微分積分 B（情報科学類 3・4 クラス対象）

第 6 回　演習課題解説

担当教員：萬 礼応（情報科学類）

2025 年 6 月 5 日 (木)

1. 次の 3 重積分の値を求めなさい．

$$I = \iiint_V x^4 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \left(V = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\right\}, \quad a > 0\right)$$

【解答】

$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$ とおく．$0 \leq x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \leq a^2$ より，r の範囲は $0 \leq r \leq a$ である．θ, ϕ はそれぞれ，$0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$ で変化する．また，3 次元の極座標変換のヤコビ行列式の絶対値は，$r^2\sin\theta$ である．

よって，求める 3 重積分は

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^4\theta \cos^4\phi \cdot r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^a r^6 \, \mathrm{d}r \int_0^\pi \sin^5\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \cos^4\phi \, \mathrm{d}\phi = \frac{1}{7}a^7 \int_0^\pi \sin^5\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \cos^4\phi \, \mathrm{d}\phi. \end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\int_0^\pi \sin^5\theta\,\mathrm{d}\theta$ を求める．

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^5\theta\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^\pi \sin^4\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \left(1-\cos^2\theta\right)^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi \left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

ここで，$t=\cos\theta$ とおき，両辺を微分すると $\mathrm{d}t=-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ より，$\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=-\mathrm{d}t$ となる．また，積分区間は $\theta: 0\to\pi$ より，$t: 1\to -1$ となる．したがって，

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta &= \int_1^{-1}(1-2t^2+t^4)(-\mathrm{d}t) = 2\int_0^1 (1-2t^2+t^4)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left[t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = 2\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{16}{15}.\end{aligned}$$

次に $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^4\phi \, \mathrm{d}\phi$ を求める．

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^4\phi \, \mathrm{d}\phi &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2\phi) \right)^2 \mathrm{d}\phi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos 2\phi + \cos^2 2\phi \right) \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos 2\phi + \frac{1}{2}(1+\cos 4\phi) \right) \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} (\cos 4\phi + 4\cos 2\phi + 3) \, \mathrm{d}\phi = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4\phi + 2\sin 2\phi + 3\phi \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{8} \cdot 6\pi = \frac{3}{4}\pi.
\end{aligned}
$$

以上より，求める 3 重積分は

$$
I = \frac{1}{7}a^7 \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{3}{4}\pi = \frac{4}{35}\pi a^7.
$$

2. 次の 3 重積分の値を求めなさい．

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2) z^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad \left(V = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1, \ \ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\} \right)$$

【解答】

$x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi$ とおく．$0 \leq x^2 + y^2 = \rho^2 \leq 1$ より，ρ の範囲は $0 \leq \rho \leq 1$ である．z の範囲は $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$，$\phi$ の範囲は $0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．また，円柱座標変換のヤコビ行列式の絶対値は ρ である．

よって，求める 3 重積分は

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} \rho^2 \cdot z^2 \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z = \int_0^1 \rho^3 \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\rho} z^2 \, \mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \rho^3 \mathrm{d}\rho \, [\phi]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^{\rho} = \frac{2}{3}\pi \int_0^1 \rho^6 \mathrm{d}\rho = \frac{2}{3}\pi \left[\frac{1}{7}\rho^7 \right]_0^1 = \frac{2}{21}\pi. \end{aligned}$$

3. 次の重積分の広義積分が収束することを示し，その値を求めなさい．

$$I = \iint_W \log(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \left(W = \left\{(x,y) \mid 0 < x^2+y^2 < 1\right\}\right)$$

【解答】

$W_n = \left\{(x,y) \,\middle|\, \dfrac{1}{n^2} < x^2+y^2 < \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2\right\}$ とおくと，$\{W_n\}$ は W に収束する増大列である．$\overline{W}_n$ を

$\overline{W}_n = \left\{(x,y) \,\middle|\, \dfrac{1}{n^2} \le x^2+y^2 \le \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2\right\}$ とおき，$\overline{W}_n$ 上での $\log(x^2+y^2)$ の 2 重積分を考える．

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと，$\dfrac{1}{n^2} \le x^2+y^2 = r^2 \le \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2$ より，r の範囲は $\dfrac{1}{n} \le r \le 1-\dfrac{1}{n}$ である．θ は $0 \le \theta \le 2\pi$ の範囲で変化する．また，ヤコビ行列式の絶対値は r である．

課題解説：問題3

よって，

$$
\begin{aligned}
I_n &= \iint_{\overline{W_n}} \log(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{1/n}^{1-1/n}\int_0^{2\pi} \log r^2 \cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{1/n}^{1-1/n} r\log r^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\
&= 4\pi \int_{1/n}^{1-1/n} r\log r\,\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

ここで，$\displaystyle\int_{1/n}^{1-1/n} r\log r\,\mathrm{d}r$ を部分積分法を用いて求めると，

$$
\begin{aligned}
\int_{1/n}^{1-1/n} r\log r\,\mathrm{d}r &= \left[\frac{1}{2}r^2\log r\right]_{1/n}^{1-1/n} - \frac{1}{2}\int_{1/n}^{1-1/n} r\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \log\left(1-\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{n}\right)^2 \log\frac{1}{n}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{1/n}^{1-1/n} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \log\left(1-\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \log n\right] - \frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2\right].
\end{aligned}
$$

課題解説：問題 3

したがって，I_n は

$$I_n = 4\pi \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \log n \right] - \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right] \right\}$$

となる．ここで，$n \to \infty$ とすると，$I_n \to -\pi$ となる．以上より，広義積分は収束し，その値は $-\pi$ である．