プログラム言語論

亀山幸義

筑波大学 情報科学類

No. 5: 型付きラムダ計算

目次

OCaml における様々な型

OCaml はデータ型の構成方法が豊富:

- 基本型: `bool`, `int`, `float`, `string`,...
- 組型: `(2022,"pi",3.14) : int * string * float`
- リスト型: `[10; 20; 30] : int list`
- 配列型: `[|3.14; 2.86; -1.0|]`
- レコード型: `{name="Taro";age=22}`
- バリアント型
- 代数データ型 (次ページに例あり)

関数も普通のデータなので，型を持つ.

- 関数型: `fun x y -> (floor x) + y : float -> int -> int`

OCamlの代数データ型の例

自然数を葉にもつ2分木を「ぴったり」表現する型:

```
type binTree =
    | Leaf of int
    | Node of binTree * binTree  ;;
let tr = Node(Node(Leaf(10),Leaf(20)),Leaf(30)) : binTree

let rec sum t =
 match t with
  | Leaf(i) -> i
  | Node(t1,t2) -> (sum t1) + (sum t2) ;;
sum tr;; (* = 60 *)
```

この種のプログラムでは、「型の整合性の検査」が

- 必要 (プログラミングを間違いやすい)
- 有益 (間違ったら、たいてい、型がおかしくなる)

型の整合性の起源

関数の始域 (domain) と終域 (codomain); $f : Dom \to Codom$

関数 $f : \texttt{int} \to \texttt{string}$ と関数 $g : \texttt{int} \to \texttt{int}$ に対して、

- $f(3)$ ...OK
- $f(\text{"}tsukuba\text{"})$ ...Not OK
- $f(g(3))$ ...OK
- $g(f(\text{"}tsukuba\text{"}))$ ...Not OK

つまり、$f : A \to B$ と $e : C$ に対して、

- $f(e)$ OK $\iff A = C$

※数学的には $A = C$ でなくても $C \subseteq A$ でもよい. ($\Rightarrow$「部分型」を持つように拡張された型システム)

目次

単純型付きラムダ計算と式の構文

単純型付きラムダ計算 (simply typed lambda calculus):

- ラムダ計算に「型」をつけた体系の中で、一番単純なもの

式 (expression) の構文:

$$M ::= x \mid n \mid (M + M) \mid (\lambda x.M) \mid (M\ M)$$

- x は変数、n は整数定数 (3 や -5 など)、$M_1 + M_2$ は加算
- $\lambda x.M$ は、ラムダ抽象 (関数を表す)
- $M_1\ M_2$ は、関数適用 (関数 M_1 に引数 M_2 を渡した計算)
- 括弧は適宜省略: 関数適用はラムダ抽象より強く結合し，左結合

式の例: $\lambda x.\,(x + 5)$, $\lambda x.(\lambda y.((x\ y)\ y))$

型の構文

型の構文:

$$T ::= \texttt{int} \mid T \to T$$

例:

- $\texttt{int} \to \texttt{int}$... 整数をもらって整数を返す関数の型
- $(\texttt{int} \to \texttt{int}) \to \texttt{int}$... 関数をもらって整数を返す (高階) 関数の型
- $\texttt{int} \to (\texttt{int} \to \texttt{int})$... 整数をもらって関数を返す (高階) 関数の型

大事なこと: 型における括弧は意味がある。

- $\texttt{int} \to (\texttt{int} \to \texttt{int})$ と $(\texttt{int} \to \texttt{int}) \to \texttt{int}$ は全く異なる。

型判断 (Typing Judgement)

型判断　$x_1 : T_1, \cdots, x_n : T_n \vdash M : T$

- 「変数 x_i が型 T_i を持つなら、式 M に型 T が付く」を意味する。
- $n = 0$ でもよい。
- $x_1 : T_1, \cdots, x_n : T_n$ の部分を型文脈という (Γ で表す)。

目標: 以下のように判断したい。

- $\vdash 3 : \texttt{int}$ ...OK
- $\vdash x : \texttt{int}$ ...Not OK
- $x : \texttt{int} \vdash x : \texttt{int}$ ...OK
- $x : \texttt{int} \vdash x + y : \texttt{int}$ ...Not OK
- $x : \texttt{int},\ y : \texttt{int},\ z : \texttt{int} \vdash x + y : \texttt{int}$ ...OK
- $x : \texttt{int} \to \texttt{int} \vdash x\ (x\ 3) : \texttt{int}$ ...OK

型導出

型導出 (型付けの導出): 型付け規則を使って型判断 $\Gamma \vdash M : T$ を導く。

型導出の例:

J1. 無条件に、$x : \texttt{int} \vdash x : \texttt{int}$ が導ける。
J2. 無条件に、$x : \texttt{int} \vdash 2 : \texttt{int}$ が導ける。
J3. 1,2 から、$x : \texttt{int} \vdash x + 2 : \texttt{int}$ が導ける。
J4. 無条件に、$x : \texttt{int} \vdash 3 : \texttt{int}$ が導ける。
J5. 3,4 から、$x : \texttt{int} \vdash (x + 2) + 3 : \texttt{int}$ が導ける。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{J1} \quad \dfrac{}{J2}}{J3} \quad \dfrac{}{J4}}{J5}$$

完成版の型導出図:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \texttt{int} \vdash x : \texttt{int}} \quad \dfrac{}{x : \texttt{int} \vdash 2 : \texttt{int}}}{x : \texttt{int} \vdash x + 2 : \texttt{int}} \quad \dfrac{}{x : \texttt{int} \vdash 3 : \texttt{int}}}{x : \texttt{int} \vdash (x + 2) + 3 : \texttt{int}}$$

型付け規則: 定数と加算

整数定数に対する規則 (n は 3 や -5 など):

$$\frac{}{\Gamma \vdash n : \mathtt{int}}$$

加算に対する規則:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathtt{int} \quad \Gamma \vdash N : \mathtt{int}}{\Gamma \vdash M + N : \mathtt{int}}$$

例:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \mathtt{int} \vdash 3 : \mathtt{int}} \quad \dfrac{}{x : \mathtt{int} \vdash 5 : \mathtt{int}}}{x : \mathtt{int} \vdash 3 + 5 : \mathtt{int}} \quad \dfrac{}{x : \mathtt{int} \vdash 7 : \mathtt{int}}}{x : \mathtt{int} \vdash (3 + 5) + 7 : \mathtt{int}}$$

型付け規則: 変数

変数に対する規則:

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : \mathtt{typeof}_x(\Gamma)}$$

typeof 関数は、Γ における x の型 (複数ある時は一番右):

$$\mathtt{typeof}_x(x : \mathtt{int},\ y : \mathtt{int},\ x : \mathtt{int} \to \mathtt{int}) = \mathtt{int} \to \mathtt{int}$$
$$\mathtt{typeof}_z(x : \mathtt{int},\ y : \mathtt{int},\ x : \mathtt{int} \to \mathtt{int}) = (\text{未定義})$$

例:

$$\frac{}{x : \mathtt{int} \to \mathtt{int},\ y : \mathtt{int} \to \mathtt{int},\ x : \mathtt{int} \vdash x : \mathtt{int}}$$

$$\frac{}{x : \mathtt{int} \to \mathtt{int},\ y : \mathtt{int} \to \mathtt{int},\ x : \mathtt{int} \vdash y : \mathtt{int} \to \mathtt{int}}$$

型付け規則: 関数適用

関数適用に対する規則:

$$\frac{\Gamma \vdash M : T_1 \to T_2 \quad \Gamma \vdash N : T_1}{\Gamma \vdash M\ N : T_2}$$

以下では、$\Gamma_1 = x : \mathtt{int}, y : \mathtt{int} \to \mathtt{int}$ とする。
例:

$$\frac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash y : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{}{\Gamma_1 \vdash x : \mathtt{int}}}{\Gamma_1 \vdash y\ x : \mathtt{int}}$$

$$\frac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash y : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash y : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{}{\Gamma_1 \vdash x : \mathtt{int}}}{\Gamma_1 \vdash y\ x : \mathtt{int}}}{\Gamma_1 \vdash y\ (y\ x) : \mathtt{int}}$$

型付け規則: ラムダ抽象 (関数)

ラムダ抽象に対する規則:

$$\frac{\Gamma,\ x : T_1 \vdash M \ :\ T_2}{\Gamma \vdash \lambda x.\ M \ :\ T_1 \to T_2}$$

$\Gamma,\ x : T_1$ は Γ の最後に $x : T_1$ を追加した列のこと。

例:

$$\frac{\overline{x : \texttt{int} \vdash x \ :\ \texttt{int}}}{\vdash \lambda x.\ x \ :\ \texttt{int} \to \texttt{int}}$$

$$\frac{\dfrac{\overline{x : \texttt{int},\ y : \texttt{int} \vdash x \ :\ \texttt{int}}}{x : \texttt{int} \vdash \lambda y.\ x \ :\ \texttt{int} \to \texttt{int}}}{\vdash \lambda x.\ \lambda y.\ x \ :\ \texttt{int} \to (\texttt{int} \to \texttt{int})}$$

型導出図の例 (1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x:\mathtt{int}\vdash x:\mathtt{int}} \qquad \dfrac{}{x:\mathtt{int}\vdash 3:\mathtt{int}}}{x:\mathtt{int}\vdash x+3:\mathtt{int}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{x:\mathtt{int}\vdash 5:\mathtt{int}} \qquad \dfrac{}{x:\mathtt{int}\vdash x:\mathtt{int}}}{x:\mathtt{int}\vdash 5+x:\mathtt{int}}}{x:\mathtt{int}\vdash (x+3)+(5+x):\mathtt{int}}}{\vdash \lambda x.\,((x+3)+(5+x)):\mathtt{int}\to\mathtt{int}}$$

型導出図の例 (2)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x:\texttt{int},\ y:\texttt{int} \vdash x:\texttt{int}} \quad \dfrac{}{x:\texttt{int},\ y:\texttt{int} \vdash 3:\texttt{int}}}{x:\texttt{int},\ y:\texttt{int} \vdash x+3:\texttt{int}} \quad \dfrac{}{x:\texttt{int},\ y:\texttt{int} \vdash y:\texttt{int}}}{x:\texttt{int},\ y:\texttt{int} \vdash (x+3)+y:\texttt{int}}}{x:\texttt{int} \vdash \lambda y.\ ((x+3)+y):\texttt{int}\to\texttt{int}}}{\vdash \lambda x.\ (\lambda y.\ ((x+3)+y)):\texttt{int}\to(\texttt{int}\to\texttt{int})}
$$

型導出図の例 (3)

$\Gamma = x : \texttt{int} \to \texttt{int}$ とする.

$$
\dfrac{
  \dfrac{}{\Gamma \vdash x : \texttt{int} \to \texttt{int}}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{}{\Gamma \vdash x : \texttt{int} \to \texttt{int}}
    \quad
    \dfrac{}{\Gamma \vdash 3 : \texttt{int}}
  }{\Gamma \vdash x\ 3 : \texttt{int}}
}{
  \dfrac{\Gamma \vdash x\ (x\ 3) : \texttt{int}}{\vdash \lambda x.\ (x\ (x\ 3)) : (\texttt{int} \to \texttt{int}) \to \texttt{int}}
}
$$

型導出図の例 (4)

微妙な例:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\color{red}{x : \mathtt{int} \to \mathtt{int},\ x : \mathtt{int} \vdash x : \mathtt{int}}}{} \quad \dfrac{}{\cdots \vdash 3 : \mathtt{int}}}{x : \mathtt{int} \to \mathtt{int},\ x : \mathtt{int} \vdash x + 3 : \mathtt{int}}}{x : \mathtt{int} \to \mathtt{int} \vdash \lambda x.\ (x + 3) : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \begin{array}{c}\vdots \\ \cdots \vdash x\ 5 : \mathtt{int}\end{array}}{\dfrac{x : \mathtt{int} \to \mathtt{int} \vdash (\lambda x.\ (x + 3))\ (x\ 5) : \mathtt{int}}{\vdash \lambda x.\ ((\lambda x.\ (x + 3))\ (x\ 5)) : (\mathtt{int} \to \mathtt{int}) \to \mathtt{int}}}
$$

赤字のところは、以下より:

$$\mathtt{typeof}_x(x : \mathtt{int} \to \mathtt{int},\ x : \mathtt{int}) = \mathtt{int}$$