第 4 回 発展課題の略解

以下の項を M とするとき，M の型推論をしなさい．

$$\begin{array}{l}
\texttt{let}\ S = \lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ (x\ z)(y\ z)\ \texttt{in} \\
\texttt{let}\ K = \lambda x.\ \lambda y.\ x\ \texttt{in} \\
\texttt{let}\ f = \lambda x.\ ((S\ K)\ K)\ x\ \texttt{in} \\
\quad (f\ f)\ 7
\end{array}$$

上記の項のうち，S の右辺にある項と K の右辺にある項についての型推論は以前にやったのでここでは省略し，以下の 2 つの型推論がすでにできているとする．

$$\begin{array}{l}
\vdash \lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ (x\ z)(y\ z) : (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \\
\vdash \lambda x.\ \lambda y.\ x : \alpha' \to (\beta' \to \alpha')
\end{array}$$

次に，以下の型環境 Γ のもとで $\Gamma \vdash \lambda x.\ (((S\ K)\ K)\ x) : \epsilon$ という型付けを導びこう．

$$\Gamma = S : \forall\alpha.\forall\beta.\forall\gamma.(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)),\ K : \forall\alpha'.\forall\beta'.\alpha' \to (\beta' \to \alpha')$$

型変数 α, β, γ は $\forall$ で束縛されているので，S や K を使うときには，これらの型変数を様々な型に具体化して使うことができる．

型推論の過程をまるっと省略して結果だけを書くと以下のようになる．(図が大きすぎるので，適宜，分割して示す．)

$$\dfrac{\dfrac{(\alpha := \delta, \beta := \epsilon \to \delta, \gamma := \delta)}{\Gamma, x : \delta \vdash S : (\delta \to ((\epsilon \to \delta) \to \delta)) \to ((\delta \to (\epsilon \to \delta)) \to (\delta \to \delta))} \quad \dfrac{(\alpha' := \delta, \beta' := \epsilon \to \delta)}{\Gamma, x : \delta \vdash K : \delta \to ((\epsilon \to \delta) \to \delta)}}{\Gamma, x : \delta \vdash S\ K : (\delta \to (\epsilon \to \delta)) \to (\delta \to \delta)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \Gamma, x : \delta \vdash S\ K : (\delta \to (\epsilon \to \delta)) \to (\delta \to \delta)\end{array} \quad \dfrac{(\alpha' := \delta, \beta' := \epsilon)}{\Gamma, x : \delta \vdash K : \delta \to (\epsilon \to \delta)}}{\Gamma, x : \delta \vdash (S\ K)\ K : \delta \to \delta} \quad \dfrac{}{\Gamma, x : \delta \vdash x : \delta}}{\Gamma, x : \delta \vdash ((S\ K)\ K)\ x : \delta}}{\Gamma \vdash \lambda x.\ (((S\ K)\ K)\ x) : \delta \to \delta}$$

次に，以下の型環境 Γ' のもとで $\Gamma' \vdash (f\ f)\ 7 : \texttt{int}$ という型付けを導びこう．

$$\Gamma' = \Gamma, f : \forall\delta.\delta \to \delta$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\delta := \texttt{int} \to \texttt{int})}{\Gamma' \vdash f : (\texttt{int} \to \texttt{int}) \to (\texttt{int} \to \texttt{int})} \quad \dfrac{(\delta := \texttt{int})}{\Gamma' \vdash f : \texttt{int} \to \texttt{int}}}{\Gamma' \vdash f\ f : \texttt{int} \to \texttt{int}} \quad \dfrac{}{\Gamma' \vdash 7 : \texttt{int}}}{\Gamma' \vdash (f\ f)\ 7 : \texttt{int}}$$

最後に，全体をまとめよう．以下では，$M_1 = \lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ (x\ z)(y\ z)$，$M_2 = \lambda x.\ \lambda y.\ x$，$M_3 = \lambda x.\ ((S\ K)\ K)\ x$ とする．

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \vdash M_1 : \cdots\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ S : \cdots \vdash M_2 : \cdots\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash M_3 : \cdots\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma' \vdash (f\ f)\ 7 : \texttt{int}\end{array}}{\Gamma \vdash \texttt{let}\ f = M_3\ \texttt{in}\ (f\ f)\ 7 : \texttt{int}}}{S : \cdots \vdash \texttt{let}\ K = M_2\ \texttt{in}\ \texttt{let}\ f = M_3\ \texttt{in}\ (f\ f)\ 7 : \texttt{int}}}{\texttt{let}\ S = M_1\ \texttt{in}\ \texttt{let}\ K = M_2\ \texttt{in}\ \texttt{let}\ f = M_3\ \texttt{in}\ (f\ f)\ 7 : \texttt{int}}$$