微分積分Ｂ（情報科学類３・４クラス対象）

第８回　演習課題解説

担当教員：萬 礼応（情報科学類）

2025 年 6 月 19 日 (木)

1. 次の級数の収束・発散を調べなさい．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-2}{4n+3}\right)^n$

【解答】

級数の第 n 項目を $a_n = \left(\dfrac{5n-2}{4n+3}\right)^n$ とおき，コーシーの判定法を用いて収束・発散を判定する．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = r$ が存在して，$0 \leq r < 1$ であれば，この級数は収束し，$r > 1$ であれば発散する．

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n-2}{4n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{5-\dfrac{2}{n}}{4+\dfrac{3}{n}} = \frac{5}{4} > 1$$

であるから，この級数は発散する．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$

【解答】

級数の n 項目を $a_n = e^n \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ とおき，コーシーの判定法を用いて収束・発散を判定する．$\sqrt[n]{a_n}$ の式を変形すると，

$$\sqrt[n]{a_n} = e \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^n = e \cdot \frac{1}{\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n} = e \cdot \frac{1}{\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n}.$$

ここで $n = 2m$ とおくと，$n \to \infty$ のとき m も $m \to \infty$ となる．よって，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{m}\right)^{2m}} = e \cdot \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e} < 1$$

であるから，この級数は収束する．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

【解答】

級数の第 n 項目を $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ とおき，ダランベールの判定法を用いて収束・発散を判定する．
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ が存在し，$0 \leq r < 1$ を満たすならばこの級数は収束し，$r > 1$ ならば発散する．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)^n}{(n+1)\cdot n!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} > 1\end{aligned}$$

であるから，この級数は発散する．

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{\pi}{2^n}$

【解答】

級数の第 n 項目を $a_n = n \sin \dfrac{\pi}{2^n}$ とおき，ダランベールの判定法を用いて収束・発散を判定する．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\sin \dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{n \sin \dfrac{\pi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\sin \dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \frac{\dfrac{\pi}{2^n}}{\sin \dfrac{\pi}{2^n}} \cdot \frac{2^n}{\pi}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\sin \dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\dfrac{\pi}{2^n}}{\sin \dfrac{\pi}{2^n}} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

であるから，この級数は収束する．

2. 関数列 $\left\{\dfrac{x^n}{(1+x^2)^n}\right\}$ の一様収束性・広義一様収束性を調べなさい．

【解答】　この関数列は $(-\infty, \infty)$ で定義され，第 n 項目は $f_n(x) = \dfrac{x^n}{(1+x^2)^n} = \left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^n$ と書ける．ここで，$g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ とおき，$g(x)$ の値のとりうる範囲を調べる．$g'(x)$ を計算すると，

$$g'(x) = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

$g'(x) = 0$ となる x は $x = \pm 1$ であり，$g(x)$ は $x = 1$ で極大値（最大値）$\dfrac{1}{2}$，$x = -1$ で極小値（最小値）$-\dfrac{1}{2}$ をとる．よって，この関数列の極限関数 $f(x)$ は 0 である．

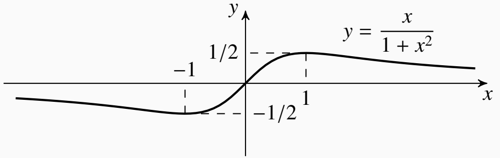

図 1: 関数 $g(x)$ の概形．

課題解説：問題 2

したがって，$(-\infty, \infty)$ において，任意の $\varepsilon > 0$ に対し自然数 N が存在し，すべての $n \geq N$ と，$(-\infty, \infty)$ のすべての x に対し，

$$| f_n(x) - f(x) | = \left| \frac{x^n}{(1+x^2)^n} - 0 \right| = \left| \frac{x}{1+x^2} \right|^n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n < \varepsilon$$

とすることができる．よって，この関数列は $(-\infty, \infty)$ で一様収束する．

3. 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ の一様収束性・広義一様収束性を調べなさい．

【解答】

この関数項級数の第 n 項目は

$$\frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

となり，かつ正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するから，この関数項級数は M-判定法より $(-\infty,\infty)$ で一様収束する．