1.

F(X)として$\neg X$をとれば置換定理そのものである.

(別解)問題23より, $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$. AとBを入れ替えれば$(B \supset A) \supset (\neg A \supset \neg B)$.

$A \equiv B$は$(A \supset B) \wedge (B \supset A)$なので, $A \equiv B$より$\neg B \supset \neg A$も$\neg A \supset \neg B$も示すことができ,

$\neg A \equiv \neg B$を得る.

2.

$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$のA, Bの代わりに$\neg A$, $\neg B$として$\neg(\neg A \vee \neg B) \equiv (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$

を得る.

二重否定の除去と置換定理より, $(\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \equiv (A \wedge B)$. したがって

$\neg(\neg A \vee \neg B) \equiv (A \wedge B)$.

1より置換定理を用いれば$\neg\neg(\neg A \vee \neg B) \equiv \neg(A \wedge B)$となり, 二重否定の除去より

$(\neg A \vee \neg B) \equiv \neg(A \wedge B)$すなわち$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$を得る.

54.

$((p \supset q) \supset p) \supset p \equiv \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee p) \vee p$

$\equiv \quad \neg((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee p) \vee p$

$\equiv \quad \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg p \vee p$

$\equiv \quad (\neg p \vee \neg\neg q) \wedge \neg p \vee p$

$\equiv \quad (\neg p \vee q) \wedge \neg p \vee p$

$\equiv \quad \neg p \wedge \neg p \vee q \wedge \neg p \vee p$

$\equiv \quad \neg p \vee q \wedge \neg p \vee p$

$\equiv \quad \neg p \vee p \vee q \wedge \neg p$

$\equiv \quad (\neg p \vee p \vee q) \wedge (\neg p \vee p \vee \neg p)$

$\equiv \quad (\neg p \vee p \vee q) \wedge (\neg p \vee p)$

$\equiv \quad \top$ （選言標準形, 連言標準形）

55.

$(p \supset (p \wedge \neg q)) \wedge (q \supset (q \wedge \neg p))$

$\equiv \quad (\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (\neg q \vee (q \wedge \neg p))$

$\equiv \quad (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)$

$\equiv \quad (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg p)$

$\equiv \quad \neg p \vee \neg q$ （選言標準形. 連言標準形）

56.

$\neg(p \supset q) \wedge ((q \supset s) \supset r)$

$\equiv \quad \neg(\neg p \vee q) \wedge (\neg(\neg q \vee s) \vee r)$

$\equiv \quad \neg\neg p \wedge \neg q \wedge (\neg\neg q \wedge \neg s \vee r)$

$\equiv \quad p \wedge \neg q \wedge (q \wedge \neg s \vee r)$

$\equiv \quad p \wedge \neg q \wedge (q \vee r) \wedge (\neg s \vee r)$

$\equiv \quad p \wedge \neg q \wedge \ q \wedge \ \neg s \vee p \wedge \neg q \wedge r$

$\equiv \quad p \wedge \neg q \wedge r$ （連言標準形, 選言標準形）