

35'  $\forall x(A(x) \vee B(x)) \supset \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$  の反例

$A(x) : x=0, B(x) : x=1$  とする.

モデル  $M = \langle D, I \rangle$  を以下のように定める.

(記述を簡単にするため, 記号の 0, 1,  $=$  とモデルの要素の 0, 1,  $=$  を同一視する)

$D = \{0, 1\}, I(=)(0, 0) = I(=)(1, 1) = \top, I(=)(1, 0) = I(=)(0, 1) = \perp$

これが反例になる, すなわち解釈したら  $\perp$  になることをしめす,

$F_1$  を  $\forall x(x=0 \vee x=1)$ ,  $F_2$  を  $\forall x(x=0)$ ,  $F_3$  を  $\forall x(x=1)$  とする. 与式  $F$  は  $F_1 \supset F_2 \vee F_3$  である.

$F_1, F_2, F_3$  を解釈する.

$I_\rho(F_1) = \forall^*(\{I_{\rho[a/x]}[x=0 \vee x=1] \mid a \in \{0, 1\}\})$ .

ここで  $I_{\rho[0/x]}[x=0 \vee x=1] = \vee^*(I(0=0), I(0=1)) = \vee^*(\top, \perp) = \top$ .

同様に  $I_{\rho[1/x]}[x=0 \vee x=1] = \top$ .

ゆえに  $I_\rho(F_1) = \forall^*(\{I_{\rho[a/x]}[x=0 \vee x=1] \mid a \in \{0, 1\}\}) = \forall^*(\{\top\}) = \top$ .

一方,  $I_\rho(F_2) = \forall^*(\{I_{\rho[a/x]}[x=0] \mid a \in \{0, 1\}\}) = \forall^*(\{\top, \perp\}) = \perp$ .

$I_\rho(F_3) = \forall^*(\{I_{\rho[a/x]}[x=1] \mid a \in \{0, 1\}\}) = \perp$ .

したがって,  $I_\rho(F) = \supset^*(\top, \vee^*(\perp, \perp)) = \perp$ .

36' は各自で解いてほしい.

37.

1  
 $\neg A$

2  
 $A$

---

$\frac{\perp}{A \supset \perp}$  2

---

$\frac{A \supset \perp}{\neg A \supset (A \supset \perp)}$  1

38.

$$\frac{\frac{\frac{1}{A \supset \perp} \quad 2}{\perp} 2}{\neg A} 1}{(A \supset \perp) \supset \neg A}$$

39.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\exists x \neg A(x)}{1} \quad \frac{\neg A(a)}{2} \quad \frac{\frac{\forall x A(x)}{3}}{A(a)}}{2} \quad \perp}{1} \quad \frac{\perp}{\frac{\neg \forall x A(x)}{3}}{2} \quad \frac{\frac{\neg \forall x A(x)}{3}}{\exists x \neg A(x) \supset \neg \forall x A(x)}}{1}}$$

40.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{A(a) \wedge B}{A(a)}}{\frac{\frac{\frac{\exists x(A(x) \wedge B)}{\exists xA(x)}}{\exists xA(x)}}{2}}{1}}{\frac{\frac{\frac{\frac{A(a) \wedge B}{\exists x(A(x) \wedge B)}}{B}}{\frac{B}{3}}}{1}}{3}}{3}$$
$$\frac{\exists xA(x) \wedge B}{\exists x(A(x) \wedge B) \supset \exists xA(x) \wedge B} 1$$

41.

$$\exists x A(x) \wedge B$$

$\exists x A(x)$

$$\exists x A(x) \wedge B \supset \exists x (A(x) \wedge B)$$

$$\exists x(A(x) \wedge B)$$

$$\exists x(A(x) \wedge B)$$

---

1

2

$$\frac{1}{\forall x A(x) \wedge B}$$

42.

			1
		$\forall x(A(x) \supset B)$	
	3		
		$A(a)$	
2			$A(a) \supset B$
$\exists xA(x)$		B	
		B	3
			2
		$\exists xA(x) \supset B$	
			1
		$\forall x(A(x) \supset B) \supset (\exists xA(x) \supset B)$	

43.

$$\frac{1 \quad \exists x A(x) \supset B \qquad \qquad \qquad 2 \quad A(a)}{\exists x A(x)}$$

$$\frac{B}{\frac{}{A(a) \supset B}} 2$$

$$\frac{\forall x (A(x) \supset B)}{(\exists x A(x) \supset B) \supset \forall x (A(x) \supset B)} 1$$

44.

$$\frac{\frac{\frac{A \vee \neg A}{A \vee B} \quad \frac{\frac{\neg A \supset B}{B} \quad \frac{\neg A}{B}}{A \vee B}}{A \vee B} \quad 2,3}{(\neg A \supset B) \supset A \vee B} \quad 1$$



45.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\neg \exists x \neg A(x)}{1} \quad \frac{\neg A(a)}{2}}{2} \quad \exists x \neg A(x)}{3} \quad A(a) \vee \neg A(a)}{A(a) \vee \neg A(a)} \quad 3$$

$$\frac{\frac{\frac{\neg \neg A(a) \quad \neg A(a)}{3} \quad \frac{\perp}{3}}{3} \quad \frac{\frac{A(a)}{A(a)}}{A(a) \supset A(a)}}{A(a) \supset A(a)} \quad 4$$

$$\frac{\frac{\frac{A(a)}{A(a)}}{\forall x A(x)}}{\neg \exists x \neg A(x) \supset \forall x A(x)} \quad 1$$

# 45別解

$$\frac{1}{\neg \exists x \neg A(x)}$$

$$\frac{2}{\neg A(a)}$$

$$\frac{}{\exists x \neg A(x)}$$

$$\frac{\neg \neg A(a)}{A(a)}$$

$$\frac{}{A(a) \vee \neg A(a)}$$

$$\frac{3}{A(a)}$$

$$\frac{}{\neg \neg A(a)}$$

$$\frac{}{2}$$

$$\frac{}{4}$$

$$\frac{\neg \neg A(a)}{\frac{}{\neg A(a)}}$$

$$\frac{}{A(a)}$$

3,4

$$\frac{}{A(a)}$$

$$\frac{}{\forall x A(x)}$$

1

$$\frac{}{\neg \exists x \neg A(x) \supset \forall x A(x)}$$

# 45別解

$$\frac{\frac{\frac{\frac{A(a) \vee \neg A(a)}{A(a)}_3 \quad \frac{\neg \exists x \neg A(x)}{1} \quad \frac{\neg A(a)}{4}}{\exists x \neg A(x)}_1 \quad \frac{\perp}{A(a)}_4}{A(a)}_3,4}{\neg \exists x \neg A(x) \supset \forall x A(x)}_1$$

46.

3

$$\neg \exists x \neg A(x)$$



1

$$\forall x A(x)$$

$$\neg \forall x A(x)$$

$\perp$

$$\neg \neg \exists x \neg A(x)$$

3



$$\exists x \neg A(x)$$

1

$$\neg \forall x A(x) \supset \exists x \neg A(x)$$

46.

$$\begin{array}{c} 3 \\ \neg \exists x \neg A(x) \\ \hline \end{array}$$

$\neg \exists x \neg$  と  $\forall x$  の同値性

$$\forall x A(x)$$

$$\neg \forall x A(x)$$

1

$$\begin{array}{c} \perp \\ \hline \neg \neg \exists x \neg A(x) \end{array}$$

3

二重否定の除去

$$\exists x \neg A(x)$$

1

$$\neg \forall x A(x) \supset \exists x \neg A(x)$$

証明図内で数ステップの推論を

まとめて表すときには2本線

「                    」

を用いる。

推論規則を組み合わせてできる

推論規則を

擬似推論規則(**derived rule**)と呼ぶ

例 二重否定の除去

$$\begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \neg\neg A \quad \neg A \\ \hline \perp \\ 1 \quad \hline \\ A \vee \neg A \quad A \quad A \\ \hline \hline 1,2 \\ A \\ \hline \neg\neg A \quad \hline \\ \neg\neg A \supset A \\ \hline \hline \\ A \end{array}$$

証明図内で数ステップの推論を  
まとめて表すときには2本線  
「        」  
を用いる。

推論規則を組み合わせてできる  
推論規則を  
類似推論規則(derived rule)と呼ぶ

## 例 二重否定の除去

例 一重否定の跡ム	$  \begin{array}{c}  3 \quad 2 \\  \neg\neg A \quad \neg A \\  \hline  1 \quad \perp \\  \hline  A \vee \neg A \quad A \quad A \\  \hline  \end{array}  $	$  \xrightarrow{1,2} \neg\neg A  $
	$  \neg\neg A \quad \neg\neg A \supset A \quad 3  $	$  \neg\neg A \quad A  $

46.

¬∃x¬と∀の  
同値性

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\neg \exists x \neg A(x)}{1}}{2} \quad \frac{\forall x A(x)}{1}}{3} \quad \frac{\neg \forall x A(x)}{1}}{\perp} 3$$

二重否定の除去

$$\frac{\frac{\frac{\neg \neg \exists x \neg A(x)}{3}}{2} \quad \frac{\exists x \neg A(x)}{1}}{\neg \forall x A(x) \supset \exists x \neg A(x)} 1$$

証明図内で数ステップの推論を  
まとめて表すときには2本線

「=====」

を用いる。

推論規則を組み合わせてできる

推論規則を

擬似推論規則(derived rule)と  
よぶ

47.

1

$$\frac{2}{\forall x A(x)}$$

---

$$A(a)$$

---

$$A(a) \vee B$$

$$\begin{array}{c}
 2 \\
 B \\
 \hline
 A(a) \vee B \\
 \hline
 \forall x(A(x) \vee B)
 \end{array}$$

$$\frac{\forall x(A(x) \vee B)}{\forall xA(x) \vee B \supset \forall x(A(x) \vee B)} \quad 1$$

48.

			3	5
			$\neg B$	$B$
1				
$\forall x(A(x) \vee B)$		4		$\perp$
$A(a) \vee B$	$A(a)$			$A(a)$
				4,5
			$A(a)$	
			$\forall x A(x)$	
			$\forall x A(x) \vee B$	
				2,3
			$\forall x A(x) \vee B$	
				1
			$\forall x(A(x) \vee B) \supset \forall x A(x) \vee B$	