『論理と形式化』期末レポート (案)(前半 6 回水谷担当分)

2025 年 6 月 20 日 (金)

問題 1. (1) $I_\rho[\forall x \exists y(2x = y \lor 2x + 1 = y)]$ を計算せよ．ただし変数の領域は自然数全体であるとする (0 は自然数とする)．

(2) 以下を自然演繹法 (NK または NJ) で証明せよ．(2a), (2b) は NJ の定理である．これらの証明には排中律 $(\neg A \lor A)$ および二重否定の除去 $(\neg\neg A \supset A)$ とそれに類する公理・規則・定理を用いてはいけない．(2c) は NK の定理であっても NJ の定理ではない．証明には排中律が必要である．

(2a) $\neg\neg\neg A \supset \neg A$

(2b) $\neg A \lor \neg B \supset \neg(A \land B)$

(2c) $\neg(A \land B) \supset \neg A \lor \neg B$

(3) (3a) $\neg\neg(\neg A \lor A)$ を自然演繹法 NJ で証明せよ．排中律および二重否定の除去とそれに類する公理・規則・定理を用いてはいけない．

(3b) NJ に二重否定の除去を公理として加えた証明体系と，NJ に排中律を公理として加えた証明体系が同等であることを，「同等である」とは何かということを定義した上で説明せよ．
ヒント： (3a) より，NJ に何を公理として加えると排中律が証明できるかを考える．また，二重否定の除去は NK において排中律を用いることで証明できる．

(4) 一階述語論理において束縛変数の変数名を置き換えても同じ，すなわち，$\exists x A(x)$ と $\exists y A(y)$ は同じであり，$\forall x A(x)$ と $\forall y A(y)$ は同じである (ただし $A(x)$ 中には自由変数 y は出現しないし $A(y)$ 中には自由変数 x は出現しないとする) という事実を示すためにはどのような式を証明すれば良いか．その式を示し，自然演繹法 (NK または NJ) で証明せよ．

(5) 命題論理を考える．p を命題変数とする．$p \supset p$ と同値な連言標準形および選言標準形を示せ．

締切	2025 年 7 月 4 日 (金)12:00
提出場所	manaba

解答例

問題 1. (1) $I_\rho[\forall x \exists y(2x = y \vee 2x = y+1)] = \forall^*(\{I_{\rho[a/x]}[\exists y(2x = y \vee 2x = y+1)] | a \in \mathbb{N}\})=$ $\forall^*(\{\exists^*(\{I_{\rho[a/x][b/y]}[2x = y \vee 2x = y+1] | b \in \mathbb{N}\} | a \in \mathbb{N}\})$.
$I_{\rho[a/x][b/y]}[2x = y \vee 2x = y+1]$ は $b = 2a$ のとき $\top$ である．どんな $a \in \mathbb{N}$ に対しても $b = 2a$ なる $b \in \mathbb{N}$ は存在するので $\{I_{\rho[a/x][b/y]}[2x = y \vee 2x = y+1] | b \in \mathbb{N}\} = \{\top, \bot\}$ である．
よってどんな $a \in \mathbb{N}$ に対しても $\exists^*(\{I_{\rho[a/x][b/y]}[2x = y \vee 2x = y+1] | b \in \mathbb{N}\} = \{\top\}$.
したがって，(与式)$= \forall^*(\{I_{\rho[a/x]}[\exists y(2x = y \vee 2x = y+1)] | a \in \mathbb{N}\}) = \forall^*\{\top\} = \top$.

(2) (2a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\neg\neg\neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{2}{\neg A} \quad \overset{3}{A}}{\bot}}{\neg\neg A}\ 2}{\bot}}{\neg A}\ 3}{\neg\neg\neg A \supset \neg A}\ 1$$

(2b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\neg A \vee \neg B} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{2}{A \wedge B}}{A} \quad \overset{3}{\neg A}}{\bot} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{2}{A \wedge B}}{B} \quad \overset{4}{\neg B}}{\bot}}{\bot}\ 3,4}{\neg(A \wedge B)}\ 2}{\neg A \vee \neg B \supset \neg(A \wedge B)}\ 1$$

(2c)

$$\dfrac{\dfrac{\neg A \vee A \qquad \dfrac{\overset{2}{\neg A}}{\neg A \vee \neg B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\neg(A \wedge B)} \quad \dfrac{\overset{3}{A} \quad \overset{4}{B}}{A \wedge B}}{\bot}}{\neg B}\ 4}{\neg A \vee \neg B}}{\neg A \vee \neg B}\ 2,3}{\neg(A \wedge B) \supset \neg A \vee \neg B}\ 1$$

(3) (3a)

$$\dfrac{\overset{1}{\neg(\neg A \vee A)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\neg(\neg A \vee A)} \quad \dfrac{\overset{2}{A}}{\neg A \vee A}}{\bot}}{\neg A}\ 2}{\neg A \vee A}}{\dfrac{\bot}{\neg\neg(\neg A \vee A)}\ 1}$$

(3b) ふたつの証明体系が同等であるとは，証明できる命題が一致するということである．$\neg\neg(A \vee \neg A)$ が排中律を用いずに NJ で証明できるので，二重否定の除去が公理として NJ に加えられたならば，$\neg\neg(A \vee \neg A) \supset (A \vee \neg A)$ が証明できるので，排中律 $A \vee \neg A$ は証明できる．逆に二重否定の除去 $\neg\neg A \supset A$ は排中律を用いることで証明できる．NJ+ 排中律で二重否定の除去が証明でき，NJ+ 二重否定の除去で排中律が証明できる．すなわち，前者で古典論理体系を構築しているのならば後者でも同じ古典論理体系を構築することができ，双方で証明できる命題は一致する．したがってふたつの証明体系が同等である．

(4) $\exists x A(x) \supset \exists y A(y)$, $\forall x A(x) \supset \forall y A(y)$ を証明すれば良い.

$$\cfrac{\cfrac{\exists x \overset{1}{A}(x) \qquad \cfrac{\overset{2}{A}(a)}{\exists y A(y)}}{\exists y A(y)}\ 2}{\exists x A(x) \supset \exists y A(y)}\ 1$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall x \overset{1}{A}(x)}{A(a)}}{\forall y A(y)}}{\forall x A(x) \supset \forall y A(y)}\ 1$$

(5) いずれも $\neg p \vee p$ あるいは $\top$.