

演習

以下を証明せよ.

12. $A \vee A \supset A$
13. $A \supset A \vee A$
14. $A \vee B \supset B \vee A$

12.

$$\begin{array}{c} 1 \\ A \vee A \\ \hline 2 \\ A \\ \hline 3 \\ A \\ \hline 2,3 \\ A \\ \hline 1 \\ A \vee A \supset A \end{array}$$

13.

$$\frac{\begin{array}{c} 1 \\ A \\ \hline A \vee A \end{array}}{A \supset A \vee A} 1$$

14.

$$\frac{\begin{array}{c} 1 \\ A \vee B \end{array} \qquad \frac{\begin{array}{c} 2 \\ A \end{array}}{B \vee A} \qquad \frac{\begin{array}{c} 3 \\ B \end{array}}{B \vee A} }{B \vee A} \qquad 2,3$$
$$\frac{B \vee A}{A \vee B \supset B \vee A} 1$$

ルール適用に関する注意点

例:演習14.

正解

$$\begin{array}{c}
 \frac{1 \quad \frac{2 \quad 3}{A \quad B}}{B \vee A \quad B \vee A} \\
 \hline
 B \vee A \\
 \hline
 A \vee B \supset B \vee A \quad 1
 \end{array}$$

誤解

$$\begin{array}{c}
 \frac{1 \quad 1}{A \vee B \quad A \vee B} \\
 \hline
 \frac{A \quad B}{B \vee A \quad B \vee A} \\
 \hline
 B \vee A \\
 \hline
 A \vee B \supset B \vee A \quad 1
 \end{array}$$

一見正しいように見えるのだが

$$\begin{array}{c}
 A \vee B \\
 \hline
 A \\
 \hline
 B \vee A
 \end{array}$$

の部分が単体では辻褷が合わない
(対応するルールが存在しない)

演習

以下を証明せよ.

$$15. (A \vee B) \wedge C \supset (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$16. (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \supset (A \vee B) \wedge C$$

$$17. (A \wedge B) \vee C \supset (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$18. (A \vee C) \wedge (B \vee C) \supset (A \wedge B) \vee C$$

15.

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{1}{(A \vee B) \wedge C} \quad \frac{\frac{2}{A} \quad \frac{\frac{1}{(A \vee B) \wedge C} \quad \frac{3}{B}}{C}}{A \wedge C}}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}}{A \vee B} \\ \hline (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{\frac{1}{(A \vee B) \wedge C} \quad \frac{3}{B}}{C} \\ \hline B \wedge C \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{\frac{1}{(A \vee B) \wedge C} \quad \frac{3}{B}}{C} \\ \hline B \wedge C \end{array}$$
$$\hline \qquad \qquad \qquad 2,3$$
$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{1}{(A \vee B) \wedge C} \quad \frac{\frac{2}{A} \quad \frac{\frac{1}{(A \vee B) \wedge C} \quad \frac{3}{B}}{C}}{A \wedge C}}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}}{A \vee B}}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}}{1} \\ \hline (A \vee B) \wedge C \supset (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

15を例に、証明のやり方を示す。

ただし、この方法が唯一でもなければ最善というわけでもない。

$$(A \vee B) \wedge C \supset (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

証明したい式

$F \supset G$ の形なのでつの左(F)を仮定する。

$$\frac{1}{(A \vee B) \wedge C}$$

$$\frac{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}{(A \vee B) \wedge C \supset (A \wedge C) \vee (B \wedge C)} 1$$

証明したい式

$F \supset G$ の形なのでこの左(F)を仮定する。

$$\frac{1}{(A \vee B) \wedge C} \\ \hline A \vee B$$

$$\frac{1}{(A \vee B) \wedge C} \\ \hline C$$

$$\frac{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}{(A \vee B) \wedge C \supset (A \wedge C) \vee (B \wedge C)} \quad 1$$

仮定した式から情報を取り出す.
A ∨ B, Cが各自単独で使える.
同じ仮定を2回用いる.

$$\frac{1}{(A \vee B) \wedge C} \frac{}{A \vee B}$$

$$2 \frac{1}{(A \vee B) \wedge C} \frac{}{A} \frac{}{C}$$

$$3 \frac{1}{(A \vee B) \wedge C} \frac{}{B} \frac{}{C}$$

$$\frac{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}{(A \vee B) \wedge C \supset (A \wedge C) \vee (B \wedge C)} 1$$

$A \vee B$ から, A の場合, B の場合と場合わけを行う. (\vee -除去)
 $(A \vee B) \wedge C$ から C を導いた木を2回用いる.

$$\frac{1}{(A \vee B) \wedge C} \frac{}{A \vee B}$$

$$2 \frac{1}{\frac{(A \vee B) \wedge C}{C}} \frac{}{A \wedge C}$$

$$3 \frac{1}{\frac{(A \vee B) \wedge C}{C}} \frac{}{B \wedge C}$$

$$\frac{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}{(A \vee B) \wedge C \supset (A \wedge C) \vee (B \wedge C)} 1$$

\wedge -導入により $A \wedge C, B \wedge C$ を得る.

$$\frac{1}{(A \vee B) \wedge C} \frac{}{A \vee B}$$

$$2 \frac{1}{(A \vee B) \wedge C} \frac{}{A} \frac{}{\underline{\hspace{1cm}}}$$

$$\frac{}{A \wedge C} \frac{}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}$$

$$3 \frac{1}{(A \vee B) \wedge C} \frac{}{B} \frac{}{\underline{\hspace{1cm}}}$$

$$\frac{}{B \wedge C} \frac{}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}$$

$$\frac{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}{(A \vee B) \wedge C \supset (A \wedge C) \vee (B \wedge C)} 1$$

\vee -導入により $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ を得る.
 これは、先ほどの場合わけで、Aの場合でもBの場合でも
 $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ を得ることを示している。

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{1}{(A \vee B) \wedge C} A \quad \frac{\frac{2}{1}{(A \vee B) \wedge C}}{C}}{A \wedge C} \quad \frac{\frac{3}{1}{(A \vee B) \wedge C}}{C}}{B \wedge C} \\
 \hline
 \frac{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)} \quad \frac{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)} \\
 \hline
 \frac{}{(A \vee B) \wedge C \supset (A \wedge C) \vee (B \wedge C)} \quad 1
 \end{array} \quad 2,3$$

\vee -除去を適用して証明を完成させる。

16.

	2	3					
	$A \wedge C$	$B \wedge C$					
1	$\frac{}{A}$	$\frac{}{B}$					
$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee B$	1	$\frac{}{A \wedge C}$	$\frac{}{B \wedge C}$		
	$\frac{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}{A \vee B}$		2,3	$\frac{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}{C}$	$\frac{}{C}$		
	$\frac{}{A \vee B}$			$\frac{}{4,5}$			
	$\frac{}{(A \vee B) \wedge C}$						
	$\frac{}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \supset (A \vee B) \wedge C}$						

16.
(別解)

証明は一通りではないことに注意

$$\frac{\frac{\frac{1}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)} \frac{\frac{2}{A \wedge C} \frac{2}{\frac{A}{A \vee B}} \frac{2}{\frac{A \wedge C}{C}}}{(A \vee B) \wedge C} \quad \frac{3}{B \wedge C} \frac{3}{\frac{B}{A \vee B}} \frac{3}{\frac{B \wedge C}{C}}}{(A \vee B) \wedge C} \quad 2,3}{(A \vee B) \wedge C} \quad 1}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \supset (A \vee B) \wedge C}$$

17.

$$\frac{\begin{array}{c} 1 \\ (A \wedge B) \vee C \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ A \wedge B \\ \hline A \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ A \wedge B \\ \hline B \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ C \\ \hline C \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ C \\ \hline B \vee C \end{array}}{\begin{array}{c} \hline A \vee C \\ \hline (A \vee C) \wedge (B \vee C) \end{array} \quad \begin{array}{c} \hline B \vee C \\ \hline (A \vee C) \wedge (B \vee C) \end{array} \quad \begin{array}{c} \hline A \vee C \\ \hline (A \vee C) \wedge (B \vee C) \end{array} \quad \begin{array}{c} \hline B \vee C \\ \hline (A \vee C) \wedge (B \vee C) \end{array}} \quad \frac{}{2,3}$$
$$\frac{(A \vee C) \wedge (B \vee C)}{(A \wedge B) \vee C \supset (A \vee C) \wedge (B \vee C)} \quad 1$$

17.
(別解)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{2}{A \wedge B} A}{A}}{1 (A \wedge B) \vee C} \quad \frac{3}{C} \\
 \hline
 \frac{(A \wedge B) \vee C \quad A \vee C}{\frac{}{A \vee C}} \quad \frac{A \vee C}{2,3}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{\frac{4}{A \wedge B} B}{1 (A \wedge B) \vee C \quad B \vee C} \quad \frac{5}{C} \\
 \hline
 \frac{B \vee C}{4,5}
 \end{array}$$

$$\frac{\frac{A \vee C}{(A \vee C) \wedge (B \vee C)}}{\frac{(A \wedge B) \vee C \supset (A \vee C) \wedge (B \vee C)}{1}}$$

18.

$$\begin{array}{c} 2 \qquad 4 \\ A \qquad B \\ \hline 1 \qquad \qquad \qquad 5 \\ (A \vee C) \wedge (B \vee C) \qquad \qquad \qquad C \\ \hline 1 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 3 \\ (A \vee C) \wedge (B \vee C) \qquad \qquad \qquad (A \wedge B) \vee C \qquad \qquad C \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 4,5 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 2,3 \\ A \vee C \qquad \qquad \qquad (A \wedge B) \vee C \qquad \qquad \qquad (A \wedge B) \vee C \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 1 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad (A \vee C) \wedge (B \vee C) \supset (A \wedge B) \vee C \end{array}$$