

『論理と形式化』資料 No.9 演習問題の解答例

亀山幸義 (kam[at]cs.tsukuba.ac.jp)

No.9 で出題した問題等の解答を掲載する。

演習問題 0 の解答例

以下のプログラムに対して、 $?- \text{foo}(\text{s}(\text{s}(\text{s}(\text{s}(\text{s}(0))))), \text{s}(\text{s}(0)), X).$ などのゴールをいろいろ動かすと、「 $\text{foo}(X, Y, Z).$ は、 X を Y で割った (整数上の) 商が Z である」ことがわかる。

```
geq(X, 0).  
geq(s(X), s(Y)) :- geq(X, Y).  
lt(0, s(X)).  
lt(s(X), s(Y)) :- lt(X, Y).  
sub(X, 0, X).  
sub(s(X), s(Y), Z) :- sub(X, Y, Z).  
foo(X, Y, s(Z)) :- geq(X, Y), sub(X, Y, W), foo(W, Y, Z).  
foo(X, Y, 0) :- lt(X, Y).
```

演習問題 1 の 1 つ目

以下の Prolog プログラム (資料では例 2 のプログラム) に対して、ゴール $G_0 = \{Q, S\}$ を走らせた実行過程と対応する証明を書きなさい。

```
H1   Q :- R, S.  
H2   R :- S.  
H3   S.
```

ゴール $?- Q, S.$ の実行:

0. $G_0 = \{Q, S\}.$
1. Q に対して (H1) を使って: $G_1 = \{R, S, S\}.$
2. R に対して (H2) を使って: $G_2 = \{S, S, S\}.$
3. S に対して (H3) を使って: $G_3 = \{S, S\}.$
4. S に対して (H3) を使って: $G_4 = \{S\}.$
5. S に対して (H3) を使って: $G_5 = \{\}.$ ゴールが空集合になったので、実行は成功。

対応する証明:

$$\begin{array}{c}
 \frac{(H1) \quad (R \wedge S) \supset Q}{Q} \quad \frac{\frac{(H2) \quad S \supset R \quad (H3) \quad S \supset \neg E}{R} \quad (H3) \quad S}{R \wedge S} \wedge\text{-I} \\
 \frac{Q \quad R \wedge S}{Q \wedge S} \supset\text{-E} \quad (H3) \quad S \\
 \frac{Q \wedge S}{Q \wedge S} \wedge\text{-I}
 \end{array}$$

演習問題 1 の 2 つ目

以下のプログラムに対して、ゴール $G_0 = \{P\}$ に対する実行の過程と、それが成功するときの証明を書きなさい。

H1 $P :- Q, R.$
 H2 $P :- Q, T.$
 H3 $Q :- S.$
 H4 $Q.$
 H5 $T.$

ゴール? - $P.$ の実行:

0. $G_0 = \{P\}.$
1. P に対して (H1) を使って: $G_1 = \{Q, R\}.$
2. Q に対して (H3) を使って: $G_2 = \{S, R\}.$
3. S に対して使えるルールがないので失敗して、バックトラックする。(上記の 2 まで戻る。)
4. Q に対して (H4) を使って: $G_3 = \{R\}.$
5. R に対して使えるルールがないので失敗して、バックトラックする。(上記の 1 まで戻る。)
6. P に対して (H2) を使って: $G_4 = \{Q, T\}.$
7. Q に対して (H3) を使って: $G_5 = \{S, T\}.$
8. S に対して使えるルールがないので失敗して、バックトラックする。(上記の 7 まで戻る。)
9. Q に対して (H4) を使って: $G_6 = \{T\}.$
10. T に対して (H5) を使って: $G_7 = \{\}.$ ゴールが空集合になったので、実行は成功。

対応する証明:

$$\begin{array}{c}
 \frac{(H2) \quad (Q \wedge T) \supset P}{P} \quad \frac{(H4) \quad Q \quad (H5) \quad T}{Q \wedge T} \wedge\text{-I} \\
 \frac{P \quad Q \wedge T}{P} \supset\text{-E}
 \end{array}$$

演習問題 2 のその 1

Prolog プログラム (例 4, 例 5 のプログラム):

H1 $\text{add}(0, Y, Y) .$
H2 $\text{add}(s(X), Y, s(Z)) :- \text{add}(X, Y, Z) .$

上記プログラムで、ゴール $G = \{\text{add}(s(s(V)), s(0), W)\}$ を実行した過程と対応する証明を書きなさい。

ゴール? - $\text{add}(s(s(V)), s(0), W) .$ の実行:

0. $G_0 = \{\text{add}(s(s(V)), s(0), W)\} .$
1. $\text{add}(s(s(V)), s(0), W)$ は (H1) のヘッドとはマッチしない。
2. $\text{add}(s(s(V)), s(0), W)$ と (H2) のヘッドは、代入 $[X := s(V), Y := s(0), W := s(Z)]$ によりマッチする。新しいゴールは、 $G_1 = \{\text{add}(s(V), s(0), Z)\}$ である。
3. $\text{add}(s(V), s(0), Z)$ は (H1) のヘッドとはマッチしない。
4. $\text{add}(s(V), s(0), Z)$ と (H2) のヘッドはマッチする。ここで双方で Z が使われているので、(H2) の Z を Z' に変更しておく。代入 $[X := V, Y := s(0), Z := s(Z')]$ によりマッチする。新しいゴールは、 $G_2 = \{\text{add}(V, s(0), Z')\}$ である。
3. $\text{add}(V, s(0), Z')$ と (H1) のヘッドは、代入 $[V := 0, Y := s(0), Z' := s(0)]$ によりマッチする。新しいゴールは、 $G_3 = \{\}$ である。
4. ゴールが空集合になったので、成功で終わる。
5. 途中で出てきた代入たちを合成することにより、 $V = 0, W = s(s(s(0)))$ という答えを得る。(これ以外にも解はあるが、ここまでにする。)

対応する証明 (スペースの都合で $s^n(0)$ を n と書く):

$$\frac{\frac{(H2)}{\text{add}(1, 1, 2) \supset \text{add}(2, 1, 3)} \forall\text{-E} \quad \frac{\frac{(H2)}{\text{add}(0, 1, 1) \supset \text{add}(1, 1, 2)} \forall\text{-E} \quad \frac{(H1)}{\text{add}(0, 1, 1)} \forall\text{-E}}{\text{add}(1, 1, 2)} \supset\text{-E} \quad \text{add}(1, 1, 2)} \supset\text{-E} \quad \text{add}(2, 1, 3)$$

演習問題 2 のその 2

ゴール $G' = \{\text{add}(s(s(V)), s(0), s(V))\}$ を実行した過程を、上記と同様に書きなさい。また、実行が成功するとき、対応する証明を書きなさい。

ゴール? - $\text{add}(s(s(V)), s(0), s(V)) .$ の実行:

0. $G_0 = \{\text{add}(s(s(V)), s(0), s(V))\} .$
1. $\text{add}(s(s(V)), s(0), s(V))$ は (H1) のヘッドとはマッチしない。
2. $\text{add}(s(s(V)), s(0), s(V))$ と (H2) のヘッドは、代入 $[X := s(V), Y := s(0), Z := V]$ によりマッチする。新しいゴールは、 $G_1 = \{\text{add}(s(V), s(0), V)\}$ である。
3. $\text{add}(s(V), s(0), V)$ は (H1) のヘッドとはマッチしない。
4. $\text{add}(s(V), s(0), V)$ と (H2) のヘッドはマッチする。代入 $[X := s(Z), Y := s(0), V := s(Z)]$ によりマッチする。新しいゴールは、 $G_2 = \{\text{add}(s(Z), s(0), Z)\}$ である。
5. 以下同様に (H1) とマッチし続けて、無限ループである。

実行が成功しないので、対応する証明はない。

演習問題 2

- 節 $C_1 = (P \vee \neg A \vee \neg B)$ と節 $C_2 = (\neg C \vee \neg P \vee \neg D)$ に対して導出原理を適用して得られる節 C_3 を求めなさい。

答: $C_3 = (\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D)$ が得られる。

- $C_1 \wedge C_2 \supset C_3$ が、命題論理で証明可能なことを示しなさい。

答: これは、水谷先生の回でさんざんやったとおもうので証明は省略する。