

演習

$I_\rho[\forall x \exists y (x=2y \vee x=2y+1)]$ を計算せよ.

解答例

$$\begin{aligned} I_\rho[\forall x \exists y (x=2y \vee x=2y+1)] &= \forall^*(\{I_\rho[b/x][\exists y (x=2y \vee x=2y+1)] \mid b \in N\}) \\ &= \forall^*(\{\exists^*(\{I_\rho[b/x][a/y][x=2y \vee x=2y+1] \mid a \in N\}) \mid b \in N\}) \end{aligned}$$

である.

各 $b \in N$ に対し, $I_\rho[b/x][a/y][x=2y \vee x=2y+1] = \top$ になる $a \in N$ は存在する, すなわち

全ての $b \in N$ に対し, $\{I_\rho[b/x][a/y][x=2y \vee x=2y+1] \mid a \in N\} = \{\top, \perp\}$

したがって

全ての $b \in N$ に対し, $\exists^*(\{I_\rho[b/x][a/y][x=2y \vee x=2y+1] \mid a \in N\}) = \top$ となる.

ゆえに $\{\exists^*(\{I_\rho[b/x][a/y][x=2y \vee x=2y+1] \mid a \in N\}) \mid b \in N\} = \{\top\}$

となり, $\forall^*(\{\exists^*(\{I_\rho[b/x][a/y][x=2y \vee x=2y+1] \mid a \in N\}) \mid b \in N\}) = \top$

すなわち $I_\rho[\forall x \exists y (x=2y \vee x=2y+1)] = \top$.

解説

$I_\rho[\forall x \exists y(x=2y \vee x=2y+1)]$ の計算は, まず外側の \forall から処理する.

$$\forall^*(\{I_{\rho[b/x]}[\exists y(x=2y \vee x=2y+1)] \mid b \in \mathbb{N}\})$$

次に, 内側の \exists , もっと具体的にいうと $I_{\rho[b/x]}[\exists y(x=2y \vee x=2y+1)]$ を計算する.

このとき, $\rho[b/x]$ は新しい割当 ρ' だと考えるとわかりやすい.

$$I_{\rho'}[\exists y(x=2y \vee x=2y+1)] = \exists^*(\{I_{\rho'[a/y]}[x=2y \vee x=2y+1] \mid a \in \mathbb{N}\})$$

したがって元の式は

$$I_\rho[\forall x \exists y(x=2y \vee x=2y+1)]$$

$$= \forall^*(\{\exists^*(\{I_{\rho[b/x][a/y]}[x=2y \vee x=2y+1] \mid a \in \mathbb{N}\}) \mid b \in \mathbb{N}\})$$

となる.

解説

式の形式的な意味は以上のとおり計算できるが、式をいちいちこのように計算していたらキリがないので、式の意味を大局的にとらえることも必要である。

$\forall x \exists y F(x, y)$ の形の式の場合、以下のように考えればわかりやすい。

0. $\forall x \exists y F(x, y)$ は $\forall x (\exists y F(x, y))$ であることに注意する。

1. 「全ての x の値に対して、ある y の値が存在して、 $F(x, y)$ を満たす」と読む。

2. もう少し精密に読むと、

「どんな x の値に対しても、その x の値ごとに y の値が一つ以上存在して、 $F(x, y)$ 」となる。

たとえば前ページの例 $\forall x \exists y (x = 2y \vee x = 2y + 1)$ では、

「どのような x であってもそれぞれに対してある y が存在して、 $x = 2y$ または $x = 2y + 1$ 」

式の内容を考えると

「 x が偶数ならば y として $x/2$ をとると $x = 2y$

x が奇数ならば y として $(x-1)/2$ をとると $x = 2y + 1$ 」

ということである。

証明問題の解答

7.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 \hline
 (A \wedge B) \wedge C \\
 \hline
 A \wedge B \\
 \hline
 A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 1 \\
 \hline
 (A \wedge B) \wedge C \\
 \hline
 A \wedge B \\
 \hline
 B
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 1 \\
 \hline
 (A \wedge B) \wedge C \\
 \hline
 C
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \hline
 A \wedge (B \wedge C) \\
 \hline
 \hline
 (A \wedge B) \wedge C \supset A \wedge (B \wedge C) \quad 1
 \end{array}$$

証明問題の解答

8.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ A \wedge (A \supset B) & A \wedge (A \supset B) \\ \hline A \supset B & A \\ \hline \end{array} \\ \hline B \\ \hline 1 \\ A \wedge (A \supset B) \supset B \end{array}$$

証明問題の解答

9.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 \hline
 (A \wedge B) \wedge (A \supset (B \supset C)) \\
 \hline
 A \supset (B \supset C) \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 1 \\
 \hline
 (A \wedge B) \wedge (A \supset (B \supset C)) \\
 \hline
 A \wedge B \\
 \hline
 A \\
 \hline
 B \supset C \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 1 \\
 \hline
 (A \wedge B) \wedge (A \supset (B \supset C)) \\
 \hline
 A \wedge B \\
 \hline
 B \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 C \\
 \hline
 \hline
 (A \wedge B) \wedge (A \supset (B \supset C)) \supset C \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

証明問題の解答

10.

$\begin{array}{rcl} 1 & & 2 \\ A \supset B \wedge C & & A \\ \hline & B \wedge C & \\ & \hline & B & \\ & \hline & A \supset B & 2 \end{array}$	$\begin{array}{rcl} 1 & & 3 \\ A \supset B \wedge C & & A \\ \hline & B \wedge C & \\ & \hline & C & \\ & \hline & A \supset C & 3 \end{array}$
$\begin{array}{rcl} & (A \supset B) \wedge (A \supset C) & \\ \hline & (A \supset B \wedge C) \supset (A \supset B) \wedge (A \supset C) & 1 \end{array}$	

証明問題の解答

11.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} 1 \\ \hline (A \supset B) \wedge (A \supset C) \\ \hline A \supset B \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ A \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} 1 \\ \hline (A \supset B) \wedge (A \supset C) \\ \hline A \supset C \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ A \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{cc}
 B & C \\
 \hline
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{c}
 B \wedge C \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c} 2 \end{array}
 \\
 \begin{array}{c}
 A \supset B \wedge C \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c} 1 \end{array}
 \\
 \begin{array}{c}
 (A \supset B) \wedge (A \supset C) \supset (A \supset B \wedge C) \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$