

『論理と形式化』資料 No.9 演習問題の解答例

亀山幸義 (kam[at]cs.tsukuba.ac.jp)

No.9 で出題した問題等の解答を掲載する。

演習問題 0 の解答例

以下のプログラムに対して、?- `foo(s(s(s(s(0))))),s(s(0)),X.` などのゴールをいろいろ動かすと、「`foo(X,Y,Z).` は、`X` を `Y` で割った（整数上の）商が `Z` である」ことがわかる。

```
geq(X,0).  
geq(s(X),s(Y)) :- geq(X,Y).  
lt(0,s(X)).  
lt(s(X),s(Y)) :- lt(X,Y).  
sub(X,0,X).  
sub(s(X),s(Y),Z) :- sub(X,Y,Z).  
foo(X,Y,s(Z)) :- geq(X,Y),sub(X,Y,W),foo(W,Y,Z).  
foo(X,Y,0) :- lt(X,Y).
```

演習問題 1 の 1 つ目

以下の Prolog プログラム（資料では例 2 のプログラム）に対して、ゴール $G_0 = \{Q, S\}$ を走らせた実行過程と対応する証明を書きなさい。

```
H1    Q :- R, S.  
H2    R :- S.  
H3    S.
```

ゴール?- `Q,S.` の実行:

0. $G_0 = \{Q, S\}.$
1. Q に対して (H1) を使って: $G_1 = \{R, S, S\}.$
2. R に対して (H2) を使って: $G_2 = \{S, S, S\}.$
3. S に対して (H3) を使って: $G_3 = \{S, S\}.$
4. S に対して (H3) を使って: $G_4 = \{S\}.$
5. S に対して (H3) を使って: $G_5 = \{\}.$ ゴールが空集合になったので、実行は成功。

対応する証明:

$$\frac{\frac{\frac{(H1)}{(R \wedge S) \supset Q} \quad \frac{\frac{(H2)}{S \supset R} \quad \frac{(H3)}{S}}{R \supset -E} \quad \frac{(H3)}{S}}{R \wedge S \supset -E} \quad \frac{(H3)}{S}}{Q \supset -E} \quad \frac{(H3)}{S}}{Q \wedge S \supset -E} \quad \frac{(H3)}{S} \quad \frac{}{\wedge\text{-I}}$$

演習問題 1 の 2 つ目

以下のプログラムに対して、ゴール $G_0 = \{P\}$ に対する実行の過程と、それが成功するときの証明を書きなさい。

```
H1  P :- Q, R.  
H2  P :- Q, T.  
H3  Q :- S.  
H4  Q.  
H5  T.
```

ゴール?- P. の実行:

0. $G_0 = \{P\}$.
1. P に対して (H1) を使って: $G_1 = \{Q, R\}$.
2. Q に対して (H3) を使って: $G_2 = \{S, R\}$.
3. S に対して使えるルールがないので失敗して、バックトラックする。(上記の 2 まで戻る。)
4. Q に対して (H4) を使って: $G_3 = \{R\}$.
5. R に対して使えるルールがないので失敗して、バックトラックする。(上記の 1 まで戻る。)
6. P に対して (H2) を使って: $G_4 = \{Q, T\}$.
7. Q に対して (H3) を使って: $G_5 = \{S, T\}$.
8. S に対して使えるルールがないので失敗して、バックトラックする。(上記の 7 まで戻る。)
9. Q に対して (H4) を使って: $G_6 = \{T\}$.
10. T に対して (H5) を使って: $G_7 = \{\}$. ゴールが空集合になったので、実行は成功。

対応する証明:

$$\frac{\frac{(H2)}{(Q \wedge T) \supset P} \quad \frac{\frac{(H4)}{Q} \quad \frac{(H5)}{T}}{\frac{Q \supset -E}{Q \wedge T \supset -E} \quad \wedge\text{-I}}}{P \supset -E} \quad \frac{}{\wedge\text{-I}}$$

演習問題 2 のその 1

Prolog プログラム (例 4, 例 5 のプログラム):

```

H1    add(0,Y,Y).
H2    add(s(X),Y,s(Z)) :- add(X,Y,Z).

```

上記プログラムで、ゴール $G = \{add(s(s(V)), s(0), W)\}$ を実行した過程と対応する証明を書きなさい。

ゴール?- add(s(s(V)), s(0), W). の実行:

0. $G_0 = \{add(s(s(V)), s(0), W)\}.$
1. $add(s(s(V)), s(0), W)$ は (H1) のヘッドとはマッチしない。
2. $add(s(s(V)), s(0), W)$ と (H2) のヘッドは、代入 $[X := s(V), Y := s(0), W := s(Z)]$ によりマッチする。新しいゴールは、 $G_1 = \{add(s(V), s(0), Z)\}$ である。
3. $add(s(V), s(0), Z)$ は (H1) のヘッドとはマッチしない。
4. $add(s(V), s(0), Z)$ と (H2) のヘッドはマッチする。ここで双方で Z が使われているので、(H2) の Z を Z' に変更しておく。代入 $[X := V, Y := s(0), Z := s(Z')]$ によりマッチする。新しいゴールは、 $G_2 = \{add(V, s(0), Z')\}$ である。
3. $add(V, s(0), Z')$ と (H1) のヘッドは、代入 $[V := 0, Y := s(0), Z' := s(0)]$ によりマッチする。新しいゴールは、 $G_3 = \{\}$ である。
4. ゴールが空集合になったので、成功で終わる。
5. 途中で出てきた代入たちを合成することにより、 $V = 0, W = s(s(s(0)))$ という答えを得る。(これ以外にも解はあるが、ここまでにする。)

対応する証明 (スペースの都合で $s^n(0)$ を n と書く):

$$\frac{(H2)}{add(1, 1, 2) \supset add(2, 1, 3)} \text{ } \forall\text{-E} \quad \frac{\frac{(H2)}{add(0, 1, 1) \supset add(1, 1, 2)} \text{ } \forall\text{-E} \quad \frac{(H1)}{add(0, 1, 1)} \text{ } \supset\text{-E}}{add(1, 1, 2)} \text{ } \supset\text{-E}$$

演習問題 2 のその 2

ゴール $G' = \{add(s(s(V)), s(0), s(V))\}$ を実行した過程を、上記と同様に書きなさい。また、実行が成功するとき、対応する証明を書きなさい。

ゴール?- add(s(s(V)), s(0), s(V)). の実行:

0. $G_0 = \{add(s(s(V)), s(0), s(V))\}.$
1. $add(s(s(V)), s(0), s(V))$ は (H1) のヘッドとはマッチしない。
2. $add(s(s(V)), s(0), s(V))$ と (H2) のヘッドは、代入 $[X := s(V), Y := s(0), Z := V]$ によりマッチする。新しいゴールは、 $G_1 = \{add(s(V), s(0), V)\}$ である。
3. $add(s(V), s(0), V)$ は (H1) のヘッドとはマッチしない。
4. $add(s(V), s(0), V)$ と (H2) のヘッドはマッチする。代入 $[X := s(Z), Y := s(0), V := s(Z)]$ によりマッチする。新しいゴールは、 $G_2 = \{add(s(Z), s(0), Z)\}$ である。
5. 以下同様に (H1) とマッチし続けて、無限ループである。

実行が成功しないので、対応する証明はない。

演習問題 2

- 節 $C_1 = (P \vee \neg A \vee \neg B)$ と 節 $C_2 = (\neg C \vee \neg P \vee \neg D)$ に対して導出原理を適用して得られる節 C_3 を求めなさい。

答: $C_3 = (\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D)$ が得られる。

- $C_1 \wedge C_2 \supset C_3$ が、命題論理で証明可能なことを示しなさい。

答: これは、水谷先生の回でさんざんやったとおもうので証明は省略する。