論理回路

富田　裕

九州テクノカレッジ

#200212b

アウトライン

- 記号の使い分け

1. ブール代数
   - 2 元ブール代数
   - 公理と定理
   - 標準形
   - ここまでのまとめ
2. 双対性
3. カルノー図
4. まとめ

記号の使い分け

記号についての注意:

- ここまでは離散数学や論理学でよく使われる記号を用いました
- ISO 80000-2 に一部準拠していました
- ここからは情報系で標準的な記号に変わります

ブールって誰?

George Boole(1815-1864)

- 数学者: 微分方程式や解析学等にも業績を残す
- ブール代数 (Boolean algebra) の由来

ブール代数

(2 元) ブール代数

ブール代数は論理式についての代数で, $0, 1$ を元とし, その集合上の基本演算である「積」「和」「補元」が定義され, いくつかの公理を満たすものである.

ブール代数

ここで扱うブール代数の元は $\{0, 1\}$ のみです.

ブール代数の実際

- 本来は集合の元として様々な対象を加えて良い
- だが実際は2 元ブール代数がよく使われる
    - 0 と 1 だけを考える最も単純なブール代数
    - これを単に「ブール代数」と呼ぶことも多い
- 命題論理は異なる記号を使った 2 元ブール代数であることがわかればよい

というわけで2 元ブール代数を見ていきましょう.[1]

[1] 補遺では一般のブール代数を紹介し, 具体例として C の論理演算を取り上げます.

積 (AND); 和 (OR); 補元 (NOT)

$A, B \in \{0, 1\}$ を変数とします.

Table 1: 積 $A \cdot B$ の演算表

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Table 2: 和 $A + B$ の演算表

A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Table 3: 補元 $\overline{A}$ の演算表

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

命題論理の真理値表のT を 0, F を 1 にしたものです.

ブール代数の公理

$A, B, C \in \{0, 1\}$ を変数とする:

交換律: $A \cdot B = B \cdot A,\ A + B = B + A$

分配律: $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C),$
$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

同一律: $A \cdot 1 = A,\ A + 0 = A,\ A + 1 = 1,\ A \cdot 0 = 0$

補元律: $A + \overline{A} = 1,\ A \cdot \overline{A} = 0$

これを満たしていればブール代数になります.[2]

[2] ここではハンティントンの公理系を採用しました.

公理と定理

ブール代数

公理から次の定理が成り立つことが知られています:

ブール代数の定理

$A, B, C \in \{0, 1\}$ を変数とする:

- 冪等律: $A \cdot A = A,\ A + A = A$
- 有界律: $A + 1 = 1,\ A \cdot 0 = 0$
- 結合律: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,$
  $A + (B + C) = (A + B) + C$
- 吸収律: $A + (A \cdot B) = A,\ A \cdot (A + B) = A,$

これらは公理から導くことができます.

さらに次も成り立つことが知られています:

2 元ブール代数のその他の法則

$A, B \in \{0, 1\}$ を変数とする:

補元の一意性: $A \cdot B = 0$ かつ $A + B = 1$ なら $B = \overline{A}$

対合律: $\overline{\overline{A}} = A$

De Morgan 則: $\overline{(A + B)} = (\overline{A} \cdot \overline{B})$, $\overline{(A \cdot B)} = (\overline{A} + \overline{B})$

これらも公理と定理から導くことができます.

公理と定理

ブール代数

- また, 以下の拡張された規則も成り立ちます.

$$A \cdot A \cdot \ldots \cdot A = A$$
$$A + A + \ldots + A = A$$

- さらに, De Morgan 則も拡張できます.

$$\overline{A \cdot B \cdot \ldots \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \ldots + \overline{C}$$
$$\overline{A + B + \ldots + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \ldots \cdot \overline{C}$$

基本積 (基本和)

ブール代数の変数またはその補元の積 (和) のみからなる論理式を基本積 (基本和)と呼ぶ.

積和形 (和積形)

積和形: A または $A + B + \ldots + C$ と表され, $A, B, \ldots, C$ がそれぞれ基本積

和積形: A または $A \cdot B \cdot \ldots \cdot C$ と表され, $A, B, \ldots, C$ がそれぞれ基本和

標準形

最小項 (最大項)

基本積 (基本和) がすべての変数を一つずつ含んでいるとき，それを最小項 (最大項) と呼ぶ.

主加法標準形 (主乗法標準形)

主加法標準形: 積和形内のすべての基本積が最小項
主乗法標準形: 和積形内のすべての基本和が最大項

命題論理と全く同じです!

任意の論理式 F の主乗法標準形を求める手順

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

1. F が偽になる行に注目
2. 各行から最大項を作成
   - 0 なら変数そのまま, 1 なら補元
   - 2 行目:$\overline{A}+\overline{B}+C$
   - 3 行目:$A+\overline{B}+C$
   - 5 行目:$\overline{A}+B+C$
   - 6 行目:$\overline{A}+B+\overline{C}$
3. 各最大項を · ですべて結ぶ

$$F = (\overline{A}+\overline{B}+C)\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})$$

ここまでのまとめ

ブール代数

- 基本演算は $\cdot, +, \overline{}$
- 2 元ブール代数は命題論理と同一視できる
- 種々の規則や概念は命題論理と同一

カリキュラム上の狙い

- 抽象的なブール代数より先に具体的な命題論理を導入しようと試みました
- 代数から学ぶほうが理解が深まる人もいます

双対性

演算子の双対性

ある法則や定理などが成り立つ時，そこに現れる各演算子を双対となる別の演算子に置き換えたものも成り立つ性質

- $\cdot$ と $+$ は互いに双対の演算子
- $\wedge$ と $\vee$ も互いに双対の演算子

注意 演算子を置き換えたら同値な値が出る規則ではありません.

双対性

規則の双対性の例

- De Morgan 則
- 補元律 (排中律および矛盾律)
- 対合律 ($\overline{\overline{A}} = A$) は自己双対: 双対は自分自身

双対概念の例

- 基本積と基本和 (最小項と最大項)
- 積和形と和積系 (主加法標準形と主乗法標準形)

演算子を入れ替えるだけでは同値な命題にならない

カルノー図

3 つ以上の変数でも扱いやすい真理値表[3]

X_1X_0

X_3X_2	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

論理式 $F(X_3, X_2, X_1, X_0)$ の場合

- X_3X_2 が取る値を縦軸に
- X_1X_0 が取る値を横軸に

ならべ, 変数の値の交点に論理式の値を入れます.

[3] 2 元ブール代数上ではもちろん 0 か 1 しか入りません

カルノー図

- この図は三つ以上の変数を扱う時に活躍します.
- でもまずは簡単な例から見ていきましょう.

		A	
		0	1
B	0	0	0
	1	0	1

Figure 1: $F(A, B) = A \cdot B$ のカルノー図

		A	
		0	1
B	0	0	1
	1	1	1

Figure 2: $F(A, B) = A + B$ のカルノー図

カルノー図

3 変数のカルノー図は次のようになります

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	1

Figure 3: $F(A, B, C) = A + B \cdot C$ のカルノー図

カルノー図

主加法標準形の求め方:

AB \ C	0	1
00	0	0
01	1	1
11	1	0
10	0	1

1. 1 のマスに注目
2. 横軸と縦軸の値から最小項を作成
   - 赤: $\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
   - 緑: $\overline{A} \cdot B \cdot C$
   - 黄: $A \cdot \overline{B} \cdot C$
   - 青: $A \cdot B \cdot \overline{C}$
3. 各最小項を $+$ で結ぶ

$$F = \overline{A}\,B\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,C + A\,\overline{B}\,C + A\,B\,\overline{C}$$

まとめ

今日学んでほしかったこと

2 元ブール代数について:

- 命題論理とほぼ同等の規則が成り立つ代数系
- 標準形などの概念もほぼ同一です

カルノー図について:

- 3 変数以上の論理式でも扱いが容易
- カルノー図を用いた簡単化は次回以降紹介

これから学べること

離散数学の教科書で, 集合や束について書いてある箇所を読むことも有益です.

一般的なブール代数

appendix

ある集合 B とその上の演算がいくつかの法則 (公理) を満たすとき, ブール代数と呼ばれます.

- 集合は少なくとも $\{0, 1\}$ という要素を持つ $(0 \neq 1)$
- 演算は $\cdot$(積, AND), $+$(和, OR) および $\overline{}$(補元, NOT)
    - $\cdot$ は二項演算: A と B の間に入って $A \cdot B$ となる
    - $+$ は二項演算: A と B の間に入って $A + B$ となる
    - $\overline{}$ は一項演算: A の上について $\overline{A}$ となる
    - 減算や除算は定義されない
- 特に $(B, \cdot, +, \overline{}, 0, 1)$ の組を B 上のブール代数と呼ぶ