# 論理回路

富田　裕

九州テクノカレッジ

#200219a

# アウトライン

1. ブール代数 (復習と補足)
   - 記号の読み書き
   - 2 元ブール代数
   - 双対性
   - 乗法標準形の求め方 (訂正)
2. n 進数 (整数)
   - 10 進数
   - 2, 8, 16 進数
   - ここまでのまとめ
3. 基数変換
   - 10 進数から 2,8,16 進数への変換
   - 2 進数と 8 (16) 進数との相互変換
4. まとめ

# 記号の読み書き

## ブール代数 (復習と補足)

- 最初に直前の講義 (ブール代数) で出題した問題の採点済み答案を返します.
- その間, 前回の講義資料を読みつつ次のスライドの問題を考えてください.

# 前回の問題の一部 (修正版)

$P, Q, R \in \{0, 1\}$ を変数とする．次のうちから基本積となる選択肢を3 つ選んで答えよ．またその中で最小項もあれば答えよ．さらに「論理式でない」選択肢もあれば答えよ:

1. $P$
2. $P \cdot Q \cdot R$
3. $\overline{R}$
4. $P = R$
5. $P \cdot \overline{\overline{Q} \cdot R}$
6. $\overline{P \cdot \overline{Q \cdot \overline{R \cdot \overline{P}}}}$

# 記号の読み書き

## ブール代数 (復習と補足)

| ブールの記号 | $\cdot$ | $+$ | $\overline{(\ \ )}$ |
|---|---|---|---|
| 名前 | 積 (AND) | 和 (OR) | 補元 (NOT) |
| あだ名 | 掛け算 | 足し算 | 反対[1] |

### 注意

$\neg(A \land B)$ が $\neg A \land \neg B$ でないのと同様 $\overline{A \cdot B}$ は $\overline{A} \cdot \overline{B}$ ではない

[1]変数の補元を反変数と呼ぶことがあります.

# 記号の読み書き
## ブール代数 (復習と補足)

いくつかのコメント

- $A \cdot B$ は $A\,B$ と略記して OK
- どんな式も括弧を使わない形に変換可能
- けれど、必ず括弧を意識して規則を適用すべき

# 積 (AND); 和 (OR); 補元 (NOT)

$A, B \in \{0, 1\}$ を変数とします.

Table 1: 積 $A \cdot B$ の演算表

| $A$ | $B$ | $A \cdot B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Table 2: 和 $A + B$ の演算表

| $A$ | $B$ | $A + B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Table 3: 補元 $\overline{A}$ の演算表

| $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

命題論理の真理値表のT を 0, F を 1 にしたものです.

## 演算子 (と定数) の双対性

ある法則や定理などが成り立つ時, そこに現れる各演算子 (と定数) を双対となる別の演算子に置き換えたものも成り立つ性質

- ブール代数の $\cdot$ と $+$ は互いに双対の演算子
- 2 元ブール代数の $0$ と $1$ は互いに双対の定数

注意 演算子を置き換えたら同値な値が出る規則ではありません.

## ブール代数の公理

$A, B, C$ を変数とする:

- 交換律: $A \cdot B = B \cdot A,\ A + B = B + A$
- 分配律: $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C),$
  $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
- 同一律: $A \cdot 1 = A,\ A + 0 = A$
- 補元律: $A + \overline{A} = 1,\ A \cdot \overline{A} = 0$

これを満たしていればブール代数になります.[2]

[2] ここではハンティントンの公理系を採用しました.

# 双対性

ブール代数 (復習と補足)

## ブール代数の定理

$A, B, C$ を変数として, 公理から以下が導かれる:

- 冪等律: $A \cdot A = A,\ A + A = A$
- 有界律: $A + 1 = 1,\ A \cdot 0 = 0$
- 結合律: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,$ $A + (B + C) = (A + B) + C$
- 吸収律: $A + (A \cdot B) = A,\ A \cdot (A + B) = A,$
- 補元の一意性: $A \cdot B = 0$ かつ $A + B = 1$ なら $B = \overline{A}$
- 対合律: $\overline{\overline{A}} = A$
- De Morgan 則: $\overline{(A + B)} = (\overline{A} \cdot \overline{B}),\ \overline{(A \cdot B)} = (\overline{A} + \overline{B})$

# 余談: C の論理演算

## すみません

C の論理演算はブール代数をなしてない! (理由は授業最後の問題にしました)

その代わり, C99 からはブール代数のような振る舞いを実現するための `_Bool` 型が用意されています.[3]

## $B_{\texttt{\_Bool}} = \{0, 1\}$ 上のブール代数

$(B_{\texttt{\_Bool}}, \&\&, ||, 1, 0)$ は 2 元ブール代数をなす.

[3] この型の振る舞いは補遺を参照.

ひとまず必須となる概念を (双対性を用いて) 整理:

## 最小項 (最大項)

変数またはその補元の積 (和) のみからなる論理式がすべての変数を一つずつ含んでいるとき, それを最小項 (最大項) と呼ぶ.

## 主加法標準形 (主乗法標準形)

論理式が $A + B + \ldots + N$ $(A \cdot B \cdot \ldots \cdot N)$ と表され, $A, B, \ldots, N$ がそれぞれ最小項 (最大項)

## 任意の論理式 $F$ の主乗法標準形を求める手順

| $A$ | $B$ | $C$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

1. $F$ が偽になる行に注目
2. 各行から最大項を作成
   - 0 なら変数そのまま, 1 なら補元
   - 2 行目:$A + B + \overline{C}$
   - 3 行目:$A + \overline{B} + C$
   - 5 行目:$\overline{A} + B + C$
   - 6 行目:$\overline{A} + B + \overline{C}$
3. 各最大項を · ですべて結ぶ

$$F = (A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})$$

# n 進数 (整数)

ここからは全く別の話題になります.

# n 進数 (整数)

10 進数: 0 から 9 の 10 種の記号で表される数体系
基数 (底): 記号の種類数 (10 進数の基数は 10)
$n$ 進数: 一桁が $n$ 種類の記号で表される数体系

**コンピューター上でよく使われる $n$ 進数**

$n = 2$: 2 進数
$n = 8$: 8 進数 (2 進数と相性が良い)
$n = 16$: 16 進数 (2 進数と相性が良い)

# n 進数 (整数) I

| 10 進数 | 2 進数 | 8 進数 | 16 進数 |
|---:|---:|---:|---:|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 10 | 2 | 2 |
| 3 | 11 | 3 | 3 |
| 4 | 100 | 4 | 4 |
| 5 | 101 | 5 | 5 |
| 6 | 110 | 6 | 6 |
| 7 | 111 | 7 | 7 |
| 8 | 1000 | 10 | 8 |
| 9 | 1001 | 11 | 9 |

# n 進数 (整数) II

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 | 1010 | 12 | A |
| 11 | 1011 | 13 | B |
| 12 | 1100 | 14 | C |
| 13 | 1101 | 15 | D |
| 14 | 1110 | 16 | E |
| 15 | 1111 | 17 | F |
| 16 | 10000 | 20 | 10 |

# n 進数 (整数) III

## 読み取れること

- 8 進数の一桁は 2 進数の下 3 桁に対応
- 16 進数の一桁は 2 進数の下 4 桁に対応
- 10 進数と 2 進数だと対応関係が貧弱

暗記してほしいこと 2 進数の1111と 16 進数のFは等しい

10 進数を他の $n$ 進数と区別する際には, $(128)_{10}$ などと書き, 基数が 10 であることを明示します.

### 変数による数字の表記

$p$ 桁の $n$ 進数は $(d_{p-1} \ldots d_1 d_0)_n$ で表すことにする. ただし各 $d_{i<p}$ は一桁の数字を表す変数である.

C 言語の配列と同様に 0 始まりの添字を付けます.

### 10 進数の変数による表記

$(107)_{10}$ は 3 桁なので三つの変数の列 $(d_2 d_1 d_0)_{10}$ と表せる. ただし, $d_2 = 1, d_1 = 0, d_0 = 7$ である.

## 2 進数

- 0 と 1 の数字だけを並べる数体系
- 5 は $(101)_2$, 27 は $(11011)_2$, などと表現
- 一桁の単位: 1ビット
- 八桁の単位: 1バイト
- $n$ 桁 ($n$ ビット) なら 0 から $2^n - 1$ の値をとる
- 論理回路上で基本的に用いられる数体系

## 2 進数から 10 進数への変換

ある 2 進数が $p$ 桁の数 $(d_{p-1}d_{p-2}\ldots d_1 d_0)_2$ と表されるとすると, 10 進数へは次のように変換すればよい:

$$d_{p-1}\times 2^{p-1}+d_{p-2}\times 2^{p-2}+\ldots+d_1\times 2^1+d_0\times 2^0$$

## $(100101)_2$ を 10 進数に変換

0 の桁を無視すると以下のような計算になる.

$$1\times 2^{6-1}+1\times 2^{6-4}+1\times 2^{6-6}=32+4+1=(37)_{10}$$

# 2, 8, 16 進数

## 8 進数

- 0 から 7 までの数字だけを使う数体系
- 9 は $(11)_8$, 16 は $(20)_8$, 47 は $(57)_8$, などと表現
- 2 進数と相性がよい

## 8 進数から 10 進数への変換

ある 8 進数が $p$ 桁の数 $(d_{p-1}d_{p-2}\dots d_1d_0)_8$ と表されるとすると, 10 進数へは次のように変換すればよい:

$$d_{p-1} \times 8^{p-1} + d_{p-2} \times 8^{p-2} + \dots + d_1 \times 8^1 + d_0 \times 8^0$$

## $(127)_8$ を 10 進数に変換

以下のような計算になる:

$$1 \times 8^{3-1} + 2 \times 8^{3-2} + 7 \times 8^{3-3} = 64 + 16 + 7 = (87)_{10}$$

## 16 進数

- 一桁を表す数字に A, B, C, D, E, F を追加する.
- $29$ は $(1D)_{16}$, $177$ は $(B1)_{16}$, などと表現
- 16 進数であることを明示するのに $0x1F$ などと書くことも多い (講義では他との統一を図るため用いない)
- $2$ 進数と相性がよい

# 2, 8, 16 進数

n 進数 (整数)

## 16 進数から 10 進数への変換

ある 16 進数が $p$ 桁の数 $(d_{p-1}d_{p-2}\ldots d_1d_0)_{16}$ で表されるなら, 10 進数へは次のように変換すればよい:

$$d_{p-1} \times 16^{p-1} + d_{p-2} \times 16^{p-2} + \ldots + d_1 \times 16^1 + d_0 \times 16^0$$

## $(1\mathrm{AD})_{16}$ を 10 進数に変換

以下のような計算になる:

$$\begin{aligned} 1 \times 16^{3-1} + 10 \times 16^{3-2} + 13 \times 16^{3-3} &= 256 + 160 + 13 \\ &= (429)_{10} \end{aligned}$$

一般に次のような式が成り立ちます:

### $n$ 進数から $10$ 進数への変換

$n$ 進数が $p$ 桁の数 $(d_{p-1}d_{p-2}\dots d_1d_0)_n$ と表されるとすると, $10$ 進数へは次のように変換する:

$$d_{p-1} \times n^{p-1} + d_{p-2} \times n^{p-2} + \dots + d_1 \times n^1 + d_0 \times n^0 \quad (1)$$

添字 $i = 0, 1, \dots p-1$ それぞれに対し, $d_i$ のことを変換係数, $n^i$ のことを重みと呼びます.

# 10 進数から 2,8,16 進数への変換



## 10 進数から $n$ 進数への変換

10 進数に変換された前の式 (1) を変形:

$$n \times (d_{p-1} \times n^{p-2} + d_{p-2} \times n^{p-3} + \ldots + d_1) + d_0$$

つまり, 次の操作を ($i = 0$ から $i = p - 1$ まで) 繰り返せば, $n$ 進数 $d_{p-1}d_{p-2}\ldots d_1 d_0$ が求められる.

1. 10 進数で表された数を $n$ で割る.
2. 剰余 $d_i$(変換係数) を求める.
3. 10 進数の商 $d_{p-1} \times n^{p-2} + d_{p-2} \times n^{p-3} + \ldots + d_{i+1}$ を対象に操作を繰り返す.

# 10 進数から 2,8,16 進数への変換



わかりにくいので日本語だけで説明します.

## 10 進数から 2 進数への変換

次の操作を繰り返せば, 2 進数が求められる.

1. 10 進数で表された数を 2 で割る.
2. 剰余 (変換係数) を求める.
3. 10 進数で表された商を対象に操作を繰り返す.

これならわか (ると信じてお) ります.

# 10 進数から 2,8,16 進数への変換



一般的な変換方法が 2 進数で成り立つ例を確認します.

## $(38)_{10}$ を 2 進数へ変換する

1. $38 \div 2 = 19$ 余り $0$
2. $19 \div 2 = 9$ 余り $1$
3. $9 \div 2 = 4$ 余り $1$
4. $4 \div 2 = 2$ 余り $0$
5. $2 \div 2 = 1$ 余り $0$
6. $1 \div 2 = 0$ 余り $1$

よって, $(38)_{10} = (100110)_2$

8 (16) 進数も同様です.

## 10 進数から 8 (16) 進数への変換

次の操作を繰り返せば, 8 (16) 進数が求められる.

1. 10 進数で表された数を 8 (16) で割る.
2. 剰余 (変換係数) を求める.
3. 10 進数で表された商を対象に操作を繰り返す.

## 注意点

16 進数は A から F を含むことがある.

16 進数で成り立つ例だけを確認します.

### $(427)_{10}$ を 16 進数へ変換する

1. $427 \div 16 = 26$ 余り $11 (= \mathrm{B})$
2. $26 \div 16 = 1$ 余り $10 (= \mathrm{A})$
3. $1 \div 16 = 0$ 余り $1$

よって, $(427)_{10} = (1\mathrm{AB})_{16}$

ここまで理解できたら, 一般的な変換方法を再確認してください.

# 2 進数と 8 (16) 進数との相互変換



2 進数と 8 (16) 進数は容易に相互変換できます.

## 2 進数と 8 (16) 進数との対応

2 進数の下から各三桁 (各四桁) は 8 (16) 進数の下からの各一桁に一対一対応する.

つまり, 次の通りに変換するのが比較的容易です.

$2 \to 8(16)$ 進: 下から三桁 (四桁) ずつ変換

$8(16) \to 2$ 進: 各桁を三桁 (四桁) 分に下から変換

# 2 進数と 8 (16) 進数との相互変換

基数変換

## $(101110)_2$ を 8 (16) 進数に変換する

8 進数: 101 と 110 に分割

- $(101)_2 = (2^2 + 2^0)_{10} = (5)_8$
- $(110)_2 = (2^2 + 2^1)_{10} = (6)_8$
- よって $(101110)_2 = (56)_8$

16 進数: 10 と 1000 に分割

- $(10)_2 = (2^1)_{10} = (2)_{16}$
- $(1110)_2 = (2^3 + 2^2 + 2^1)_{10} = (E)_{16}$
- よって $(101110)_2 = (2E)_{16}$

# 2 進数と 8 (16) 進数との相互変換



16 進数から 2 進数への変換も容易です.

## $(\mathrm{AC})_{16}$ を 2 進数に変換する

A が上の桁, C が下四桁に対応:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= (10)_{10} \\ &= (2^3 + 2^1)_{10} \\ &= (1010)_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathrm{C} &= (12)_{10} \\ &= (2^3 + 2^2)_{10} \\ &= (1100)_2 \end{aligned}$$

なので

$$(\mathrm{AC})_{16} = (10101100)_2$$

A から F と 2 進数との変換に慣れましょう.

# まとめ

ブール代数:

- 双対性を利用して規則や概念を理解しましょう.

$n$ 進数:

- $2, 8, 16$ 進数から $10$ 進数に変換するには各変換係数に重みを掛けます.
- $10$ 進数から $2, 8, 16$ 進数へと変換するには基数による割り算を繰り返します.
- $2$ 進数と $8$ $(16)$ 進数は対応が取りやすい (ので $(1111)_2 = (\mathrm{F})_{16}$ は暗記しましょう).

ブール代数の集合 $\mathcal{B}$ には少なくとも，
最大元と最小限が必要です．

## 自然数 $n$ の約数全体の集合 $D_n$

例えば $n = 12$ のとき，$D_6 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ である．
積を $xy = \mathrm{gcd}(x, y)$，和を $x + y = \mathrm{lcm}(x, y)$，補元を $\bar{x} = 12/x$ とすると，最大元 12，最小元 1 のブール代数になる．

# _Bool 型

appendix

```
#include <stdio.h>
#include <stdbool.h>// _Bool型をboolという名前で
    使えたり，trueやfalseが使えるようになる
int main()
{
    bool boolval=2; //0以外の値を代入しても1
    printf("  boolval: %d\n", boolval); //=> 1
    printf(" !boolval: %d\n", !boolval); //=> 0
    // '--'は補元に更新する
    printf("--boolval: %d\n", --boolval); //=> 0
    printf("--boolval: %d\n", --boolval); //=> 1
    printf("     true: %d\n", true); //=> 1
    printf("    false: %d\n", false); //=> 0
    return 0;
}
```

# 2,8,16 進小数から 10 進小数への変換



(有限桁の) 小数が含まれる場合, 小数部だけ取り出して次のように変換します:

## $n$ 進小数部から 10 進小数部への変換

$n$ 進小数部が $q$ 桁の小数部 $(0.d_{-1}d_{-2}\ldots d_{-q+1}d_{-q})_n$ と表されるとき, 10 進小数部へは次のように変換する:

$$d_{-1}\times n^{-1}+d_{-2}\times n^{-2}+\ldots+d_{-q+1}\times n^{-q+1}+d_{-q}\times n^{-q} \quad (2)$$

添字 $j=-1,-2,\ldots-q$ それぞれに対し, $d_j$ のことを変換係数, $n^j$ のことを重みと呼びます.

# 2,8,16 進小数から 10 進小数への変換

appendix

## 2 進小数部から 10 進小数部への変換

2 進小数部が $p$ 桁の小数部 $(0.d_{-1}d_{-2}\ldots d_{-q+1}d_{-q})_n$ で表されるとき，10 進小数部へは次のように変換する：

$$d_{-1}\times 2^{-1}+d_{-2}\times 2^{-2}+\ldots+d_{-q+1}\times 2^{-q+1}+d_{-q}\times 2^{-q}$$

## $(0.1001)_2$ を 10 進小数部に変換

0 の桁を無視すると以下のような計算になる．

$$\begin{aligned}1\times 2^{-1}+1\times 2^{-4} &= 0.5+0.0625\\ &= (0.5625)_{10}\end{aligned}$$

# 10 進小数から 2,8,16 進小数への変換



## 10 進小数部ら $n$ 進小数部への変換

10 進小数に変換された前の式 (2) を $n$ 倍:

$$d_{-1} + (d_{-2} \times n^{-1} + \ldots + d_{-q+1} \times n^{-q+2} + d_{-q} \times n^{-q+1})$$

つまり, 次の操作を ($j = -1$ から $j = -q$ まで) 繰り返せば, $n$ 進数 $d_{-1}d_{-2}\ldots d_{-q+1}d_{-q}$ が求められる.

1. 10 進小数で表された数を $n$ 倍する.
2. 整数部 $d_j$(変換係数) を求める.
3. 残りの 10 進小数部 $d_{j-1} \times n^{-1} + \ldots + d_{-q+1} \times n^{-q+2} + d_{-q} \times n^{-q+1}$ を対象に操作を繰り返す.

# 10 進小数から 2,8,16 進小数への変換



やはりわかりにくいので日本語だけで説明します.

**10 進小数部から 2 進小数部への変換**

次の操作を繰り返せば, 2 進小数が求められる.

1. 10 進数で表された小数部を 2 倍する.
2. 整数部 (変換係数) を求める.
3. 残りの 10 進小数部を対象に操作を繰り返す.

これならわかりやすい (はず) ですね.

# 10 進小数から 2,8,16 進小数への変換



一般的な変換方法が 2 進小数で成り立つ例:

**$(2.8)_{10}$ を 2 進数へ変換する**

1. $2 \div 2 = 1$ 余り 0
2. $1 \div 2 = 0$ 余り 1

1. $0.8 \times 2 = 1.6$ 整数部 1
2. $0.6 \times 2 = 1.2$ 整数部 1
3. $0.2 \times 2 = 0.4$ 整数部 0
4. $0.4 \times 2 = 0.8$ 整数部 0
5. ...以下 1100 の循環.

よって, $(2.8)_{10} = (10.11001100\ldots)_2$.

有限桁の 10 進小数であっても, 2 進小数への変換後は循環小数となる場合があります.

# 2 進小数と 8 (16) 進小数との相互変換



2 進小数と 8 (16) 進小数は容易に相互変換できます.

### 2 進小数部と 8 (16) 進数部との対応

2 進小数部の上から各三桁 (各四桁) は 8 (16) 進小数部の上から各一桁に一対一対応する.

つまり, 次の通りに変換するのが比較的容易です.

$2 \to 8(16)$ 進: 上から三桁 (四桁) ずつ変換

$8(16) \to 2$ 進: 各桁を三桁 (四桁) 分に上から変換

# 2 進小数と 8 (16) 進小数との相互変換

appendix

## $(0.110101)_2$ を 8 (16) 進数に変換する

8 進数: 110 と 101 に分割

- $(110)_2 = (2^2 + 2^1)_{10} = (6)_8$
- $(101)_2 = (2^2 + 2^0)_{10} = (5)_8$
- よって $(0.110101)_2 = (0.65)_8$

16 進数: 1101 と 0100 に分割

- $(1101)_2 = (2^3 + 2^2 + 2^1)_{10} = (\mathrm{D})_{16}$
- $(100)_2 = (2^2)_{10} = (4)_{16}$
- よって $(0.110101)_2 = (\mathrm{D4})_{16}$

適切に 0 を補うことに注意してください.

# 2 進小数と 8 (16) 進小数との相互変換

appendix

16 進小数から 2 進小数への変換も容易です.

## $(\mathrm{A.C})_{16}$ を 2 進数に変換する

A が整数部, C が小数部四桁に対応:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= (10)_{10} \\ &= (2^3 + 2^1)_{10} \\ &= (1010)_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathrm{C} &= (12)_{10} \\ &= (2^3 + 2^2)_{10} \\ &= (1100)_2 \end{aligned}$$

なので

$$(\mathrm{A.C})_{16} = (1010.11)_2$$

.

# まとめ



10 進小数と $n$ 進小数の変換は, 整数部と似た考え方が使えます.

- それでもややこしいです.
- テキストによっては端折るものもあります.
- 編入先の教科書や過去問の確認を推奨します.
- 基本情報技術者試験では出題されます.
- 2 進数と 8 (16) 進数の好相性を生かしましょう.