微分積分Ｂ（情報科学類３・４クラス対象）

第９回　演習問題解説

担当教員：萬 礼応（情報科学類）

2025 年 6 月 19 日 (木)

1. 次の巾級数の収束域を求めなさい．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$

【解答】

$x^2 = y$ とおいて，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n$ を考える．

$a_n = \dfrac{1}{n!}$ とすると，$a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$ より，ダランベールの定理を用いると，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{1}{(n+1) \cdot n!} \cdot n! = \frac{1}{n+1} \to 0 \ (n \to \infty)$$

となるので，y の級数の収束半径は ∞．よって，元の x の級数の収束半径も ∞ である．
したがって，収束域は $(-\infty, \infty)$．

問題解説：問題 1 (2)

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)x^n$

【解答】

$a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ とすると，$a_{n+1} = \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$ より，ダランベールの定理を用いると，

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\cdot\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \\
&= \frac{n+2-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1-n} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}.
\end{aligned}
$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$ より，収束半径は 1.

問題解説：問題 1 (2)

- $x = 1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{1/2}}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}-1\right)$$

より，収束しない（$1/n^s$ の s が $s>1$ のとき収束，$s\leq 1$ のとき発散する）.

- $x = -1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

であるから，この級数は交項級数で，

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0\ \ (n\to\infty)$$

より収束する.

以上より，この巾級数の収束域は $[-1,\ 1)$.

問題解説：問題 2 (1)

2. 次の巾級数の収束半径を求めなさい．

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\log(n+1)} x^n$$

【解答】

$a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\log(n+1)}$ とおくと，$a_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+2}}{\log(n+2)}$ より，ダランベールの定理を用いると

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+2}}{\log(n+2)} \cdot \frac{\log(n+1)}{(-1)^{n+1}}\right| = \frac{\log(n+1)}{\log(n+2)} = \frac{\log\left(n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)}{\log\left(n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\right)}$$

$$= \frac{\log n + \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\log n + \log\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = \frac{1 + \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \Big/ \log n}{1 + \log\left(1+\dfrac{2}{n}\right) \Big/ \log n} \to 1 \ \ (n \to \infty)$$

よって，この巾級数の収束半径は 1．

問題解説：問題 2 (2)

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n^n} x^n$

【解答】

$a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{n^n}$ とおくと，$a_{n+1} = \dfrac{(2n+1)!!}{(n+1)^{n+1}}$ より，ダランベールの定理を用いると，

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+1)!!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(2n-1)!!} = \frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \frac{(2n+1)\cdot(2n-1)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n} = \frac{2n+1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{2}{\mathrm{e}} \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

よって，この巾級数の収束半径は $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

3. 以下の広義積分の値を求めなさい．ただし，$F(1) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明なしで用いて良い．

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x \ (\alpha > 0)$$

【解答】

$f(x, \alpha) = \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$ とおく．$F(\alpha)$ は α に関して $\alpha > 0$ で $(0, \infty)$ 上広義一様収束する．また，$\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) = -x^2 \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$ は $0 \leq x < \infty$，$\alpha > 0$ で連続で，広義積分 $\int_0^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$ は α に関して $(0, \infty)$ で広義一様収束する．したがって，α に関する微分と x に関する定積分の順番の交換が可能で，以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \left(-x^2 \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\infty} x \cdot x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\left(-\frac{1}{2\alpha}\left[x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2\alpha}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{1}{2\alpha}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\alpha}F(\alpha).
\end{aligned}$$

問題解説：問題 3

この式を変形すると，以下を得る．

$$\frac{\mathrm{d}F}{F} = -\frac{1}{2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha.$$

両辺を積分すると，

$$\log F(\alpha) = -\frac{1}{2}\log\alpha + \tilde{C} = -\log\alpha^{1/2} + \log C = \log\frac{C}{\sqrt{\alpha}}.$$

ここで，C, $\tilde{C}$ は定数で，$\tilde{C} = \log C$ である．したがって，$F(\alpha) = \dfrac{C}{\sqrt{\alpha}}$ を得る．この式に $\alpha = 1$ を代入すると，

$$F(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = C.$$

以上より，

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$