

『論理と形式化』資料 No.7 演習問題の解答 (の例)
亀山幸義 (kam@cs.tsukuba.ac.jp)

No.7 資料記載の練習問題の解答を掲載する。ただし、一部の問題は期末レポートに関係するので掲載しない。

1 練習問題 1

以下の命題論理式を同値な CNF, DNF に変形せよ。

$$((P \wedge \neg Q) \vee R) \supset \neg(S \wedge T)$$

答. 同値変形を次々に行えばよい。

$$\begin{aligned} & ((P \wedge \neg Q) \vee R) \supset \neg(S \wedge T) \\ & \equiv \neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \vee \neg(S \wedge T) \\ & \equiv (\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg R) \vee (\neg S \vee \neg T) \\ & \equiv ((\neg P \vee \neg\neg Q) \wedge \neg R) \vee (\neg S \vee \neg T) \\ & \equiv ((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee (\neg S \vee \neg T) \\ & \equiv (\neg P \vee Q \vee \neg S \vee T) \wedge (\neg R \vee \neg S \vee \neg T) \end{aligned}$$

これは CNF である。

DNF を得るために上記の変形の最後から 2 番目の式から同値変形する。

$$\begin{aligned} & ((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee (\neg S \vee \neg T) \\ & \equiv (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R) \vee \neg S \vee \neg T \end{aligned}$$

これは DNF である。

2 練習問題 2

以下の CNF は証明可能か？

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg P) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

答. CNF が証明可能ということと、CNF を構成する全ての節が証明可能ということは同値である。また、節が証明可能というのは、ある命題変数 X について、 X と $\neg X$ が両方含まれることと同値である。

このことをもとに考えてみると、節 $\neg P \vee Q \vee R$ はそういう形になっていので証明可能でない、全体も証明可能でない。

3 練習問題 2 つづき

以下の CNF は充足可能か？

- $(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee P)$

答: $\neg P \vee Q$ という節があることから、「 P が真なら、 Q は真」である。また、 $\neg Q \vee R$ という節があることから、「 Q が真なら、 R は真」である。また、 $\neg R \vee P$ という節があることから、「 R が真なら、 P は真」である。これから、 P が真なら、 Q, R は真である。残った節は $P \vee Q$ だけでこれは真なので、全体として充足可能である。 (P, Q, R) をすべて真にする割当のもとで真になる。)

補足: この例で言いたかったのは、「2-SAT 問題 (すべての節が 2 個以下のリテラル (命題変数、か、命題変数に否定をつけたもの) であるような CNF に対する充足可能性問題)」は、簡単に解けるということである。この授業で説明した通り、3-SAT 問題は NP 完全であり、効率良く解くアルゴリズムはないので、2 と 3 で大差がある。

- $(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

答. これは、3-SAT 問題であるが、たまたますべての節に R があるので、 R を「真」に割り当てれば充足可能なことがわかる。 (P, Q) の真理値は何でもよい)

4 練習問題 3

命題論理式を CNF に同値変形するアルゴリズムの計算量を見積りなさい。

答. スライドにある通り。(そこでは、計算量そのものではなく、出力される CNF のサイズの見積りだけが書かれているが、CNF のサイズが $O(2^n)$ であれば、それを計算するアルゴリズムの計算時間もメモリも、 $O(2^n)$ 以上必要である。)

5 練習問題 5

$\neg(((P \supset Q) \supset P) \supset P)$ を Tseitin 変換せよ。

答. まず、1 つの論理記号ごとに、1 つの命題変数 X_i を導入する。

$$X_1 \equiv P \supset Q$$

$$X_2 \equiv X_1 \supset P$$

$$X_3 \equiv X_2 \supset P$$

$$X_4 \equiv \neg X_3$$

次に、これらを個別に、CNF に変形する。(やりかたはスライドにある通り。)

$$(1 \text{ つ目の式}) (\neg X_1 \vee P \vee Q) \wedge (X_1 \vee P) \wedge (X_1 \vee \neg Q)$$

$$(2 \text{ つ目の式}) (\neg X_2 \vee X_1 \vee P) \wedge (X_2 \vee X_1) \wedge (X_2 \vee \neg P)$$

$$(3 \text{ つ目の式}) (\neg X_3 \vee X_2 \vee P) \wedge (X_3 \vee X_2) \wedge (X_3 \vee \neg P)$$

$$(4 \text{ つ目の式}) (\neg X_4 \vee \neg X_3) \wedge (X_4 \vee X_3)$$

最後に、これらと X_4 (式全体) の AND を取ればよい。

$$\begin{aligned}
& (\neg X_1 \vee P \vee Q) \wedge (X_1 \vee P) \wedge (X_1 \vee \neg Q) \\
& \wedge (\neg X_2 \vee X_1 \vee P) \wedge (X_2 \vee X_1) \wedge (X_2 \vee \neg P) \\
& \wedge (\neg X_3 \vee X_2 \vee P) \wedge (X_3 \vee X_2) \wedge (X_3 \vee \neg P) \\
& \wedge (\neg X_4 \vee \neg X_3) \wedge (X_4 \vee X_3) \\
& \wedge X_4
\end{aligned}$$

できあがった式は CNF であり、もとの論理式と充足可能性が同値である。

6 練習問題 6

テキスト p.33 の CNF に対して、DPLL アルゴリズムを走らせなさい。

答. これは、「うまい選択をするとあっという間におわり下手な選択をすると何度もバックトラックする」というものであるので、選択結果によっては短い解答も長い解答もあり得る。

- 割り当て θ の初期値を $[]$ とする。
- 与えられた節たちの中に単位節はない。そこで $P \mapsto T$ という選択をする。(バックトラックで戻ってくるポイントになる。)
- $\theta = [P \mapsto T]$ として単純化すると以下の節たちを得る。
 - $(Q \vee R)$
 - $(\neg Q \vee \neg R \vee S)$
 - $(Q \vee \neg R)$
 - $(\neg Q \vee R)$
- 節たちの中に単位節はない。そこで $Q \mapsto T$ という選択をする。(バックトラックで戻ってくるポイントになる。)
- $\theta = [P \mapsto T, Q \mapsto T]$ として単純化すると以下の節たちを得る。
 - $(\neg R \vee S)$
 - (R)
- 単位節 R があるので、 $R \mapsto T$ を θ に加えて単純化すると、以下の節たちを得る。
 - S
- 単位節 S があるので、 $S \mapsto T$ を θ に加えて単純化すると、節がすべてなくなる。
- よって、アルゴリズムを終了して、 $\theta = [P \mapsto T, Q \mapsto T, R \mapsto T, S \mapsto T]$ という割当てを得る。

7 練習問題 7

「第 1 行には、1、2、3、4 が 1 回ずつ現れる」ことを意味する論理式を $P(a, b, c)$ を使って書きなさい。

答. これもいろいろな解があり得る。一例は以下の通り。

$$\begin{aligned}
&P(1, 1, 1) \vee P(1, 2, 1) \vee P(1, 3, 1) \vee P(1, 4, 1) \\
&\vee P(1, 1, 2) \vee P(1, 2, 2) \vee P(1, 3, 2) \vee P(1, 4, 2) \\
&\vee P(1, 1, 3) \vee P(1, 2, 3) \vee P(1, 3, 3) \vee P(1, 4, 3) \\
&\vee P(1, 1, 4) \vee P(1, 2, 4) \vee P(1, 3, 4) \vee P(1, 4, 4)
\end{aligned}$$

この命題単独では、「1,2,3,4 が第 1 行に 1 回以上出現する」ということしか表せていないが、ほかの部分で、「各セルには、1,2,3,4 がただ 1 つだけはある」ことを表現できていて、その論理式との論理積を取ることを前提にすると、「第 1 行に、1,2,3,4 が合計 5 回以上現れることはない」ので、上記の命題で十分なことがわかる。

8 練習問題 8

練習問題 6 の CNF を SAT ソルバで解きなさい。

答. これは、まあ、やるだけなので、やってください。