Регрессионный анализ, часть 1

Математические методы в зоологии - на R

Марина Варфоломеева

осень 2014

Вы сможете

- посчитать и протестировать различные коэффициенты корреляции между переменными
- подобрать модель линейной регрессии и записать ее в виде уравнения
- проверить валидность модели при помощи t- или F-теста
- оценить долю изменчивости, которую объясняет модель, при помощи R^2

Описание зависимости между переменными

Пример: усыхающие личинки мучных хрущаков

Как зависит потеря влаги личинками малого мучного хрущака *Tribolium confusum* от влажности воздуха?

- 9 экспериментов, продолжительность 6 дней
- разная относительная влажность воздуха,
- измерена потеря влаги, мг

(Nelson, 1964; данные из Sokal, Rohlf, 1997, табл. 14.1 по Logan, 2010. глава 8, пример 8с; Данные в файлах nelson.xlsx и nelson.csv)

Малый мучной хрущак *Tribolium confusum*, photo by Sarefo, CC BY-SA

Читаем данные из файла и знакомимся с ними

```
# setwd("C:/mathmethr/week2") # установите рабочую директорию,
# или используйте полный путь к файлу
library(XLConnect)
nelson <- readWorksheetFromFile("./data/nelson.xlsx", sheet = 1)
## или из .csv
# nelson <- read.table(file="./data/nelson.xlsx", header = TRUE, sep = "\t", dec =
str(nelson)
```

```
# 'data.frame': 9 obs. of  2 variables:
#  $ humidity  : num  0 12 29.5 43 53 62.5 75.5 85 93
#  $ weightloss: num  8.98 8.14 6.67 6.08 5.9 5.83 4.68 4.2 3.72
```

```
head(nelson)
```

```
#   humidity weightloss
# 1      0.0       8.98
# 2     12.0       8.14
# 3     29.5       6.67
# 4     43.0       6.08
# 5     53.0       5.90
# 6     62.5       5.83
```

Связана ли потеря веса со влажностью?

Корреляция Пирсона

- Оценивает только линейную составляющую связи
- Параметрические тесты значимости применимы если переменные распределены нормально

Ранговые коэффициенты корреляции (кор. Кендалла и кор. Спирмена)

- Не зависят от формы распределения переменных
- Тест на значимость непараметрический

Задача: оцените силу связи

- Посчитайте разные коэффициенты корреляции между потерей веса и влажностью
- Чем отличаются результаты функций `cor()`, `cor.test()`?

Решение

```
cor(nelson$humidity, nelson$weightloss) # корреляция Пирсона
```

```
# [1] -0.987
```

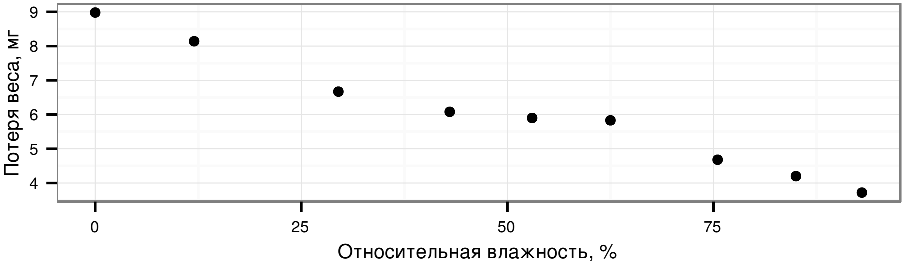
```
cor.test(nelson$humidity, nelson$weightloss,
         alternative = "two.sided", method = "pearson")
```

```
#
#   Pearson's product-moment correlation
#
# data:  nelson$humidity and nelson$weightloss
# t = -16.3, df = 7, p-value = 0.0000007816
# alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
# 95 percent confidence interval:
#  -0.997 -0.938
# sample estimates:
#    cor
# -0.987
```

```
# cor(nelson$humidity, nelson$weightloss, method = "kendall")
# cor.test(nelson$humidity, nelson$weightloss,
#          alternative = "two.sided", method = "kendall")
# cor(nelson$humidity, nelson$weightloss, method = "spearman")
# cor.test(nelson$humidity, nelson$weightloss,
```

Как зависит потеря веса от влажности?

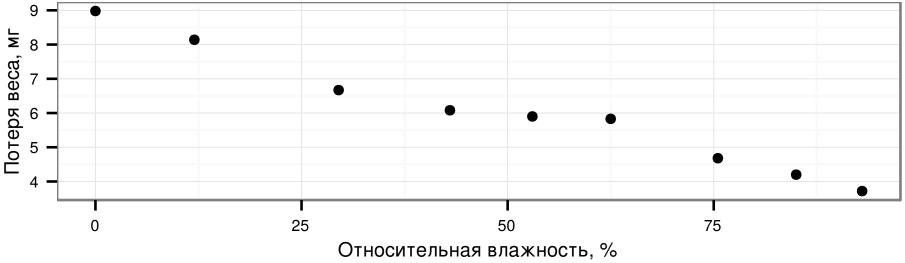
```
library(ggplot2);theme_set(theme_bw(base_size = 8))
p_nelson <- ggplot(data=nelson, aes(x = humidity, y = weightloss)) +
  geom_point() +
  labs(x = ''Относительная влажность, %'', y = ''Потеря веса, мг'')
p_nelson
```



Как зависит потеря веса от влажности?

$$weightloss_i = b_0 + b_1 humidity_i$$

```
library(ggplot2);theme_set(theme_bw(base_size = 8))
p_nelson <- ggplot(data=nelson, aes(x = humidity, y = weightloss)) +
  geom_point() +
  labs(x = ''Относительная влажность, %'', y = ''Потеря веса, мг'')
p_nelson
```



Линейная регрессия

Линейная регрессия

- простая

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$$

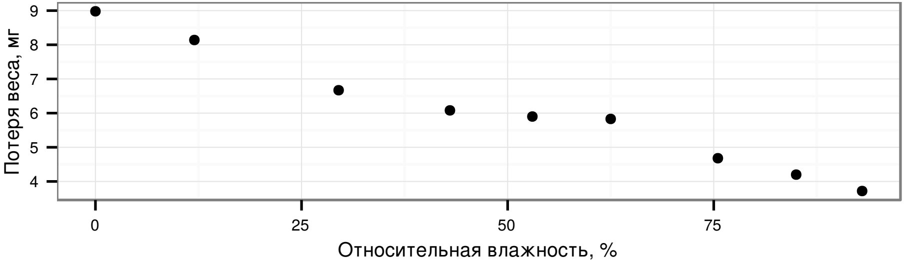
- множественная

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \epsilon_i$$

Как провести линию регрессии?

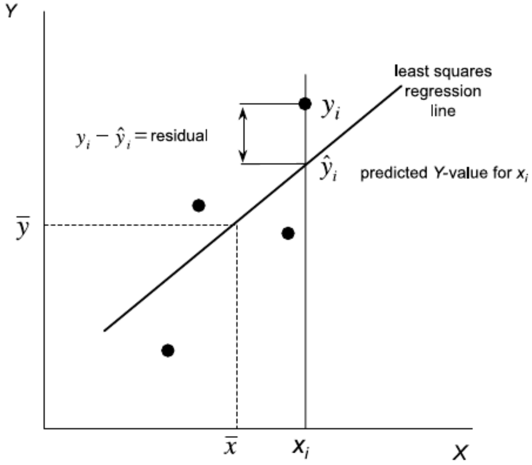
$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$ - модель регрессии
$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$ - оценка модели
нужно оценить β_0, β_1 и σ^2

- Метод наименьших квадратов (Ordinary Least Squares)
- Методы максимального правдоподобия (Maximum Likelihood, REstricted Maximum Likelihood)



Метод наименьших квадратов

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$ - модель регрессии
$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$ - оценка модели
нужно оценить β_0, β_1 и σ^2



Линия регрессии по методу наименьших квадратов (из кн. Quinn, Keough, 2002, стр. 85, рис. 5.6 а)

Оценки параметров линейной регрессии

Параметры	Оценки параметров	Стандартные ошибки оценок
β_1	$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$	$SE_{b_1} = \sqrt{\frac{MS_e}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$
β_0	$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}$	$SE_{b_0} = \sqrt{MS_e[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}]}$
ϵ_i	$e_i = y_i - \hat{y}_i$	$\approx \sqrt{MS_e}$

Таблица из кн. Quinn, Keough, 2002, стр. 86, табл. 5.2

Оценки параметров линейной регрессии

- подбирают так, чтобы минимизировать остатки $\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$

Стандартные ошибки коэффициентов

- используются для построения доверительных интервалов
- нужны для статистических тестов

Коэффициенты регрессии

Интерпретация коэффициентов регрессии

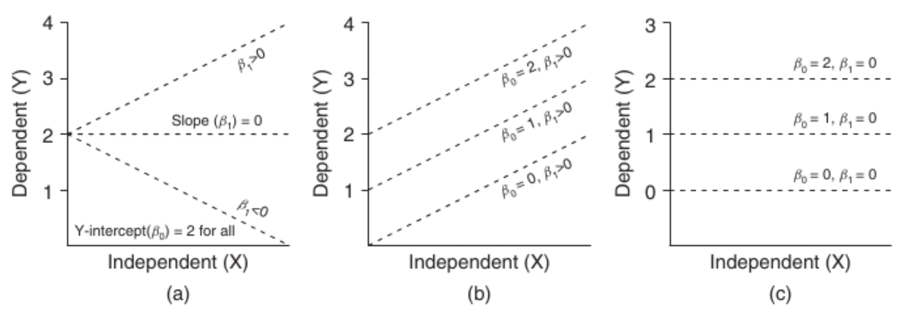


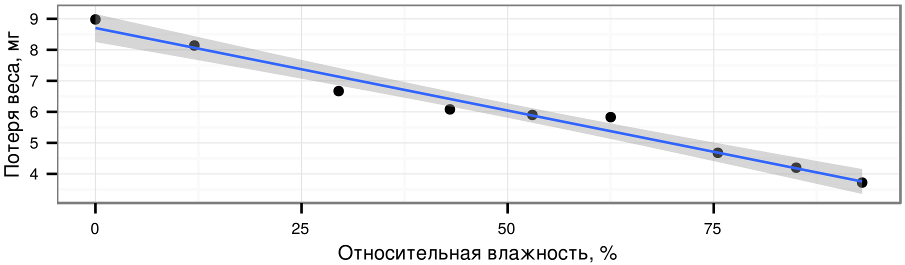
Рисунок из кн. Logan, 2010, стр. 170, рис. 8.2

Для сравнения разных моделей - стандартизованные коэффициенты

- Не зависят от масштаба измерений x и y
- Можно вычислить, зная обычные коэффициенты и их стандартные отклонения $b_1^* = b_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$
- Можно вычислить, посчитав регрессию по стандартизованным данным

Добавим линию регрессии на график

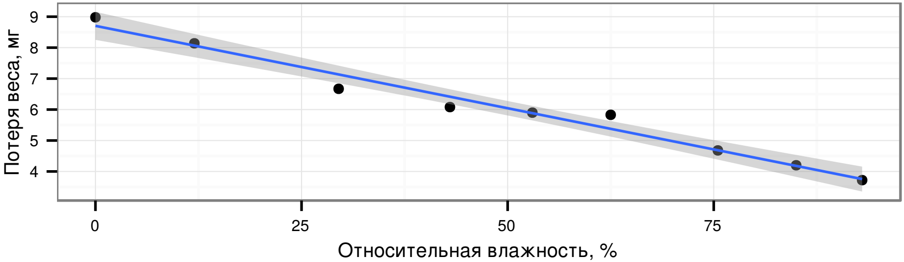
```
p_nelson + geom_smooth(method = ''lm'')
```



Задача: как вы думаете, что это за серая область вокруг линии регрессии?

- Это...

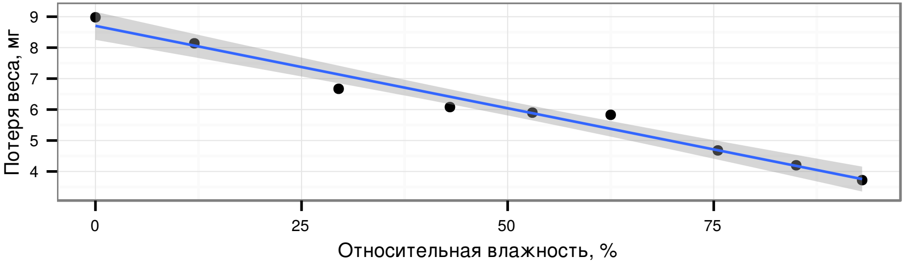
```
p_nelson + geom_smooth(method = ''lm'')
```



Задача: как вы думаете, что это за серая область вокруг линии регрессии?

- Это...
  - 95% доверительная зона регрессии

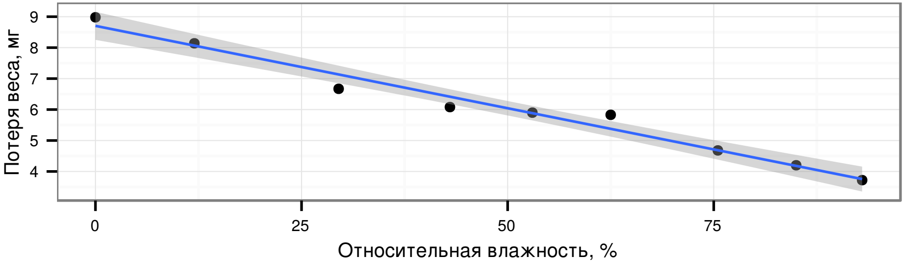
```
p_nelson + geom_smooth(method = ''lm'')
```



Задача: как вы думаете, что это за серая область вокруг линии регрессии?

- Это...
  - 95% доверительная зона регрессии
  - В ней с 95% вероятностью лежит регрессионная прямая

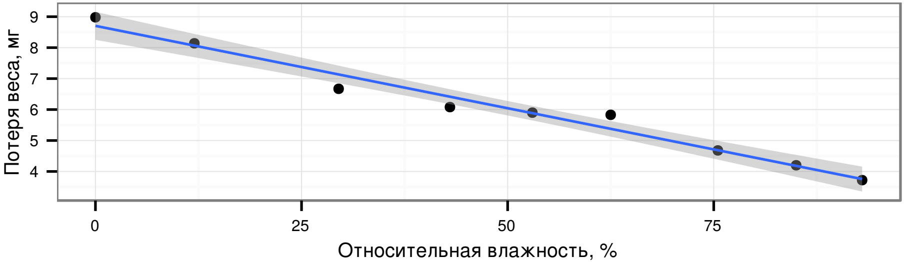
```
p_nelson + geom_smooth(method = "lm")
```



Задача: как вы думаете, что это за серая область вокруг линии регрессии?

- Это...
  - 95% доверительная зона регрессии
  - В ней с 95% вероятностью лежит регрессионная прямая
  - Возникает из-за неопределенности оценок коэффициентов регрессии

```
p_nelson + geom_smooth(method = "lm")
```



Как в R задать формулу линейной регрессии

`lm(формула, данные)` - функция для подбора регрессионных моделей

Формат формулы: `зависимая_переменная ~ модель`

- $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$ (простая линейная регрессия с b_0 (intercept))
  - Y ~ X
  - Y ~ 1 + X
  - Y ~ X + 1
- $\hat{y}_i = b_1 x_i$ (простая линейная регрессия без b_0)
  - Y ~ X - 1
  - Y ~ -1 + X
- $\hat{y}_i = b_0$ (уменьшенная модель, линейная регрессия Y от b_0)
  - Y ~ 1
  - Y ~ 1 - X

Задача: Запишите в нотации R эти модели линейных регрессий

- $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i}$

(множественная линейная регрессия с b_0)

- $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_3 x_{3i}$

(уменьшенная модель множественной линейной регрессии, без x_2)

Решение

- $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i}$

(множественная линейная регрессия с b_0)

```
Y ~ X1 + X2 + X3
Y ~ 1 + X1 + X2 + X3
```

- $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_3 x_{3i}$

(уменьшенная модель множественной линейной регрессии, без x_2)

```
Y ~ X1 + X3
Y ~ 1 + X1 + X3
```

Подбираем параметры линейной модели

```
nelson_lm <- lm(weightloss ~ humidity, nelson)
summary(nelson_lm)
```

```
#
# Call:
# lm(formula = weightloss ~ humidity, data = nelson)
#
# Residuals:
#     Min      1Q  Median      3Q     Max
# -0.4640 -0.0344  0.0167  0.0746  0.4524
#
# Coefficients:
#             Estimate Std. Error t value      Pr(>|t|)
# (Intercept)  8.70403    0.19156    45.4 0.00000000065 ***
# humidity    -0.05322    0.00326   -16.4 0.00000078161 ***
# ---
# Signif. codes:
# 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
#
# Residual standard error: 0.297 on 7 degrees of freedom
# Multiple R-squared:  0.974,   Adjusted R-squared:  0.971
# F-statistic:  267 on 1 and 7 DF,  p-value: 0.000000782
```

Задача: Назовите, чему равны коэффициенты линейной регрессии?

- Коэффициенты линейной регрессии b_0 и b_1...

```
#
# Call:
# lm(formula = weightloss ~ humidity, data = nelson)
#
# Residuals:
#     Min      1Q  Median      3Q     Max
# -0.4640 -0.0344  0.0167  0.0746  0.4524
#
# Coefficients:
#             Estimate Std. Error t value      Pr(>|t|)
# (Intercept)  8.70403    0.19156    45.4 0.00000000065 ***
# humidity    -0.05322    0.00326   -16.4 0.00000078161 ***
# ---
# Signif. codes:
# 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
#
# Residual standard error: 0.297 on 7 degrees of freedom
# Multiple R-squared:  0.974,   Adjusted R-squared:  0.971
# F-statistic:  267 on 1 and 7 DF,  p-value: 0.000000782
```

Задача: Назовите, чему равны коэффициенты линейной регрессии?

- Коэффициенты линейной регрессии b_0 и b_1...
  - $b_0 = 8.704$

```
#
# Call:
# lm(formula = weightloss ~ humidity, data = nelson)
#
# Residuals:
#     Min      1Q  Median      3Q     Max
# -0.4640 -0.0344  0.0167  0.0746  0.4524
#
# Coefficients:
#             Estimate Std. Error t value      Pr(>|t|)
# (Intercept)  8.70403    0.19156    45.4 0.00000000065 ***
# humidity    -0.05322    0.00326   -16.4 0.00000078161 ***
# ---
# Signif. codes:
# 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
#
# Residual standard error: 0.297 on 7 degrees of freedom
# Multiple R-squared:  0.974,   Adjusted R-squared:  0.971
# F-statistic:  267 on 1 and 7 DF,  p-value: 0.000000782
```

Задача: Назовите, чему равны коэффициенты линейной регрессии?

- Коэффициенты линейной регрессии b_0 и b_1...
  - b_0 = 8.704
  - b_1 = -0.053

```
#
# Call:
# lm(formula = weightloss ~ humidity, data = nelson)
#
# Residuals:
#     Min      1Q  Median      3Q     Max
# -0.4640 -0.0344  0.0167  0.0746  0.4524
#
# Coefficients:
#             Estimate Std. Error t value     Pr(>|t|)
# (Intercept)  8.70403    0.19156    45.4 0.00000000065 ***
# humidity    -0.05322    0.00326   -16.4 0.00000078161 ***
# ---
# Signif. codes:
# 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
#
# Residual standard error: 0.297 on 7 degrees of freedom
# Multiple R-squared:  0.974,   Adjusted R-squared:  0.971
# F-statistic:  267 on 1 and 7 DF,  p-value: 0.000000782
```

Неопределенность оценок коэффициентов

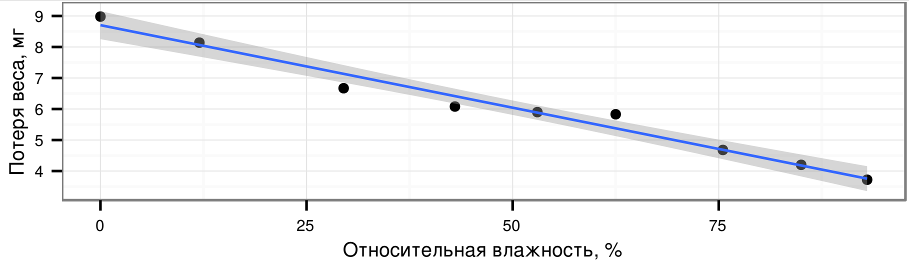
Неопределенность оценок коэффициентов

Доверительный интервал коэффициента

- зона, в которой с $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ вероятностью содержится среднее значение коэффициента
- $b_1 \pm t_{\alpha, df=n-2} SE_{b_1}$
- $\alpha = 0.05 => (1 - 0.05) \cdot 100\% = 95\%$ интервал

Доверительная зона регрессии

- зона, в которой с $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ вероятностью лежит регрессионная прямая



Находим доверительные интервалы коэффициентов

```
# оценки коэффициентов отдельно
coef(nelson_lm)
```

```
# (Intercept)    humidity
#      8.7040     -0.0532
```

```
# доверительные интервалы коэффициентов
confint(nelson_lm)
```

```
#                2.5 %  97.5 %
# (Intercept)  8.2510  9.1570
# humidity    -0.0609 -0.0455
```

Предсказываем Y при заданном X

Какова средняя потеря веса при заданной влажности?

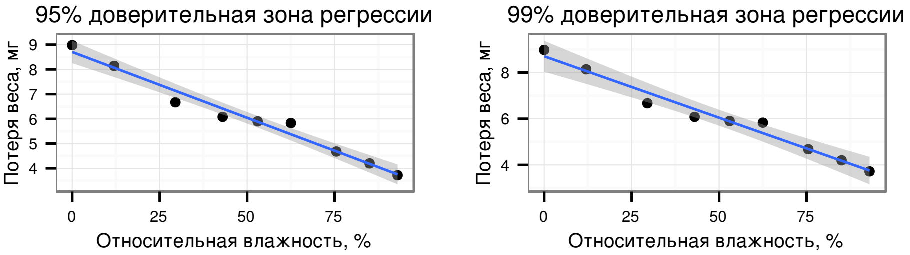
```
newdata <- data.frame(humidity = c(50, 100)) # значения, для которых предсказываем
(pr1 <- predict(nelson_lm, newdata, interval = "confidence", se = TRUE))
```

```
# $fit
#    fit  lwr  upr
# 1 6.04 5.81 6.28
# 2 3.38 2.93 3.83
#
# $se.fit
#      1      2
# 0.0989 0.1894
#
# $df
# [1] 7
#
# $residual.scale
# [1] 0.297
```

- При 50 и 100% относительной влажности ожидаемая средняя потеря веса жуков будет 6 $\pm$ 0.2 и 3.4 $\pm$ 0.4, соответственно.

Строим доверительную зону регрессии

```
library(gridExtra)
grid.arrange(p_nelson + geom_smooth(method = ''lm'') +
               labs (title = ''95% доверительная зона регрессии''),
             p_nelson + geom_smooth(method = ''lm'', level = 0.99) +
               labs (title = ''99% доверительная зона регрессии''),
             ncol = 2)
```



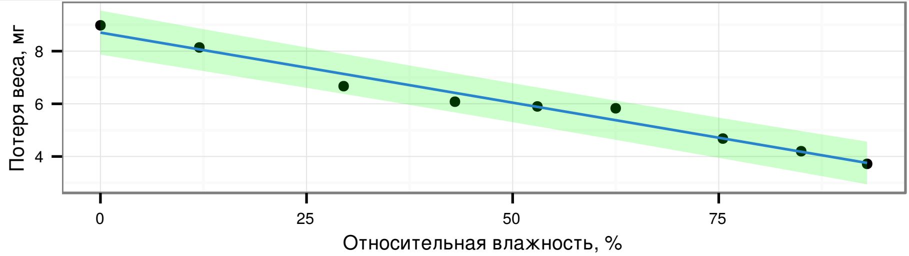
Неопределенность оценок предсказанных значений

Доверительный интервал к предсказанному значению

- зона в которую попадают $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ значений $\hat{y}_i$ при данном x_i
- $\hat{y}_i \pm t_{0.05,n-2} SE_{\hat{y}_i}$
- $SE_{\hat{y}} = \sqrt{MS_e[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{prediction} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}]}$

Доверительная область значений регрессии

- зона, в которую попадает $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ всех предсказанных значений



Предсказываем изменение Y для 95% наблюдений при заданном X

В каких пределах находится потеря веса у 95% жуков при заданной влажности?

```
newdata <- data.frame(humidity = c(50, 100)) # новые данные для предсказания значе
(pr2 <- predict(nelson_lm, newdata, interval = "prediction", se = TRUE))
```

```
# $fit
#    fit  lwr  upr
# 1 6.04 5.30 6.78
# 2 3.38 2.55 4.21
#
# $se.fit
#      1      2
# 0.0989 0.1894
#
# $df
# [1] 7
#
# $residual.scale
# [1] 0.297
```

- У 95% жуков при 50 и 100% относительной влажности будет потеря веса будет в пределах 6 ± 0.7 и 3.4 ± 0.8, соответственно.

Данные для доверительной области значений

Предсказанные значения для исходных данных объединим с исходными данными в новом датафрейме - для графиков

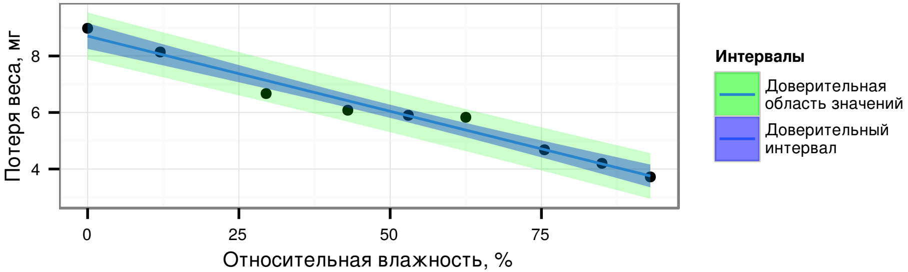
```
(pr_all <- predict(nelson_lm, interval = "prediction"))
```

```
#    fit  lwr  upr
# 1 8.70 7.87 9.54
# 2 8.07 7.27 8.86
# 3 7.13 6.38 7.89
# 4 6.42 5.67 7.16
# 5 5.88 5.14 6.62
# 6 5.38 4.63 6.12
# 7 4.69 3.92 5.45
# 8 4.18 3.39 4.97
# 9 3.75 2.95 4.56
```

```
nelson_with_pred <- data.frame(nelson, pr_all)
```

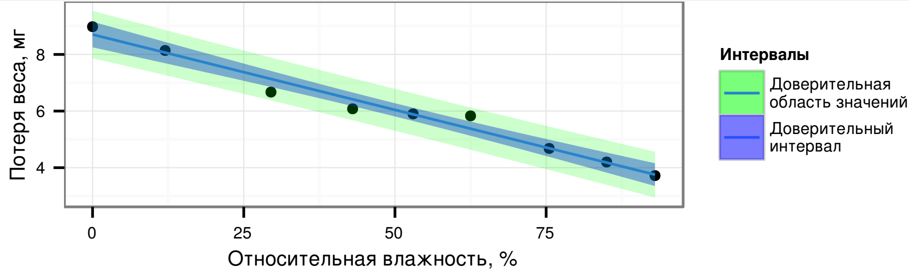
Строим доверительную область значений и доверительный интервал одновременно

```
p_nelson + geom_smooth(method = "lm",
                       aes(fill = "Доверительный \nинтервал"),
                       alpha = 0.4) +
  geom_ribbon(data = nelson_with_pred,
              aes(y = fit, ymin = lwr, ymax = upr,
                  fill = "Доверительная \nобласть значений"),
              alpha = 0.2) +
  scale_fill_manual('Интервалы', values = c('green', 'blue'))
```



Осторожно!

Вне интервала значений X ничего предсказать нельзя!



Проверка валидности модели

Проверка при помощи t-критерия

t-критерий

Нулевая гипотеза $H_0 : b_1 = \theta, \theta = 0$
Тест

$$t = \frac{b_1 - \theta}{SE_{b_1}}$$

Число степеней свободы $df = n - 2$

Проверка коэффициентов с помощью t-критерия

```
summary(nelson_lm)
```

```
#
# Call:
# lm(formula = weightloss ~ humidity, data = nelson)
#
# Residuals:
#     Min      1Q  Median      3Q     Max
# -0.4640 -0.0344  0.0167  0.0746  0.4524
#
# Coefficients:
#             Estimate Std. Error t value      Pr(>|t|)
# (Intercept)  8.70403    0.19156    45.4 0.00000000065 ***
# humidity    -0.05322    0.00326   -16.4 0.00000078161 ***
# ---
# Signif. codes:
# 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
#
# Residual standard error: 0.297 on 7 degrees of freedom
# Multiple R-squared:  0.974,   Adjusted R-squared:  0.971
# F-statistic:  267 on 1 and 7 DF,  p-value: 0.000000782
```

- Увеличение относительной влажности привело к достоверному замедлению потери веса жуками ($b_1 = -0.053$, $t = -16.35$, $p < 0.01$)

Проверка при помощи F-критерия

F-критерий

Нулевая гипотеза $H_0 : \beta_1 = 0$
Тест

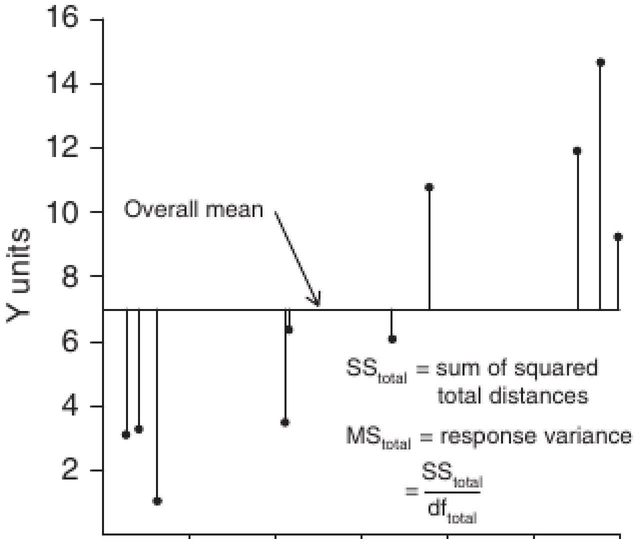
$$F = \frac{MS_{regression}}{MS_{error}}$$

Число степеней свободы $df_{regression}$, df_{error}

- Та же самая нулевая гипотеза, что и у t. Как так получается?

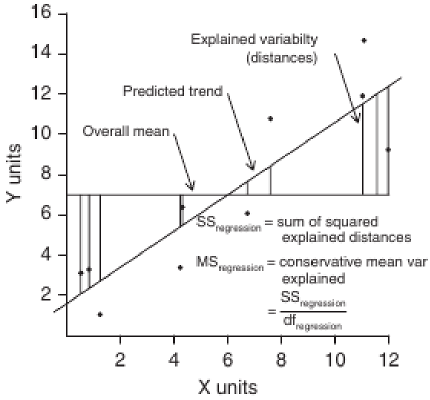
Общая изменчивость

Общая изменчивость - SS_{total}, отклонения от общего среднего значения

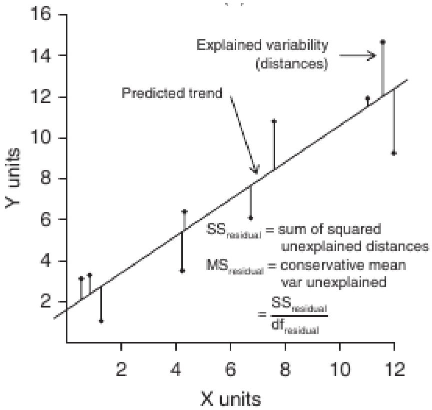


Общая изменчивость

$$SS_{total} = SS_{regression} + SS_{error}$$



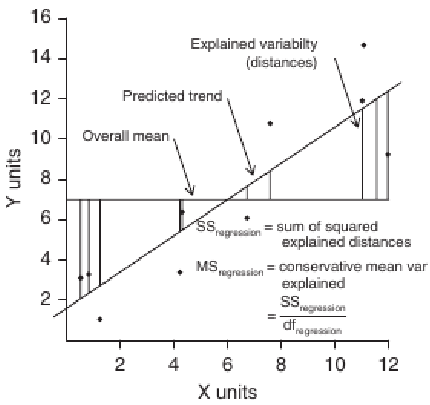
Объясненная изменчивость



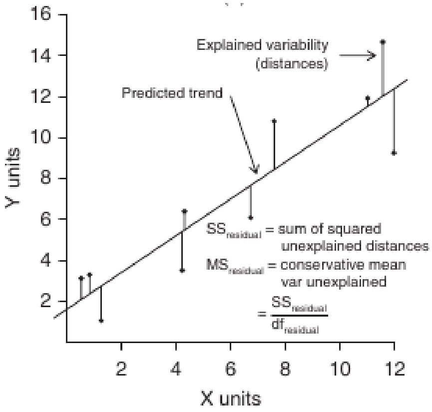
Остаточная изменчивость

Если зависимости нет, $b_1 = 0$

Тогда $\hat{y}_i = \bar{y}_i$ и $MS_{regression} \approx MS_{error}$



Объясненная изменчивость



Остаточная изменчивость

Что оценивают средние квадраты отклонений?

Источник изменчивости	Суммы квадратов отклонений SS	Число степеней свободы df	Средний квадрат отклонений MS	Ожидаемый средний квадрат
Регрессия	$\sum(\bar{y} - \hat{y}_i)^2$	1	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{y}-\hat{y}_i)^2}{1}$	$\sigma_\epsilon^2 + \beta_1{}^2 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
Остаточная	$\sum(y_i - \hat{y}_i)^2$	$n-2$	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-2}$	σ_ϵ^2
Общая	$\sum(\bar{y} - y_i)^2$	$n-1$		

Если $b_1 = 0$, тогда $\hat{y}_i = \bar{y}_i$ и $MS_{regression} \approx MS_{error}$

Тестируем:

$$F = \frac{MS_{regression}}{MS_{error}}$$

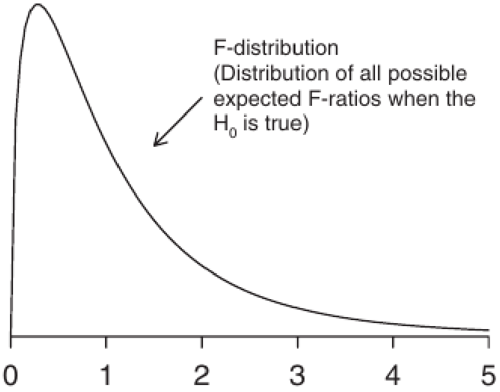
F-критерий и распределение F-статистики

F - соотношение объясненной и не объясненной изменчивости

$$F = \frac{MS_{regression}}{MS_{error}}$$

Зависит от

- α
- $df_{regression}$
- df_{error}



Распределение F-статистики при справедливой H_0 (с изменениями из кн. Logan, 2010, стр. 172, рис. 8.3 d)

Таблица результатов дисперсионного анализа

Источник изменчивости	SS	df	MS	F
Регрессия	$SS_r = \sum(\bar{y} - \hat{y}_i)^2$	$df_r = 1$	$MS_r = \frac{SS_r}{df_r}$	$F_{df_r, df_e} = \frac{MS_r}{MS_e}$
Остаточная	$SS_e = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$	$df_e = n - 2$	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$	
Общая	$SS_t = \sum(\bar{y} - y_i)^2$	$df_t = n - 1$		

- Минимальное упоминание в тексте - F_{df_r, df_e}, p

Проверяем валидность модели при помощи F-критерия

```
nelson_aov <- aov(nelson_lm)
summary(nelson_aov)
```

```
#               Df Sum Sq Mean Sq F value     Pr(>F)
# humidity       1  23.51   23.51     267 0.00000078 ***
# Residuals      7   0.62    0.09
# ---
# Signif. codes:
# 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

- Количество влаги, потерянной жуками в период эксперимента, достоверно зависело от уровня относительной влажности ($F_{1,7} = 267$, $p < 0.01$).

Оценка качества подгонки модели

Коэффициент детерминации

Коэффициент детерминации (R^2)

доля общей изменчивости, объясненная линейной связью x и y

$$R^2 = \frac{SS_r}{SS_t}$$

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

Иначе рассчитывается как $R^2 = r^2$

Коэффициент детерминации можно найти в сводке модели

```
summary(nelson_lm)
```

```
#
# Call:
# lm(formula = weightloss ~ humidity, data = nelson)
#
# Residuals:
#     Min      1Q  Median      3Q     Max
# -0.4640 -0.0344  0.0167  0.0746  0.4524
#
# Coefficients:
#             Estimate Std. Error t value      Pr(>|t|)
# (Intercept)  8.70403    0.19156    45.4 0.00000000065 ***
# humidity    -0.05322    0.00326   -16.4 0.00000078161 ***
# ---
# Signif. codes:
# 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
#
# Residual standard error: 0.297 on 7 degrees of freedom
# Multiple R-squared:  0.974,   Adjusted R-squared:  0.971
# F-statistic:  267 on 1 and 7 DF,  p-value: 0.000000782
```

Будьте внимательны с R^2!

Сравнение качества подгонки моделей

Не сравнивайте R^2 моделей с разным числом параметров,
для этого есть $R^2_{adjusted}$

Take home messages

- Модель простой линейной регрессии $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$

Take home messages

- Модель простой линейной регрессии $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$
- В оценке коэффициентов регрессии и предсказанных значений существует неопределенность. Доверительные интервалы можно расчитать, зная стандартные ошибки.

Take home messages

- Модель простой линейной регрессии $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$
- В оценке коэффициентов регрессии и предсказанных значений существует неопределенность. Доверительные интервалы можно расчитать, зная стандартные ошибки.
- Валидность модели линейной регрессии можно проверить при помощи t- или F-теста. $H_0 : \beta_1 = 0$

Take home messages

- Модель простой линейной регрессии $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$
- В оценке коэффициентов регрессии и предсказанных значений существует неопределенность. Доверительные интервалы можно расчитать, зная стандартные ошибки.
- Валидность модели линейной регрессии можно проверить при помощи t- или F-теста. $H_0 : \beta_1 = 0$
- Качество подгонки модели можно оценить при помощи коэффициента детерминации R^2

Дополнительные ресурсы

- Учебники
- Гланц, 1999, стр. 221-244
- Open Intro to Statistics: Chapter 7. Introduction to linear regression, pp. 315-353.
- Quinn, Keough, 2002, pp. 78-110
- Logan, 2010, pp. 170-207
- Sokal, Rohlf, 1995, pp. 451-491
- Zar, 1999, pp. 328-355
- Упражнения для тренировки
- OpenIntro Labs, Lab 7: Introduction to linear regression (Осторожно, они используют базовую графику а не `ggplot`)
  - Обычный вариант, упражнения 1—4
  - Интерактивный вариант на Data Camp, до вопроса 4