レポート No.3 課題の解答例

今回の必修課題は、M_1, M_3 であるが、ここでは全問の解答をのせる。

1　演習問題その 1

$\Gamma = y : \mathtt{int} \to \mathtt{int}$ とする。

$\Gamma \vdash y\,(y\,7) : \mathtt{int}$ の型導出図

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash y : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash y : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash 7 : \mathtt{int}}}{\Gamma \vdash y\,7 : \mathtt{int}}}{\Gamma \vdash y\,(y\,7) : \mathtt{int}}$$

$\Gamma \vdash \lambda x.\ (y\,(y\,x))) : \mathtt{int} \to \mathtt{int}$ の型推論図

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, x : \mathtt{int} \vdash y : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, x : \mathtt{int} \vdash y : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{}{\Gamma, x : \mathtt{int} \vdash x : \mathtt{int}}}{\Gamma, x : \mathtt{int} \vdash y\,x : \mathtt{int}}}{\Gamma, x : \mathtt{int} \vdash y\,(y\,x) : \mathtt{int}}}{\Gamma \vdash \lambda x.\ (y\,(y\,x)) : \mathtt{int} \to \mathtt{int}}$$

$\Gamma \vdash \lambda x.\ \lambda y.\ (x + y) + 3 : \mathtt{int} \to (\mathtt{int} \to \mathtt{int})$ の型推論図

$\Gamma_2 = y : \mathtt{int} \to \mathtt{int}, x : \mathtt{int}, y : \mathtt{int}$ とする。型環境に y が 2 回出現するが、右にあるものを優先する。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_2 \vdash x : \mathtt{int}} \quad \dfrac{}{\Gamma_2 \vdash y : \mathtt{int}}}{\Gamma_2 \vdash x + y : \mathtt{int}} \quad \dfrac{}{\Gamma_2 \vdash 3 : \mathtt{int}}}{\Gamma_2 \vdash (x + y) + 3 : \mathtt{int}}}{\Gamma, x : \mathtt{int} \vdash \lambda y.\ (x + y) + 3 : \mathtt{int} \to \mathtt{int}}}{\Gamma \vdash \lambda x.\ \lambda y.\ (x + y) + 3 : \mathtt{int} \to (\mathtt{int} \to \mathtt{int})}$$

$\Gamma \vdash \lambda x.\ ((y\,(x\,3)) + (x\,(y\,5)))) : (\mathtt{int} \to \mathtt{int}) \to \mathtt{int}$ の型推論図

$\Gamma_3 = y : \mathtt{int} \to \mathtt{int}, x : \mathtt{int} \to \mathtt{int}$ とする。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_3 \vdash y : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_3 \vdash x : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{}{\Gamma_3 \vdash 3 : \mathtt{int}}}{\Gamma_3 \vdash x\,3 : \mathtt{int}}}{\Gamma_3 \vdash y\,(x\,3) : \mathtt{int}} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_3 \vdash x : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_3 \vdash y : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{}{\Gamma_3 \vdash 5 : \mathtt{int}}}{\Gamma_3 \vdash y\,5 : \mathtt{int}}}{\Gamma_3 \vdash x\,(y\,5) : \mathtt{int}}}{\Gamma_3 \vdash (y\,(x\,3)) + (x\,(y\,5)) : \mathtt{int}}}{\Gamma \vdash \lambda x.\ ((y\,(x\,3)) + (x\,(y\,5))) : (\mathtt{int} \to \mathtt{int}) \to \mathtt{int}}$$

$\Gamma \vdash \lambda f.\ \lambda x.\ (f\,(f\,(x+7))) : (\mathtt{int} \to \mathtt{int}) \to (\mathtt{int} \to \mathtt{int})$ の型推論図

$\Gamma_4 = y : \mathtt{int} \to \mathtt{int},\ f : \mathtt{int} \to \mathtt{int},\ x : \mathtt{int}$ とする。

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{\Gamma_4 \vdash f : \mathtt{int} \to \mathtt{int}}
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{}{\Gamma_4 \vdash f : \mathtt{int} \to \mathtt{int}}
      \qquad
      \dfrac{
        \dfrac{}{\Gamma_4 \vdash x : \mathtt{int}}
        \quad
        \dfrac{}{\Gamma_4 \vdash 7 : \mathtt{int}}
      }{\Gamma_4 \vdash x + 7 : \mathtt{int}}
    }{\Gamma_4 \vdash f\,(x+7) : \mathtt{int}}
  }{
    \dfrac{\Gamma_4 \vdash f\,(f\,(x+7)) : \mathtt{int}}{\Gamma, f : \mathtt{int} \to \mathtt{int} \vdash \lambda x.\ f\,(f\,(x+7)) : \mathtt{int} \to \mathtt{int}}
  }
}{\Gamma \vdash \lambda f.\ \lambda x.\ (f\,(f\,(x+7))) : (\mathtt{int} \to \mathtt{int}) \to (\mathtt{int} \to \mathtt{int})}
$$

2　演習問題その 2

今回の必修課題は、ω, S であるが、ここでは全問の解答をのせる。

項 $I = \lambda x.\ x$ に対する型推論

$$
\dfrac{\dfrac{}{x : \tau_2 \vdash x : \tau_3}}{\vdash \lambda x.\ x : \tau_1}
$$

ただし、τ_i は以下の等式を満たす型である。

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \tau_2 \to \tau_3 \\
\tau_2 &= \tau_3
\end{aligned}
$$

これらを (適当に) 解いて、

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &:= T_1 \to T_1 \\
\tau_2 &:= T_1 \\
\tau_3 &:= T_1
\end{aligned}
$$

となる。ただし、T_1 はどんな型でもよいので、たとえば、$T_1 = \mathtt{int}$ とすると、$\vdash I : \mathtt{int} \to \mathtt{int}$ が導ける。

型導出図は、上記のものに τ_i を具体化すればよい。

項 $K = \lambda x.\ \lambda y.\ x$ に対する型推論

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \tau_2,\ y : \tau_4 \vdash x : \tau_5}}{x : \tau_2 \vdash \lambda y.\ x : \tau_3}}{\vdash \lambda x.\ \lambda y.\ x : \tau_1}
$$

ただし、τ_i は以下の等式を満たす型である。

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \tau_2 \to \tau_3 \\
\tau_3 &= \tau_4 \to \tau_5 \\
\tau_2 &= \tau_5
\end{aligned}
$$

これらを (適当に) 解いて、

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &:= T_1 \to (T_2 \to T_1) \\
\tau_2 &:= T_1 \\
\tau_3 &:= T_2 \to T_1
\end{aligned}
$$

となる。ただし、T_1 と T_2 はどんな型でもよいので、たとえば、$T_1 = T_2 = \mathtt{int}$ とすると、$\vdash K : \mathtt{int} \to (\mathtt{int} \to \mathtt{int})$ という型導出図となる.

項 $\omega = (\lambda x.\ (x\,x))\,(\lambda x.\ (x\,x)$ に対する型推論

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \tau_2 \vdash x : \tau_3 \to \tau_1} \quad \dfrac{}{x : \tau_2 \vdash x : \tau_3}}{x : \tau_2 \vdash x\,x : \tau_1}}{\vdash \lambda x.\ (x\,x) : \tau_2 \to \tau_1} \qquad \dfrac{\cdots}{\vdash \lambda x.\ (x\,x) : \tau_2}}{\vdash \omega : \tau_1}
$$

ただし、τ_i は以下の等式を満たす型である。

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \tau_2 \to \tau_3 \\
\tau_2 &= \tau_3 \to \tau_1 \\
\tau_2 &= \tau_3
\end{aligned}
$$

これの解は、$\tau_3 = \tau_3 \to (\tau_3 \to \tau_3)$ を満たす必要があるが、これは出現チェック (occurs check, 型変数 X を含む式 T にたいして、$X = T$ という形の等式は、T が X そのものでないかぎり、右辺の方が常に「サイズが大きな型」になるので解がない) にひっかかり、解がない等式である。

よって、ω は型がつかない。

- 補足 1. ω をラムダ計算の計算規則に従って計算すると無限ループである。実は、「単純型付きラムダ計算で型が付く式の計算は、有限回で停止する」(停止性、強正規化可能性) が成立するので、その観点からも、ω に型が付かないことが言える。
- 補足 2. $X = X \to \mathtt{int}$ のような等式を満たす型 X がない、といったが、これは、型システムによる。「単純型付きラムダ計算」や、この授業で後ほどやる「多相型ラムダ計算」では、この等式を満たす型 X は存在しない (これらの体系は、停止性を満たす) のであるが、一方で、「式の計算は (たまには) 停止しなくてもよいから、なにがなんでも、$X = X \to \mathtt{int}$ という等式を満たす型がほしい」という場合がある。そのような要求は単なる「わがまま」ではなく、オブジェクト指向言語の型システムなどで発生することが知られており、そのために、再帰型 (recursive type) という、型の構成法について研究されている。詳細を知りたい人は Types and Programming Languages, Benjamin C. Pierce, MIT Press(日本語の翻訳あり) などの参考書を参照されたい。

項 $S = \lambda f.\ \lambda g.\ \lambda x.\ ((f\ x)\ (g\ x))$ に対する型推論

普通にやると、型変数がめちゃくちゃ多くなるので、明らかに等しい型だとわかる場合は，新しい型変数を導入しない，などの節約をする。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{f:\tau_2,\ g:\tau_4,\ x:\tau_6 \vdash f:\tau_2} \quad \dfrac{}{f:\tau_2,\ g:\tau_4,\ x:\tau_6 \vdash x:\tau_6}}{f:\tau_2,\ g:\tau_4,\ x:\tau_6 \vdash f\ x:\tau_8} \quad \dfrac{\dfrac{}{f:\tau_2,\ g:\tau_4,\ x:\tau_6 \vdash g:\tau_4} \quad \dfrac{}{f:\tau_2,\ g:\tau_4,\ x:\tau_6 \vdash x:\tau_6}}{f:\tau_2,\ g:\tau_4,\ x:\tau_6 \vdash g\ x:\tau_9}}{f:\tau_2,\ g:\tau_4,\ x:\tau_6 \vdash (f\ x)\ (g\ x):\tau_7}}{f:\tau_2,\ g:\tau_4 \vdash \lambda x.\ ((f\ x)\ (g\ x)):\tau_5}}{f:\tau_2 \vdash \lambda g.\ \lambda x.\ ((f\ x)\ (g\ x)):\tau_3}}{\vdash \lambda f.\ \lambda g.\ \lambda x.\ ((f\ x)\ (g\ x)):\tau_1}
$$

ただし、τ_i は以下の等式を満たす型である。

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \tau_2 \to \tau_3 \\
\tau_3 &= \tau_4 \to \tau_5 \\
\tau_5 &= \tau_6 \to \tau_7 \\
\tau_8 &= \tau_9 \to \tau_7 \\
\tau_2 &= \tau_6 \to \tau_8 \\
\tau_4 &= \tau_6 \to \tau_9
\end{aligned}
$$

これらを (適当に) 解いて、

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &:= (T_1 \to (T_3 \to T_2)) \to ((T_1 \to T_3) \to (T_1 \to T_2)) \\
\tau_2 &:= T_1 \to (T_3 \to T_2) \\
\tau_3 &:= (T_1 \to T_3) \to (T_1 \to T_2) \\
\tau_4 &:= T_1 \to T_3 \\
\tau_5 &:= T_1 \to T_2 \\
\tau_6 &:= T_1 \\
\tau_7 &:= T_2 \\
\tau_8 &:= T_3 \to T_2 \\
\tau_9 &:= T_3
\end{aligned}
$$

ただし、T_1 と T_2 と T_3 はどんな型でもよいので、たとえば、$T_1 = T_2 = T_3 = \texttt{int}$ とすると、$\vdash S : (\texttt{int} \to (\texttt{int} \to \texttt{int})) \to ((\texttt{int} \to \texttt{int}) \to (\texttt{int} \to \texttt{int}))$ という型導出図となる.

項 $Y = \lambda f.\ ((\lambda x.\ (f\ (x\ x)))(\lambda x.\ (f\ (x\ x))))$ に対する型推論

以下の型推論図では，右半分を省略して「$\cdots$」としている．

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{}{f:\tau_2,\ x:\tau_5 \vdash f:\tau_2}
        \quad
        \dfrac{
          \dfrac{}{f:\tau_2,\ x:\tau_5 \vdash x:\tau_5}
          \quad
          \dfrac{}{f:\tau_2,\ x:\tau_5 \vdash x:\tau_5}
        }{f:\tau_2,\ x:\tau_5 \vdash x\ x:\tau_7}
      }{f:\tau_2,\ x:\tau_5 \vdash f\ (x\ x):\tau_6}
    }{f:\tau_2 \vdash \lambda x.\ (f\ (x\ x)):\tau_4}
    \qquad \cdots
  }{f:\tau_2 \vdash (\lambda x.\ (f\ (x\ x)))\ (\cdots):\tau_3}
}{\vdash Y:\tau_1}
$$

ただし、τ_i は以下の等式を満たす型である。

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &:= \tau_2 \to \tau_3 \\
\tau_4 &:= \cdots \\
\tau_4 &:= \tau_5 \to \tau_6 \\
\tau_2 &:= \tau_7 \to \tau_6 \\
\tau_5 &:= \tau_5 \to \tau_7
\end{aligned}
$$

これらを解こうとすると、$\tau_5 = \tau_5 \to \tau_7$ でなければいけない。

しかし、どんな型を τ_5 と τ_7 に代入しても、この等式を満たすことはできない.

よって、$\vdash Y : T$ という型付けができる型 T は存在しない。

補足: Y は、ω と同様に型がつかないので、なんの役にも立たないように見えるが、そうではない。「型のない (型がつかない) ラムダ計算」では、「Y を使って再帰関数を定義する」ことができるのである。この事実を使って、「ラムダ計算が、任意の再帰関数を定義できる体系である (したがって、Turing 機械の計算をすべて表せる)」ということを示せるので、Y は非常に重要なラムダ式であり、「不動点コンビネータ (fixpoint combinator)」といった名前がついている。

一方で、Y に型がつかない (Y 以外にも不動点コンビネータはいろいろ知られているが、その全てに型がつかない) ということは、「単純型付きラムダ計算は、Turing 完全でない」ことを示唆する。つまり、単純型付きラムダ計算で表現できる計算は、いわゆる「計算可能関数」の全体でなく、真部分集合であることが知られている。従って、単純型付きラムダ計算 (および、多相ラムダ計算など Y が型付けられない体系) をもとにプログラム言語を設計すると、そのままでは表現力が弱いので、別途、「再帰関数を定義する仕掛け」を追加する必要がある。実際、ML 系言語 (多相ラムダ計算がもとになっている言語) でも、「再帰関数を定義する仕掛け」として `let rec ...` が導入されているのは、皆さんが知っての通りである。

C と B に対する型推論

両方とも型がつくが、型導出図はこれまでとほぼ同様なので省略。