論理と形式化

亀山幸義

筑波大学 情報科学類

No. 10a: ラムダ計算と型システム

目次

プログラムの型付け

動的型付け言語 (Python,Perl,Ruby,JavaScript,Lisp,...)

```
def foo(x,y):
    return x * y + "abc"
foo(3,5)
```

静的型付け言語 (C,C++,Java,Scala,Swift,ML,Haskell,...)

```
int foo(int x, int y) {
    return x * y + "abc";
}
```

プログラム実行前に，プログラムの型の整合性を検査

目次

(型の付かない) ラムダ計算

ラムダ計算は，プログラム言語の基礎となる体系:

式 (expression) の構文:

$$M ::= x \mid n \mid (M + M) \mid (\lambda x.M) \mid (M\ M)$$

- x は変数
- n は整数の変数
- $M + M$ は整数の加算
- $\lambda x.M$ は、ラムダ抽象 (関数を表す)
  - $f(x) = M$ により定義される関数 f のこと
- $M_1\ M_2$ は、関数適用 (関数 M_1 に引数 M_2 を渡した計算)
  - $f(3)$ のことをラムダ計算では $f\ 3$ と書く.
- 括弧は適宜省略: 関数適用はラムダ抽象より強く結合し，左結合

式の例: $\lambda x.\ (x + 5)$， $\lambda x.(\lambda y.((x\ y)\ y))$

型の付かないラムダ計算の表現力

高階関数: 関数を引数としたり，関数を返り値とする関数のこと.

- $\lambda f.\ f\ 5$
- $\lambda f.\ \lambda g.\ \lambda x.\ f\ (g\ x)$ (関数合成)

事実: 型の付かないラムダ計算は，Turing と機械と同等の表現力がある.

- Church-Turing の提唱: 「これらで定義できる関数のことを，計算可能な関数と定義しよう.

型つきラムダ計算

型の構文:

$$B ::= \texttt{int} \mid \cdots$$
$$T ::= B \mid T \to T$$

B は基本型 (整数型をあらわす int などがいくつかあると仮定する)

例:

- $\texttt{int} \to \texttt{int}$... 整数をもらって整数を返す関数の型
- $(\texttt{int} \to \texttt{int}) \to \texttt{int}$... 関数をもらって整数を返す高階関数の型
- $\texttt{int} \to (\texttt{int} \to \texttt{int})$... 整数をもらって関数を返す高階関数の型

大事なこと: 型における括弧は意味がある。

- $\texttt{int} \to (\texttt{int} \to \texttt{int})$ と $(\texttt{int} \to \texttt{int}) \to \texttt{int}$ は全く異なる。

型判断 (Typing Judgement)

型判断 $x_1 : T_1, \cdots, x_n : T_n \vdash M : T$

- 「変数 x_i が型 T_i を持つなら、式 M に型 T が付く」を意味する。
- $n = 0$ でもよい。
- $x_1 : T_1, \cdots, x_n : T_n$ の部分を型文脈という (Γ で表す)。

目標: 以下のように判断したい。

- $\vdash 3 : \texttt{int}$ ...OK
- $\vdash x : \texttt{int}$ ...Not OK
- $x : \texttt{int} \vdash x : \texttt{int}$ ...OK
- $x : \texttt{int} \vdash x + y : \texttt{int}$ ...Not OK
- $x : \texttt{int},\ y : \texttt{int},\ z : \texttt{int} \vdash x + y : \texttt{int}$ ...OK
- $x : \texttt{int} \to \texttt{int} \vdash x\ (x\ 3) : \texttt{int}$ ...OK

型導出

型導出 (型付けの導出): 型付け規則を使って型判断 $\Gamma \vdash M : T$ を導く。

型導出の例:

J1. 無条件に、$x : \texttt{int} \vdash x : \texttt{int}$ が導ける。
J2. 無条件に、$x : \texttt{int} \vdash 2 : \texttt{int}$ が導ける。
J3. 1,2 から、$x : \texttt{int} \vdash x + 2 : \texttt{int}$ が導ける。
J4. 無条件に、$x : \texttt{int} \vdash 3 : \texttt{int}$ が導ける。
J5. 3,4 から、$x : \texttt{int} \vdash (x + 2) + 3 : \texttt{int}$ が導ける。

$$\dfrac{\dfrac{\overline{J1} \quad \overline{J2}}{J3} \quad \overline{J4}}{J5}$$

完成版の型導出図:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{x : \texttt{int} \vdash x : \texttt{int}} \quad \overline{x : \texttt{int} \vdash 2 : \texttt{int}}}{x : \texttt{int} \vdash x + 2 : \texttt{int}} \quad \overline{x : \texttt{int} \vdash 3 : \texttt{int}}}{x : \texttt{int} \vdash (x + 2) + 3 : \texttt{int}}$$

型付け規則: 定数と加算

整数定数に対する規則 (n は 3 や -5 など):

$$\frac{}{\Gamma \vdash n : \mathtt{int}}$$

加算に対する規則:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathtt{int} \quad \Gamma \vdash N : \mathtt{int}}{\Gamma \vdash M + N : \mathtt{int}}$$

例:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{x : \mathtt{int} \vdash 3 : \mathtt{int}} \quad \dfrac{}{x : \mathtt{int} \vdash 5 : \mathtt{int}}}{x : \mathtt{int} \vdash 3 + 5 : \mathtt{int}} \quad \dfrac{}{x : \mathtt{int} \vdash 7 : \mathtt{int}}}{x : \mathtt{int} \vdash (3 + 5) + 7 : \mathtt{int}}$$

型付け規則: 変数

変数に対する規則:

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : \mathtt{typeof}_x(\Gamma)}$$

typeof 関数は、Γ における x の型 (複数ある時は一番右):

$$\mathtt{typeof}_x(x : \mathtt{int},\ y : \mathtt{int},\ x : \mathtt{int} \to \mathtt{int}) = \mathtt{int} \to \mathtt{int}$$
$$\mathtt{typeof}_z(x : \mathtt{int},\ y : \mathtt{int},\ x : \mathtt{int} \to \mathtt{int}) = (\text{未定義})$$

例:

$$\frac{}{x : \mathtt{int} \to \mathtt{int},\ y : \mathtt{int} \to \mathtt{int},\ x : \mathtt{int} \vdash x : \mathtt{int}}$$

$$\frac{}{x : \mathtt{int} \to \mathtt{int},\ y : \mathtt{int} \to \mathtt{int},\ x : \mathtt{int} \vdash y : \mathtt{int} \to \mathtt{int}}$$

型付け規則: 関数適用

関数適用に対する規則:

$$\frac{\Gamma \vdash M : T_1 \to T_2 \quad \Gamma \vdash N : T_1}{\Gamma \vdash M\ N : T_2}$$

以下では、$\Gamma_1 = x : \texttt{int}, y : \texttt{int} \to \texttt{int}$ とする。
例:

$$\frac{\overline{\Gamma_1 \vdash y : \texttt{int} \to \texttt{int}} \quad \overline{\Gamma_1 \vdash x : \texttt{int}}}{\Gamma_1 \vdash y\ x : \texttt{int}}$$

$$\frac{\overline{\Gamma_1 \vdash y : \texttt{int} \to \texttt{int}} \quad \dfrac{\overline{\Gamma_1 \vdash y : \texttt{int} \to \texttt{int}} \quad \overline{\Gamma_1 \vdash x : \texttt{int}}}{\Gamma_1 \vdash y\ x : \texttt{int}}}{\Gamma_1 \vdash y\ (y\ x) : \texttt{int}}$$

型付け規則: ラムダ抽象 (関数)

ラムダ抽象に対する規則:

$$\frac{\Gamma,\ x : T_1 \vdash M \ : \ T_2}{\Gamma \vdash \lambda x.\ M \ : \ T_1 \to T_2}$$

$\Gamma,\ x : T_1$ は Γ の最後に $x : T_1$ を追加した列のこと。

例:

$$\dfrac{\dfrac{}{x : \mathtt{int} \vdash x \ : \ \mathtt{int}}}{\vdash \lambda x.\ x \ : \ \mathtt{int} \to \mathtt{int}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \mathtt{int},\ y : \mathtt{int} \vdash x \ : \ \mathtt{int}}}{x : \mathtt{int} \vdash \lambda y.\ x \ : \ \mathtt{int} \to \mathtt{int}}}{\vdash \lambda x.\ \lambda y.\ x \ : \ \mathtt{int} \to (\mathtt{int} \to \mathtt{int})}$$

型導出の例 (1)

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{x : \mathtt{int} \vdash x : \mathtt{int}}
    \quad
    \dfrac{}{x : \mathtt{int} \vdash 3 : \mathtt{int}}
  }{x : \mathtt{int} \vdash x + 3 : \mathtt{int}}
  \quad
  \dfrac{
    \dfrac{}{x : \mathtt{int} \vdash 5 : \mathtt{int}}
    \quad
    \dfrac{}{x : \mathtt{int} \vdash x : \mathtt{int}}
  }{x : \mathtt{int} \vdash 5 + x : \mathtt{int}}
}{
  \dfrac{x : \mathtt{int} \vdash (x + 3) + (5 + x) : \mathtt{int}}{\vdash \lambda x.\, ((x + 3) + (5 + x)) : \mathtt{int} \to \mathtt{int}}
}
$$

型導出の例 (2)

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{}{x : \mathtt{int},\ y : \mathtt{int} \vdash x : \mathtt{int}}
        \quad
        \dfrac{}{x : \mathtt{int},\ y : \mathtt{int} \vdash 3 : \mathtt{int}}
      }{x : \mathtt{int},\ y : \mathtt{int} \vdash x + 3 : \mathtt{int}}
      \quad
      \dfrac{}{x : \mathtt{int},\ y : \mathtt{int} \vdash y : \mathtt{int}}
    }{x : \mathtt{int},\ y : \mathtt{int} \vdash (x + 3) + y : \mathtt{int}}
  }{x : \mathtt{int} \vdash \lambda y.\ ((x + 3) + y) : \mathtt{int} \to \mathtt{int}}
}{\vdash \lambda x.\ (\lambda y.\ ((x + 3) + y)) : \mathtt{int} \to (\mathtt{int} \to \mathtt{int})}
$$

型導出の例 (3)

$\Gamma = x : \mathtt{int} \to \mathtt{int}$ とする.

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash 3 : \mathtt{int}}}{\Gamma \vdash x\ 3 : \mathtt{int}}}{\dfrac{\Gamma \vdash x\ (x\ 3) : \mathtt{int}}{\vdash \lambda x.\ (x\ (x\ 3)) : (\mathtt{int} \to \mathtt{int}) \to \mathtt{int}}}$$

型導出の例 (4)

微妙な例:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\color{red}{x:\texttt{int}\to\texttt{int},\ x:\texttt{int}\vdash x:\texttt{int}}} \qquad \dfrac{}{\cdots\vdash 3:\texttt{int}}}{x:\texttt{int}\to\texttt{int},\ x:\texttt{int}\vdash x+3:\texttt{int}}}{x:\texttt{int}\to\texttt{int}\vdash \lambda x.\,(x+3):\texttt{int}\to\texttt{int}} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \cdots\vdash x\ 5:\texttt{int}\end{array}}{x:\texttt{int}\to\texttt{int}\vdash (\lambda x.\,(x+3))\ (x\ 5):\texttt{int}}}{\vdash \lambda x.\,((\lambda x.\,(x+3))\ (x\ 5)):(\texttt{int}\to\texttt{int})\to\texttt{int}}
$$

赤字のところは、以下より:

$$
\texttt{typeof}_x(x:\texttt{int}\to\texttt{int},\ x:\texttt{int}) = \texttt{int}
$$

目次

演習問題その１

以下のラムダ式 M_i と T_i に対して、$\Gamma \vdash M_i : T_i$ を導く型導出図を書きなさい。ただし、$\Gamma = y : \mathtt{int} \to \mathtt{int}$ とする。

- $M_1 = y\ 7$, $T_1 = \mathtt{int}$
- $M_2 = \lambda x.\ (y\ (y\ x))$, $T_2 = \mathtt{int} \to \mathtt{int}$
- $M_3 = \lambda x.\ \lambda y.\ (x + y) + x$, $T_3 = \mathtt{int} \to (\mathtt{int} \to \mathtt{int})$

目次

型検査と型推論

型検査 (type checking) 問題:

- Γ と M と T が与えられた時、$\Gamma \vdash M : T$ が導けるかどうか？

型推論 (type inference) 問題:

- M が与えられた時、$\Gamma \vdash M : T$ が導ける Γ と T があるか、また、ある場合はそれは何か？

型推論問題の変種:

- Γ と M が与えられた時、$\Gamma \vdash M : T$ が導ける T があるか、また、ある場合はそれは何か？

例で考える型推論 (1)

問題: $M = \lambda f.\,(\lambda x.\,(f\ (f\ x)))$ に対して，$\Gamma \vdash M : T$ を導出できる型文脈 Γ と型 T は存在するか？

M は自由変数を持たないので，Γ は「空」でよい。

例で考える型推論 (2)

問題: $M = \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x)))$ に対して, $\vdash M : T$ を導出できる型 T は存在するか？

型導出図があったとしたら、一番下は以下の形である。

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ f : \tau_2 \vdash \lambda x.\ (f\ (f\ x)) : \tau_3\end{matrix}}{\vdash \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x))) : \tau_1}$$

- τ_1, τ_2, τ_3 は、まだ中身がわからない型を表す変数。
- しかし，ラムダ抽象の型付け規則から、$\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \tau_3$

例で考える型推論 (3)

問題: $M = \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x)))$ に対して，$\vdash M : T$ を導出できる型 T は存在するか？

型導出図があったとしたら、下の方は以下の形である。

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{f : \tau_2,\ x : \tau_4 \vdash f\ (f\ x) : \tau_5}}{\dfrac{f : \tau_2 \vdash \lambda x.\ (f\ (f\ x)) : \tau_3}{\vdash \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x))) : \tau_1}}$$

- 型を表す新しい変数 τ_4, τ_5
- 型付け規則から $\tau_3 = \tau_4 \to \tau_5$ である。

例で考える型推論 (4)

問題: $M = \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x)))$ に対して，$\vdash M : T$ を導出できる型 T は存在するか？

M の型導出図を下から一歩ずつ作る。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ f : \tau_2,\ x : \tau_4 \vdash f : \tau_6\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots \\ f : \tau_2,\ x : \tau_4 \vdash f\ x : \tau_7\end{array}}{f : \tau_2,\ x : \tau_4 \vdash f\ (f\ x) : \tau_5}}{f : \tau_2 \vdash \lambda x.\ (f\ (f\ x)) : \tau_3}}{\vdash \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x))) : \tau_1}$$

- 型を表す新しい変数 τ_6, τ_7
- 型付け規則から $\tau_6 = \tau_7 \to \tau_5$ である。

例で考える型推論 (5)

問題: $M = \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x)))$ に対して，$\vdash M : T$ を導出できる型 T は存在するか？

M の型導出図を下から一歩ずつ作る。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{f : \tau_2,\ x : \tau_4 \vdash f : \tau_6} \qquad \dfrac{\dfrac{}{f : \tau_2,\ x : \tau_4 \vdash f : \tau_8} \quad \dfrac{}{f : \tau_2,\ x : \tau_4 \vdash x : \tau_9}}{f : \tau_2,\ x : \tau_4 \vdash f\ x : \tau_7}}{f : \tau_2,\ x : \tau_4 \vdash f\ (f\ x) : \tau_5}}{f : \tau_2 \vdash \lambda x.\ (f\ (f\ x)) : \tau_3}}{\vdash \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x))) : \tau_1}$$

- 型付け規則から $\tau_2 = \tau_6$, $\tau_8 = \tau_9 \to \tau_7$, $\tau_2 = \tau_8$, $\tau_4 = \tau_9$ である。

例で考える型推論 (6)

問題: $M = \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x)))$ に対して, $\vdash M : T$ を導出できる型 T は存在するか？

新しい問題: 以下の等式すべてが成立する型 $\tau_1, \cdots, \tau_9$ が存在するか？

$$\tau_1 = \tau_2 \to \tau_3$$

$$\tau_3 = \tau_4 \to \tau_5$$

$$\tau_6 = \tau_7 \to \tau_5$$

$$\tau_2 = \tau_6$$

$$\tau_8 = \tau_9 \to \tau_7$$

$$\tau_2 = \tau_8$$

$$\tau_4 = \tau_9$$

例で考える型推論 (6)

問題: $M = \lambda f.\,(\lambda x.\,(f\ (f\ x)))$ に対して, $\vdash M : T$ を導出できる型 T は存在するか？

新しい問題: 以下の等式すべてが成立する型 $\tau_1, \cdots, \tau_9$ が存在するか？

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \tau_2 \to \tau_3 \\
\tau_3 &= \tau_4 \to \tau_5 \\
\tau_6 &= \tau_7 \to \tau_5 \\
\tau_2 &= \tau_6 \\
\tau_8 &= \tau_9 \to \tau_7 \\
\tau_2 &= \tau_8 \\
\tau_4 &= \tau_9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &:= (I \to I) \to (I \to I) \\
\tau_2 &:= I \to I \\
\tau_3 &:= I \to I \\
\tau_4 &:= I \\
\tau_5 &:= I \\
\tau_6 &:= I \to I \\
\tau_7 &:= I \\
\tau_8 &:= I \to I \\
\tau_9 &:= I
\end{aligned}
$$

例で考える型推論 (7)

問題: $M = \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x)))$ に対して，$\vdash M : T$ を導出できる型 T は存在するか？

答え: YES. $T = (\mathtt{int} \to \mathtt{int}) \to (\mathtt{int} \to \mathtt{int})$ に対して，以下の通り．
($\Gamma_1 = f : \mathtt{int} \to \mathtt{int},\ x : \mathtt{int}$ と置いた．)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash f : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash f : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{}{\Gamma_1 \vdash x : \mathtt{int}}}{\Gamma_1 \vdash f\ x : \mathtt{int}}}{\Gamma_1 \vdash f\ (f\ x) : \mathtt{int}}}{f : \mathtt{int} \to \mathtt{int} \vdash \lambda x.\ (f\ (f\ x)) : \mathtt{int} \to \mathtt{int}}}{\vdash \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x))) : (\mathtt{int} \to \mathtt{int}) \to (\mathtt{int} \to \mathtt{int})}$$

型推論アルゴリズム

入力: 型環境 Γ とラムダ式 M
出力: M の型 T もしくは「この型付けはできない」という情報
手続き:

- 新しい型変数 τ_1 を導入
- $\Gamma \vdash M : \tau_1$ を結論 (一番下) に持つ型推論図を下から一歩ずつ構成
  1. 新しい型変数 τ_i を導入
  2. 型に関する等式 (制約) が発生
- 型に関する等式すべてを集めて解く (単一化アルゴリズム)。
- 解があれば、M は型付けできる。(τ_1 に対応する型が M の型)
- 解がなければ、M は型付けできない。

型推論の例 (1)

入力: 空の型環境とラムダ式 $\lambda x.\ (x+3)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x:\tau_2 \vdash x:\mathtt{int}} \quad \dfrac{}{x:\tau_2 \vdash 3:\mathtt{int}}}{x:\tau_2 \vdash x+3:\tau_3}}{\vdash \lambda x.\ x+3:\tau_1}$$

等式系: $\{\tau_1 = \tau_2 \to \tau_3,\ \tau_3 = \mathtt{int},\ \tau_2 = \mathtt{int}\}$
等式系の解の 1 つ: $[\tau_1 := \mathtt{int} \to \mathtt{int},\ \tau_2 := \mathtt{int},\ \tau_3 := \mathtt{int}]$
よって $\vdash \lambda x.\ x+3 : \mathtt{int} \to \mathtt{int}$ が導ける。

型推論の例 (2)

入力: 空の型環境とラムダ式 $\lambda x.\ (x\ x)$

$$\dfrac{\dfrac{}{x : \tau_2 \vdash x : \tau_4} \quad \dfrac{}{x : \tau_2 \vdash x : \tau_5}}{\dfrac{x : \tau_2 \vdash x\ x : \tau_3}{\vdash \lambda x.\ (x\ x) : \tau_1}}$$

等式の集合: $\{\tau_1 = \tau_2 \to \tau_3,\ \tau_4 = \tau_5 \to \tau_3,\ \tau_4 = \tau_2,\ \tau_5 = \tau_2\}$
単一化の解: なし ($\tau_2 = \tau_2 \to \tau_3$ の解はない。)
よって $\vdash \lambda x.\ (x\ x) : T$ は、どんな型 T に対しても導けない。

等式系の解法: 単一化

型に関する等式系はどうやって解くか？

- $\tau = T$ はたいてい解ける。($\tau := T$ とすればよい。)
- $\texttt{int} = \texttt{int}$ は解ける。
- $\texttt{int} = T_1 \to T_2$ は解がない。
- $T_1 \to T_2 = T_3 \to T_4$ は、$T_1 = T_3$ と $T_2 = T_4$ に分解して解く。

$\tau = T$ は「たいてい」解ける、とは？

- $\tau = \tau \to T'$ や $\tau = T' \to (\tau \to T'')$ は解がない。
- 一般に、「T が，τ そのものではなく，τ を含む」とき、およびそのときに限り、解を持たない.

型推論のまとめ

単純型付きラムダ計算に対する型推論:

- 型推論問題: 「式 M が与えられた時、$\Gamma \vdash M : T$ となる Γ と T が存在するか」
- 型推論問題は、単一化問題に帰着して必ず有限時間で解くことができる。

型検査 vs 型推論

- 型推論: ML (OCaml, SML, F#), Haskell... (変数や関数の型を書かなくてよい言語)
- 型検査: C, C++, Java...(変数や関数の型を必ず書く言語)

目次

演習問題その 2

以下のコンビネータに対する型推論を行い，型が付くかどうか判定した上で、型が付くなら型導出図の 1 つを書きなさい。型が付かないならその理由を簡単に述べなさい.

$$K := \lambda x.\ \lambda y.\ x$$
$$S := \lambda f.\ \lambda g.\ \lambda x.\ ((f\ \ x)\ (g\ \ x))$$
$$Y := \lambda f.\ ((\lambda x.\ (f\ \ (x\ \ x)))\ (\lambda x.\ (f\ \ (x\ \ x))))$$