Eaton Kortum モデルの理論と計算

渡部雄太

IDE-JETRO

2023/11/18

1. 背景とモチベーション
2. モデル
3. コンピュテーション
4. お役立ち情報
5. 実習課題

このセッションのための URL

https://github.com/yutawatabe/pyCGE/

1. 背景とモチベーション
2. モデル
3. コンピュテーション
4. お役立ち情報
5. 実習課題

なぜ Eaton Kortum モデルなのか？

リカードモデルの復権

- リカードモデルは、あくまで理論的なツールであって、実証には役に立たないモデルだと考えられてきた。
- 学部生には有用だが、大学院生はもっと複雑なモデルを勉強すべきだろう、という理解。

これを刷新したのが Eaton and Kortum (2002) のモデルになる。

なぜ Eaton Kortum モデルなのか？

Eaton and Kortum (2002) では以下のことを行う。

- Dornbush, Fisher and Samuelson (1977) の二国多財リカードモデルを多国多財モデルに拡張。
- 拡張のため、**確率的な生産性**を導入する。
- 一般均衡モデルのパラメータを**モデルと整合的な形で推定する。**
- そのパラメーターを変化させることによって、**反実仮想を行う。**

この論文によって、ミクロ的に基礎づけられた定量的な貿易モデルがメインストリームにやってきた。

EK モデルとは

EK モデルは多国多財リカードモデルに地理的障壁を導入することによって、以下のことを同時に説明しようとする：

1. 貿易は距離がはなれるにしたがって劇的に減少する
2. 同じ財でも地域によって価格は異なる
3. 要素価格も地域によって異なる
4. 相対的な生産性は産業によって異なる

このモデルでは貿易を促進する比較優位の力と、貿易を押し留める貿易費用の力の二つが働いている。

設定

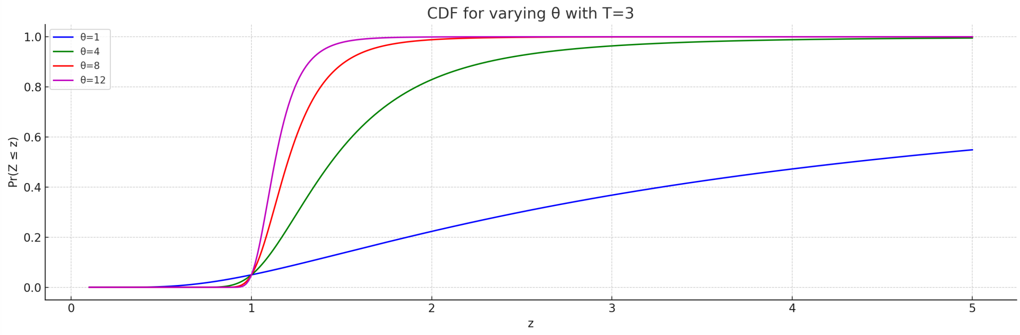
- N ヶ国、 $(i = 1, \ldots, N)$
- 連続に分布する財 $(\nu \in [0,1])$
- 代替の弾力性 $\sigma > 1$ を持つ CES 選好: $U_i = \left(\int_0^1 q_i(\nu)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}, d\nu \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$
- 一つの生産要素（労働）：L_i
- 中間財も存在する場合もある（時間があれば説明）
- 全ての商品の生産に使用される共通の投入の単位コスト:c_i
- 中間財がない場合は c_i は国 i での賃金 (w_i) に等しい

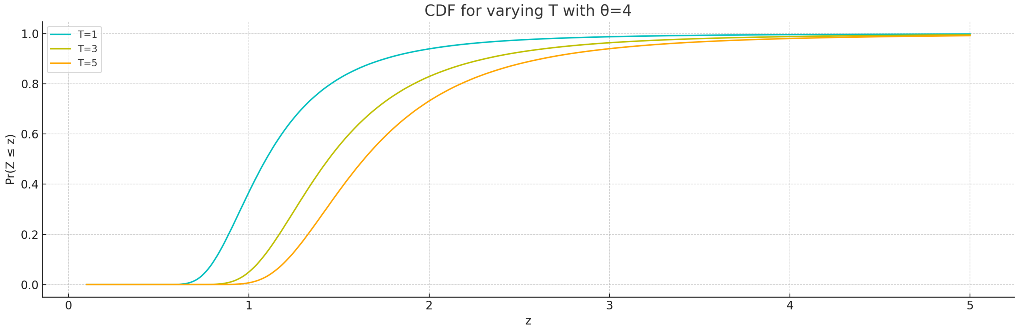
設定: 技術

規模に対する収穫一定の生産性

- $Z_i(\nu)$ は、国 i で ν を生産する（任意の）企業の生産性
- $Z_i(\nu)$ は、**フレシェ分布**から独立にドローされる：
  ($\Pr(Z_i \leq z) = F_i(z) = e^{-T_i z^{-\theta}}$)、ただし $\theta > \sigma - 1$。
- 国ごとに T_i は異なるが、θ は共通。

貿易は氷塊輸送費用 (d_{ni}) に従う。すべての市場は完全競争。


CDF for varying θ with T=3
θ=1
θ=4
θ=8
θ=12
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Pr(Z ≤ z)
0
1
2
3
4
5
z


CDF for varying T with θ=4
T=1
T=3
T=5
Pr(Z ≤ z)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
1
2
3
4
5
z

EK モデルでの絶対優位、比較優位

EK モデルでは産業（財）の優位性は確率的に表現される

- 特定の国、産業（財）の生産性を仮定しない
- それぞれの国における**生産性の分布**について仮定を置く

EK モデルにおいては

- T_i は国 i の生産性の絶対優位を表現している
- θ は世界の比較優位の度合いを表している

生産者の価格付け

財 ν、その生産性 $Z_i(\nu)$ と投入価格 c_i を組み合わせると、生産性 $Z_i(\nu)$ を持つ国 i の限界費用は $c_i/Z(\nu)$ となる。さらに氷塊輸送費用＋完全競争を組み合わせると、国 i から国 n に輸出される財 Z の価格は c.i.f で:

$$p_{ni}(\nu) = \frac{c_i d_{ni}}{Z_i(\nu)}$$

になる。n と i の順番に注意！

生産者の価格付け

さらに n 国の消費者は財を一番安い価格で買う（完全競争）ので

$$p_n(\nu) = min_i\{p_{ni}(\nu)\}$$

となる（氷塊輸送費用が三角不等式を満たすことを暗黙のうちに仮定)。財は生産性を除いて対称であるため、インデックス ν ではなく、$Z = (Z_1, ..., Z_N)$ を使う。Z が確率変数なので、大文字になっている。

EK モデルの含意とは？

- 個々の財（産業）の貿易ついては分析しない
- ある財が貿易される**確率**について分析する
- また個々の財が集計された貿易額についての数式を提供する
- 集計の結果から出てくる価格指数、厚生を計算する数式を提供する

ただ EK モデルを多産業化（財と産業の区別がある）すると色々なことができる。詳しくは Costinot, Donaldson and Komunjer (2012) を参照。

貿易額の定式化（重力モデル）

これからモデルの色々な性質を証明していく。最終的にたどり着きたいのは以下の貿易額の式になる:

$$\frac{X_{ni}}{X_n} = \frac{T_i(c_i d_{ni})^{-\theta}}{\Phi_n} = \pi_{ni} \tag{1}$$

ここで X_{ni} は国 i から国 n への輸出額で、X_n は国 n の総消費。$\Phi_n = \sum_{j=1}^{N} T_j(c_j d_{nj})^{-\theta}$ となる。また θ が貿易弾力性になる。これからの長い証明は全てこれのため。

貿易額の定式化（重力モデル）

総生産 Y_i は $\sum_{m=1}^{N} X_{mi}$ なので:

$$Y_i = \sum_{m=1}^{N} \frac{T_i (c_i d_{mi})^{-\theta} X_m}{\Phi_m} = T_i (c_i)^{-\theta} \sum_{m=1}^{N} \frac{d_{mi}^{-\theta} X_m}{\Phi_m}.$$

そうすると貿易額は

$$X_{ni} = \frac{T_i (c_i d_{ni})^{-\theta}}{\Phi_n} X_n = \frac{Y_i}{\sum_{m=1}^{N} \frac{d_{mi}^{-\theta} X_m}{\Phi_m}} d_{ni}^{-\theta} \frac{X_n}{\Phi_n}.$$

いわゆる Structural gravity と同相になる。

価格指数

反実仮想のために、以下の式も重要になる。これも性質を証明する流れで出てくるが、先に説明しておく。国 i の消費者価格指数は:

$$P_n = \left(\int_0^1 p(\nu)^{1-\sigma} d\nu \right)^{1/(1-\sigma)} = \gamma \Phi_n^{-1/\theta}$$

となる。ここで $\Phi_n = \sum_{j=1}^{N} T_j (c_j d_{nj})^{-\theta}$ で γ はパラメータ θ, σ に依存する定数。

四つの性質

これから四つの性質を示していく

- 国 n が買う財の価格分布は $G_n(\bar{p}) = 1 - exp(-\Phi_n \bar{p}^{\theta})$。これはパラメーター T が Φ_n のフレシェ分布と一致する。
- ある財が国 i から国 n に輸出される確率は $\pi_{ni} = \frac{T_i(c_i d_{ni})^{-\theta}}{\Phi_n}$ となる。
- 国 n においての財の価格分布はその財が実際にどの国から輸出されたかに依存しない。つまり π_{ni} は輸出確率であるとともに、輸出額のシェアでもある。
- 国の価格指数は $P_n = \Gamma\left(\frac{1-\sigma}{\theta} + 1\right)\Phi_n^{-1/\theta}$ で表現される。
$\Gamma\left(\frac{1-\sigma}{\theta} + 1\right)$ は定数。

価格分布

価格 $(p_{ni}(Z_i))$ が $\bar{p}$ より小さい確率を $G_{ni}(\bar{p})$ と表す：

$$G_{ni}(\bar{p}) = \Pr\left(\bar{p} \geq \frac{c_i d_{ni}}{Z_i}\right) = \Pr\left(Z_i \geq \frac{c_i d_{ni}}{\bar{p}}\right) = 1 - F_i\left(\frac{c_i d_{ni}}{\bar{p}}\right)$$

また $p_n(Z)$ を $p_{n1}(Z)$、...、$p_{nN}(Z)$ の最小値とし、国 n での価格分布を $G_n(\bar{p})$ とする。これは

$$G_n(\bar{p}) = 1 - e^{(-\Phi_n \bar{p}^\theta)} \tag{2}$$

ここで、$\Phi = \sum_{i=1}^{N} T_i(c_i d_{ni})^{-\theta}$。

価格分布

込み入る前に Notation の話をする

- ここで p、$p_{ni}(Z_i)$,p_{ni},p_n などは**確率変数**。つまり分布を持ち、固定された値ではない。
- $G_{ni}(\bar{p})$ で使われる $\bar{p}$ などは**定数**。あとで $\tilde{p}$ も定数として使う。

価格分布

$$
\begin{aligned}
\Pr(p_n \le \bar{p}) &= 1 - \prod_{i=1}^{N} \Pr(p_{ni} \ge \bar{p}) = 1 - \prod_{i=1}^{N} [1 - G_{ni}(\bar{p})] \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{N} F_i\left(\frac{c_i d_{ni}}{\bar{p}}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{N} e^{T_i(c_i d_{ni})} e^{\bar{p}^{\theta}} \\
&= 1 - e^{-\sum_{i=1}^{N} T_i (c_i d_{ni})^{-\theta} \bar{p}^{\theta}} = 1 - e^{-\Phi_n \bar{p}^{\theta}}
\end{aligned}
$$

これができるのは生産性の分布が独立だから。生産性が独立ではないケースも研究されている (Lind and Ramondo 2023)

価格分布

価格分布の密度関数も（後で必要になるため）計算しておく

$$
\begin{aligned}
dg_n(\bar{p}) &= \frac{\partial G_n(\bar{p})}{\partial \bar{p}} \\
&= \frac{\partial(1 - exp(-\Phi_n \bar{p}^{\theta}))}{\partial \bar{p}} \\
&= \theta \bar{p}^{\theta-1} \Phi_n exp(-\Phi_n \bar{p}^{\theta})
\end{aligned}
$$

となる。

財の輸出確率

ある特定の財が国 i から国 n に輸出される確率 π_{ni} は、国 i から輸出される価格が一番安い確率となる：

$$\pi_{ni} = Pr\left(p_{ni} \leq min_{j\neq i} p_{nj}\right) = \frac{T_i(c_i d_{ni})^{-\theta}}{\Phi_n} \tag{3}$$

これを多国でやる前に、二国で説明していく。

財の輸出確率

まず国を i と n の二国とする。ある財 ν の i 国から n 国へ輸出される（うる場合の）価格を $\bar{p}$ と仮定する。i 国がこの財 ν を n 国に輸出する確率は、n 国が n 国に売る場合の価格が $\bar{p}$ より高い場合:

$$
\begin{aligned}
& Pr(p_{nn}(\nu) \geq \bar{p}) \\
& = Pr\left(\frac{c_n d_{nn}}{Z_n} \geq \bar{p}\right) = Pr\left(Z_n \leq \frac{c_n d_{nn}}{\bar{p}}\right) \\
& = F_n\left(\frac{c_n d_{nn}}{\bar{p}}\right) = exp\left(-T_n\left(\frac{c_n d_{nn}}{\bar{p}}\right)^{-\theta}\right)
\end{aligned}
$$

財の輸出確率

これは条件付き確率 $(p_{ni}(\nu) = \bar{p})$ になっているので、ここで $p_{ni}(\nu) = \bar{p}$ について積分する必要がある:

$$
\begin{aligned}
\pi_{ni} &= \int_0^\infty Pr(p_{nn}(\nu) \geq \bar{p}) g_{ni}(\bar{p}) d\bar{p} \\
&= \int_0^\infty F_n\left(\frac{c_n d_{nn}}{\bar{p}}\right) g_{ni}(\bar{p}) d\bar{p}
\end{aligned}
$$

財の輸出確率

ここで $g_{ni}(\bar{p}) = Pr(p_{ni} = \bar{p})$ は

$$
\begin{aligned}
g_{ni}(\bar{p}) = \frac{\partial G_{ni}(\bar{p})}{\partial \bar{p}} &= -\frac{\partial exp\left(-T_i\left(\frac{c_i d_{ni}}{\bar{p}}\right)^{-\theta}\right)}{\partial \bar{p}} \\
&= \theta(\bar{p})^{\theta-1} T_i \left(c_i d_{ni}\right)^{-\theta} exp\left(-T_i\left(\frac{c_i d_{ni}}{\bar{p}}\right)^{-\theta}\right)
\end{aligned}
$$

財の輸出確率

$$
\begin{aligned}
\pi_{ni} &= \int_0^\infty F_n\left(\frac{c_n d_{nn}}{\bar{p}}\right) g_{ni}(\bar{p}) d\bar{p} \\
&= \int_0^\infty exp\left(-T_n\left(\frac{c_n d_{nn}}{\bar{p}}\right)^{-\theta}\right)\theta(\bar{p})^{\theta-1} T_i\left(c_i d_{ni}\right)^{-\theta} exp\left(-T_i\left(\frac{c_i d_{ni}}{\bar{p}}\right)^{-\theta}\right) d\bar{p} \\
&= T_i(c_i d_{ni})^{-\theta}\int_0^\infty exp\left(-T_n\left(\frac{c_n d_{nn}}{\bar{p}}\right)^{-\theta} - T_i\left(\frac{c_i d_{ni}}{\bar{p}}\right)^{-\theta}\right)\theta(\bar{p})^{\theta-1} d\bar{p} \\
&= T_i(c_i d_{ni})^{-\theta}\int_0^\infty exp\left(-(\bar{p})^{\theta}\left(T_n(c_n d_{nn})^{-\theta} + T_i(c_i d_{ni})^{-\theta}\right)\right)\theta(\bar{p})^{\theta-1} d\bar{p}
\end{aligned}
$$

財の輸出確率

ここで二国の場合は $\Phi_n = \left(T_n(c_n d_{nn})^{-\theta} + T_i(c_i d_{ni})^{-\theta}\right)$ なので

$$
\begin{aligned}
\pi_{ni} &= T_i(c_i d_{ni})^{-\theta} \int_0^\infty exp\left(-(\bar{p})^\theta \Phi_n\right) \theta(\bar{p})^{\theta-1} d\bar{p} \\
&= \frac{T_i(c_i d_{ni})^{-\theta}}{\Phi_n} \int_0^\infty \Phi_n exp\left(-(\bar{p})^\theta \Phi_n\right) \theta(\bar{p})^{\theta-1} d\bar{p} \\
&= \frac{T_i(c_i d_{ni})^{-\theta}}{\Phi_n} \int_0^\infty dg_n(\bar{p}) d\bar{p} \\
&= \frac{T_i(c_i d_{ni})^{-\theta}}{\Phi_n}
\end{aligned}
$$

財の輸出確率

N 国の場合はどうなる？ 計算してみよう！

1. Φ_n から i 国を除いた Φ_n^{-i} を定義する ($\Phi_n^{-i} = \sum_{j \neq i}^{N} T_j (c_j d_{nj})^{-\theta}$)。
2. Φ_n^{-i} を定義して i 国の n 国での価格が $\bar{p}$ のとき、i 国からの価格が一番低い価格を求める。
3. i 国からの価格を変化させて積分する。

財価格の条件付き分布

財が輸出されたとして、その価格の分布はどうなる？ 国 i から国 n に輸出された財の価格の分布を求めていく…が実はこれは国 n が買う財の価格分布と同じ！

- 全ての貿易の調整は外延（extensive margin）で行われる。ある国が低い技術水準、高い貿易費用に直面している場合は、その国が輸出する財の数が少なくなる。
- 財の輸出確率 π_{ni} は貿易シェア π_{ni} と一緒。

これを示していく。

財価格の条件付き分布

国 i からの国 n に輸出された財が価格 $\bar{p}$ より低い確率は

$$Pr(p_{ni} \leq \bar{p} | min_{j \neq i} p_{nj} \geq p_{ni})$$

と書ける。まず $\tilde{p}$ を導入する。国 i から国 n に輸出された財が価格 $\tilde{p}$ で、それが一番低い価格である確率は

$$\begin{aligned} Pr(p_{ni} &= \tilde{p}, min_{j \neq i} p_{nj} \geq \tilde{p}) \\ &= g_{ni}(\tilde{p}) exp(-\Phi_n^{-i} (\tilde{p})^{\theta}) \end{aligned}$$

これを $\bar{p}$ まで積分していく

財価格の条件付き分布

$$Pr(p_{ni} \leq \bar{p}, min_{j \neq i} p_{nj} \geq \bar{p}) = \int_0^{\bar{p}} g_{ni}(\tilde{p}) exp(-\Phi_n^{-i}(\tilde{p})^{\theta}) d\tilde{p}$$

$$= \int_0^{\bar{p}} \theta(\tilde{p})^{\theta-1} T_i \left(c_i d_{ni}\right)^{-\theta} exp\left(-T_i \left(c_i d_{ni}\right)^{-\theta} (\tilde{p})^{\theta}\right) exp(-\Phi_n^{-i}(\tilde{p})^{\theta}) d\tilde{p}$$

$$= T_i \left(c_i d_{ni}\right)^{-\theta} \frac{\Phi_n}{\Phi_n} \int_0^{\bar{p}} \theta(\tilde{p})^{\theta-1} exp(-\Phi_n(\tilde{p})^{\theta}) d\tilde{p}$$

$$= \frac{T_i \left(c_i d_{ni}\right)^{-\theta}}{\Phi_n} \int_0^{\bar{p}} \theta(\tilde{p})^{\theta-1} \Phi_n exp(-\Phi_n(\tilde{p})^{\theta}) d\tilde{p}$$

$$= \frac{T_i \left(c_i d_{ni}\right)^{-\theta}}{\Phi_n} \int_0^{\bar{p}} g_n(\tilde{p}) d\tilde{p} = \pi_{ni} G_n(\bar{p})$$

財の条件付き分布

これは同時確率（国 i から国 n への輸出価格が $\bar{p}$ より小さく、国 i からの輸出が最低価格である確率）なので、条件付確率は

$$Pr(p_{ni} \leq \bar{p} | p_{ni} \leq min_{j \neq i} p_{nj}) = \frac{1}{\pi_{ni}} \pi_{ni} G_n(\bar{p}) = G_n(\bar{p}) \tag{4}$$

となり、条件付確率と $G_n(\bar{p})$ が一致する。

価格指数

CES 効用関数の価格指数は以下のようになる:

$$P_n = \left(\int_0^1 p(\nu)^{1-\sigma} d\nu \right)^{1/(1-\sigma)}$$

これを価格分布 $G_n(p)$ を使って求めていく。

$$\begin{aligned} P_n &= \left(\int_0^\infty p^{1-\sigma} dG_n(p) \right)^{1/(1-\sigma)} \\ &= \left(\int_0^\infty p^{1-\sigma} \theta p^{\theta-1} \Phi_n exp(-\Phi_n p^\theta) dp \right)^{1/(1-\sigma)} \\ &= \left(\int_0^\infty \theta p^{\theta-\sigma} \Phi_n exp(-\Phi_n p^\theta) dp \right)^{1/(1-\sigma)} \end{aligned}$$

ここで置換積分をする。$x=\Phi_n p^\theta$ とおくと、$dx/dp=\Phi_n\theta p^{\theta-1}$ なので

$$dp = dx\frac{p^{1-\theta}}{\theta\Phi_n} = dx\frac{x^{(1-\theta)/\theta}}{\theta\Phi_n^{1/\theta}}$$

$$p = \left(\frac{x}{\Phi_n}\right)^{1/\theta}$$

これを導入して

$$\begin{aligned}
P_n &= \left(\int_0^\infty \theta p^{\theta-\sigma}\Phi_n exp(-\Phi_n p^\theta)dp\right)^{1/(1-\sigma)} \\
&= \left(\int_0^\infty \theta\left(\frac{x}{\Phi_n}\right)^{(\theta-\sigma)/\theta}\Phi_n exp(-x)\left(\frac{x^{(1-\theta)/\theta}}{\theta\Phi_n^{1/\theta}}\right)dx\right)^{1/(1-\sigma)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_n &= \left(\int_0^\infty \theta p^{\theta-\sigma}\Phi_n exp(-\Phi_n p^\theta)dp\right)^{1/(1-\sigma)} \\
&= \left(\int_0^\infty \theta \left(\frac{x}{\Phi_n}\right)^{(\theta-\sigma)/\theta} \Phi_n exp(-x)\left(\frac{x^{(1-\theta)/\theta}}{\theta\Phi_n^{1/\theta}}\right)dx\right)^{1/(1-\sigma)} \\
&= \left(\int_0^\infty x^{(1-\sigma)/\theta} exp(-x)\Phi_n^{(\sigma-1)/\theta}dx\right)^{1/(1-\sigma)} \\
&= \Phi_n^{-1/\theta}\left(\int_0^\infty x^{(1-\sigma)/\theta} exp(-x)dx\right)^{1/(1-\sigma)} = \Gamma\left(\frac{1-\sigma}{\theta}+1\right)\Phi_n^{-1/\theta}
\end{aligned}
$$

ここで Γ は定数になる。$\theta > \sigma - 1$ でないと価格指数が定義されない。

厚生と貿易からの利益

ここで厚生は実質賃金で定義される

$$U_n = \frac{w_n}{P_n} = \frac{w_n}{\Gamma\left(\frac{1-\sigma}{\theta}+1\right)\Phi_n^{-1/\theta}} \tag{5}$$

これを使って Gains from Trade という、現在の厚生と閉鎖経済の厚生との比を考える。賃金 w_i を基準として固定すると、あとは価格指数の比較で、Φ_n を見る。閉鎖経済での Φ は $\Phi_n^{AUT} = T_n w_n^{-\theta}$ であり、比を取ると

$$\frac{\Phi_n^{AUT}}{\Phi_n} = \frac{T_n w_n^{-\theta}}{\Phi_n} = \pi_{nn}$$

となる。

厚生と貿易の利益

これを組み合わせると

$$\frac{U_n}{U_n^{AUT}} = \left(\frac{\Phi_n^{AUT}}{\Phi_n}\right)^{-1/\theta} = \pi_{nn}^{-1/\theta}$$

となる。

貿易額の定式化（重力モデル）

π_{ni} が n 国の i 国で生産された財への支出割合になる:

$$\frac{X_{ni}}{X_n} = \frac{T_i(c_i d_{ni})^{-\theta}}{\Phi_n} = \pi_{ni} \tag{6}$$

ここで $\Phi_n = \sum_{j=1}^{N} T_j(c_j d_{nj})^{-\theta}$ となる。

貿易額の定式化（重力モデル）

総生産 Y_i は $\sum_{m=1}^{N} X_{mi}$ なので:

$$Y_i = \sum_{m=1} \frac{T_i(c_i d_{mi})^{-\theta} X_m}{\Phi_n} = T_i(c_i)^{-\theta} \sum_{m=1}^{N} \frac{d_{mi}^{-\theta} X_m}{\Phi_m}. \tag{7}$$

そうすると貿易額は

$$X_{ni} = \frac{T_i(c_i d_{ni})^{-\theta}}{\Phi_n} X_n = \frac{Y_i}{\sum_{m=1}^{N} \frac{d_{mi}^{-\theta} X_m}{\Phi_m}} d_{ni}^{-\theta} \frac{X_n}{\Phi_n}. \tag{8}$$

いわゆる Structural gravity と同相になる。

一般均衡

労働のみの経済のため、均衡では総所得は総生産と一致する。国 i の労働量を L_i とすると、国 i の総所得は $Y_i = w_i L_i$。均衡は:

$$Y_i = w_i L_i = \sum_{n=1}^{N} X_{ni}$$

となる。これでモデルが閉じる。

今日話さないこと

- 最初に述べた四つのポイントがどうモデルで再現されるか（特に価格）については説明しない。
- θ の推定: θ は貿易弾力性 (trade elasticity) といわれ、モデルの根幹のパラメータとなる。これは Eaton and Kortum (2002) で推定され、他にも価格を使ったもの (Simonovska and Waugh 2014)、関税を使ったもの (Caliendo and Parro 2015) などがあるが、ここでは扱わない。
- 中間財も Eaton and Kortum (2002) では扱われているが、ここでは時間の問題で割愛する。

1. 背景とモチベーション
2. モデル
3. コンピュテーション
4. お役立ち情報
5. 実習課題

EK モデルの非線形連立方程式体系

$$Y_i = w_i L_i \qquad w_i L_i = \sum_{n=1}^{N} X_{ni}$$

$$\pi_{ni} = \frac{T_i (d_{ni} w_i)^{-\theta}}{\Phi_n} \qquad P_n = \Gamma\left(\frac{\theta + \sigma - 1}{\theta}\right) \Phi_n^{-1/\theta}$$

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{N} T_k (d_{nk} w_k)^{-\theta} \qquad U_n = \frac{w_n}{P_n}$$

$$X_{ni} = \pi_{ni} Y_n$$

EK モデルの非線形連立方程式体系

$$Y_i = w_i L_i$$

$$\pi_{ni} = \frac{T_i (d_{ni} w_i)^{-\theta}}{\Phi_n}$$

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{N} T_k (d_{nk} w_k)^{-\theta}$$

$$X_{ni} = \pi_{ni} Y_n$$

$$w_i L_i = \sum_{n=1}^{N} X_{ni}$$

$$P_n = \Gamma\left(\frac{\theta + \sigma - 1}{\theta}\right) \Phi_n^{-1/\theta}$$

$$U_n = \frac{w_n}{P_n}$$

EK モデルの非線形連立方程式体系

$$Y_i = w_i L_i$$

$$w_i L_i = \sum_{n=1}^{N} X_{ni}$$

$$\pi_{ni} = \frac{T_i (d_{ni} w_i)^{-\theta}}{\Phi_n}$$

$$P_n = \Gamma\left(\frac{\theta + \sigma - 1}{\theta}\right) \Phi_n^{-1/\theta}$$

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{N} T_k (d_{nk} w_k)^{-\theta}$$

$$U_n = \frac{w_n}{P_n}$$

$$X_{ni} = \pi_{ni} Y_n$$

EK モデルの非線形連立方程式体系

$$Y_i = w_i L_i$$

$$\pi_{ni} = \frac{T_i (d_{ni} w_i)^{-\theta}}{\Phi_n}$$

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{N} T_k (d_{nk} w_k)^{-\theta}$$

$$X_{ni} = \pi_{ni} Y_n$$

$$w_i L_i = \sum_{n=1}^{N} X_{ni}$$

$$P_n = \Gamma \left(\frac{\theta + \sigma - 1}{\theta} \right) {\Phi_n}^{-1/\theta}$$

$$U_n = \frac{w_n}{P_n}$$

EKモデルを解くとは

EKモデルを解くとは

1. パラメーター$(\theta, \sigma, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{d})$を与えたうえで
2. モデルの方程式体系を満たすような$\boldsymbol{w}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{U}$を探してくること

これを解説していく。

EK モデルを解くとは

解き方は複数ある

- 非線形列方程式体系を解くプログラムに入れる (MATLAB なら fsolve など)
- 縮小写像を使って不動点定理を使って解く

今日は縮小写像を使って解く。こちらのやり方のほうがよくつかわれていて、replication file を読むときにも理解があるとやりやすいため。前者のほうが望ましい点もある。

労働需要

それぞれの国の労働供給を L_i^S, 労働需要を L_i^D と書く。労働需要を計算する。国 i の労働需要は

$$L_i^D = \frac{\sum_{n=1}^{N} X_{ni}}{w_i}$$

そして X_{ni} は:

$$X_{ni} = \pi_{ni} Y_n \qquad Y_n = w_i L_i^S$$

$$\pi_{ni} = \frac{T_i (d_{ni} w_i)^{-\theta}}{\Phi_n} \qquad \Phi_n = \sum_{k=1}^{N} T_k (d_{nk} w_k)^{-\theta}$$

で決まる。

仮置きした賃金で労働需要を計算する

国 i の賃金を仮置きして $w_{i,0}$ と置く。これを置くと、自動的に労働需要が定まる

$$L_i^D(0) = \frac{\sum_{n=1}^{N} X_{ni}}{w_i(0)}$$

$$X_{ni} = \pi_{ni} Y_n \qquad Y_n = w_i(0) L_i^S$$

$$\pi_{ni} = \frac{T_i(d_{ni} w_i(0))^{-\theta}}{\Phi_n} \qquad \Phi_n = \sum_{k=1}^{N} T_k(d_{nk} w_k(0))^{-\theta}$$

この仮置きした賃金 $w_i(0)$ に対応する労働需要 $L_i^D(0)$ が定まる。

労働需要と労働供給が一致するか確認する

労働供給は固定されているため、L_i^S は定数。ここで国 i の超過労働需要を Z_i と置くと:

$$Z_i(\boldsymbol{w}) = L_i^D(\boldsymbol{w}) - L_i^S.$$

この超過労働需要関数 $\boldsymbol{Z}$ がすべての国で 0 になれば均衡がとれているはず。なっていない場合は仮置きした賃金を更新する！

賃金の更新

仮置きした賃金を、超過労働需要に対応して更新する

$$w_i(1) = w_i(0) * \left(1 + \psi * \frac{Z_i(\boldsymbol{w}(\mathbf{0}))}{L_i}\right)$$

- ψ が大きすぎると、超過需要と超過供給が交互に入れ替わるような状態になって収束しない。
- ψ が小さすぎると、均衡にたどり着くが、時間がかかる

この更新は $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{w})$ について縮小写像になっているため、やがては $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{w})$ になるような w にたどり着く。

アルゴリズムの準備

均衡を求めるために、以下の初期値、および収束パラメーターを決めておく

- 初期の賃金 $\boldsymbol{w}(t)$ を仮置きする。最初は $t = 0$ で、適当に決めておく（全ての国で賃金が同一で 1 など）
- 超過労働需要が十分にゼロに近いか判定する閾値 tol を決めておく。例えばそれぞれの国の超過労働需要の絶対値が tol より小さければ労働市場が均衡していると見なす。これが十分に小さくないとおかしくなるケースがあるので、色々な値で試すのが大事。
- 更新のスピードを決める ψ を決めておく。

基準化の方法を決めるのも重要:

- 賃金は労働の相対的な価格なので、y 倍しても労働市場は均衡する。ただ賃金、価格、貿易額はすべて y 倍になる。
- 実質賃金 w_n/P_n は変わらない。

基準化の方法は複数ある。これによって結果が変わるときもなくはない。

- 基準国を決めて、その国の賃金を 1 にする。
- 世界全体の GDP を固定する (1 にするなど)

アルゴリズム

アルゴリズムは以下のようになる：

1. 仮置きした賃金から、超過労働需要 $\boldsymbol{Z}(t)$ を求める。
2. 超過労働需要 $\boldsymbol{Z}(t)$ が十分に 0 に近いか、tol と比べる。小さかったらステップ 4 に行く。
3. 超過労働需要 $\boldsymbol{Z}(t)$ と賃金 $\boldsymbol{w}(t)$ から新しい賃金 $\boldsymbol{w}(t+1)$ を計算する。ステップ 1 に戻る。
4. 均衡した賃金から価格指数 $\boldsymbol{P}$、貿易額 $\boldsymbol{X}$、そして効用水準 $\boldsymbol{U}$ を求める。

Exact hat algebra

このようにモデルを解けるのはいいが、$\boldsymbol{d}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{L}$ などはどうやって求めればいい？　このようなパラメータなしでもモデルが解けるのが **Exact hat algebra** になる。

- 貿易データ $\boldsymbol{X}$（と国内生産データ）を用いて、反実仮想の $\boldsymbol{X}'$ を計算する。
- なぜ Hat? 反実仮想の $\boldsymbol{X}'$ と現実の経済 $\boldsymbol{X}$ の比率 $\hat{\boldsymbol{X}} \equiv \boldsymbol{X}'/\boldsymbol{X}$ を計算するから。
- 対数線形化とどう違うの？　対数線形化は近似だが、Exact hat algebra は文字通り Exact に反実仮想を計算する。

直感として、$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{L}$ の情報はすべて $\boldsymbol{X}$ に含められている。

Exact hat algebra

例として国家間費用 d_{ni} が z%下がるようなケースを考える。この場合、$\hat{\tau}$ は

$$\hat{d}_{ni} = \begin{cases} (1-z) & \text{if } n \neq i \\ 1 & \text{if } n = i \end{cases}$$

となる。さて、この貿易費用の変化に伴って、$\boldsymbol{X}$ はどのように変化する？

まず簡単なところから。国の総所得の式を考える:

$$Y_i = w_i L_i$$

これを hat 化してみる。反実仮想の変数を Y_i', w_i' とすると

$$Y_i' = w_i' L_i$$

となり、この比率を取ると

$$\frac{Y_i'}{Y_i} = \frac{w_i'}{w_i} \iff \hat{Y}_i = \hat{w}_i$$

となる。

では貿易は？ こちらは難しい。まず π_{ni} の変化を考える:

$$\pi_{ni} = \frac{T_i(d_{ni}w_i)^{-\theta}}{\sum_{k=1}^{N} T_k(d_{nk}w_k)^{-\theta}}$$

そして反実仮想の π'_{ni} は以下のようになる:

$$\pi'_{ni} = \frac{T_i(d'_{ni}w'_i)^{-\theta}}{\sum_{l=1}^{N} T_l(d'_{nl}w'_l)^{-\theta}}$$

ここではわかりやすくするために、π'_{ni} の分母で使われる添え字を l に設定する。これを一段階ずつ計算していく。

$$
\begin{aligned}
\hat{\pi}_{ni} = \frac{\pi'_{ni}}{\pi_{ni}} &= \frac{T_i(d'_{ni}w'_i)^{-\theta}}{\sum_{l=1}^{N} T_l(d'_{nl}w'_l)^{-\theta}} \frac{\sum_{k=1}^{N} T_k(d_{nk}w_k)^{-\theta}}{T_i(d_{ni}w_i)^{-\theta}} \\
&= \frac{T_i(d'_{ni}w'_i)^{-\theta}}{T_i(d_{ni}w_i)^{-\theta}} \frac{\sum_{k=1}^{N} T_k(d_{nk}w_k)^{-\theta}}{\sum_{l=1}^{N} T_l(d'_{nl}w'_l)^{-\theta}} \\
&= (\hat{d}_{ni}\hat{w}_i)^{-\theta} \frac{\sum_{k=1}^{N} T_k(d_{nk}w_k)^{-\theta}}{\sum_{l=1}^{N} T_l(d'_{nl}w'_l)^{-\theta}} \\
&= (\hat{d}_{ni}\hat{w}_i)^{-\theta} \left(\frac{\sum_{l=1}^{N} T_l(d'_{nl}w'_l)^{-\theta}}{\sum_{k=1}^{N} T_k(d_{nk}w_k)^{-\theta}} \right)^{-1}
\end{aligned}
$$

さらに計算していく

$$
\begin{aligned}
\hat{\pi}_{ni} &= (\hat{d}_{ni}\hat{w}_i)^{-\theta}\left(\frac{\sum_{l=1}^{N} T_l (d'_{nl} w'_l)^{-\theta}}{\sum_{k=1}^{N} T_k (d_{nk} w_k)^{-\theta}}\right)^{-1} \\
&= (\hat{d}_{ni}\hat{w}_i)^{-\theta}\left(\frac{\sum_{l=1}^{N} T_l (\hat{d}_{nl} d_{nl} \hat{w}_l w_l)^{-\theta}}{\sum_{k=1}^{N} T_k (d_{nk} w_k)^{-\theta}}\right)^{-1} \\
&= (\hat{d}_{ni}\hat{w}_i)^{-\theta}\left(\frac{\sum_{l=1}^{N} T_l (d_{nl} w_l)^{-\theta} (\hat{d}_{nl}\hat{w}_l)^{-\theta}}{\sum_{k=1}^{N} T_k (d_{nk} w_k)^{-\theta}}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\pi}_{ni} &= (\hat{d}_{ni}\hat{w}_i)^{-\theta}\left(\frac{\sum_{l=1}^{N} T_l(d_{nl}w_l)^{-\theta}(\hat{d}_{nl}\hat{w}_l)^{-\theta}}{\sum_{k=1}^{N} T_k(d_{nk}w_k)^{-\theta}}\right)^{-1} \\
&= (\hat{d}_{ni}\hat{w}_i)^{-\theta}\left(\sum_{l=1}^{N} \pi_{nl}(\hat{d}_{nl}\hat{w}_l)^{-\theta}\right)^{-1} = \frac{(\hat{d}_{ni}\hat{w}_i)^{-\theta}}{\sum_{k=1}^{N} \pi_{nl}(\hat{d}_{nl}\hat{w}_l)^{-\theta}}
\end{aligned}
$$

ここで一行目から二行目は以下の式を利用している:

$$
\pi_{nl} = \frac{T_l(d_{nl}w_l)^{-\theta}}{\sum_{k=1}^{N} T_k(d_{nk}w_k)^{-\theta}}
$$

価格指数 P_i の変化 $\hat{P}_i$ も計算しておく。

$$\hat{P}_n = \frac{P'_n}{P_n} = \frac{\Gamma\left(\frac{\theta+\sigma-1}{\theta}\right)\Phi_n'^{-1/\theta}}{\Gamma\left(\frac{\theta+\sigma-1}{\theta}\right)\Phi_n^{-1/\theta}} = \hat{\Phi}_n^{-1/\theta}$$

なので前述の π_{ni} で計算した部分を応用すると

$$\hat{\Phi}_n = \left(\frac{\sum_{l=1}^{N} T_l(d'_{nl}w'_l)^{-\theta}}{\sum_{k=1}^{N} T_k(d_{nk}w_k)^{-\theta}}\right) = \sum_{k=1}^{N} \pi_{nl}(\hat{d}_{nl}\hat{w}_l)^{-\theta}$$

まとめると価格指数の変化は

$$\hat{P}_n = \left(\sum_{k=1}^{N} \pi_{nl} (\hat{d}_{nl} \hat{w}_l)^{-\theta} \right)^{-1/\theta}$$

つまり価格の変化率の重み付き（π_{ni}）調和平均となる。

最後に反実仮想の労働市場均衡を書く。先に両辺に w_i' を掛けておく:

$$w_i' L_i^D = \sum_{n=1}^{N} X_{ni}'$$

両辺を hat で表現すると

$$\hat{w} Y_i = \sum_{n=1}^{N} \pi_{ni} \hat{\pi}_{ni} \hat{w}_i Y_n$$

となる。左辺は $w_i' L_i^D = \hat{w}_i w_i L_i^D$, 右辺は $X_{ni}' = \pi_{ni}' Y_n' = \pi_{ni} \hat{\pi}_{ni} \hat{Y}_n$ を使っている。

Exact hat algebraの非線形連立方程式

Exact hat algebraの式をまとめると以下のようになる:

$$\hat{Y}_i = \hat{w}_i Y_i \qquad \hat{w}_i Y_i = \sum_{n=1}^{N} \hat{\pi}_{ni} \pi_{ni} \hat{w}_n Y_n$$

$$\hat{\pi}_{ni} = \frac{(\hat{d}_{ni}\hat{w}_i)^{-\theta}}{\sum_{k=1}^{N} \pi_{nl}(\hat{d}_{nl}\hat{w}_l)^{-\theta}} \qquad \hat{P}_n = \left(\sum_{k=1}^{N} \pi_{nl}(\hat{d}_{nl}\hat{w}_l)^{-\theta}\right)^{-1/\theta}$$

$$U_n = \frac{\hat{w}_n}{\hat{P}_n} \qquad X'_{ni} = \hat{\pi}_{ni}\pi_{ni}\hat{w}_n Y_n$$

となる。

Exact hat algebra: 政策変数

$$\hat{Y}_i = \hat{w}_i Y_i \qquad \hat{w}_i Y_i = \sum_{n=1}^{N} \hat{\pi}_{ni} \pi_{ni} \hat{w}_n Y_n$$

$$\hat{\pi}_{ni} = \frac{(\hat{d}_{ni}\hat{w}_i)^{-\theta}}{\sum_{k=1}^{N} \pi_{nl}(\hat{d}_{nl}\hat{w}_l)^{-\theta}} \qquad \hat{P}_n = \left(\sum_{k=1}^{N} \pi_{nl}(\hat{d}_{nl}\hat{w}_l)^{-\theta}\right)^{-1/\theta}$$

$$U_n = \frac{\hat{w}_n}{\hat{P}_n} \qquad X'_{ni} = \hat{\pi}_{ni}\pi_{ni}\hat{w}_n Y_n$$

Exact hat algebra: パラメータ

$$\hat{Y}_i = \hat{w}_i Y_i \qquad \hat{w}_i Y_i = \sum_{n=1}^{N} \hat{\pi}_{ni} \pi_{ni} \hat{w}_n Y_n$$

$$\hat{\pi}_{ni} = \frac{(\hat{d}_{ni}\hat{w}_i)^{-\theta}}{\sum_{k=1}^{N} \pi_{nl}(\hat{d}_{nl}\hat{w}_l)^{-\theta}} \qquad \hat{P}_n = \left(\sum_{k=1}^{N} \pi_{nl}(\hat{d}_{nl}\hat{w}_l)^{-\theta} \right)^{-1/\theta}$$

$$U_n = \frac{\hat{w}_n}{\hat{P}_n} \qquad X'_{ni} = \hat{\pi}_{ni} \pi_{ni} \hat{w}_n Y_n$$

Exact hat algebra: データ

$$\hat{Y}_i = \hat{w}_i Y_i$$

$$\hat{w}_i Y_i = \sum_{n=1}^{N} \hat{\pi}_{ni} \pi_{ni} \hat{w}_n Y_n$$

$$\hat{\pi}_{ni} = \frac{(\hat{d}_{ni}\hat{w}_i)^{-\theta}}{\sum_{k=1}^{N} \pi_{nl}(\hat{d}_{nl}\hat{w}_l)^{-\theta}}$$

$$\hat{P}_n = \left(\sum_{k=1}^{N} \pi_{nl}(\hat{d}_{nl}\hat{w}_l)^{-\theta}\right)^{-1/\theta}$$

$$U_n = \frac{\hat{w}_n}{\hat{P}_n}$$

$$X'_{ni} = \hat{\pi}_{ni} \pi_{ni} \hat{w}_n Y_n$$

Exact hat algebra: 反実仮想の結果

$$\hat{Y}_i = \hat{w}_i Y_i \qquad \hat{w}_i Y_i = \sum_{n=1}^{N} \hat{\pi}_{ni} \pi_{ni} \hat{w}_n Y_n$$

$$\hat{\pi}_{ni} = \frac{(\hat{d}_{ni} \hat{w}_i)^{-\theta}}{\sum_{k=1}^{N} \pi_{nl} (\hat{d}_{nl} \hat{w}_l)^{-\theta}} \qquad \hat{P}_n = \left(\sum_{k=1}^{N} \pi_{nl} (\hat{d}_{nl} \hat{w}_l)^{-\theta} \right)^{-1/\theta}$$

$$U_n = \frac{\hat{w}_n}{\hat{P}_n} \qquad X'_{ni} = \hat{\pi}_{ni} \pi_{ni} \hat{w}_n Y_n$$

基準化の方法を決めるのも重要:

- 賃金変化も相対的なので、y 倍しても労働市場は均衡する。ただ賃金、価格、貿易額はすべて y 倍になる。
- 実質賃金の変化 $\hat{w}_n/\hat{P}_n$ は変わらない。

基準化の方法は複数ある。これによって結果が変わるときもなくはない。

- 基準国を決めて、その国の賃金変化を 1 にする。
- 世界全体の GDP を固定する (反実仮想後と反実仮想前の GDP を同じにするなど)

EK モデルを解くとは

EK の Exact Hat Algebra を解くとは

1. 政策の変化 $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ を決定する
2. パラメータ θ を決める
3. データ $\boldsymbol{X}$ を設定して
4. モデルの方程式体系を満たすような $\hat{\boldsymbol{w}}$ を探してくること

これを解説していく。

Exact hat algebraの一般性

このExact hat algebraの一般性は高い:

- EKモデルから派生した多くのモデルにはExact hat algebraが存在する。
- $\hat{d}_{ni}$以外にも$\hat{T}_i$や$\hat{L}_i$も考えられる

またパラメータ$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{L}$などを知らなくていいことは大きな利点。

1. 背景とモチベーション
2. モデル
3. コンピュテーション
4. お役立ち情報
5. 実習課題

プログラミング言語の選び方

- GAUSS (過去の言語。元の EK (2002) はこれで実装されている)
- MATLAB (GAUSS の発展形。多くの人が使っている)
- Fortran (速いが書きにくい)
- **Python** (遅いが、データのハンドリングを一貫して出来るため便利)
- **Julia** (速いが、若い言語のため、変化が激しい)

ある程度複雑なモデルだと速度が重要になってくるが、一つの言語が分かれば移行は難しくない。

コーディング環境の選択肢

Google colaboratory は便利だが、本格的なコーディングには向かない。選択肢として

- Python + **VSCode**
- Python + Anaconda

個人的には Python + VSCode をおススメするが、Anaconda もまだまだ使われている。Google で検索すれば資料がたくさん出てくる。

わからないことはChatGPT

わからないことはChatGPTに聞けば大体解決する。具体的には

- このコードどういう意味？
- このコードをMATLABからPythonに翻訳して
- こういうことをしたいんだけど、Pythonコードで書くとどうなる？

ただChatGPTはよく間違えるので、自分でもプログラミング言語の理解を深めるのが重要！

You

これはpythonで何をしていますか？プログラミングの初心者の私にもわかりやすいように丁寧に説明してください。

wgdp1 = np.sum(what_new * Xn)
wgdp = np.sum(Xn)
print(wgdp1)
what_new = what_new / wgdp1 * wgdp
print(what_new)

ChatGPT

このPythonコードの各部分について説明します。まず、このコードはNumPyという数学的計算を行うためのライブラリを使用していると思われます。NumPyを使うと、数値計算が簡単かつ効率的に行えます。

1. `wgdp1 = np.sum(what_new * Xn)`:この行では、`what_new`と`Xn`という二つの配列（もしくはリスト）の要素ごとの積を計算し、その結果の各要素の合計（総和）を求めています。`np.sum()`は、配列内のすべての要素の合計を計算するNumPyの関数です。
2. `wgdp = np.sum(Xn)`:ここでは`Xn`という配列の全要素の合計を求めています。
3. `print(wgdp1)`:ここで、最初に計算した合計値`wgdp1`を出力しています。
4. `what_new = what_new / wgdp1 * wgdp`:この行では、最初の合計`wgdp1`で`what_new`を割り、次に`wgdp`をかけています。これは`what_new`の各要素をスケーリング（比率を変更すること）していることになります。
5. `print(what_new)`:最後に、スケーリングされた`what_new`の新しい値を出力しています。

このコードは、おそらく何らかのデータセットを扱い、そのデータの比率や重要度を変更するために使われていると思われます。ただし、`what_new`や`Xn`が何を表しているのか、またそれらがどのように定義されているのかについて

テストの重要性

このように複雑なコードでは大体はミスをする。そのためコードが合っているか、テストするコードを作るのが必要。Exact Hat Algebra 周りのテストは:

- Exact Hat Algebra で求めた均衡の変化と、パラメーターを変更して均衡を作った場合の変化が一致するか？（二つの完全に異なるコードで結果が合うかのテスト）
- Exact Hat Algebra で適当な $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ を使って反実仮想を行った後、その新しい均衡から $\mathbf{1}/\hat{\boldsymbol{\tau}}$ で Exact Hat Algebra を行ってあげる。すると、そのさらに新しい均衡は元の均衡と一致するはず ($\hat{\boldsymbol{\tau}} \times \mathbf{1}/\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{1}$).

EK を実装した後は？

Python で実データを取り込むのは簡単。Google 検索や ChatGPT に聞けばすぐわかる。実際の経済データを取り入れたい場合は二つのデータソースがある：

- World Input Output Database （産業連関がある。43 ヵ国、56 産業、2000-2015）
- TradeProd (産業連関がない。162 ヵ国。9 産業、1966-2018）

これ以外にも GTAP や EORA などがある。

EK を実装した後は？

今回説明したものは非常に単純なケース。ここから複雑性をあげると

1. 多産業モデル
2. 産業連関
3. 関税の導入

ここまでやると Caliendo and Parro (2015) になる。これを実装できれば、北米大学院の Ph.D のフィールドコースぐらい？

1. 背景とモチベーション
2. モデル
3. コンピュテーション
4. お役立ち情報
5. 実習課題

実習課題: 貿易赤字の導入

現実の世界では貿易赤字がある (Eaton, Dekle and Kortum 2008)。貿易赤字は外生的な所得移転としてモデル化される。生産と消費を区別するため、それぞれを $\boldsymbol{Y}$ と $\boldsymbol{X}$ と置く。この二つの関係は

$$X_i = w_i L_i + D_i$$

となる。ここで D_i が外生的な所得移転。$D_i > 0$ が貿易赤字、$D_i < 0$ が貿易黒字となる。あくまで所得移転なので $D_i > w_i L_i$ となり、世界の貿易赤字はゼロになる ($\sum_{i=1}^{N} D_i = 0.$)。

実習課題: 貿易赤字

これを導入したモデルの非線形連立方程式は以下のようになる:

$$Y_i = w_i L_i \qquad w_i L_i = \sum_{n=1}^{N} X_{ni}$$

$$\pi_{ni} = \frac{T_i (d_{ni} w_i)^{-\theta}}{\Phi_n} \qquad P_n = \Gamma\left(\frac{\theta + \sigma - 1}{\theta}\right) \Phi_n^{-1/\theta}$$

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{N} T_k (d_{nk} w_k)^{-\theta} \qquad U_n = \frac{w_n}{P_n}$$

$$X_{ni} = \pi_{ni} X_n \qquad X_n = Y_n + D_n$$

実習課題: 貿易赤字

同様に Exact hat algebra も計算できる:

$$\hat{Y}_i = \hat{w}_i Y_i \qquad \hat{w}_i Y_i = \sum_{n=1}^{N} \hat{\pi}_{ni} \pi_{ni} (\hat{w}_n Y_n + D_n)$$

$$\hat{\pi}_{ni} = \frac{(\hat{d}_{ni} \hat{w}_i)^{-\theta}}{\sum_{k=1}^{N} \pi_{nl} (\hat{d}_{nl} \hat{w}_l)^{-\theta}} \qquad \hat{P}_n = \left(\sum_{k=1}^{N} \pi_{nl} (\hat{d}_{nl} \hat{w}_l)^{-\theta} \right)^{-1/\theta}$$

$$U_n = \frac{\hat{w}_n}{\hat{P}_n} \qquad X'_{ni} = \hat{\pi}_{ni} \pi_{ni} (\hat{w}_n Y_n + D_n)$$

実習課題

事前にあった Google colaboratory の設定で

- 国 1 は 0.1 の貿易赤字、国 2 は 0.1 の貿易黒字として

モデルと Exact hat algebra を計算する。

ありがとうございました

yutawatabe@gmail.com