Così la funzione intera di 2ª specie $17 + 6\mathrm{E}\,\frac{x^2}{4}$, proposta dal signor Fontebasso, può esser sostituita dalle due funzioni intere di 1ª specie seguenti:

$$6x^2 + 17 \qquad , \qquad 6x(x+1) + 17.$$

Infatti, secondochè è $x = 2t$ oppure $x = 2t + 1$, abbiamo $\mathrm{E}\,\frac{x^2}{4} = t^2$ oppure $\mathrm{E}\,\frac{x^2}{4} = t(t+1)$; quindi, sostituendo nella funzione data queste due espressioni di $\mathrm{E}\,\frac{x^2}{4}$ e poi mutando t in x, otteniamo appunto quelle due funzioni, le quali forniscono rispettivamente 17 e 15 numeri primi. ponendo nella prima $x = 0, 1, \ldots, 16$ e nella seconda $x = 0, 1, \ldots, 14$.

Dott. Luigi Carlini.

UN'APPLICAZIONE DEL CALCOLO DELLA PROBABILITÀ

alla ricerca sperimentale di un valore approssimato di π

1. Principiamo col tracciare su di un piano un sistema di rette parallele, aventi fra loro una distanza costante a, e lasciamo cadere su questo piano una sbarretta di lunghezza l (l essendo minore di a). Si trova allora che la probabilità che questa sbarretta cada in modo da tagliare una delle parallele è espressa da

$$\frac{2l}{\pi a}.$$

Se l'esperienza è ripetuta più centinaia di volte, il rapporto del numero dei casi favorevoli al numero totale delle cadute sarà sensibilmente uguale a questa frazione, donde risulta una relazione che ci permette di calcolare π.

2. Nel 1855 M. A. Smith (*) d'Aberdeen fece 3204 prove, e ne dedusse $\pi = 3{,}1553$.

Un allievo del prof. De Morgan (**) trovò $\pi = 3{,}137$ dopo 600 prove. Nel 1894 il capitano Fox ricominciò 1120 volte l'esperienza, con qualche precauzione addizionale, ed ottenne il valore medio $\pi = 3{,}1419$. (***)

Io ho ripreso le esperienze di questi autori, ed i risultati da me ottenuti formano l'oggetto della presente memoria.

(*) A. De Morgan, *Budget of Paradoxes*. Londres, 1872, pag. 171-172. (Estratto d'un articolo di De Morgan pubblicato nel 1861.)

(**) *Messenger of Mathematics*. Cambridge, 1873, Vol. II.

(***) W. W. R. Ball, *Récréations et problémes mathématiques des temps anciens et modernes*. 3me édition. Paris, 1898.

3. La prima cosa necessaria per poter fare un gran numero di osservazioni, colla massima sicurezza e col minor tempo possibile, era costruire un apparecchio capace di far cadere con sufficiente rapidità la sbarretta, e registrare automaticamente tanto il numero totale delle cadute, quanto il numero dei casi favorevoli.

L'apparecchio da me ideato, e del quale mi son servito per le esperienze di cui in seguito, consta di tre parti principali:

1°. Un cilindro di lamiera di ferro sottile, dell'altezza di cm. 16 e del diametro alla base di cm. 17, aperto ad un'estremità e fissato per l'altra ad un asse, messo in rotazione da un movimento d'orologeria. Nell'interno di questa scatola cilindrica metto la sbarretta, la quale, mediante due arresti disposti internamente al cilindro stesso lungo due generatrici diametralmente opposte, viene per un certo tratto portata seco dal cilindro nella sua rotazione, e quindi lasciata cadere. Ma qui incontra l'altro arresto, che, a sua volta, la porta in alto e la rilascia cadere, avendosi così una serie non interrotta di cadute per tutto il tempo che dura la rotazione del cilindro. Un contatore, unito al movimento d'orologeria, indica il numero dei giri fatti dal cilindro stesso, e quindi anche, avendosi due cadute della sbarretta per ogni giro, il numero totale delle cadute. Nel mio caso, il cilindro compieva 12 giri al minuto, e quindi avevo 24 cadute della sbarretta.

2°. La seconda parte dell'apparecchio da me usato, è quella che chiamerò la *retina,* consistente in un rettangolo di sottile filo di ferro, di cm. 8 di base e 15 di altezza di cui due lati opposti sono uniti mediante un sistema di fili di ferro sottilissimi, ben tesi, ed esattamente paralleli fra loro ed agli altri due lati del rettangolo. Questa retina vien posta orizzontalmente nell'interno della scatola cilindrica di cui sopra, e fa l'ufficio del sistema di rette parallele tracciate sulla carta, adoprato dagli altri, che, prima di me, si sono occupati dell'argomento.

3°. Non rimane ora che registrare automaticamente il numero dei casi favorevoli. Per questo, la retina è portata da un'asta, mobile intorno ad un asse orizzontale, e fornita all'altro estremo di una punta scrivente. Un'apposita molla preme leggermente questa punta sopra una striscia di carta da telegrafi, che le è fatta scorrere sotto dallo stesso movimento d'orologeria che mette in moto il cilindro. La punta quindi viene a tracciare su questa striscia una linea continua. Supponiamo ora però che la sbarretta, di cui sopra, venga, nel cadere, ad urtare contro uno dei fili della retina: questa che, come ho detto, è mobilissima intorno ad un asse orizzontale, si abbassa, mentre dalla parte opposta la punta scrivente si alza, e la linea da essa tracciata rimane interrotta. Subito però la molla riconduce la punta in contatto colla carta, ed in questo modo ogni caso favorevole ci è segnalato da un'interruzione nella linea.

Così stando le cose, caricato una volta il movimento d'orologeria, possiamo abbandonare l'apparecchio a se stesso, non rimanendoci, alla fine dell'esperienza, che contare le interruzioni sulla striscia, e sostituire questo valore, insieme con quello datoci dal contatore dei giri moltiplicato per 2, nella formula

$$\frac{f}{t} = \frac{2l}{\pi a},$$

dove

f = numero dei casi favorevoli,
t = numero totale delle cadute,
l = lunghezza della sbarretta,
a = altezza della striscia limitata da due fili paralleli della retina,

da cui

$$\pi = \frac{2lt}{af}.$$

4. Ed ecco i risultati da me ottenuti con questo mezzo.

$l = 2{,}5$
$a = 2{,}6$

Cadute		Valore trovato per π
Totali N°.	Favorevoli N°.	
100	60	3,205
500	276	3,483

Da prima avevo unito fra loro i lati minori della retina, di modo che il sistema dei fili paralleli riusciva parallelo alle generatrici del cilindro: in queste condizioni l'approssimazione è stata ben poca, come si può vedere dalla tabella qui unita.

5. Ho avuto invece approssimazione maggiore col disporre la retina trasversalmente, vale a dire coll'unire tra loro i lati maggiori del rettangolo. Qui le esperienze vanno divise in due serie, giacchè, mentre ho mantenuto sempre costante la lunghezza della sbarretta, ho fatto invece variare l'altezza della striscia compresa fra le parallele: ed ecco i risultati ottenuti:

I

Iª Serie $l = 2{,}5$, $a = 2{,}6$

Cadute		Valore trovato per π
Totali N°.	Favorevoli N°.	
100	62	3,101
200	122	3,152
1000	611	3,147
2000	1229	3,126
3000	1840	3,135
4000	2448	3,142

IIª Serie $l = 2{,}5$, $a = 3$

Cadute		Valore trovato per π
Totali N°.	Favorevoli N°.	
100	53	3,144
200	107	3,115
1000	524	3,180
2000	1060	3,1446
3000	1591	3,142
3408	1808	3,1415929
4000	2122	3,1416

Riassumendo, abbiamo che i valori ottenuti più vicini al valore di π sono

CADUTE N°.	VALORE TROVATO PER π
100	3,144
1000	3,147
2000	3,1446
3000	3,142
3408	3,1415929
4000	3,1416

cioè, nel caso di 3408 cadute, con un errore minore di $\frac{1}{5,000,000}$.

MARIO LAZZARINI.

INTORNO AD UNA NOTA DEL PROF. E. DUCCI

Il mio lavoro: *Intorno alla radice quadrata di un numero intero,* pubblicato nell'ultimo fascicolo di questo periodico, ha dato occasione ad una lettera con la quale il prof. E. Ducci mi richiama alla lettura di una sua nota di data anteriore. (*) E mentre nel mio lavoro io trovo che, posto

$$(a+\sqrt{D})^n = P_n + Q_n\sqrt{D},$$

dove a è la radice quadrata a meno di un'unità del numero intero D, la frazione $\frac{P_n}{Q_n}$ è più prossima alla radice di D che non l'ennesima ridotta $\frac{p_n}{q_n}$ dello sviluppo della radice stessa in frazione continua coi numeratori eguali all'unità, il Ducci afferma di avermi prevenuto.

Ho letto la nota del Ducci, ed ecco come stanno le cose. Posto $D = a^2 + r$ e considerando il noto sviluppo

$$\sqrt{a^2+r} = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cdots}}$$

il Ducci osserva che, *quando* $2a$ *è primo con* r, le ridotte del 2° membro sono frazioni irreducibili. Usando le mie notazioni, ciò equivale a dire che, quando $2a$ è primo con r, P_n e Q_n sono primi fra loro. (**)

(*) *Periodico,* anno 1899, pag. 249.

(**) Perchè $\frac{P_n}{Q_n}$ è altresì l'ennesima ridotta dallo sviluppo $a + \cfrac{r}{2a + \cdots}$, come io stesso osservai in una nota anteriore a quella del Ducci (*Periodico,* anno 1898, pag. 41).