Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

DOMINATION d'UNE MESURE PAR UNE CAPACITE.

(Un analogue du théorème de Lebesgue-Nikodym).

Par Gabriel MOKOBODZKI

Soient $(X,\mathcal{B})$ un espace mesurable, μ une mesure $\geqslant 0$, $\mu \neq 0$ bornée sur $(X,\mathcal{B})$, $\mathcal{C}$ une application croissante de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

1) $\mathcal{C}\,(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_n \mathcal{C}\,(A_n)$, $\mathcal{C}\,(\emptyset) = \emptyset$

pour toute suite $(A_n) \subset \mathcal{B}$.

2) Si $A_{n+1} \supset A_n$, $\mathcal{C}\,(\bigcup_n A_n) = \sup \mathcal{C}\,(A_n)$

On suppose que μ est dominée par $\mathcal{C}$ au sens suivant :

$(\mathcal{C}\,(A) = 0) \Longrightarrow (\mu\,(A) = 0)$ $\quad A \in \mathcal{B}$.

On a alors le théorème suivant :

<u>THEOREME</u> : Il existe une suite $(A_n) \subset \mathcal{B}$ et une suite $(k_n) \subset \mathbb{R}^+$ telles que

$\mu\left(\complement \bigcup_n A_n\right) = 0$ et $\mu\,(A_n \cap A) \leqslant k_n \mathcal{C}\,(A_n \cap A)$ $\forall A \in \mathcal{B}$.

Le théorème résultera de plusieurs lemmes.

<u>LEMME 1</u> : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que, pour $A \in \mathcal{B}$ $\mathcal{C}(A) < \eta \Longrightarrow \mu\,(A) < \varepsilon$.

<u>Démonstration</u> : On écarte d'abord le cas, où il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathcal{C}\,(A) \geqslant \alpha$ $\forall A \neq \emptyset$, auquel cas le théorème est vérifié.

Si le lemme 1 n'est pas vrai, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(A_n) \subset \mathcal{B}$ telle que

$\mathcal{C}(A_n) \leqslant \frac{1}{2}n$ et $\mu\,(A_n) > \varepsilon$.

Si $B = \limsup A_n = \bigcap_m (\bigcup_{n \geqslant m} A_n)$ alors $\mathcal{C}\,(B) = 0$ et $\mu\,(B) \geqslant \varepsilon$, contrairement à l'hypothèse faite sur μ et $\mathcal{C}$.

<u>LEMME 2</u> : Pour tout $A \in \mathcal{B}$, tel que $\mu\,(A) > 0$, il existe $A' \subset A$, $A' \in \mathcal{B}$ et il existe n tel que $\mu\,(A') > 0$

et $\mu\,(A' \cap H) \leqslant n\,\mathcal{C}\,(A' \cap H)$ $\forall H \in \mathcal{B}$.

Démonstration : Faisons encore un raisonnement par l'absurde. Si le Lemme 2 était faux, pour tout entier n il existerait une famille maximale, au plus dénombrable, $(A_p^n) \subset \mathcal{B}$ telle que

$$\mu(A_p^n) \geqslant 2^n \mathcal{C}(A_p^n) > 0 \text{ et } A_p^n \cap A_p^n = \emptyset \quad \text{si } p \neq q \quad \text{et}$$

$$\mu(\bigcup_p A_p^n) = \mu(X) = \mu(B_n) \quad \text{où} \quad B_n = \bigcup_p A_n^p$$

On a alors :

$$2^n \mathcal{C}(B_n) \leqslant 2^n \sum_p \mathcal{C}(A_p^n) \leqslant \sum_p \mu(A_p^n) = \mu(X)$$

Si l'on pose $D = \limsup B_n = \bigcap_m (\bigcap_{n \geqslant m} B_n)$

on aura $\mathcal{C}(D) = 0$ et $\mu(D) = \mu(X) \neq 0$, en contradiction avec l'hypothèse faite sur μ et C.

DEMONSTRATION DU THEOREME .

Pour tout borélien $A \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(A) > 0$, il existe $A' \in \mathcal{B}$, $A' \subset A$, $\mu(A') > 0$ et il existe n tel que $\mu(A' \cap H) \leqslant n\, \mathcal{C}(A' \cap H) \quad \forall H \in \mathcal{B}$.

Soit alors (A'_p) une famille maximale, forcément dénombrable, d'ensembles $A' \in \mathcal{B}$,chacun vérifiant, pour un entier n_p convenable,

$$\mu(A'_p \cap H) \leqslant n_p\, \mathcal{C}(A'_p \cap H) \quad \forall H \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \mu(A'_p) > 0.$$

D'après le lemme 2, on a nécessairement $\mu(\bigcup_p A'_p) = \mu(X)$

COROLLAIRE 1: Il existe une mesure μ' équivalente à μ telle que

$$\mu'(A) \leqslant \mathcal{C}(A) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B}.$$

Démonstration : Reprenons la famille (A'_p) ci-dessus et posons

$$\mu' = \sum_p \frac{1}{n_p \cdot 2^p} \mu|_{A'_p} \text{ , on a alors } \mu'(A) \leqslant \mathcal{C}(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}.$$

Laboratoire de Théorie du Potentiel
Equipe de Recherche Associée au CNRS n°294
Université P. et M. Curie
4 Place Jussieu, 75005 Paris