に対し $\Sigma_E^H:=H^{-1}(\{E\})\subseteq\Gamma^H$ が空でないコンパクト集合であり，任意の $x\in\Sigma_E^H$ に対し $\mathrm{grad}(H)(x)\neq 0$ であると仮定する．このとき $\Sigma_E^H\subseteq\Gamma^H$ は超曲面 ($\mathbb{R}^{6n}$ 内の $6n-1$ 次元多様体 (定義 6.7)) であり，(H,Γ^H) の完備な不変空間である．そして Σ_E^H の面積測度 (定義 6.85) $\mu_{\Sigma_E^H}:\mathcal{B}_{\Sigma_E^H}\to[0,\infty)$ に対し，

$$\sigma_E^H(B)=\int_B|\mathrm{grad}(H)(x)|^{-1}d\mu_{\Sigma_E^H}(x)\quad(\forall B\in\mathcal{B}_{\sigma_E^H})$$

によって Σ_E^H 上の Borel 測度 $\sigma_E^H:\mathcal{B}_{\Sigma_E^H}\to[0,\infty)$ を定義すると，Hamilton フロー $(\varphi_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ は測度空間 $(\Sigma_E^H,\mathcal{B}_{\Sigma_E^H},\sigma_E^H)$ 上の 1 径数保測変換群 (定義 13.35) である．

証明． Σ_E^H が完備な不変空間であることは命題 15.36 の (1), (2) による．また任意の $x\in\Sigma_E^H$ に対し $\mathrm{grad}(H)(x)\neq 0$ (すなわち $dH_x\neq 0$) であるから，定理 6.36 より Σ_E^H は超曲面である．任意の $t\in\mathbb{R}$ を取り固定する．定理 6.36 より $\Sigma_E^H\subseteq\Omega_t^H$ の任意の点に対し，その点の周りで定義された Ω_t^H の局所座標 $(U,\psi;y_1,\cdots,y_{6n})$ で $y_{6n}=H$ であるものが取れ，従って $(U\cap\Sigma_E^H,\omega;y_1,\cdots,y_{6n-1})$ は Σ_E^H の局所座標である．Ω_t^H の局所座標 $(U,\psi;y_1,\cdots,y_{6n})$ と Σ_E^H の局所座標 $(U\cap\Sigma_E^H,\omega;y_1,\cdots,y_{6n-1})$ に対する計量 (定義 6.68) の行列式を $G_\psi:U\to(0,\infty)$, $G_\omega:U\cap\Sigma_E^H\to(0,\infty)$ とおくと，任意の $x\in U\cap\Sigma_E^H$ に対し，

$$\nu(x):=\frac{1}{\sqrt{G_\omega(x)}}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}x\times\cdots\times\frac{\partial}{\partial y_{6n-1}}x\right)\tag{15.55}$$

は x における Σ_E^H の単位法線ベクトルであり (定義 6.112 を参照)，勾配の定義 6.70 より，

$$\left(\mathrm{grad}(H)(x)\;\middle|\;\frac{\partial}{\partial y_j}x\right)=\frac{\partial H}{\partial y_j}(x)=\frac{\partial y_{6n}}{\partial y_j}(x)=0\quad(\forall j\in\{1,\cdots,6n-1\})$$

であるから，$\mathrm{grad}(H)(x)$ も x における Σ_E^H の法線ベクトルである．そして Ω_t^H の局所座標 $(U,\psi;y_1,\cdots,y_{6n})$ の計量 (定義 6.68) の逆行列を $(g^{i,j}(x))_{i,j}\in M_{6n\times 6n}(\mathbb{R})$ とすると，命題 6.71 より，

$$\mathrm{grad}(H)(x)=\sum_{i,j}g^{i,j}(x)\frac{\partial H}{\partial y_j}(x)\frac{\partial}{\partial y_i}x=\sum_{i=1}^{6n}g^{i,6n}(x)\frac{\partial}{\partial y_i}x\tag{15.56}$$

であり，逆行列の余因子行列による表現 (定理 2.53 を参照) より，

$$g^{6n,6n}(x)=\frac{G_\omega(x)}{G_\psi(x)}\quad(\forall x\in U\cap\Sigma_E^H)$$

である．よって (15.55), (15.56) より，

$$\begin{aligned}|\mathrm{grad}(H)(x)|=|\mathrm{grad}(H)(x)\cdot\nu(x)|&=g^{6n,6n}(x)\frac{1}{\sqrt{G_\omega(x)}}\left|\det\left(\frac{\partial}{\partial y_1}x\times\cdots\times\frac{\partial}{\partial y_{6n}x}\right)\right|\\&=g^{6n,6n}(x)\frac{\sqrt{G_\psi(x)}}{\sqrt{G_\omega(x)}}=\frac{\sqrt{G_\omega(x)}}{\sqrt{G_\psi(x)}}\quad(\forall x\in U\cap\Sigma_E^H)\end{aligned}\tag{15.57}$$

である．$\varphi_t^H:\Omega_t^H\to\Omega_{-t}^H$ は C^∞ 級同相写像で逆写像は φ_{-t}^H あるから，$(\varphi_t^H(U),\psi\circ\varphi_{-t}^H;z_1,\cdots,z_{6n})$ は Ω_{-t}^H の局所座標であり，

$$z_{6n}=y_{6n}\circ\varphi_{-t}^H=H\circ\varphi_{-t}^H=H$$

であるので, $(\varphi_t^H(U)\cap\Sigma_E^H, \omega\circ\varphi_{-t}^H; z_1,\cdots,z_{6n-1})$ は Σ_E^H の局所座標である. よって上の (15.57) で, Ω_t^H の局所座標 (U,ψ) を Ω_{-t}^H の局所座標 $(\varphi_t^H(U), \psi\circ\varphi_{-t}^H)$ に置き換えたものを考えれば[*349],

$$|\mathrm{grad}(H)(\varphi_t^H(x))| = \frac{\sqrt{G_{\omega\circ\varphi_{-t}^H}(\varphi_t^H(x))}}{\sqrt{G_{\psi\circ\varphi_{-t}^H}(\varphi_t^H(x))}} \quad (\forall x\in U\cap\Sigma_E^H) \tag{15.58}$$

が成り立つことが分かる. ここで Liouville の定理 15.37 より,

$$\begin{aligned}\sqrt{G_{\psi\circ\varphi_{-t}^H}(\varphi_t^H(x))} &= \left|\det(\varphi_t^H\circ\psi^{-1})'(\psi(x))\right| = \left|\det(\varphi_t^H)'(x)\right|\left|\det(\psi^{-1})'(\psi(x))\right| \\ &= \left|\det(\psi^{-1})'(\psi(x))\right| = \sqrt{G_\psi(x)} \quad (\forall x\in U\cap\Sigma_E^H)\end{aligned}$$

であるから, (15.58) より,

$$|\mathrm{grad}(H)(\varphi_t^H(x))| = \frac{\sqrt{G_{\omega\circ\varphi_{-t}^H}(\varphi_t^H(x))}}{\sqrt{G_\psi(x)}} \quad (\forall x\in U\cap\Sigma_E^H) \tag{15.59}$$

である. よって (15.57) と (15.59) より,

$$\frac{|\mathrm{grad}(H)(\varphi_t^H(x))|}{|\mathrm{grad}(H)(x)|} = \frac{\sqrt{G_{\omega\circ\varphi_{-t}^H}(\varphi_t^H(x))}}{\sqrt{G_\omega(x)}} \quad (\forall x\in U\cap\Sigma_E^H) \tag{15.60}$$

が成り立つ. C^∞ 級同相写像 $\varphi_t^H: U\cap\Sigma_E^H\to\varphi_t^H(U\cap\Sigma_E^H)$ に関して, 多様体上の積分に関する変数変換公式 (定理 6.94) を用いると, 任意の $B\in\mathcal{B}_{U\cap\Sigma_E^H}$ に対し,

$$\begin{aligned}\sigma_E^H(\varphi_t^H(B)) &= \int_{\varphi_t^H(U\cap\Sigma_E^H)} \chi_{\varphi_t^H(B)}(x)|\mathrm{grad}(H)(x)|^{-1}d\mu_{\Sigma_E^H}(x) \\ &= \int_{U\cap\Sigma_E^H}\chi_B(x)|\mathrm{grad}(H)(\varphi_t^H(x))|^{-1}\frac{\sqrt{G_{\omega\circ\varphi_{-t}^H}(\varphi_t^H(x))}}{\sqrt{G_\omega(x)}}d\mu_{\Sigma_E^H}(x)\end{aligned}$$

であるから, (15.60) より,

$$\sigma_E^H(\varphi_t^H(B)) = \int_{U\cap\Sigma_E^H}\chi_B(x)|\mathrm{grad}(H)(x)|^{-1}d\mu_{\Sigma_E^H}(x) = \sigma_E^H(B)$$

が成り立つ. ここで $(U\cap\Sigma_E^H,\omega)$ は Σ_E^H の任意の点の周りの局所座標であり, $t\in\mathbb{R}$ は任意であるから, 任意の $t\in\mathbb{R}$ と任意の $B\in\mathcal{B}_{\Sigma_E^H}$ に対し $\sigma_E^H(B) = \sigma_E^H(\varphi_t^H(B))$ が成り立つ.

$$\mathbb{R}\times\Sigma_E^H\ni(t,x)\mapsto\varphi_t^H(x)\in\Sigma_E^H$$

は連続 (定理 11.9) であり, 常微分方程式の初期値問題の解の存在と一意性 (定理 11.6) より,

$$\varphi_0^H(x) = x,\quad \varphi_s^H(\varphi_t^H(x)) = \varphi_{s+t}^H(x) \quad (\forall s,t\in\mathbb{R}, \forall x\in\Sigma_E^H)$$

であるから, $(\varphi_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ は測度空間 $(\Sigma_E^H, \mathcal{B}_{\Sigma_E^H}, \sigma_E^H)$ 上の 1 径数保測変換群である. □

定義 15.39 (Hamilton 力学系のコンパクトな等エネルギー面上の Liouville 測度). Hamilton 力学系 (H,Γ^H) (定義 15.35) を考える. ある $E\in\mathbb{R}$ に対し $\Sigma_E^H := H^{-1}(\{E\})\subseteq\Gamma^H$ が空でないコンパクト集合であり, 任意の $x\in\Sigma_E^H$ に対し $\mathrm{grad}(H)(x)\neq 0$ であると仮定する. このとき定理 15.38 における Borel 測度

$$\sigma_E^H:\mathcal{B}_{\Sigma_E^H}\ni B\mapsto\int_B|\mathrm{grad}(H)(x)|^{-1}d\mu_{\Sigma_E^H}(x)\in[0,\infty)$$

を, 等エネルギー面 Σ_E^H 上の Liouville 測度と言う. 定理 15.38 より, Hamilton フロー $(\varphi_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ は測度空間 $(\Sigma_E^H,\mathcal{B}_{\Sigma_E^H},\sigma_E^H)$ 上の 1 径数保測変換群をなす.

[*349] 対応する Σ_E^H の局所座標は (U,ω) から $(\varphi_t^H(U)\cap\Sigma_E^H, \omega\circ\varphi_{-t}^H)$ に置き換わることに注意.

15.6 古典統計力学系の分配関数, 逆温度, エルゴード性とミクロカノニカル分布

定義 15.40 (古典統計力学系の定義)**.** Hamilton 力学系 (H, Γ^H) (定義 15.35) が次の条件 (1) ∼ (6) を満たすとき, (H, Γ^H) を古典統計力学系と呼ぶこととする.

(1) 配位空間 (定義 15.35 における開集合 D) は有界かつ連結である.
(2) $\sup(H) = \infty$ かつ $\inf(H) > -\infty$ である.
(3) 任意の $E \in \mathbb{R}$ に対し $H^{-1}((-\infty, E]) \subseteq \Gamma^H$ はコンパクトである.
(4) 任意の $E \in (\inf(H), \infty) \subseteq H(\Gamma^H)$, 任意の $x \in \Sigma_E^H := H^{-1}(\{E\})$ に対し, $\mathrm{grad}(H)(x) \neq 0$ である.
(5)
$$V^H(E) : \mathbb{R} \ni E \mapsto \int_{H^{-1}((-\infty,E])} 1 dx \in [0, \infty)$$
は緩増加関数 (定義 8.53) である.
(6) 任意の $E \in (\inf(H), \infty) \subseteq H(\Gamma^H)$ に対し,
$$B \in \mathcal{B}_{\Sigma_E^H}, \ \ \varphi_t^H(B) = B \ \ (\forall t \in \mathbb{R}) \ \ \Rightarrow \ \ \sigma_E^H(B) = 0 \ \ \text{または} \ \ \sigma_E^H(\Sigma_E^H \backslash B) = 0$$
が成り立つ. ただし $(\varphi_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ は Hamilton フローであり, σ_E^H は等エネルギー面 Σ_E^H 上の Liouville 測度 (定義 15.39) である.

条件 (6) を古典統計力学系 (H, Γ^H) のエルゴード性と言う.

注意 15.41 (古典統計力学系の定義についての注意)**.** (H, Γ^H) を古典統計力学系とする. 定義 15.40 の条件 (1) より相空間 Γ^H は連結であり, 従って定義 15.40 の条件 (2) と中間値の定理 1.131 より,
$$(\inf(H), \infty) \subseteq H(\Gamma^H) \subseteq [\inf(H), \infty)$$
である. 任意の $E \in (\inf(H), \infty) \subseteq H(\Gamma^H)$ に対し, 定義 15.40 の条件 (3), (4) より等エネルギー面 $\Sigma_E^H = H^{-1}(\{E\})$ はコンパクトな超曲面であり, 面積測度 $\mu_{\Sigma_E^H} : \mathcal{B}_{\Sigma_E^H} \to [0, \infty)$ と Liouville 測度 (定義 15.39)
$$\sigma_E^H : \mathcal{B}_{\Sigma_E^H} \ni B \mapsto \int_B |\mathrm{grad}(H)(x)|^{-1} d\mu_{\Sigma_E^H}(x) \in [0, \infty)$$
を持つ. 定理 15.38 より Σ_E^H は Hamilton フロー $(\varphi_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ の不変空間であり, $(\varphi_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ は測度空間 $(\Sigma_E^H, \mathcal{B}_{\Sigma_E^H}, \sigma_E^H)$ 上の 1 径数保測変換群である. 超曲面 Σ_E^H の面積測度 (Riemann-Lebesgue 測度) $\mu_{\Sigma_E^H} : \mathcal{B}_{\Sigma_E^H} \to [0, \infty)$ の定義 6.85 より, 任意の空でない開集合 $U \subseteq \Sigma_E^H$ に対し $\mu_{\Sigma_E^H}(U) > 0$ であるから,
$$\sigma_E^H(U) = \int_U |\mathrm{grad}(H)(x)|^{-1} d\mu_{\Sigma_E^H}(x) > 0$$
である. よって特に $\sigma_E^H(\Sigma_E^H) > 0$ であるから確率測度
$$P_E^H : \mathcal{B}_{\Sigma_E^H} \ni B \mapsto \frac{1}{\sigma_E^H(\Sigma_E^H)} \sigma_E^H(B) \in [0, 1] \tag{15.61}$$
が定義できる. 定義 15.40 の条件 (6) は, 任意の $E \in (-\inf(H), \infty)$ に対し Hamilton フロー $(\varphi_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ が確率空間 $(\Sigma_E^H, \mathcal{B}_{\Sigma_E^H}, P_E^H)$ 上のエルゴード的 (定義 13.37) な 1 径数保測変換群であることを意味している.

定義 15.42 (古典統計力学系の構造関数)**.** (H, Γ^H) を古典統計力学系とする. 注意 15.41 より, 任意の $E \in (\inf(H), \infty) \subseteq H(\Gamma^H)$ に対し, 等エネルギー面 $\Sigma_E^H = H^{-1}(\{E\})$ は Liouville 測度 $\sigma_E^H : \mathcal{B}_{\Sigma_E^H} \to [0, \infty)$ を持つ. そこで,
$$\rho^H(E) := \begin{cases} \sigma_E^H(\Sigma_E^H) & (E \in (\inf(H), \infty)) \\ 0 & ((-\infty, \inf(H)]) \end{cases}$$
として関数 $\rho^H : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を定義する. ρ^H を古典統計力学系 (H, Γ^H) の構造関数と呼ぶこととする.

命題 15.43 (古典統計力学系の構造関数の基本性質)**.** 古典統計力学系 (H,Γ^H) の構造関数 $\rho^H:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ は緩増加関数 (定義 8.53) であり, $\mathbb{R}$ 上の任意の非負値 Borel 関数 $f:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ に対し,

$$\int_{\Gamma^H} f(H(x))dx=\int_{\mathbb{R}} f(E)\rho^H(E)dE=\int_{(\inf(H),\infty)} f(E)\rho^H(E)dE$$

が成り立つ.

証明. 古典統計力学系の定義 15.40 の (5) より,

$$V^H(E):\mathbb{R}\ni E\mapsto\int_{H^{-1}((-\infty,E])} 1dx\in[0,\infty)$$

は緩増加関数であるから, その導関数 $(V^H)'$ も緩増加関数である. 今, $(V^H)'$ と ρ^H が一致することを示す. V^H は開区間 $(-\infty,\inf(H))$ 上で 0 なので導関数 $(V^H)'$ も $(-\infty,\inf(H))$ 上で 0 であり, $(V^H)'$ の連続性より $(V^H)'$ は $(-\infty,\inf(H)]$ 上で 0 である. よって,

$$(V^H)'(E)=0=\rho^H(E)\ \ (\forall E\in(-\infty,\inf(H)])$$

である. また定義 15.40 の (3), (4) より任意の有界閉区間 $[E_1,E_2]\subseteq(\inf(H),\infty)$ に対し, $H^{-1}([E_1,E_2])$ はコンパクトであり, 任意の $x\in H^{-1}([E_1,E_2])$ に対し $\mathrm{grad}(H)(x)\neq 0$ である. よって定理 6.36 より $H^{-1}([E_1,E_2])$ を被覆する有限個の Γ^H の局所座標で, そのそれぞれが H を 1 つの座標成分として持つようなものが取れる. よって 1 の分割 (定理 6.44) と定理 15.38 における $|\mathrm{grad}(H)(x)|$ の Γ^H と Σ_E^H の局所座標の計量の行列式による表示 (15.57) と面積測度 (Riemann-Lebesgue 測度) $\mu_{\Sigma_E^H}:\mathcal{B}_{\Sigma_E^H}\to[0,\infty)$ の定義 6.85 より, ρ^H が $[E_1,E_2]$ 上で連続であり,

$$\int_{H^{-1}([E_1,E_2])} 1dx=\int_{[E_1,E_2]}\int_{\Sigma_E^H}|\mathrm{grad}(H)(x)|^{-1}d\mu_{\Sigma_E^H}(x)dE=\int_{[E_1,E_2]}\rho^H(E)dE$$

が成り立つことが分かる. $[E_1,E_2]\subseteq(\inf(H),\infty)$ は任意であるから ρ^H は $(\inf(H),\infty)$ 上で連続であり,

$$\begin{aligned}V^H(E_2)-V^H(E_1)&=\int_{H^{-1}((E_1,E_2])}1dx=\int_{H^{-1}([E_1,E_2])}1dx\\&=\int_{[E_1,E_2]}\rho^H(E)dE\ \ (\forall[E_1,E_2]\subseteq(\inf(H),\infty))\end{aligned}$$

[*350]であるから,

$$(V^H)'(E)=\rho^H(E)\ \ (\forall E\in(\inf(H),\infty))$$

である. ゆえに $\rho^H=(V^H)'$ であるので ρ^H は緩増加関数であり,

$$\begin{aligned}\int_{H^{-1}((-\infty,E])}1dx=V^H(E)=V^H(E)-V^H(\inf(H))&=\int_{[\inf(H),E]}\rho^H(E)dE\\&=\int_{(-\infty,E]}\rho^H(E)dE\ \ (\forall E\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

が成り立つ. これより 2 つの $\mathbb{R}$ 上の Borel 測度

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\ni B\mapsto\int_{H^{-1}(B)}1dx\in[0,\infty],\\&\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\ni B\mapsto\int_B\rho^H(E)dE\in[0,\infty]\end{aligned}\tag{15.62}$$

は $\mathbb{R}$ の任意の左半開区間に対して一致し, $\mathbb{R}$ の任意の開集合は $\mathbb{R}$ の互いに交わらない可算個の左半開区間の合併である (命題 5.207) ので, これらの Borel 測度は $\mathbb{R}$ の任意の開集合に対して一致する. そしてこれらの Borel 測度は $\mathbb{R}$ の任

[*350] 2 番目の等号は超曲面 $H^{-1}(\{E_1\})=\Sigma_{E_1}^H\subseteq\Gamma^H$ の Lebesgue 測度が 0 であること (命題 6.87) による.

意のコンパクト集合に対して有限値を与える[*351]ので, 定理 5.177 よりこれらは $\mathbb{R}$ 上の位相正則測度である. ゆえに位相正則測度の外部正則性 (定義 5.168) より (15.62) の 2 つの Borel 測度は一致する. よって,

$$\int_{\Gamma^H} \chi_B(H(x))dx = \int_{H^{-1}(B)} 1dx = \int_B \rho^H(E)dE \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$$

が成り立つので, 非負値 Borel 関数の単関数近似 (命題 5.29) より, 任意の非負値 Borel 関数 $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ に対し,

$$\int_{\Gamma^H} f(H(x))dx = \int_{\mathbb{R}} f(E)\rho^H(E)dE = \int_{(\inf(H),\infty)} f(E)\rho^H(E)dE$$

が成り立つ. □

定義 15.44 (古典統計力学系の分配関数)**.** 古典統計力学系 (H, Γ^H) (定義 15.40) に対し,

$$Z^H(\beta) := \int_{\Gamma^H} e^{-\beta H(x)}dx \quad (\forall \beta \in (0, \infty))$$

と定義する. $(0, \infty) \ni \beta \mapsto Z^H(\beta)$ を古典統計力学系 (H, Γ^H) の分配関数と言う.

命題 15.45 (古典統計力学系の分配関数の基本性質)**.** 古典統計力学系 (H, Γ^H) の分配関数 $Z^H(\beta)$ について,

(1) (H, Γ^H) の構造関数 $\rho^H(E) : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ に対し,

$$Z^H(\beta) = \int_{(\inf(H),\infty)} e^{-\beta E}\rho^H(E)dE \in (0, \infty) \quad (\forall \beta \in (0, \infty))$$

が成り立つ. また, $Z^H(\beta) : (0, \infty) \to (0, \infty)$ は C^∞ 級であり, 任意の $n \in \mathbb{N}, \beta \in (0, \infty)$ に対し,

$$\frac{d^n}{d\beta^n}Z^H(\beta) = \int_{\Gamma^H} (-H(x))^n e^{-\beta H(x)}dx = \int_{(\inf(H),\infty)} (-E)^n e^{-\beta E}\rho^H(E)dE$$

が成り立つ.

(2)

$$-\frac{d}{d\beta}\log(Z^H(\beta)) \in (\inf(H), \infty), \quad \frac{d^2}{d\beta^2}\log(Z^H(\beta)) \in (0, \infty)$$

が成り立つ.

(3)

$$(-\infty, \inf(H)) \ni \beta \mapsto -\frac{d}{d\beta}\log(Z^H(\beta)) \in (\inf(H), \infty)$$

は狭義単調減少な C^∞ 級同相写像である.

証明. (1) $\rho^H(E) > 0$ $(\forall E \in (\inf(H), \infty))$ であることと命題 15.43 より,

$$Z^H(\beta) = \int_{(\inf(H),\infty)} e^{-\beta E}\rho^H(E)dE > 0 \quad (\forall \beta \in (0, \infty))$$

である. 命題 15.43 より ρ^H は緩増加関数 (定義 8.53) なので, 任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し,

$$\mathbb{R} \ni E \mapsto (-E)^n\rho^H(E) \in [0, \infty)$$

は高々多項式的に増加する連続関数であり, 定義 15.40 の (2) より $\inf(H) > -\infty$ であるから, 任意の $\beta \in (0, \infty)$ に対し,

$$\mathbb{R} \ni E \mapsto (-E)^n\rho^H(E)e^{-\beta E} \in \mathbb{R}$$

[*351] (15.62) の上の Borel 測度がコンパクト集合に対して有限値を与えることは任意の $E \in \mathbb{R}$ に対し $H^{-1}((-\infty, E])$ がコンパクトである (定義 15.40 の (3)) ことにより, (15.62) の下の Borel 測度がコンパクト集合に対して有限値を与えることは ρ^H がその連続性よりコンパクト集合上で有界であることによる.

は可積分である．よって命題 15.43 より，

$$\Gamma^H \ni x \mapsto (-H(x))^n e^{-\beta H(x)} \in \mathbb{R}$$

は可積分であり，任意の $\beta \in (0,\infty)$ に対し，

$$Z^H(\beta) = \int_{(\inf(H),\infty)} e^{-\beta E}\rho^H(E)dE \in (0,\infty)$$

が成り立ち，Lebesgue 優収束定理より任意の $n \in \mathbb{N}, \beta \in (0,\infty)$ に対し，

$$\frac{d^n}{d\beta^n}Z^H(\beta) = \int_{\Gamma^H}(-H(x))^n e^{-\beta H(x)}dx = \int_{(\inf(H),\infty)}(-E)^n e^{-\beta E}\rho^H(E)dE$$

が成り立つ．

(2) 構造関数 ρ^H が $(\inf(H),\infty)$ 上で正であることと (1) より，

$$\begin{aligned}
&-\frac{d}{d\beta}\log(Z^H(\beta)) - \inf(H) = -\frac{1}{Z^H(\beta)}\frac{d}{d\beta}Z^H(\beta) - \inf(H)\\
&= \frac{1}{Z^H(\beta)}\int_{\Gamma^H}(H(x)-\inf(H))e^{-\beta H(x)}dx\\
&= \frac{1}{Z^H(\beta)}\int_{(\inf(H),\infty)}(E-\inf(H))e^{-\beta E}dE > 0 \quad (\forall\beta \in (0,\infty))
\end{aligned}$$

である．また任意の $\beta \in (0,\infty)$ に対し，

$$\frac{d^2}{d\beta^2}\log(Z^H(\beta)) = \frac{d}{d\beta}\frac{(Z^H)'(\beta)}{Z^H(\beta)} = \frac{(Z^H)''(\beta)}{Z^H(\beta)} - \frac{(Z^H)'(\beta)^2}{Z^H(\beta)^2}$$

であるから，ρ^H が $(\inf(H),\infty)$ 上で正であることと (1) より，

$$\begin{aligned}
0 &< \int_{(\inf(H),\infty)}\left(E + \frac{(Z^H)'(\beta)}{Z^H(\beta)}\right)^2 e^{-\beta E}\rho^H(E)dE\\
&= (Z^H)''(\beta)^2 - \frac{(Z^H)'(\beta)}{Z^H(\beta)}(Z^H)'(\beta) + \frac{(Z^H)'(\beta)^2}{Z^H(\beta)^2}Z^H(\beta)\\
&= (Z^H)''(\beta)^2 - \frac{(Z^H)'(\beta)^2}{Z^H(\beta)} = Z^H(\beta)\frac{d^2}{d\beta^2}\log(Z^H(\beta))
\end{aligned}$$

である．(1) より $Z^H(\beta) > 0\ (\forall\beta \in (0,\infty))$ であるから，

$$\frac{d^2}{d\beta^2}\log(Z^H(\beta)) > 0 \quad (\forall\beta \in (0,\infty))$$

が成り立つ．

(3) (1), (2) より，

$$(0,\infty) \ni \beta \mapsto -\frac{d}{d\beta}\log(Z^H(\beta)) \in (\inf(H),\infty) \tag{15.63}$$

は狭義単調減少な C^∞ 級関数である．よって (15.63) が C^∞ 級同相写像であることを示すには，逆関数定理 4.17 より，(15.63) が全射であることを示せば十分である．そこで任意の $E_0 \in (\inf(H),\infty)$ を取り固定し，

$$f(\beta) : (0,\infty) \ni \beta \mapsto e^{\beta E_0}Z^H(\beta) \in (0,\infty)$$

なる関数を考える．$m := \inf(H) \in (-\infty, E_0)$ とおくと，ρ^H が (m,∞) 上で正であることから，

$$\begin{aligned}
f(\beta) &= e^{\beta E_0}\int_m^\infty e^{-\beta E}\rho^H(E)dE \geqslant e^{\beta E_0}\int_m^{\frac{E_0+m}{2}} e^{-\beta E}\rho^H(E)dE\\
&\geqslant e^{\frac{\beta}{2}(E_0-m)}\int_m^{\frac{E_0+m}{2}}\rho^H(E)dE > 0 \quad (\beta \in (0,\infty))
\end{aligned}$$

である. よって,

$$\infty = \lim_{\beta \to +\infty} e^{\frac{\beta}{2}(E_0 - m)} \int_m^{\frac{E_0+m}{2}} \rho^H(E)dE = \lim_{\beta \to +\infty} f(\beta)$$

が成り立つ. また,

$$f(\beta) = \int_m^{E_0} e^{\beta(E_0-E)}\rho^H(E)dE + \int_{E_0}^{\infty} e^{-\beta(E-E_0)}\rho^H(E)dE \quad (\forall \beta \in (0,\infty))$$

であるから, Lebesgue 優収束定理と単調収束定理より,

$$\lim_{\beta \to \infty} f(\beta) = \int_m^{E_0} \rho^H(E)dE + \int_{E_0}^{\infty} \rho^H(E)dE = \int_{(m,\infty)} \rho^H(E)dE$$

である. よって命題 15.43 より,

$$\lim_{\beta \to \infty} f(\beta) = \int_{(m,\infty)} \rho^H(E)dE = \int_{\Gamma^H} 1dx = \infty$$

[*352]であるから,

$$\lim_{\beta \to \infty} f(\beta) = \infty, \quad \lim_{\beta \to +0} f(\beta) = \infty$$

が成り立つ. よって $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ は単調増加でも単調減少でもない. ゆえに,

$$(0,\infty) \ni \beta \mapsto \log(f(\beta)) = E_0\beta + \log(Z^H(\beta)) \in \mathbb{R}$$

も単調増加でも単調減少でもないので, この導関数

$$(0,\infty) \ni \beta \mapsto E_0 + \frac{d}{d\beta}\log(Z^H(\beta)) \in \mathbb{R}$$

は 0 を値として取る. ゆえに $\beta_0 \in (0,\infty)$ で,

$$E_0 = -\frac{d}{d\beta}\log(Z^H(\beta))\Big|_{\beta=\beta_0}$$

を満たすものが存在するので, (15.63) は全射である.

□

定義 15.46 (古典統計力学系の逆温度)**.** 古典統計力学系 (H, Γ^H) に対し, 命題 15.45 より,

$$(0,\infty) \ni \beta \mapsto -\frac{d}{d\beta}\log(Z^H(\beta)) \in (\inf(H),\infty)$$

は狭義単調減少な C^∞ 級同相写像である. そこでこの逆関数を,

$$\begin{aligned} &\beta^H(E) : (\inf(H),\infty) \to (0,\infty), \\ &E = -\frac{d}{d\beta}\log(Z^H(\beta))\Big|_{\beta=\beta^H(E)} \quad (\forall E \in (\inf(H),\infty)) \end{aligned}$$

とおく. 任意の $E \in (\inf(H),\infty)$ に対し $\beta^H(E) \in (0,\infty)$ を, 古典統計力学系 (H,Γ^H) のエネルギー E に対応する逆温度と言う. また逆に任意の $\beta \in (0,\infty)$ に対し,

$$E = -\frac{d}{d\theta}\log(Z^H(\theta))\Big|_{\theta=\beta} \in (\inf(H),\infty)$$

を古典統計力学系 (H,Γ^H) の逆温度 β に対応するエネルギーと言う.

[*352] 定義 15.35 より相空間 Γ^H の Lebesgue 測度は ∞ であることに注意.

定義 15.47 (古典統計力学系のエルゴード性とミクロカノニカル分布)**.** 古典統計力学系 (H, Γ^H) (定義 15.40) のエネルギーが $E \in (\inf(H), \infty)$ に保存されているとする．コンパクトな等エネルギー面 $\Sigma_E^H = H^{-1}(\{E\})$ 上の面積測度 (定義 6.85) を $\mu_{\Sigma_E^H} : \mathcal{B}_{\Sigma_E^H} \to [0, \infty)$, Liouville 測度 (注意 15.41 を参照) を,

$$\sigma_E^H : \mathcal{B}_{\Sigma_E^H} \ni B \mapsto \int_B |\mathrm{grad}(H)(x)|^{-1} d\mu_{\Sigma_E^H}(x) \in [0, \infty)$$

とおき, σ_E^H を正規化した確率 Borel 測度

$$P_E^H : \mathcal{B}_{\Sigma_E^H} \ni B \mapsto \frac{1}{\sigma_E^H(\Sigma_E^H)} \sigma_E^H(B) = \frac{1}{\rho^H(E)} \int_B |\mathrm{grad}(H)(x)|^{-1} d\mu_{\Sigma_E^H}(x) \in [0, 1] \tag{15.64}$$

を考える．このとき古典統計力学系 (H, Γ^H) のエルゴード性 (定義 15.40 の (6)) より, Hamilton フロー $(\varphi_t^H)_{t \in \mathbb{R}}$ は確率空間 $(\Sigma_E^H, \mathcal{B}_{\Sigma_E^H}, P_E^H)$ 上の 1 径数保測変換群である．よって Birkoff のエルゴード定理 13.39 より等エネルギー面 Σ_E^H 上の任意の L^1 関数 $f \in L^1(P_E^H) = L^1(\mu_{\Sigma_E^H}) = L^1(\sigma_E^H)$ に対し,

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t^H(x_0)) dt = \int_{\Sigma_E^H} f(x) dP_E^H(x) \quad (\text{a.e. } x_0 \in \Sigma_E^H)$$

[*353]が成り立つ．特に等エネルギー面 Σ_E^H の任意の Borel 集合 $B \in \mathcal{B}_{\Sigma_E^H}$ に対し,

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_B(\varphi_t^H(x)) dt = P_E^H(B) \quad (\text{a.e. } x \in \Sigma_E^H) \tag{15.65}$$

が成り立つ．これより任意の $B \in \mathcal{B}_{\Sigma_E^H}$ に対し, 運動に伴い時間発展する等エネルギー面 Σ_E^H 上の点 (位置と運動量の組) が, B に属する期待値を時間平均によって求めたもの ((15.65) の左辺) は, $(P_E^H, \mu_{\Sigma_E^H}, \sigma_E^H$ に関して) ほとんど全ての初期値に対して $P_E^H(B)$ である．ゆえに確率 Borel 測度 (15.64) は, エネルギーが $E \in (\inf(H), \infty)$ に保存された古典統計力学系 (H, Γ^H) の位置と運動量の統計的分布を与えているものと考えられる．等エネルギー面 Σ_E^H 上の確率 Borel 測度 (15.64) を, エネルギーが $E \in (\inf(H), \infty)$ に保存された古典統計力学系 (H, Γ^H) のミクロカノニカル分布と言う．

15.7 エネルギーが保存された古典統計力学系の独立構成成分の位置と運動量の統計的分布

定義 15.48 (古典統計力学系の独立系, 独立結合系, 独立構成成分)**.** 古典統計力学系 (定義 15.40) の族 $((H_j, \Gamma^{H_j}))_{j \in J}$ が独立系であるとは, 任意の互いに異なる有限個の $j_1, \cdots, j_n \in J$ に対し,

$$\begin{aligned} &\Gamma^H := \Gamma^{H_{j_1}} \times \cdots \times \Gamma^{H_{j_n}}, \\ &H(x) : \Gamma^H \ni (x_1, \cdots, x_n) \mapsto H_{j_1}(x_1) + \cdots + H_{j_n}(x_n) \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{15.66}$$

とおいたとき, (H, Γ^H) が古典統計力学系である (つまり定義 15.40 の (1) ∼ (6) を満たす) ことを言う．そして (15.66) によって表される古典統計力学系 (H, Γ^H) を古典統計力学系 $(H_{j_1}, \Gamma^{H_{j_1}}), \cdots, (H_{j_n}, \Gamma^{H_{j_n}})$ の独立結合系と言い,

$$(H, \Gamma^H) = (H_{j_1}, \Gamma^{H_{j_1}}) \oplus \cdots \oplus (H_{j_n}, \Gamma^{H_{j_n}})$$

と表す．また $(H_{j_1}, \Gamma^{H_{j_1}}), \cdots, (H_{j_n}, \Gamma^{H_{j_n}})$ のそれぞれを (H, Γ^H) の独立構成成分と言う．

命題 15.49 (古典統計力学系の独立結合系の分配関数)**.** $(H_1, \Gamma^{H_1}), \cdots, (H_n, \Gamma^{H_n})$ を古典統計力学系の独立系であるとし, その独立結合系を (H, Γ^H) (定義 15.48) とおく．このとき分配関数 (定義 15.44) に関して,

$$Z^H(\beta) = Z^{H_1}(\beta) \cdots Z^{H_n}(\beta) \quad (\forall \beta \in (0, \infty))$$

が成り立つ．

[*353] a.e. は $P_E^H, \mu_{\Sigma_E^H}, \sigma_E^H$ のいずれで考えても同じであることに注意.

証明. 分配関数の定義 15.44 と古典統計力学系の独立結合系の定義 15.48, Fubini の定理 5.85 より, 任意の $\beta \in (0,\infty)$ に対し,

$$\begin{aligned} Z^H(\beta) &= \int_{\Gamma^H} e^{-\beta H(x)}dx = \int_{\Gamma^{H_1}\times\cdots\times\Gamma^{H_n}} e^{-\beta H_1(x_1)}\cdots e^{-\beta H_n(x_n)}dx_1\cdots dx_n \\ &= \int_{\Gamma^{H_1}} e^{-\beta H_1(x_1)}dx_1\cdots\int_{\Gamma^{H_n}} e^{-\beta H_n(x_n)}dx_n = Z^{H_1}(\beta)\cdots Z^{H_n}(\beta) \end{aligned}$$

である. □

注意 15.50 (エネルギーが保存された古典統計力学系の独立構成成分の位置と運動量の統計的分布). $(H_1,\Gamma^{H_1}),(H_2,\Gamma^{H_2})$ を古典統計力学系の独立系とし, その独立結合系 (H,Γ^H) のエネルギーが $E \in (\inf(H),\infty)$ に保存されているとする. そして (H,Γ^H) のエネルギー E の等エネルギー面 $\Sigma_E^H = H^{-1}(\{E\}) \subseteq \Gamma^H$ から (H,Γ^H) の独立構成成分 $(H_1,\Gamma^{H_1}),(H_2,\Gamma^{H_2})$ の相空間 $\Gamma^{H_1},\Gamma^{H_2}$ への自然な射影を,

$$\pi_j : \Sigma_E^H \ni (x_1,x_2) \mapsto x_j \in \Gamma^{H_j} \quad (j=1,2)$$

とおき, エネルギーが E に保存された (H,Γ^H) のミクロカノニカル分布 (定義 15.47) を $P_E^H : \mathcal{B}_{\Sigma_E^H} \to [0,1]$ とおく. ミクロカノニカル分布 P_E^H は定義 15.47 で述べたように, エネルギーが E に保存された (H,Γ^H) の位置と運動量の統計的分布を表す. 従って, (H,Γ^H) がエネルギー E に保存されているときの独立構成成分 $(H_1,\Gamma^{H_1}),(H_2,\Gamma^{H_2})$ の位置と運動量の統計的分布は,

$$P_j : \mathcal{B}_{\Gamma^{H_j}} \ni B \mapsto P_E^H(\pi_j^{-1}(B)) \in [0,1] \quad (j=1,2)$$

で与えられる.

命題 15.51 (エネルギーが保存された古典統計力学系の独立構成成分の位置と運動量の統計的分布の密度関数). $(H_1,\Gamma^{H_1}),(H_2,\Gamma^{H_2})$ を古典統計力学系の独立系とし, その独立結合系 (H,Γ^H) のエネルギーが $E \in (\inf(H),\infty)$ に保存されているとする. このとき (H,Γ^H) の独立構成成分 (H_1,Γ^{H_1}) の位置と運動量の統計的分布 (注意 15.50 を参照)

$$P_1 : \mathcal{B}_{\Gamma^{H_1}} \ni B \mapsto P_E^H(\pi_1^{-1}(B)) \in [0,1] \tag{15.67}$$

は Lebesgue 測度に関して絶対連続 (定義 5.100) であり, その Lebesgue 測度に関する密度関数は, $(H_1,\Gamma^{H_1}),(H_2,\Gamma^{H_2})$ の構造関数 (定義 15.42) $\rho^{H_1},\rho^{H_2} : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ に対し,

$$\Gamma^{H_1} \ni x \mapsto \frac{\rho^{H_2}(E-H_1(x))}{\rho^H(E)} \in [0,\infty)$$

によって与えられる. すなわち,

$$P_1(B) = P_E^H(\pi_1^{-1}(B)) = \int_B \frac{\rho^{H_2}(E-H_1(x))}{\rho^H(E)}dx \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\Gamma^{H_1}})$$

が成り立つ.

証明. 台がコンパクトな任意の連続関数 $f : \Gamma^{H_1} \to \mathbb{R}$ を取る. (15.67) とミクロカノニカル分布 P_E^H の定義 15.47 より,

$$\int_{\Gamma^{H_1}} f(x)dP_1(x) = \int_{\Sigma_E^H} f(x_1)dP_E^H(x) = \frac{1}{\rho^H(E)}\int_{\Sigma_E^H} f(x_1)d\sigma_E^H(x) \tag{15.68}$$

である. 古典統計力学系の定義 15.40 の (3), (4) より, 任意の有界閉区間 $[E_0,E_1] \subseteq (\inf(H),\infty)$ に対し, $H^{-1}([E_0,E_1]) \subseteq \Gamma^H$ はコンパクトであり, 任意の $x \in H^{-1}([E_0,E_1])$ に対し $\mathrm{grad}(H)(x) \neq 0$ であるから, 定理 6.36 より $H^{-1}([E_0,E_1])$ を被覆する有限個の Γ^H の局所座標で, そのそれぞれが 1 つの座標成分として H を持つようなものが取れる. よって 1 の分割 (定理 6.44) と定理 15.38 における $|\mathrm{grad}(H)(x)|$ の Γ^H と Σ_E^H の局所座標の計量の行列式による表示 (15.57), および面積測度 (Riemann-Lebesgue 測度) $\mu_{\Sigma_{E'}^H} : \mathcal{B}_{\Sigma_{E'}^H} \to [0,\infty)$ の定義 6.85 より,

$$\begin{aligned} \int_{H^{-1}([E_0,E_1])} f(x_1)dx &= \int_{[E_0,E_1]}\int_{\Sigma_{E'}^H} f(x_1)|\mathrm{grad}(H)(x)|^{-1}d\mu_{E'}^H(x)dE' \\ &= \int_{[E_0,E_1]}\int_{\Sigma_{E'}^H} f(x_1)d\sigma_{E'}^H(x)dE' \end{aligned}$$

と表せることが分かる. これより,

$$\int_{\Sigma_E^H} f(x_1)d\sigma_E^H(x) = \frac{d}{dE'}\int_{H(x)\leqslant E'} f(x_1)dx\Big|_{E'=E} \tag{15.69}$$

が成り立つ. また命題 15.43 より,

$$V^{H_2} : \mathbb{R} \ni E' \mapsto \int_{H_2^{-1}((-\infty,E'])} 1dx \in [0,\infty)$$

の導関数は構造関数 ρ^{H_2} であるから, Fubini の定理と Lebesgue 優収束定理より,

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_E^H} f(x_1)d\sigma_E^H(x) &= \frac{d}{dE'}\int_{H(x)\leqslant E'} f(x_1)dx\Big|_{E'=E}\\ &= \frac{d}{dE'}\int_{\Gamma^{H_1}} f(x_1)\int_{H_2(x_2)\leqslant E'-H_1(x_1)} 1dx_2dx_1\Big|_{E'=E}\\ &= \frac{d}{dE'}\int_{\Gamma^{H_1}} f(x)V^{H_2}(E'-H_1(x))dx\Big|_{E'=E}\\ &= \int_{\Gamma^{H_1}} f(x)\frac{d}{dE'}V^{H_2}(E'-H_1(x))\Big|_{E'=E}dx\\ &= \int_{\Gamma^{H_1}} f(x)\rho^{H_2}(E-H_1(x))dx \end{aligned} \tag{15.70}$$

となる. よって, (15.68), (15.69), (15.70) より, 台がコンパクトな任意の連続関数 $f : \Gamma^{H_1} \to \mathbb{R}$ に対し,

$$\int_{\Gamma^{H_1}} f(x)dP_1(x) = \int_{\Gamma^{H_1}} f(x)\frac{\rho^{H_2}(E-H_1(x))}{\rho^H(E)}dx$$

が成り立つ. Γ^{H_1} の任意の開集合 U は σ-コンパクトであるから, Urysohn の補題 5.165 と単調収束定理より,

$$P_1(U) = \int_U \frac{\rho^{H_2}(E-H_1(x))}{\rho^H(E)}dx$$

が成り立つ. ここで定理 5.177 より Γ^{H_1} の有限 Borel 測度は位相正則であるから, 外部正則性 (定義 5.168) より,

$$P_1(B) = \int_B \frac{\rho^{H_2}(E-H_1(x))}{\rho^H(E)}dx \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\Gamma^{H_1}})$$

が成り立つ. □

15.8 恒温槽における古典統計力学系のカノニカル分布の局所中心極限定理による導出

定理 15.52. $((h_n,\Gamma^{h_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ を高々有限種類からなる古典統計力学系の独立系とし, 独立結合系

$$\begin{aligned}(H_n,\Gamma^{H_n}) &= (h_1,\Gamma^{h_1})\oplus\cdots\oplus(h_n,\Gamma^{h_n}) \quad (\forall n\in\mathbb{N}),\\ (H_n',\Gamma_{H_n'}) &= (h_2,\Gamma^{h_2})\oplus\cdots\oplus(h_n,\Gamma^{h_n}) \quad (\forall n\in\mathbb{N} : n\geqslant 2)\end{aligned}$$

を定義する. そして逆温度 $\beta\in(0,\infty)$ に対応する $(h_1,\Gamma^{h_1}), (H_n,\Gamma^{H_n})$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ のエネルギー (定義 15.46) をそれぞれ $e_1\in(\inf(h_1),\infty)$, $E_n\in(\inf(H_n),\infty)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ とおく. また各 $n\in\mathbb{N} : n\geqslant 2$ に対し独立結合系 (H_n,Γ^{H_n}) がエネルギー E_n に保存されているときの独立構成成分 (h_1,Γ^{h_1}) の位置と運動量の統計的分布の密度関数 (注意 15.50, 命題 15.51 を参照) を,

$$f_n(x) : \Gamma^{h_1} \ni x \mapsto \frac{\rho^{H_n'}(E_n - h_1(x))}{\rho^{H_n}(E_n)} \in [0,\infty) \tag{15.71}$$

($\rho^{H_n}, \rho^{H_n'}$ は $(H_n,\Gamma^{H_n}), (H_n',\Gamma^{H_n'})$ の構造関数 (定義 15.42)) とおく. このとき,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|h_1(x)-e_1|\leqslant n^{\frac{1}{3}}}\left|f_n(x) - \frac{e^{-\beta h_1(x)}}{Z^{h_1}(\beta)}\right| = 0$$

(Z^{h_1} は (h_1,Γ^{h_1}) の分配関数 (定義 15.44)) が成り立つ.

証明. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し Γ^{h_n} 上の確率 Borel 測度

$$P_n : \mathcal{B}_{\Gamma^{h_n}} \ni B \mapsto \frac{1}{Z^{h_n}(\beta)} \int_B e^{-\beta h_n(x)} dx \in [0,1] \tag{15.72}$$

を定義し, 確率空間の列 $((\Gamma^{h_n}, P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ の直積確率空間 (定義 13.9)

$$(\Gamma, P) := \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} \Gamma^{h_n}, \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} P_n \right)$$

を定義する. そして,

$$\pi_n : \Gamma \to \Gamma^{h_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を自然な射影とし, 確率空間 (Γ, P) 上の独立な確率変数の列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を,

$$X_n := h_n \circ \pi_n : \Gamma \to \mathbb{R} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

として定義する. 4 つのステップに分けて証明する.

主張 1:　確率空間 (Γ, P) 上の独立な確率変数の列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は局所中心極限定理 13.32 の仮定を満たす. また各 $n \in \mathbb{N}$ に対し X_n の期待値は, 逆温度 β に対応する (h_n, Γ^{h_n}) のエネルギーである (特に X_1 の期待値は e_1 である).

主張 1 の証明.　各 $n \in \mathbb{N}$ に対し確率変数 X_n の確率分布は, 命題 15.43 より,

$$\begin{aligned} P_{X_n}(B) &= P(X_n^{-1}(B)) = P(\pi_n^{-1}(h_n^{-1}(B))) = P_n(h_n^{-1}(B)) \\ &= \frac{1}{Z^{h_n}(\beta)} \int_{\Gamma^{h_n}} \chi_B(h_n(x)) e^{-\beta h_n(x)} dx \\ &= \frac{1}{Z^{h_n}(\beta)} \int_B e^{-\beta E} \rho^{h_n}(E) dE \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \end{aligned}$$

(ρ^{h_n} は (h_n, Γ^{h_n}) の構造関数 (定義 15.42)) であるから確率変数 X_n は確率密度関数

$$u_n(E) : \mathbb{R} \ni E \mapsto \frac{1}{Z^{h_n}(\beta)} e^{-\beta E} \rho^{h_n}(E) \in [0,\infty)$$

を持つ. $\inf(h_n) > -\infty$ (定義 15.40 の (2)) であり, 命題 15.43 より ρ^{h_n} は緩増加関数 (定義 8.53) なので $X_n \in L^3(P)$ であり, X_n の確率密度関数 u_n の導関数は可積分である. また $((h_n, \Gamma^{h_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ は高々有限種類からなると言う仮定より, 確率分布の集合 $\{P_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は高々有限集合である. よって確率空間 (Γ, P) 上の確率変数の列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は局所中心極限定理 13.32 の仮定を満たす. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し確率変数 X_n の期待値は, 命題 15.45 より,

$$\mathrm{E}(X_n) = \frac{1}{Z^{h_n}(\beta)} \int_{\mathbb{R}} E e^{-\beta E} \rho^{h_n}(E) dE = -\frac{d}{d\theta} \log(Z^{h_n}(\theta)) \Big|_{\theta=\beta} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから, 逆温度の定義 15.46 より $\mathrm{E}(X_n)$ は逆温度 β に対応する (h_n, Γ^{h_n}) のエネルギーである.

主張 2:　各 $n \in \mathbb{N} : n \geqslant 2$ に対し, 確率空間 (Γ, P) 上の確率変数 $X_1 + \cdots + X_n$ の確率密度関数は,

$$U_n(E) : \mathbb{R} \ni E \mapsto \frac{1}{Z^{H_n}(\beta)} e^{-\beta E} \rho^{H_n}(E) \in [0,\infty)$$

であり, 確率変数 $X_2 + \cdots + X_n$ の確率密度関数は,

$$U_n'(E) : \mathbb{R} \ni E \mapsto \frac{1}{Z^{H_n'}(\beta)} e^{-\beta E} \rho^{H_n'}(E) \in [0,\infty)$$

である. またそれぞれの期待値は,

$$\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_n) = E_n, \quad \mathrm{E}(X_2 + \cdots + X_n) = E_n - e_1$$

である.

主張 2 の証明.　命題 15.49 より，

$$
\begin{aligned}
Z^{H_n}(\beta) &= Z^{h_1}(\beta)\cdots Z^{h_n}(\beta), \\
Z^{H'_n}(\beta) &= Z^{h_2}(\beta)\cdots Z^{h_n}(\beta)
\end{aligned}
\tag{15.73}
$$

であるから，(15.72) より，$P_1, \cdots, P_n$ の直積確率測度と $P_2, \cdots, P_n$ の直積確率測度は，

$$
\begin{aligned}
P_1 \otimes \cdots \otimes P_n(B) &= \frac{1}{Z^{H_n}(\beta)} \int_B e^{-\beta H_n(x)} dx \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\Gamma^{H_n}}), \\
P_2 \otimes \cdots \otimes P_n(B) &= \frac{1}{Z^{H'_n}(\beta)} \int_B e^{-\beta H'_n(x)} dx \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\Gamma^{H'_n}})
\end{aligned}
$$

である．よって $X_1 + \cdots + X_n$ の確率分布は命題 15.43 より，

$$
\begin{aligned}
P_{X_1+\cdots+X_n}(B) &= (P_1 \otimes \cdots \otimes P_n)(H_n^{-1}(B)) \\
&= \frac{1}{Z^{H_n}(\beta)} \int_{\Gamma^{H_n}} \chi_B(H_n(x)) e^{-\beta H_n(x)} dx \\
&= \frac{1}{Z^{H_n}(\beta)} \int_B e^{-\beta E} \rho^{H_n}(E) dE \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})
\end{aligned}
$$

であり，確率密度関数は，

$$
U_n(E) : \mathbb{R} \ni E \mapsto \frac{1}{Z^{H_n}(\beta)} e^{-\beta E} \rho^{H_n}(E) \in [0, \infty)
$$

である．同様に $X_2 + \cdots + X_n$ の確率分布は命題 15.43 より，

$$
\begin{aligned}
P_{X_2+\cdots+X_n}(B) &= (P_2 \otimes \cdots \otimes P_n)(H_n'^{-1}(B)) \\
&= \frac{1}{Z^{H'_n}(\beta)} \int_{\Gamma^{H'_n}} \chi_B(H'_n(x)) e^{-\beta H'_n(x)} dx \\
&= \frac{1}{Z^{H'_n}(\beta)} \int_B e^{-\beta E} \rho^{H'_n}(E) dE \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})
\end{aligned}
$$

であり，確率密度関数は，

$$
U'_n(E) : \mathbb{R} \ni E \mapsto \frac{1}{Z^{H'_n}(\beta)} e^{-\beta E} \rho^{H'_n}(E) \in [0, \infty)
$$

である．そして $X_1 + \cdots + X_n$ の期待値は，命題 15.45 と逆温度の定義 15.46 より，

$$
\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \int_{\mathbb{R}} E e^{-\beta E} \rho^{H_n}(E) dE = -\frac{d}{d\theta} \log(Z^{H_n}(\theta))\Big|_{\theta=\beta} = E_n
$$

であり，$X_2 + \cdots + X_n$ の期待値は，(15.73) より，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_2 + \cdots + X_n) &= \int_{\mathbb{R}} E e^{-\beta E} \rho^{H'_n}(E) dE = -\frac{d}{d\theta} \log(Z^{H'_n}(\theta))\Big|_{\theta=\beta} \\
&= -\left(\frac{d}{d\theta} \log(Z^{H_n}(\theta))\Big|_{\theta=\beta} - \frac{d}{d\theta} \log(Z^{h_1}(\theta))\Big|_{\theta=\beta} \right) \\
&= E_n - e_1
\end{aligned}
$$

である．

主張 3:　(15.71) における $f_n : \Gamma^{h_1} \to [0, \infty)$ は，

$$
f_n(x) = \frac{e^{-\beta h_1(x)}}{Z^{h_1}(\beta)} \frac{U'_n(E_n - h_1(x))}{U_n(E_n)} \quad (\forall x \in \Gamma^{h_1}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant 2)
$$

を満たす．

主張 3 の証明.　主張 2 より,

$$\rho^{H_n}(E) = Z^{H_n}(\beta)U_n(E)e^{\beta E},\quad \rho^{H'_n}(E) = Z^{H'_n}(\beta)U'_n(E)e^{\beta E}\quad (\forall E \in \mathbb{R})$$

であり, (15.73) より,

$$Z^{H'_n}(\beta) = \frac{Z^{H_n}(\beta)}{Z^{h_1}(\beta)}$$

であるから,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{\rho^{H'_n}(E_n - h_1(x))}{\rho^{H_n}(E_n)} = \frac{Z^{H'_n}(\beta)U'_n(E_n - h_1(x))e^{\beta(E_n - h_1(x))}}{Z^{H_n}(\beta)U_n(E_n)e^{\beta E_n}} \\ &= \frac{e^{-\beta h_1(x)}}{Z^{h_1}(\beta)} \frac{U'_n(E_n - h_1(x))}{U_n(E_n)}\quad (\forall x \in \Gamma^{h_1}) \end{aligned}$$

である.

主張 4:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|h_1(x)-e_1|\leqslant n^{\frac{1}{3}}} \left| f_n(x) - \frac{e^{-\beta h_1(x)}}{Z^{h_1}(\beta)} \right| = 0$$

が成り立つ.

主張 4 の証明.　主張 1 より確率空間 (Γ, P) 上の確率変数の列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は局所中心極限定理 13.32 の仮定を満たす. そして主張 2 より確率変数の和 $X_1 + \cdots + X_n$, $X_2 + \cdots + X_n$ の確率密度関数はそれぞれ U_n, U'_n であり, 期待値は,

$$E_n = \mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_n),\quad \mathrm{E}(X_2 + \cdots + X_n) = E_n - e_1\quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

である. よって分散を,

$$V_n := \mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_n),\quad V_n - v_1 := \mathrm{V}(X_2 + \cdots + X_n)\quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおくと, 局所中心極限定理 13.32 より,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{E\in\mathbb{R}} \left| (2\pi V_n)^{\frac{1}{2}} U_n(E) - \exp\left(-\frac{(E - E_n)^2}{2V_n} \right) \right| = 0, \tag{15.74}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{E\in\mathbb{R}} \left| (2\pi V'_n)^{\frac{1}{2}} U'_n(E) - \exp\left(-\frac{(E - E_n + e_1)^2}{2(V_n - v_1)} \right) \right| = 0 \tag{15.75}$$

が成り立つ (確率分布の集合 $\{P_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有限集合であるから V_n は n のオーダーであることに注意). そこで,

$$(2\pi V_n)^{\frac{1}{2}} U_n(E_n) := 1 + \delta_n\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{15.76}$$

とおくと, (15.74) より,

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0 \tag{15.77}$$

であり,

$$(2\pi(V_n - v_1))^{\frac{1}{2}} U'_n(E_n - h_1(x)) := (1 + \omega_n(x)) \exp\left(-\frac{(h_1(x) - e_1)^2}{2(V_n - v_1)} \right)\quad (\forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant 2, \forall x \in \Gamma^{h_1}) \tag{15.78}$$

とおくと, (15.75) より,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Gamma^{h_1}} |\omega_n(x)| \exp\left(-\frac{(h_1(x) - e_1)^2}{2(V_n - v_1)} \right) = 0 \tag{15.79}$$

である. そして V_n は n のオーダーなので,

$$0 \leqslant \sup_{|h_1(x)-e_1|\leqslant n^{\frac{1}{3}}} \left| \exp\left(-\frac{(h_1(x) - e_1)^2}{2(V_n - v_1)} \right) - 1 \right| \leqslant \exp\left(\frac{n^{\frac{2}{3}}}{2(V_n - v_1)} \right) - 1 \to 0\quad (n \to \infty) \tag{15.80}$$

である. 主張 3 と (15.76), (15.78) より,

$$\begin{aligned}\left|f_n(x)-\frac{e^{-\beta h_1(x)}}{Z^{h_1}(\beta)}\right| &= \frac{e^{-\beta h_1(x)}}{Z^{h_1}(\beta)}\left|\frac{U_n'(E_n-h_1(x))}{U_n(E_n)}-1\right| \\ &\leqslant \frac{e^{-\beta\inf(h_1)}}{Z^{h_1}(\beta)}\left|\frac{V_n^{\frac{1}{2}}}{(V_n-v_1)^{\frac{1}{2}}}\frac{1+\omega_n(x)}{1+\delta_n}\exp\left(-\frac{(h_1(x)-e_1)^2}{2(V_n-v_1)}\right)-1\right| \\ &(\forall n\in\mathbb{N}:n\geqslant 2,\forall x\in\Gamma^{h_1})\end{aligned}\tag{15.81}$$

であり, (15.77), (15.79), (15.80) より,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|h_1(x)-e_1|\leqslant n^{\frac{1}{3}}}\left|\frac{V_n^{\frac{1}{2}}}{(V_n-v_1)^{\frac{1}{2}}}\frac{1+\omega_n(x)}{1+\delta_n}\exp\left(-\frac{(h_1(x)-e_1)^2}{2(V_n-v_1)}\right)-1\right|=0,$$

であるから, (15.81) より,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|h_1(x)-e_1|\leqslant n^{\frac{1}{3}}}\left|f_n(x)-\frac{e^{-\beta h_1(x)}}{Z^{h_1}(\beta)}\right|=0$$

が成り立つ.

□

定義 15.53 (恒温槽における古典統計力学系のカノニカル分布). 古典統計力学系 (H,Γ^H) が $n\gg 1$ 個の古典統計力学系の独立結合系 (定義 15.48) であるとし, その独立構成成分の種類は n に比べて無視し得るくらいに小さいとする. そして (H,Γ^H) のエネルギーは $E\in(\inf(H),\infty)$ に保存されているとし, 対応する逆温度 (定義 15.46) を $\beta=\beta^H(E)$ とおく. このとき定理 15.52 より, (H,Γ^H) の独立構成成分 (h,Γ^h) の位置と運動量の統計的分布 $P_\beta^h:\mathcal{B}_{\Gamma^h}\to[0,1]$ は,

$$\mathcal{B}_{\Gamma^h}\ni B\mapsto\frac{1}{Z^h(\beta)}\int_B e^{-\beta h(x)}dx\in[0,1]$$

とみなせる. これを逆温度 β の恒温槽における (h,Γ^h) のカノニカル分布と言う.

注意 15.54 (カノニカル分布におけるエネルギーの期待値). 古典統計力学系 (H,Γ^H) が逆温度 β の恒温槽におけるカノニカル分布

$$P_\beta^H:\mathcal{B}_{\Gamma^H}\ni B\mapsto\frac{1}{Z^H(\beta)}\int_B e^{-\beta H(x)}dx\in[0,1]$$

にあるとする. このとき (H,Γ^H) のエネルギーの期待値は, 命題 15.45 より,

$$\frac{1}{Z^H(\beta)}\int_{\Gamma^H}H(x)e^{-\beta H(x)}dx=-\frac{d}{d\theta}\log(Z^H(\theta))\Big|_{\theta=\beta}$$

である.

命題 15.55 (古典統計力学系のカノニカル分布の安定性). (H,Γ^H) が古典統計力学系 $(H_1,\Gamma^{H_1}),\cdots,(H_n,\Gamma^{H_n})$ の独立結合系であるとする. もし (H,Γ^H) が逆温度 β の恒温槽におけるカノニカル分布にあるならば, 各独立構成成分 (H_j,Γ^{H_j}) も逆温度 β の恒温槽におけるカノニカル分布にある.

証明. 自然な射影を,

$$\pi_j:\Gamma^H=\Gamma^{H_1}\times\cdots\times\Gamma^{H_n}\ni x=(x_1,\cdots,x_n)\mapsto x_j\in\Gamma^{H_j}\quad(j=1,\cdots,n)$$

とおく. (H,Γ^H) が逆温度 β の恒温槽におけるカノニカル分布

$$P_\beta^H:\mathcal{B}_{\Gamma^H}\ni B\mapsto\frac{1}{Z^H(\beta)}\int_B e^{-\beta H(x)}dx\in[0,1]$$

にあるとき, 各独立構成成分 (H_j,Γ^{H_j}) の位置と運動量の統計的分布は,

$$P_j:\mathcal{B}_{\Gamma^{H_j}}\ni B\mapsto P_\beta^H(\pi_j^{-1}(B))=\frac{1}{Z^H(\beta)}\int_{\Gamma^H}\chi_B(x_j)e^{-\beta H(x)}dx\in[0,1]$$

である. ここで $H(x) = H_1(x_1) + \cdots + H_n(x_n)$ $(\forall x \in \Gamma^H)$ (定義 15.48) であり, 命題 15.49 より,

$$Z^H(\beta) = Z^{H_1}(\beta) \cdots Z^{H_n}(\beta)$$

であるから, 任意の $B \in \mathcal{B}_{\Gamma^{H_j}}$ に対し, Fubini の定理より,

$$\begin{aligned}
P_j(B) &= \frac{1}{Z^H(\beta)} \int_{\Gamma^H} \chi_B(x_j) e^{-\beta H(x)} dx \\
&= \frac{1}{Z^{H_1}(\beta) \cdots Z^{H_n}(\beta)} \int_{\Gamma^{H_1} \times \cdots \times \Gamma^{H_n}} \chi_B(x_j) e^{-\beta H_1(x_1)} \cdots e^{-\beta H_n(x_n)} dx \\
&= \left(\prod_{k \neq j} \frac{1}{Z^{H_k}(\beta)} \int_{\Gamma^{H_k}} e^{-\beta H_k(x_k)} dx_k \right) \frac{1}{Z^{H_j}(\beta)} \int_{\Gamma^{H_j}} \chi_B(x_j) e^{-\beta H_j(x_j)} dx_j \\
&= \frac{1}{Z^{H_j}(\beta)} \int_B e^{-\beta H_j(x)} dx
\end{aligned}$$

である. よって P_j は逆温度 β の恒温槽における (H_j, Γ^{H_j}) のカノニカル分布である. □

15.9 理想気体の Maxwell-Boltzman 分布と状態方程式

定義 15.56 (古典統計力学系としての理想気体の定義)**.** 古典統計力学系 (H, Γ^H) (定義 15.40) が次を満たすとき, (H, Γ^H) を 1 粒子質量 m, 粒子数 n, 逆温度 β, 体積 V の理想気体と呼ぶこととする.

(1) (H, Γ^H) は質量 m を持つ n 個の質点からなる質点系の運動である.

(2) (H, Γ^H) の位置と運動量の統計的分布は, 逆温度 β におけるカノニカル分布 (定義 15.53)

$$P_\beta^H : \mathcal{B}_{\Gamma^H} \ni B \mapsto \frac{1}{Z^H(\beta)} \int_B e^{-\beta H(x)} dx \in [0, 1]$$

である.

(3) (H, Γ^H) の配位空間 (定義 15.35 を参照) は, 体積 (Lebesgue 測度) が V のある有界連結開集合 $D \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し, $D^n \subseteq \mathbb{R}^{3n}$ と表される. そしてポテンシャル $U(r) : D^n \to \mathbb{R}$ は D^n の境界のごく付近以外では 0 で, D^n の境界のごく付近で急激に上昇して非常に大きな値を取り, β に近い任意の正数 θ に対し,

$$\int_{D^n} e^{-\theta U(r)} dr = V^n, \quad \int_{D^n} U(r) e^{-\theta U(r)} dr = 0$$

とみなせる.

命題 15.57 (古典統計力学系としての理想気体のエネルギーの期待値)**.** 古典統計力学系 (H, Γ^H) が 1 粒子質量 m, 粒子数 n, 逆温度 β の理想気体 (定義 15.56) であるとする. このとき (H, Γ^H) のエネルギーの期待値は,

$$E = \frac{3n}{2\beta}$$

と表せる. またこれは (H, Γ^H) の運動エネルギーの期待値でもある.

証明. 注意 15.54 より,

$$E = \int_{\Gamma^H} H(x) dP_\beta^H(x) = -\frac{d}{d\theta} \log(Z^H(\theta)) \Big|_{\theta=\beta} \tag{15.82}$$

である. 定義 15.56 の (3) と命題 8.59 より, β に近い正数 θ に対し, 分配関数の値は,

$$Z^H(\theta) = \int_{\Gamma^H} e^{-\theta H(x)} dx = \int_{D^n} e^{-\theta U(r)} dr \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{-\frac{\theta}{2m}|p|^2} dp = V^n \left(\frac{2\pi m}{\theta} \right)^{\frac{3n}{2}} \tag{15.83}$$

である. よって (15.82) と (15.83) より,

$$E = -\frac{d}{d\theta} \log(Z^H(\theta)) \Big|_{\theta=\beta} = -\frac{d}{d\theta} \left(n \log(V) + \frac{3n}{2} (\log(2\pi m) - \log(\theta)) \right) \Big|_{\theta=\beta} = \frac{3n}{2\beta}$$

である. 定義 15.56 の (3) よりポテンシャルエネルギーの期待値は,

$$\frac{1}{Z^H(\beta)}\int_{\Gamma^H} U(r)e^{-\beta H(x)}dx = \frac{1}{Z^H(\beta)}\int_{D^n} U(r)e^{-\beta U(r)}dr \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{-\frac{\beta}{2m}|p|^2}dp = 0$$

なので, エネルギーの期待値は運動エネルギーの期待値に等しい. □

命題 15.58 (古典統計力学系としての 1 粒子速度の統計的分布)**.** 古典統計力学系 (H,Γ^H) が 1 粒子質量 m, 粒子数 n, 逆温度 β の理想気体 (定義 15.56) であるとする. このとき 1 粒子の速度の統計的分布は,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} \ni B \mapsto \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_B e^{-\frac{\beta m}{2}|v|^2}dv \in [0,1]$$

である.

証明. 逆温度 β のカノニカル分布

$$P_\beta^H : \mathcal{B}_{\Gamma^H} \ni B \mapsto \frac{1}{Z^H(\beta)}\int_B e^{-\beta H(x)}dx = \left(\int_{\Gamma^H} e^{-\beta U(r)}e^{-\frac{\beta}{2m}|p|^2}drdp\right)^{-1}\int_B e^{-\beta U(r)}e^{-\frac{\beta}{2m}|p|^2}drdp \in [0,1]$$

と,

$$\pi_1 : \Gamma^H = D^n \times \mathbb{R}^{3n} \ni (r_1,\cdots,r_n,p_1,\cdots,p_n) \mapsto \frac{p_1}{m} \in \mathbb{R}^3$$

に対し, 求める 1 粒子速度の統計的分布は,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} \ni B \mapsto P_\beta^H(\pi_1^{-1}(B)) \in [0,1]$$

であるから,

$$\begin{aligned} P_\beta^H(\pi_1^{-1}(B)) &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{\beta}{2m}|p|^2}dp\right)^{-1}\int_{mB} e^{-\frac{\beta}{2m}|p|^2}dp = \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{-\frac{3}{2}} m^3 \int_B e^{-\frac{\beta}{2}m|v|^2}dv \\ &= \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int_B e^{-\frac{\beta}{2}m|v|^2}dv \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) \end{aligned}$$

である. □

定義 15.59 (Maxwell-Boltzman 分布)**.** 古典統計力学系としての理想気体の 1 粒子の速度の統計的分布は, 命題 15.58 より,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} \ni B \mapsto \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_B e^{-\frac{\beta}{2}m|v|^2}dv \in [0,1]$$

である. これを Maxwell-Boltzman 分布と言う.

命題 15.60 (古典統計力学系としての理想気体の状態方程式)**.** 古典統計力学系 (H,Γ^H) が 1 粒子質量 m, 粒子数 n, 逆温度 β の理想気体 (定義 15.56) であるとし, これは体積 V のある容器に閉じ込められた気体を表すものとする. そして (H,Γ^H) の粒子は容器内で均等に分布しているものとし, 粒子は容器の壁に弾性衝突 (衝突する直前と直後で速度の壁に垂直な成分の符号が逆向きになる) することで, 壁に圧力 P を与えているものと考える. このとき,

$$PV = \frac{n}{\beta}$$

が成り立つ.

証明. Maxwell-Boltzman 分布 (定義 15.59) の密度関数を,

$$f(v) : \mathbb{R}^3 \ni v \mapsto \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\beta m}{2}|v|^2} \in (0,\infty)$$

とおく. 速度が $v = (v_x, v_y, v_z), v_z > 0$ の粒子は xy 平面に平行な壁 A に弾性衝突した後, 速度が $(v_x, v_y, -v_z)$ となるので, この衝突で粒子は壁 A に運動量 $2mv_z$ を与える. 今, $\Delta v = (\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z) \in \mathbb{R}^3$ が十分微小であるとすると, 速度が $v \sim v + \Delta v$ にある粒子の数は,

$$nf(v)\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$$

であり, 粒子は容器内に均等に分布しているので, 単位時間, 単位面積当たりに壁 A に衝突する粒子で速度が $v \sim v+\Delta v$ にあるものの数は,

$$\frac{v_z}{V} nf(v)\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$$

である. よって速度が $v \sim v + \Delta v$ にある粒子は壁 A に単位時間, 単位面積当たり,

$$2mv_z \frac{v_z}{V} nf(v)\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$$

の運動量を与える. これが速度が $v \sim v + \Delta v$ にある粒子による圧力 P への寄与であるから,

$$P = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(0,\infty)} 2mv_z \frac{v_z}{V} nf(v)dv = \int_{\mathbb{R}^3} m|v_z|^2 \frac{1}{V} nf(v)dv = \frac{2n}{3V}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}m|v|^2 f(v)dv$$

を得る (最後の等号は $f(v)$ の等方性による).

$$n\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}m|v|^2 f(v)dv$$

は (H, Γ^H) の運動エネルギーの期待値なので, 命題 15.57 より,

$$n\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}m|v|^2 f(v)dv = E = \frac{3n}{2\beta}$$

である. よって,

$$P = \frac{2}{3V}\frac{3n}{2\beta} = \frac{n}{V\beta}$$

であるから,

$$PV = \frac{n}{\beta}$$

である. □

16 特殊相対論的時空と電磁気学の基本法則の考察

16.1 Minkowski 内積と Lorentz 変換, Lorentz 変換の構造

定義 16.1 (Minkowski 内積と Lorentz 変換)**.** $\mathbb{R}^4$ の任意の点 x の成分表示を, 通常の $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ではなく, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ とする. 双線型汎関数

$$g_M : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \ni (x, y) \mapsto -x_0 y_0 + \sum_{j=1}^{3} x_j y_j \in \mathbb{R}$$

を $\mathbb{R}^4$ の Minkowski 内積と言う. そして $L \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ で, $\mathbb{R}^4$ 上の線型変換として Minkowski 内積を保存するもの, すなわち,

$$g_M(Lx, Ly) = g_M(x, y) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^4)$$

を満たすものを, Lorentz 変換と言う. Euclid 空間 $\mathbb{R}^4$ の通常の内積

$$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \ni (x, y) \mapsto x \cdot y = \sum_{j=0}^{3} x_j y_j \in \mathbb{R}$$

と,

$$J := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$$

に対し,

$$g_M(x, y) = x \cdot Jy \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^4)$$

であるから, $L \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ が Lorentz 変換であるための必要十分条件は,

$$L^t J L = J$$

(L^t は L の転置行列) を満たすことであり, Lorentz 変換全体

$$\mathcal{L} = \{L \in M_{4\times4}(\mathbb{R}) : L^t J L = J\}$$

は線型 Lie 群 (定義 12.156) である. この線型 Lie 群 $\mathcal{L}$ を Lorentz 群と言う.

定義 16.2. 任意の $A \in O(3)$ と $v \in \mathbb{R}^3 : |v| < 1$ (v は縦ベクトル) に対し,

$$L(\pm, A, v) := \left((1 - |v|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm v^t \\ v & P_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - P_v \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

と定義する. ただし $P_v \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ は 1 次元部分空間 $\mathbb{R}v \subseteq \mathbb{R}^3$ の上への射影である. すなわち $v = 0$ の場合は $P_v = 0$ であり, $v \neq 0$ の場合は単位ベクトル $u := |v|^{-1} v$ と Schatten 形式 $\odot$ に対し,

$$P_v = u \odot u = (u_i u_j)_{i,j} = |v|^{-2} (v_i v_j)_{i,j} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$$

である (注意 15.24 を参照). 次の命題 16.3 と定理 16.4 で見るように,

$$\{+, -\} \times O(3) \times \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| < 1\} \ni (\bullet, A, v) \mapsto L(\bullet, A, v) \in \mathcal{L}$$

は全単射である.

命題 16.3. 任意の $A \in O(3)$ と $v \in \mathbb{R}^3 : |v| < 1$ (v は縦ベクトル) に対し, $L(\pm, A, v) \in \mathcal{L}$ である.

証明. 明らかに $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$ であるから,

$$L := L(\pm, A, v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} = (1 - |v|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm v^t \\ v & P_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - P_v \end{pmatrix}$$

とおき, $L \in \mathcal{L}$ であること (すなわち $L^t JL = J$ であること) を示せばよい. $P_v v = v$ より, $v^t P_v = v^t$ であるから,

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm v^t \\ v & P_v \end{pmatrix}^t J \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - P_v \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - P_v \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm v^t \\ v & P_v \end{pmatrix} = 0$$

である. よって,

$$L^t JL = (1 - |v|^2)^{-1} \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm v^t \\ v & P_v \end{pmatrix}^t J \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm v^t \\ v & P_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - P_v \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - P_v \end{pmatrix} \tag{16.1}$$

である. (16.1) の右辺の第二項は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - P_v \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - P_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - P_v \end{pmatrix}$$

であり, (16.1) の右辺の第一項に $(1 - |v|^2)$ を掛けたものは, $vv^t = \|v\|^2 P_v$ より,

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm v^t \\ v & P_v \end{pmatrix}^t J \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm v^t \\ v & P_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + v^t v & -v^t + v^t P_v \\ -v + P_v v & -vv^t + P_v \end{pmatrix} = (1 - |v|^2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & P_v \end{pmatrix}$$

であるから,

$$L^t JL = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & P_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - P_v \end{pmatrix} = J$$

である. □

定理 16.4 (Lorentz 変換の構造)**.** 任意の Lorentz 変換 $L \in \mathcal{L}$ に対し,

$$(\bullet, A, v) \in \{+, -\} \times O(3) \times \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| < 1\}$$

で, $L = L(\bullet, A, v)$ (定義 16.2) を満たすものが唯一つ存在する.

証明. $e_0, e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^4$ を標準基底とし,

$$f_j := Le_j = \sum_{i=0}^{3} L_{i,j} e_i \quad (j = 0, 1, 2, 3), \tag{16.2}$$

$$e_0 := \sum_{j=0}^{3} u_j f_j \tag{16.3}$$

とおくと, L の Minkowski 内積保存性より,

$$g_M(f_i, f_j) = g_M(Le_i, Le_j) = g_M(e_i, e_j) \quad (\forall i, j \in \{0, 1, 2, 3\}) \tag{16.4}$$

であるから,

$$-L_{0,j} = g_M(f_j, e_0) = u_j g_M(f_j, f_j) \quad (j = 0, 1, 2, 3), \tag{16.5}$$

$$-1 = g_M(e_0, e_0) = -u_0^2 + \sum_{j=1}^{3} u_j^2 \tag{16.6}$$

である. (16.6) より特に $u_0 \neq 0$ であり, (16.5) より,

$$L_{0,0} = u_0 \neq 0, \quad (L_{0,1}, L_{0,2}, L_{0,3}) = (-u_1, -u_2, -u_3) \tag{16.7}$$

である. そこで,

$$w := \frac{1}{u_0}\begin{pmatrix}-u_1\\-u_2\\-u_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{16.8}$$

とおくと, (16.6) より,

$$-1 = -u_0^2 + \sum_{j=1}^{3} u_j^2 = -u_0^2(1-|w|^2)$$

であるから, (16.7), (16.9) より,

$$|w| < 1, \quad L_{0,0} = \pm(1-|w|^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (L_{0,1}, L_{0,2}, L_{0,3}) = u_0 w^t = \pm(1-|w|^2)^{-\frac{1}{2}} w^t \tag{16.9}$$

である. 今, $b \in \mathbb{R}^3$ (縦ベクトル) と $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ を,

$$L = \begin{pmatrix} L_{0,0} & (L_{0,1}, L_{0,2}, L_{0,3}) \\ b & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm(1-|w|^2)^{-\frac{1}{2}} & \pm(1-|w|^2)^{-\frac{1}{2}} w^t \\ b & B \end{pmatrix} \tag{16.10}$$

なるものとする. 任意の $i, j \in \{1, 2, 3\}$ に対し, (16.4), (16.2), (16.10) より,

$$\delta_{i,j} = g_M(f_i, f_j) = -L_{0,i}L_{0,j} + \sum_{k=1}^{3} L_{k,i}L_{k,j} = -(1-|w|^2)^{-1} w_i w_j + \sum_{k=1}^{3} B_{k,i}B_{k,j} \tag{16.11}$$

であるから,

$$B^t B = 1 + (1-|w|^2)^{-1}|w|^2 P_w = (1-|w|^2)^{-1} P_w + (1 - P_w) \tag{16.12}$$

である. よって,

$$A := B\left((1-|w|^2)^{\frac{1}{2}} P_w + (1-P_w)\right) \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad v := Aw \in \mathbb{R}^3 \tag{16.13}$$

とおくと, (16.12) より $A^t A = 1$ であるから $A \in O(3)$ であり,

$$|v| = |w| < 1, \quad P_w = P_{A^t v} = A^t P_v A \tag{16.14}$$

である. (16.13) と (16.14) より,

$$B = A\left((1-|w|^2)^{-\frac{1}{2}} P_w + (1-P_w)\right) = \left((1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}} P_v + (1-P_v)\right) A \tag{16.15}$$

なので, (16.14), (16.15), (16.10) より,

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} \pm(1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}} & \pm(1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}} v^t A \\ b & \left((1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}} P_v + (1-P_v)\right) A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pm(1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}} & \pm(1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}} v^t \\ b & (1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}} P_v + (1-P_v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{16.16}$$

である. (16.16) と $L^t J L = J$ より,

$$-(1-|v|^2)^{-1} v + \left((1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}} P_v + (1-P_v)\right) b = 0 \tag{16.17}$$

である. (16.17) の両辺に $1 - P_v$ を作用させると,

$$(1-P_v)b = 0 \tag{16.18}$$

を得る. よって (16.17), (16.18) より,

$$-(1-|v|^2)^{-1} v + (1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}} P_v b = 0$$

であるから, (16.18) より,

$$b = P_v b = (1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}} v$$

である. ゆえに (16.16) より,

$$L = \begin{pmatrix} \pm(1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}} & \pm(1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}}v^t \\ (1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}}v & \left((1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}}P_v + (1-P_v)\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = L(\pm, A, v)$$

である. これで存在が示せた.

一意性を示す. ある $(\bullet, A, v), (\circ, B, u) \in \{+,-\} \times O(3) \times \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| < 1\}$ に対し,

$$L = L(\bullet, A, v) = L(\circ, B, u)$$

であるとすると,

$$L_{0,0} = \bullet(1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}} = \circ(1-|u|^2)^{-\frac{1}{2}}$$

より $\bullet = \circ$, $|v| = |u|$ である. また,

$$\begin{pmatrix} L_{1,0} \\ L_{2,0} \\ L_{3,0} \end{pmatrix} = (1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}}v = (1-|u|^2)^{-\frac{1}{2}}u$$

であるから $u = v$ である. そして,

$$(L_{i,j})_{i,j=1,2,3} = \left((1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}}P_v + (1-P_v)\right)A = \left((1-|u|^2)^{-\frac{1}{2}}P_u + (1-P_u)\right)B$$

であるから, 両辺に $(1-|v|^2)^{\frac{1}{2}}P_v + (1-P_v)$ を作用させると $A = B$ を得る. これで一意性が示せた. □

命題 16.5. 任意の Lorentz 変換 $L(\pm, A, v)$ (定義 16.2 を参照) に対し,

(1) $L(\pm, A, v)^{-1} = L(\pm, A^t, \mp A^t v)$ が成り立つ.

(2) $L(\pm, A, v)^t = L(\pm, A^t, \pm A^t v)$ が成り立つ. 特に Lorentz 変換の転置行列は Lorentz 変換である.

証明. (1)

$$L(\pm, A, v) = L(\pm, 1, v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \tag{16.19}$$

であるから,

$$L(\pm, A, v)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} L(\pm, 1, v)^{-1} \tag{16.20}$$

である.

$$L(\pm, 1, v)L(\pm, 1, \mp v) = (1-|v|^2)^{-1} \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm v^t \\ v & P_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & -v^t \\ \mp v & P_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-P_v \end{pmatrix} = 1$$

であるから, $L(\pm, 1, v)^{-1} = L(\pm, 1, \mp v)$ である. よって $A^t P_v A = P_{A^t v}$ であることに注意して, (16.20) より,

$$\begin{aligned} L(\pm, A, v)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} L(\pm, 1, \mp v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} L(\pm, 1, \mp v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} \\ &= L(\pm, 1, \mp A^t v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} = L(\pm, A^t, \mp A^t v) \end{aligned}$$

である.

(2) (16.19) より,

$$L(\pm, A, v)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} L(\pm, 1, v)^t \tag{16.21}$$

であり,

$$L(\pm, 1, v)^t = \begin{pmatrix} \pm 1 & v^t \\ \pm v & P_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-P_v \end{pmatrix} = L(\pm, 1, \pm v)$$

である. $A^t P_v A = P_{A^t v}$ であることに注意して, (16.21) より,

$$
\begin{aligned}
L(\pm, A, v)^t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} L(\pm, 1, \pm v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} L(\pm, 1, \pm v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} \\
&= L(\pm, 1, \pm A^t v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} = L(\pm, A^t, \pm A^t v)
\end{aligned}
$$

である.

□

定理 16.6 (Lorentz 群の連結成分)**.** Lorentz 群 $\mathcal{L}$ は 4 つの連結成分 (定義 11.44) からなり,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{+,+} &:= \{L(+, A, v) : A \in SO(3),\ v \in \mathbb{R}^3 : |v| < 1\}, \\
\mathcal{L}_{+,-} &:= \{L(+, A, v) : A \in -SO(3),\ v \in \mathbb{R}^3 : |v| < 1\}, \\
\mathcal{L}_{-,+} &:= \{L(-, A, v) : A \in SO(3),\ v \in \mathbb{R}^3 : |v| < 1\}, \\
\mathcal{L}_{-,-} &:= \{L(-, A, v) : A \in -SO(3),\ v \in \mathbb{R}^3 : |v| < 1\}
\end{aligned}
$$

(定義 16.2 を参照) とおけば, $\mathcal{L}_{+,+}, \mathcal{L}_{+,-}, \mathcal{L}_{-,+}, \mathcal{L}_{-,-}$ がその 4 つの連結成分である. そして,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{+,+} &= \{L \in \mathcal{L} : L_{0,0} \geqslant 1, \det(L) = 1\}, \\
\mathcal{L}_{+,-} &= \{L \in \mathcal{L} : L_{0,0} \geqslant 1, \det(L) = -1\}, \\
\mathcal{L}_{-,+} &= \{L \in \mathcal{L} : L_{0,0} \leqslant -1, \det(L) = -1\}, \\
\mathcal{L}_{-,-} &= \{L \in \mathcal{L} : L_{0,0} \leqslant -1, \det(L) = 1\}
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

証明. 定理 16.4 より,

$$
\mathcal{L} = \mathcal{L}_{+,+} \cup \mathcal{L}_{+,-} \cup \mathcal{L}_{-,+} \cup \mathcal{L}_{-,-} \quad (\text{互いに素}) \tag{16.22}
$$

である.

$$
1_{\pm} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \pm SO(3)
$$

とおけば, 命題 12.167 より任意の $A_{\pm} \in \pm SO(3)$ に対し, ある $V_{\pm} \in O(3)$ と $\theta_{\pm} \in \mathbb{R}$ が存在し,

$$
V_{\pm} A_{\pm} V_{\pm}^t = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\pm}) & -\sin(\theta_{\pm}) & 0 \\ \sin(\theta_{\pm}) & \cos(\theta_{\pm}) & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}
$$

と表せるので, $A_{\pm}$ と $1_{\pm}$ は $\pm SO(3)$ 内で連続曲線で結ぶことができる. このことと,

$$
O(3) \times \mathbb{R}^3 \ni (A, v) \mapsto L(\pm, A, v) = \begin{pmatrix} \pm(1 - |v|^2)^{-\frac{1}{2}} & \pm(1 - |v|^2)^{-\frac{1}{2}} v^t \\ (1 - |v|^2)^{-\frac{1}{2}} v & (1 - |v|^2)^{-\frac{1}{2}} P_v + (1 - P_v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{L}
$$

が連続である*354ことから, 任意の $A_{\pm} \in \pm SO(3)$ と $v \in \mathbb{R}^3$ に対し,

$$
L(+, A_{\pm}, v) \in \mathcal{L}_{+,\pm}, \quad L(-, A_{\pm}, v) \in \mathcal{L}_{-,\pm}
$$

はそれぞれ $\mathcal{L}_{+,\pm}, \mathcal{L}_{-,\pm}$ 内で,

$$
L(+, 1_{\pm}, 0) \in \mathcal{L}_{+,\pm}, \quad L(-, 1_{\pm}, 0) \in \mathcal{L}_{-,\pm}
$$

と連続曲線で結ぶことができる. よって $\mathcal{L}_{+,+}, \mathcal{L}_{+,-}, \mathcal{L}_{-,+}, \mathcal{L}_{-,-}$ はそれぞれ弧状連結である. このことと行列式の連続性と連続写像による連結集合の像は連結である (命題 1.54) ことから,

$$
\begin{aligned}
\{\det(L) : L \in \mathcal{L}_{+,\pm}\} &= \{\det(L(+, \pm, 0))\} = \{\pm 1\}, \\
\{\det(L) : L \in \mathcal{L}_{-,\pm}\} &= \{\det(L(-, \pm, 0))\} = \{\mp 1\}
\end{aligned}
$$

*354 $(1 - |v|^2)^{-\frac{1}{2}} P_v + (1 - P_v) = \left((1 - |v|^2)^{-\frac{1}{2}} - 1\right) P_v + 1 \to 1 \ (v \to 0)$ であることに注意.

である. よって,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{+,+} &= \{L \in \mathcal{L} : L_{0,0} \geqslant 1, \det(L) = 1\} = \{L \in \mathcal{L} : L_{0,0} > 0, \det(L) > 0\},\\
\mathcal{L}_{+,-} &= \{L \in \mathcal{L} : L_{0,0} \geqslant 1, \det(L) = -1\} = \{L \in \mathcal{L} : L_{0,0} > 0, \det(L) < 0\},\\
\mathcal{L}_{-,+} &= \{L \in \mathcal{L} : L_{0,0} \leqslant -1, \det(L) = -1\} = \{L \in \mathcal{L} : L_{0,0} < 0, \det(L) < 0\},\\
\mathcal{L}_{-,-} &= \{L \in \mathcal{L} : L_{0,0} \geqslant 1, \det(L) = 1\} = \{L \in \mathcal{L} : L_{0,0} < 0, \det(L) > 0\}
\end{aligned}$$

が成り立つ. これより $\mathcal{L}_{+,+}, \mathcal{L}_{+,-}, \mathcal{L}_{-,+}, \mathcal{L}_{-,-}$ はそれぞれ $\mathcal{L}$ の開かつ閉の連結集合であるから, (16.22) より, これらはそれぞれ $L(+, 1_+, 0), L(+, 1_-, 0), L(-, 1_+, 0), L(-, 1_-, 0)$ を含む $\mathcal{L}$ の連結成分である. □

定義 16.7 (固有 Lorentz 群, 固有 Lorentz 変換)**.** Lorentz 群 $\mathcal{L}$ の単位元を含む連結成分は, 定理 16.6 より,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{p}} := \{L(+, A, v) : A \in SO(3),\ v \in \mathbb{R}^3, |v| < 1\} = \{L \in \mathcal{L} : L_{0,0} \geqslant 1, \det(L) = 1\}$$

である. そして定理 12.165 より $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ は線型 Lie 群である. この線型 Lie 群 $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ を固有 Lorentz 群と言い, 固有 Lorentz 群の元を固有 Lorentz 変換と言う.

命題 16.8 (固有 Lorentz 変換の転置は固有 Lorentz 変換)**.** 任意の $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ に対し $L^t \in \mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ が成り立つ.

証明. 命題 16.5 より任意の $L = L(+, A, v) \in \mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ ($A \in SO(3), v \in \mathbb{R}^3 : |v| < 1$) に対し $L^t = L(+, A^t, v)$ であり, $A^t = A^{-1} \in SO(3)$ であるから, $L^t \in \mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ である. □

16.2 特殊相対論的慣性時空座標の変換, 時間の遅れと Lorentz 収縮

定義 16.9 (固有 Poincaré 変換)**.** $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ を固有 Lorentz 群 (定義 16.7) とする. 任意の $(L, a) \in \mathcal{L}_{\mathrm{p}} \times \mathbb{R}^4$ に対し, $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^4$ への全単射

$$\Lambda : \mathbb{R}^4 \ni x \mapsto Lx + a \in \mathbb{R}^4$$

を Lorentz 変換部分が L で並進部分が a の固有 Poincaré 変換と言う. c を光速を表す正の物理定数とする. 固有 Poincaré 変換 Λ の Lorentz 変換部分 L が, $A \in SO(3)$ と $v \in \mathbb{R}^3 : |v| < c$ (縦ベクトル) に対し,

$$L = L(+, A, c^{-1}v) = \left((1 - c^{-2}|v|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & c^{-1}v^t \\ c^{-1}v & P_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - P_v \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

であるとき, A を Λ の回転部分, v を Λ の速度部分と言う.

定義 16.10 (時空座標系と時空座標, 慣性時空座標系と慣性時空座標)**.** c を光速を表す正の物理定数とする. 直交座標系 (原点と右手系の直交座標軸) と原点に固定された時計の組 Σ を時空座標系と呼ぶこととする. Σ の原点において流れる時間を $t \in \mathbb{R}$, Σ の空間座標を $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ と表す. このとき $(ct, x) = (ct, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ を Σ における時空座標と呼ぶ. もし, 他から何の影響も受けていない孤立した質点の運動を Σ から観測したもの $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ が等速直線運動である, すなわち,

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} ct \\ x(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

の導関数が定ベクトル関数であるならば, Σ を慣性時空座標系と言う (これは古典力学における慣性座標系の定義 15.2 と矛盾しない). そして慣性時空座標系における時空座標 (ct, x) を慣性時空座標と呼ぶ. 古典力学においては, 任意の 2 つの慣性時空座標 $(ct, x), (cs, y)$ の間には, ある定まった $A \in SO(3)$ と $v \in \mathbb{R}^3$ (縦ベクトル), $(cs_0, y_0) \in \mathbb{R}^4$ が存在し,

$$\begin{pmatrix} cs \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c^{-1}v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cs_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{16.23}$$

(つまり $s = t + s_0, y = Ax + vt + y_0$) と表せるのであった. しかし定義 16.12 で述べるように, 特殊相対論においてはこの慣性時空座標の間の関係は修正される.

命題 16.11. Σ_1, Σ_2 をそれぞれ時空座標系 (原点と右手系の直交座標軸と原点に固定された時計) とし, それぞれにおける時空座標を $(ct, x), (cs, y) \in \mathbb{R}^4$ とおく. そしてこれらがある固有 Poincaré 変換 Λ (回転部分が $A \in SO(3)$, 速度部分が $v \in \mathbb{R}^3 : |v| < c$, 並進部分が $(cs_0, y_0) \in \mathbb{R}^4$ (定義 16.9) であるとする) に対し,

$$\begin{pmatrix} cs \\ y \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

なる関係を満たすとする. 今, 1 つの質点の運動を Σ_1, Σ_2 から観測したものをそれぞれ $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $y(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, 速度を $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\dot{y}(s) : \frac{d}{ds}y(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ とし, Σ_1 から観測される質点の速さ $|\dot{x}(t)|$ は常に光速 c より小さいと仮定する. このとき Σ_2 から観測される質点の速さ $|\dot{y}(s)|$ も常に光速 c より小さい. そして,

$$\frac{ds}{dt} = (1 - c^{-2}|v|^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + c^{-2} v \cdot A\dot{x}(t)\right) > 0, \tag{16.24}$$

$$\dot{y}(s) = (1 + c^{-2} v \cdot A\dot{x}(t))^{-1} \left(v + P_v A\dot{x}(t) + (1 - c^{-2}|v|^2)^{\frac{1}{2}} (1 - P_v) A\dot{x}(t)\right) \tag{16.25}$$

が成り立つ. 特に, Σ_1 から観測される質点の運動が光速 c より小さい速さの等速直線運動であるならば, Σ_2 から観測される質点の運動も光速 c より小さい速さの等速直線運動である.

証明.

$$\begin{pmatrix} cs \\ y(s) \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix} = L(+, A, c^{-1}v) \begin{pmatrix} ct \\ x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cs_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

より,

$$s - s_0 = (1 - c^{-2}|v|^2)^{-\frac{1}{2}} (t + c^{-2} v \cdot Ax(t)), \tag{16.26}$$

$$y(s) - y_0 = (1 - c^{-2}|v|^2)^{-\frac{1}{2}} (vt + P_v Ax(t)) + (1 - P_v) Ax(t) \tag{16.27}$$

であり, $|\dot{x}(t)| < c$ より,

$$1 + c^{-2} v \cdot A\dot{x}(t) \geqslant 1 - c^{-2} c|\dot{x}(t)| > 0 \tag{16.28}$$

である. よって (16.26), (16.28) より (16.24) が成り立つ. 逆関数定理 4.17 と (16.24) より,

$$\frac{dt}{ds} = (1 - c^{-2}|v|^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + c^{-2} v \cdot A\dot{x}(t)\right)^{-1} \tag{16.29}$$

であり, (16.27), (16.29) より,

$$\begin{aligned} \dot{y}(s) &= \frac{d}{ds} y(s) = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt} \left((1 - c^{-2}|v|^2)^{-\frac{1}{2}} (vt + P_v Ax(t)) + (1 - P_v) Ax(t)\right) \\ &= \frac{dt}{ds} \left((1 - c^{-2}|v|^2)^{-\frac{1}{2}} (v + P_v A\dot{x}(t)) + (1 - P_v) A\dot{x}(t)\right) \\ &= (1 + c^{-2} v \cdot A\dot{x}(t))^{-1} \left(v + P_v A\dot{x}(t) + (1 - c^{-2}|v|^2)^{\frac{1}{2}} (1 - P_v) A\dot{x}(t)\right) \end{aligned}$$

であるから (16.25) が成り立つ. また (16.29) より,

$$\begin{pmatrix} c \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix} = \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} cs \\ y(s) \end{pmatrix} = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt} L(+, A, c^{-1}v) \begin{pmatrix} ct \\ x(t) \end{pmatrix} = \frac{dt}{ds} L(+, A, c^{-1}v) \begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \tag{16.30}$$

であり, Lorentz 変換は Minkowski 内積を保存する (定義 16.1) ので, (16.30) より,

$$\begin{aligned} -c^2 + |\dot{y}(s)|^2 &= g_M \left(\begin{pmatrix} c \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix} \right) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 g_M \left(\begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \left(-c^2 + |\dot{x}(t)|^2\right) < 0 \end{aligned}$$

である. よって $|\dot{y}(s)| < c$ である. □

定義 16.12 (特殊相対論の公理)**.** c を光速を表す正の物理定数とする. 特殊相対論においては次が仮定される.

(1) 任意の 2 つの慣性時空座標系の慣性時空座標 $(ct, x), (cs, y)$ (定義 16.10) に対し, ある固有 Poincaré 変換 Λ が存在し,

$$\begin{pmatrix} cs \\ y \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

が成り立つ. 特に Λ の回転部分を $A \in SO(3)$, 速度部分を $v \in \mathbb{R}^3 : |v| < c$, 並進部分を $(cs_0, y_0) \in \mathbb{R}^4$ とすると,

$$\begin{pmatrix} cs \\ y \end{pmatrix} = \left((1 - c^{-2}|v|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & c^{-1}v^t \\ c^{-1}v & P_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - P_v \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cs_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

すなわち,

$$s - s_0 = (1 - c^{-2}|v|^2)^{-\frac{1}{2}}(t + c^{-2}v \cdot Ax),$$

$$y - y_0 = (1 - c^{-2}|v|^2)^{-\frac{1}{2}}(vt + P_v Ax) + (1 - P_v)Ax$$

である (定義 16.10 における古典力学における慣性時空座標の変換 (16.23) との違いに注意).

(2) 任意の慣性時空座標系において観測される任意の質点の運動の速さは光速 c より小さい.

命題 16.11 よりこれらの仮定は, “慣性時空座標系においては他から何の影響も受けていない質点の運動は等速直線運動である” と言うことと矛盾しない.

定理 16.13 (特殊相対論的慣性時空座標の変換に伴う時間の遅れと Lorentz 収縮の導出)**.** Σ_1, Σ_2 を慣性時空座標系とし, それぞれにおける時空座標を $(ct, x), (cs, y)$ (定義 16.10) とする. そして,

$$\begin{pmatrix} cs \\ y \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

を満たす固有 Poincaré 変換 Λ の回転部分を $A \in SO(3)$, 速度部分を $v \in \mathbb{R}^3 : |v| < c$, 並進部分を $(cs_0, y_0) \in \mathbb{R}^4$ (定義 16.9) とおく. このとき Σ_1 において静止した点は Σ_2 から見ると等速度 v で等速直線運動をしている. そして Σ_1 の原点において流れる時間 t は Σ_2 の原点において流れる時間 s に対し $(1 - c^{-2}|v|^2)^{\frac{1}{2}}$ 倍に遅れていて,

$$t = (1 - c^{-2}|v|^2)^{\frac{1}{2}}(s - s_0) \tag{16.31}$$

が成り立つ. また, Σ_1 の直交座標軸を Σ_2 から見たものは, 直交座標軸 $(e_1, e_2, e_3) := A \in SO(3)$ を v の方向に $(1 - c^{-2}|v|^2)^{\frac{1}{2}}$ 倍に縮めたもの

$$(f_1, f_2, f_3) = \left((1 - c^{-2}|v|^2)^{\frac{1}{2}} P_v + (1 - P_v) \right) (e_1, e_2, e_3)$$

に見える ($P_v \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}v \subseteq \mathbb{R}^3$ の上への射影 (定義 16.2 を参照) であることに注意).

証明. 命題 16.11 の (16.25) において $\dot{x}(t) = 0$ とすれば $\dot{y}(s) = v$ となるから, Σ_1 において静止した点は Σ_2 から見ると等速度 v で運動している. Σ_1 の原点を Σ_2 から見た運動を $o(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} c(s - s_0) \\ o(s) - y_0 \end{pmatrix} = L(+, A, c^{-1}v) \begin{pmatrix} ct \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$s - s_0 = (1 - c^{-2}|v|^2)^{-\frac{1}{2}} t$$

である. よって (16.31) が成り立つ. Σ_1 において $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$ に静止した点を Σ_2 から見た運動をそれぞれ $y_1(s), y_2(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} c(s - s_0) \\ y_k(s) - y_0 \end{pmatrix} = L(+, A, c^{-1}v) \begin{pmatrix} ct_k \\ x_k \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2)$$

と表せる. よって,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_1(s) - y_2(s) \end{pmatrix} = L(+, A, c^{-1}v) \begin{pmatrix} c(t_1 - t_2) \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

であり, 命題 16.5 より,

$$L(+, A, c^{-1}v)^{-1} = L(+, A^t, -c^{-1}A^t v)$$

であるから,

$$\begin{pmatrix} c(t_1 - t_2) \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = L(+, A^t, -c^{-1}A^t v) \begin{pmatrix} 0 \\ y_1(s) - y_2(s) \end{pmatrix}$$

である. これより,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \left((1 - c^{-2}|v|^2)^{-\frac{1}{2}} P_{A^t v} + (1 - P_{A_t v})\right) A^t(y_1(s) - y_2(s)) \\ &= A^t \left((1 - c^{-2}|v|^2)^{-\frac{1}{2}} P_v + (1 - P_v)\right) (y_1(s) - y_2(s)) \end{aligned}$$

*355 であるから,

$$y_1(s) - y_2(s) = \left((1 - c^{-2}|v|^2)^{\frac{1}{2}} P_v + (1 - P_v)\right) A(x_1 - x_2) \tag{16.32}$$

である. ゆえに (16.32) において $x_2 \in \mathbb{R}^3$ を $(0, 0, 0)$ とし, $x_1 \in \mathbb{R}^3$ を $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ とすれば, Σ_1 の直交座標軸を Σ_2 から見たものは, $(e_1, e_2, e_3) = A \in SO(3)$ に対し,

$$(f_1, f_2, f_3) = \left((1 - c^{-2}|v|^2)^{\frac{1}{2}} P_v + (1 - P_v)\right) (e_1, e_2, e_3)$$

として見えることが分かる. □

注意 16.14 (特殊相対論的慣性時空座標の変換の直観的意味, 時間の遅れと Lorentz 収縮)**.** Σ_1, Σ_2 を慣性時空座標系とし, それぞれにおける時空座標を $(ct, x), (cs, y)$ (定義 16.10) とおく. そして,

$$\begin{pmatrix} cs \\ y \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{16.33}$$

を満たす固有 Poincaré 変換 Λ の回転部分を $A \in SO(3)$, 速度部分を $v \in \mathbb{R}^3 : |v| < c$ (定義 16.9) とおく. このとき定理 16.13 より Σ_1 において流れる時間 t は Σ_2 おいて流れる時間 s に対し $(1 - c^{-2}|v|^2)^{\frac{1}{2}}$ 倍に遅れている. そして Σ_1 において静止した点は Σ_2 から見ると等速度 v で運動しているように見え, Σ_1 の直交座標軸を Σ_2 から見たものは, $(e_1, e_2, e_3) = A \in SO(3)$ を v の方向に $(1 - c^{-2}|v|^2)^{\frac{1}{2}}$ 倍に縮めたもの

$$(f_1, f_2, f_3) = \left((1 - c^{-2}|v|^2)^{\frac{1}{2}} P_v + (1 - P_v)\right) (e_1, e_2, e_3)$$

に見える. これを Lorentz 収縮と呼ぶ. そこで以後, 回転部分 $A \in SO(3)$, 速度部分 $v \in \mathbb{R}^3 : |v| < c$ の Poincaré 変換 Λ (定義 16.9) に対し (16.33) なる座標変換の関係にある慣性時空座標系 Σ_1, Σ_2 について次のように表現することとする. "慣性時空座標系 Σ_1 は慣性時空座標系 Σ_2 から見て等速度 v で動き, $A \in SO(3)$ によって傾いている."

16.3 固有時, 相対論的運動量, 相対論的運動エネルギー, 4 元運動量

定義 16.15 (質点の運動に伴う固有時)**.** Σ を慣性時空座標系とし, (ct, x) をその時空座標 (定義 16.10) とする. 任意の $v \in \mathbb{R}^3 : |v| < c$ に対し, Σ から見て等速度 v で動く慣性時空座標系において流れる時間は, $(1 - c^{-2}|v|^2)^{\frac{1}{2}}$ 倍に遅れている (定理 16.13 と注意 16.14 を参照). このことの類推で, ある質点の運動を Σ から観測したものを $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ とおき, 速度を $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ とおくと, この質点が感じる時間 τ は,

$$\frac{d\tau}{dt} = (1 - c^{-2}|\dot{x}(t)|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{16.34}$$

を満たすと考えられる (質点の速さ $|\dot{x}(t)|$ は光速 c より小さい (定義 16.12) ので右辺は正であることに注意). そこで (16.34) を満たす τ をこの質点の運動に伴う固有時と呼ぶ. 次の定理 16.16 で見るように, 質点の運動に伴う固有時は, その質点の運動を観測する慣性時空座標系の取り方に依存しない.

*355 $P_{A^t v} = A^t P_v A$ であることに注意 (定義 16.2 を参照).

定理 16.16 (固有時の普遍性)**.** Σ_1, Σ_2 を慣性時空座標系とし, それぞれにおける時空座標を $(ct, x), (cs, y)$ とおく. そしてある 1 つの質点の運動を Σ_1, Σ_2 から観測したものをそれぞれ $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $y(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (速度は $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\dot{y}(s) = \frac{d}{ds}y(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$) とおき, それぞれにおいて定義される運動に伴う固有時 (定義 16.15) を $\tau_1(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tau_2(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とおく. すなわち,

$$\frac{d\tau_1}{dt} = (1 - c^{-2}|\dot{x}(t)|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{d\tau_2}{ds} = (1 - c^{-2}|\dot{y}(s)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

である. このとき,

$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1} = 1$$

が成り立つ. 従って質点の運動に伴う固有時は, その運動を観測する慣性時空座標系の取り方に依存しない.

証明. 慣性時空座標系 Σ_1 は慣性時空座標系 Σ_2 から見て等速度 v で動き, $A \in SO(3)$ によって傾いている (注意 16.14 を参照) とする. 命題 16.11 より,

$$\frac{dt}{ds} = (1 - c^{-2}|v|^2)^{\frac{1}{2}}(1 + c^{-2}v \cdot A\dot{x}(t))^{-1} > 0 \tag{16.35}$$

であり,

$$\begin{pmatrix} c \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix} = \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} cs \\ y(s) \end{pmatrix} = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}L(+, A, c^{-1}v)\begin{pmatrix} ct \\ x(t) \end{pmatrix} = \frac{dt}{ds}L(+, A, c^{-1}v)\begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \tag{16.36}$$

である. Lorentz 変換は Minkowski 内積を保存する (定義 16.1) ので, (16.36) より,

$$\begin{aligned} -c^2 + |\dot{y}(s)|^2 &= g_M\left(\begin{pmatrix} c \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 g_M\left(\begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\frac{dt}{ds}\right)^2(-c^2 + |\dot{x}(t)|^2) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tau_2}{ds}\right)^2 &= 1 - c^{-2}|\dot{y}(s)|^2 = -c^{-2}(-c^2 + |\dot{y}(s)|^2) = -c^{-2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2(-c^2 + |\dot{x}(t)|^2) \\ &= \left(\frac{dt}{ds}\right)^2(1 - c^{-2}|\dot{x}(t)|^2) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\left(\frac{d\tau_1}{dt}\right)^2 \end{aligned} \tag{16.37}$$

である. ここで (16.35) より $\frac{dt}{ds} > 0$ であり, $\frac{d\tau_1}{dt} > 0$, $\frac{d\tau_2}{ds} > 0$ であるので, (16.37) より,

$$\frac{d\tau_2}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d\tau_1}{dt} = \frac{d\tau_1}{ds}$$

である. よって逆関数定理 4.17 より,

$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \frac{d\tau_2}{ds}\frac{ds}{d\tau_1} = \frac{d\tau_2}{ds}\left(\frac{d\tau_1}{ds}\right)^{-1} = 1$$

である. □

定義 16.17 (相対論的運動量, 相対論的質量, 相対論的運動エネルギー)**.** Σ を慣性時空座標系とし, (ct, x) をその時空座標 (定義 16.10) とする. 質点 m の運動を Σ から観測したものを $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, 速度を $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ とおき, この質点の運動に伴う固有時を τ とおく. このとき $mx(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ の固有時 τ に対する変化率

$$p_{\mathrm{re}}(t) := \frac{d}{d\tau}mx(t) = m\frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}x(t) = m(1 - c^{-2}|\dot{x}(t)|^2)^{-\frac{1}{2}}\dot{x}(t) \tag{16.38}$$

を, この質点の Σ における相対論的運動量と言い,

$$m_{\mathrm{re}}(t) := m\frac{dt}{d\tau} = m(1 - c^{-2}|\dot{x}(t)|^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{16.39}$$

をこの質点の Σ における相対論的質量と言う. (16.38), (16.39) より,

$$p_{\mathrm{re}}(t) = m_{\mathrm{re}}(t)\dot{x}(t)$$

である. また,

$$T_{\mathrm{re}}(t) := m_{\mathrm{re}}(t)c^2 = (1 - c^{-2}|\dot{x}(t)|^2)^{-\frac{1}{2}}mc^2$$

をこの質点の Σ における相対論的運動エネルギーと言う. Σ における相対論的運動量 $p_{\mathrm{re}}(t)$ と相対論的運動エネルギー $T_{\mathrm{re}}(t)$ に対し,

$$P(t) := \begin{pmatrix} c^{-1}T_{\mathrm{re}}(t) \\ p_{\mathrm{re}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{\mathrm{re}}(t)c \\ m_{\mathrm{re}}(t)\dot{x}(t) \end{pmatrix} = m\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} ct \\ x(t) \end{pmatrix}$$

をこの質点の Σ における 4 元運動量と言う.

注意 16.18. もし, 質点の速さ $|\dot{x}(t)|$ が光速 c に比べて無視し得るくらい小さい, すなわち,

$$c^{-2}|\dot{x}(t)|^2 \simeq 0$$

ならば,

$$m_{\mathrm{re}}(t) = m(1 - c^{-2}|\dot{x}(t)|^2)^{-\frac{1}{2}} \simeq m,$$

$$p_{\mathrm{re}}(t) = m_{\mathrm{re}}(t)\dot{x}(t) \simeq m\dot{x}(t),$$

$$T_{\mathrm{re}}(t) = (1 - c^{-2}|\dot{x}(t)|^2)^{-\frac{1}{2}}mc^2 \simeq mc^2 + \frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2$$

であるから, 相対論的運動量は古典力学における運動量に等しいとみなせて, 相対論的運動エネルギーは古典力学における運動エネルギーに定数 mc^2 を加えたものに等しいとみなせる.

定義 16.19 (相対論的力と相対論的力がする仕事)**.** Σ を慣性時空座標系とし, (ct, x) をその時空座標とする. 質点 m の運動を Σ から観測したものを $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, 速度を $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ とおく. このとき相対論的運動量 $p_{\mathrm{re}}(t)$ (定義 16.17) の時間変化率

$$f_{\mathrm{re}}(t) := \frac{d}{dt}p_{\mathrm{re}}(t)$$

を Σ において質点に加わる相対論的力と言う. また,

$$\int_a^b f_{\mathrm{re}}(t) \cdot \dot{x}(t)dt$$

を相対論的力 $f_{\mathrm{re}}(t)$ が時間 $[a, b]$ においてする仕事と言う.

定理 16.20 (相対論的力がする仕事は相対論的運動エネルギーの増加)**.** Σ を慣性時空座標系とし, (ct, x) をその時空座標とする. そして質点 m の運動を Σ から観測したものを $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, 速度を $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ とおき, Σ における相対論的運動エネルギーを $T_{\mathrm{re}}(t)$, 4 元運動量を $P(t)$ (定義 16.17) , Σ において質点に加わる相対論的力を $f_{\mathrm{re}}(t)$ (定義 16.19) とおく. このとき,

(1) Minkowski 内積 $g_M : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ に対し,

$$g_M(P(t), P(t)) = -m^2c^2$$

が成り立つ.

(2)

$$\frac{d}{dt}P(t) = \begin{pmatrix} c^{-1}f_{\mathrm{re}}(t) \cdot \dot{x}(t) \\ f_{\mathrm{re}}(t) \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

(3)
$$\int_a^b f_{\mathrm{re}}(t) \cdot \dot{x}(t)dt = T_{\mathrm{re}}(b) - T_{\mathrm{re}}(a) \quad (\forall [a,b] \subseteq \mathbb{R})$$

が成り立つ. すなわち Σ において質点に加わる相対論的力がする仕事は, Σ における質点の相対論的運動エネルギーの増加に等しい.

証明.
$$P(t) = \begin{pmatrix} c^{-1}T_{\mathrm{re}}(t) \\ p_{\mathrm{re}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{\mathrm{re}}(t)c \\ m_{\mathrm{re}}(t)\dot{x}(t) \end{pmatrix} = m(1 - c^{-2}|\dot{x}(t)|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned} g_M(P(t), P(t)) &= m^2(1 - c^{-2}|\dot{x}(t)|^2)^{-1} g_M \left(\begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \right) \\ &= m^2(1 - c^{-2}|\dot{x}(t)|^2)^{-1}(-c^2 + |\dot{x}(t)|^2) = -m^2c^2 \end{aligned}$$

である. よって (1) が成り立つ. またこれより,

$$0 = \frac{d}{dt}(-m^2c^2) = \frac{d}{dt} g_M(P(t), P(t)) = 2g_M\left(P(t), \frac{d}{dt}P(t)\right)$$

であり,
$$\frac{d}{dt}P(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c^{-1}T_{\mathrm{re}}(t) \\ p_{\mathrm{re}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^{-1}\frac{d}{dt}T_{\mathrm{re}}(t) \\ f_{\mathrm{re}}(t) \end{pmatrix} \tag{16.40}$$

であるから,

$$\begin{aligned} 0 &= g_M\left(P(t), \frac{d}{dt}P(t)\right) = g_M\left(\begin{pmatrix} m_{\mathrm{re}}(t)c \\ m_{\mathrm{re}}(t)\dot{x}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c^{-1}\frac{d}{dt}T_{\mathrm{re}}(t) \\ f_{\mathrm{re}}(t) \end{pmatrix} \right) \\ &= m_{\mathrm{re}}(t)\left(-\frac{d}{dt}T_{\mathrm{re}}(t) + f_{\mathrm{re}}(t) \cdot \dot{x}(t)\right) \end{aligned}$$

である. ゆえに,
$$\frac{d}{dt}T_{\mathrm{re}}(t) = f_{\mathrm{re}}(t) \cdot \dot{x}(t) \tag{16.41}$$

である. (16.41) を (16.40) の右辺に代入すれば,

$$\frac{d}{dt}P(t) = \begin{pmatrix} c^{-1}\frac{d}{dt}T_{\mathrm{re}}(t) \\ f_{\mathrm{re}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^{-1}f_{\mathrm{re}}(t) \cdot \dot{x}(t) \\ f_{\mathrm{re}}(t) \end{pmatrix}$$

となる. よって (2) が成り立つ. また (16.41) の両辺を t で積分すれば (3) が成り立つことが分かる. □

命題 16.21 (慣性時空座標の変換に伴う 4 元運動量の変換)**.** Σ_1, Σ_2 を慣性時空座標系とし, Σ_1 は Σ_2 から見て等速度 $v \in \mathbb{R}^3 : |v| < c$ で動き, $A \in SO(3)$ によって傾いている (注意 16.14 を参照) とする. そしてある質点 m の 4 元運動量 (定義 16.17) を Σ_1, Σ_2 から観測したものをそれぞれ $P_1(t), P_2(s)$ とおく. このとき,

$$P_2(s) = L(+, A, c^{-1}v)P_1(t)$$

が成り立つ.

証明. 質点 m の運動を Σ_1, Σ_2 から観測したものをそれぞれ $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $y(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ とおき, 質点 m の運動に伴う固有時を τ (定理 16.16 より固有時は運動を観測する慣性時空座標系によらないことに注意) とおくと,

$$\begin{aligned} P_2(s) &= m\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} cs \\ y(s) \end{pmatrix} = m\frac{d}{d\tau}L(+, A, c^{-1}v)\begin{pmatrix} ct \\ x(t) \end{pmatrix} \\ &= L(+, A, c^{-1}v)m\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} ct \\ x(t) \end{pmatrix} = L(+, A, c^{-1}v)P_1(t) \end{aligned}$$

である. □

16.4 Minkowski 内積に関する Hodge の $\star$-作用素と余微分作用素

定義 16.22 (Minkowski 内積に関する Hodge の $\star$-作用素)**.** 実線型空間 $\mathbb{R}^4$ からその双対空間 $\mathbb{R}^{4*}$ の上への線型同型写像

$$j:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^{4*},\quad j(x):\mathbb{R}^4\ni y\mapsto x\cdot y\in\mathbb{R}\ \ (\forall x\in\mathbb{R}^4)$$

と, $\mathbb{R}^4$ 上の Minkowski 内積 $g_M:\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ に対し, 双線型汎関数

$$g_M^*:\mathbb{R}^{4*}\times\mathbb{R}^{4*}\ni(j(x),j(y))\mapsto g_M(x,y)\in\mathbb{R}$$

を定義する. これを $\mathbb{R}^{4*}$ 上の Minkowski 内積と言う. 内積空間のテンソル積の構成 (命題 6.61) と同様にして, 任意の $r\in\mathbb{Z}_+$ に対して双線型汎関数

$$\begin{aligned}&\langle\cdot,\cdot\rangle_M:\bigotimes^r\mathbb{R}^{4*}\times\bigotimes^r\mathbb{R}^{4*}\to\mathbb{R},\\ &\langle u_1\otimes\cdots\otimes u_r,v_1\otimes\cdots\otimes v_r\rangle_M=\frac{1}{r!}g_M^*(u_1,v_1)\cdots g_M^*(u_r,v_r)\end{aligned}$$

が定まることが分かる. このとき任意の $r\in\{0,1,2,3,4\}$ に対し,

$$\langle u_1\wedge\cdots\wedge u_r,v_1\wedge\cdots\wedge v_r\rangle_M=\det(g_M^*(u_i,v_j))_{i,j}\ \ (\forall u_1,v_1,\cdots,u_r,v_r\in\mathbb{R}^{4*})\tag{16.42}$$

である. 今, $e_0,e_1,e_2,e_3\in\mathbb{R}^4$ を標準基底とし,

$$\Omega:=j(e_0)\wedge j(e_1)\wedge j(e_2)\wedge j(e_3)\in\bigwedge^4\mathbb{R}^{4*}\tag{16.43}$$

とおく. 任意の $r\in\{0,1,2,3,4\}$, 任意の $T\in\bigwedge^r\mathbb{R}^{4*}$ に対し, 反対称テンソルの外積 (定義 2.74) によって, 線型汎関数

$$\bigwedge^{4-r}\mathbb{R}^{4*}\ni S\mapsto-\langle T\wedge S,\Omega\rangle_M\in\mathbb{R}$$

を定義する. これに対し Riesz の表現定理 3.44 より, $\star_M T\in\bigwedge^{4-r}\mathbb{R}^{4*}$ で,

$$\langle S,\star_M T\rangle_M=-\langle T\wedge S,\Omega\rangle_M\tag{16.44}$$

なるものが定まる. こうして各 $r\in\{0,1,2,3,4\}$ に対し, 線型同型写像

$$\star_M:\bigwedge^r\mathbb{R}^{4*}\ni T\mapsto\star_M T\in\bigwedge^{4-r}\mathbb{R}^{4*}$$

が定義される. これを Minkowski 内積に関する Hodge の $\star$-作用素と言う. (16.42), (16.43), (16.44) より, $\{0,1,2,3\}$ の任意の置換 σ に対し,

$$\star_M\left(j(e_{\sigma(0)})\wedge\cdots\wedge j(e_{\sigma(r-1)})\right)=\begin{cases}\mathrm{sgn}(\sigma)j(e_{\sigma(r)})\wedge\cdots j(e_{\sigma(3)}) & (0\in\{\sigma(0),\cdots,\sigma(r-1)\})\\ -\mathrm{sgn}(\sigma)j(e_{\sigma(r)})\wedge\cdots j(e_{\sigma(3)}) & (0\notin\{\sigma(0),\cdots,\sigma(r-1)\})\end{cases}\tag{16.45}$$

であるから, 任意の $S,T\in\bigwedge^r\mathbb{R}^{4*}$ に対し,

$$\star_M\star_M S=(-1)^{r(4-r)+1}S\tag{16.46}$$

であり,

$$\begin{aligned}\langle\star_M S,\star_M T\rangle_M&=-\langle T\wedge\star_M S,\Omega\rangle_M=(-1)^{r(4-r)+1}\langle\star_M S\wedge T,\Omega\rangle_M\\ &=-(-1)^{r(4-r)+1}\langle T,\star_M\star_M S\rangle_M=-\langle T,S\rangle_M\end{aligned}\tag{16.47}$$

である.

定義 16.23 (Minkowski 内積に関する Hodge の $\star$-作用素の $\mathbb{R}^4$ の微分形式への作用). $E \subseteq \mathbb{R}^4$ 上で定義された $\mathbb{R}^4$ の $r \in \{0,1,2,3,4\}$ 階微分形式 (定義 6.48)

$$\omega = (\omega_p)_{p\in E}, \quad \omega_p \in \bigwedge^r \mathbb{R}^{4*} \quad (\forall p \in E)$$

に対し, E 上で定義された $\mathbb{R}^4$ の $4-r$ 階微分形式 $\star_M \omega$ を,

$$\star_M \omega := (\star_M \omega_p)_{p\in E}$$

として定義する. $\mathbb{R}^4$ の標準座標 (x_0, x_1, x_2, x_3) に対し,

$$(dx_i)_p = j(e_i) \quad (\forall p \in E, i = 0,1,2,3)$$

であるから, $\{0,1,2,3\}$ の任意の置換 σ に対し, (16.45) より,

$$\star_M(dx_{\sigma(0)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(r-1)}) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma) dx_{\sigma(r)} \wedge \cdots dx_{\sigma(3)} & (0 \in \{\sigma(0), \cdots, \sigma(r-1)\}) \\ -\mathrm{sgn}(\sigma) dx_{\sigma(r)} \wedge \cdots dx_{\sigma(3)} & (0 \notin \{\sigma(0), \cdots, \sigma(r-1)\}) \end{cases} \tag{16.48}$$

である.

命題 16.24 (Minkowski 内積に関する Hodge の $\star$-作用素と固有 Poincaré 変換による引き戻しの可換性). $E \subseteq \mathbb{R}^4$ 上で定義された $\mathbb{R}^4$ の $r \in \{0,1,2,3,4\}$ 階微分形式 ω と固有 Poincaré 変換 $\Lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ (定義 16.9) に対し,

$$\Lambda^* \star_M \omega = \star_M \Lambda^* \omega$$

が成り立つ. ただし Λ^* は Λ による微分形式の引き戻し (定義 6.58) である.

証明. $\mathbb{R}^4$ の標準座標を (x_0, x_1, x_2, x_3) とおく. 引き戻しの線型性より, ある $f : E \to \mathbb{R}$ と $\{0,1,2,3\}$ の置換 σ に対し,

$$\omega = f dx_{\sigma(0)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(r-1)}$$

であるとして示せば十分である. Λ の Lorentz 変換部分 (定義 16.9) の固有 Lorentz 変換を L とおくと,

$$(\Lambda^* dx_i)_p = (d\Lambda_i)_p = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial x_k}(p)(dx_k)_p = \sum_{k=0}^{3} L_{i,k} j(e_k) = j(L^t e_i) \quad (\forall p \in E, i = 0,1,2,3) \tag{16.49}$$

である. ここで命題 16.8 より L の転置 L^t は固有 Lorentz 変換であるから, L^t は Minkowski 内積を保存し, $\det(L^t) = 1$ を満たす. よって,

$$\langle L^t u_1 \wedge \cdots \wedge L^t u_r, L^t v_1 \wedge \cdots \wedge L^t v_r \rangle_M = \det\left(g_M^*(L^t u_i, L^t v_j)\right)_{i,j} = \det\left(g_M^*(u_i, v_j)\right)_{i,j}$$

であり, 命題 2.79 より,

$$j(L^t e_0) \wedge \cdots \wedge j(L^t e_3) = \det(L^t) j(e_0) \wedge \cdots \wedge j(e_3) = j(e_0) \wedge \cdots \wedge j(e_3)$$

であるから, $\star_M$ の定義 16.22 より,

$$\star_M(j(L^t e_{\sigma(0)}) \wedge \cdots \wedge j(L^t e_{\sigma(r-1)})) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma) j(L^t e_{\sigma(r)}) \wedge \cdots j(L^t e_{\sigma(3)}) & (0 \in \{\sigma(0), \cdots, \sigma(r-1)\}) \\ -\mathrm{sgn}(\sigma) j(L^t e_{\sigma(r)}) \wedge \cdots j(L^t e_{\sigma(3)}) & (0 \notin \{\sigma(0), \cdots, \sigma(r-1)\}) \end{cases}$$

である. ゆえに (16.49) と (16.48) より,

$$\begin{aligned} \star_M \Lambda^* \omega &= \star_M((f \circ \Lambda) d\Lambda_{\sigma(0)} \wedge \cdots \wedge \Lambda_{\sigma(r-1)}) \\ &= (f \circ \Lambda) \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma) d\Lambda_{\sigma(r)} \wedge \cdots d\Lambda_{\sigma(3)} & (0 \in \{\sigma(0), \cdots, \sigma(r-1)\}) \\ -\mathrm{sgn}(\sigma) d\Lambda_{\sigma(r)} \wedge \cdots d\Lambda_{\sigma(3)} & (0 \notin \{\sigma(0), \cdots, \sigma(r-1)\}) \end{cases} \\ &= (f \circ \Lambda) \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma) \Lambda^*(dx_{\sigma(r)} \wedge \cdots dx_{\sigma(3)}) & (0 \in \{\sigma(0), \cdots, \sigma(r-1)\}) \\ -\mathrm{sgn}(\sigma) \Lambda^*(dx_{\sigma(r)} \wedge \cdots dx_{\sigma(3)}) & (0 \notin \{\sigma(0), \cdots, \sigma(r-1)\}) \end{cases} \\ &= \Lambda^* \star_M \omega \end{aligned}$$

である. □

定義 16.25 (Minkowski 内積に関する余微分作用素)**.** $\mathbb{R}^4$ の開集合上の $r \in \{1,2,3,4\}$ 階 C^1 級微分形式 ω に対し, $r-1$ 階微分形式 $\delta_M\omega$ を,

$$\delta_M\omega := -\star_M d \star_M \omega$$

として定義する.

命題 16.26 (Minkowski 内積に関する余微分作用素の基本性質)**.** $\mathbb{R}^4$ の開集合上の r 階級微分形式 ω を考える.

(1) $r \in \{2,3,4\}$ とし ω を C^2 級とすると, $\delta_M\delta_M\omega = 0$ が成り立つ.
(2) $r \in \{0,1,2,3\}$ とし ω を C^2 級とすると, $\star_M\delta_M d\omega = d\delta_M \star_M \omega$ が成り立つ.
(3) $r \in \{1,2,3,4\}$ とし ω を C^1 級とする. そして $\Lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を固有 Poincaré 変換 (定義 16.9) とする. このとき $\Lambda^*\delta_M\omega = \delta_M\Lambda^*\omega$ が成り立つ.

証明. (1)

$$\delta_M\delta_M\omega = \star_M d \star_M \star_M d \star_M \omega = (-1)^{(5-r)(r-1)+1} \star_M dd \star_M \omega = 0.$$

(2)

$$\begin{aligned}\star_M \delta_M d\omega &= - \star_M \star_M d \star_M d\omega = -(-1)^{(4-r)r+1} d \star_M d\omega \\ &= -d \star_M d(-1)^{(4-r)r+1}\omega = -d \star_M d \star_M \star_M\omega = d\delta_M \star_M \omega.\end{aligned}$$

(3) 固有 Poincaré 変換 Λ の引き戻し Λ^* と外微分の可換性 (命題 6.60 の (3)), および Λ^* と Minkowski 内積に関する Hodge の $\star$-作用素の可換性 (命題 16.24) より,

$$\Lambda^*\delta_M\omega = -\Lambda^* \star_M d \star_M \omega = - \star_M d \star_M \Lambda^*\omega = \delta_M\Lambda^*\omega.$$

□

16.5 特殊相対論的時空と電磁気学の基本法則

定義 16.27 (電荷密度, 電流密度, 電場, 磁場, Lorentz 力, Maxwell 方程式)**.** 物体は電荷と呼ばれる実数 (正でも負でも 0 でもあり得る) の物理量を帯びる. そして電荷は物体中, 物体間を流れることができる. この電荷の流れを電流と呼ぶ. 電荷の担い手は電子や陽子と言った素粒子であり, これらが移動することにより電流が生じるのであるが, 素粒子はもはや古典物理学的な粒子とはみなせない極微の対象である. 巨視的対象を扱う古典物理学 (“質点” と言ってもそれは考察の対象において相対的に大きさが無視できる巨視的な対象である) においては, そのような極微のレベルには踏み込まず, 電荷や電流の分布は時空座標に関して次に述べる意味で滑らかであると仮定する. 今, 慣性時空座標系 Σ を設定し, その時空座標を (ct, x) (定義 16.10) とおく. 電荷密度と呼ばれる滑らかなスカラー場 $\rho(ct, x) \in \mathbb{R}$ が電荷の分布を表し, 電流密度と呼ばれる滑らかなベクトル場 $i(ct, x) \in \mathbb{R}^3$ が電流の分布を表す. そして任意の空間領域 $D \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し,

$$\int_D \rho(ct, x)dx$$

は時刻 t において D に在る電荷の総和を表し, 空間内の任意の向き付けられた 2 次元多様体 $M \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し, $\nu : M \to \mathbb{R}^3$ を正の向きの単位法線ベクトル場 (定義 6.112), $\mu_M : \mathcal{B}_M \to [0,\infty]$ を M の面積測度 (定義 6.85) として,

$$\int_M i(ct, x) \cdot \nu(x) d\mu_M(x)$$

は時刻 t において単位時間当たりに M を負の側 ($-\nu$ が向いている側) から正の側 (ν が向いている側) に通過する電荷の総和を表す. 電荷と電流に関して “電荷の保存法則” と呼ばれる原理的法則がある. これは滑らかな境界を持つ任意の有界開集合 $D \subseteq \mathbb{R}^3$ (定義 6.113) に対し, $\nu : \partial D \to \mathbb{R}^3$ を外向き単位法線ベクトル場 (定義 6.116), $\mu_{\partial D} : \mathcal{B}_{\partial D} \to [0,\infty)$ を D の境界 ∂D の面積測度として,

$$-\frac{d}{dt}\int_D \rho(ct, x)dx = \int_{\partial D} i(ct, x) \cdot \nu(x) d\mu_{\partial D}(x) \tag{16.50}$$

が成り立つと言う法則である. (16.50) の左辺は D に在る電荷の総和の単位時間当たりの減少量を表し, (16.50) の右辺は D の境界 ∂D を内から外へ通過する単位時間当たりの電荷の総和を表す. $\rho(ct,x) \in \mathbb{R}$ と $i(ct,x) \in \mathbb{R}^3$ は滑らかなので Lebesgue 優収束定理と Gauss の発散定理 6.122 より,

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho(ct,x)dx = \int_D \frac{\partial\rho}{\partial t}(ct,x)dx, \quad \int_{\partial D} i(ct,x)\cdot\nu(x)dx = \int_D \mathrm{div}_x(i)(ct,x)dx$$

であるから, (16.50) は,

$$\int_D \frac{\partial\rho}{\partial t}(ct,x) + \mathrm{div}_x(i)(ct,x)dx = 0 \tag{16.51}$$

と書き換えられる. 電荷の保存法則は, 滑らかな境界を持つ任意の有界開集合 $D \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し (16.51) が成り立つことを主張するので結局, 電荷の保存法則は,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(ct,x) + \mathrm{div}_x(i)(ct,x) = 0 \tag{16.52}$$

と言う方程式で表される.

電荷密度 $\rho(t,x) \in \mathbb{R}$ と電流密度 $i(t,x) \in \mathbb{R}^3$ の存在と共に, 電場と呼ばれる滑らかなベクトル場 $E(t,x) \in \mathbb{R}^3$, 磁場と呼ばれる滑らかなベクトル場 $B(t,x) \in \mathbb{R}^3$ が存在する. そしてこれらは, 電荷 $e \in \mathbb{R}$ を持ち, $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ によって運動する質点に対し,

$$e(E(ct,x(t)) + \dot{x}(t) \times B(ct,x(t)))$$

なる "相対論的な力 (定義 16.19 を参照) を加えるもの" として特徴付けられる. この相対論的力を Lorentz 力と呼ぶ.

電荷密度 $\rho(ct,x) \in \mathbb{R}$, 電流密度 $i(ct,x) \in \mathbb{R}^3$, 電場 $E(ct,x) \in \mathbb{R}^3$, 磁場 $B(ct,x) \in \mathbb{R}^3$ は, $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$ (c は光速) を満たす, 真空の誘電率, 真空の透磁率と呼ばれる正の物理定数 ε_0, μ_0 に対し,

(1) $\mathrm{div}_x(E)(ct,x) = \varepsilon_0^{-1}\rho(ct,x)$ (電場に関する Gauss の法則)

(2) $\mathrm{rot}_x(E)(ct,x) = -\dfrac{\partial B}{\partial t}(ct,x)$ (Faraday の電磁誘導の法則)

(3) $\mathrm{div}_x(B)(ct,x) = 0$ (磁場に関する Gauss の法則)

(4) $\mathrm{rot}_x(B)(ct,x) = c^{-2}\dfrac{\partial E}{\partial t}(ct,x) + \mu_0 i(ct,x)$ (Ampere-Maxwell の法則)

なる方程式系を満たす. この方程式系を Maxwell 方程式と言う.

定義 16.28 (4 元電流密度, 電磁テンソル場)**.** 慣性時空座標系 Σ (定義 16.10) を設定し, その時空座標を $(ct,x) = (ct,x_1,x_2,x_3) := (x_0,x_1,x_2,x_3)$ とおく. そして Σ において観測される電荷密度を $\rho(ct,x) \in \mathbb{R}$, 電流密度を $i(ct,x) = (i_k(ct,x))_{k=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$, 電場を $E(ct,x) = (E_k(ct,x))_{k=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$, 磁場を $B(ct,x) = (B_k(ct,x))_{k=1,2,3}$ とおく. このとき $\mathbb{R}^4$ の滑らかな 1 階微分形式

$$J = -c\rho dx_0 + \sum_{k=1}^{3} i_k dx_k$$

を 4 元電流密度と言い, Minkowski 内積に関する Hodge の $\star$-作用素 $\star_M$ (定義 16.22) に対し, $\mathbb{R}^4$ 上の滑らかな 2 階の微分形式

$$\Omega := c^{-1}\sum_{k=1}^{3} E_k dx_0 \wedge dx_k - \sum_{k=1}^{3} B_k \star_M (dx_0 \wedge dx_k)$$

を電磁テンソル場と言う.

命題 16.29 (電磁気学の基本法則の 4 元電流密度と電磁テンソル場による表現)**.** 慣性時空座標系 Σ を設定し, その時空座標を $(ct,x) = (ct,x_1,x,2,x,3) := (x_0,x_1,x_2,x_3)$ とおき, 4 元電流密度を,

$$J = -c\rho dx_0 + \sum_{k=1}^{3} i_k dx_k,$$

電磁テンソル場を,

$$\Omega = c^{-1}\sum_{k=1}^{3} E_k dx_0 \wedge dx_k - \sum_{k=1}^{3} B_k \star_M (dx_0 \wedge dx_k)$$

とおく. そして Minkowski 内積に関する余微分作用素 (定義 16.25) を δ_M とおく. このとき,

(1)

$$\begin{aligned}\delta_M J &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}_x(i),\\ -\star_M d\Omega &= \mathrm{div}_x(B)dx_0 + c^{-1}\sum_{k=1}^{3}\left((\mathrm{rot}_x(E))_k + \frac{\partial B_k}{\partial t}\right)dx_k,\\ \delta_M\Omega &= -c^{-1}\mathrm{div}_x(E)dx_0 + \sum_{k=1}^{3}\left((\mathrm{rot}_x(B))_k - c^{-2}\frac{\partial E_k}{\partial t}\right)dx_k\end{aligned}$$

が成り立つ. よって特に,

電荷の保存法則 (16.52) $\Leftrightarrow$ $\delta_M J = 0$,
磁場に関する Gauss の法則, Faraday の電磁誘導の法則 $\Leftrightarrow$ $d\Omega = 0$,
電場に関する Gauss の法則, Ampere-Maxwell の法則 $\Leftrightarrow$ $\delta_M\Omega = \mu_0 J$

が成り立つ.

(2) 電荷 $e \in \mathbb{R}$ を持つ質点の運動を Σ から観測したものを $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ とおき, この質点に加わる Lorentz 力を,

$$f(t) = e(E(ct, x(t)) + \dot{x}(t) \times B(ct, x(t))),$$

とおく. そして,

$$F(t) := \begin{pmatrix} c^{-1}f(t)\cdot\dot{x}(t) \\ f(t)\end{pmatrix}$$

とおく. このとき MInkowski 内積 g_M (定義 16.1) に対し,

$$\Omega_{(ct,x(t))}\left(e\begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v\end{pmatrix}\right) = g_M\left(F(t), \begin{pmatrix} v_0 \\ v\end{pmatrix}\right) \quad (\forall v_0 \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^3)$$

が成り立つ.

証明. (1)

$$\begin{aligned}\delta_M(-c\rho dx_0) &= c\star_M d\rho \star_M dx_0 = \frac{\partial\rho}{\partial t},\\ \delta_M\left(\sum_{k=1}^{3} i_k dx_k\right) &= -\star_M d\left(\sum_{k=1}^{3} i_k \star_M dx_k\right) = \mathrm{div}_x(i)\end{aligned}$$

であるから,

$$\delta_M J = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}_x(i)$$

である.

$$\begin{aligned}-\star_M d\left(c^{-1}\sum_{k=1}^{3} E_k dx_0 \wedge dx_k\right) &= -c^{-1}\sum_{k=1}^{3}\star_M d(E_k dx_0 \wedge dx_k)\\ &= c^{-1}\sum_{k=1}^{3}(\mathrm{rot}(E))_k dx_k,\end{aligned}$$

$$-\star_M d\left(-\sum_{k=1}^{3} B_k \star_M (dx_0 \wedge dx_k)\right) = \sum_{k=1}^{3} \star_M d(B_k \star_M (dx_0 \wedge dx_k))$$
$$= \mathrm{div}_x(B)dx_0 + c^{-1}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial B_k}{\partial t} dx_k$$

であるから,

$$-\star_M d\Omega = \mathrm{div}_x(B)dx_0 + c^{-1}\sum_{k=1}^{3}\left((\mathrm{rot}_x(E))_k + \frac{\partial B_k}{\partial t}\right)dx_k$$

である.

$$\delta_M\left(c^{-1}\sum_{k=1}^{3} E_k dx_0 \wedge dx_k\right) = -c^{-1}\sum_{k=1}^{3} \star_M d(E_k \star_M (dx_0 \wedge dx_k))$$
$$= -c^{-1}\mathrm{div}_x(E)dx_0 - \sum_{k=1}^{3} c^{-2}\frac{\partial E_k}{\partial t} dx_k,$$

$$\delta_M\left(-\sum_{k=1}^{3} B_k \star_M (dx_0 \wedge dx_k)\right) = -\sum_{k=1}^{3} \star_M d(B_k dx_0 \wedge dx_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{3} (\mathrm{rot}_x(B))_k dx_k$$

であるから,

$$\delta_M\Omega = -c^{-1}\mathrm{div}_x(E)dx_0 + \sum_{k=1}^{3}\left((\mathrm{rot}_x(B))_k - c^{-2}\frac{\partial E_k}{\partial t}\right)dx_k$$

である.

(2) 外積の反対称性 (命題 2.79) より,

$$\left(c^{-1}\sum_{k=1}^{3} E_k(ct, x(t))(dx_0 \wedge dx_k)_{(ct,x(t))}\right)\left(e\begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix}\right)$$
$$= eE(ct, x(t)) \cdot v - c^{-1}(eE(ct, x(t)) \cdot \dot{x}(t))v_0$$
$$= eE(ct, x(t)) \cdot v - c^{-1}(f(t) \cdot \dot{x}(t))v_0,$$

$$\left(-\sum_{k=1}^{3} B_k(ct, x(t)) \star_M (dx_0 \wedge dx_k)_{(ct,x(t))}\right)\left(e\begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix}\right)$$
$$= -eB(ct, x(t)) \cdot (\dot{x}(t) \times v)$$
$$= (e\dot{x}(t) \times B(ct, x(t))) \cdot v$$

であるから,

$$\Omega_{(ct,x(t))}\left(e\begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix}\right)$$
$$= e(E(ct, x(t)) \cdot v + \dot{x}(t) \times B(ct, x(t))) \cdot v - c^{-1}(f(t) \cdot \dot{x}(t))v_0$$
$$= f(t) \cdot v - c^{-1}(f(t) \cdot \dot{x}(t))v_0$$
$$= g_M\left(F(t), \begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix}\right)$$

である.

□

命題 16.30 (特殊相対論的時空座標の変換と電磁気学の基本法則の整合性)**.** Σ, Σ' を慣性時空座標系 (定義 16.10) とし, それぞれにおける時空座標を $(ct,x) = (ct,x_1,x_2,x_3) = (x_0,x_1,x_2,x_3)$, $(cs,y) = (cs,y_1,y_2,y_3) = (y_0,y_1,y_2,y_3)$ とおき, 特殊相対論における慣性時空座標の変換 (定義 16.12)

$$\begin{pmatrix} cs \\ y \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

を司る固有 Poincaré 変換 $\Lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を取る. Σ において観測される電荷密度を $\rho(ct,x) \in \mathbb{R}$, 電流密度を $i(ct,x) = (i_k(ct,x))_{k=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$, 電場を $E(ct,x) = (E_k(ct,x))_{k=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$, 磁場を $B(ct,x) = (B_k(ct,x))_{k=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$ とおき, これらによって定義される 4 元電流密度と電磁テンソル場を,

$$J = -c\rho dx_0 + \sum_{k=1}^{3} i_k dx_k,$$

$$\Omega = c^{-1}\sum_{k=1}^{3} E_k dx_0 \wedge dx_k - \sum_{k=1}^{3} B_k \star_M (dx_0 \wedge dx_k)$$

とおく. そして Σ' において観測される電荷密度を $\rho'(cs,y) \in \mathbb{R}$, 電流密度を $i'(cs,y) = (i'_k(cs,y))_{k=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$, 電場を $E'(cs,y) = (E'_k(cs,y))_{k=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$, 磁場を $B'(cs,y) = (B'_k(cs,y))_{k=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$ とおき, これらによって定義される 4 元電流密度と電磁テンソル場を,

$$J' = -c\rho' dy_0 + \sum_{k=1}^{3} i'_k dy_k,$$

$$\Omega' = c^{-1}\sum_{k=1}^{3} E'_k dy_0 \wedge dy_k - \sum_{k=1}^{3} B'_k \star_M (dy_0 \wedge dy_k)$$

とおく. このとき Λ による引き戻し (定義 6.58) Λ^* に対し,

$$\Lambda^*\Omega' = \Omega, \quad \Lambda^* J' = J$$

が成り立つ.

証明. 電荷 1 を持ち, Lorentz 力のみを受けて運動する質点を考え, その質点の運動を Σ, Σ' から観測したものをそれぞれ $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $y(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ とおき, この質点に加わる Lorentz 力を Σ から観測したものを,

$$f(t) = E(ct, x(t)) + \dot{x}(t) \times B(ct, x(t)),$$

Σ' から観測したものを,

$$f'(s) = E'(cs, y(s)) + \dot{y}(s) \times B'(cs, y(s))$$

とおく.

$$\begin{pmatrix} cs \\ y(s) \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x(t) \end{pmatrix}$$

であるから, Λ の Lorentz 変換部分 (定義 16.9) を L とおくと, 命題 16.11 より,

$$\begin{pmatrix} c \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix} = \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} cs \\ y(s) \end{pmatrix} = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x(t) \end{pmatrix} = \frac{dt}{ds} L \begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

であり, 従って,

$$L\begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \frac{ds}{dt}\begin{pmatrix} c \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix} \tag{16.53}$$

である. Σ, Σ' において観測される質点の 4 元運動量 (定義 16.17) をそれぞれ $P(t), P'(s)$ とおき,

$$F(t) := \begin{pmatrix} c^{-1} f(t) \cdot \dot{x}(t) \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad F'(s) := \begin{pmatrix} c^{-1} f'(s) \cdot \dot{y}(s) \\ f'(s) \end{pmatrix}$$

とおくと, 命題 16.20 と命題 16.21 より,

$$F'(s) = \frac{d}{ds}P'(s) = \frac{d}{ds}LP(t) = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}LP(t) = \frac{dt}{ds}LF(t) \tag{16.54}$$

である. よって任意の $v_0 \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^3$ に対し, 命題 16.29 の (2) と (16.53), (16.54), および Lorentz 変換 L の Minkowski 内積保存性より,

$$\begin{aligned}
(\Lambda^*\Omega')_{(ct,x(t))}\left(\begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix}\right) &= \Omega'_{(cs,y(s))}\left(L\begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, L\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{ds}{dt}\Omega'_{(cs,y(s))}\left(\begin{pmatrix} c \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix}, L\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix}\right) = \frac{ds}{dt}g_M\left(F'(s), L\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{ds}{dt}\frac{dt}{ds}g_M\left(LF(t), L\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix}\right) = g_M\left(LF(t), L\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix}\right) \\
&= g_M\left(F(t), \begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix}\right) = \Omega_{(ct,x(t))}\left(\begin{pmatrix} c \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

である. Σ における質点の運動 $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ の時刻 t における位置と速度を任意に取ることにより,

$$\Lambda^*\Omega' = \Omega$$

を得る. これと命題 16.29 の (1), および Minkowski 内積に関する余微分作用素 δ_M と固有 Poincaré 変換による引き戻し Λ^* の可換性 (命題 16.26 の (3)) より,

$$\mu_0 J = \delta_M \Omega = \delta_M \Lambda^*\Omega' = \Lambda^*\delta_M\Omega' = \Lambda^*\mu_0 J'$$

であるから,

$$\Lambda^* J' = J$$

である. □

命題 16.31 (光速で伝搬する波動としての電場と磁場)**.** 慣性時空座標系 Σ を設定し, その時空座標を (ct, x) とおく. そして Σ において観測される電荷密度を $\rho(ct, x) \in \mathbb{R}$, 電流密度を $i(ct, x) \in \mathbb{R}^3$, 電場を $E(ct, x) \in \mathbb{R}^3$, 磁場を $B(ct, x) \in \mathbb{R}^3$ とする. このとき,

$$\begin{aligned}
\left(c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)E(ct,x) &= -\varepsilon_0^{-1}\mathrm{grad}_x(\rho)(ct,x) - \mu_0\frac{\partial i}{\partial t}(ct,x), \\
\left(c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)E(ct,x) &= \mu_0 \mathrm{rot}_x(i)(ct,x)
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって Σ において観測される電場 $E(ct, x)$ と磁場 $B(ct, x)$ は光速 c で伝搬する波動 (定理 11.65 を参照) である.

証明. rot の定義 6.80 と命題 12.216 より,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}_x(\mathrm{rot}_x(E))(ct,x) &= \mathrm{grad}_x(\mathrm{div}_x(E))(ct,x) - \Delta_x E(ct,x), \\
\mathrm{rot}_x(\mathrm{rot}_x(B))(ct,x) &= \mathrm{grad}_x(\mathrm{div}_x(B))(ct,x) - \Delta_x B(ct,x)
\end{aligned} \tag{16.55}$$

が成り立つことが分かる. 一方, Faraday の電磁誘導の法則と Ampere-Maxwell の法則 (定義 16.27) より,

$$\mathrm{rot}_x(\mathrm{rot}_x(E))(ct,x) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}_x(B)(ct,x) = -c^{-2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}(ct,x) - \mu_0\frac{\partial i}{\partial t}(ct,x) \tag{16.56}$$

であり, 電場に関する Gauss の法則より,

$$\mathrm{grad}_x(\mathrm{div}_x(E))(ct,x) = \varepsilon_0^{-1}\mathrm{grad}_x(\rho)(ct,x) \tag{16.57}$$

であるから, (16.56) と (16.57) を (16.55) の上の式に代入して整理すれば,

$$\left(c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)E(ct,x) = -\varepsilon_0^{-1}\mathrm{grad}_x(\rho)(ct,x) - \mu_0\frac{\partial i}{\partial t}(ct,x)$$

を得る. また Ampere-Maxwell の法則と Faraday の法則より,

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}_x(\mathrm{rot}_x(B))(ct,x) &= c^{-2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}_x(E)(ct,x)+\mu_0\mathrm{rot}_x(i)(ct,x)\\ &= -c^{-2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}(ct,x)+\mu_0\mathrm{rot}_x(i)(ct,x)\end{aligned} \tag{16.58}$$

であり, 磁場に関する Gauss の法則より,

$$\mathrm{grad}_x(\mathrm{div}_x(B))(ct,x)=0 \tag{16.59}$$

なので, (16.58), (16.59) を (16.55) の下の式に代入して,

$$\left(c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_x\right)B(ct,x)=\mu_0\mathrm{rot}_x(i)(ct,x)$$

を得る. □

16.6 電磁ポテンシャル, Lorenz ゲージ

定義 16.32 (電磁ポテンシャル, ゲージ変換)**.** 慣性時空座標系 Σ (定義 16.10) を設定し, その時空座標を $(ct,x)=(ct,x_1,x_2,x_3)=(x_0,x_1,x_2,x_3)$ とおく. そして電磁テンソル場を,

$$\Omega=c^{-1}\sum_{k=1}^{3}E_k dx_0\wedge dx_k-\sum_{k=1}^{3}B_k\star_M(dx_0\wedge dx_k)$$

とおく. Ω は磁場に関する Gauss の法則と Faraday の電磁誘導の法則より $d\Omega=0$ を満たす (命題 16.29) ので, Poincaré の補題 6.129 より $\mathbb{R}^4$ の滑らかな 1 階微分形式 ω で,

$$\Omega=d\omega$$

を満たすものが存在する. このような ω を電磁ポテンシャルと言う. 任意の電磁ポテンシャル ω と任意の滑らかなスカラー場 $\chi(ct,x)\in\mathbb{R}$ に対し,

$$\omega_\chi:=\omega+d\chi$$

とおけば, 命題 6.57 の (4) より,

$$d\omega_\chi=d(\omega+d\chi)=d\omega+dd\chi=d\omega=\Omega$$

であるから, ω_χ も電磁ポテンシャルである. 電磁ポテンシャルの変換

$$\omega\mapsto\omega_\chi=\omega+d\chi$$

を ω の χ によるゲージ変換と言う.

電磁ポテンシャル ω に対し,

$$\omega=c^{-1}\varphi dx_0-\sum_{k=1}^{3}A_k dx_k$$

と展開して得られる滑らかなスカラー場 $\varphi(ct,x)\in\mathbb{R}$ と滑らかなベクトル場 $A(ct,x)=(A_k(ct,x))\in\mathbb{R}^3$ をそれぞれ Σ における電磁スカラーポテンシャル, 電磁ベクトルポテンシャルと言う.

$$\begin{aligned}&c^{-1}\sum_{k=1}^{3}E_k dx_0\wedge dx_k-\sum_{k=1}^{3}B_k\star_M(dx_0\wedge dx_k)\\ &=\Omega=d\omega=d\left(c^{-1}\varphi dx_0-\sum_{k=1}^{3}A_k dx_k\right)\\ &=c^{-1}\sum_{k=1}^{3}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\frac{\partial A_k}{\partial t}\right)dx_0-\sum_{k=1}^{3}(\mathrm{rot}_x(A))_k\star_M(dx_0\wedge dx_k)\end{aligned}$$

であるから, Σ における電場 $E(ct,x) = (E_k(ct,x))_{k=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$ と磁場 $B(ct,x) = (B_k(ct,x))_{k=1,2,3}$ は, Σ における電磁スカラーポテンシャル $\varphi(ct,x) \in \mathbb{R}$ と電磁ベクトルポテンシャル $A(ct,x) = (A_k(ct,x))_{k=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$ に対し,

$$\begin{aligned} E(ct,x) &= -\mathrm{grad}_x(\varphi)(ct,x) - \frac{\partial A}{\partial t}(ct,x), \\ B(ct,x) &= \mathrm{rot}_x(A)(ct,x) \end{aligned}$$

と表される.

命題 16.33 (Lorenz ゲージの存在)**.** 慣性時空座標系 Σ (定義 16.10) を設定し, その時空座標を $(ct,x) = (ct,x_1,x_2,x_3) = (x_0,x_1,x_2,x_3)$ とおく.

$$\omega = c^{-1}\varphi dx_0 - \sum_{k=1}^{3} A_k dx_k$$

を任意の電磁ポテンシャル (定義 16.32) とする. このとき,

(1) Minkowski 内積に関する余微分作用素 (定義 16.25) δ_M に対し,

$$\delta_M \omega = -\left(c^{-2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{div}_x(A)\right)$$

が成り立つ.

(2) Σ における滑らかなスカラー場 $\chi(ct,x) \in \mathbb{R}$ が光速 c で伝搬する波動の方程式 (定理 11.65 を参照)

$$\left(c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)\chi(ct,x) = -\left(c^{-2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(ct,x) + \mathrm{div}_x(A)(ct,x)\right) \tag{16.60}$$

を満たすならば, ω を χ によってゲージ変換した電磁ポテンシャル

$$\omega_\chi = \omega + d\chi = c^{-1}\varphi_\chi dx_0 - \sum_{k=1}^{3} A_{\chi,k} dx_k$$

は,

$$\delta_M \omega = -\left(c^{-2}\frac{\partial \varphi_\chi}{\partial t} + \mathrm{div}_x(A_\chi)\right) = 0$$

を満たす.

証明. (1)

$$\delta_M c^{-1}\varphi dx_0 = -\star_M dc^{-1}\varphi \star_M dx_0 = -c^{-2}\frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

$$\delta_M\left(-\sum_{k=1}^{3} A_k dx_k\right) = \sum_{k=1}^{3} \star_M dA_k \star_M dx_k = -\mathrm{div}_x(A)$$

であるから,

$$\delta_M \omega = -\left(c^{-2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{div}_x(A)\right)$$

である.

(2) (1) で $\omega = c^{-1}\varphi dx_0 - \sum_{k=1}^{3} A_k dx_k$ を,

$$d\chi = c^{-1}\frac{\partial \chi}{\partial t}dx_0 + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \chi}{\partial x_k}dx_k$$

に置き換えれば,

$$\delta_M d\chi = -\left(c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)\chi$$

を得る．よって (1) より (16.60) は $-\delta_M d\chi = \delta_M \omega = 0$, すなわち $\delta_M \omega_\chi = 0$ を意味する．そして再び (1) より，

$$0 = \delta_M \omega_\chi = -\left(c^{-2}\frac{\partial \varphi_\chi}{\partial t} + \mathrm{div}_x(A_\chi)\right)$$

である．

□

定義 16.34 (Lorenz ゲージの電磁ポテンシャル)**.** 慣性時空座標系 Σ (定義 16.10) を設定し，その時空座標を $(ct, x) = (ct, x_1, x_2, x_3) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ とおく．電磁ポテンシャル

$$\omega = c^{-1}\varphi dx_0 - \sum_{k=1}^{3} A_k dx_k$$

で，

$$\delta_M \omega = 0 \tag{16.61}$$

を満たすものを Lorenz ゲージの電磁ポテンシャルと言う．命題 16.33 より ω が Lorentz ゲージであるための条件 (16.61) は, ω に対応する Σ における電磁スカラーポテンシャル $\varphi(ct, x) \in \mathbb{R}$ と電磁ベクトルポテンシャル $A(ct, x) \in \mathbb{R}^3$ が，

$$c^{-2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(ct, x) + \mathrm{div}_x(A)(ct, x) = 0$$

を満たすことと同値である．また命題 16.33 より，任意の電磁ポテンシャルを適切な波動方程式 (定理 11.65) を満たすスカラー場によってゲージ変換すると Lorenz ゲージの電磁ポテンシャルが得られる．

命題 16.35 (Lorenz ゲージの電磁ポテンシャルによる Maxwell 方程式)**.** 慣性時空座標系 Σ (定義 16.10) を設定し，その時空座標を (ct, x) とおき，Σ における電荷密度を $\rho(ct, x) \in \mathbb{R}$, 電流密度を $i(ct, x) \in \mathbb{R}^3$, 電場を $E(ct, x) \in \mathbb{R}^3$, 磁場を $B(ct, x) \in \mathbb{R}^3$, Lorenz ゲージの電磁スカラーポテンシャルを $\varphi(ct, x) \in \mathbb{R}$, 電磁ベクトルポテンシャルを $A(ct, x) \in \mathbb{R}^3$ とおく．このとき，

(1) $E(ct, x) = -\mathrm{grad}_x(\varphi)(ct, x) - \dfrac{\partial A}{\partial t}(ct, x), \quad B(ct, x) = \mathrm{rot}_x(A)(ct, x)$

(2) $c^{-2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(ct, x) + \mathrm{div}_x(A)(ct, x) = 0$

(3) $\left(c^{-2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)\varphi(ct, x) = \varepsilon_0^{-1}\rho(ct, x)$

(4) $\left(c^{-2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)A(ct, x) = \varepsilon_0^{-1}i(ct, x)$

が成り立つ．

証明. (1) は電磁ポテンシャルの定義 16.32 であり，(2) は Lorenz ゲージの条件 (定義 16.34) である．電場に関する Gauss の法則 (定義 16.27) と (1), (2) より，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0^{-1}\rho(ct, x) = \mathrm{div}_x(E)(ct, x) &= -\Delta_x \varphi(ct, x) - \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}_x(A)(ct, x) \\
&= -\Delta_x \varphi(ct, x) + c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(ct, x)
\end{aligned}$$

である．よって (3) が成り立つ．Ampere-Maxwell の法則 (定義 16.27) と (1), (2) より，

$$\begin{aligned}
\mu_0 i(ct, x) &= -c^{-2}\frac{\partial E}{\partial t}(ct, x) + \mathrm{rot}_x(B)(ct, x) \\
&= c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A(ct, x) + c^{-2}\mathrm{grad}_x\frac{\partial \varphi}{\partial t}(ct, x) + \mathrm{rot}_x(\mathrm{rot}_x(A))(ct, x) \\
&= c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A(ct, x) - \mathrm{grad}_x(\mathrm{div}_x(A))(ct, x) + \mathrm{rot}_x(\mathrm{rot}_x(A))(ct, x)
\end{aligned}$$

であり, rot の定義 6.80 と命題 12.216 より,

$$\mathrm{rot}_x(\mathrm{rot}_x(A))(ct,x) = \mathrm{grad}_x(\mathrm{div}_x(A))(ct,x) - \Delta_x A(ct,x)$$

であるから,

$$\begin{aligned}\mu_0 i(ct,x) &= c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A(ct,x) - \mathrm{grad}_x(\mathrm{div}_x(A))(ct,x) + \mathrm{rot}_x(\mathrm{rot}_x(A))(ct,x)\\ &= c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A(ct,x) - \Delta_x A(ct,x)\end{aligned}$$

である. よって (4) が成り立つ. □

16.7 Coulomb の法則と Biot-Savrat の法則, 電磁場のエネルギーと Joule 熱

命題 16.36 (Coulomb の法則と Biot-Savart の法則)**.** 慣性時空座標系 Σ (定義 16.10) を設定し, その時空座標を (ct,x) とおき, Σ における電荷密度を $\rho(ct,x)\in\mathbb{R}$, 電流密度を $i(ct,x)\in\mathbb{R}^3$, 電場を $E(ct,x)\in\mathbb{R}^3$, 磁場を $B(ct,x)\in\mathbb{R}^3$, Lorenz ゲージの電磁スカラーポテンシャルを $\varphi(ct,x)\in\mathbb{R}$, 電磁ベクトルポテンシャルを $A(ct,x)\in\mathbb{R}^3$ とおく. もし $\varphi(ct,x), A(ct,x)$ が時間 t によらないならば, 電磁場 $\rho(ct,x), i(ct,x), E(ct,x), B(ct,x)$ も時間 t によらず,

$$\begin{aligned}&E(x) = -\mathrm{grad}(\varphi)(x),\quad B(x) = \mathrm{rot}(A)(x),\\ &\Delta\varphi(x) = -\varepsilon_0^{-1}\rho(x),\quad \Delta A(x) = -\mu_0 i(x)\end{aligned}$$

が成り立つ. そして $\rho(x), i(x)$ の台がコンパクトであるならば, $\varphi(x), A(x)$ はそれぞれ定数差を除いて,

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(y)}{|x-y}dy,\quad A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{i(y)}{|x-y|}dy\quad (\forall x\in\mathbb{R}^3)$$

と表せて, $E(x), B(x)$ は,

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(y)(x-y)}{|x-y|^3}dy,\quad B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{i(y)\times(x-y)}{|x-y|^3}dy\quad (\forall x\in\mathbb{R}^3)$$

と表せる.

証明. 命題 16.35 の (3), (4) より,

$$\varepsilon_0^{-1}\rho(ct,x) = -\Delta\varphi(x),\quad \mu_0 i(ct,x) = -\Delta A(x) \tag{16.62}$$

であるから, $\rho(ct,x), i(ct,x)$ は t によらない. よって命題 16.35 の (1), (2) より,

$$E(ct,x) = -\mathrm{grad}(\varphi)(x),\quad B(ct,x) = \mathrm{rot}A(x) \tag{16.63}$$

であるから, $E(ct,x), B(ct,x)$ も t によらない. (16.62) より,

$$\Delta\varphi(x) = -\varepsilon_0^{-1}\rho(x),\quad \Delta A(x) = -\mu_0 i(x)$$

であり, これは与えられた $\rho(x), i(x)$ に対して $\varphi(x), A(x)$ を求める Poisson 方程式である. よって $\rho(x), i(x)$ の台がコンパクトであるならば, 定理 11.59 の (3) より $\varphi(x), A(x)$ はそれぞれ定数差を除いて,

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(y)}{|x-y|}dy,\quad A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{i(y)}{|x-y|}dy\quad (\forall x\in\mathbb{R}^3)$$

と表せる. そして (16.63) と定理 11.59 の (1) より,

$$\begin{aligned}E(x) &= -\mathrm{grad}(\varphi)(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(y)(x-y)}{|x-y|^3}dy,\\ B(x) &= \mathrm{rot}(A)(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{i(y)\times(x-y)}{|x-y|^3}dy\end{aligned}$$

である. □

定義 16.37 (電磁場のエネルギー, Joule 熱)**.** 慣性時空座標系 Σ (定義 16.10) を設定し, その時空座標を (ct, x) とおき, Σ における電荷密度を $\rho(ct, x) \in \mathbb{R}$, 電流密度を $i(ct, x) \in \mathbb{R}^3$, 電場を $E(ct, x) \in \mathbb{R}^3$, 磁場を $B(ct, x) \in \mathbb{R}^3$ とおく. このとき有界領域 $D \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し,

$$\int_D \frac{1}{2}\varepsilon_0|E(ct,x)|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|B(ct,x)|^2 dx \tag{16.64}$$

を時刻 t における D 内の電磁場のエネルギーと言う. また,

$$\int_D E(ct,x)\cdot i(ct,x)dx \tag{16.65}$$

を時刻 t における D 内の Joule 熱と言う. 電流密度 $i(ct, x)$ は単位体積当たりの電荷に電荷の流れの速度を掛けたものと自然にみなせる (定義 16.27 を参照). そして Lorentz 力への磁場の寄与は電荷の速度と直交するので, Lorentz 力がする仕事 (定義 16.19) への磁場の寄与はない. これらのことから Joule 熱 (16.65) は Lorentz 力が D 内の電荷に対してする単位時間当たりの仕事であると解釈できる.

命題 16.38 (電磁場のエネルギーと Joule 熱の関係)**.** 慣性時空座標系 Σ (定義 16.10) を設定し, その時空座標を (ct, x) とおき, Σ における電荷密度を $\rho(ct, x) \in \mathbb{R}$, 電流密度を $i(ct, x) \in \mathbb{R}^3$, 電場を $E(ct, x) \in \mathbb{R}^3$, 磁場を $B(ct, x) \in \mathbb{R}^3$ とおく. このとき滑らかな境界を持つ任意の有界開集合 $D \subseteq \mathbb{R}^3$ (定義 6.113) に対し,

$$\begin{aligned}&-\frac{d}{dt}\int_D \frac{1}{2}\varepsilon|E(ct,x)|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|B(ct,x)|^2 dx\\&= \int_D E(ct,x)\cdot i(ct,x)dx + \int_{\partial D}\frac{1}{\mu_0}(E(ct,x)\times B(ct,x))\cdot\nu(x)d\mu_{\partial D}(x)\end{aligned} \tag{16.66}$$

が成り立つ. ただし $\nu : \partial D \to \mathbb{R}^3$ は外向き単位法線ベクトル場 (定義 6.116) であり, $\mu_{\partial D}$ は ∂D の面積測度 (定義 6.85) である.

証明. Ampere-Maxwell の法則 (定義 16.27) より,

$$\begin{aligned}E(ct,x)\cdot i(ct,x) &= \frac{1}{\mu_0}E(ct,x)\cdot\mathrm{rot}_x(B)(ct,x) - \varepsilon_0 E(ct,x)\cdot\frac{\partial E}{\partial t}(ct,x)\\&= \frac{1}{\mu_0}E(ct,x)\cdot\mathrm{rot}_x(B)(ct,x) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0|E(ct,x)|^2\right)\end{aligned} \tag{16.67}$$

であり, Faraday の電磁誘導の法則 (16.27) より,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}|B(ct,x)|^2\right) = \frac{1}{\mu_0}B(ct,x)\cdot\frac{\partial B}{\partial t}(ct,x) = -\frac{1}{\mu_0}B(ct,x)\cdot\mathrm{rot}_x(E)(ct,x)$$

である. よって,

$$\begin{aligned}E(ct,x)\cdot i(ct,x) &= \frac{1}{\mu_0}E(ct,x)\cdot\mathrm{rot}_x(B)(ct,x) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0|E(ct,x)|^2\right),\\0 &= -\frac{1}{\mu_0}B(ct,x)\cdot\mathrm{rot}_x(E)(ct,x) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}|B(ct,x)|^2\right)\end{aligned}$$

である. 辺々足して,

$$\begin{aligned}E(ct,x)\cdot i(ct,x) &= \frac{1}{\mu_0}\left(E(ct,x)\cdot\mathrm{rot}_x(B)(ct,x) - B(ct,x)\cdot\mathrm{rot}_x(E)(ct,x)\right)\\&\quad - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0|E(ct,x)|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|B(ct,x)|^2\right)\end{aligned} \tag{16.68}$$

を得る. ここで $\varepsilon_{j,k,l}$ を Levi-Civita の記号 (定義 6.79) として,

$$
\begin{aligned}
&E(ct,x)\cdot \mathrm{rot}_x(B)(ct,x) - B(ct,x)\cdot \mathrm{rot}_x(E)(ct,x)\\
&= \sum_{j,k,l} \varepsilon_{j,k,l} E_j(ct,x)\frac{\partial B_l}{\partial x_k}(ct,x) - \sum_{j,k,l} \varepsilon_{j,k,l} B_j(ct,x)\frac{\partial E_l}{\partial x_k}(ct,x)\\
&= \sum_{j,k,l} \varepsilon_{j,k,l}\left(E_j(ct,x)\frac{\partial B_l}{\partial x_k}(ct,x) + \frac{\partial E_j}{\partial x_k}(ct,x)B_l(ct,x)\right)\\
&= \sum_{j,k,l} \varepsilon_{j,k,l}\frac{\partial}{\partial x_k}(E_j(ct,x)B_l(ct,x)) = -\mathrm{div}_x(E(ct,x)\times B(ct,x))
\end{aligned}
$$

であるから, (16.68) より,

$$
E(ct,x)\cdot i(ct,x) = -\frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}_x(E(ct,x)\times B(ct,x)) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0|E(ct,x)|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|B(ct,x)|^2\right) \tag{16.69}
$$

である. Lebesgue 優収束定理より,

$$
\frac{d}{dt}\int_D \frac{1}{2}\varepsilon_0|E(ct,x)|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|B(ct,x)|^2 dx = \int_D \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0|E(ct,x)|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|B(ct,x)|^2\right)dx \tag{16.70}
$$

であり, Gauss の発散定理 6.122 より,

$$
\int_D \mathrm{div}_x(E(ct,x)\times B(ct,x))dx = \int_{\partial D}(E(ct,x)\times B(ct,x))\cdot \nu(x)d\mu_{\partial D}(x) \tag{16.71}
$$

であるから, (16.69) の両辺を D 上で積分して, (16.70), (16.71) を代入すれば, (16.67) を得る. □

注意 16.39. 定理 16.38 の (16.67) より, D 内の電磁場のエネルギーの単位時間当たりの減少量は, D 内の Joule 熱と D の境界上の電磁場の積分

$$
\int_{\partial D}\frac{1}{\mu_0}(E(ct,x)\times B(ct,x))\cdot \nu(x)d\mu_{\partial D}(x) \tag{16.72}
$$

の和である. よってエネルギー保存の観点から (16.72) は単位時間当たりに D の境界を通過して D の外に出て行く電磁場のエネルギーと解釈できる.