プログラム言語論

亀山幸義

筑波大学 情報科学類

No. 6a: 型推論

目次

型検査と型推論

型検査 (type checking) 問題:

- Γ と M と T が与えられた時、$\Gamma \vdash M : T$ が導けるかどうか？

型推論 (type inference) 問題:

- M が与えられた時、$\Gamma \vdash M : T$ が導ける Γ と T があるか、また、ある場合はそれは何か？

型推論問題の変種:

- Γ と M が与えられた時、$\Gamma \vdash M : T$ が導ける T があるか、また、ある場合はそれは何か？

例で考える型推論 (1)

問題: $M = \lambda f.\,(\lambda x.\,(f\ (f\ x)))$ に対して，$\Gamma \vdash M : T$ を導出できる型文脈 Γ と型 T は存在するか？

M は自由変数を持たないので，Γ は「空」でよい。

例で考える型推論 (2)

問題: $M = \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x)))$ に対して，$\vdash M : T$ を導出できる型 T は存在するか？

型導出図があったとしたら、一番下は以下の形である。

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{f : \tau_2 \vdash \lambda x.\ (f\ (f\ x)) : \tau_3}}{\vdash \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x))) : \tau_1}$$

- τ_1, τ_2, τ_3 は、まだ中身がわからない型を表す変数。
- しかし，ラムダ抽象の型付け規則から、$\tau_1 = \tau_2 \to \tau_3$

例で考える型推論 (3)

問題: $M = \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x)))$ に対して, $\vdash M : T$ を導出できる型 T は存在するか？

型導出図があったとしたら、下の方は以下の形である。

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{f : \tau_2,\ x : \tau_4 \vdash f\ (f\ x) : \tau_5}}{\dfrac{f : \tau_2 \vdash \lambda x.\ (f\ (f\ x)) : \tau_3}{\vdash \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x))) : \tau_1}}$$

- 型を表す新しい変数 τ_4, τ_5
- 型付け規則から $\tau_3 = \tau_4 \to \tau_5$ である。

例で考える型推論 (4)

問題: $M = \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x)))$ に対して，$\vdash M : T$ を導出できる型 T は存在するか？

M の型導出図を下から一歩ずつ作る。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ f : \tau_2,\ x : \tau_4 \vdash f : \tau_6\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots \\ f : \tau_2,\ x : \tau_4 \vdash f\ x : \tau_7\end{array}}{f : \tau_2,\ x : \tau_4 \vdash f\ (f\ x) : \tau_5}}{f : \tau_2 \vdash \lambda x.\ (f\ (f\ x)) : \tau_3}}{\vdash \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x))) : \tau_1}
$$

- 型を表す新しい変数 τ_6, τ_7
- 型付け規則から $\tau_6 = \tau_7 \to \tau_5$ である。

例で考える型推論 (5)

問題: $M = \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x)))$ に対して, $\vdash M : T$ を導出できる型 T は存在するか？

M の型導出図を下から一歩ずつ作る。

$$\dfrac{\dfrac{}{f:\tau_2,\ x:\tau_4 \vdash f:\tau_6} \quad \dfrac{\dfrac{}{f:\tau_2,\ x:\tau_4 \vdash f:\tau_8} \quad \dfrac{}{f:\tau_2,\ x:\tau_4 \vdash x:\tau_9}}{f:\tau_2,\ x:\tau_4 \vdash f\ x:\tau_7}}{\dfrac{f:\tau_2,\ x:\tau_4 \vdash f\ (f\ x):\tau_5}{\dfrac{f:\tau_2 \vdash \lambda x.\ (f\ (f\ x)):\tau_3}{\vdash \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x))):\tau_1}}}$$

- 型付け規則から $\tau_2 = \tau_6$, $\tau_8 = \tau_9 \to \tau_7$, $\tau_2 = \tau_8$, $\tau_4 = \tau_9$ である。

例で考える型推論 (6)

問題: $M = \lambda f. (\lambda x. (f\ (f\ x)))$ に対して, $\vdash M : T$ を導出できる型 T は存在するか？

新しい問題: 以下の等式すべてが成立する型 $\tau_1, \cdots, \tau_9$ が存在するか？

$$\tau_1 = \tau_2 \to \tau_3$$
$$\tau_3 = \tau_4 \to \tau_5$$
$$\tau_6 = \tau_7 \to \tau_5$$
$$\tau_2 = \tau_6$$
$$\tau_8 = \tau_9 \to \tau_7$$
$$\tau_2 = \tau_8$$
$$\tau_4 = \tau_9$$

例で考える型推論 (6)

問題: $M = \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ x)))$ に対して, $\vdash M : T$ を導出できる型 T は存在するか？

新しい問題: 以下の等式すべてが成立する型 $\tau_1, \cdots, \tau_9$ が存在するか？

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \tau_2 \to \tau_3 \\
\tau_3 &= \tau_4 \to \tau_5 \\
\tau_6 &= \tau_7 \to \tau_5 \\
\tau_2 &= \tau_6 \\
\tau_8 &= \tau_9 \to \tau_7 \\
\tau_2 &= \tau_8 \\
\tau_4 &= \tau_9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_1 &:= (I \to I) \to (I \to I) \\
\tau_2 &:= I \to I \\
\tau_3 &:= I \to I \\
\tau_4 &:= I \\
\tau_5 &:= I \\
\tau_6 &:= I \to I \\
\tau_7 &:= I \\
\tau_8 &:= I \to I \\
\tau_9 &:= I
\end{aligned}$$

例で考える型推論 (7)

問題: $M = \lambda f.\,(\lambda x.\,(f\ (f\ x)))$ に対して，$\vdash M : T$ を導出できる型 T は存在するか？

答え: YES. $T = (\mathtt{int} \to \mathtt{int}) \to (\mathtt{int} \to \mathtt{int})$ に対して，以下の通り．
($\Gamma_1 = f : \mathtt{int} \to \mathtt{int},\ x : \mathtt{int}$ と置いた．)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash f : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash f : \mathtt{int} \to \mathtt{int}} \quad \dfrac{}{\Gamma_1 \vdash x : \mathtt{int}}}{\Gamma_1 \vdash f\ x : \mathtt{int}}}{\Gamma_1 \vdash f\ (f\ x) : \mathtt{int}}}{f : \mathtt{int} \to \mathtt{int} \vdash \lambda x.\,(f\ (f\ x)) : \mathtt{int} \to \mathtt{int}}}{\vdash \lambda f.\,(\lambda x.\,(f\ (f\ x))) : (\mathtt{int} \to \mathtt{int}) \to (\mathtt{int} \to \mathtt{int})}$$

型推論アルゴリズム

入力: 型環境 Γ とラムダ式 M
出力: M の型 T もしくは「この型付けはできない」という情報
手続き:

- 新しい型変数 τ_1 を導入
- $\Gamma \vdash M : \tau_1$ を結論 (一番下) に持つ型推論図を下から一歩ずつ構成
  1. 新しい型変数 τ_i を導入
  2. 型に関する等式 (制約) が発生
- 型に関する等式すべてを集めて解く (単一化アルゴリズム)。
- 解があれば、M は型付けできる。(τ_1 に対応する型が M の型)
- 解がなければ、M は型付けできない。

型推論の例 (1)

入力: 空の型環境とラムダ式 $\lambda x.\ (x+3)$

$$\dfrac{\dfrac{}{x:\tau_2 \vdash x:\texttt{int}} \quad \dfrac{}{x:\tau_2 \vdash 3:\texttt{int}}}{\dfrac{x:\tau_2 \vdash x+3:\tau_3}{\vdash \lambda x.\ x+3:\tau_1}}$$

等式系: $\{\tau_1 = \tau_2 \to \tau_3,\ \tau_3 = \texttt{int},\ \tau_2 = \texttt{int}\}$
等式系の解の 1 つ: $[\tau_1 := \texttt{int} \to \texttt{int},\ \tau_2 := \texttt{int},\ \tau_3 := \texttt{int}]$
よって $\vdash \lambda x.\ x+3 : \texttt{int} \to \texttt{int}$ が導ける。

型推論の例 (2)

入力: 空の型環境とラムダ式 $\lambda x.\ (x\ x)$

$$\dfrac{\dfrac{}{x : \tau_2 \vdash x : \tau_4} \quad \dfrac{}{x : \tau_2 \vdash x : \tau_5}}{\dfrac{x : \tau_2 \vdash x\ x : \tau_3}{\vdash \lambda x.\ (x\ x) : \tau_1}}$$

等式の集合: $\{\tau_1 = \tau_2 \to \tau_3,\ \tau_4 = \tau_5 \to \tau_3,\ \tau_4 = \tau_2,\ \tau_5 = \tau_2\}$
単一化の解: なし ($\tau_2 = \tau_2 \to \tau_3$ の解はない。)
よって $\vdash \lambda x.\ (x\ x) : T$ は、どんな型 T に対しても導けない。

等式系の解法: 単一化

型に関する等式系はどうやって解くか？

- $\tau = T$ はたいてい解ける。($\tau := T$ とすればよい。)
- $\texttt{int} = \texttt{int}$ は解ける。
- $\texttt{int} = T_1 \to T_2$ は解がない。
- $T_1 \to T_2 = T_3 \to T_4$ は、 $T_1 = T_3$ と $T_2 = T_4$ に分解して解く。

$\tau = T$ は「たいてい」解ける、とは？

- $\tau = \tau \to T'$ や $\tau = T' \to (\tau \to T'')$ は解がない。
- 一般に、「T が，τ そのものではなく，τ を含む」とき、およびそのときに限り、解を持たない.

型推論のまとめ

単純型付きラムダ計算に対する型推論:

- 型推論問題: 「式 M が与えられた時、$\Gamma \vdash M : T$ となる Γ と T が存在するか」
- 型推論問題は、単一化問題に帰着して必ず有限時間で解くことができる。

型検査 vs 型推論

- 型推論: ML (OCaml, SML, F#), Haskell... (変数や関数の型を書かなくてよい言語)
- 型検査: C, C++, Java...(変数や関数の型を必ず書く言語)