推論規則(Inference Rules)

ここからは述語論理(量記号(quantifiers))に関する規則

∀-導入

$$\frac{F(a)}{\forall x F(x)}$$

aを変数とする.

変数条件:

<u>F(a)に到る演繹の仮定の全てとF(x)自身に</u>

<u>aが自由変数として含まれていてはいけない.</u>

このaを<u>**eigenvariable**</u>とよぶ

推論規則(Inference Rules)

ここからは述語論理(量記号(quantifiers))に関する規則

∀-導入

$$\frac{F(a)}{\forall x F(x)}$$

全てのxに対してFが成立つ

aを変数とする.

変数条件:

F(a)に到る演繹の仮定の全

aが自由変数として含まれていては

このaを**eigenvariable**とよぶ

推論規則(Inference Rules)

ここからは述語論理(量記号(

aが仮定に現れない
ie aの制限なしにF(a)が成立つ

∀-導入

$$\frac{F(a)}{\forall x F(x)}$$

aを変数とする.

変数条件:

<u>F(a)に到る演繹の仮定の全</u>

全てのxに対してFが成立つ

<u>aが自由変数として含まれていては</u>

このaを**<u>eigenvariable</u>**とよぶ

推論規則(Inference Rules)

∀-除去

$$\frac{\forall x F(x)}{F(t)}$$

tは任意の**項**（あるいは「**対象**」）

∀xF(x)： xがどのような値であってもF(x)は成り立つ
↓
xにどのような項tを入れてもF(x)は成り立つ
この場合, 変数でも可. 代入可能な項ならなんでも良い.

演習

以下を証明せよ.

27. $\forall x \forall y A(x, y) \supset \forall y \forall x A(x, y)$
28. $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \supset \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
29. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \supset \forall x (A(x) \wedge B(x))$

推論規則(Inference Rules)

∃-導入

$$\frac{F(t)}{\exists x F(x)}$$

tは任意の**項**（あるいは「**対象**」）

F(t) : tという「具体的な」項でF(t)は成り立つ
（tが変数であっても自由変数を含んだものであっても可.
「具体的」というのは言葉のあや. ）
↓
F(x)を成り立たせているようなxは一つは存在しているので
∃xF(x)

推論規則(Inference Rules)

∃-除去

aを変数とする.

変数条件:

a がF(x)とC,

およびCに到る演繹の仮定のうち

F(a)以外に

自由変数として現れてはいけない.

このaを**eigenvariable**とよぶ

$$\dfrac{\exists x F(x) \qquad \begin{matrix}[F(a)] \\ C\end{matrix}}{C}$$

推論規則(Inference Rules)

どんなaについても
F(a)の仮定の下でCが成立つ

∃-除去

aを変数とする.

変数条件:

a がF(x)とC,

およびCに到る演繹の仮定のうち

F(a)以外に

自由変数として現れてはいけない.

このaを**eigenvariable**とよぶ

$$\dfrac{\exists x F(x) \qquad \begin{array}{c}[F(a)] \\ C\end{array}}{C}$$

推論規則(Inference Rules)

どんなaについても
F(a)の仮定の下でCが成立つ

∃-除去

aを変数とする.

変数条件:

<u>a がF(x)とC,</u>

<u>およびCに到る演繹の仮定の</u>

<u>F(a)以外に</u>

<u>自由変数として現れてはいけない.</u>

このaを<u>**eigenvariable**</u>とよぶ

$$\frac{\exists x F(x) \qquad \begin{array}{c}[F(a)]\\ C\end{array}}{C}$$

xがある値のときF(x)が成立つ

推論規則(Inference Rules)

どんなaについても
F(a)の仮定の下でCが成立つ

∃-除去

aを変数とする.

変数条件:

<u>a がF(x)とC,</u>

<u>およびCに到る演繹の仮定</u>

<u>F(a)以外に</u>

<u>自由変数として現れてはいけ</u>

このaを**<u>eigenvariable</u>**と

$$\dfrac{\exists x F(x) \qquad \begin{array}{c}[F(a)] \\ C\end{array}}{C}$$

xがある値のときF(x)が成立つ

どんな場合でもCが成立つ

∀-I

$$\frac{F(a)}{\forall x F(x)}$$

a:eigenvariable
F(a)に到る演繹の仮定の全てとF(x)自身に
自由変数として含まれていてはいけない

∀-E

$$\frac{\forall x F(x)}{F(t)}$$

t: 任意の項

∃-I

$$\frac{F(t)}{\exists x F(x)}$$

t: 任意の項

∃-E

$$\frac{\exists x F(x) \qquad \begin{array}{c}[F(a)]\\ C\end{array}}{C}$$

a:eigenvariable
F(x)とC, およびCに到る演繹の仮定のうち
F(a)以外に自由変数として現れてはいけない

証明体系

NK: 以上に示した推論規則と公理全てもつ体系

<u>古典論理</u>

NJ: NKの推論規則, 公理から排中律を取り除いた体系

<u>構成的論理</u>, <u>直観主義論理</u>

A∨Bを, Aが正しいかBが正しいかが

既にわかっている(証明されている)

または, 正しいことを決定するアルゴリズムが存在するものと

考える.

☞A∨¬Aは直ちには許容できない.

演習

以下を証明せよ.

30. $\exists x \exists y A(x, y) \supset \exists y \exists x A(x, y)$
31. $\exists x(A(x) \vee B(x)) \supset \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
32. $\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \supset \exists x(A(x) \vee B(x))$

演習

以下を証明せよ.

33. $\neg\exists x A(x) \supset \forall x \neg A(x)$（ド・モルガン）

34. $\forall x \neg A(x) \supset \neg\exists x A(x)$（ド・モルガン）

レポート問題

以下を証明せよ.

35. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \supset \forall x (A(x) \vee B(x))$

36. $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \supset \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

締切 5月16日 8:40

提出先 manaba