

置換定理

定理

$F(X)$ が任意の命題変数 X を含む論理式であるとする.

$F(A)$ を, $F(X)$ 中の X を全て命題 A で置換した命題であるとする.

このとき

$$(A \equiv B) \supset (F(A) \equiv F(B))$$

が(NKで)証明できる.

証明

$F(X)$ の構造に関する帰納法.

1. $F(X)$ が X のとき. $(A \equiv B) \supset (A \equiv B)$ を示すことになり, 自明.

2. $F(X)$ に X が含まれないとき.

$F(X)$ がある命題 C であることなので,

$(A \equiv B) \supset (C \equiv C)$ を示すことになり, 自明.

3. $F(X)$ が $F_1(X) \supset F_2(X)$ のとき.

($F_1(X) \wedge F_2(X)$, $F_1(X) \vee F_2(X)$, $\neg F_1(X)$ のときも同様.)

($A \equiv B \supset ((F_1(A) \supset F_2(A)) \equiv (F_1(B) \supset F_2(B)))$)を示す.

帰納法の仮定より $A \equiv B$ のもとで $F_1(A) \equiv F_1(B)$, $F_2(A) \equiv F_2(B)$ は証明できる.

したがって,

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 2 \quad \frac{F_1(A) \equiv F_1(B)}{F_1(B) \supset F_1(A)} \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \frac{F_1(A) \supset F_2(A)}{F_2(A)} \end{array} \quad \frac{F_2(A) \equiv F_2(B)}{F_2(A) \supset F_2(B)} \\
 \hline
 \frac{F_2(B)}{F_1(B) \supset F_2(B)} \quad 2 \\
 \hline
 \frac{F_1(B) \supset F_2(B)}{(F_1(A) \supset F_2(A)) \supset (F_1(B) \supset F_2(B))} \quad 1
 \end{array}$$

同様に, $(F_1(B) \supset F_2(B)) \supset (F_1(A) \supset F_2(A))$ も証明できる.

4. $F(X)$ が $\forall x F_1(x, X)$ のとき.

帰納法の仮定より, $F_1(a, A) \equiv F_1(a, B)$ は証明できる.

a は $F_1(x, X)$ に出現しない変数であるが,

A, B にも出現しないものとする.

\forall -導入により, $\forall x(F_1(x, A) \equiv F_1(x, B))$ が導出できる.

したがって,

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 \hline
 \forall x(F_1(x, A)) \\
 \hline
 F_1(a, A)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \forall x(F_1(x, A) \equiv F_1(x, B)) \\
 \hline
 F_1(a, A) \equiv F_1(a, B) \\
 \hline
 F_1(a, A) \supset F_1(a, B)
 \end{array} \\
 \hline
 F_1(a, B) \\
 \hline
 \forall x(F_1(x, B)) \\
 \hline
 \forall x(F_1(x, A)) \supset \forall x(F_1(x, B)) \quad 1
 \end{array}$$

逆も同様にして $\forall x(F_1(x, A)) \equiv \forall x(F_1(x, B))$ を得る.

5. $F(X)$ が $\exists x F_1(x, X)$ のとき.

4と同様に $F_1(a, A) \equiv F_1(a, B)$ は証明できるので,

\forall -導入により, $\forall x(F_1(x, A) \equiv F_1(x, B))$ が導出できる.

したがって,

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{1}{F_1(a, A)} \quad \frac{\frac{\forall x(F_1(x, A) \equiv F_1(x, B))}{F_1(a, A) \equiv F_1(a, B)}}{F_1(a, A) \supset F_1(a, B)}}{F_1(a, B)} \\
 \frac{\frac{2}{\exists x(F_1(x, A))} \quad \frac{F_1(a, B)}{\exists x F_1(x, B)}}{\exists x F_1(x, B)} \quad 1 \\
 \frac{\exists x F_1(x, B)}{\exists x(F_1(x, A)) \supset \exists x(F_1(x, B))} \quad 2
 \end{array}$$

逆も同様にして $\exists x(F_1(x, A)) \equiv \exists x(F_1(x, B))$ を得る.

双対の原理

A : \neg を含まない論理式とする.

A 中に $C \supset D$ の形の部分論理式があるときは, $\neg C \vee D$ に置き換える.

A^* : A の双対(dual)

A 中の \wedge を全て \vee に, \vee を全て \wedge に,

\forall を全て \exists に, \exists を全て \forall に置き換えた論理式

例

$$(\forall x(F(x) \vee G(x)) \wedge \exists y(H(y) \wedge J(y)))^*$$

$$\equiv \exists x(F(x) \wedge G(x)) \vee \forall y(H(y) \vee J(y))$$

補題 (ド・モルガン法則の一般化)

A : \neg を含まない論理式

p_1, \dots, p_n : A に出現する全ての原子論理式

A^* : A の双対.

A, A^* を各々 $F(p_1, \dots, p_n), F^*(p_1, \dots, p_n)$ で表す.

$F^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$: $F^*(p_1, \dots, p_n)$ 中のすべての p_i ($i=1, 2, \dots, n$) を $\neg p_i$ で置き換えたもの.

このとき, $\neg F(p_1, \dots, p_n) \equiv F^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ である.

証明

Fの構造に関する帰納法.

1. $F(p_1, \dots, p_n)$ が $p_1(t_1, \dots, t_n)$ のとき.

$F^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ は $\neg p_1(t_1, \dots, t_n)$ なので自明.

2. $F(p_1, \dots, p_n)$ が $F_1(p_1, \dots, p_n) \wedge F_2(p_1, \dots, p_n)$ のとき.

帰納法の仮定により,

$$\neg F_1(p_1, \dots, p_n) \equiv F_1^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n), \neg F_2(p_1, \dots, p_n) \equiv F_2^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$$

は得られている.

$F^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ は $F_1^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n) \vee F_2^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ であるため,

$\neg F(p_1, \dots, p_n) \equiv F^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ は容易に示すことができる.

3. $F(p_1, \dots, p_n)$ が $F_1(p_1, \dots, p_n) \vee F_2(p_1, \dots, p_n)$ のとき. 同様.

4. $F(p_1, \dots, p_n)$ が $\neg F_1(p_1, \dots, p_n)$ のとき.

帰納法の仮定より, $\neg F_1(p_1, \dots, p_n) \equiv F_1^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ は得られている.

したがって, $\neg \neg F_1(p_1, \dots, p_n) \equiv \neg F_1^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ が直ちに得られる.

5. $F(p_1, \dots, p_n)$ が $\forall x F_1(x; p_1, \dots, p_n)$ のとき.

帰納法の仮定より, a を F_1 , p_i に現れない変数とすることにより, すべての a について

$\neg F_1(a; p_1, \dots, p_n) \equiv F_1^*(a; \neg p_1, \dots, \neg p_n)$ である.

また, $F^*(a; p_1, \dots, p_n)$ は $\exists x F_1^*(x; p_1, \dots, p_n)$ である.

したがって

$F^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n) \equiv \exists x F_1^*(x; \neg p_1, \dots, \neg p_n) \equiv \neg \forall x \neg F_1^*(x; \neg p_1, \dots, \neg p_n)$

$\equiv \neg \forall x F_1(x; p_1, \dots, p_n) \equiv \neg F(p_1, \dots, p_n)$

が得られる.

6. $F(p_1, \dots, p_n)$ が $\exists x F_1(x; p_1, \dots, p_n)$ のとき.

同様に

$\neg \exists x F_1(x; p_1, \dots, p_n) \equiv \exists x F_1^*(x; \neg p_1, \dots, \neg p_n)$

が得られる.

定理（双対の原理）

A を \neg を含まない論理式とし, A^* を双対とするとき,
以下が成立する.

1. A が(NKで)証明できれば $\neg A^*$ も証明できる.
2. $\neg A$ が証明できれば A^* も証明できる.

証明

$F(p_1, \dots, p_n), F^*(p_1, \dots, p_n)$ で各々 A, A^* を表すことにする.

1. A^* の双対は A である.

ド・モルガンの法則の一般化により, $\neg F^*(p_1, \dots, p_n) \equiv F(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$,
すなわち $\neg A^* \equiv F(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$.

A が証明可能であるならばその証明中に出現する p_i をすべて $\neg p_i$ に置き換えることで
 $F(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ が証明できる. したがって $\neg A^*$ が証明できる.

2. $\neg A$ の双対は $\neg A^*$ である.

1より, $\neg A$ が証明できれば $\neg \neg A^*$ が証明できる.

NKを用いているので, 二重否定の除去により A^* が証明できる.

演習

次の式の連言標準形と選言標準形を求めよ.

52. $(p \vee (\neg q \wedge r)) \supset s$

53. $(p \supset s) \wedge (\neg q \wedge r \supset s)$

解

52.

$$(p \vee (\neg q \wedge r)) \supset s$$

$$\equiv \neg(p \vee (\neg q \wedge r)) \vee s$$

$$\equiv (\neg p \wedge \neg(\neg q \wedge r)) \vee s$$

$$\equiv (\neg p \wedge (\neg\neg q \vee \neg r)) \vee s$$

$$\equiv (\neg p \wedge (q \vee \neg r)) \vee s$$

$$\equiv \neg p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg r \vee s \quad (\text{選言標準形})$$

$$\equiv (\neg p \vee s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \quad (\text{連言標準形})$$

53.

$$(p \supset s) \wedge (\neg q \wedge r \supset s)$$

$$\equiv (\neg p \vee s) \wedge (\neg(\neg q \wedge r) \vee s)$$

$$\equiv (\neg p \vee s) \wedge (\neg\neg q \vee \neg r \vee s)$$

$$\equiv (\neg p \vee s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \quad (\text{連言標準形})$$

$$\equiv (\neg p \vee s) \wedge q \vee (\neg p \vee s) \wedge (\neg r \vee s)$$

$$\equiv \neg p \wedge q \vee s \wedge q \vee (\neg p \vee s) \wedge \neg r \vee (\neg p \vee s) \wedge s$$

$$\equiv \neg p \wedge q \vee s \wedge q \vee \neg p \wedge \neg r \vee s \wedge \neg r \vee \neg p \wedge s \vee s$$

$$\equiv \neg p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg r \vee s \quad (\text{選言標準形})$$

演習

$(\exists yP(y) \wedge Q(x)) \supset \exists xR(x)$ の冠頭標準形を求めよ.

演習

$(\exists y P(y) \wedge Q(x)) \supset \exists x R(x)$ の冠頭標準形を求めよ.

解

$$\begin{aligned} & (\exists y P(y) \wedge Q(x)) \supset \exists x R(x) \\ \equiv & \quad \exists y (P(y) \wedge Q(x)) \supset \exists x R(x) \\ \equiv & \quad \forall y (P(y) \wedge Q(x) \supset \exists x R(x)) \quad (\because \exists x B \supset D \equiv \forall x (B \supset D)) \\ \equiv & \quad \forall y (P(y) \wedge Q(x) \supset \exists z R(z)) \\ \equiv & \quad \forall y \exists z (P(y) \wedge Q(x) \supset R(z)) \quad (\because D \supset \exists x B \equiv \exists x (D \supset B)) \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} & (\exists y P(y) \wedge Q(x)) \supset \exists x R(x) \\ \equiv & \quad \exists y (P(y) \wedge Q(x)) \supset \exists z R(z) \\ \equiv & \quad \exists z (\exists y (P(y) \wedge Q(x)) \supset R(z)) \quad (\because D \supset \exists x B \equiv \exists x (D \supset B)) \\ \equiv & \quad \exists z \forall y ((P(y) \wedge Q(x)) \supset R(z)) \quad (\because \exists x B \supset D \equiv \forall x (B \supset D)) \end{aligned}$$

冠頭標準形は一通りとは限らない.