微分積分 B（情報科学類 3・4 クラス対象）

第 5 回　演習課題解説

担当教員：萬 礼応（情報科学類）

2025 年 5 月 29 日 (木)

1. 次の 2 重積分の値を求めなさい．

(1) $I = \iint_D (x^2 - y^2)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2\})$

【解答】

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_{1}^{2} (x^2 - y^2)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left[x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_1^2 \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(2x^2 - \frac{8}{3} - x^2 + \frac{1}{3} \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{7}{3} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{7}{3} x \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{7}{3} - \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{3} \right) = -4.$$

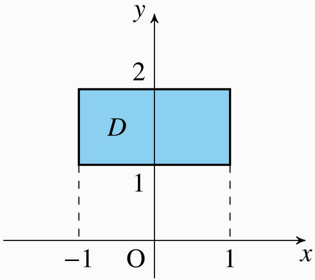

図 1: 問題 1(1) の領域 D.

(2) $I = \iint_D \sqrt{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \left(D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x\right\}\right)$

【解答】

D の式は，

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 \leq x \\ \Leftrightarrow\ & (x^2 - x) + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

と書けるから，中心 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$，半径 $\frac{1}{2}$ の円領域が D となる．

したがって，$0 \leq x \leq 1$ の x において，y は $-\sqrt{x - x^2}$ から $\sqrt{x - x^2}$ まで変化する．

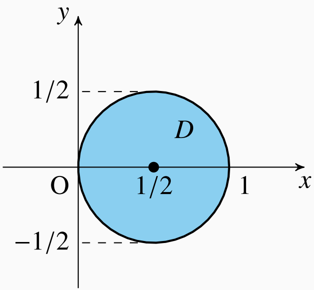

図 2: 問題 1(2) の領域 D.

課題解説：問題 1 (2)

これより，2 重積分 I は以下のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \sqrt{x}\left(\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{x}\left(\int_0^{\sqrt{x-x^2}} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{x}\,\Big[y\Big]_0^{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

ここで，$t = \sqrt{1-x}$ とおくと，$x = 1-t^2$ となり，両辺を微分すると $\mathrm{d}x = -2t\mathrm{d}t$ を得る．また，積分区間は $x : 0 \to 1$ より $t : 1 \to 0$ となる．よって，求める 2 重積分 I は

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int_1^0 (1-t^2)\cdot t\cdot(-2t)\,\mathrm{d}t = 4\int_0^1 \left(t^2 - t^4\right)\,\mathrm{d}t = 4\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right]_0^1 \\
&= 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 4\cdot\frac{5-3}{15} = \frac{8}{15}.
\end{aligned}
$$

2. 次の 3 重積分の値を求めなさい．

(1) $I = \iiint_V \sin(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad (V = \{(x,y,z) \mid \ 0 \le x, y, z, \le \pi\})$

【解答】

この 3 重積分の値は，

$$I = \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \left(\int_0^\pi \sin(x+y+z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

で求められる．ここで簡単のため，

$$I_1 = \int_0^\pi \sin(x+y+z)\,\mathrm{d}z, \quad I_2 = \int_0^\pi I_1\,\mathrm{d}y$$

とおく．

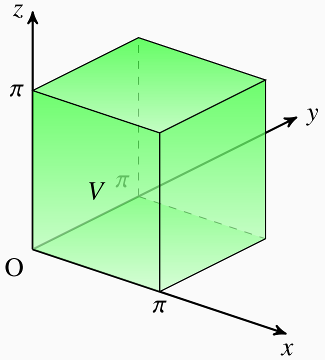

図 3: 問題 2 (1) の領域 V．

課題解説：問題 2 (1)

I_1 を求めると，

$$I_1 = [-\cos(x+y+z)]_0^{\pi} = -(\cos(x+y+\pi) - \cos(x+y)) = 2\cos(x+y).$$

ここで，$\cos(x+y+\pi) = -\cos(x+y)$ を用いた．

次に，I_2 を求めると，

$$I_2 = 2\int_0^{\pi} \cos(x+y)\,\mathrm{d}y = 2\,[\sin(x+y)]_0^{\pi} = 2\,(\sin(x+\pi) - \sin x) = -4\sin x.$$

ここで，$\sin(x+\pi) = -\sin x$ を用いた．

最後に I を求める．

$$I = -4\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = -4\,[-\cos x]_0^{\pi} = 4\,[\cos x]_0^{\pi} = 4(-1-1) = -8.$$

(2) $I = \iiint_V x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \left(V = \left\{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1,\ y^2 + z^2 \le 1\right\}\right)$

【解答】

立体 V をある x で切った断面を $D(x)$ とすると，$D(x) = \left\{(y, z) \mid y^2 + z^2 \le 1\right\}$ より，$D(x)$ の面積は π である．断面 $D(x)$ は $0 \le x \le 1$ の間を動くから，求める 3 重積分 I は

$$I = \int_0^1 x \, \mathrm{d}x \underbrace{\iint_{D(x)} \mathrm{d}y\mathrm{d}z}_{=\pi} = \pi \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\pi.$$

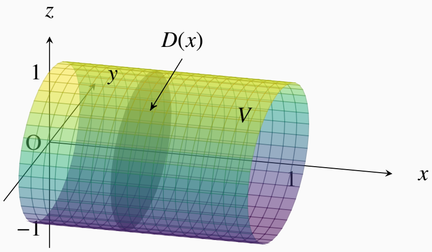

図 4: 問題 2 (2) の領域 V．

3. 次の 2 重積分を変数変換を用いて求めなさい．

(1) $I = \displaystyle\iint_D \frac{x-y}{1+x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (D = \{(x,y) \mid 0 \le x+y \le 1,\ 0 \le x-y \le 2\})$

【解答】

$u = x+y, v = x-y$ とおくと，$x = \dfrac{u+v}{2}, y = \dfrac{u-v}{2}$ となる．領域 E を $E = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2\}$ とおくと，E は変数変換 $x = \dfrac{u+v}{2}, y = \dfrac{u-v}{2}$ によって D に写される．

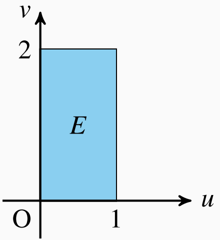

図 5: 問題 3 (1) の領域 E.

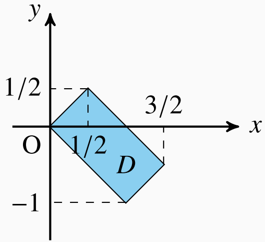

図 6: 問題 3 (1) の領域 D.

課題解説：問題 3 (1)

ヤコビ行列 J は

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

より，ヤコビ行列式の絶対値は

$$|\det J| = \left| \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

よって，求める 2 重積分は，

$$I = \int_0^1 \int_0^2 \frac{v}{1+u} \cdot \frac{1}{2}\, \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \int_0^2 v\, \mathrm{d}v$$
$$= \frac{1}{2} \left[\log(1+u) \right]_0^1 \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_0^2 = \frac{1}{4} \cdot \log 2 \cdot 4 = \log 2.$$

(2) $I = \displaystyle\iint_D (a^2x^2 + b^2y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \left(D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\},\ a > 0,\ b > 0\right)$

【解答】

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおく．領域 E を $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ とすると，E は変数変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ によって D に写される．

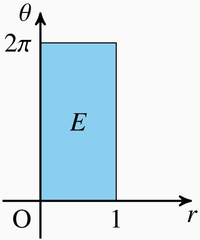

図 7: 問題 3 (2) の領域 E．

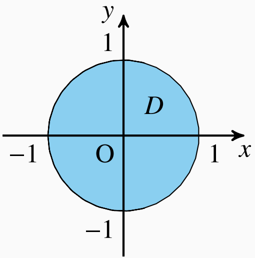

図 8: 問題 3 (2) の領域 D．

課題解説：問題 3 (2)

また，ヤコビ行列式の絶対値は r である．よって，求める 2 重積分は

$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta\right) \, r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^1 r^3 \, \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta\right) \, \mathrm{d}\theta$$
$$= \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^1 \int_0^{2\pi} \left(a^2 \cos^2\theta + b^2 (1 - \cos^2\theta)\right) \mathrm{d}\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(b^2 + (a^2 - b^2)\cos^2\theta\right) \mathrm{d}\theta.$$

ここで，$\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ であるから，

$$I = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(b^2 + \frac{a^2 - b^2}{2}(1 + \cos 2\theta)\right) = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left(a^2 + b^2 + \cos 2\theta\right) \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{8} \left[(a^2 + b^2)\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{8} \left((a^2 + b^2) \cdot 2\pi + \frac{1}{2}\sin 4\pi\right) = \frac{(a^2 + b^2)\pi}{4}.$$