微分積分 B（情報科学類 3・4 クラス対象）

第 4 回　演習課題解説

担当教員：萬 礼応（情報科学類）

2025 年 5 月 15 日 (木)

課題解説 (1)

(1) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$

【解答 例 1】

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(e^{x^2}\right)'\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

※ C は積分定数

【解答 例 2】置換積分

$t = x^2$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = 2x$ より，$xdx = \dfrac{dt}{2}$

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int e^t x\,dx = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + C$$

※ C は積分定数

$t = x^2$ に戻して，

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

課題解説 (2)

(2) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

【解答】部分積分

$$
\begin{aligned}
\int x\log x\,dx &= \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \log x\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{2}\int x\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C
\end{aligned}
$$

※ C は積分定数

課題解説 (3)

(3) $\displaystyle\int \sin 5x \cos 3x \, dx$

【解答】積⇒和

$$\int \sin 5x \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} \int \{\sin(5x + 3x) + \sin(5x - 3x)\} \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{8} \cos 8x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C$$

※ C は積分定数

$$= -\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

課題解説 (4)

(4) $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx$

【解答】

$$\int \sin^5 x\,dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x\,dt$$

$$= \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \cdot \sin x\,dx$$

$$= \int \left(1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right) \cdot \sin x\,dx$$

$$= \int \left\{\sin x - 2\cos^2 x \sin x + \cos^4 x \sin x\right\}\,dx$$

$$= \int \left\{(-\cos x)' + 2\cos^2 x\,(\cos x)' - \cos^4 x\,(\cos x)'\right\}\,dx$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C \qquad \text{※ } C \text{ は積分定数}$$

(5) $\int e^x \cos x\,dx$

【解答】部分積分

$I = \int e^x \cos x\,dx$ とおく，

$$I = \int (e^x)' \cdot \cos x\,dx$$

$$= e^x \cos x - \int e^x (-\sin x)\ dx$$

$$= e^x \cos x + \int (e^x)' \sin x\,dx$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x = e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

よって，$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$　※ C は積分定数

課題解説 (6)

(6) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

【解答 例 1】

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int x\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int -\frac{1}{2}\cdot(-2x)\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)'\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1} + C = -\sqrt{1-x^2}+C$$

$$= -\sqrt{1-x^2}+C$$ ※ C は積分定数

【解答 例 2】置換積分

$t=\sqrt{1-x^2}$ とおくと，$t^2 = 1-x^2$ で，$2t\dfrac{dt}{dx} = -2x$ より，$xdx = -tdt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{t}\cdot xdx = \int\frac{1}{t}\cdot(-tdt) = -\int dt = -t+C$$ ※ C は積分定数

$t=\sqrt{1-x^2}$ に戻して，$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}+C$

(7) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,dx$

【解答】置換積分

$t=\sqrt{1-x}$ とおくと，$t^2=1-x$ で，$x=1-t^2$ より，$dx=-2tdt$

$$\int x\sqrt{1-x}\,dx=\int\left(1-t^2\right)\cdot t\cdot(-2t)\,dt$$

$$=2\int\left(t^4-t^2\right)dt=2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)+C$$ ※ C は積分定数

$t=\sqrt{1-x}$ に戻して，$\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,dx=\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+C$

(8) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$

【解答 例 1】部分積分

$\displaystyle\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)}$ なので，

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \int x \cdot \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)'\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} - \int -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

※ C は積分定数

$$= \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}x - \frac{x}{1+x^2}\right) + C$$

課題解説 (8)-2

(8) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$

【解答 例 2】置換積分

$x = \tan\theta$ とおくと，$dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ である

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int \tan^2\theta\cdot\cos^4 x\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int \tan^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \int \sin^2\theta\,d\theta = \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C = \frac{1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + C$$ ※ C は積分定数

$$= \frac{1}{2}\left(\theta - \tan\theta\cos^2\theta\right) + C = \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) + C$$

$x = \tan\theta$ に戻して，$\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}x - \frac{x}{1+x^2}\right) + C$