推論規則(Inference Rules)

∨-導入

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{A}{B \vee A}$$

Aが証明できているとき
「余分に」Bを付け加えた
A∨B, B∨Aは証明できる

推論規則(Inference Rules)

∨-除去

$$\frac{A \lor B \qquad \begin{matrix}[A] \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B] \\ C\end{matrix}}{C}$$

推論規則(Inference Rules)

AかBかどちらかは成立っている

∨-除去

$$\dfrac{A \lor B \qquad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C}$$

推論規則(Inference Rules)

AかBかどちら
って

Aを仮定したら
Cが証明できる

Bを仮定しても
Cが証明できる

∨-除去

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A] \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B] \\ C\end{matrix}}{C}$$

推論規則(Inference Rules)

AかBかどちら
って

Aを仮定したら
Cが証明できる

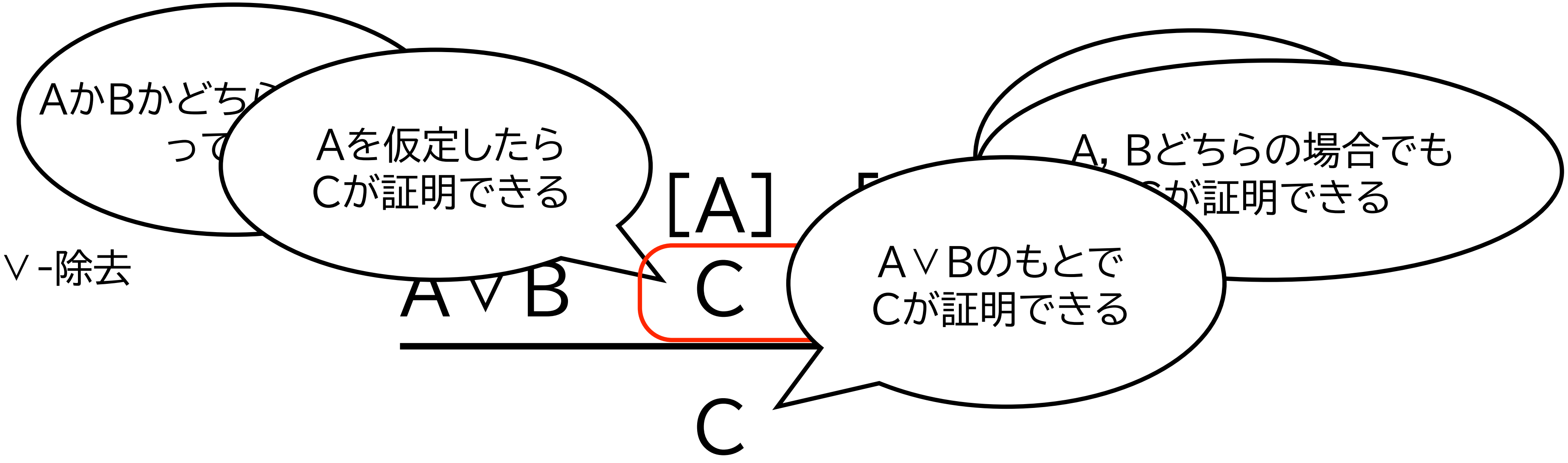
A, Bどちらの場合でも
Cが証明できる

∨-除去

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A] \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B] \\ C\end{array}}{C}$$

推論規則(Inference Rules)

∨-除去



推論規則(Inference Rules)

∨-除去

$$\dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A] \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B] \\ C\end{matrix}}{C}$$

$$\frac{A \quad B}{A \land B}\land\mathrm{I} \qquad\qquad \frac{A \land B}{A}\land\mathrm{E} \qquad \frac{A \land B}{B}\land\mathrm{E}$$

$$\frac{A \lor B \qquad \begin{array}{c}[A]\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ C\end{array}}{C}\lor\mathrm{E} \qquad \frac{A}{A \lor B}\lor\mathrm{I} \qquad \frac{A}{B \lor A}\lor\mathrm{I}$$

I: Introduction 導入

E: Elimination 除去

次のような規則はないので注意

$$\xcancel{\frac{A \lor B}{A}}$$

AかBかのどちらかは正しいからといって
具体的に一方のAが正しいと指定はできない

$$\xcancel{\frac{A}{A \land B}}$$

Aが正しいからといって
よくわからないBをつけてAもBも正しいとはいえない

演習

以下を証明せよ.

12. $A \vee A \supset A$
13. $A \supset A \vee A$
14. $A \vee B \supset B \vee A$

演習

以下を証明せよ.

15. $(A \vee B) \wedge C \supset (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

16. $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \supset (A \vee B) \wedge C$

17. $(A \wedge B) \vee C \supset (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

18. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \supset (A \wedge B) \vee C$

推論規則(Inference Rules)

「矛盾」を $\perp$ という記号で表すことにする

「「偽」な命題」

¬-導入

$$\frac{\begin{matrix}[A] \\ \perp\end{matrix}}{\neg A}$$

いわゆる帰謬法(背理法)

¬-除去

$$\frac{A \quad \neg A}{\perp}$$

Aと¬Aがともに導かれれば,
それらの仮定を全てあわせたものからは
矛盾が導かれる

推論規則(Inference Rules)

⊥-除去

$$\frac{\perp}{A}$$

矛盾からは
どんなことでも導ける

$$\neg\text{-導入}\ \frac{\begin{matrix}[A]\\ \bot\end{matrix}}{\neg A} \quad と \quad \bot\text{-除去}\ \frac{\bot}{A}$$

は異なることに注意.
使う場面も違う.

いわゆる帰謬法(背理法)

矛盾からは
どんなことでも導ける

帰謬法は仮定を否定する,
導かれたもの(¬A)が依存する
仮定からAが取り除かれる
要するに矛盾した原因を
取り除いている

矛盾からはどんなこともいえるが
矛盾の原因は解消しない

推論規則(Inference Rules)

排中律（law of excluded middle） $A \vee \neg A$

ひとつの**公理(axiom)**として採用する.

あらかじめ正しいものとして用いられる.
いくら用いても仮定としてカウントしない.

	導入 (introduction)	除去 (elimination)
$\supset$	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ B\end{array}}{A \supset B}$	$\dfrac{A \supset B \quad A}{B}$
$\land$	$\dfrac{A \quad B}{A \land B}$	$\dfrac{A \land B}{A}$ $\dfrac{A \land B}{B}$
$\lor$	$\dfrac{A}{A \lor B}$ $\dfrac{A}{B \lor A}$	$\dfrac{A \lor B \quad \begin{array}{c}[A]\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ C\end{array}}{C}$
$\neg$	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \bot\end{array}}{\neg A}$	$\dfrac{A \quad \neg A}{\bot}$
$\bot$		$\dfrac{\bot}{A}$
公理	$A \lor \neg A$	

この他に,「命題Aを仮定する」を規則として考えることができる

直観主義の論理

A∨Bが証明されるということは, Aが既に証明されているか, Bが既に証明されているかのどちらかであるということを主張する論理.

例

$x^y = z$ となる実数 x, y, z のうち, x と y が無理数で z が有理数であるものが存在する.

証明 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ を考える. もしこの値が有理数であるとすれば, $x = y = \sqrt{2}, z = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が求める解である. もしこの数が無理数であるならば, $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}$ とすれば $x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ である.

この証明はx, y, zの値について具体的に述べていないので,
直観主義の立場からは認められない.

直観主義論理では排中律$A \vee \neg A$は認められない.

排中律を認める論理を**古典論理**という.

NK: 古典論理の自然演繹体系

NJ : 直観主義論理の自然演繹体系　＝　NKから排中律を除いたもの

（本講義ではまだ述語論理の規則を導入していないが, 命題論理の範囲でも同様）

なお, 前回示した「述語論理式の意味と解釈」を直観主義論理にそのまま適用すると健全ではあるが完全ではなくなる.

（$A \vee \neg A$は前回提示した解釈では$\top$になるが直観主義では証明できない）

そのため, $\top$, $\bot$以外の値をもつモデルを考える必要があるが, 本講義では扱わない.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \bot\end{array}}{A}$$

このような規則はない.

直観主義論理では成り立たない.

古典論理では定理として扱う.（実は排中律と等価である(後述).）

演習

以下を証明せよ. (*)の証明には排中律が必要

19. $A \supset \neg\neg A$

20. (*) $\neg\neg A \supset A$ （二重否定の除去）

レポート課題

以下を証明せよ.

(*)の証明には排中律が必要

21. $\neg(A \vee B) \supset \neg A \wedge \neg B$ (ド・モルガン)

22. $\neg A \wedge \neg B \supset \neg(A \vee B)$ (ド・モルガン)

23. $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$ (対偶)

24. (*) $(\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)$ (対偶)

締切 5月9日 8:40

提出先 manaba