微分積分Ｂ（情報科学類３・４クラス対象）

第１回　演習課題解説

担当教員：萬 礼応（情報科学類）

2025 年 4 月 24 日 (木)

課題解説：問題 1

1. 次の関数の連続性を調べなさい．

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{2x^2+y^2}, & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0, & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

【解答例】

$(x,y)\neq(0,0)$ において，関数 $f(x,y)$ は連続である．よって，原点での連続性を調べる． $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおくと，$(x,y)\to(0,0)$ は $r\to 0$ に対応するから

$$\left|\frac{x^2y}{2x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\right|=\left|r\cos^2\theta\sin\theta\right|\leq r\to 0$$

よって，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0).$$

x,y の近づけ方によらず，極値が 0 に一致するので，関数 $f(x,y)$ は原点で連続である．したがって，関数 $f(x,y)$ は連続である．

課題解説：問題 2

2. 次の関数を偏微分しなさい．

(1) $f(x, y) = 2x^3 + 5x^2y + 4axy - y^3$　(a は定数)

【解答】

$$f_x = 6x^2 + 10xy + 4ay, \quad f_y = 5x^2 + 4ax - 3y^2.$$

(2) $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^3+3y^2}$

【解答】

$w = -x^3 + 3y^2$ とおくと，$f(x, y) = \mathrm{e}^w$．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = \mathrm{e}^w \cdot (-3x^2) = -3x^2\,\mathrm{e}^{-x^3+3y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \mathrm{e}^w \cdot 6y = 6y\,\mathrm{e}^{-x^3+3y^2}.$$

3. 次の関数の第 2 次偏導関数を求めなさい．

(1) $f(x, y) = 3x^3 - 2x^2y + xy^2 - 5y^3$

【解答】

まず，第 1 次偏導関数 f_x, f_y を求めると，

$$f_x = 9x^2 - 4xy + y^2, \quad f_y = -2x^2 + 2xy - 15y^2.$$

次に，第 2 次偏導関数 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ を求めると，

$$f_{xx} = 18x - 4y, \quad f_{xy} = -4x + 2y,$$
$$f_{yx} = -4x + 2y, \quad f_{yy} = 2x - 30y.$$

(2) $f(x,y) = xy\sin(x-y)$

【解答】

まず，第 1 次偏導関数 f_x, f_y を求めると，

$$f_x = y\sin(x-y) + xy\cos(x-y), \quad f_y = x\sin(x-y) - xy\cos(x-y).$$

次に，第 2 次偏導関数 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ を求めると，

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= y\cos(x-y) + y\cos(x-y) - xy\sin(x-y) = 2y\cos(x-y) - xy\sin(x-y),\\
f_{xy} &= \sin(x-y) - y\cos(x-y) + x\cos(x-y) + xy\sin(x-y)\\
&= (1+xy)\sin(x-y) + (x-y)\cos(x-y).\\
f_{yx} &= \sin(x-y) + x\cos(x-y) - y\cos(x-y) + xy\sin(x-y)\\
&= (1+xy)\sin(x-y) + (x-y)\cos(x-y).\\
f_{yy} &= -x\cos(x-y) - x\cos(x-y) - xy\sin(x-y) = -2x\cos(x-y) - xy\sin(x-y).
\end{aligned}$$

4. 関数 $z = f(x,y) = 2 - x^2 - 2y^2$ の点 $(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ における接平面を求めなさい．

【解答】

関数 $z = f(x,y)$ の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面は，

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

で与えられる．$f(x,y)$ の偏導関数 f_x, f_y を求めると，

$$f_x = -2x, \quad f_y = -4y.$$

$f(1, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$, $f_x(1, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -2$, $f_y(1, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -2\sqrt{2}$ より，求める接平面は

$$z - f(1, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f_x(1, \frac{1}{\sqrt{2}})(x-1) + f_y(1, \frac{1}{\sqrt{2}})(y - \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\Leftrightarrow \; z = -2(x-1) - 2\sqrt{2}(y - \frac{1}{\sqrt{2}}) = -2x - 2\sqrt{2}y + 4.$$

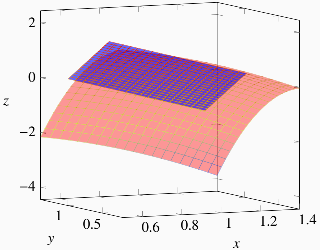

図 1: 赤：$z = 2 - x^2 - 2y^2$，青：点 $(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ における接平面．