述語論理式の意味と解釈

ややや大雑把な説明

モデル (model)

論理式の意味(真理値)を特定するために用いるための抽象的表現

例　自然数だけを考えているのであるならば, 自然数の抽象的表現

割当 (assignment)

モデルの各要素に対して, 論理式を構成している定数, 関数, 述語記号を対応させること

特に, 自由変数に対して, その値を一つ固定すること.

解釈 (interpretation)

論理式を構成している定数, 関数, 述語記号, 論理記号がモデルにおいて何を意味するのかを与えること

大雑把な説明
モデル・割当・解釈：述語論理の式の意味を考えるとき, 必要な概念.

モデル
式はあくまでも記号の列. それらの意味を与えるための抽象的なものを考える.
例:「0」はあくまで楕円形の記号
それに対して実際の「零」「zero」を考える必要がある.

割当
「0」という記号に「零」という実体を与えるような操作.
通常は式の中に出現する自由変数(例えば「x」)に具体的な値(例えば「零」)を与える操作
(後述)

解釈
「＝」とか「＋」とかいう記号に実際の意味「等しい」とか「加算」とかを与える操作.
強引に「＝」に「等しくない」「＋」に「除算」とか与えることも可能だがこの授業では考えない.
ただし, 通常の数学とプログラムでの計算で異なることは認識する必要がある.
例えばプログラム内の実数は真の実数ではないので, 除算結果などが異なる.

もう少し厳密に定義する

ここでは,「本物の」自然数や演算を
“ ”を用いて表すことにする

M: モデル(model)

以下の<D, I>で作られるもの

D: 領域 (domain)

論理式が表現する対象の集合

例: 自然数を考える場合,

Dとして「本物の」自然数全体の集合Nを取る

論理式中に現れる「0」,「1」, … はあくまで「記号」として処理する.

I : 解釈 (interpretation)

定数, 関数記号, 述語記号, 論理記号に意味を与える

定数に対してはD上の要素,

n引数述語記号に対しては関数$D^n \to \{T, \perp\}$,

n引数関数記号に対しては関数$D^n \to D$

を与える.

例:I(≤)=“≤”, I(+)=“+”, I(・)=“・”, I(0)=“0”, …

定数, 関数記号, 述語記号の意味は与えられた解釈 I ごとに異なるが

通常は論理記号(∧, ∨など)の解釈は変えない.

ρ: 変数への値の割当(assignment)

各自由変数に対して, D上の要素を割り当てる.

例: $\rho(x)$=“3”, $\rho(y)$=“2”, ...

項tの解釈

$$
I_\rho[t] = \begin{cases} I(t) & \text{tが定数のとき} \\ \rho(t) & \text{tが変数のとき} \\ I(f)(I_\rho[t_1], \ldots, I_\rho[t_n]) & \text{tが} f(t_1, \ldots, t_n) \text{のとき} \end{cases}
$$

論理式の解釈

$$
I_\rho[F] = \begin{cases}
I(p)\,(I_\rho[t_1], \ldots, I_\rho[t_n]) & \text{Fが}p(t_1, \ldots, t_n)\text{（原子論理式)のとき} \\
\wedge^*(I_\rho[F_1], I_\rho[F_2]) & \text{Fが } F_1 \wedge F_2 \text{のとき} \\
\vee^*(I_\rho[F_1], I_\rho[F_2]) & \text{Fが } F_1 \vee F_2 \text{のとき} \\
\supset^*(I_\rho[F_1], I_\rho[F_2]) & \text{Fが } F_1 \supset F_2 \text{のとき} \\
\neg^*(I_\rho[F_1]) & \text{Fが } \neg F_1 \text{のとき} \\
\forall^*(\{I_{\rho[a/x]}[F_1] \mid a \in D\}) & \text{Fが} \forall x\ F_1 \text{のとき} \\
\exists^*(\{I_{\rho[a/x]}[F_1] \mid a \in D\}) & \text{Fが} \exists x\ F_1 \text{のとき}
\end{cases}
$$

$\rho[a/x]$: 割当ρのうち, xへの割当のみをaにしたもの, すなわち

$$
\rho[a/x](y) = \begin{cases}
a & \text{yがxのとき} \\
\rho(y) & \text{それ以外のとき}
\end{cases}
$$

Q*: 論理記号Qの**真理関数**　以下のスライドで定義を示す

F	G	$\wedge^*(F, G)$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$

F	G	$\vee^*(F, G)$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$

F	¬*(F)
⊥	⊤
⊤	⊥

F	G	⊃*(F, G)
⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤

$\forall^*$, $\exists^*$: 真理値の空でない集合から真理値への関数

以下のように定義される.

S	$\forall^*(S)$	$\exists^*(S)$
$\{\top\}$	$\top$	$\top$
$\{\top, \bot\}$	$\bot$	$\top$
$\{\bot\}$	$\bot$	$\bot$

ρ および $\rho[a/x]$ について

ρ はすべての変数に対する割当. ρ が異なれば割り当てが異なる.

つまり, ρ_1 と ρ_2 があったとき,

$\rho_1(x)=$“2”. $\rho_1(y)=$“4”, $\rho_1(z)=$“7”, …

$\rho_2(x)=$“3”, $\rho_2(y)=$“4”, $\rho_2(z)=$“9”, …

などということを考えることができる.

$\rho[a/x]$ はxへの割当のみaになっていて, 他の変数への割当は ρ と同じ.

$\rho[a/x]$ に対して, yへの割当はbである, を付け加えた場合, $\rho[a/x][b/y]$ と表す.

すなわち, $\rho[a/x]$ を新たな割当 ρ' として考えたとき, 「yへの割当はbである」を

追加したら $\rho'[b/y]$ である.

$\{I_{\rho[a/x]}[F_1] \mid a \in D\}$について

条件Pを満たす要素xすべてからなる集合を$\{x \mid P(x)\}$と書く(集合の内包的記法).

$\{I_{\rho[a/x]}[F_1] \mid a \in D\}$は, Dの要素a全てに対して, $I_{\rho[a/x]}[F_1]$の値を計算した集合.

$I_{\rho[a/x]}[F_1]$の値は$\top$か$\bot$かのどちらか.

したがって$\{I_{\rho[a/x]}[F_1] \mid a \in D\}$は$\{\top\}$, $\{\top, \bot\}$, $\{\bot\}$のいずれかである.

例題

$x=2y \vee x=2y+1$を自然数の上で解釈する.

$=$, $+$, $\cdot$(乗算記号), 1, 2は自然数上の通常の解釈を行うものとする.

すなわち, $\mathrm{I}(=)=$“$=$”, $\mathrm{I}(+)=$“$+$”, $\mathrm{I}(\cdot)=$“$\cdot$”, $\mathrm{I}(1)=$“1”, $\mathrm{I}(2)=$“2”とする.

自由変数はxとyなので, $\rho(x)$, $\rho(y)$としてここでは各々“7”と“3”としておく.

このとき,

$$\mathrm{I}_\rho[x=2y \vee x=2y+1]= \vee^*(\mathrm{I}_\rho[x=2y], \mathrm{I}_\rho[x=2y+1])$$

ここで,

例題

自然数のもとで$\exists y(x=2y \lor x=2y+1)$を解釈する.

先程と同様に, 定数, 述語記号, 関数記号は通常の解釈を用い, $\rho(x)=$“7”とする.

このとき,

演習

自然数のもとで$\exists x \forall y (x \leq y)$を解釈せよ.

自然数のもとで$\exists x \forall y (x \leq y)$を解釈する.

$I_\rho[\exists x \forall y (x \leq y)]$

$= \exists^*(\{I_{\rho[a/x]}[\forall y (x \leq y)] \mid a \in N\})$

$= \exists^*(\{\forall^*(\{I_{\rho[a/x][b/y]}[x \leq y] \mid b \in N\}) \mid a \in N\})$

ここで$I_{\rho[a/x][b/y]}[x \leq y]$ を$A(a, b)$とおく.

$A(a, b) \quad = \quad \top \quad$ if "$\leq$"$(a, b)=\top$

$\quad\quad\quad\quad\quad \bot \quad$ otherwise

どのような$b \in N$に対しても"$\leq$"$(a, b)=\top \Leftrightarrow a=$"0"なので

$\forall^*(\{A(a, b) \mid b \in N\}) = \quad \top \quad$ if どのような$b \in N$に対しても

"$\leq$"$(a, b)=\top \Leftrightarrow a=$"0"

$\bot \quad$ otherwise

したがって

$\exists^*(\{\forall^*(\{A(a, b) \mid b \in N\}) \mid a \in N\})=\top$

すなわち与式$I_\rho[\exists x \forall y (x \leq y)]=\top$

演習

$I_\rho[\forall x \exists y(x=2y \lor x=2y+1)]$を計算せよ.

ただし変数の領域は自然数全体であるとする.

（レポート問題1）

論理式FがD, I, ρのもとで**充足可能（satisfiable）** $D, I, \rho \models F$ と表す

⇔　FがD, I, ρのもとで$\top$

論理式Fが**恒真（valid）**　$\models F$ と表す

⇔　FがどのようなD, I, ρのもとでも$\top$

証明(推論)の形式化

普段行っている数学や論理の証明の形式化

「証明とはどういったものか」という研究 (数学基礎論)

計算機に証明を行わせるときの一助にもなる

形式的体系（Formal System）

公理（axioms）

　正しいと信じられる命題　単独で証明されているとする

推論規則（inference rules）

　一つ以上の証明されている命題から他の新しく証明する命題への写像

命題が証明可能(provable), 演繹可能(deducible), 定理(theorem)

　公理, 推論規則の適用の有限の繰り返し(証明(proof))から得られる命題

健全性と完全性

論理式が**恒真**であること形式的体系で**証明**できることは独立である.

健全性(soundness)

F が証明可能ならば、F は恒真である.

完全性(completeness)

F が恒真ならば, F は証明可能である.

本授業で導入する体系NKは上記いずれも成立する(証明は省略)

恒真であることと証明可能であることが同等なら一方だけでいいのでは?

形式的体系: 証明できることは示しやすいが, 証明できないことを示すのは困難

意味論: 恒真でない (ある解釈で偽である) ことは示しやすいが,
恒真であることを示すのは大変.

証明できるならば有限回の公理と推論規則の適用で証明が完成する.
証明できないことを示すには無限通りの適用を行っても証明完了に至らないことを示す必要がある.

恒真であることと証明可能であることが同等なら一方だけでいいのでは?

形式的体系: 証明できることは示しやすいが, 証明できないことを示すのは困難

意味論: 恒真でない（ある解釈で偽である）ことは示しやすいが,
恒真であることを示すのは大変.

恒真でないことを示すためにはその式を真にしない値の割当(反例)を少なくとも一つ見つければ良い.

恒真であることを示すには無限通りの値の割当を適用し各々について式が正しいことを示す必要がある.

論理と理論

論理(logic)の体系に特定の数学特有の公理(非論理的公理 non logical axioms)を組み合わせて作る形式的体系を理論(theory)と呼ぶ.

非論理的公理を入れた理論の例

自然数論 （自然数理論）

　自然数の公理　通常, 数学的帰納法(mathematical induction)をもつ

整数論

理論物理学, ニュートン力学, 特殊相対性理論, 一般相対性理論, 量子力学, …

経済理論, …

ゲーデルの不完全性定理(の雑な説明)

自然数論を含む理論が健全であれば, 証明も反証もできない命題が存在する.

推論の形式化

三段論法

「ソクラテスは人間である，人間は死ぬ．したがってソクラテスは死ぬ．」

「ソクラテス」の代わりに「水谷哲也」にしても論法は変わらない

「人間は」の代わりに「猫は」にしてもよい

「ゼウスは神である．神は不死である．したがってゼウスは不死である．」でもよい

この論法の構造 「aはP_1である．P_1はP_2である．したがってaはP_2である．」

aは何に置き換えてもよいので，以下のように表すことができる．

aはP_1である．すべてのxについて，xがP_1を満たすなら，P_2も満たす．

したがってaはP_2を満たす．

自然演繹法
(Natural Deduction)

証明の形式化の一方法

実際の証明に近い

『事実』を仮定してその仮定の下で証明する

最終的にはその仮定を取り込んだ式が「定理」となる

例

A⊃B　　　　Aという仮定からBが導かれる.

　　　　　　命題Aから命題Bが演繹される.

A　および　A⊃B　という前提から　B　を導くことは認められる.
これを第1の**推論規則**として採用する.
この推論規則は**構成的仮言三段論法(modus ponens)**とよぶ.

これを

$$\frac{A \qquad A \supset B}{B}$$

前件(antecedent)
すでに証明されている命題

後件(consequent)
新しく証明する命題

という図式で示す.
このように推論を図式で表したものを**推論図**という.

例

$$\dfrac{\dfrac{A \qquad A \supset B}{B} \qquad\qquad \dfrac{A \quad A \supset (B \supset C)}{B \supset C}}{C}$$

3つのmodus ponensを積み重ねてできたひとつの**演繹(deduction)**

A, A⊃B, A⊃(B⊃C)からCを導いている.

例

前述の例は,

A⊃BとA⊃(B⊃C)を「大前提」と考えると,

Aという仮定からCを導く証明とみなすことができる.

すなわち, 二つの大前提からA⊃Cを導くことになる.

これを以下のように表す.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{1}{A} \qquad A\supset B}{B} \qquad\qquad \cfrac{\overset{1}{A} \qquad A\supset(B\supset C)}{B\supset C}}{C}}{A\supset C}\;1$$

これは,「1」とラベルを振られている仮定Aが, 最後の推論(新しく導入した推論規則)

$$\frac{C}{A\supset C}\;1$$

で取り除かれたということを意味している.

仮定にはそれぞれ「ラベル」を振っていることに注意.

これはあくまで「ラベル」なので, 大小関係に意味はない.

違う仮定には異なるラベルを, 同じ仮定には同じラベルをつけることが重要.

同じ文字面ではあるが別の仮定であることもよくあるので,

どのような仮定をどういう理由でおいたかはよく考える必要がある.

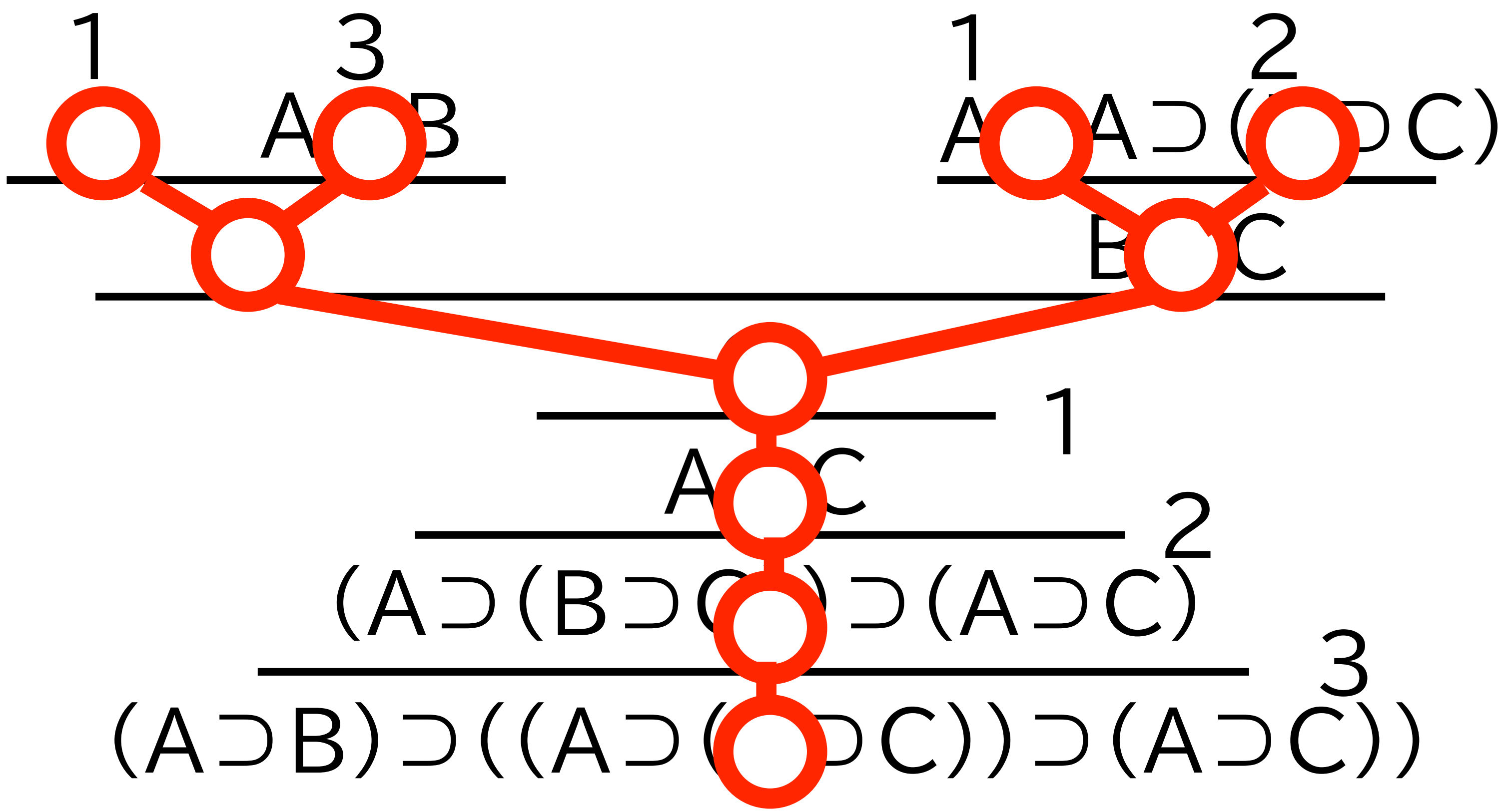
仮定を取り除くときはその仮定のラベルを明記する.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A}\quad\overset{3}{A\supset B}}{B}\qquad\dfrac{\overset{1}{A}\quad\overset{2}{A\supset(B\supset C)}}{B\supset C}}{C}}{A\supset C}\,1}{(A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C)}\,2}{(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))}\,3$$

とすると, 何の仮定もなく $(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$ を証明したことになる.

このように, 全ての仮定が取り除かれた演繹を**証明(proof)**とよび,
証明が図式的に示されたことを強調したいときは**証明図(proof figure)**という.

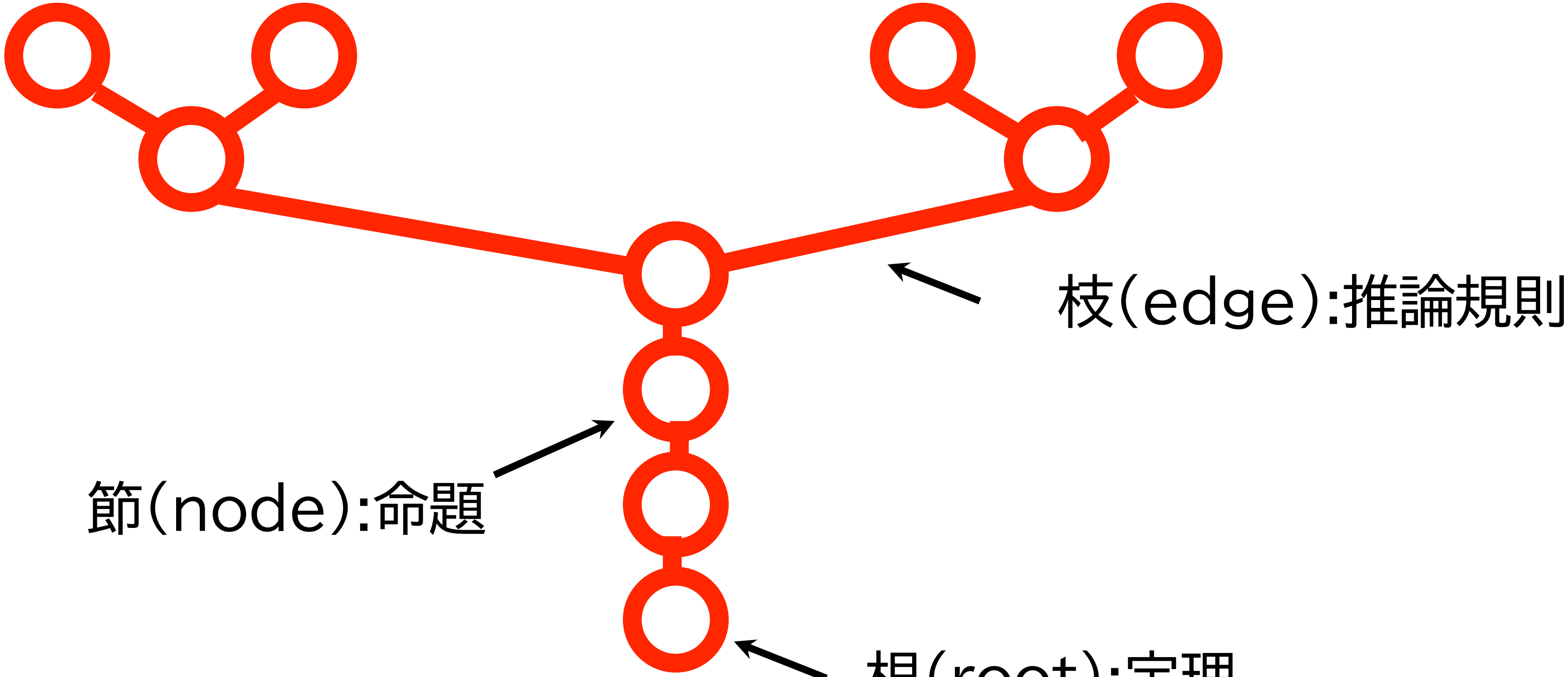
証明図は木構造

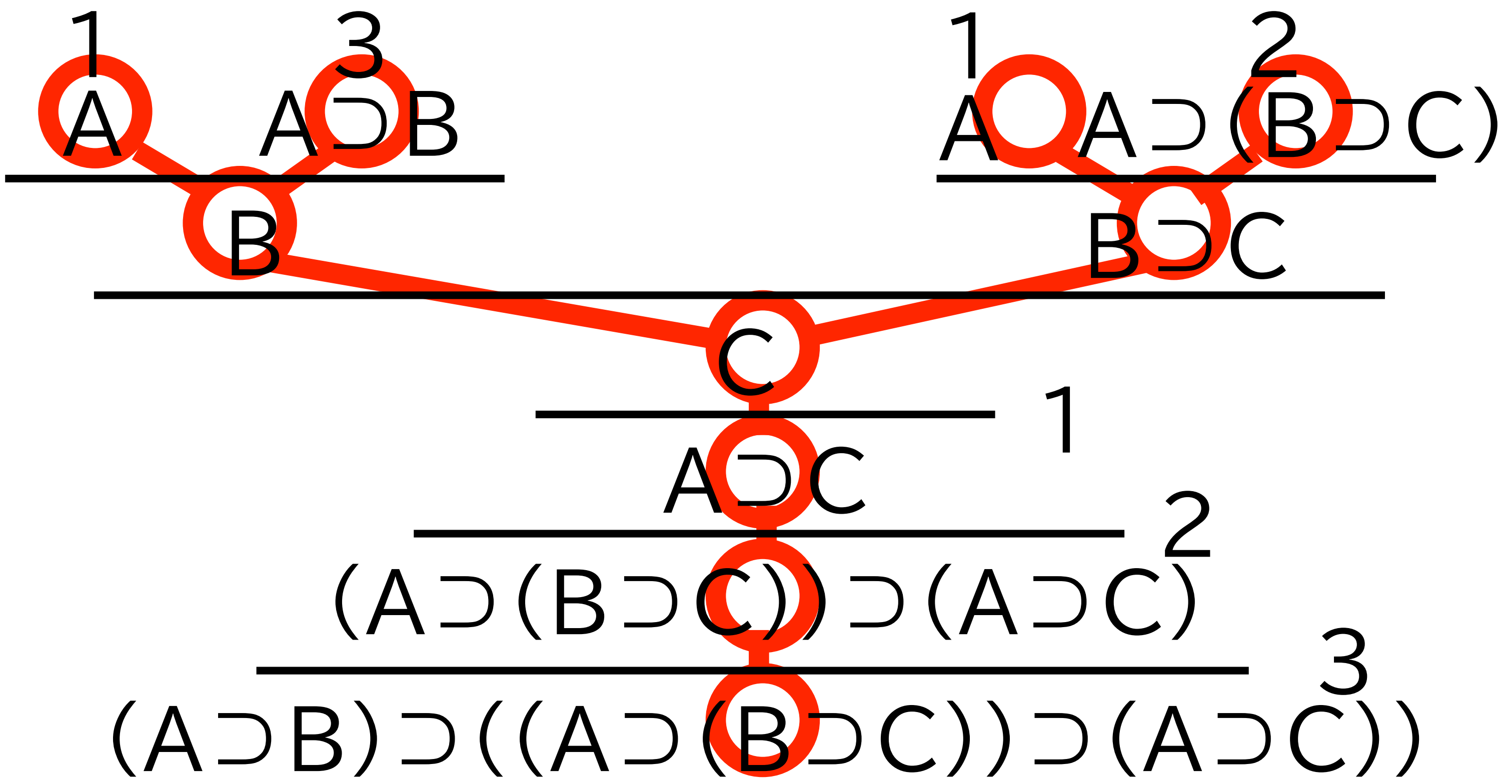


とすると, 何の仮定もなく (A⊃B)⊃((A⊃(B⊃C))⊃(A⊃C))を証明したことになる.

このように, 全ての仮定が取り除かれた演繹を**証明(proof)**とよび,
証明が図式的に示されたことを強調したいときは**証明図(proof figure)**という.

証明図は木構造





この図では仮定1は2回現れている.
逆にいえば, 通常の証明で同じ仮定を複数回用いる場合は,
このように用いられる回数だけ複写することによって木構造にする.

推論規則(Inference Rules)

⊃-導入

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A] \\ B\end{array}}{A \supset B}$$

⊃-除去

$$\dfrac{A \supset B \quad A}{B}$$

⊃-導入における[A] は, Bを導く演繹に用いられている仮定のうちAという仮定は
A⊃Bを導く演繹に対して除くという意味.

すなわち,
⊃-導入を用いたとき,
A⊃Bがよってたつ仮定は, Bに至る演繹で用いられた仮定からAを取り除いたもの全て.

⊃-除去については,
Bがよってたつ仮定は, A⊃Bに至る演繹での仮定とAに至る演繹の仮定の合計.

例題

$(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$ を証明せよ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{B} \qquad \dfrac{\overset{1}{A} \qquad \overset{3}{A \supset (B \supset C)}}{B \supset C}}{C}}{A \supset C}\;1}{B \supset (A \supset C)}\;2}{(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))}\;3$$

推論規則(Inference Rules)

∧-導入

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

AとBと両方とも証明できているとき
A∧Bは証明できる

∧-除去

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

A∧Bが証明できる とき, A単体, B単体は証明できる

演習

以下を証明せよ.

1. $A \wedge A \supset A$
2. $A \supset A \wedge A$
3. $A \wedge B \supset B \wedge A$
4. $(A \supset B) \wedge (B \supset C) \supset (A \supset C)$
5. $(A \supset B \supset C) \supset (A \wedge B \supset C)$
6. $(A \wedge B \supset C) \supset (A \supset B \supset C)$

註: $A \supset B \supset C$は $A \supset (B \supset C)$

$A \wedge B \supset C$は$(A \wedge B) \supset C$

レポート問題

1. $I_\rho[\forall x \exists y(x=2y \lor x=2y+1)]$を計算せよ.

ただし変数の領域は自然数全体であるとする.

2. 以下を証明せよ.

7. $(A \land B) \land C \supset A \land (B \land C)$
8. $A \land (A \supset B) \supset B$
9. $(A \land B) \land (A \supset (B \supset C)) \supset C$
10. $(A \supset B \land C) \supset (A \supset B) \land (A \supset C)$
11. $(A \supset B) \land (A \supset C) \supset (A \supset B \land C)$

締切 5月2日 8:40

提出先 manaba