微分積分 B（情報科学類 3・4 クラス対象）

第 3 回　演習課題解説

担当教員：萬 礼応（情報科学類）

2025 年 5 月 8 日 (木)

課題解説：問題 1 (1)

1. 次式で定義される陰関数 $y = \phi(x)$ の導関数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，及び第 2 次導関数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ を求めなさい．

(1) $f(x, y) = ax^2 + by^2 - 1 = 0$ （a, b は定数，$a, b > 0$）

【解答】

$y = \phi(x)$ の導関数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ を求める．$f(x, y) = 0$ の両辺を x で微分すると，

$$2ax + 2by \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y}. \tag{1}$$

次に第 2 次導関数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ を求める．式 (1) の両辺を x で微分すると，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{y - x \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{y^2}.$$

上式に式 (1) を代入し，$ax^2 + by^2 = 1$ であることを用いると，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{y - x \cdot \left(-\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{ax^2 + by^2}{by^3} = -\frac{a}{b^2y^3}.$$

課題解説：問題 1 (2)

(2) $f(x,y) = x^2 - 4xy + 5y^2 - 1 = 0$

【解答】

$y = \phi(x)$ の導関数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ を求める．$f(x,y) = 0$ の両辺を x で微分すると，

$$
\begin{aligned}
& 2x - 4y - 4x \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 10y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x - 4y + (-4x + 10y) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x - 4y}{4x - 10y} = \frac{x - 2y}{2x - 5y}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

次に第 2 次導関数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ を求める．式 (2) の両辺を x で微分すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{\left(1 - 2 \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \cdot (2x - 5y) - (x - 2y) \cdot \left(2 - 5 \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{(2x - 5y)^2} \\
&= -\frac{\cancel{2x} - 5y - 4x \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \cancel{10y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} - \cancel{2x} + 5x \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4y - \cancel{10y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}}{(2x - 5y)^2} = \frac{-y + x \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{(2x - 5y)^2}.
\end{aligned}
$$

課題解説：問題 1 (2)

上式に式 (2) を代入すると，

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-y + x \cdot \dfrac{x-2y}{2x-5y}}{(2x-5y)^2} = \frac{-2xy + 5y^2 + x^2 - 2xy}{(2x-5y)^3} = \frac{x^2 - 4xy + 5y^2}{(2x-5y)^3}.$$

ここで，$x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$ であるから，

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{(2x-5y)^3}.$$

課題解説：問題 2

2. $x+y+z=p$，$lx+my+nz=q$ **（**p,q,l,m,n **は定数）のとき，** $m\neq n$ **を満たす** (x,y,z) **において，** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ **を求めなさい．**

【解答】

関数 $f(x,y,z)$，$g(x,y,z)$ を

$$f(x,y,z)=x+y+z-p=0,\quad g(x,y,z)=lx+my+nz-q=0$$

とおく．両辺を x で微分すると，

$$f_x+f_y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f_z\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0, \tag{3}$$

$$g_x+g_y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+g_z\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=l+m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \tag{4}$$

を得る．

課題解説：問題 2

式 (3) より $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -1 - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ となり，これを式 (4) に代入すると，

$$l + m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + n\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = l + m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - n - n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = l - n + (m-n)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \therefore \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{n-l}{m-n}.$$

また，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ は，

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -1 - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1 - \frac{n-l}{m-n} = \frac{l-m}{m-n}.$$

【補足】

$f(x,y,z) = 0,\ g(x,y,z) = 0$ を x で微分して得られる式を行列・ベクトルで表記すると，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ l \end{bmatrix}$$

となる．ヤコビアンは $n-m$ であり，問題の仮定からヤコビアンは 0 にならず，連立一次方程式の解は一意に定まる．

3. $\phi(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ **の条件下で，関数** $f(x,y) = x^2 + y^2$ **の最大値・最小値を求めなさい．**

【解答】

$\phi(x,y) = 0$ は有界閉集合であるから，$f(x,y) = x^2 + y^2$ は $\phi(x,y) = 0$ 上の点で最大値と最小値をとる．また，$\phi_x = 2x + y$, $\phi_y = x + 2y$ より，$\phi(x,y) = 0$ 上の点では ϕ_x, ϕ_y は同時に 0 にならないから特異点はない．関数 $F(x,y,\lambda)$ を以下のように定義する．

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda\left(x^2 + xy + y^2 - 1\right).$$

$F_x = F_y = F_\lambda = 0$ を連立すると，

$$F_x = 2x + 2\lambda x + \lambda y = 2(1+\lambda)x + \lambda y = 0, \tag{5}$$

$$F_y = 2y + \lambda x + 2\lambda y = \lambda x + 2(1+\lambda)y = 0, \tag{6}$$

$$F_\lambda = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0. \tag{7}$$

課題解説：問題 3

式 (5) より $x = -\dfrac{\lambda}{2(1+\lambda)}y$ が得られ，これを式 (6) に代入すると，

$$-\frac{\lambda^2}{2(1+\lambda)}y + 2(1+\lambda)y = \frac{3\lambda^2 + 8\lambda + 4}{2(1+\lambda)}y = 0.$$

y によらず上式が成り立つには，$3\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$ であればよい．この 2 次方程式を解くと，$\lambda = -\dfrac{2}{3}, -2$ を得る．

- $\lambda = -\dfrac{2}{3}$ のとき，$x = y$ が得られ，これを式 (7) に代入すると，$y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る．よって，$(x, y) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$（複合同順）．
- $\lambda = -2$ のとき，$x = -y$ が得られ，これを式 (7) に代入すると，$y = \pm 1$ を得る．よって，$(x, y) = (\pm 1, \mp 1)$（複合同順）．

課題解説：問題 3

以上より，$(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), (-1, 1), (1, -1)$ の 4 点が得られ，関数値はそれぞれ，$\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2, 2$ である．したがって，$\phi(x, y) = 0$ の条件下での $f(x, y)$ の最大値は 2，最小値は $\frac{2}{3}$ である．

課題解説：問題 3

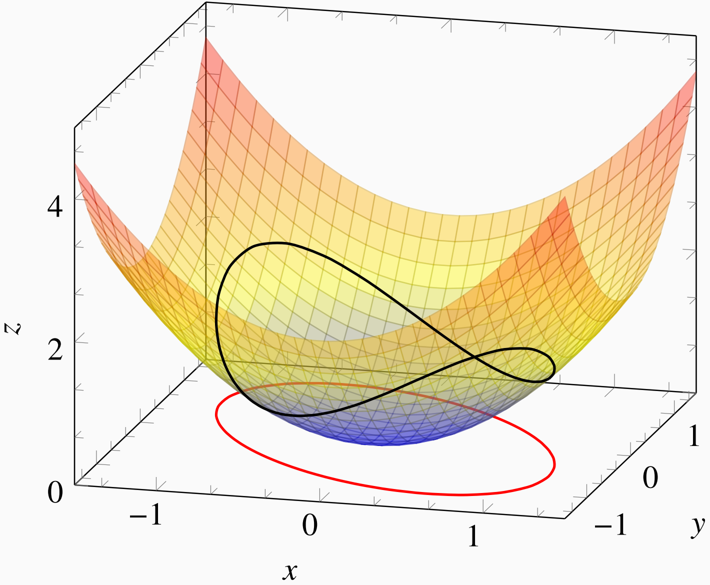

図 1: 条件 $\phi(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ における $f(x, y) = x^2 + y^2$ の関数値．