

# 演習

前回のレポート問題

$$35. \quad \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \vdash \forall x (A(x) \vee B(x))$$

$$36. \quad \exists x (A(x) \wedge B(x)) \vdash \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

これらに対して、以下の式を考える。

$$35' \quad \forall x (A(x) \vee B(x)) \vdash \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$$

これは必ずしも成り立たない。

成り立たなくなるような具体的なモデルと  $A(x)$ ,  $B(x)$  の具体的な式の例を考えよ。  
(これを反例という。)

同様に、

$$36' \quad \exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \vdash \exists x (A(x) \wedge B(x))$$

の反例もあげよ。

# 演習

以下を証明せよ.

$$37. \quad \neg A \vdash (A \vdash \perp)$$

$$38. \quad (A \vdash \perp) \vdash \neg A$$

# 演習

以下を証明せよ.

39.  $\exists x \neg A(x) \supset \neg \forall x A(x)$

# 演習

以下を証明せよ.

ただしBにはxが自由変数として現れない.

$$40. \quad \exists x(A(x) \wedge B) \supset \exists x A(x) \wedge B$$

$$41. \quad \exists x A(x) \wedge B \supset \exists x(A(x) \wedge B)$$

# 演習

以下を証明せよ.

ただしBにはxが自由変数として現れない.

$$42. \quad \forall x(A(x) \supset B) \supset (\exists x A(x) \supset B)$$

$$43. \quad (\exists x A(x) \supset B) \supset \forall x(A(x) \supset B)$$

$\forall x(A(x) \supset B)$ と $(\exists x A(x) \supset B)$ とは同値である。

意味論でも以下のように解釈される。

$$\begin{aligned} I_\rho[\forall x(A(x) \supset B)] \\ &= \forall^*(\{I_{\rho[a/x]}[A(x) \supset B] \mid a \in D\}) \\ &= T \text{ if } I_\rho[A(a)] = \perp \text{ for every } a \in D \text{ or } I_\rho[B] = T \\ &\quad (\because \{I_{\rho[a/x]}[A(x) \supset B]\} = T \text{ if } I_\rho[A(a)] = \perp \text{ or } I_\rho[B] = T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_\rho[(\exists x A(x) \supset B)] \\ &= T \text{ if } \exists^*(\{I_{\rho[a/x]}[A(x)] \mid a \in D\}) = \perp \text{ or } I_\rho[B] \\ &= T \text{ if } I_\rho[A(a)] = \perp \text{ for every } a \in D \text{ or } I_\rho[B] = T \end{aligned}$$

# 演習

以下を証明せよ.

(\*)の証明には排中律が必要

$$44. (*) \quad (\neg A \supset B) \supset A \vee B$$

# 演習

以下を証明せよ。

(\*)の証明には排中律が必要

$$45. (*) \quad \neg \exists x \neg A(x) \supset \forall x A(x)$$

45は 33  $\neg \exists x A(x) \supset \forall x \neg A(x)$  と 20  $\neg \neg A \supset A$  の応用

この逆

$$\forall x A(x) \supset \neg \exists x \neg A(x)$$

は本日のレポート課題

45.

33.

$$\frac{\frac{\frac{1}{\neg \exists x A(x)} \frac{2}{A(a)}}{\exists x A(x)}}{\perp} 2$$
$$\frac{\perp}{\neg A(a)} 2$$
$$\frac{}{\forall x \neg A(x)} 1$$
$$\frac{}{\neg \exists x A(x) \supset \forall x \neg A(x)}$$

20.

$$\frac{\frac{\frac{1}{\neg \neg A} \frac{3}{\neg A}}{\perp}}{A} 2$$
$$\frac{A \vee \neg A \quad A}{A} 2,3$$
$$\frac{}{A} 1$$
$$\frac{}{\neg \neg A \supset A}$$

$\neg \exists x \neg A(x) \supset \forall x A(x)$ はどうやって証明する？

# 演習

以下を証明せよ。

(\*)の証明には排中律が必要

$$46. (*) \quad \neg \forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$$

ヒント 「二重否定の除去」を2回用いる

そのうち一回は  $\neg \exists x \neg$  と  $\forall x$  の同値性(45)を示すために用いる

# 演習

以下を証明せよ。

ただしBにはxが自由変数として現れない。

(\*)の証明には排中律が必要

$$47. \quad \forall x A(x) \vee B \supset \forall x (A(x) \vee B)$$

$$48. (*) \quad \forall x (A(x) \vee B) \supset \forall x A(x) \vee B$$

# 演習

以下を証明せよ。(期末レポート問題の候補)

49.  $\neg\neg(\neg A \vee A)$

註 排中律も二重否定の除去も用いずにNJで証明する。

この定理より、排中律は二重否定の除去から導かれることになる。

逆は既に示したので、排中律と二重否定の除去は等価ということを示したことになる。

すなわち、古典論理については、排中律の替わりに二重否定の除去を公理として採用することができる。

# レポート問題

以下を証明せよ。

(\*)の証明には排中律が必要

$$50. \quad \forall x A(x) \vdash \neg \exists x \neg A(x)$$

(34.  $\forall x \neg A(x) \vdash \neg \exists x A(x)$  の応用)

$$51. (*) \quad \neg \forall x \neg A(x) \vdash \exists x A(x)$$

(40.  $\neg \forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$  の応用)

締切 5月23日 8:40

提出先 manaba