微分積分 B（情報科学類 3・4 クラス対象）

第 2 回　演習課題解説

担当教員：萬 礼応（情報科学類）

2025 年 5 月 1 日 (木)

1. 関数 $f(x,y)=x^2-2xy+3y^2$ において，x,y が $x=\phi(t)=a\cos t, y=\psi(t)=b\sin t$ で与えられているとする．このとき，$f(x,y)$ の導関数 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ を求めなさい．但し，a, b は定数で $a\neq 0,\ b\neq 0$ とする．

【解答】

(i) $f(x,y)$ に先に $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ を代入してから $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ を計算する場合．

$f(x,y)$ に $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
f(\phi(t),\psi(t)) &= (a\cos t)^2-2\,(a\cos t)\cdot(b\sin t)+3\,(b\sin t)^2\\
&= a^2\cos^2 t-2ab\cos t\sin t+3b^2\sin^2 t.
\end{aligned}
$$

これを t で微分すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= -2a^2\cos t\sin t-2ab\left(-\sin^2 t+\cos^2 t\right)+6b^2\sin t\cos t\\
&= (-a^2+3b^2)2\sin t\cos t-2ab\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)\\
&= (-a^2+3b^2)\sin 2t-2ab\cos 2t.
\end{aligned}
$$

課題解説：問題 1

(ii) 先に $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ を計算してから $x, y, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ を代入する場合．

$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ を求めると，

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (2x - 2y) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + (-2x + 6y) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -a\sin t,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = b\cos t$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= (2a\cos t - 2b\sin t) \cdot (-a\sin t) + (-2a\cos t + 6b\sin t) \cdot (b\cos t) \\
&= -2a^2\cos t\sin t + 2ab\sin^2 t - 2ab\cos^2 t + 6b^2\sin t\cos t \\
&= \left(-a^2 + 3b^2\right) 2\sin t\cos t - 2ab\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) \\
&= \left(-a^2 + 3b^2\right)\sin 2t - 2ab\cos 2t.
\end{aligned}$$

【備考】 (i), (ii) のどちらで計算しても OK です．

課題解説：問題 2 (1)

2. ラプラス演算子 $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ **が与えられているとき，**$\triangle z$ **を求めなさい．**

(1) $z = \cos x \cdot \cosh y + \sin x \cdot \sinh y$

【解答】

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，及び $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ はそれぞれ，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\sin x \cdot \cosh y + \cos x \cdot \sinh y, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\cos x \cdot \cosh y - \sin x \cdot \sinh y, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \cos x \cdot \sinh y + \sin x \cdot \cosh y, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \cos x \cdot \cosh y + \sin x \cdot \sinh y.
\end{aligned}
$$

よって，$\triangle z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

補足：双曲線関数

$\cosh x$, $\sinh x$ はそれぞれ，

$$
\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.
$$

よって，これらの微分は，

$$
(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.
$$

課題解説：問題 2 (2)

(2) $z = \log\left(2x^2 + y^2\right) \quad ((x, y) \neq (0, 0))$

【解答】

$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，及び $\dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ はそれぞれ，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{4x}{2x^2 + y^2}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{4 \cdot \left(2x^2 + y^2\right) - 4x \cdot 4x}{(2x^2 + y^2)^2} = \frac{-8x^2 + 4y^2}{(2x^2 + y^2)^2}, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{2y}{2x^2 + y^2}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{2 \cdot \left(2x^2 + y^2\right) - 2y \cdot 2y}{(2x^2 + y^2)^2} = \frac{4x^2 - 2y^2}{(2x^2 + y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

よって，$\triangle z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{-8x^2 + 4y^2}{(2x^2 + y^2)^2} + \dfrac{4x^2 - 2y^2}{(2x^2 + y^2)^2} = \dfrac{-4x^2 + 2y^2}{(2x^2 + y^2)^2}$.

3. 次の関数 $f(x, y)$ の極値を求めなさい．

(1) $f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 6x + 24y$

【解答】

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 6 = 0 \\ f_y = -6y^2 + 24 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0 \\ (y - 2)(y + 2) = 0 \end{cases}$$

を満たす 4 点 $(x, y) = (\sqrt{2}, 2), (\sqrt{2}, -2), (-\sqrt{2}, 2), (-\sqrt{2}, -2)$ が関数 $f(x, y)$ の極値点候補となる．第 2 次偏導関数を求めると，

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = -12y.$$

(i) $(x, y) = (\sqrt{2}, 2)$ の場合
$f_{xy}(\sqrt{2}, 2)^2 - f_{xx}(\sqrt{2}, 2) \cdot f_{yy}(\sqrt{2}, 2) = 0^2 - 6\sqrt{2} \cdot (-12 \cdot 2) = 144\sqrt{2} > 0$ より，この点では極値をとらない．

(ii) $(x, y) = (\sqrt{2}, -2)$ の場合
$f_{xy}(\sqrt{2}, -2)^2 - f_{xx}(\sqrt{2}, -2) \cdot f_{yy}(\sqrt{2}, -2) =$
$0^2 - 6\sqrt{2} \cdot (-12 \cdot (-2)) = -144\sqrt{2} < 0$ かつ，
$f_{xx}(\sqrt{2}, -2) = 6\sqrt{2} > 0$ より，この点は極小点であり，
極小値は $f(\sqrt{2}, -2) = -32 - 4\sqrt{2}$.

(iii) $(x, y) = (-\sqrt{2}, 2)$ の場合
$f_{xy}(-\sqrt{2}, 2)^2 - f_{xx}(-\sqrt{2}, 2) \cdot f_{yy}(-\sqrt{2}, 2) =$
$0^2 - 6 \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-12 \cdot 2) = -144\sqrt{2} < 0$ かつ，
$f_{xx}(-\sqrt{2}, 2) = -6\sqrt{2} < 0$ より，この点は極大点であり，
極大値は $f(-\sqrt{2}, 2) = 32 + 4\sqrt{2}$.

(iv) $(x, y) = (-\sqrt{2}, -2)$ の場合
$f_{xy}(-\sqrt{2}, -2)^2 - f_{xx}(-\sqrt{2}, -2) \cdot f_{yy}(-\sqrt{2}, -2) =$
$0^2 - 6 \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-12 \cdot (-2)) = 144\sqrt{2} > 0$ より，この点では極値をとらない．

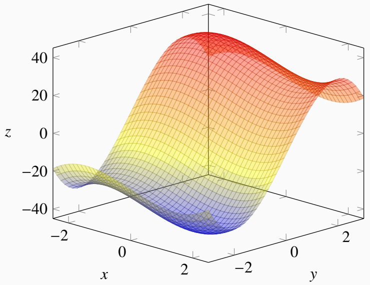

図 1: $f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 6x + 24y$ のグラフ．

以上より，この関数は $(x, y) = (\sqrt{2}, -2)$ で極小値 $-32 - 4\sqrt{2}$，$(x, y) = (-\sqrt{2}, 2)$ で極大値 $32 + 4\sqrt{2}$ をとる．

(2) $f(x,y) = x^3 + x^2 + 2y^2$

【解答】

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 2x = 0 \\ f_y = 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x\,(x + 2/3) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

を満たす 2 点 $(x,y) = (0,0)$, $(-2/3, 0)$ が関数 $f(x,y)$ の極値点候補となる．第 2 次偏導関数を求めると，

$$f_{xx} = 6x + 2, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 4.$$

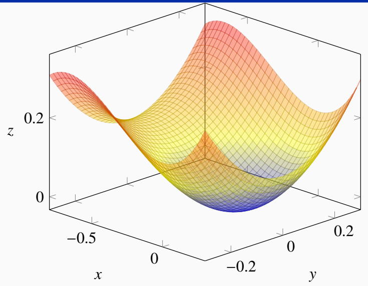

図 2: $f(x,y) = x^3 + x^2 + 2y^2$ のグラフ．

(i) $(x,y) = (0,0)$ の場合
$f_{xy}(0,0)^2 - f_{xx}(0,0)\cdot f_{yy}(0,0) = 0^2 - 2\cdot 4 = -8 < 0$ かつ，$f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ よりこの点は極小点で，極小値は $f(0,0) = 0$．

(ii) $(x,y) = (-2/3, 0)$ の場合
$f_{xy}(-2/3,0)^2 - f_{xx}(-2/3,0)\cdot f_{yy}(-2/3,0) = 0^2 - [6\cdot(-2/3) + 2]\cdot 4 = 8 > 0$ より，この点は極値点ではない．

以上より，この関数は $(x,y) = (0,0)$ で極小値 $f(0,0) = 0$ をとる．