Advanced Mathematics

Samuel S . Watson 编著

教科书通常会包含大量的材料，而让您离开找出重点。尽管有令人信服的理由每个部分都提供了许多示例，这样的方法可以对于那些认为他们需要更精简的人而言并不令人满意资源。本文旨在支持不同的工作流程：（i）阅读本书，以简约的方式介绍核心思想。（ii）在需要时寻求其他示例的替代资源。一世希望您能够仔细阅读每个部分并进行所有工作例子和练习，从而不遗余力地找出来跳过什么。我建议以下来源进行更多练习，讨论或示例：

1. 附录 **??**，其中列出了其他练习部分。其中一些是原创的，其他是从练习中修改詹姆斯・斯图尔特（James Stewart）的多变量微积分或 Susan J. Colley 的微分向量。
2. 教材书籍何在网站 `communitycalculus.org` 上获取，这是一个免费开放的学习平台，上面有大量的的知识练习。
3. 有许多多元微分知识的网站 MathInsight (`mathinsight.org`)，有诸多的程序代码为本课题的教学提供教学的便利。
4. 标准的多变量微积分教科书。
5. 3Blue1Brown，数学视频创作者，在线性代数。不幸的是，他没有做过多元微积分但是，这些视频仅可用于矢量主题。

文本中的以下空白注解图标是可单击的：

1. links to a CoCalc worksheet with a relevant calculation (see Appendix **??** for more discussion)
2. links to a relevant 3Blue1Brown YouTube video.
3. links to a relevant page at `mathinsight.org`

此 PDF 中的所有 3D 图形可能都是交互式的操作，但是该功能要求使用 Adobe 的免费 Acrobat Reader 来进行阅读。(`https://get.adobe.com/reader/`).

在使用本书过程中发现有任何错误欢迎通过邮件的方式与我们 (`sswatson@brown.edu`) 进行联系。

1

1.1 *n*-

如图 1.1 所示，我们可以将实数用数轴（给定定义的实数轴）进行表示出来 $\mathbb{R}$ 轴。

x 轴上标记的每一个点表示这个点到数轴上的点 0，的距离，对于负数而言，这表示这个数的相反数。

我们取两个实数，记为 $(x, y)(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$，这样的所有数对构成的集合是一个平面，如图 1.2，我们通常将其称为 xOy 平面。其中横轴我们称为 x 轴，纵轴我们称为 y 轴。构成的二维平面我们可以记为 $\mathbb{R}^2$ 空间，$\mathbb{R}^2$ 在几何图形上构成一个平面。

三维空间 $\mathbb{R}^3$ 是由所有的 (x, y, z) 其中 $(x, y, z \in \mathbb{R})$ 构成的集合，对于三维空间上的点，每个点（的位置）与每个数对 (x, y, z) 唯一的对应，我们称由所有 $(x, y, 0)$ 构成的集合形成的平面为 xy-平面，由所有 $(x, 0, z)$ 构成的集合形成的平面为 xz-平面，由所有 $(0, y, z)$ 构成的集合形成的平面为 yz-平面（如图 1.3）(Figure).，

类似地，我们通过确定不同个数的实数对形成的集合来进行定义 $\mathbb{R}^4$ 维空间、$\mathbb{R}^5$ 维空间, 以及 $\mathbb{R}^6$ 维空间，这样，确定正整数 n（有限），$\mathbb{R}^n$ 我们称之为欧氏空间。

图 1.1 实数数轴

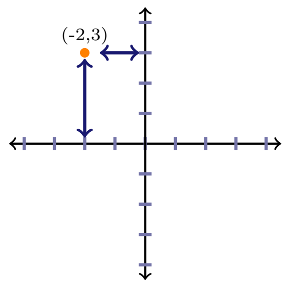


图 1.2 $\mathbb{R}^2$ 二维平面

* 一般情况下，我们只取定一维、二维和三维空间上的图像进行可视化。

* 在没有特殊情况下，我们在绘制三维空间的时候，通常选取的是由 x 轴正半轴、y 轴正半轴和 z 轴正半轴构成的空间区域

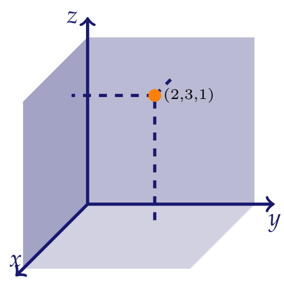


图 1.3 $\mathbb{R}^3$ 三维空间上的点

!!!

Exercise 1.1.1

分别写出在 $\mathbb{R}^2$ 平面上和 $\mathbb{R}^3$ 空间上两个不同的点 A 和 B 的距离的数学公式.

我们都知道，在 $\mathbb{R}^n$ 空间中，满足数学表达式方程的所有的点构成了该表达式在 $\mathbb{R}^n$ 空间中的曲线，例如，在二维平面 $\mathbb{R}^2$ 上，满足表达式 $x + y = 1$ 的所有的点 (x, y) 构成的集合是一条直线如图 1.4。在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 上，满足数学表达式 $x^2 + y^2 = 1$ 的所有点的集合构成的是一个圆筒如图 1.5。我们不难看出，该圆筒包含的变量为平面 xOx 上的单位圆上的所有点而非所有的变量。

Exercise 1.1.2

现在，我们来思考下面的问题：

(a) 在数轴绘制满足方程：$x(x-1)(x+1) = 0$ 的点.

(b) 在二维空间 $\mathbb{R}^2$ 上绘制满足方程 $x(x-1)(x+1) = 0$ 的点集合形成的图像.

(c) 在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 上绘制满足方程 $x(x-1)(x+1) = 0$ 的点集合形成的图像.

如图所示，这样我们就能更进一步的对函数的可视化有了解。接下来，我们进一步考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的函数。

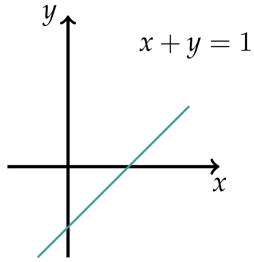


图 **1.4** The level sets of $f(x) = x - 1$ are concentric circles in $\mathbb{R}^2$. They are the projections onto the x-line of intersections of the graph of f with "z = constant" planes, as shown

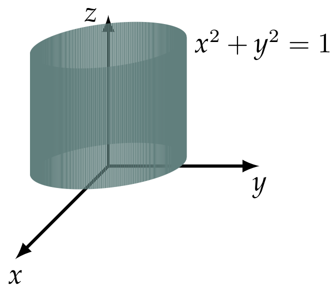


图 **1.5** The level sets of $x^2 + y^2 = 1$ are surfaces in $\mathbb{R}^3$. The graph of f can't be visualized, but the level surfaces contain some geometric information about f

1.2 $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^m$

1.2.1

* 函数 $y = f(x)$ 作为 $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ 的一种特殊映射，也即是说，每个因变量 y 都对应一个或者多个自变量 x，一个自变量唯一地映射出一个 y。

我们定义在实数域上的函数 $f(x): \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$，输入端自变量是一个实数，而（输出端）因变量也是一个实数，通过建立平面直角坐标系，将横轴看成是自变量 x 轴，纵轴定为因变量的实数轴，那么，因变量 y 随着 x 的变化而变化，这样对应地，所有的 (x, y) 构成的集合形成了该函数 $f(x)$ 的图像，如图 1.6所示，函数 $f(x) = x^2 : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$，更一般的来说，我们引用映射的范畴，函数作为映射的一种特殊情形，函数在可视化方面，能够给我们更加直观、便于理解的优势去学习和深入的研究。

* 特别地，函数 $f(x) = x^2$，是一个偶函数，即 $f(x) = x^2$ 的图像关于 y 轴对称，也就是 $f(x) = f(-x)$ 对 $\forall x \in \mathbb{R}^1$ 都成立。

现在，我们考虑这样函数 $f(x)$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$，如函数 $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ 定义了由二维空间 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ 的映射，我们确定区间 $[-2, 2] \times [-2, 2]$，对该函数的函数图像绘制出来，对于 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ 的函数。我们建立空间直角坐标系 $O - xyz$，建立如图所示，我们绘制区域 $[-2, 2] \times [-2, 2]$ 上 $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ 的部分图像如图 1.7所示。

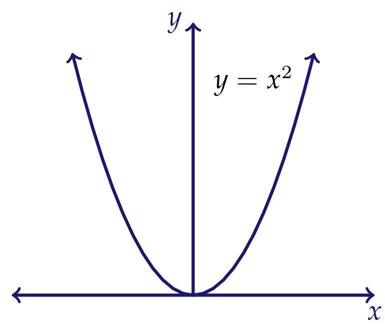


图 **1.6** The graph of a function from $\mathbb{R}^1$ to $\mathbb{R}^1$

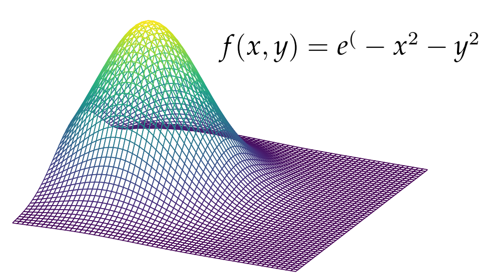


图 **1.7** A graph of a function from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^1$

在函数的可视化中，对于 $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ 的函数，我们可将其可视化，即该函数的图像为满足 $z = f(x, y)$ 的函数表达式的做有点的集合 (x, y, z)，其中，$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^1$，另外，x 称为自变量 x，y 称为自变量 y，这样 $f(x, y)$ 就定义了一个

二元函数，自变量 x,y 构成了 xy-自变量区域，z 是因变量，满足 $z=f(x,y)$ 的所有点 (x,y,z) 构成了函数 $z=f(x,y)$ 的函数图像。例如，函数 $z=f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ 是 $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$ 的函数，我们取定自变量区域 $[0,4]\times[-1,3]$ 的自变量区域，最后我们得到的绘制图像如图所示

现在，我们再来看函数 $f(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$ 由二维空间 $\mathbb{R}^2\to$ 二维空间 $\mathbb{R}^2$ 的函数的图像，和前面的类似，我们考虑自变量区域 $[a,b]\times[c,d](\subset\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)\to[A,B]\times[C,D](\subset\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ 的函数，考虑其图像的绘制，我们取定函数 $u(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$ 以及 $v(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$ 的函数，那么由所有的 $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ 经过函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 后，得到的所有的点 $(u(x,y),v(x,y))$ 的集合就构成了其函数图像。如函数 $f(x,y)=(x+y+\frac{x^3}{100}+1,x-y)$，图像如图 1.8所示。

* 我们在可视化一个图变成另一个图时最好的方法就是，将图分开来进行绘制以便于对比

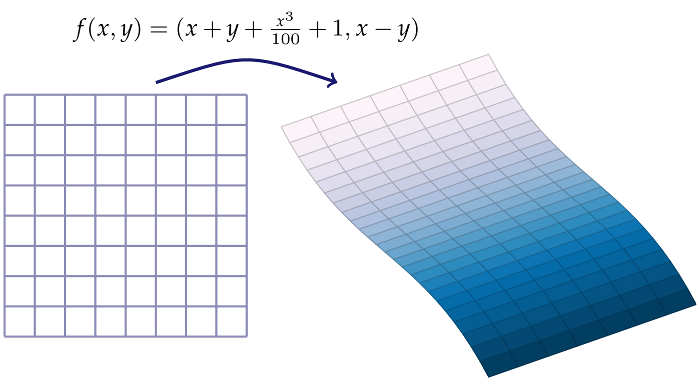


图 1.8 A transformation from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$

通常情况下，我们称 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的函数称为变换，这是 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的函数的一种特殊代名词，主要是在可视化方面具有特殊的意义。类似地，我们也将称 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的函数称为变换，更准确的来说，称之为 R^3 空间上的变换，它的可视化和 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的函数相同。现在，我们把目光聚焦在 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的函数可视化上。

* 特别地，对于变换，我们最初是从最简单的线性变换来研究，这就会涉及到代数学习过程中的知识内容，如矩阵、行列式等内容，这将在后续的章节里面呈现出来

函数的等值面是指三维空间 $\mathbb{R}^3$ 上函数，我们令 $z=$ 某个常数之后形成的图像。为了更加方面的了解，我们先来看下列的例子，我们考虑函数 $f(x,y)=x^2+y^2$，它的水平切面是诸多的同心圆，如图 1.9所示，而函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ 的则是一个表平面，如图 1.10所示。在可视化多元函数过程中，我们把函数置相等的点形成的集合称为等高线，等高线即是函数图像中令 $z=A(A$ 是常数) 与函数图像 $z=f(x,y)$ 的图像相交后所得到的交线。

* This means that Figure 1.9 involves an abuse of notation: the level sets should be points in $\mathbb{R}^2$ rather than points in the xy-plane in $\mathbb{R}^3$. However, it is common practice to make such implicit use of the natural association $(x,y)\leftrightarrow$ $(x,y,0)$ be-

on linear transformations

从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^1$ 的函数可以使用其图形或使用等高线图，而函数图从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^1$ 无法在空间上可视化。因此，轮廓图提供了一个重要的可视化工具，用于实现三个变量的功能。

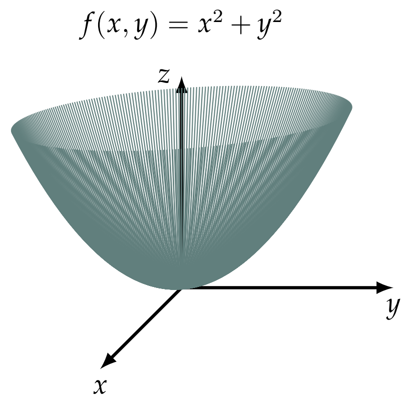
等高线图有一些缺点：除非输出值使用标签或标签标识与每个级别集相对应的着色方案，有关函数值的信息是图片中缺少。换句话说，绘制函数图输入和输出成单个图形，同时绘制水平集仅功能的域 *。

1.2.2

微分学的关键思想之一是使用线性函数以曲线近似函数图。这种近似是有用的，因为（i）所有可微当您放大某个点时，功能看起来越来越线性，并且（ii）线性函数非常简单。我们将应用相同的原理，并使用线性变换近似非线性的就像您了解线性在学习单变量演算之前的函数，我们将探索讨论微分之前的线性变换概括为多变量设置。

* Actually, this view is ubiquitous in mathematics, because the essence of linearity is the pair of properties $f(x+y)=f(x)+f(y)$ and $f(ax)=af(x)$, and we only get these if we insist $b=0$

那么从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的线性函数是什么？形式为 $f(x)=mx+b$ 的单变量函数，其中 m 和 b 是常数，通常称为线性。但是，我们将采取要求 $b=0$ 的视图略有不同，因此仅函数形式 $f(x)mx$ 被认为是线性的。高维的线性相似：仅形式为 “恒定时间变量”：



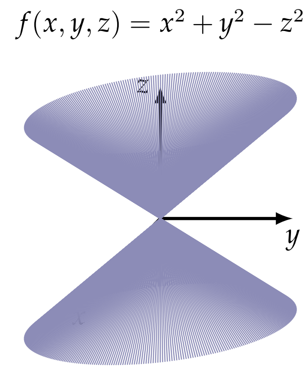


图 1.9 The level sets of $f(x,y) = x^2+y^2$ are concentric circles in $\mathbb{R}^2$. They are the projections onto the xy-plane of intersections of the graph of f with "$z=$ constant" planes, as shown

图 1.10 The level sets of $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ are surfaces in $\mathbb{R}^3$. The graph of f can't be visualized, but the level surfaces contain some geometric information about f

Definition 1.2.1: 线性变换的定义

A function f from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$ is **linear** if there exist* $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ so that

$$f(x,y)=(ax+by,cx+dy).$$

* This notation means that a,b,c,d are in the set of real numbers

图 1.11 显示从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 线性变换的四个例子。的转变图 1.11 *scale*，*shear*，*旋转/缩放*和 *project*。未显示是 *reflection*，例如 $f\ x,y\ =\ x,-y$ 。这是从 R^2 到 $\mathbb{R}^2$ 可以写成这些变换的组合基本类型。

基于图 1.11我们进行猜想, 线性转换将等距线映射到等距线，其中重合线等距间隔为零（如上例所示）。这几乎是准确的：有时也一样等距的线可以映射到等距的点（锻炼 **??**）。以下定理给出了线性的几何特征。

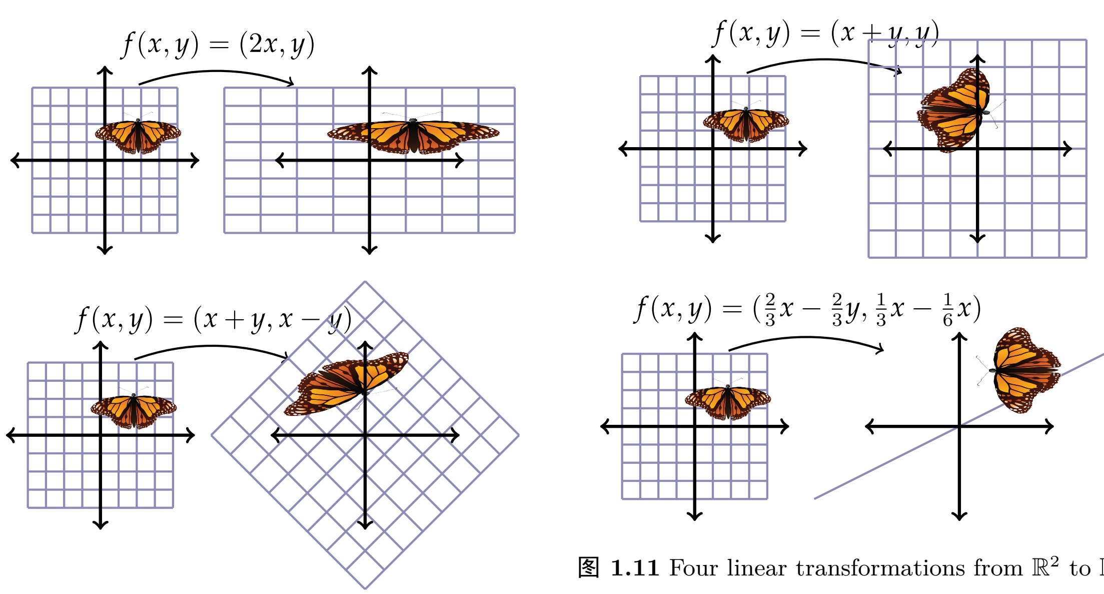


图 1.11 Four linear transformations from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$