命題の同値

A≡B は（A⊃B）∧（B⊃A）の略記である.

以下の擬似推論規則は容易に得られる.

$$\frac{A \supset B \quad B \supset A}{A \equiv B} \qquad \frac{A \equiv B}{A \supset B} \qquad \frac{A \equiv B}{B \supset A}$$

また, A≡A も直ちに証明できる.

命題

一階述語論理式の内部の部分式を同値な式に置換した命題は元の命題と同値である.

このことを証明するために, 以下の「命題変数Xを含む論理式」を定義する.

ここで命題変数とは命題と同じ「型」のものを表す変数である.

定義　命題変数Xを含む論理式F(X)

1. 命題変数Xは命題変数Xを含む論理式である.
2. 任意の命題(一階述語論理式)は命題変数Xを含む論理式である.
3. $F_1(X)$, $F_2(X)$が命題変数Xを含む論理式であるとき,
   $F_1(X) \wedge F_2(X)$, $F_1(X) \vee F_2(X)$, $F_1(X) \supset F_2(X)$, $\neg F_1(X)$は
   命題変数Xを含む論理式である.
4. F(a, X)が命題変数Xを含む論理式であり, aは自由変数とする.
   xがF(a, X)に現れない個体変数であるとき,
   $\forall x F(x, X)$, $\exists x F(x, X)$は命題変数Xを含む論理式である.

置換定理

定理

F(X)が任意の命題変数Xを含む論理式であるとする.

F(A)を, F(X)中のXを全て命題Aで置換した命題であるとする.

このとき

$(A \equiv B) \supset (F(A) \equiv F(B))$

が(NKで)証明できる.

証明

F(X)の構造に関する帰納法.

1. F(X)がXのとき. (A≡B)⊃(A≡B)を示すことになり, 自明.

2. F(X)にXが含まれないとき.

F(X)がある命題Cであることなので,

(A≡B)⊃(C≡C)を示すことになり, 自明.

3. $F(X)$が$F_1(X) \supset F_2(X)$のとき.

($F_1(X) \wedge F_2(X)$, $F_1(X) \vee F_2(X)$, $\neg F_1(X)$のときも同様.)

$(A \equiv B) \supset ((F_1(A) \supset F_2(A)) \equiv (F_1(B) \supset F_2(B)))$を示す.

帰納法の仮定より$A \equiv B$のもとで$F_1(A) \equiv F_1(B)$, $F_2(A) \equiv F_2(B)$は証明できる.

したがって,

$$\frac{F_1(A) \equiv F_1(B)}{F_1(B) \supset F_1(A)} \qquad\qquad \frac{F_2(A) \equiv F_2(B)}{F_2(A) \supset F_2(B)}$$

$$\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{(F_1(A) \supset F_2(A)) \supset (F_1(B) \supset F_2(B))}$$

同様に, $(F_1(B) \supset F_2(B)) \supset (F_1(A) \supset F_2(A))$も証明できる.

4. $F(X)$が $\forall x F_1(x, X)$のとき.

帰納法の仮定より, $F_1(a, A) \equiv F_1(a, B)$は証明できる.

aは$F_1(x, X)$に出現しない変数であるが,

A, Bにも出現しないものとする.

$\forall$-導入により, $\forall x(F_1(x, A) \equiv F_1(x, B))$が導出できる.

したがって,

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall x(F_1(x, A))}}{F_1(a, A)} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(F_1(x, A) \equiv F_1(x, B))}{F_1(a, A) \equiv F_1(a, B)}}{F_1(a, A) \supset F_1(a, B)}}{F_1(a, B)}}{\forall x(F_1(x, B))}}{\forall x(F_1(x, A)) \supset \forall x(F_1(x, B))}\ 1
$$

逆も同様にして$\forall x(F_1(x, A)) \equiv \forall x(F_1(x, B))$を得る.

5. $F(X)$が $\exists x F_1(x, X)$のとき.

4と同様に$F_1(a, A) \equiv F_1(a, B)$は証明できるので,

$\forall$-導入により, $\forall x(F_1(x, A) \equiv F_1(x, B))$が導出できる.

したがって,

$$\forall x(F_1(x, A) \equiv F_1(x, B))$$

$$\exists x(F_1(x, A)) \supset \exists x(F_1(x, B))$$

逆も同様にして $\exists x(F_1(x, A)) \equiv \exists x(F_1(x, B))$を得る.

ド・モルガン

ド・モルガンの法則

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

$$\neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$$

$$\neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$$

これらはNKで証明可能である.

以下, NKで考える. すなわち, 証明中に適宜排中律を用いる.

双対の原理

A： ⊃を含まない論理式とする．

A 中にC⊃Dの形の部分論理式があるときは, ¬C∨Dに置き換える．

A*： **Aの双対(dual)**

A中の∧を全て∨に, ∨を全て∧に,

∀を全て∃に, ∃を全て∀に置き換えた論理式

例

$(\forall x(F(x) \vee G(x)) \wedge \exists y(H(y) \wedge J(y)))^*$

$\equiv \exists x(F(x) \wedge G(x)) \vee \forall y(H(y) \vee J(y))$

補題（ド・モルガン法則の一般化）

A	:	⊃を含まない論理式
$p_1, \cdots, p_n$	:	Aに出現する全ての原子論理式
A^*	:	Aの双対.

A, A^*を各々$F(p_1, \cdots, p_n)$, $F^*(p_1, \cdots, p_n)$で表す.

$F^*(\neg p_1, \cdots, \neg p_n)$: $F^*(p_1, \cdots, p_n)$中のすべてのp_i $(i=1, 2, \cdots, n)$を $\neg p_i$ で置き換えたもの.

このとき, $\neg F(p_1, \cdots, p_n) \equiv F^*(\neg p_1, \cdots, \neg p_n)$ である.

証明

Fの構造に関する帰納法.

1. $F(p_1, \cdots, p_n)$が$p_1(t_1, \cdots, t_n)$のとき.

   $F^*(\neg p_1, \cdots, \neg p_n)$は$\neg p_1(t1, \cdots, t_n)$ なので自明.

2. $F(p_1, \cdots, p_n)$が$F_1(p_1, \cdots, p_n) \wedge F_2(p_1, \cdots, p_n)$のとき.

   帰納法の仮定により,

   $\neg F_1(p_1, \cdots, p_n) \equiv F_1{}^*(\neg p_1, \cdots, \neg p_n)$, $\neg F_2(p_1, \cdots, p_n) \equiv F_2{}^*(\neg p_1, \cdots, \neg p_n)$

   は得られている.

   $F^*(\neg p_1, \cdots, \neg p_n)$は$F_1{}^*(\neg p_1, \cdots, \neg p_n) \vee F_2{}^*(\neg p_1, \cdots, \neg p_n)$であるため,

   $\neg F(p_1, \cdots, p_n) \equiv F^*(\neg p_1, \cdots, \neg p_n)$は容易に示すことができる.

3. $F(p_1, \cdots, p_n)$が$F_1(p_1, \cdots, p_n) \vee F_2(p_1, \cdots, p_n)$のとき. 同様.

4. $F(p_1, \cdots, p_n)$が$\neg F_1(p_1, \cdots, p_n)$のとき.

帰納法の仮定より, $\neg F_1(p_1, \cdots, p_n) \equiv F_1^*(\neg p_1, \cdots, \neg p_n)$は得られている.

5. $F(p_1, \cdots, p_n)$が $\forall x F_1(x; p_1, \cdots, p_n)$のとき.

6. $F(p_1, \cdots, p_n)$が $\exists x F_1(x; p_1, \cdots, p_n)$のとき.

同様に

定理（双対の原理）

Aを⊃を含まない論理式とし, A^*を双対とするとき,

以下が成立する.

1. Aが(NKで)証明できれば$\neg A^*$も証明できる.
2. $\neg A$が証明できればA^*も証明できる.

証明

$F(p_1, \cdots, p_n)$, $F^*(p_1, \cdots, p_n)$で各々A, A^*を表すことにする.

1. A^*の双対はAである.

   ド・モルガンの法則の一般化により, $\neg F^*(p_1, \cdots, p_n) \equiv F(\neg p_1, \cdots, \neg p_n)$,

2. $\neg A$の双対は$\neg A^*$である.

トートロジー

トートロジー（tautology）

中に現れる命題の真理値が何であっても，全体の真理値が常に$\top$になる命題

例

$A \vee \neg A$	排中律
$A \supset A$	同一律
$\neg(A \wedge \neg A)$	矛盾律
$((A \supset B) \supset A) \supset A$	パースの法則

重要な同値式

$\neg\neg A$	$\equiv$	A	二重否定
$A \wedge A$	$\equiv$	A	冪等律
$A \vee A$	$\equiv$	A	
$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	交換律
$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$	
$(A \wedge B) \vee C$	$\equiv$	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$	分配律
$(A \vee B) \wedge C$	$\equiv$	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	
$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A	吸収律
$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	結合律
$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$	
$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$(\neg A \wedge \neg B)$	ド・モルガン
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$(\neg A \vee \neg B)$	

重要な同値式

$A \wedge B$	$\equiv$	$\neg(\neg A \vee \neg B)$
$A \vee B$	$\equiv$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$
$A \supset B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$
$A \equiv B$	$\equiv$	$A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B$
$A \supset B \supset C$	$\equiv$	$A \wedge B \supset C$
$(A \supset B) \supset B$	$\equiv$	$A \vee B$
$\forall x A$	$\equiv$	$\neg \exists x \neg A$
$\exists x A$	$\equiv$	$\neg \forall x \neg A$

NKであれば全て証明できる.

これらにより,

論理記号は$\neg$, $\vee$, $\exists$だけあればよい

(他はそれらから定義できる)ことがわかる.

命題論理の全ての式は否定論理積の記号

（NAND;シェーファーの棒（Sheffer stroke）ということもある）

だけで書き表すことができる.

｜をシェーファーの棒を表す論理記号とする.

$\neg A \equiv A \mid A$

$A \wedge B \equiv \neg (A \mid B) \equiv (A \mid B) \mid (A \mid B)$

$A \vee B \equiv \neg (\neg A \wedge \neg B) \equiv \neg\neg (\neg A \mid \neg B)$

$\equiv (A \mid A) \mid (B \mid B)$

A	B	A｜B
⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤
⊤	⊤	⊥

否定論理和（NOR）でも同じことができる.

重要な同値式

yはA中に現れない変数とする.

$\forall x A(x) \equiv \forall y A(y)$

$\exists x A(x) \equiv \exists y A(y)$

D中にxが自由変数として現れないとする.

$\forall x D \equiv D$

$\exists x D \equiv D$

$D \wedge \forall x B \equiv \forall x (D \wedge B)$

$D \vee \forall x B \equiv \forall x (D \vee B)$

$D \wedge \exists x B \equiv \exists x (D \wedge B)$

$D \vee \exists x B \equiv \exists x (D \vee B)$

$D \supset \forall x B \equiv \forall x (D \supset B)$

$D \supset \exists x B \equiv \exists x (D \supset B)$

$\forall x B \supset D \equiv \exists x (B \supset D)$

$\exists x B \supset D \equiv \forall x (B \supset D)$

標準形

命題論理

原子論理式は論理式である.

ここでは0引数のものを考える.

これを命題変数とよぶこともある.

A, Bが論理式のとき$(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$は論理式である.

命題論理式の標準形

リテラル literal

p または $\neg p$　p: 原子論理式

節 clause

$L_1 \vee \ldots \vee L_m$　L_i : リテラル（$m \geq 0$, $0 \leq i \leq m$）

連言標準形 Conjunctive Normal Form; CNF

$C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$　C_j : 節　（$n \geq 0$, $0 \leq j \leq n$）

すなわち

$(L_{11} \vee \ldots \vee L_{1m}) \wedge \ldots \wedge (L_{n1} \vee \ldots \vee L_{nm})$　（$m,n \geq 0$）

選言標準形 Disjunctive Normal Form; DNF

$(L_{11} \wedge \ldots \wedge L_{1m}) \vee \ldots \vee (L_{n1} \wedge \ldots \wedge L_{nm})$　（$m,n \geq 0$）

定理

任意の命題論理の式には同値な連言標準形の式と選言標準形の式が存在する.

証明

命題論理式Aから同値な連言標準形の式Bと選言標準形の式Cを作る方法を与えることにより証明する.

まず, A中のD⊃Eの形の部分式を全て¬D∨Eで置換する.

次にド・モルガンの定理を用いて¬が全て∨や∧の内側に入るように同値変形を行う.

否定は原子論理式pの前にいくつか並んだ¬...¬pの形のみになる.

¬が偶数個並んでいたら二重否定の除去により0個に同値変形できるので

pまたは¬pの形のみ, すなわちリテラルになる.

同じリテラルが∨や∧で連なる場合は冪等律で一つにする.

交換律は適宜用いる.

ここまででAと同値な式としてリテラルが∧や∨で繰り返し連なったものが得られる.

分配律を用いて内側の∧を∨の外側にする同値変形を繰り返せば連言標準形が,

内側の∨を∧の外側にする同値変形を繰り返せば選言標準形が得られる.

例題

$\neg(p \supset (q \wedge r))$の連言標準形と選言標準形を求めよ.

解

$\neg(p \supset (q \wedge r))$

$\equiv \neg(\neg p \vee (q \wedge r))$

$\equiv \neg\neg p \wedge \neg(q \wedge r)$

$\equiv p \wedge (\neg q \vee \neg r)$　(連言標準形)

$\equiv p \wedge \neg q \vee p \wedge r$　(選言標準形)

演習

次の式の連言標準形と選言標準形を求めよ.

52.　$(p \vee (\neg q \wedge r)) \supset s$

53.　$(p \supset s) \wedge (\neg q \wedge r \supset s)$

述語論理式の標準形

Q_i : ∀か∃のいずれ

A : 量記号を含まない述語論理の式

冠頭標準形 prenex normal form

$$Q_1x_1 \ldots Q_nx_n A$$

定理

任意の述語論理の式には同値な冠頭標準形の論理式が存在する.

証明

述語論理式に対して, 同値で量記号を外側に出す論理式を作る操作を繰り返して行う.

量記号の外側にその量記号での束縛変数と同じ名前の自由変数がある場合は

束縛変数を論理式で使われていない名前の変数に置き換える.

演習

$(\exists y P(y) \wedge Q(x)) \supset \exists x R(x)$の冠頭標準形を求めよ.

レポート問題

1. $A \equiv B$のとき$\neg A \equiv \neg B$であることを示せ.
2. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$を, 1の定理および$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$と$A \equiv \neg\neg A$より, 置換定理を用いて証明せよ.
3. 次の式の連言標準形と選言標準形を求めよ.（若干トリッキーな解になる）
   54. $((p \supset q) \supset p) \supset p$
   55. $(p \supset (p \wedge \neg q)) \wedge (q \supset (q \wedge \neg p))$
   56. $\neg(p \supset q) \wedge ((q \supset s) \supset r)$

締切　5月30日　8:40

提出先　manaba

解答は5月30日8:40以降にmanabaで示します.

期末レポートは別途6月20日ごろに提示します.