

微分積分 B（情報科学類 3・4 クラス対象）

第 7 回 演習課題解説

担当教員：萬 礼応（情報科学類）

2025 年 6 月 11 日 (木)

1. 次の線積分の値を求めなさい．

$$\int_C (x^2 dx + 2xy dy), \quad C: \text{点 } (1, 1) \text{ から点 } (-1, 3) \text{ へ直線で結んだもの}$$

【解答】

積分路 C の直線は $y = -x + 2$ と表される． $x = t$ とパラメータ表示すると， $y = -t + 2$ と表すことができる． C は $(1, 1) \rightarrow (-1, 3)$ への向きをもつから， t は $t: 1 \rightarrow -1$ と変化する．また， x, y を t で微分すると， $\frac{dx}{dt} = 1$ ， $\frac{dy}{dt} = -1$ となる．

よって，線積分の値は，

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 dx + 2xy dy) &= \int_1^{-1} \left(t^2 \cdot \frac{dx}{dt} + 2 \cdot t \cdot (-t + 2) \cdot \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_1^{-1} (t^2 + (-2t^2 + 4t) \cdot (-1)) dt = - \int_{-1}^1 (3t^2 - 4t) dt \\ &= - \left[t^3 - 2t^2 \right]_{-1}^1 = -2. \end{aligned}$$

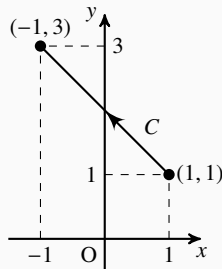


図 1: 問題 1 の積分路 C ．

2. $x = \cos t, y = \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) で囲まれる図形 D の面積を線積分を用いて求めなさい.

【解答】

図形 D の境界に正の向きをつけたものを ∂D とする. このとき, D の面積 $m(D)$ は,

$$m(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (-y \, dx + x \, dy)$$

で求められる. $x = \cos t, y = \sin^3 t$ の t は $t: 0 \rightarrow 2\pi$ と変化する. x, y を t で微分すると,

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3 \sin^2 t \cos t.$$

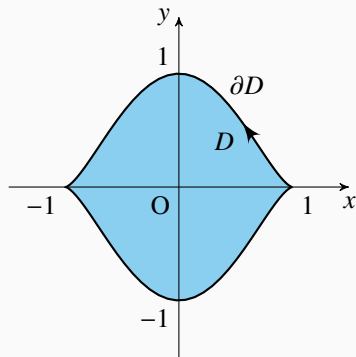


図 2: 問題 2 の図形 D と正の向きをつけた境界 ∂D .

よって,

$$\begin{aligned} m(D) &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} (-y \, dx + x \, dy) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(-\sin^3 t \cdot \frac{dx}{dt} + \cos t \cdot \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[-\sin^3 t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot 3 \sin^2 t \cos t \right] dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^4 t + 3 \sin^2 t \cos^2 t) dt. \end{aligned}$$

ここで、被積分関数を以下のように変形する.

$$\begin{aligned} \sin^4 t + 3 \sin^2 t \cos^2 t &= (\sin^2 t)^2 + \frac{3}{4} (2 \sin t \cos t)^2 = \left(\frac{1}{2} (1 - \cos 2t) \right)^2 + \frac{3}{4} (\sin 2t)^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2t + \cos^2 2t) + \frac{3}{4} \sin^2 2t = \frac{1}{4} \left(1 - 2 \cos 2t + \underbrace{\cos^2 2t + \sin^2 2t}_{=1} + \underbrace{2 \sin^2 2t}_{=1 - \cos 4t} \right) \\ &= \frac{1}{4} (3 - 2 \cos 2t - \cos 4t). \end{aligned}$$

したがって、図形 D の面積 $m(D)$ は

$$m(D) = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (3 - 2 \cos 2t - \cos 4t) dt = \frac{1}{8} \left[3t - \sin 2t - \frac{1}{4} \sin 4t \right]_0^{2\pi} = \frac{3}{4} \pi.$$

3. 次の式で与えられる密度一定の均質な剛体の重心の座標を求めなさい．

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right\} \quad (\text{半球})$$

【解答】

図形の対称性から，重心 $G = (x_0, y_0, z_0)$ の x 座標， y 座標は z 軸上に存在する．よって， x_0, y_0 は 0 である．以下では， z_0 を求める．

まず， V の体積 $m(V)$ を計算する． $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ の z で V を xy -平面に水平な方向で切った断面を $D(z)$ とする．このとき， $D(z)$ は半径が $\sqrt{a^2 - z^2}$ の円板であり，その面積は

$$m(D(z)) = \pi(a^2 - z^2)$$

である．

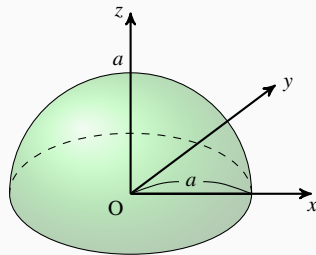


図 3: 問題 3 の剛体 V ．

よって、 V の体積は、

$$m(V) = \iiint_V dx dy dz = \int_0^a dz \underbrace{\iint_{D(z)} dx dy}_{= m(D(z))} = \pi \int_0^a (a^2 - z^2) dz = \pi \left[a^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^a = \frac{2}{3} \pi a^3.$$

z_0 は、 $z_0 = \iiint_V z dx dy dz / m(V)$ で求められる。 $\iiint_V z dx dy dz$ を求めると、

$$\iiint_V z dx dy dz = \int_0^a z dz \underbrace{\iint_{D(z)} dx dy}_{= m(D(z))} = \pi \int_0^a (a^2 z - z^3) dz = \pi \left[\frac{1}{2} a^2 z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right]_0^a = \frac{1}{4} \pi a^4$$

であるから、 z_0 は $z_0 = \left(\frac{1}{4} \pi a^4 \right) / \left(\frac{2}{3} \pi a^3 \right) = \frac{3}{8} a$.

以上より、剛体 V の重心 G の座標は、 $G = \left(0, 0, \frac{3}{8} a \right)$ である。