

# 置換定理

定理

$F(X)$ が任意の命題変数 $X$ を含む論理式であるとする。

$F(A)$ を,  $F(X)$ 中の $X$ を全て命題 $A$ で置換した命題であるとする。

このとき

$(A \equiv B) \supset (F(A) \equiv F(B))$

が(NKで)証明できる。

## 証明

$F(X)$ の構造に関する帰納法.

1.  $F(X)$ が $X$ のとき.  $(A \equiv B) \circ (A \equiv B)$ を示すことになり, 自明.

2.  $F(X)$ に $X$ が含まれないとき.

$F(X)$ がある命題 $C$ であることなので,

$(A \equiv B) \circ (C \equiv C)$ を示すことになり, 自明.

3.  $F(X)$ が $F_1(X) \supset F_2(X)$ のとき.

$(F_1(X) \wedge F_2(X), F_1(X) \vee F_2(X), \neg F_1(X)$ のときも同様.)

$(A \equiv B) \supset ((F_1(A) \supset F_2(A)) \equiv (F_1(B) \supset F_2(B)))$ を示す.

帰納法の仮定より $A \equiv B$ のもとで $F_1(A) \equiv F_1(B), F_2(A) \equiv F_2(B)$ は証明できる.

したがって,

$$\frac{\frac{2 \quad \frac{F_1(A) \equiv F_1(B)}{F_1(B) \supset F_1(A)}}{F_1(A) \quad F_1(A) \supset F_2(A)} \quad 1 \quad \frac{F_2(A) \equiv F_2(B)}{F_2(A) \supset F_2(B)}}{\frac{F_2(A)}{\frac{F_2(B)}{2 \quad F_1(B) \supset F_2(B)}} \quad 1} \quad (F_1(A) \supset F_2(A)) \supset (F_1(B) \supset F_2(B))$$

同様に,  $(F_1(B) \supset F_2(B)) \supset (F_1(A) \supset F_2(A))$ も証明できる.

4.  $F(X)$ が  $\forall x F_1(x, X)$  のとき.

帰納法の仮定より,  $F_1(a, A) \equiv F_1(a, B)$  は証明できる.

$a$  は  $F_1(x, X)$  に出現しない変数であるが,

$A, B$  にも出現しないものとする.

$\forall$ -導入により,  $\forall x (F_1(x, A) \equiv F_1(x, B))$  が導出できる.

したがって,

$$\frac{\frac{\frac{1}{\forall x (F_1(x, A))} \frac{\frac{\forall x (F_1(x, A) \equiv F_1(x, B))}{F_1(a, A) \equiv F_1(a, B)}}{\frac{F_1(a, A) \supset F_1(a, B)}{\frac{F_1(a, B)}{\frac{\forall x (F_1(x, B))}{\frac{\forall x (F_1(x, A)) \supset \forall x (F_1(x, B))}{1}}}}}}{\forall x (F_1(x, A)) \supset \forall x (F_1(x, B))}$$

逆も同様にして  $\forall x (F_1(x, A)) \equiv \forall x (F_1(x, B))$  を得る.

5.  $F(X)$ が  $\exists x F_1(x, X)$  のとき.

4と同様に  $F_1(a, A) \equiv F_1(a, B)$  は証明できるので,

$\forall$ -導入により,  $\forall x (F_1(x, A) \equiv F_1(x, B))$  が導出できる.

したがって,

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\forall x (F_1(x, A) \equiv F_1(x, B))}{F_1(a, A) \equiv F_1(a, B)}}{F_1(a, A) \supset F_1(a, B)}}{\frac{\frac{F_1(a, B)}{\exists x F_1(x, B)}}{\frac{\frac{\exists x (F_1(x, A))}{\exists x F_1(x, B)}}{\exists x (F_1(x, A)) \supset \exists x (F_1(x, B))}}}}{1} 2$$

逆も同様にして  $\exists x (F_1(x, A)) \equiv \exists x (F_1(x, B))$  を得る.

# 双対の原理

A : つを含まない論理式とする。

A 中に  $C \supset D$  の形の部分論理式があるときは,  $\neg C \vee D$  に置き換える。

$A^*$  : Aの双対(dual)

A中の $\wedge$ を全て $\vee$ に,  $\vee$ を全て $\wedge$ に,  
 $\forall$ を全て $\exists$ に,  $\exists$ を全て $\forall$ に置き換えた論理式

例

$$\begin{aligned} & (\forall x(F(x) \vee G(x)) \wedge \exists y(H(y) \wedge J(y)))^* \\ & \equiv \exists x(F(x) \wedge G(x)) \vee \forall y(H(y) \vee J(y)) \end{aligned}$$

## 補題 (ド・モルガン法則の一般化)

$A$  : つを含まない論理式

$p_1, \dots, p_n$  :  $A$ に出現する全ての原子論理式

$A^*$  :  $A$ の双対.

$A, A^*$ を各々  $F(p_1, \dots, p_n), F^*(p_1, \dots, p_n)$  で表す.

$F^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n) : F^*(p_1, \dots, p_n)$  中のすべての  $p_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) を  
 $\neg p_i$  で置き換えたもの.

このとき,  $\neg F(p_1, \dots, p_n) \equiv F^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$  である.

## 証明

$F$ の構造に関する帰納法.

1.  $F(p_1, \dots, p_n)$ が $p_1(t_1, \dots, t_n)$ のとき.

$F^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ は $\neg p_1(t_1, \dots, t_n)$  なので自明.

2.  $F(p_1, \dots, p_n)$ が $F_1(p_1, \dots, p_n) \wedge F_2(p_1, \dots, p_n)$ のとき.

帰納法の仮定により,

$\neg F_1(p_1, \dots, p_n) \equiv F_1^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ ,  $\neg F_2(p_1, \dots, p_n) \equiv F_2^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$

は得られている.

$F^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ は $F_1^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n) \vee F_2^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ であるため,

$\neg F(p_1, \dots, p_n) \equiv F^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ は容易に示すことができる.

3.  $F(p_1, \dots, p_n)$ が $F_1(p_1, \dots, p_n) \vee F_2(p_1, \dots, p_n)$ のとき. 同様.

4.  $F(p_1, \dots, p_n)$ が $\neg F_1(p_1, \dots, p_n)$ のとき.

帰納法の仮定より,  $\neg F_1(p_1, \dots, p_n) \equiv F_1^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ は得られている.

したがって,  $\neg \neg F_1(p_1, \dots, p_n) \equiv \neg F_1^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ が直ちに得られる.

5.  $F(p_1, \dots, p_n)$ が  $\forall x F_1(x; p_1, \dots, p_n)$ のとき.

帰納法の仮定より,  $a$ を $F_1, p_i$ に現れない変数とすることにより, すべての $a$ について  
 $\neg F_1(a; p_1, \dots, p_n) \equiv F_1^*(a; \neg p_1, \dots, \neg p_n)$ である.

また,  $F^*(a; p_1, \dots, p_n)$ は $\exists x F_1^*(x; p_1, \dots, p_n)$ である.

したがって

$$\begin{aligned} F^*(\neg p_1, \dots, \neg p_n) &\equiv \exists x F_1^*(x; \neg p_1, \dots, \neg p_n) \equiv \neg \forall x \neg F_1^*(x; \neg p_1, \dots, \neg p_n) \\ &\equiv \neg \forall x F_1(x; p_1, \dots, p_n) \equiv \neg F(p_1, \dots, p_n) \end{aligned}$$

が得られる.

6.  $F(p_1, \dots, p_n)$ が  $\exists x F_1(x; p_1, \dots, p_n)$ のとき.

同様に

$$\neg \exists x F_1(x; p_1, \dots, p_n) \equiv \exists x F_1^*(x; \neg p_1, \dots, \neg p_n)$$

が得られる.

## 定理（双対の原理）

$A$ をつを含まない論理式とし,  $A^*$ を双対とするとき,  
以下が成立する.

1.  $A$ が(NKで)証明できれば $\neg A^*$ も証明できる.
2.  $\neg A$ が証明できれば $A^*$ も証明できる.

### 証明

$F(p_1, \dots, p_n)$ ,  $F^*(p_1, \dots, p_n)$ で各々 $A$ ,  $A^*$ を表すことにする.

1.  $A^*$ の双対は $A$ である.

ド・モルガンの法則の一般化により,  $\neg F^*(p_1, \dots, p_n) \equiv F(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ ,  
すなわち $\neg A^* \equiv F(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ .

$A$ が証明可能であるならばその証明中に出現する $p_i$ をすべて $\neg p_i$ に置き換えることで  
 $F(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$ が証明できる. したがって $\neg A^*$ が証明できる.

2.  $\neg A$ の双対は $\neg A^*$ である.

1より,  $\neg A$ が証明できれば $\neg \neg A^*$ が証明できる.

NKを用いているので, 二重否定の除去により $A^*$ が証明できる.

## 演習

次の式の連言標準形と選言標準形を求めよ。

$$52. (p \vee (\neg q \wedge r)) \supset s$$

$$53. (p \supset s) \wedge (\neg q \wedge r \supset s)$$

解

52.

$$\begin{aligned}(p \vee (\neg q \wedge r)) \supset s \\ \equiv & \neg(p \vee (\neg q \wedge r)) \vee s \\ \equiv & (\neg p \wedge \neg(\neg q \wedge r)) \vee s \\ \equiv & (\neg p \wedge (\neg \neg q \vee \neg r)) \vee s \\ \equiv & (\neg p \wedge (q \vee \neg r)) \vee s \\ \equiv & \neg p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg r \vee s \quad (\text{選言標準形}) \\ \equiv & (\neg p \vee s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \quad (\text{連言標準形})\end{aligned}$$

53.

$$(p \supset s) \wedge (\neg q \wedge r \supset s)$$

$$\equiv (\neg p \vee s) \wedge (\neg(\neg q \wedge r) \vee s)$$

$$\equiv (\neg p \vee s) \wedge (\neg\neg q \vee \neg r \vee s)$$

$$\equiv (\neg p \vee s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \quad (\text{連言標準形})$$

$$\equiv (\neg p \vee s) \wedge q \vee (\neg p \vee s) \wedge (\neg r \vee s)$$

$$\equiv \neg p \wedge q \vee s \wedge q \vee (\neg p \vee s) \wedge \neg r \vee (\neg p \vee s) \wedge s$$

$$\equiv \neg p \wedge q \vee s \wedge q \vee \neg p \wedge \neg r \vee s \wedge \neg r \vee \neg p \wedge s \vee s$$

$$\equiv \neg p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg r \vee s \quad (\text{選言標準形})$$

演習

$(\exists y P(y) \wedge Q(x)) \circ \exists x R(x)$  の冠頭標準形を求めよ.

演習

$(\exists y P(y) \wedge Q(x)) \supset \exists x R(x)$  の冠頭標準形を求めよ。

解

$(\exists y P(y) \wedge Q(x)) \supset \exists x R(x)$

$\equiv \exists y (P(y) \wedge Q(x)) \supset \exists x R(x)$

$\equiv \forall y (P(y) \wedge Q(x)) \supset \exists x R(x) \quad (\because \exists x B \supset D \equiv \forall x (B \supset D))$

$\equiv \forall y (P(y) \wedge Q(x)) \supset \exists z R(z)$

$\equiv \forall y \exists z (P(y) \wedge Q(x) \supset R(z)) \quad (\because D \supset \exists x B \equiv \exists x (D \supset B))$

または

$(\exists y P(y) \wedge Q(x)) \supset \exists x R(x)$

$\equiv \exists y (P(y) \wedge Q(x)) \supset \exists z R(z)$

$\equiv \exists z (\exists y (P(y) \wedge Q(x)) \supset R(z)) \quad (\because D \supset \exists x B \equiv \exists x (D \supset B))$

$\equiv \exists z \forall y ((P(y) \wedge Q(x)) \supset R(z)) \quad (\because \exists x B \supset D \equiv \forall x (B \supset D))$

冠頭標準形は一通りとは限らない。