# LaTeX練習課題3

次のタンクに貯まる液体の量は, 次のように求めることができる.

<条件> あるタンクには注ぎ口と排水口がある. どちらも液体を流していると次第に目詰まりする.

メンテナンスを行った後, 一日目には吸入口から10/1[L]タンクに入り, 排出口からは10/2[L]排出される. 二日目にはそれぞれ, 10/2[L]タンクに入り, 10/3[L]排出される. n日目には, 10/n[L]タンクに入り, 10/(n+1)[L]排出される.十分日にちが経つと, 目詰まりにより注ぎ口も排出口も液体の移動が停止する.

<解答>

1日目のタンクの増加量 :

$$\Delta V_1 = 10(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) = 10\frac{2-1}{1\cdot 2} = \frac{10}{2}$$

2日目のタンクの増加量 :

$$\Delta V_2 = 10(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) = 10\frac{3-2}{2\cdot 3} = \frac{10}{6}$$

$$\vdots$$

n日目のタンクの増加量 :

$$\Delta V_n = 10(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n(n+1)}$$

n日目のタンクに貯まった量 :

$$V_n = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \cdots + \Delta V_n = 10(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}) \cdots (6)$$

十分日にちが経ったときは, nが無限になったとみなすことができるので, 式(6)を無限項数まで計算すればよいことになる.

しかしここで, 式の変形前に戻って考えると式(6)は次のように変形できる.

$$\frac{V_n}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$
$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

括弧を外すと隣り合う項が互いに打ち消しあい, 両端の項のみが残る. nが無限大になるとマイナスの項はゼロに近づくので,

$\therefore V_\infty = 10[L]$ の液体が貯まる.