専門基礎科目 - 必修科目

GB10804　論理回路

1

システム情報系情報工学域　山口佳樹

専門基礎科目 – 必修科目（情報科学学類）
基礎科目 – 関連科目（情報メディア創成学類）
基礎科目 – 関連科目（工学システム学類）

1

前回のおさらい

- 第１回は「デジタルとアナログの違い」、「コンピュータの基本構成」、「2進数の概念」など、計算機リテラシ（講義）を参考に基礎を復習しました。
- 今回はそれらを踏まえ、より数学的に定義された論理演算へと進みます。
- デジタル世界の根幹をなす“真理値”の扱いに注目します。

2

2

本日の目標

- 論理演算の基本操作（NOT, AND, OR）を理解する
- 真理値表の構築方法を習得する
- 論理関数の基本的な意味と応用を理解する
- 論理代数の基本定理やド・モルガンの定理を活用できるようになる

3

3

論理演算

- 論理演算とは、真（True）と偽（False）という2つの値に基づいて行う演算です。
- 計算機内部では、これらは通常、1（真）と0（偽）として表されます。
- 論理演算は、複雑な計算や制御の基本単位として使われます。
- 基本的な論理演算には、否定（NOT）、論理積（AND）、論理和（OR）がありま

4

4

真理値

- 真理値とは、命題の真偽を示す値です。
- 真（True）は「1」、偽（False）は「0」として扱われます。
- 例１：命題「2は偶数である」は真 → 1
- 例２：命題「7は偶数である」は偽 → 0

※ 全ての変数は０と１で表され，
　全ての内容も０と１で評価されます。

5

5

基本論理演算子

基本論理演算は以下の３つがあります。

論理否定（NOT）
　入力が1なら0、0なら1に反転して出力

論理積（AND）
　全ての入力が1のときのみ，出力が1

論理和（OR）
　1つでも入力が1のとき，出力が1

6

6

論理関数

- 論理関数は、入力される真理値に対して論理演算を行い、出力する関数です。
- 例：F(A, B) = A・～B など。
- 論理関数は複数の演算を組み合わせた形になります。
- 計算機では、条件分岐や制御構文に深く関係しています。

7

7

論理代数の始まり

- 論理代数（ブール代数）は英国の数学者の George Boole により体系化されました。
- この代数体系は、0と1の2値のみを扱うことを特徴としています。
- 計算機科学における重要な数学的基礎です。

8

8

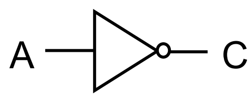
ブール代数（論理演算を扱う代数系）

- 変数の値： 0 または 1
- 論理否定：$\overline{0} = 1$、 $\overline{1} = 0$
- 論理和：$0 + 0 = 0,\ 0 + 1 = 1,$
  $1 + 0 = 1,\ 1 + 1 = 1$
- 論理積：$0 \cdot 0 = 0,\ 0 \cdot 1 = 0,$
  $1 \cdot 0 = 0,\ 1 \cdot 1 = 1$

論理否定（NOT）の真理値表

- NOT演算は、入力値の反転出力を得ます。
- NOT演算の真理値表 ⇒
- ¬A, $\overline{A}$ （～Aも有）
  数学系

論理否定（NOT）



A	C
0	1
1	0

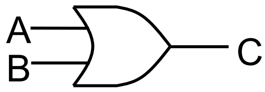
- 演算子には複数の記述法があります。
- 記号の違いに注意し、文脈に応じ使い分けましょう。
- 論理式簡略化や回路記述では使い分けが重要です。

論理和（OR）の真理値表

- OR 演算は、いずれかの入力が１の場合は出力として１を得る
- OR 演算の真理値表 ⇒
- A∨B, A+B

数学系

論理和（OR）



A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

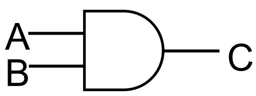
- 演算子には複数の記述法があります。
- 記号の違いに注意し、文脈に応じ使い分けましょう。
- 論理式簡略化や回路記述では使い分けが重要です。

論理積（AND）の真理値表

- AND演算は、全ての入力値が１のときのみ出力１を得る。
- AND 演算の真理値表 ⇒
- A∧B, A·B (ABも有)

数学系

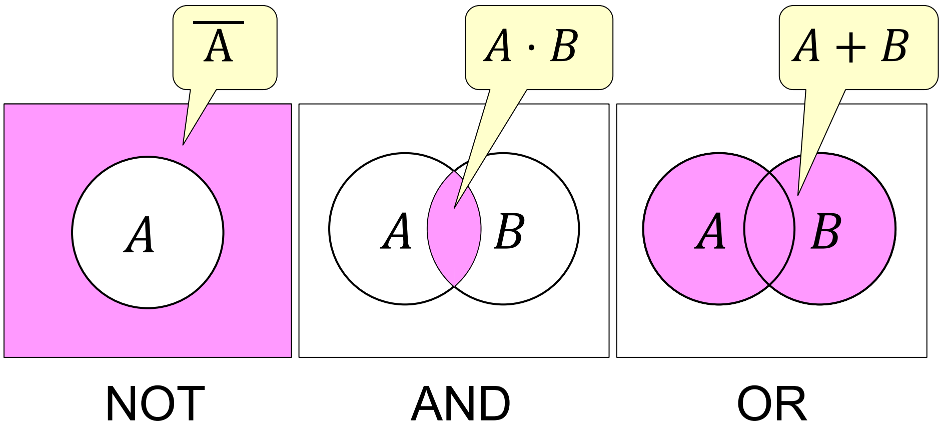
論理積（AND）



A	B	C
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- 演算子には複数の記述法があります。
- 記号の違いに注意し、文脈に応じ使い分けましょう。
- 論理式簡略化や回路記述では使い分けが重要です。

NOT，OR，AND のベン図



論理演算子の優先順位

1. 括弧（）
2. 否定 ～
3. 論理積 ・
4. 論理和 ＋

$$\overline{A \cdot (B + \overline{C})}$$

$$\overline{1 \cdot (0 + \overline{0})}$$
$$\overline{1 \cdot (0 + 1)}$$
$$\overline{1 \cdot 1}$$
$$\overline{1}$$
$$0$$

演習１　真理値表を完成させよう

論理式「～A＋B」の真理値表を完成させてください

真理値表

- 関数値を 0 と 1 の表として表す
  - n 変数ならば組み合わせは2^n通り

例：$f(X,Y) = \overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}$ の真理値表

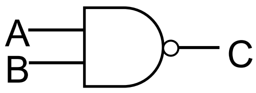
$X\ Y$	$f(X, Y)$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

$$0 \cdot \overline{0} + \overline{0} \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$
$$0 \cdot \overline{1} + \overline{0} \cdot 1 = 0 + 1 = 1$$
$$1 \cdot \overline{0} + \overline{1} \cdot 0 = 1 + 0 = 1$$
$$1 \cdot \overline{1} + \overline{1} \cdot 1 = 0 + 0 = 0$$

否定論理積（NAND）の真理値表

- NAND演算は、全ての入力値が 1 の場合は出力 0 を得る。
- NAND 演算の真理値表 ⇒
- $\overline{AB}$, $\overline{A\cdot B}$, $\overline{A\wedge B}$

否定論理積(NAND)



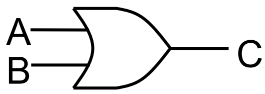
A	B	C
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- 演算子には複数の記述法があります。
- 記号の違いに注意し、文脈に応じ使い分けましょう。
- 論理式簡略化や回路記述では使い分けが重要です。

排他的論理和（XOR）の真理値表

- XOR 演算は、入力値が異なる場合は 1 を同じ場合は 0 を出力する
- XOR 演算の真理値表 ⇒
- $A\oplus B$, $A\veebar B$

排他的論理和(XOR)

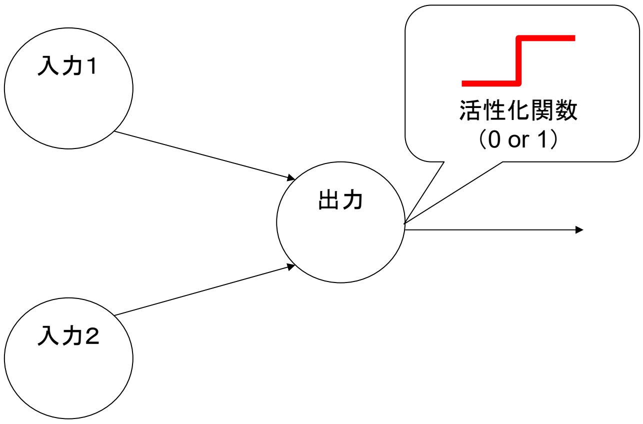


A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- 演算子には複数の記述法があります。
- 記号の違いに注意し、文脈に応じ使い分けましょう。
- 論理式簡略化や回路記述では使い分けが重要です。

（閑話）単純パーセプトロン

- 単純パーセプトロン：入力と出力の二層しかなく，活性化関数にステップ関数を使うニューラルネットワークのこと



20

20

応用例題（希望者のみ提出）

- 単純パーセプトロンで本当に XOR が表現できないか，レポートにして提出してください。
- ChatGPTなどの使用は可とします。
- 面識がない学生が提出したレポートでも，内容が酷似していた場合，カンニングとみなされます。注意して利用してください。

23

23

交換・結合法則

- 交換・結合法則は以下のようになります。

- 交換法則：A+B = B+A, AB = BA

- 結合法則：(A+B)+C = A+(B+C)
  (AB)C = A(BC)

- これらの性質を利用すると論理式の変形が容易になります。

分配法則

- 分配法則は以下のようになります。

- A (B+C) = AB + AC
- A + BC = (A+B)(A+C)

- この法則は式の展開や変形に利用されます。

演習２　分配法則の確認（何故，そうなるか確認してください）

- 分配法則は以下のようになります。

- A (B+C) = AB + AC
- A + BC = (A+B)(A+C)

ベン図で考えてみよう

- この法則は式の展開や変形に利用されます。

26

26

恒等律（単位元と零元），べき等律，吸収律

- 単位元：A+0 = A，A·1 = A

- 零元：　A·0 = 0，A+1 = 1，

演算結果を定数にする

- 補元律（相補律）：$A \cdot \overline{A}$ = 0，$A+\overline{A}$ = 1

- 復元律：A = A

- べき等律：A+A = A，A·A = A

- 吸収律：A+AB = A，A(A+B) = A

28

28

ド・モルガンの定理

- 論理演算の基本的な変形に用いられる定理

- ～(A・B) = ～A+～B
- ～(A+B) = ～A・～B

- 演算が反転する点に注意。

29

29

演習３　ド・モルガンの定理

- ド・モルガンの定理を用いて

～（A・～B+～A・B）

を簡単化してください。

30

30

演習４　次の問題を解いてみましょう

- 以下の３つの命題から正しく導かれる結論は次のうちどれか。

Ａ．協調性のある人は社交的である。

Ｂ．宣伝業務に適性のある人は協調性がある。

Ｃ．協調性のある人は明朗である。

１．社交的な人は宣伝業務に適性がある。
２．協調性のない人は明朗ではない。
３．社交的でない人は宣伝業務に適性がない。
４．社交的な人は明朗である。
５．宣伝業務に適性の無い人は協調性がない。

32

32

双対

- 論理式における双対（dual）とは、0と1、およびANDとORを入れ替える操作です。

例：$A+0 = A$ の双対は $A \cdot 1 = A$

- 双対は論理式の性質を理解し、別の形での表現を考える際に役立ちます。
- 双対関係を用いて、新しい法則や設計上の対称性を見出すことができます。

34

34

演習５　双対式を求めてみよう

- 論理式 A + AB の双対を求めてみよう。

※「+ ↔ ·」「0 ↔ 1」を考える

35

35

基本公式とその双対（1）

- 以下の論理式とその双対を確認しましょう。

- A + 0 = A　→ 双対：A · 1 = A
- A + A = A　→ 双対：A · A = A
- A + 1 = 1　→ 双対：A · 0 = 0

- この対応は論理式の性質理解に不可欠です。

37

37

基本公式とその双対（2）

- さらにいくつかの例を紹介します。

- A + A' = 1 → 双対 : A・A' = 0
- A(B+C) = AB+AC
  →双対 : (A+B)(A+C) = A+BC

- ド・モルガンの定理などと併せて使用することが多いです。

38

38

総合演習

- F = (A ・ B) + ～C の真理値表を完成させてください。

- F = ～(A・(B + C)) をド・モルガンの定理で変形してください。

- 式「A+AB」と「A」は論理的に等価か？

40

40

リテラル，論理和項，論理積項

- リテラルは，論理関数において論理変数そのものを意味します。
- 複数のリテラルを論理積のみで結んで構成される項を，論理積項，と言います。
  （例： $A \cdot B$，$X \cdot \overline{Y} \cdot Z$）
- 複数のリテラルを論理和のみで結んで構成される項を，論理和項，と言います。
  （例： $\overline{A}+B$，$\overline{X}+Y+Z$）

44

44

積和系と和積系

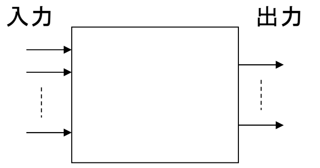
- リテラルは，論理関数において論理変数そのものを意味します。
- 複数の論理積項を論理和のみで結んで構成される論理式を，積和系，と言います。
  （例： $X \cdot \overline{Y} \cdot Z+\overline{X} \cdot Y \cdot Z$）
- 複数の論理和項を論理積のみで結んで構成される論理式を，和積系，と言います。
  （例：$(\overline{A}+B+\overline{C}) \cdot (A+B+C)$）

45

45

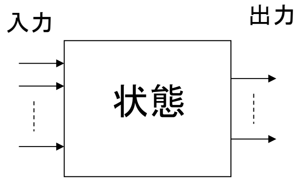
組み合わせ回路と順序回路

- 組み合わせ回路
  - 入力が同じならば、出力は定常状態(いつも同じで1つ)に決まる



すべての入力のパターンに対して
出力が列挙できる

- 順序回路
  - 入力と回路の状態で、出力が決まる

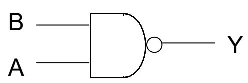


組み合わせ回路の表現

- 真理値表
  - 入力と出力の関係を表す表

B	A	Y
L	L	H
L	H	H
H	L	H
H	H	L

- 基本ゲートの組み合わせ
  - MIL(Military Standard Specification)
    - AND, OR, NOT, NAND, NOR, XOR, …



NAND

- 論理式

48

論理式

- AND, OR, NOT の組み合わせで論理関係を記述する
- AND → ･
- OR → + または |
- NOT → ‾ または ~

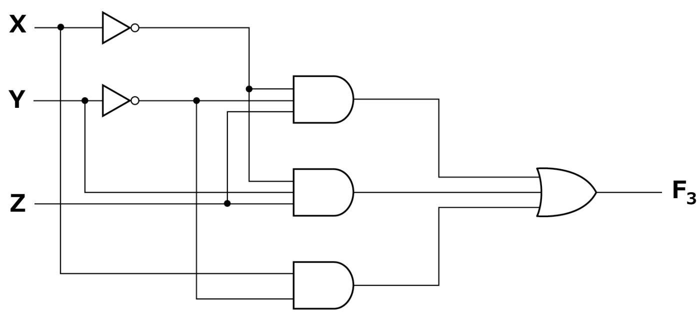
$A = X+\overline{Y} + P\cdot\overline{(Q+R)}$

B = X+~Y + P･~(Q+R)

48

49

論理ゲートと論理式

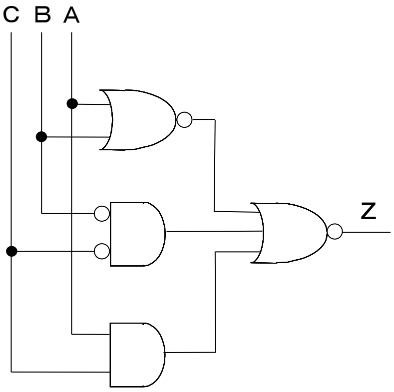


F_3 = ~x･~y･z + ~x･y･z + x･~y

49

50

問題



C	B	A	Z
L	L	L	
L	L	H	
L	H	L	
L	H	H	
H	L	L	
H	L	H	
H	H	L	
H	H	H	

C	B	A	Z
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

上の回路に相当する真理値表を完成させなさい。
（H=1、L=0、です．馴染みのある方を使ってください．）

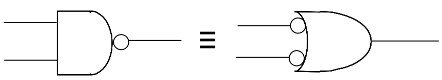
50

52

ド・モルガンの法則

- $\overline{A\cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

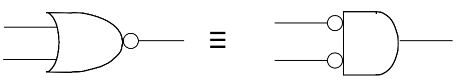
機能（真理値表）は全く同じ
表現（論理式、MIL記号）は異なる



入力が両方ともHのとき
出力はL

入力のどちらかががLのとき
出力はH

- $\overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B}$



52

53

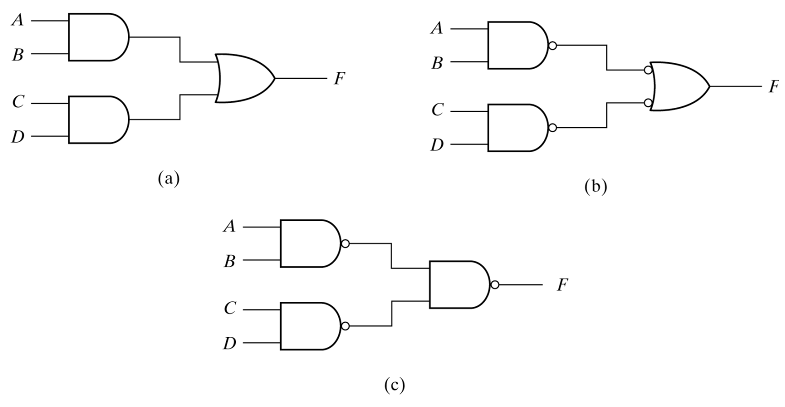
(問題)ド・モルガンの法則

A	B	A・B	$\overline{A\cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

53

55

論理ゲートの表現方式



A・B ＋C・D の 論理ゲート表現
トランジスタ回路レベルで設計する場合、「NAND」ゲートで考える

55

ブール代数の規則

交換則	A+B = B+A A･B=B･A
結合則	(A+B)+C=A+(B+C) (A･B)･C=A･(B･C)
分配則	A･(B+C)=(A･B)+(A･C) A+(B･C)=(A+B)･(A+C)
同一則	A+A=A A･A=A
吸収則	A+(A･B)=A A･(A+B)=A
相補則	A+A=1 A･A!=0
2重否定	(A!)!=A

56