

演習

$I_\rho[\forall x \exists y(x=2y \vee x=2y+1)]$ を計算せよ.

解答例

$$\begin{aligned} I_\rho[\forall x \exists y(x=2y \vee x=2y+1)] &= \forall^*(\{I_{\rho[b/x]}[\exists y(x=2y \vee x=2y+1)] \mid b \in N\}) \\ &= \forall^*(\{\exists^*(\{I_{\rho[b/x][a/y]}[x=2y \vee x=2y+1] \mid a \in N\}) \mid b \in N\}) \end{aligned}$$

である。

各 $b \in N$ に対し, $I_{\rho[b/x][a/y]}[x=2y \vee x=2y+1] = \top$ になる $a \in N$ は存在する, すなわち
全ての $b \in N$ に対し, $\{I_{\rho[b/x][a/y]}[x=2y \vee x=2y+1] \mid a \in N\} = \{\top, \perp\}$
したがって

全ての $b \in N$ に対し, $\exists^*(\{I_{\rho[b/x][a/y]}[x=2y \vee x=2y+1] \mid a \in N\}) = \top$
となる.

ゆえに $\{\exists^*(\{I_{\rho[b/x][a/y]}[x=2y \vee x=2y+1] \mid a \in N\}) \mid b \in N\} = \{\top\}$
となり, $\forall^*(\{\exists^*(\{I_{\rho[b/x][a/y]}[x=2y \vee x=2y+1] \mid a \in N\}) \mid b \in N\}) = \top$
すなわち $I_\rho[\forall x \exists y(x=2y \vee x=2y+1)] = \top$.

解説

$I_\rho[\forall x \exists y(x=2y \vee x=2y+1)]$ の計算は、まず外側の \forall から処理する。

$$\forall^*(\{I_{\rho[b/x]}[\exists y(x=2y \vee x=2y+1)] \mid b \in N\})$$

次に、内側の \exists 、もっと具体的にいうと $I_{\rho[b/x]}[\exists y(x=2y \vee x=2y+1)]$ を計算する。

このとき、 $\rho[b/x]$ は新しい割当 ρ' だと考えるとわかりやすい。

$$I_{\rho'}[\exists y(x=2y \vee x=2y+1)] = \exists^*(\{I_{\rho'[a/y]}[x=2y \vee x=2y+1] \mid a \in N\})$$

したがって元の式は

$$I_\rho[\forall x \exists y(x=2y \vee x=2y+1)]$$

$$= \forall^*(\{\exists^*(\{I_{\rho[b/x][a/y]}[x=2y \vee x=2y+1] \mid a \in N\}) \mid b \in N\})$$

となる。

解説

式の形式的な意味は以上のとおり計算できるが、式をいちいちこのように計算していたらキリがないので、式の意味を大局的にとらえることも必要である。

$\forall x \exists y F(x, y)$ の形の式の場合、以下のように考えればわかりやすい。

0. $\forall x \exists y F(x, y)$ は $\forall x (\exists y F(x, y))$ であることに注意する。
1. 「全ての x の値に対して、ある y の値が存在して、 $F(x, y)$ を満たす」と読む。
2. もう少し精密に読むと、
「どんな x の値に対しても、その x の値ごとに y の値が一つ以上存在して、 $F(x, y)$ 」となる。

たとえば前ページの例 $\forall x \exists y (x=2y \vee x=2y+1)$ では、

「どのような x であってもそれぞれに対してある y が存在して、 $x=2y$ または $x=2y+1$ 」

式の内容を考えると

「 x が偶数ならば y として $x/2$ をとると $x=2y$

x が奇数ならば y として $(x-1)/2$ をとると $x=2y+1$ 」

ということである。

証明問題の解答

7.

$$\frac{\frac{\frac{1}{(A \wedge B) \wedge C} \quad \frac{1}{(A \wedge B) \wedge C \wedge C}}{A \wedge B} \quad \frac{1}{\frac{1}{(A \wedge B) \wedge C} \quad \frac{1}{(A \wedge B) \wedge C \wedge C}}}{B} \quad \frac{1}{C}}$$
$$\frac{A}{\frac{B \wedge C}{\frac{A \wedge (B \wedge C)}{(A \wedge B) \wedge C \supset A \wedge (B \wedge C)}}}$$

1

証明問題の解答

8.

$$\frac{\frac{1}{A \wedge (A \supset B)} \quad \frac{1}{A \wedge (A \supset B)}}{\frac{A \supset B}{A}}$$
$$\frac{B}{A \wedge (A \supset B) \supset B}$$

証明問題の解答

9.

$$\frac{\frac{\frac{1}{(A \wedge B) \wedge (A \supset (B \supset C))} \quad \frac{1}{(A \wedge B) \wedge (A \supset (B \supset C))}}{A \supset (B \supset C)} \quad \frac{1}{\frac{1}{(A \wedge B) \wedge (A \supset (B \supset C))} \quad \frac{1}{(A \wedge B) \wedge (A \supset (B \supset C))}}{A \supset (B \supset C)}}{B \supset C} \quad \frac{1}{C} \quad \frac{1}{(A \wedge B) \wedge (A \supset (B \supset C)) \supset C}$$

証明問題の解答

10.

$$\frac{\begin{array}{c} 1 \\ A \supset B \wedge C \\ \hline 2 \\ A \end{array}}{\frac{B \wedge C}{\frac{B}{\frac{A \supset B}{2}}}}$$

$$\frac{\begin{array}{c} 1 \\ A \supset B \wedge C \\ \hline 3 \\ A \end{array}}{\frac{B \wedge C}{\frac{C}{\frac{A \supset C}{3}}}}$$

$$\frac{(A \supset B) \wedge (A \supset C)}{(A \supset B \wedge C) \supset (A \supset B) \wedge (A \supset C)}$$

証明問題の解答

11.

$$\frac{\begin{array}{c} 1 \\ (\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \supset \mathbf{C}) \\ \hline \mathbf{A} \supset \mathbf{B} \end{array}}{\mathbf{B}}$$

$$\frac{\begin{array}{c} 1 \\ (\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \supset \mathbf{C}) \\ \hline \mathbf{A} \supset \mathbf{C} \end{array}}{\mathbf{C}}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{A} \supset \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \end{array}}{(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \supset \mathbf{C}) \supset (\mathbf{A} \supset \mathbf{B} \wedge \mathbf{C})}$$